BÀI TẬP LẦN 3

3.1 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1,2,2)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,2,-1)$, $u'_1 = (1,1,2)$, $u'_2 = (1,-2,1)$ $u'_3 = (2,1,4)$.

a) Chứng minh các tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ biết rằng $u = (1,2,3)$.

c) Tìm $v \in \mathbb{R}^3$ biết rằng $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Tìm $[w]_{\mathcal{B}'}$ biết rằng $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

3.2 Cho W là không gian sinh bởi các vectơ $u_1 = (1,0,1,1)$, $u_2 = (1,1,0,1)$, $u_3 = (1,1,1,0)$.

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm mối liên hệ giữa a,b,c,d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy xác định $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a,b,c,d.

c) Đặt $\mathcal{B}' = \{u'_1 = (0,1,2,-3), u'_2 = (2,0,1,3), u'_3 = (0,1,-2,1)\}$. Chứng minh $\mathcal{B}'$ là cơ sở của W và xác định $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

3.3 Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ $u_1 = (1,1,1,2)$, $u_2 = (1,2,1,-1)$ và $u_3 = (2,3,1,1)$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a,b,c,d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a,b,c,d.

c) Cho $u'_1 = (1,1,-1,2)$, $u'_2 = (2,4,1,-2)$, $u'_3 = (1,0,0,5)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

3.4 Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ $u_1 = (1,0,1,-1)$, $u_2 = (1,1,-1,2)$, $u_3 = (1,2,-2,2)$ và $W = \langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a,b,c,d để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a,b,c,d.

c) Cho $u'_1 = (2,1,0,1)$, $u'_2 = (2,3,-3,4)$, $u'_3 = (3,3,-2,3)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

d) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$ biết $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.5 Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm tọa độ $[u]_{\mathcal{B}}$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ của vectơ $u = (2, 1, -1)$.

b) Xác định các vectơ u_1, u_2, u_3 của cơ sở $\mathcal{B}$.