BÀI TẬP LẦN 2

2.1 Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho

$$S = \{u_1 = (1,0,2,1\}, u_2 = (1,0,4,4)\}.$$

Chứng tỏ S độc lập tuyến tính và thêm vào S một số vectơ để S trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

2.2 Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho W sinh bởi

$$S = \{u_1 = (1,2,1,2), u_2 = (2,1,1,2), u_3 = (3,0,1,2), u_4 = (5,7,4,8)\}.$$

Tìm một tập con của S để là cơ sở của W?

2.3 Cho W_1 là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 0; \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

và W_2 là không gian sinh bởi $\{v_1, v_2\}$ với $v_1 = (0,-1,4,1), v_2 = (1,-1,2,0)$.

a) Tìm một cơ sở của không gian W_1.

b) Tìm một cơ sở của không gian $W_1 + W_2$.

2.4 Cho W_1 là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

và W_2 là không gian sinh bởi $\{v_1 = (1,2,2,1); v_2 = (3,-2,2,1)\}$.

a) Tìm một cơ sở của không gian W_1.

b) Tìm một cơ sở của không gian $W_1 + W_2$.

c) Tìm số chiều của không gian $W_1 \cap W_2$.

2.5 Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (3,2,-1)$, $u_2 = (2,0,1)$, $u_3 = (-1,-1,1)$, $v_1 = (2,1,-1)$, $v_2 = (-1,1,-2)$, $v_3 = (1,2,m)$.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm điều kiện m để $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

2.6 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho W là không gian sinh bởi hai vectơ $u_1 = (2,1,2)$ và $u_2 = (3,1,1)$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = (\, u_1, u_2 \,)$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Tìm điều kiện của a,b,c để $u \in W$. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a,b,c.

c) Cho $v_1 = (3,2,5)$ và $v_2 = (1,1,3)$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{C} = (\, v_1, v_2 \,)$ là cơ sở của W.

d) Tìm $[u]_{\mathcal{C}}$ biết $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.