

**定义5.6.** 对离散型随机变量 $(X, Y)$ , 若对所有 $(x_i, y_j)$ , 有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j), \quad \text{即} \quad p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

称随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立.

**习题.** 对二维离散随机变量 $(X, Y)$ , 如果对任何 $(x_i, y_j)$ , 有 $F(x_i, y_j) = F_X(x_i)F_Y(y_j)$  成立, 则有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

**定理5.2.** 若 $X$ 和 $Y$ 独立, 则对任意集合 $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$ , 有事件 $X \in A$ 和 $Y \in B$ 独立.

**例5.3.** 设离散型 $X, Y$ 独立, 求解 $(X, Y)$ 的联合分布律

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $p_{i\cdot}$ |
|------------------|-------|-------|-------|--------------|
| $x_1$            | 1/8   |       |       |              |
| $x_2$            | 1/8   |       |       |              |
| $p_{\cdot j}$    | 1/6   |       |       |              |

**例5.4.** 将两个球 $A, B$ 放入编号为1, 2, 3的三个盒子中, 令 $X$ : 放入1号盒的球数,  $Y$ : 放入2号盒的球数. 判断 $X$ 和 $Y$ 是否独立.

解. 由题意可知

| $X \backslash Y$ | 0   | 1   | 2   | $p_{i\cdot}$ |
|------------------|-----|-----|-----|--------------|
| 0                | 1/9 | 2/9 | 1/9 | 4/9          |
| 1                | 2/9 | 2/9 | 0   | 4/9          |
| 2                | 1/9 | 0   | 0   | 1/9          |
| $p_{\cdot j}$    | 4/9 | 4/9 | 1/9 |              |

由此可到 $P(X = 2, Y = 2) = 0 \neq P(X = 2)P(Y = 2)$ , 所以 $X$ 和 $Y$ 不独立. □

### 5.3 二维连续型随机变量

**定义5.7.** 设二维随机变量的分布函数为 $F(x, y)$ , 如果存在二元非负可积函数 $f(x, y)$ , 使得对任意实数 $(x, y)$ 有 $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v)du dv$ , 称 $(X, Y)$ 为二维连续型随机变量, 称 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度, 或称为随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合概率密度.

根据定义, 很容易得到概率密度函数 $f(x, y)$ 的如下性质:

- 1)  $p(x, y) \geq 0$ .
- 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx dy = 1$ .
- 3)  $f(x, y)$ 在 $(x, y)$ 连续, 则 $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ .

4)  $G$ 为平面上的一个区域, 则点 $(X, Y)$ 落入 $G$ 的概率为

$$P((X, Y) \in G) = \int \int_G p(x, y) dx dy$$

**例5.5.** 设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求 $P(0 < X < 1, 0 < Y < 2)$ .

解. 有概率密度的性质可知

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ce^{-(3x+4y)} dx dy = \frac{c}{12},$$

由此可得 $c = 12$ . 进一步可得

$$P(0 < X < 1, 0 < Y < 2) = 12 \int_0^1 \int_0^2 e^{-(3x+4y)} dx dy = (1 - e^{-3})(1 - e^{-8}).$$

□

**习题.** 二维随机变量 $(X, Y)$ 密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + axy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ . 求 $P(X + Y \geq 1)$ .

给定概率密度 $f(x, y)$ , 下面考虑随机变量 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度, 其定义如下:

**定义5.8.** 二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为 $f(x, y)$ , 则随机变量 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

边缘概率密度的定义完全由边缘分布的定义导出, 即由前面的知识可知 $X$ 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dt = \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy \right) dt.$$

从而得到 $X$ 的边缘密度为

$$f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

**例5.6.** 设 $(X, Y)$ 的概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ . 求 $P(X \leq \frac{1}{2})$ .

解. 当 $0 \leq x \leq 1$ ,  $f_X(x) = 4x(1 - x^2)$ . 所以 $P(X \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x(1 - x^2) dx = \frac{7}{16}$ .

□

关于连续随机变量的独立性, 有如下性质:

**定理5.3.** 设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为 $f(x, y)$ , 随机变量 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ , 如果随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立, 则有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

*Proof.* 由二维连续型随机变量独立性定义有 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ , 其等价于

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(u) f_Y(v) du dv$$

对上式两边同时求导有 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ . □

**例5.7.** 设二维随机变量的密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} cxe^{-y} & 0 < x < y < +\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ . 问 $X$ 与 $Y$ 是否独立.

解.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = c \int_0^{+\infty} dy \int_0^y xe^{-y} dx = c.$$

当 $x > 0$ 时:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_x^{+\infty} xe^{-y} dy = xe^{-x}.$$

所以

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

. 当 $y > 0$ 时:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^y xe^{-y} dx = \frac{1}{2}y^2e^{-y}.$$

□

**例5.8.** 设 $X$ 与 $Y$ 相互独立,  $X$ 服从 $[-1, 1]$ 均匀分布,  $Y$ 服从参数为 $\lambda = 2$ 的指数分布, 求 $P(X + Y \leq 1)$ .

解.  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ,  $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ . 因为 $X, Y$ 相互独立, 所以

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-2y} & -1 \leq x \leq 1, y \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}.$$

所以

$$P(X + Y \leq 1) = \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x} e^{-2y} dy = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4}.$$

□

## 二维正态分布

二维正态分布  $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , 其中

$$\mu = (\mu_x, \mu_y)^\top, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

$\Sigma$  是一个正定的矩阵, 即要求  $|\rho| < 1$ . 正太分布的密度函数为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - \mu)^\top \Sigma^{-1}(\xi - \mu)\right) \quad \xi = (x, y)^\top \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho}{\sigma_x\sigma_y}(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]\right) \end{aligned}$$

其中

$$|\Sigma| = (1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y \\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1/\sigma_x^2 & -\rho/\sigma_x\sigma_y \\ -\rho/\sigma_x\sigma_y & 1/\sigma_y^2 \end{pmatrix}.$$

**定理5.4.** 对二维正态分布,  $\xi = (X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , 其中

$$\mu = (\mu_x, \mu_y)^\top, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix},$$

则边缘分布  $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ .

*Proof.* 根据正太分布的概率密度定义以及边缘密度公式有

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x\sigma_y}(y-\mu_y)]} dy$$

令  $t = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$ , 所以  $dy = \sigma_y dt$ , 则有

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[t^2 - 2\rho t(x-\mu_x)/\sigma_x]} dt = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}.$$

从而完成证明. □

上述定理说明正太分布的边缘分布还是正太分布.

**定理5.5.** 若二维随机变量  $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , 则  $X$  与  $Y$  独立的充要条件为  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$ .

*Proof.* 必要性证明: 当  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$  时, 由上一定理可得:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}[(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2]} = f_X(x)f_Y(y).$$

充分性证明: 利用定义反证即可. □

## 多维正太分布

假设 $n$ 维随机变量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$ 服从正太分布

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad \mu \in \mathbb{R}^n, \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ 正定},$$

其密度函数为

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|} \exp \left( -\frac{1}{2} (\xi - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\xi - \mu) \right)$$

其中 $\xi = (x_1, \dots, x_n)^\top$ .

**定理5.6.** 如果正太分布 $\xi = (X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , 其中

$$\mu = (\mu_x, \mu_y)^\top, \quad \mu_x = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}), \quad \mu_y = (\mu_{y_1}, \mu_{y_2}, \dots, \mu_{y_m}), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sum_{xx} & \sum_{yx} \\ \sum_{xy} & \sum_{yy} \end{pmatrix},$$

那么,

- 边缘分布 $X \sim N(\mu_x, \Sigma_{xx})$ 和 $Y \sim N(\mu_y, \Sigma_{yy})$
- $X$ 与 $Y$ 独立 $\Leftrightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sum_{xx} & 0 \\ 0 & \sum_{yy} \end{pmatrix}$ .