Chương 1

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Chương 1. MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

- Ma trận
- Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- Hệ phương trình tuyến tính
- Ma trận khả nghịch
- Phương trình ma trận

1.1. Ma trận

1. **Định nghĩa và ký hiệu**
2. **Ma trận vuông**
3. **Các phép toán trên ma trận**

Một số ký hiệu

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ là tập hợp các số tự nhiên.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ tập hợp các số nguyên.
- $\mathbb{Q} = \{\dfrac{m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ tập hợp các số hữu tỉ.
- $\mathbb{R}$: Tập hợp các số thực.

1.1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Định nghĩa. Một *ma trận* A cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một bảng chữ nhật gồm m dòng n cột với $m \times n$ phần tử trong $\mathbb{R}$, có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu.

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hay $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- a_{ij} hay A_{ij} là phần tử ở vị trí dòng i cột j của A.
- $M_{m \times n}(\mathbb{R})$: Tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}); \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Định nghĩa. Ma trận cấp $m \times n$ có các phần tử đều bằng 0 được gọi là ***ma trận không***, ký hiệu $\mathbf{0}_{m\times n}$ (hay $\mathbf{0}$).

Ví dụ.

$$\mathbf{0}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa. ***Ma trận vuông*** là ma trận có số dòng bằng số cột.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

▷ $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$: Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}); \quad \mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa. Nếu $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ thì đường chứa các phần tử $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}}$ được gọi là ***đường chéo chính*** (hay ***đường chéo***) của A.

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 5 \\ -2 & \mathbf{-3} & 3 \\ 2 & -2 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông. Khi đó

- Nếu các phần tử nằm dưới đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i > j$) thì A được gọi là ***ma trận tam giác trên***.
- Nếu các phần tử nằm trên đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i < j$) thì A được gọi là ***ma trận tam giác dưới***.
- Nếu mọi phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$) thì A được gọi là ***ma trận đường chéo***, ký hiệu

$$A = \mathrm{diag}(\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}).$$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ 0 & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$.

$$C = \mathrm{diag}(-1, 0, 5) = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix}.$$

Nhận xét. *Ma trận A là ma trận đường chéo khi và chỉ khi A vừa là ma trận tam giác vừa là ma trận tam giác dưới.*

Định nghĩa. Ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1, các phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 được gọi là ***ma trận đơn vị*** cấp n, ký hiệu $\boldsymbol{I_n}$ (hoặc $\boldsymbol{I}$).

Ví dụ.

$$I_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

a) So sánh hai ma trận

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó, nếu $A_{ij} = B_{ij}, \forall i, j$ thì A và B được gọi là ***hai ma trận bằng nhau***, ký hiệu $\boldsymbol{A = B}$.

Ví dụ. Tìm x, y, z để $\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & 1 \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+1 & = & 3y-4; \\ 2x-1 & = & y-1; \\ z & = & 2z+2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1; \\ y & = & 2; \\ z & = & -2. \end{array}\right.$$

b) Chuyển vị ma trận

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi ***ma trận chuyển vị*** của A, ký hiệu $\boldsymbol{A^\top}$, là ma trận cấp $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng, nghĩa là

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ thì } A^\top = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \boldsymbol{a_{12}} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{1n}} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$\text{Nếu } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ \boldsymbol{6} & \boldsymbol{-8} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ thì } A^\top = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{6} & 0 \\ -1 & \boldsymbol{-8} & 4 \\ 4 & \boldsymbol{0} & -3 \\ 5 & \boldsymbol{1} & 6 \end{pmatrix}.$$

Tính chất. *Cho* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i) $(A^\top)^\top = A$;

ii) $A^\top = B^\top \Leftrightarrow A = B$.

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông. Nếu $\boldsymbol{A^\top = A}$ thì ta nói A là ***ma trận đối xứng***.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Hỏi A có là ma trận đối xứng không?

Giải. Ta có $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Suy ra $A = A^\top$. Vậy A là ma trận đối xứng.

c) Nhân một số với ma trận

Định nghĩa. Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa ***tích*** của α với A (ký hiệu αA) là ma trận được xác định bằng cách nhân các phần tử của A với α, nghĩa là

$$(\alpha A)_{ij} := \alpha A_{ij}, \ \forall i, j.$$

Nếu $\alpha = -1$, ta ký hiệu $(-1)A$ bởi $-A$ và gọi là ***ma trận đối*** của A.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Khi đó

1. $2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.
2. $-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Tính chất. *Cho A là ma trận và α, $\beta \in \mathbb{R}$, ta có*

i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

ii) $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$;

iii) $0.A = \mathbf{0}$ *và* $1.A = A$.

d) Tổng của hai ma trận

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó ***tổng*** của A và B, ký hiệu $\boldsymbol{A+B}$, là ma trận được xác định bởi:

$$\boldsymbol{(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}}, \ \forall i, j.$$

Nhận xét. *Để tính $A + B$ thì:*

1. *A và B cùng cấp;*
2. *Các phần tử ở vị trí tương ứng cộng lại với nhau.*

Ký hiệu. $\boldsymbol{A - B} := A + (-B)$ và được gọi là ***hiệu*** của A và B.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $A^\top + 2B$ và $-3A + 2B^\top$.

Giải.

- $A^\top + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.
- $-3A + 2B^\top = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -6 & 0 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 2 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $2A - 5I_3$ và $3A - 2B^\top$.

Tính chất. *Cho* $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *ta có*

i) $A + B = B + A$ (*tính* giao hoán);

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*tính* kết hợp);

iii) $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$;

iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$;

v) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$;

vi) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

viii) $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

e) Tích của hai ma trận

Định nghĩa. Cho hai ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Khi đó, ***tích*** của A với B (ký hiệu $\boldsymbol{AB}$) là ma trận thuộc $M_{m\times p}(\mathbb{R})$ được xác định bởi

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &:= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\\ &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}.\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \dots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \boldsymbol{b_{1j}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \boldsymbol{b_{2j}} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \boldsymbol{b_{nj}} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Nhận xét. *Để tính tích AB thì:*

1. *Số cột của A bằng số dòng của B;*
2. *Phần tử vị trí i, j của AB bằng dòng i của A nhân cột j của B.*

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Tính AB, BA, AC, CA, BC, CB.

Giải.

- $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$
- $$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- AC không tồn tại vì số cột của A không bằng số dòng của C.
- $CA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
- $BC = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -5 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.
- CB không tồn tại vì số cột của A không bằng số dòng của C.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Tính $AB^\top$ và $A^\top B$.

Đáp án. $AB^\top = \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$; $A^\top B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 10 & -12 & 12 \\ 9 & 15 & -18 & 18 \\ -3 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Tính

- a) $AI_2,\ I_3A,\ A\mathbf{0}_{2\times 3},\ \mathbf{0}_{4\times 3}A$;
- b) $(AB)^\top,\ B^\top A^\top$;
- c) $(AB)C,\ A(BC)$;
- d) $A(B+C), AB+AC$;
- e) $(B+C)A^\top,\ BA^\top + CA^\top$.

Giải.

a) $AI_2 = A,\ I_3A = A,\ A\mathbf{0}_{2\times 3} = 0_{3\times 3},\ \mathbf{0}_{4\times 3}A = \mathbf{0}_{4\times 2}$.

b) $AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{(AB)^\top} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}$

$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Suy ra

$$\boldsymbol{B^\top A^\top} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

c) Tính $(AB)C$ và $A(BC)$.

$$\boldsymbol{(AB)C} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ -40 & 16 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}.$$

Ta có $BC = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Suy ra

$$\boldsymbol{A(BC)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ -40 & 16 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}.$$

d) Tính $A(B+C)$ và $AB+AC$.

$$B+C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A(B+C)}=\begin{pmatrix}13 & -3\\ -3 & 10\\ 11 & 0\end{pmatrix}.$$

Ta có $AB=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & -12\\ 4 & -6\end{pmatrix}, AC=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -1 & 22\\ 7 & 6\end{pmatrix}$. Suy ra

$$\boldsymbol{AB+AC}=\begin{pmatrix}13 & -3\\ -3 & 10\\ 11 & 0\end{pmatrix}.$$

e) Tính $(B+C)A^\top$ và $BA^\top+CA^\top$.

$$\boldsymbol{(B+C)A^\top}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\ -3 & -12 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 1 & 26 & 8\end{pmatrix}$$

$BA^\top = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}, CA^\top = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -1 & 18 & 4 \end{pmatrix}$. Suy ra

$$BA^\top + CA^\top = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 1 & 26 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tính chất. *Cho* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ *và* $D_1, D_2 \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó*

i) $I_m A = A$ *và* $AI_n = A$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*

$$I_n A = AI_n = A.$$

ii) $\mathbf{0}_{p\times m} A = \mathbf{0}_{p\times n}$ *và* $A\mathbf{0}_{n\times q} = \mathbf{0}_{m\times q}$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*

$$\mathbf{0}_n A = A\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_n.$$

iii) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

iv) $(AB)C = A(BC)$.

v) $A(B_1+B_2) = AB_1 + AB_2$

$(D_1+D_2)A = D_1A + D_2A.$

f) Lũy thừa ma trận

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông. Khi đó ***lũy thừa*** bậc k của A, ký hiệu $\boldsymbol{A^k}$, được xác định như sau:

$$A^0 := I_n;\ A^1 := A;\ A^2 := AA;\ \ldots;\ A^k := A^{k-1}A.$$

Như vậy $A^k := \underbrace{A\ldots A}_{k \text{ lần}}.$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3, A^5. Từ đó suy ra A^{200}.

Giải. $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = A^4A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{15} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dự đoán $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{3n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được điều này đúng. Suy ra

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{3 \times 200} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{600} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{100}.

Đáp án. Dự đoán $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vậy $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^n với $n > 1$.

Đáp án. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính chất. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó:*

i) $I_n^k = I_n$;

ii) $A^k A^l = A^{k+l}$;

iii) $(A^k)^l = A^{kl}$

g) Đa thức ma trận

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức biến x trên $\mathbb{R}$ (nghĩa là $\alpha_i \in \mathbb{R}\, \forall i \in \overline{0, m}$). Khi đó,

$$f(A) := \alpha_m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

được gọi là *đa thức theo ma trận* A.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Tính $f(A)$.

Giải. Ta có $f(A) = 3A^2 - 2A + 2I_2$ và $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Suy ra

$$f(A) = 3\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -33 \\ -11 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ và $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1$. Tính $f(A)$.

Đáp án. $f(A) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$.

Nhận xét. *Cho A là ma trận vuông. Khi đó các hằng đẳng thức, nhị thức Newton vẫn đúng với A.*

1.2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
2. Ma trận bậc thang
3. Hạng của ma trận

1.2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng***, viết tắt là phép ***BĐSCTD*** trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

- **Loại 1.** Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$.
  Ký hiệu : $\boldsymbol{d_i \leftrightarrow d_j}$
- **Loại 2.** Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$.
  Ký hiệu: $\boldsymbol{\alpha d_i}$
- **Loại 3.** Cộng vào dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$.
  Ký hiệu: $\boldsymbol{d_i + \beta d_j}$

Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\boldsymbol{\varphi(A)}$ là ma trận có được từ A thông qua φ.

Nhận xét. *Với định nghĩa tương tự ta cũng có khái niệm các phép biến đổi sơ cấp trên cột:* $c_i \leftrightarrow c_j$, αc_i, $c_i + \beta c_j$.

Ví dụ. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 + 2d_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 & 8 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận B có được từ A thông qua các phép BĐSCTD $d_1 \leftrightarrow d_3$, $d_2 + 2d_1$, $3d_3$.

Giải.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3d_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} = B.$$

Tương đương dòng

Nhận xét. *Cho A là ma trận và $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Khi đó*

1. *Nếu* $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A$;
2. *Nếu* $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ *thì* $A' \xrightarrow{\frac{1}{\alpha} d_i} A$;
3. *Nếu* $A \xrightarrow{d_i + \beta d_j} A'$ *thì* $A' \xrightarrow{d_i - \beta d_j} A$.

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A ***tương đương dòng*** với B, ký hiệu $\boldsymbol{A \sim B}$, nếu B có được từ A thông qua hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy,

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{Tồn tại các phép BĐSCTD } \varphi_1, \ldots, \varphi_k \text{ sao cho}$$

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B.$$

Nhận xét. *Quan hệ tương đương dòng của ma trận là một quan hệ tương đương, nghĩa là* $\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, ta có:*

1. $A \sim A$ *(tính phản xạ).*
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ *(tính đối xứng).*
3. $A \sim B$ *và* $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ *(tính bắc cầu).*

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} = B$

vì B có được từ A qua lần lượt các phép biến đổi: $d_1 \leftrightarrow d_3$, $d_2 + 2d_1$ và $3d_3$.

Hỏi. Làm cách nào kiểm tra hai ma trận tương đương dòng với nhau?

1.2.2. Ma trận bậc thang

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Phần tử khác 0 đầu tiên của một dòng kể từ bên trái qua được gọi là ***phần tử cơ sở*** của dòng đó.

Ví dụ. Cho ma trận $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{-1} & 2 & 1 \\ \mathbf{3} & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó:

▷ Dòng 1 có phần tử cơ sở là $\mathbf{-1}$, dòng 2 có phần tử cơ sở là $\mathbf{3}$.

▷ Dòng 3 không có phần tử cơ sở.

Định nghĩa. Một ma trận được gọi là ***ma trận bậc thang*** nếu nó thỏa 2 tính chất sau:

1. Các dòng bằng không (nếu có) luôn nằm dưới;
2. Phần tử cơ sở của dòng dưới luôn nằm bên phải so với phần tử cơ sở của dòng trên.

Như vậy ma trận bậc thang có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{a_{1k_1}} & \dots & \dots & a_{1k_2} & \dots & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{a_{2k_2}} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{a_{rk_r}} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Khi đó A là ma trận bậc thang, B không là ma trận bậc thang.

Ma trận bậc thang rút gọn

Định nghĩa. Ma trận A được gọi là *ma trận bậc thang rút gọn* nếu thỏa 3 điều kiện sau:

1. A là ma trận bậc thang.
2. Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
3. Trên cột có chứa phần tử cơ sở, các phần tử không phải phần tử cơ sở đều bằng 0.

Ví dụ. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

▷ C là ma trận bậc thang rút gọn.

▷ D không là ma trận bậc thang rút gọn.

Định nghĩa. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang B thì B được gọi là một ***dạng bậc thang*** của A.

Ví dụ. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & -2 \\ 0 & \mathbf{-1} & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó B là một dạng bậc thang của A vì B có được từ A thông qua các phép biến đổi: $d_2 + 2d_1$, $d_3 - 3d_1$.

Hỏi. Dạng bậc thang của một ma trận có duy nhất không?

Hạng của ma trận

Nhận xét. *Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có số dòng khác không bằng nhau. Ta gọi số dòng khác không này là* ***hạng*** *của A, ký hiệu* $\boldsymbol{r(A)}$.

Mệnh đề. *Cho* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i) $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$;

ii) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$;

iii) *Nếu* $A \sim B$ *thì* $r(A) = r(B)$.

iv) $r(A^\top) = r(A)$;

Định nghĩa. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là ***dạng bậc thang rút gọn của*** A.

Định lý. *Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận A là duy nhất và được ký hiệu $\boldsymbol{R_A}$.*

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận B có được từ A thông qua lần lượt các phép biến đổi: $d_2 + 2d_1$, $d_3 - 3d_1$, $-d_2$ và $d_1 - 2d_2$? Sau đó, kết luận gì về ma trận B.

Đáp án. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rõ ràng B là một ma trận bậc thang rút gọn. Suy ra B là dạng bậc thang rút gọn của A (hay $R_A = B$).

Thuật toán Gauss

Tìm một dạng bậc thang của $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Bước 1. Cho $i := 1, j := 1$.

Bước 2. Nếu $i > m$ hoặc $j > n$ thì kết thúc.

Bước 3.

- Nếu $a_{ij} \neq 0$, thực hiện các phép biến đổi sau:

$$d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \quad \text{với} \quad k > i.$$

  Sau đó $i := i + 1$, $j := j + 1$ và quay về Bước 2.

- Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang Bước 4.

Bước 4.

- Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một $k > i$ nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép biến đổi $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về Bước 3.
- Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k > i$ thì $j := j + 1$ và quay về Bước 2.

Ví dụ. Tìm một dạng bậc thang R của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Từ đó xác định hạng của A.

Giải.

$$A \xrightarrow[d_4 - 6d_1]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 - 2d_1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 - \frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 - \frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Ta có R là một dạng bậc thang với 3 dòng khác không nên A có hạng là $r(A) = 3$.

Lưu ý. Trong quá trình đưa về dạng bậc thang, ta nên sử dụng các phép biến đổi phù hợp để hạn chế việc tính toán các số không đẹp.

Lưu ý. Vì $r(A) = r(A^\top)$ nên trong quá trình tính toán hạng của A ta có thể sử dụng các ***phép biến đổi sơ cấp trên cột***.

Ví dụ.(tự làm) Tìm hạng của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án.

a) $r(A) = 3$

b) $r(B) = 3$

c) $r(C) = 3$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 3$.

Giải.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

Để $r(A) = 3$ thì dòng $(0 \;\; 0 \;\; m-1)$ khác không, nghĩa là

$$m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Suy ra $r(A) = 3$ đúng với mọi $m \neq 1$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & m+1 & m \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 2$.

Giải.

$$A \xrightarrow[d_3+2d_1]{d_2-3d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & m+3 & m+4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3+\frac{m+3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -m-2 \end{pmatrix}.$$

Như vậy để $r(A) = 2$ thì $-m-2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 1 & 2 \\ m & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 2$.

Giải.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 1 & 2 \\ m & 2m & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - md_1]{d_2 - md_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2m+1 & -m+2 \\ 0 & 0 & -m+1 \end{pmatrix}.$$

- Nếu $-2m+1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$, thì $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Suy ra $r(A) = 2$.
- Nếu $-2m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{2}$,
  - ▷ Nếu $-m+1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, thì $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $r(A) = 2$.
  - ▷ Nếu $-m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, thì $r(A) = 3$.

Như vậy để $r(A) = 2$ thì $m = \dfrac{1}{2}$ hay $m = 1$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 2$.

Giải.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - md_1]{d_2 - md_1} \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & -m^2+1 & -m^2+m \\ 0 & -m^2+m & -m^2+1 \end{pmatrix} \quad (\star)$$

- Nếu $-m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

▷ Với $m = 1$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $r(A) = 1$.

▷ Với $m = -1$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Suy ra $r(A) = 3$.

- Nếu $-m^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$. Khi đó

$$(\star) \xrightarrow{d_3 - \dfrac{-m^2+m}{-m^2+1} d_2} \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & -m^2+1 & -m^2+m \\ 0 & 0 & \dfrac{-2m^2+m+1}{m+1} \end{pmatrix}.$$

Ma trận A có $r(A) = 2$ thì

$$\frac{-2m^2+m+1}{m+1} = 0 \Leftrightarrow -2m^2+m+1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 1 & \text{(loại)} \\ m = -\dfrac{1}{2} & \end{array}\right.$$

Vậy, để $r(A) = 2$ thì $m = -\dfrac{1}{2}$.

Phần tiếp theo chúng ta sẽ nói đến thuật toán tìm dạng bậc thang rút gọn của một ma trận.

Thuật toán Gauss-Jordan

Tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Chỉ khác Thuật toán Gauss ở Bước 3, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

- $\dfrac{1}{a_{ij}} d_i.$
- $d_k - a_{kj} d_i$ với mọi $k \neq i$;

Ví dụ. Tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Giải.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-6d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+3d_2]{\substack{-\frac{1}{2}d_2 \\ d_1-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4-\frac{5}{2}d_3]{\substack{d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2-\frac{5}{2}d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.$$

Ta thấy R_A là dạng bậc thang rút gọn của A.

Ví dụ.(tự làm) Tìm dạng bậc thang rút gọn của các ma trận sau:

$a)\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix};$ $b)\begin{pmatrix}4&3&2&2\\0&2&1&1\\0&0&3&3\end{pmatrix};$

$c)\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix};$ $d)\begin{pmatrix}1&3&-2&-1\\2&5&-2&1\\1&1&6&13\\-2&-6&8&10\end{pmatrix}.$

Đáp án. $a)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix};$ $b)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix};$

$c)\begin{pmatrix}1&0&3/2&1\\0&1&-7/2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};$ $d)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$

1.3. Hệ phương trình tuyến tính

1. **Định nghĩa**
2. **Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính**
3. **Giải hệ phương trình tuyến tính**
4. **Định lý Kronecker - Capelli**

Ví dụ. Tìm nghiệm của hệ phương trình sau

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1; \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1; \\ 4x_1 & - & 10x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 1; \\ 2x_1 & - & 14x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & + & 11x_5 & = & -1. \end{array}\right.$$

Định nghĩa. Một *hệ phương trình tuyến tính* trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2; \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right. \qquad (*)$$

trong đó

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$: các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$: các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$.

Nếu $(*)$ có các hệ số tự do bằng 0 thì ta nói $(*)$ là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* trên $\mathbb{R}$.

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ta gọi A là ***ma trận hệ số*** , X là cột các ***ẩn***, B là cột các ***hệ số tự do*** của hệ $(*)$. Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $\boldsymbol{AX = B}$.

Ta gọi

$$\tilde{A} = (A \,|\, B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

là ***ma trận mở rộng*** (hay ma trận bổ sung) của hệ $(*)$.

Ví dụ. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Khi đó:

▷ Ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

▷ Cột các ẩn $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, cột các hệ số tự do $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ta có $AX = B$.

▷ Ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A \,|\, B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$.

1.3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa. Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là ***nghiệm*** của hệ phương trình $(*)$ nếu ta thế $\boldsymbol{x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n}$ thì tất cả các phương trình trong $(*)$ đều thỏa.

Định nghĩa. Hai hệ phương trình được gọi là ***tương đương*** nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nhận xét. *Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:*

- *Hoán đổi hai phương trình cho nhau.*
- *Nhân hai vế của một phương trình với một số khác 0.*
- *Cộng vào một phương trình với một bội của phương trình khác.*

Định lý. *Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.*

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -3; \\ 2x & - & y & + & z & = & 1; \\ x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}\right. \tag{1}$$

Giải. Ta có $\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+d_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_1-3d_3 \\ d_2-5d_3}]{\frac{-1}{7}d_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Như vậy $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 0y & + & 0z & = & 1; \\ 0x & + & y & + & 0z & = & 2; \\ 0x & + & 0y & + & z & = & 1. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1; \\ y & = & 2; \\ z & = & 1. \end{array}\right.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10. \end{array}\right. \tag{2}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Như vậy,

$$(2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & - & 9z & = & 9; \\ & & y & + & 7z & = & -5. \end{array}\right.$$

Ta chọn z là ẩn tự do. Như vậy nghiệm của hệ (2) là

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9+9t; \\ y & = & -5-7t; \\ z & = & t \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 5. \end{array}\right. \tag{3}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

Ví dụ.(tự làm) Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $$\begin{cases} x + 2y - 4z = -1; \\ 3x - 2y + 5z = 6; \\ 5x + 2y - 4z = 3. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x + y + z = 4; \\ x - 3y + 5z = 3; \\ 3x - 2y + 6z = 8. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 4; \\ 2x - y + 4z = 5; \\ 3x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

Đáp án. a) $x = 1,\ y = 1,\ z = 1.$

b) vô nghiệm.

c) $x = \dfrac{14}{3} - \dfrac{11}{3}t,\ y = \dfrac{13}{3} - \dfrac{10}{3}t,\ z = t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Định lý. *Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:*

- *Vô nghiệm;*
- *Duy nhất một nghiệm;*
- *Vô số nghiệm.*

Nhận xét. *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0; \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{cases}$$

luôn có một nghiệm $u = (0, 0, \ldots, 0)$*. Nghiệm này được gọi là* ***nghiệm tầm thường****.*

Lưu ý. Đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, ta có các hệ số tự do bằng 0 và không thay đổi khi ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Do đó, khi giải hệ này ta chỉ cần sử dụng ma trận hệ số.

Ví dụ. Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0; \\ 2x - y + 7z = 0; \\ 5x - y + 16z = 0. \end{cases}$$

Giải.

$$\text{Ta có } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 5 & -1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3+6d_2]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Như vậy hệ ban đầu tương đương với

$$\begin{cases} x \qquad\qquad + 3z = 0; \\ \qquad y \quad - \ \ z = 0. \end{cases}$$

Ta chọn z là ẩn tự do. Như vậy nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x = -3t; \\ y = t; \\ z = t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ.(tự làm) Giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0; \\ 3x - 2y + 4z = 0; \\ 2x - 4y + 5z = 0. \end{cases}$$

Đáp án. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

1.3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Có 2 phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

- Gauss: Đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang
- Gauss - Jordan: Đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang rút ngọn

Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A \,|\, B)$.

Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang R.

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể:

- **Trường hợp 1.** Ma trận R có một dòng là

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \,|\, \neq 0)\,.$$

Khi đó hệ phương trình **vô nghiệm**.

- **Trường hợp 2.** Ma trận R có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{c_{11}} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & \boldsymbol{c_{22}} & \ldots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \boldsymbol{c_{nn}} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

với $c_{ii} \neq 0, \forall i \in \overline{1,n}$. Khi đó hệ phương trình **có nghiệm duy nhất**. Việc tính nghiệm được thực hiện theo thứ tự từ dưới lên trên.

- **Trường hợp 3.** Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có **vô số nghiệm**, và:

  - Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính theo các ẩn tự do và theo thứ tự từ dưới lên trên.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta được ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3-2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \end{array}\right)$$

Hệ vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \tag{2}$$

Giải.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 - 2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right).$$

Ta có $-7z = -7$, suy ra $z = 1$ và

- $y = 7 - 5z = 2;$
- $x = -3 + y + 2z = 1.$

Suy ra nghiệm của hệ (2) là $x = 1, y = 2, z = 1.$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10. \end{array}\right. \tag{3}$$

Giải. Ma trận hóa hệ (3), ta được

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3-2d_2} \left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{1} & 1 & -2 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Như vậy z là ẩn tự do. Cho $z = t \in \mathbb{R}$, ta có

- $y = -5 - 7z = -7t - 5$,
- $x = 4 - y + 2z = 4 - (-5 - 7t) + 2t = 9t + 9.$

Như vậy nghiệm của hệ (3) là

$$\begin{cases} x &= 9+9t; \\ y &= -5-7t; \\ z &= t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \color{blue}{1} & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-4d_1]{\substack{d_2-2d_1\\ d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2-d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+5d_2]{d_3+4d_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \color{red}{8} & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{10}d_3]{d_3 \leftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \color{blue}{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4 - 8d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 7; \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 6; \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2; \\ & & & & & & 2x_4 & = & -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & 2; \\ x_2 & = & 1; \\ x_3 & = & 5; \\ x_4 & = & -3. \end{array}\right.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4, \end{cases}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình ta được

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{d_3+d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{\mathbf{1}} & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_3, x_4. Cho $x_3 = t, x_4 = s$, ta tính được

$$\begin{cases} x_2 = -2 + 10x_3 - 17x_4 = -2 + 10t - 17s; \\ x_1 = 1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 5 - 17t + 29s. \end{cases}$$

Như vậy, hệ có vô số nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - 17t + 29s, -2 + 10t - 17s, t, s)$$

với $s, t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-3d_1]{\substack{d_2-3d_1 \\ d_3+2d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+2d_2]{d_3+3d_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4 - d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z + 0t = 2$.

Phương pháp Gauss - Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A \,|\, B)$.

Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang rút gọn R_A.

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể:

- **Trường hợp 1.** Ma trận R_A có một dòng $(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \ldots 0 \;\; 0 \,|\, \neq 0)$. Kết luận hệ phương trình **vô nghiệm**.

- **Trường hợp 2.** Ma trận R_A có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Khi đó hệ phương trình **có nghiệm duy nhất** là

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n.$$

- **Trường hợp 3.** Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có **vô số nghiệm**, và:

- Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở 1 sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

Số ẩn tự do được gọi là ***bậc tự do*** của hệ phương trình.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

Giải. Ta có $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_1-3d_3 \\ d_2-5d_3}]{-\frac{1}{7}d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Như vậy $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Suy ra $\begin{cases} x & = & 1; \\ y & = & 2; \\ z & = & 1. \end{cases}$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10. \end{cases}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right).$$

Ta có

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -9 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cột 3 không chứa phần tử cơ sở nên z là ẩn tự do. Như vậy nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x &= 9 + 9t; \\ y &= -5 - 7t; \\ z &= t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

Ví dụ.(tự làm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 4; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Đáp án. $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 4.$

Ví dụ.(tự làm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 9x_4 = 3; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1; \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 1. \end{cases}$$

Đáp án. $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.Nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t - 3s; \\ x_2 = t \in \mathbb{R}; \\ x_3 = 2 + s. \\ x_4 = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ví dụ.(tự làm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2; \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

1.3.4. Định lý Kronecker- Capelli

Định lý. *Cho $\tilde{A} = (A \,|\, B)$ là ma trận mở rộng của hệ phương trình gồm n ẩn dạng $AX = B$. Khi đó*

$$r(\tilde{A}) = r(A) \text{ hoặc } r(\tilde{A}) = r(A) + 1.$$

Hơn nữa,

- *nếu $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ thì hệ vô nghiệm;*
- *nếu $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất;*
- *$r(\tilde{A}) = r(A) < n$ thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là $n - r(A)$.*

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 12; \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = m + 15. \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & 10 & m+15 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_1]{d_2-3d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & m+5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3+2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right)$$

Biện luận.

- Với $m \neq 1$, hệ vô nghiệm.
- Với $m = 1$, hệ có vô số nghiệm. Ta có

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_1-d_2]{-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Do đó nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 & = & 2-t; \\ x_2 & = & 3-2t; \\ x_3 & = & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -2; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 + (m^2 - m + 3)x_3 = m + 2. \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -7 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & m^2 - m + 3 & m + 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3+d_1]{\substack{d_1+3d_2 \\ d_2+d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m^2 - m + 2 & m + 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3-2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m^2 - m & m - 1 \end{array}\right)$$

Biện luận.

- Với $m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0; \\ m = 1. \end{array}\right.$

+ Khi $m = 0$, hệ vô nghiệm.

+ Khi $m = 1$, hệ có vô số nghiệm. Ta có

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Do đó nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 + t; \\ x_2 & = & 2 - t; \\ x_3 & = & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Với $m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0; \\ m \neq 1. \end{cases}$ Khi đó hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{m+1}{m}; \\ x_2 & = & \dfrac{2m-1}{m}; \\ x_3 & = & \dfrac{1}{m}. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4, \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 - d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & m - 1 \\ 0 & -1 & 3 & m - 8 & m^2 - 6m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 + d_2]{d_3 + 2d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m + 1 \\ 0 & 0 & 1 & m - 6 & m^2 - 6m + 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4 - d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{m-7} & m^2-7m \end{array}\right).$$

Biện luận.

- Với $m = 7$, hệ có vô số nghiệm. Ta có

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Do đó nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 & = & -8+t; \\ x_2 & = & 17-4t; \\ x_3 & = & 8-t; \\ x_4 & = & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Với $m \neq 7$, hệ có nghiệm duy nhất. Ta có

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3-2\,m \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right)$$

Do đó nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 & = & -1; \\ x_2 & = & 3-2m; \\ x_3 & = & 1; \\ x_4 & = & m. \end{cases}$$

Ví dụ.(tự làm) Cho hệ phương trình với ma trận mở rộng là

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & m & m+1 \end{array}\right).$$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ.(tự làm) Cho tham số thực m và hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -3; \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + mx_4 = 10; \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + (m+1)x_4 = 14. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$;

b) Tìm điều kiện m để hệ vô nghiệm.

Ví dụ.(tự làm) Cho hệ phương trình với ma trận mở rộng là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & m & m-1 \end{array}\right)$$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

1.4. Ma trận khả nghịch

1. **Định nghĩa**

2. **Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch**

1.4.1 Định nghĩa

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A ***khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận B sao cho
$$\boldsymbol{AB = BA = I_n}.$$
Nếu B thỏa điều kiện trên được gọi là ***ma trận nghịch đảo*** của A.

Mệnh đề. *Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là* $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Định lý. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = I_n$ **hay** $BA = I_n$. Khi đó $A^{-1} = B$.*

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Nhận xét.

- (a) *Ma trận đơn vị* I_n *khả nghịch và* $I_n^{-1} = I_n$.
- (b) *Nếu* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *có một dòng hay một cột bằng không thì* A *không khả nghịch.*

Mệnh đề. *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Giả sử* A *khả nghịch và có nghịch đảo là* A^{-1}. *Khi đó*

- (i) A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (ii) $A^\top$ *khả nghịch và* $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αA *khả nghịch và* $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.

Mệnh đề. *Cho* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. *Nếu* A *và* B *khả nghịch thì* AB *cũng khả nghịch, hơn nữa*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.4.2. Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

1. *A khả nghịch.*
2. $r(A) = n$.
3. $A \sim I_n$.
4. *Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n:*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, sẽ biến ma trận đơn vị I_n thành ma trận nghịch đảo A^{-1}:

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A \,|\, I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A \,|\, I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1 \,|\, B_1) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p \,|\, B_p) \longrightarrow \cdots .$$

Trong quá trình biến đổi nếu xuất hiện ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng không thì A không khả nghịch.

Ngược lại ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(I_n \,|\, B)$. Khi đó A khả nghịch và $A^{-\mathbf{1}} = B$.

Lưu ý. Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận A có khả nghịch hay không thì ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng thuật toán Gauss).

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 5d_1]{\substack{d_1 - 3d_2 \\ d_2 - 2d_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & -5 & 15 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 - 2d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2 - 5d_3]{d_1 + 2d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(I_3 \mid A^{-1}\right)$$

Suy ra A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của B và tìm B^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(B\,|\,I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_1]{d_2+2d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-d_2]{\substack{d_1+2d_2 \\ d_3-d_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 21 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -2 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Suy ra $r(B) = 2 < 3$. Như vậy B không khả nghịch.

Ví dụ. Tìm tất cả các giá trị m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. Tìm hạng của A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-4 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-4 \\ 0 & 0 & -m-1 \end{pmatrix}$$

Ta có A khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = 3$. Do đó để A khả nghịch thì

$$-m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}.$$

Giải.

$$(A \,|\, I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 - 2d_1 \\ d_3 - 3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_3]{\substack{d_1-7d_3 \\ d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_4]{\substack{d_1+d_4 \\ d_2-d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(I_4 \,|\, A^{-\mathbf{1}}\right).$$

Như vậy, A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A \,|\, I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-4d_1]{\substack{d_2-2d_1\\ d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-3d_2]{d_3-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0\\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ta có $r(A) < 4$. Suy ra A không khả nghịch.

Ví dụ.(tự làm) Xét tính khả nghịch của hai ma trận sau và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có)

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ -2 & 5 & -8 & 3 \end{pmatrix}$.

Đáp án. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -16 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5. Phương trình ma trận

Định lý. *Cho các ma trận* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ *khả nghịch và* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

1. $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$;
2. $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$;
3. $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}$.

Ví dụ. Giải phương trình $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình có dạng $AX = B$. Ta có A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Giải phương trình $X\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình có dạng $XA = B$. Ta có A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19 & 11\\-21 & 13\end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận X thỏa

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}.$$

Giải. Phương trình có dạng $AXB = C$. Ta có A, B khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} X = A^{-1}CB^{-1} = & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ -11 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tìm ma trận X thỏa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$. Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_5 & x_2 + 2x_4 - x_6 \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 & -2x_2 - 3x_4 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Suy ra hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 &= 1; \\ x_2 + 2x_4 - x_6 &= -2; \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 &= -1 \\ -2x_2 - 3x_4 + x_6 &= 1. \end{cases}$

Ma trận hóa hệ phương trình ta được

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1 = -1 - t; \\ x_2 = 4 - s; \\ x_3 = 1 + t; \\ x_4 = -3 + s; \\ x_5 = t; \\ x_6 = s. \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Vậy $X = \begin{pmatrix} -1-t & 4-s \\ 1+t & -3+s \\ t & s \end{pmatrix}$ với t, s tự do.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$$

Giải. Hệ phương trình được viết lại dưới dạng $AX = B$ trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Do đó

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Ví dụ.(tự làm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Đáp án. $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$.

Ví dụ.(tự làm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Đáp án. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -3$.