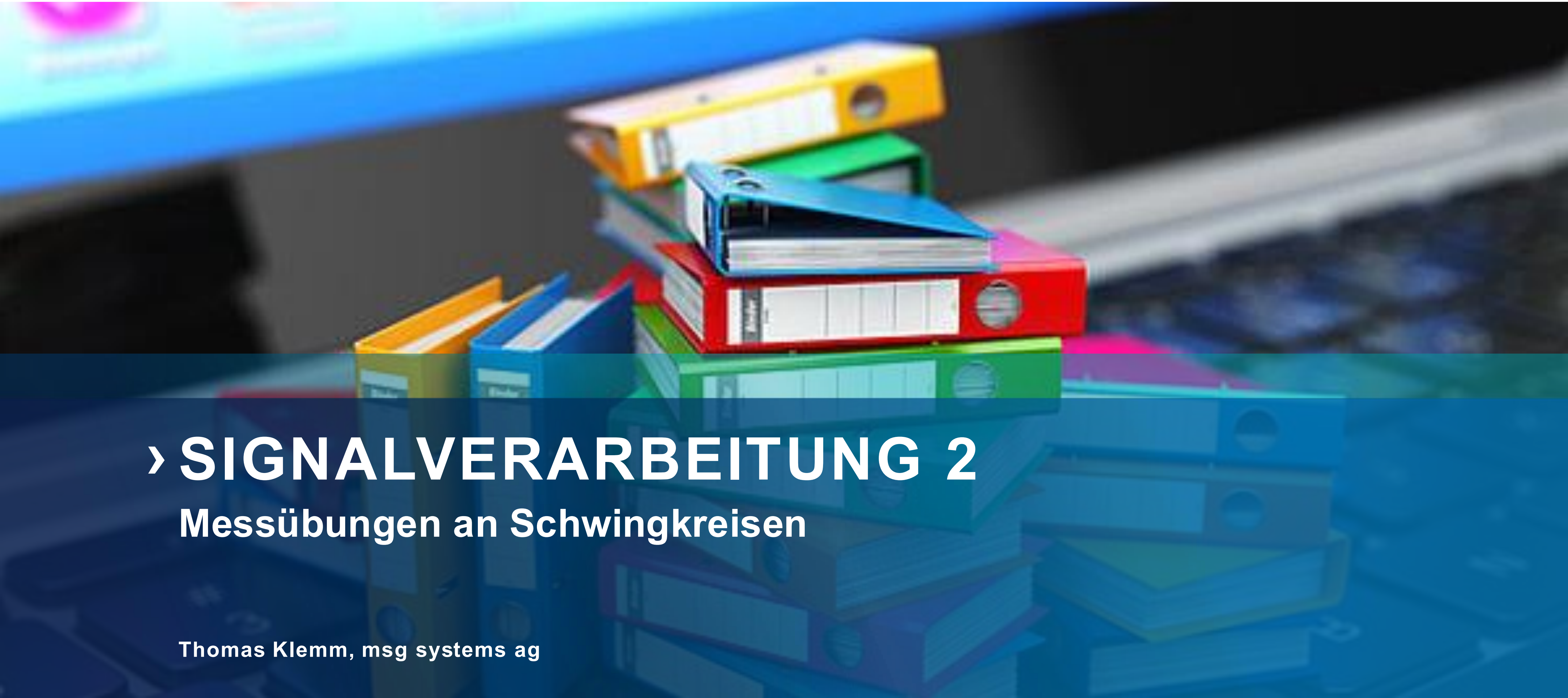
Campus Sontheim

HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

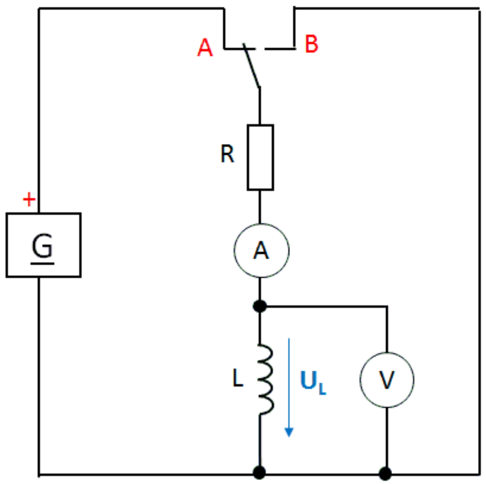


› SIGNALVERARBEITUNG 2

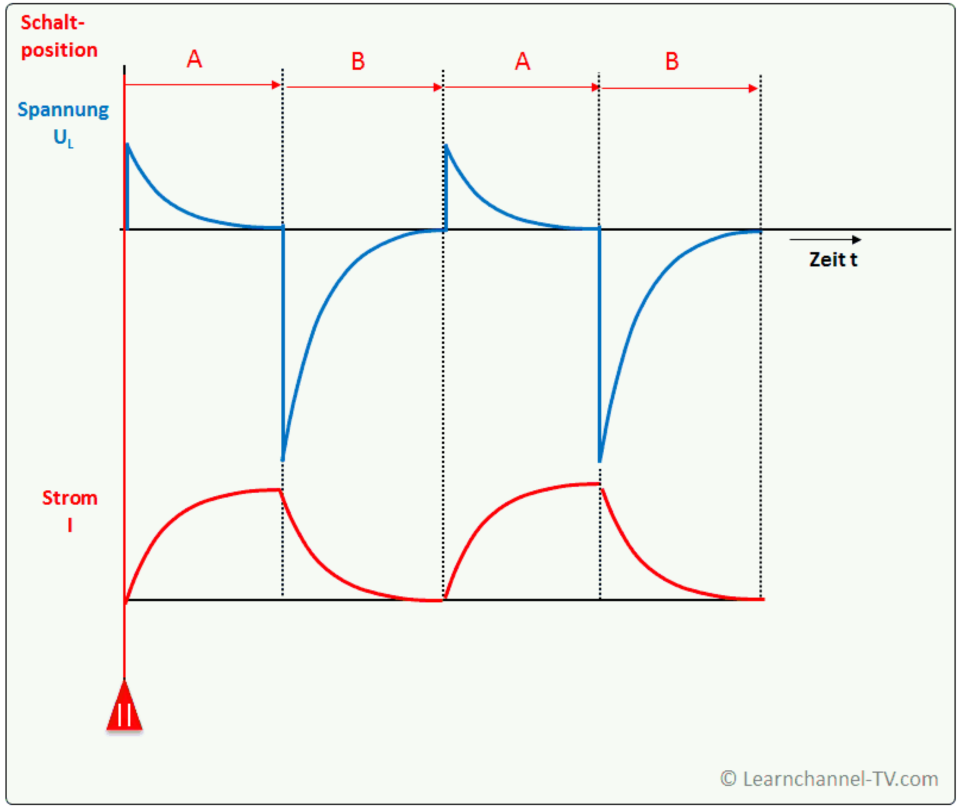
Messübungen an Schwingkreisen

Thomas Klemm, msg systems ag

EIN-/AUSSCHALTVERHALTEN EINER INDUKTIVITÄT



Schaltstellung A:
Magnetfeld der Spule wird aufgebaut, d.h. die Spule nimmt Energie auf.



ANWENDUNGEN FÜR SCHWINGKREISE

Mit Schwingkreisen lassen sich aufbauen

Filter zum Extrahieren eines Signals einer bestimmten Frequenz (vgl. Amplitudenmodulation)

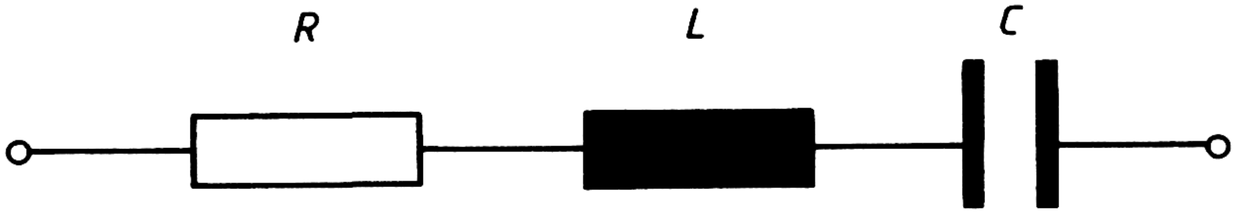
Frequenzweichen (z.B. für Lautsprecherboxen)

Tongeneratoren

Analysatoren zum Zerlegen eines komplexen Signals in die Bestandteile seines Spektrums

REIHENSCHALTUNG AUS WIDERSTAND, KONDENSATOR UND SPULE

Reihenschwingkreis



Nach den *Kirchhoffschen Regeln* addieren sich dabei die Widerstandsoperatoren der drei Schaltelemente zum Widerstandsoperator $\underline{Z}$ des Gesamtkreises (ω: Kreisfrequenz der angelegten Wechselspannung):

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

RESONANZ

Noch einmal: Reihenschwingkreis

Betrag der Impedanz

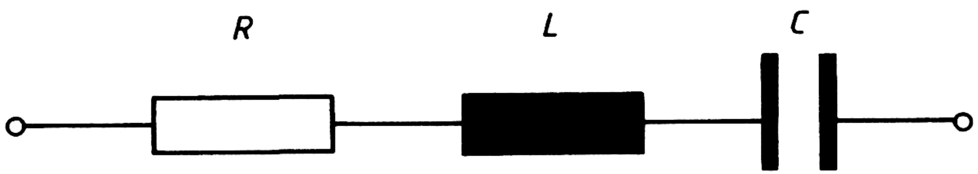
$$\left|\underline{Z}\right| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

wird **minimal** für

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

f_0 ist die **Resonanzfrequenz** des Schwingkreises.



Nach den *Kirchhoffschen Regeln* addieren sich dabei die Widerstandsoperatoren der drei Schaltelemente zum Widerstandsoperator $\underline{Z}$ des Gesamtkreises (ω: Kreisfrequenz der angelegten Wechselspannung):

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

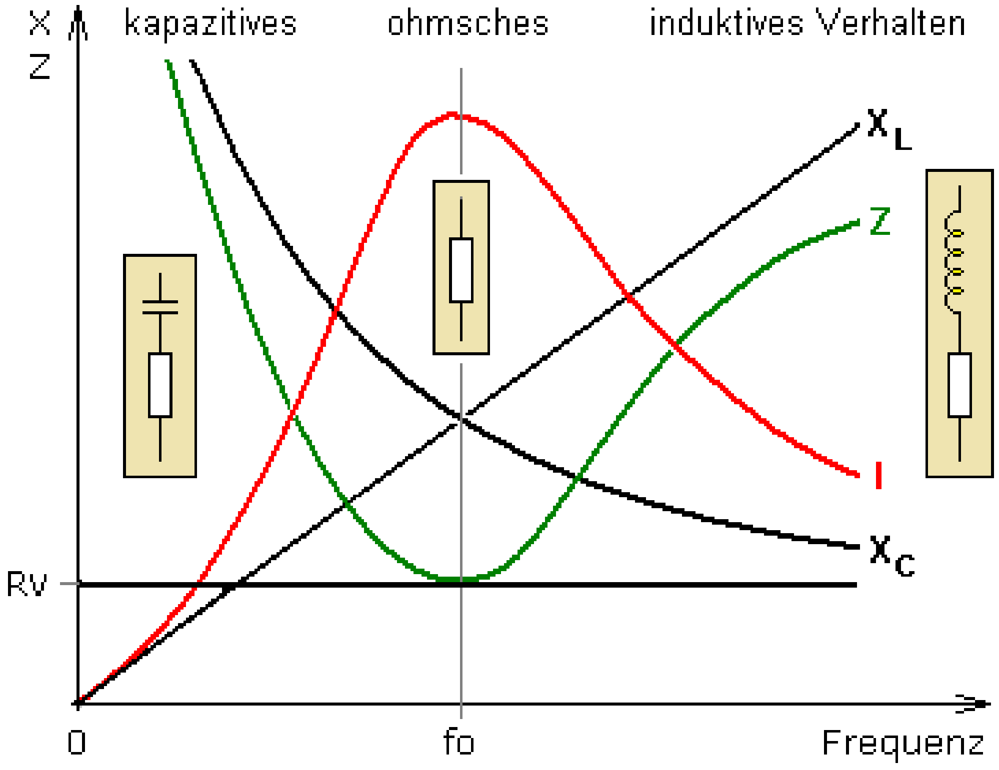
HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

FREQUENZABHÄNGIGES VERHALTEN EINES REIHENSCHWINGKREISES

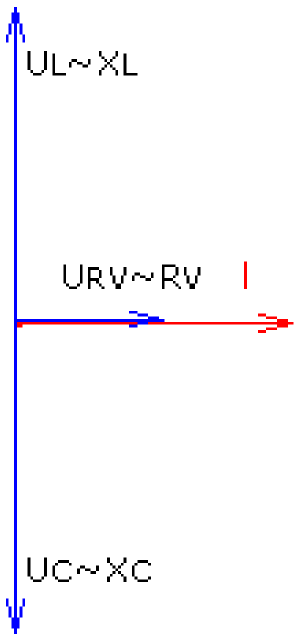
Resonanzfrequenz:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

➔ Blindwiderstand verschwindet!



Frequenzverhalten der Widerstände beim Reihenschwingkreis
Stromdurchlasskurve des Reihenkreises bei U=konst

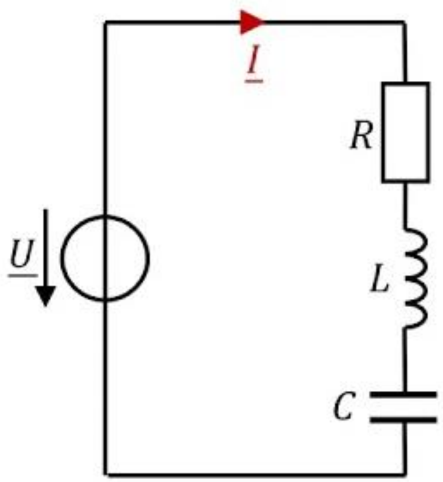


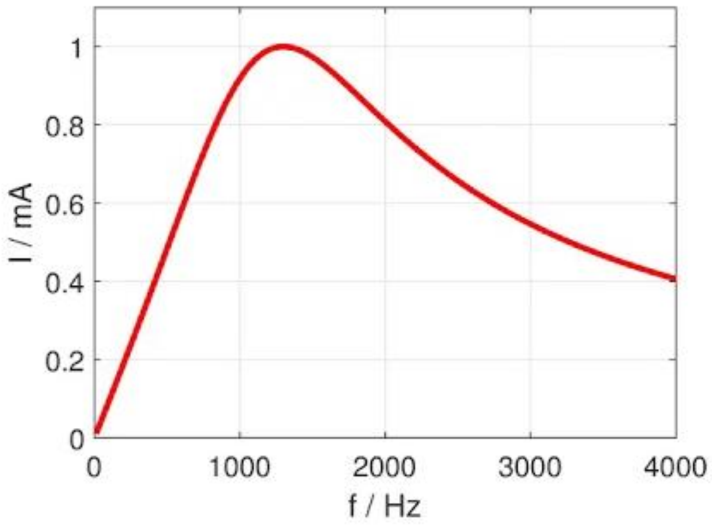
Zeigerdiagramm
bei Resonanz

FREQUENZABHÄNGIGKEIT

Induktions- und kapazitäts-dominierte Bereiche

Resonanzfrequenz: Minimaler Widerstand, maximaler Strom





$R = 1000\ \Omega$

$L = 100\ \mathrm{mH}$

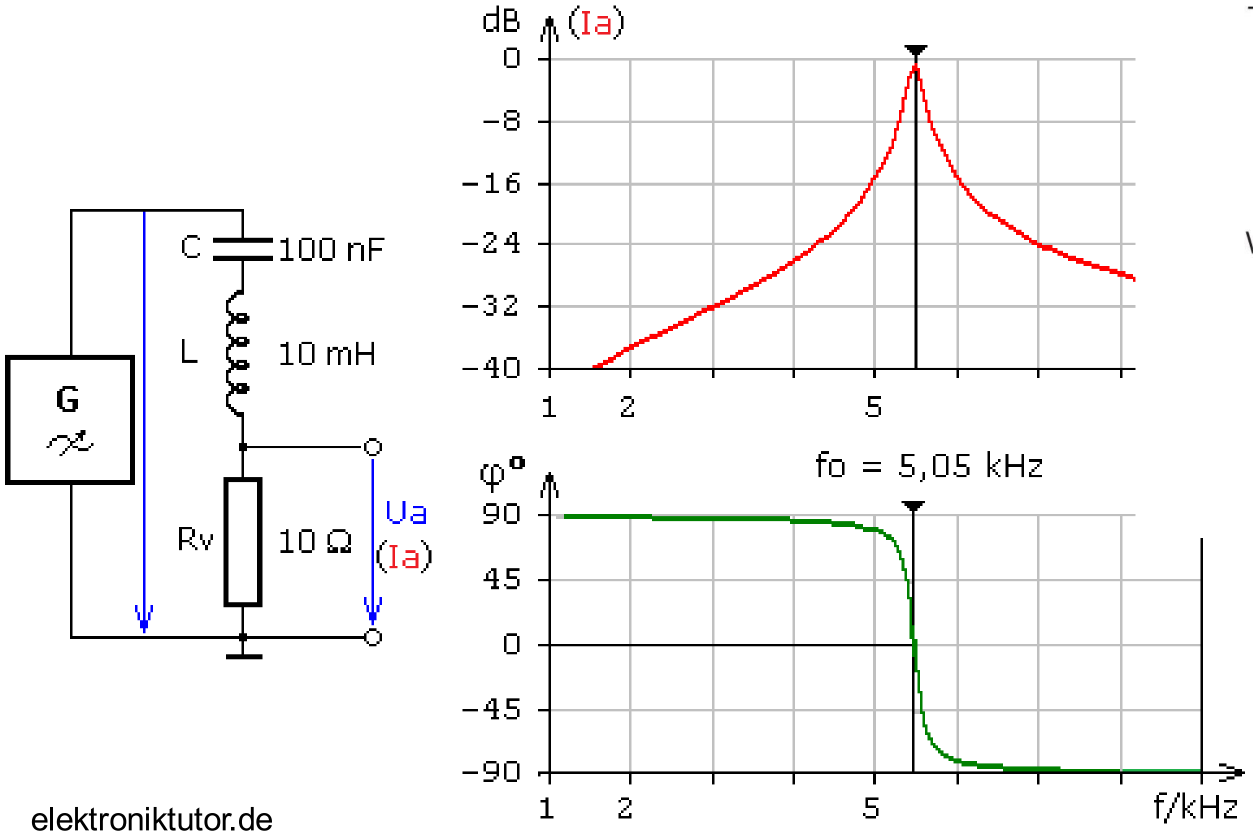
$C = 0{,}15\ \mu\mathrm{F}$

$U = 1\ \mathrm{V}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100\ \mathrm{mH} \cdot 0{,}15\ \mu\mathrm{F}}} = 8165\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

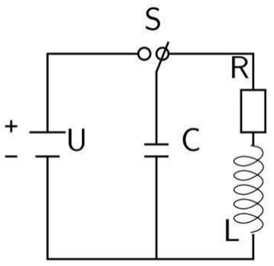
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{8165\,\frac{1}{s}}{2\pi} = 1300\ \mathrm{Hz}$$

$$Y=\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$$



elektroniktutor.de

Der elektrische Schwingkreis

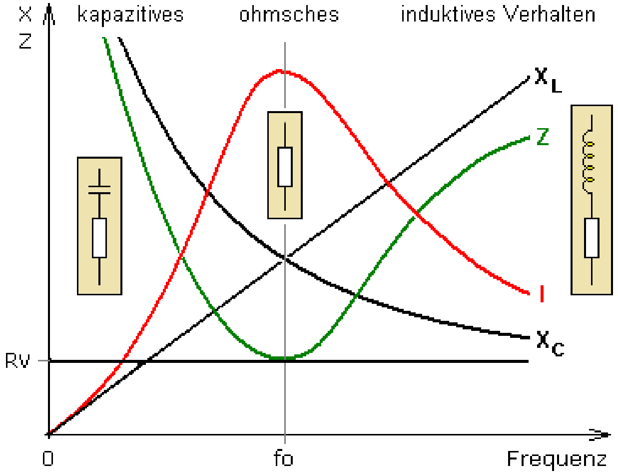


Nach Aufladen des Kondensators C wird der Schalter S in die hier angedeutete Lage gekippt. Dadurch fließt ein Strom durch den Widerstand R und die Spule L. Zur Zeit $t=0$ sei die Ladung Q_0 auf dem Kondensator $Q_0=CU_{C,0}$ und nach Kirchhoff gilt

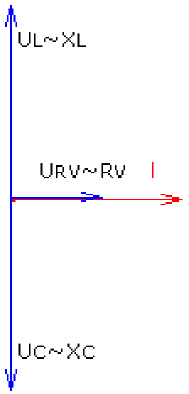
$$\begin{aligned} U_L+U_R+U_C &= 0, \quad \text{bzw.}\\ L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{Q}{C} &= 0. \end{aligned}$$

Weil aber $I=dQ/dt$, gilt

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C}=0,$$



Frequenzverhalten der Widerstände beim Reihenschwingkreis
Stromdurchlasskurve des Reihenkreises bei U=konst



Zeigerdiagramm
bei Resonanz

GÜTE EINES REIHENSCHWINGKREISES

Der Gütefaktor eines Schwingkreises gibt an, wie viel Energie in Form von Wärme verloren geht:

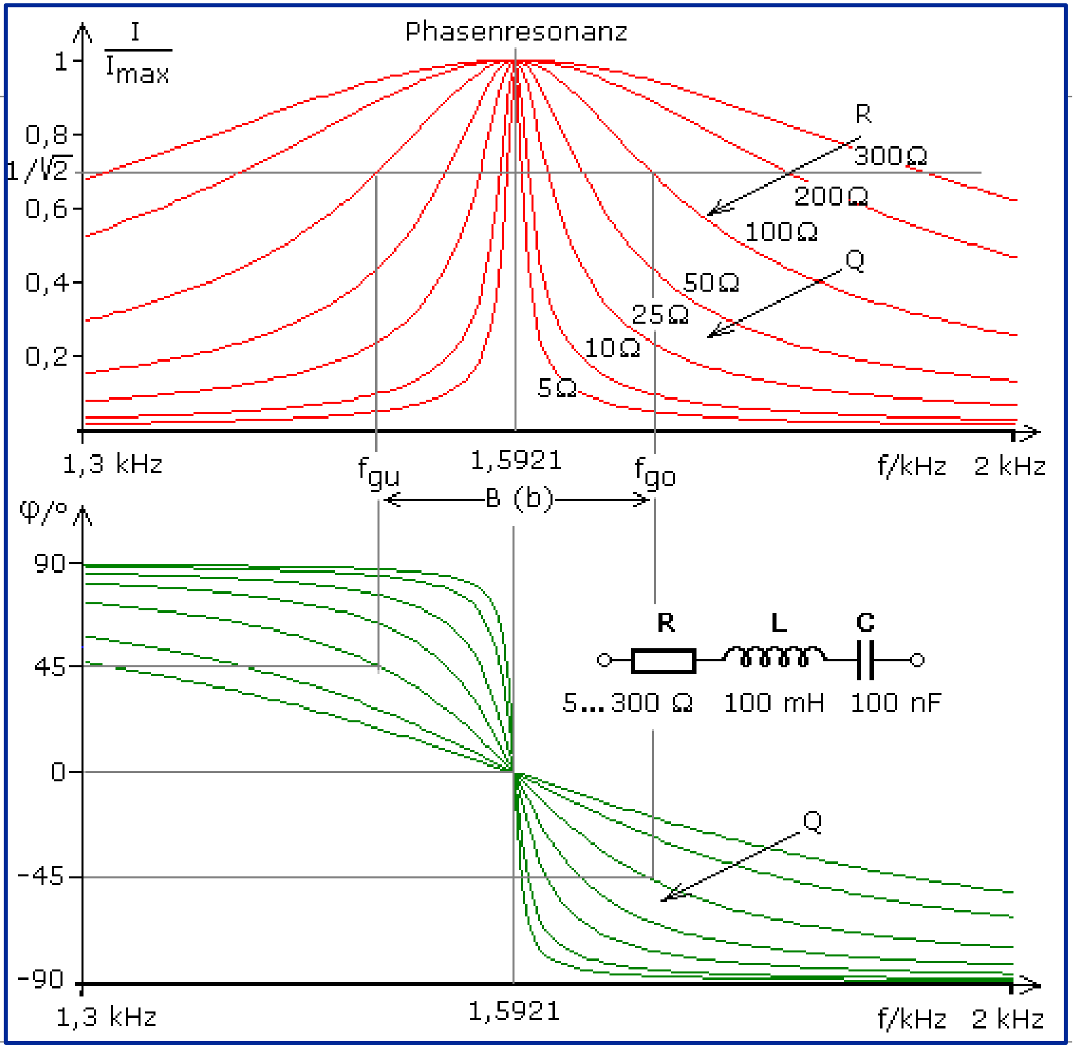
$$Q = \frac{\omega \cdot \text{gespeicherte Energie}}{\text{Verlustleistung}}$$

Speziell im Reihenschwingkreis gilt (im Resonanzfall $X_L = X_C = X$):

$$Q = \frac{P_Q}{P_W} = \frac{X}{R}$$

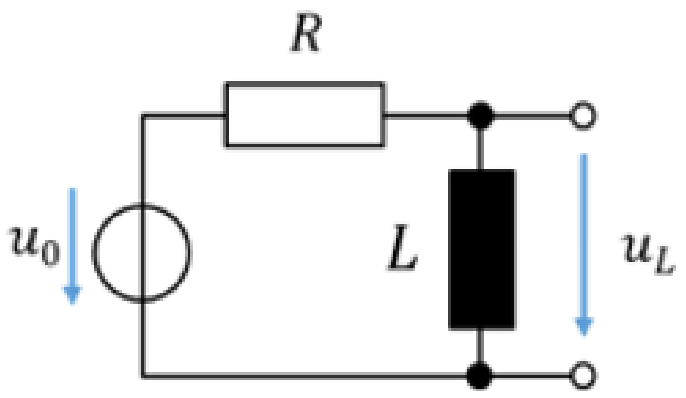
Dabei ist P_W die Wirkleistung, P_Q die Blindleistung.

➔ **Je größer die Güte, desto schmaler die Bandbreite.**



HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

HOCHPASSFILTER: IMPEDANZ UND ÜBERTRAGUNGSFUNKTION



Der Strom ist überall gleich, im Widerstand wie in der Spule.

Daher gilt:

$$\frac{u_L}{\underline{X}_L} = \frac{u_0}{R+\underline{X}_L} \Rightarrow u_L = u_0 \cdot \frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L} = u_0 \cdot \frac{\mathrm{j}\omega \cdot L/R}{1+\mathrm{j}\omega \cdot L/R}$$

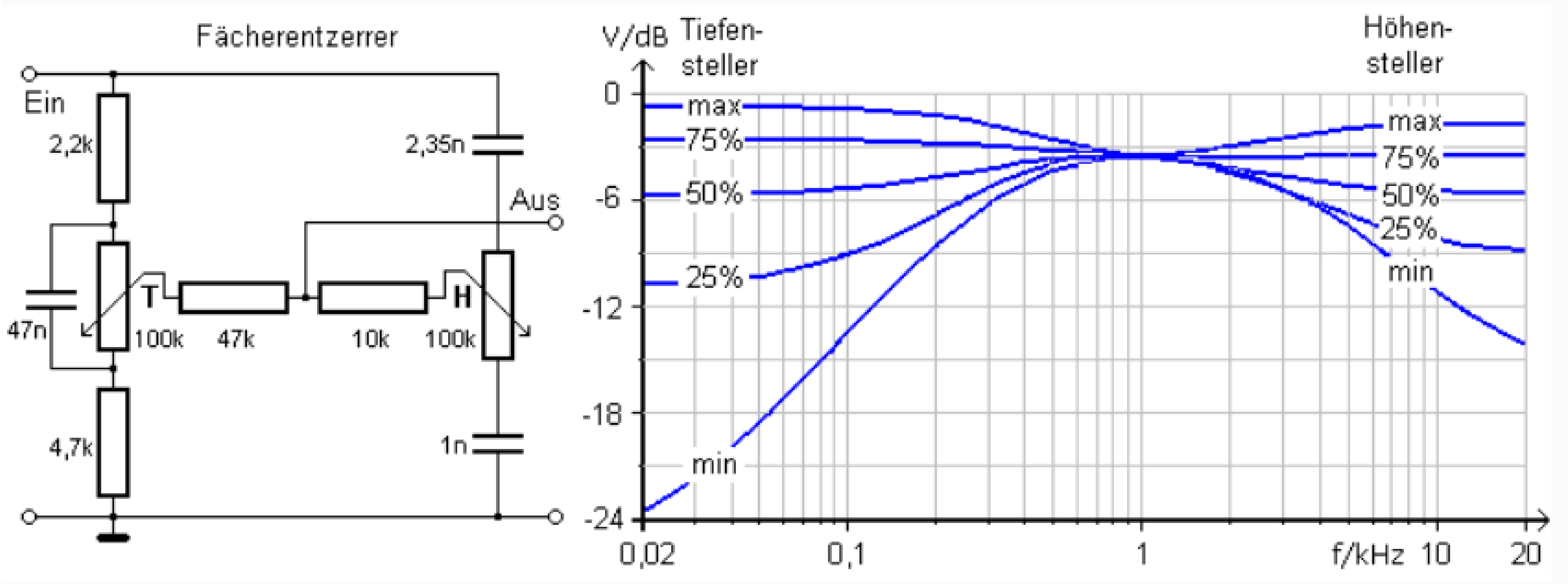
Mit der sog. Grenzfrequenz $\omega_0 = \frac{R}{L}$ ergibt sich für die Übertragungsfunktion H:

$$H = \frac{u_L}{u_0} = \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Eingangsspannung:

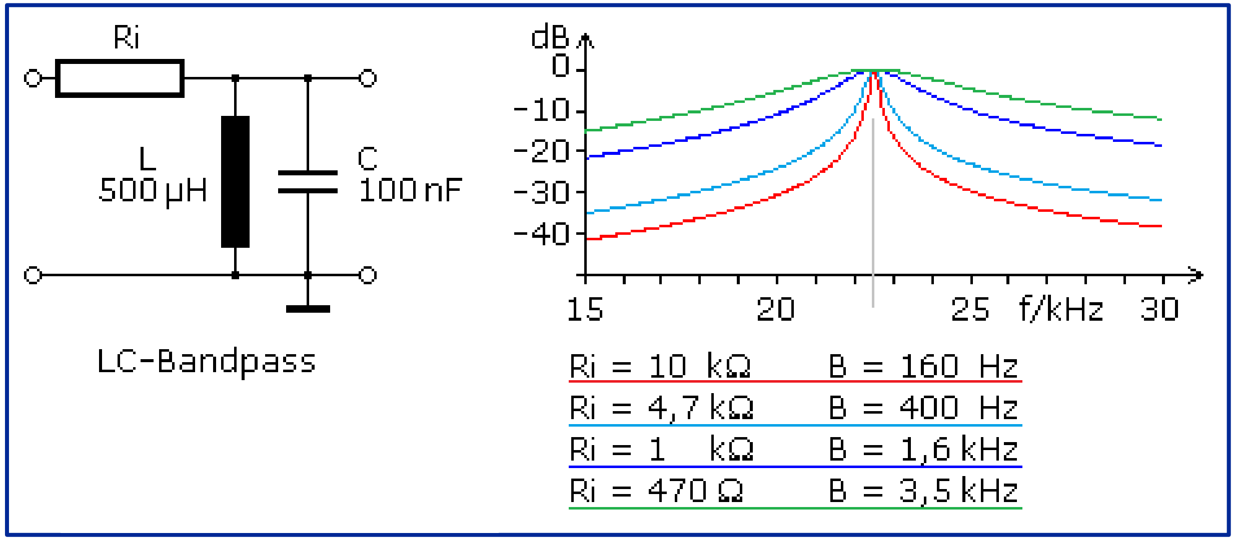
$$u_0(t) = \hat{u}_0 e^{\mathrm{j}\omega t}$$

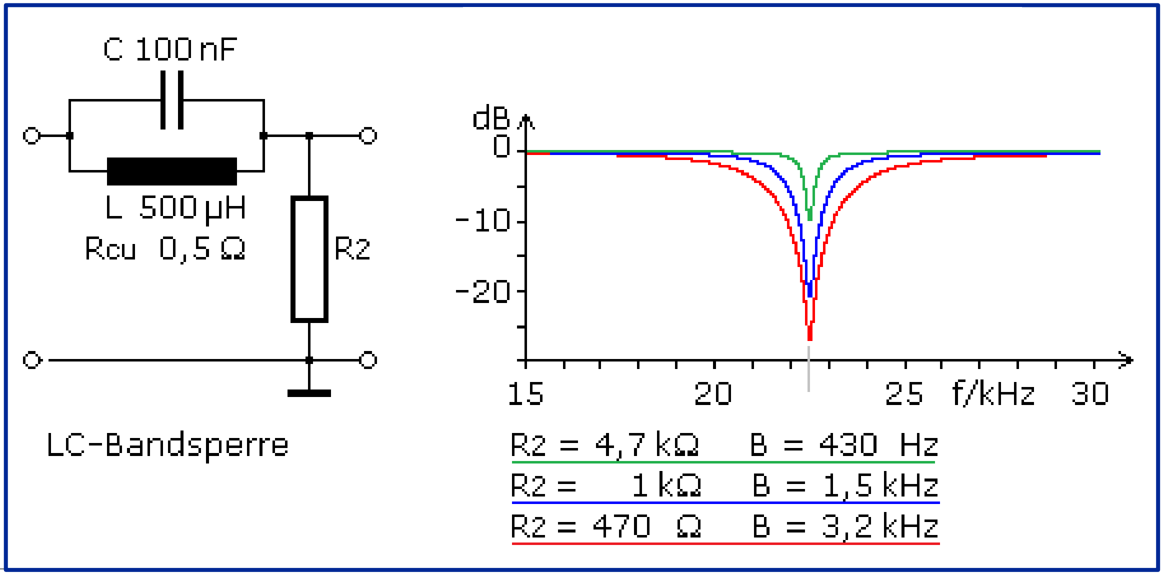
KLANGREGLER FÜR AUDIOGERÄTE



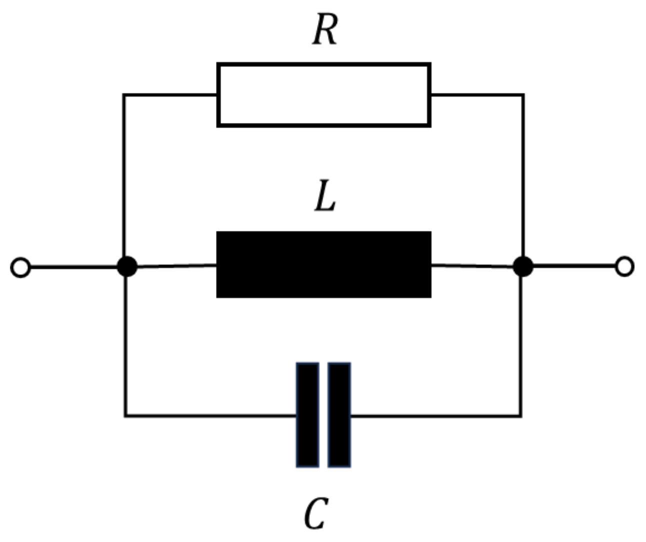
HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

WEITERE BEISPIELE: LC-BANDPASS UND -BANDSPERRE





PARALLELSCHALTUNG AUS WIDERSTAND, KONDENSATOR UND SPULE



Berechnung des Gesamtwiderstandes

➔ Summe der **komplexen** Leitwerte $\underline{G} = \frac{1}{\underline{Z}}$:

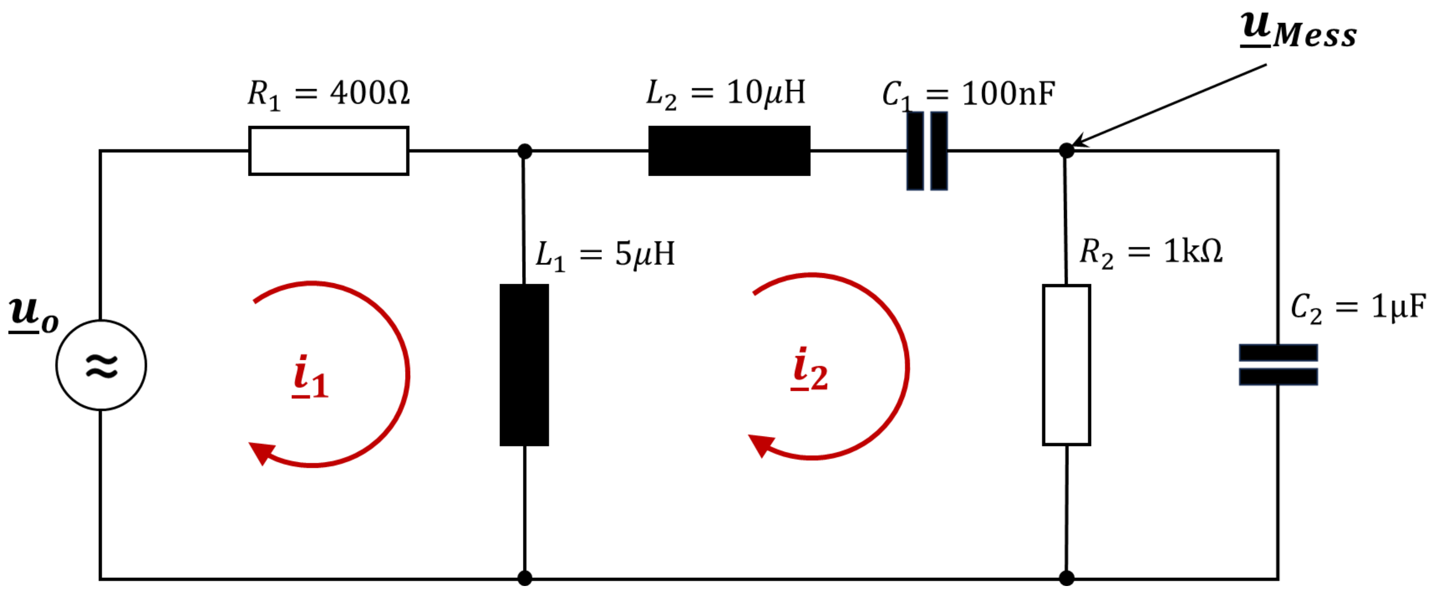
$$G_{ges} = \frac{1}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} + j\omega C$$

➔ aufgelöst nach dem Gesamtwiderstand:

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{R \cdot \underline{Z}_L \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L \underline{Z}_C + R\underline{Z}_C + R\underline{Z}_L}$$

HEILBRONN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

NETZWERK AUS KOMPLEXEN WIDERSTÄNDEN



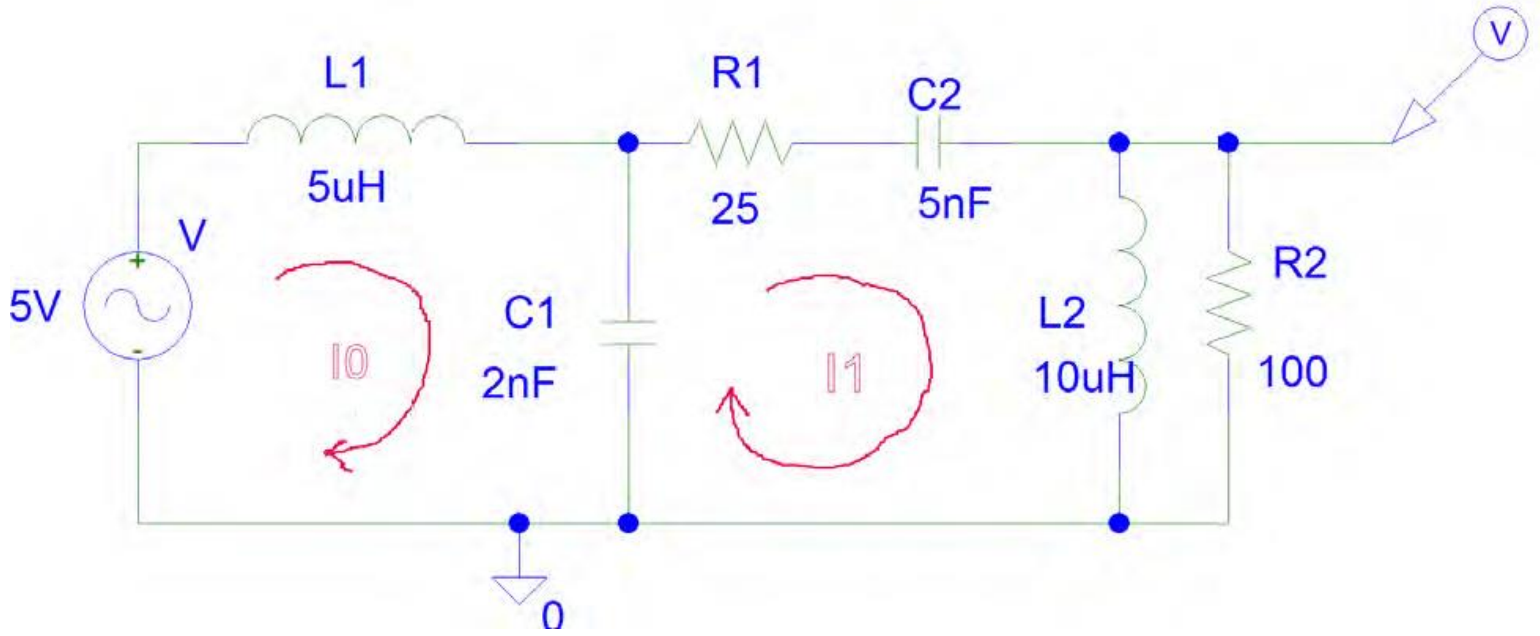
Berechnung der Ströme mithilfe der Kirchhoff‘schen Regeln:

1. Summe der Spannungen in einer Masche ergibt 0
2. Summe der Ströme in einem Knoten ergibt 0

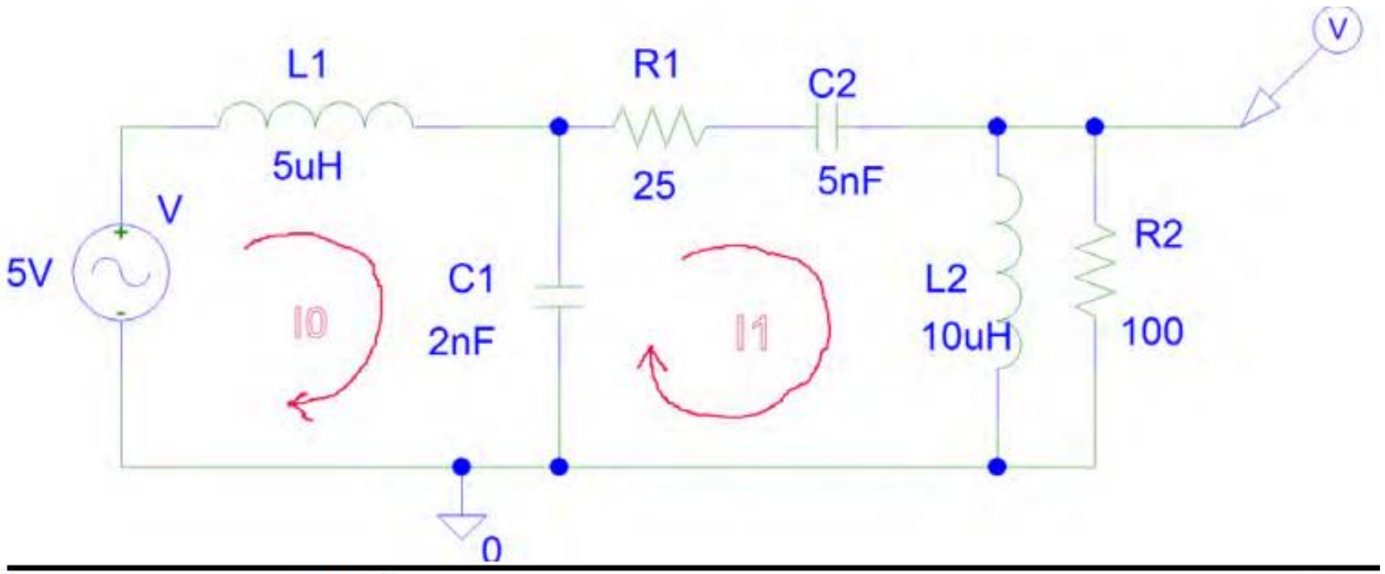
BEISPIEL EINER SCHLEIFENANALYSE FÜR EIN KOMPLEXES WIDERSTANDSNETZWERK

Aufgabe 6 des Arbeitsblatts

Berechnen Sie mithilfe der Schleifenanalyse für die folgende Schaltung die komplexe Spannung $\underline{U}$ (in Eulerscher Exponentialform) bei einer Frequenz von $f = 1{,}7\ \mathrm{MHz}$ am Abgriffspunkt V.



BERECHNUNG KOMPLEXER WIDERSTANDSNETZWERKE



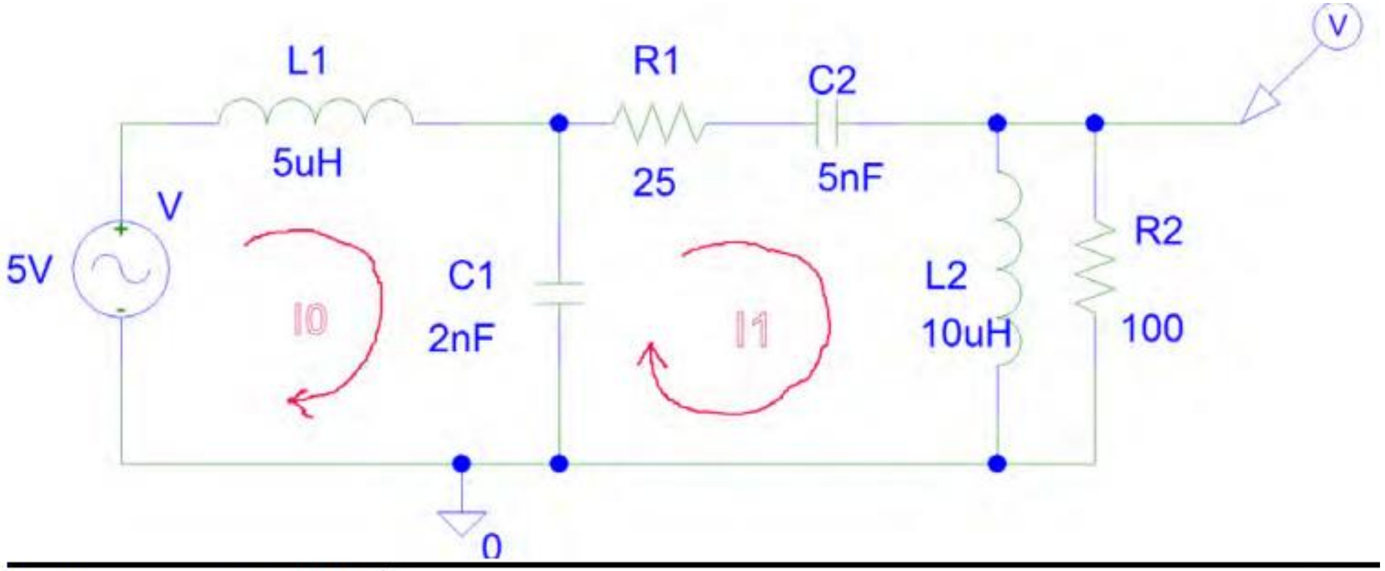
Die Spannung $V = 5\ V^{*}e^{j\omega t}$.

Berechnen sie die komplexe Spannung U (V,0) bei der Frequenz f = 1,7 MHz in Eulerscher Form mit Hilfe der Schleifenanalyse. **Fassen sie zuerst L2 und R2 zu einem komplexen Widerstand Zx zusammen.**

Berechnung eines Netzwerks:

1. Vereinfachen: Ersatzwiderstände berechnen
   - Hier: R2,L2 → Z2
2. Maschenregeln anwenden, für die Spannungen Widerstand und Strom einsetzen
3. Lineares Gleichungssystem für die Ströme lösen
4. Gesuchte Spannung ausrechnen

BERECHNUNG KOMPLEXER WIDERSTANDSNETZWERKE
1. KOMPLEXER ERSATZWIDERSTAND



Die Spannung V= 5 V*e$^{j\,\omega t}$.

Berechnen sie die komplexe Spannung <u>U</u> (V,0) bei der Frequenz f = 1,7 MHz in Eulerscher Form mit Hilfe der Schleifenanalyse. **Fassen sie zuerst L2 und R2 zu einem komplexen Widerstand Zx zusammen.**

Parallelschaltung von L_2 und $R_2 \rightarrow Z_X$:

$$\frac{1}{Z_X} = \frac{1}{Z_{L2}} + \frac{1}{R_2}$$

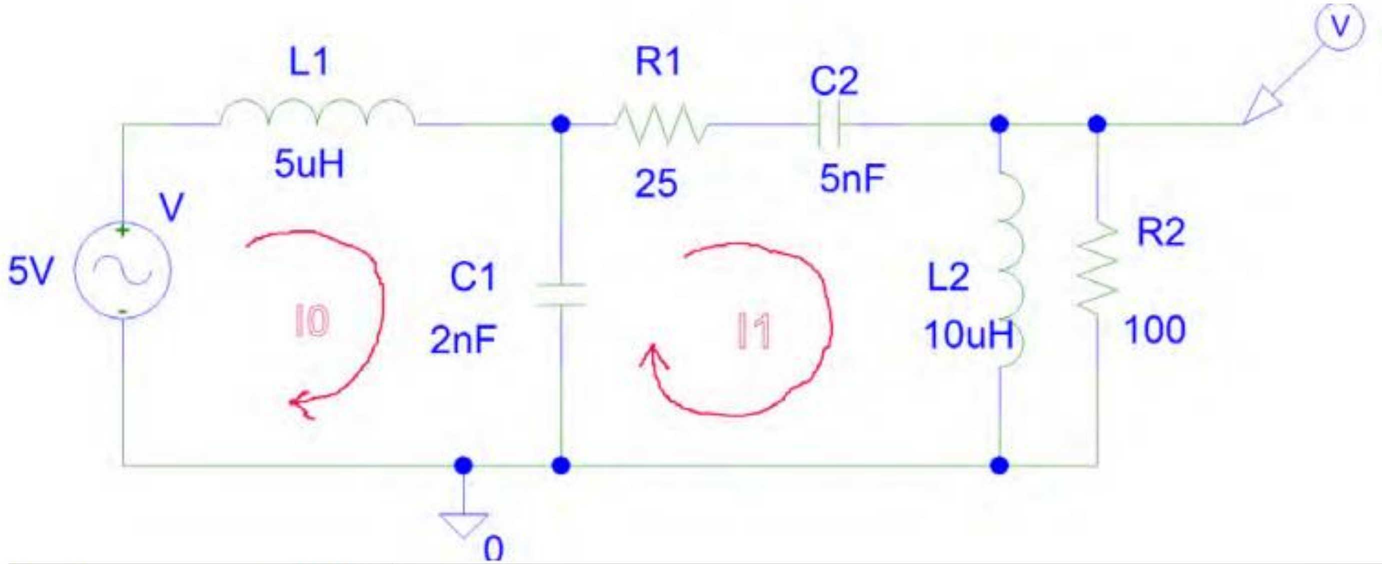
$$\Rightarrow Z_X = \frac{Z_{L2} \cdot R_2}{Z_{L2} + R_2}$$

$$= (53{,}29 + \mathrm{j} \cdot 49{,}9)\Omega$$

$$= 73 \cdot e^{\mathrm{j} \cdot 43{,}1°}\Omega$$

HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

BERECHNUNG KOMPLEXER WIDERSTANDSNETZWERKE 2A. GLEICHUNGEN FÜR DIE STRÖME AUFSTELLEN



Die Spannung V= 5 V*e$^{j\,\omega t}$.

Berechnen sie die komplexe Spannung U (V,0) bei der Frequenz f = 1,7 MHz in Eulerscher Form mit Hilfe der Schleifenanalyse. **Fassen sie zuerst L2 und R2 zu einem komplexen Widerstand Zx zusammen.**

1. Maschenregel für Generator-Kreis:

$$\underline{V}_{Gen} = \underline{U}_{L1} + \underline{U}_{C1}$$

$$= \underline{Z}_{L1} \cdot \underline{i}_0 + \underline{Z}_{C1} \cdot \left(\underline{i}_0 - \underline{i}_1\right)$$

$$= \left(\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{C1}\right) \cdot \underline{i}_0 - \underline{Z}_{C1} \cdot \underline{i}_1$$

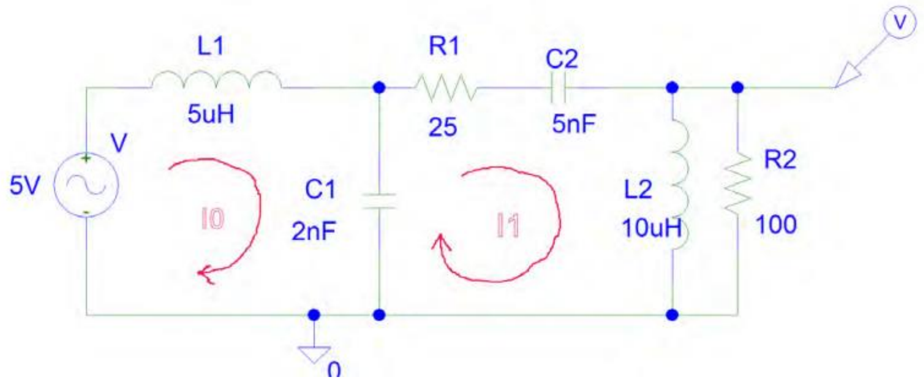
$$= (\mathrm{j}\omega L_1 - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_1}) \cdot \underline{i}_0 + \frac{\mathrm{j}}{\omega C_1} \cdot \underline{i}_1$$

2. Maschenregel entsprechend:

$$0 = \frac{\mathrm{j}}{\omega C_1} \cdot \underline{i}_0 + (R_1 - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_2} + \underline{Z}_X - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_1}) \cdot \underline{i}_1$$

HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

BERECHNUNG KOMPLEXER WIDERSTANDSNETZWERKE 2B. NETZWERKGLEICHUNG IN MATRIXSCHREIBWEISE



Matrix $\boldsymbol{Z}$ für die komplexen Widerstände – damit ergibt sich gemäß $\underline{\boldsymbol{Z}} * \underline{\boldsymbol{i}} = \underline{\boldsymbol{U}}$:

$$\begin{pmatrix} (\mathrm{j}\omega L_1 - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_1}) & \frac{\mathrm{j}}{\omega C_1} \\ \frac{\mathrm{j}}{\omega C_1} & (R_1 - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_2} + \underline{Z}_X - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{i}_0 \\ \underline{i}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{Gen} \\ 0 \end{pmatrix}$$

HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

BERECHNUNG KOMPLEXER WIDERSTANDSNETZWERKE
3. LÖSUNG DER NETZWERKGLEICHUNG

Komplexe Wechselstromwiderstände:

$\underline{Z}_{C1} = -\mathrm{j} \cdot 46{,}83\Omega$

$\underline{Z}_{C2} = -\mathrm{j} \cdot 18{,}73\Omega$

$\underline{Z}_{L1} = \mathrm{j} \cdot 53{,}4\Omega$

$\underline{Z}_{L2} = \mathrm{j} \cdot 106{,}8\Omega$

Resultierende Netzwerkgleichung:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{j} \cdot 6{,}58\Omega & \mathrm{j} \cdot 46{,}83\Omega \\ \mathrm{j} \cdot 46{,}83\Omega & (78{,}29 - \mathrm{j} \cdot 15{,}7)\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{i}_0 \\ \underline{i}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{Gen} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Über eines der bekannten Verfahren, z.B.
- Gauß-Verfahren
- Cramersche Regel → über die Determinanten der Matrix und der Adjungierten

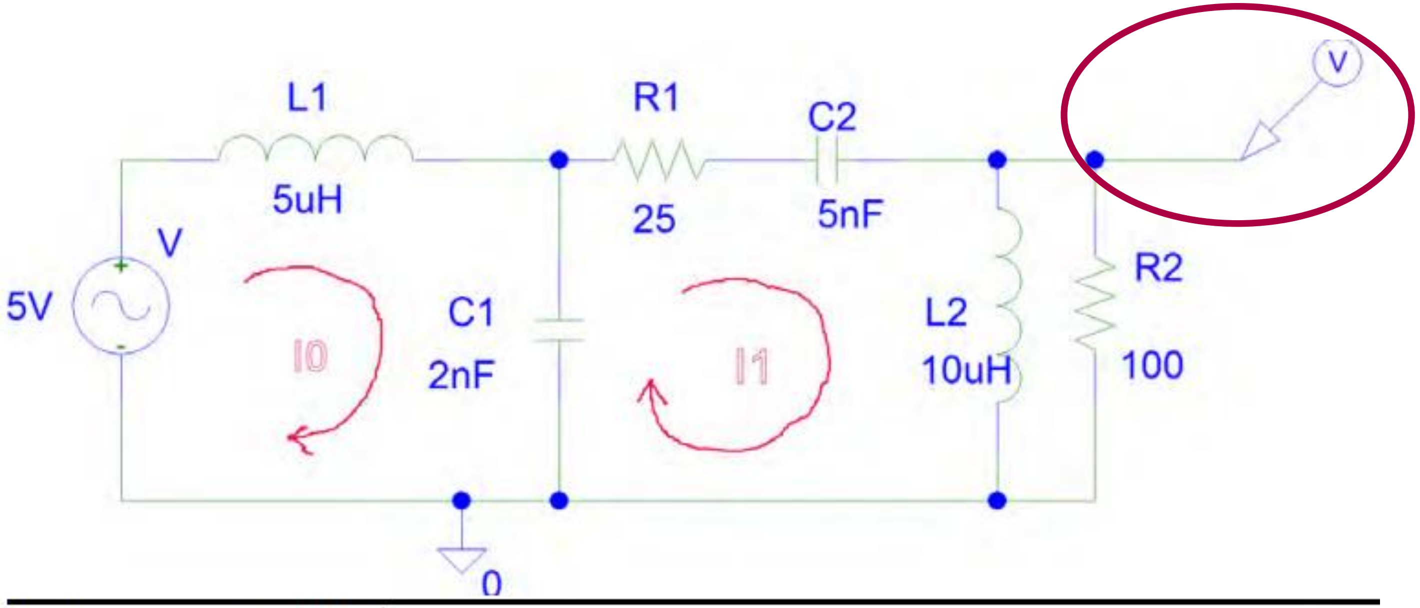
Hier einfach „zu Fuß“: Aus der zweiten Gleichung folgt ein Ausdruck für $\underline{i}_0$:

$$\underline{i}_0 = -(78{,}29 - \mathrm{j}15{,}7) \cdot \frac{1}{\mathrm{j}46{,}83} \cdot \underline{i}_1 = (0{,}335 + \mathrm{j}1{,}672) \cdot \underline{i}_1$$

Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich für $\underline{i}_1$:

$$(\mathrm{j}6{,}58(0{,}335 + \mathrm{j}1{,}672) + \mathrm{j}46{,}83) \cdot \underline{i}_1 = \underline{V}_{Gen} \Rightarrow \underline{i}_1 = 99{,}5 \cdot e^{-\mathrm{j}102{,}65°} e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{mA}$$

BERECHNUNG KOMPLEXER WIDERSTANDSNETZWERKE 4. GESUCHTE SPANNUNG ERMITTELN



Die Spannung V= 5 V*e$^{j\omega t}$.

Berechnen sie die komplexe Spannung U (V,0) bei der Frequenz f = 1,7 MHz in Eulerscher Form mit Hilfe der Schleifenanalyse. **Fassen sie zuerst L2 und R2 zu einem komplexen Widerstand Zx zusammen.**

Mit

$$\underline{Z}_X = 73 \cdot e^{j \cdot 43,1°}\Omega$$

ergibt sich für die Spannung V_{Mess} am Messpunkt:

$$\underline{V}_{Mess} = \underline{Z}_X \cdot \underline{i}_1$$

$$= 73e^{j43,1°}\Omega \cdot 99,5e^{-j102,65°}e^{j\omega t}\mathrm{mA}$$

$$= 7,264 \cdot e^{-j59,6°}e^{j\omega t}\mathrm{V}$$

HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

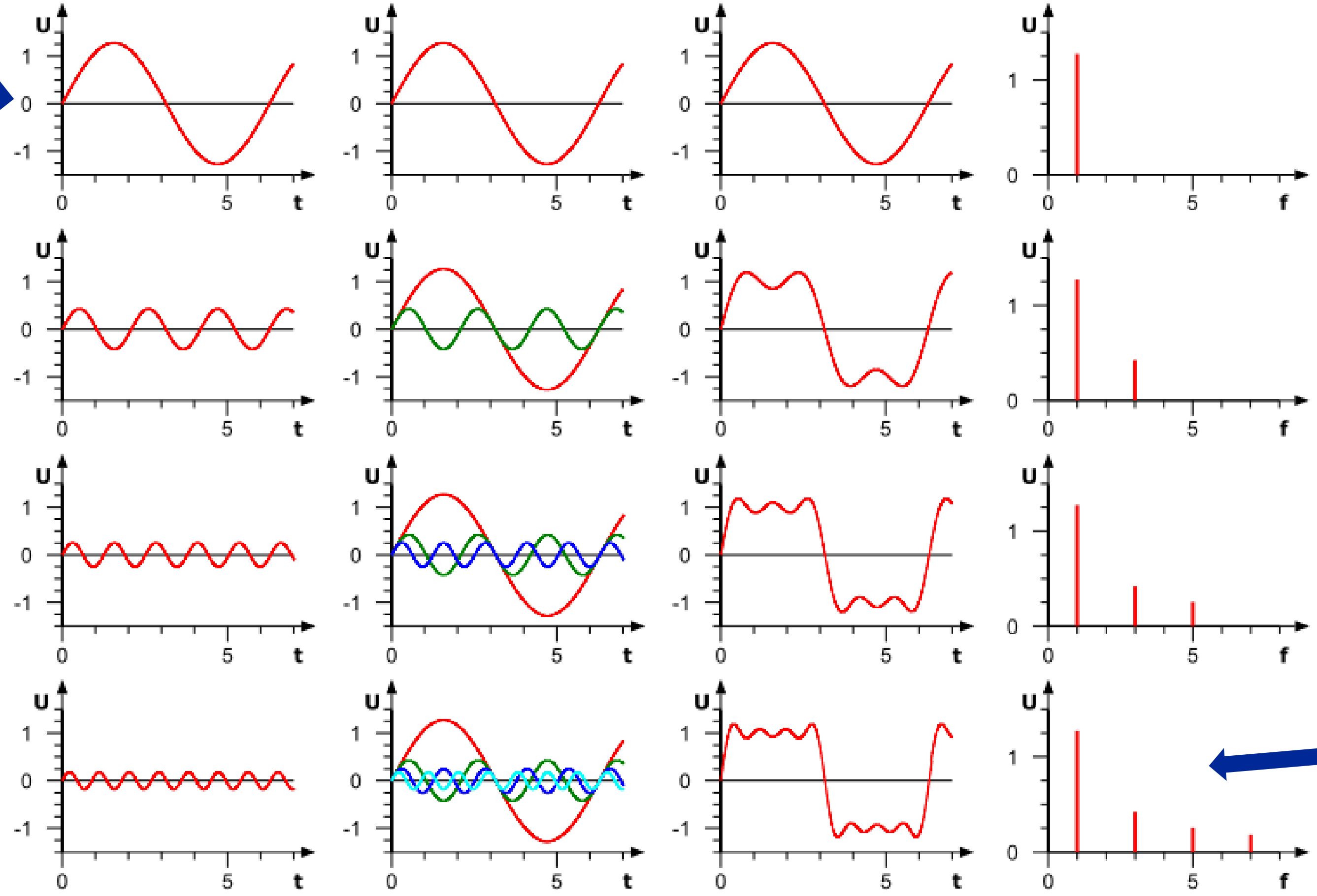
› FOURIER-ANALYSE

SEB - Signalverarbeitung-2 / Vorlesung 5 / Thomas Klemm

ZUSAMMENSETZUNG PERIODISCHER SCHWINGUNGEN: RECHTECKSCHWINGUNG

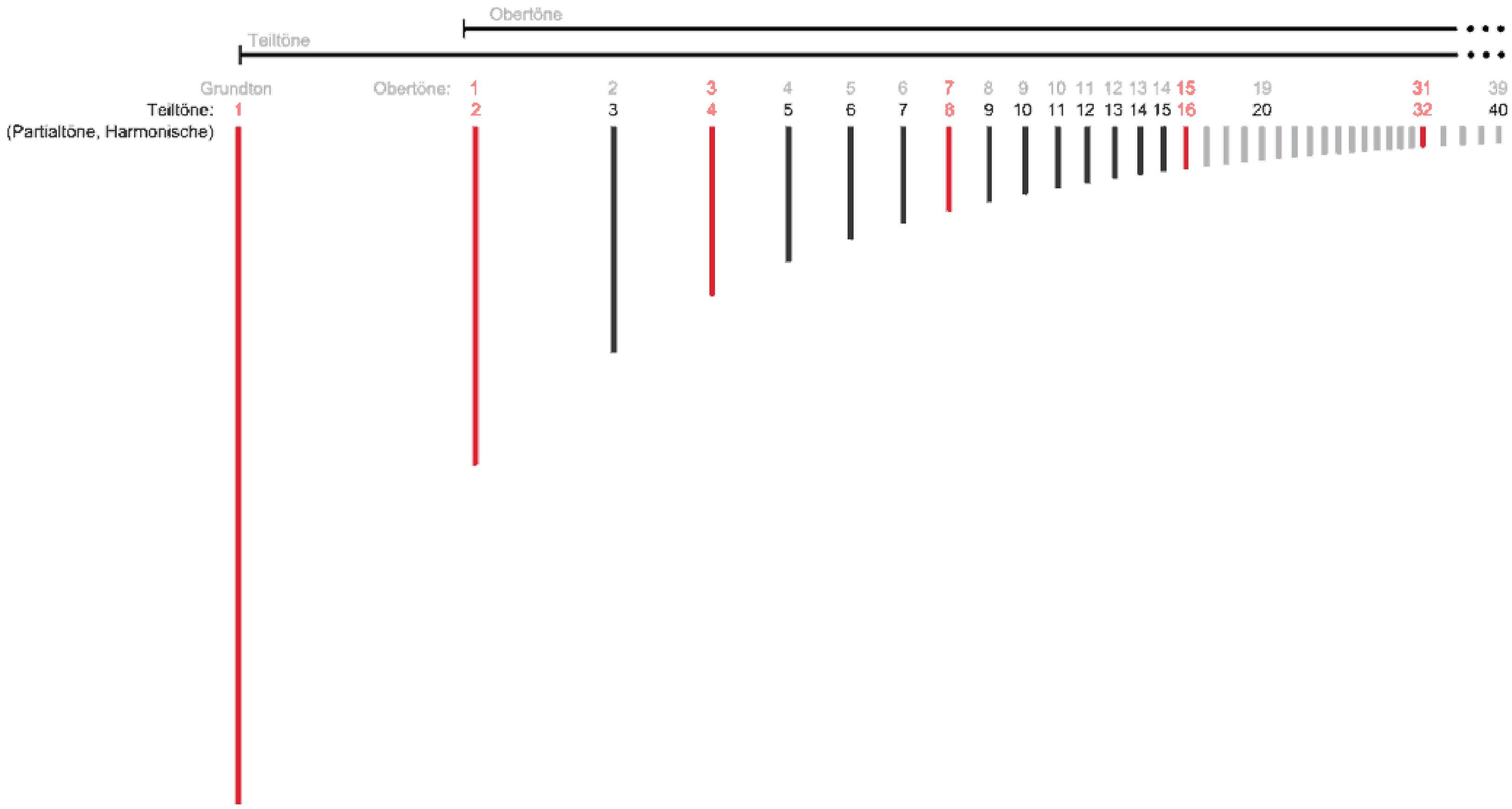
Grundschwingung
(1. Harmonische)

Obertöne
(höhere
Harmonische)



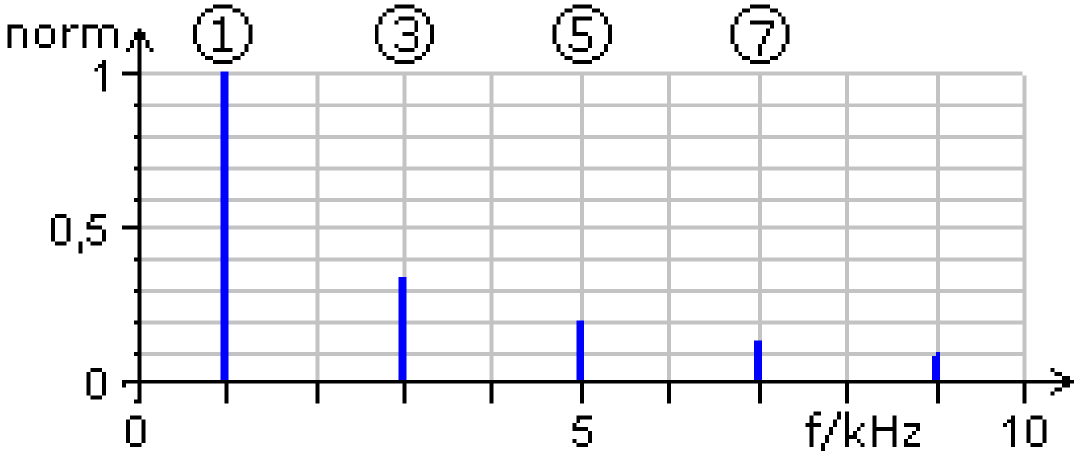
Spektrum der
resultierenden
Schwingung

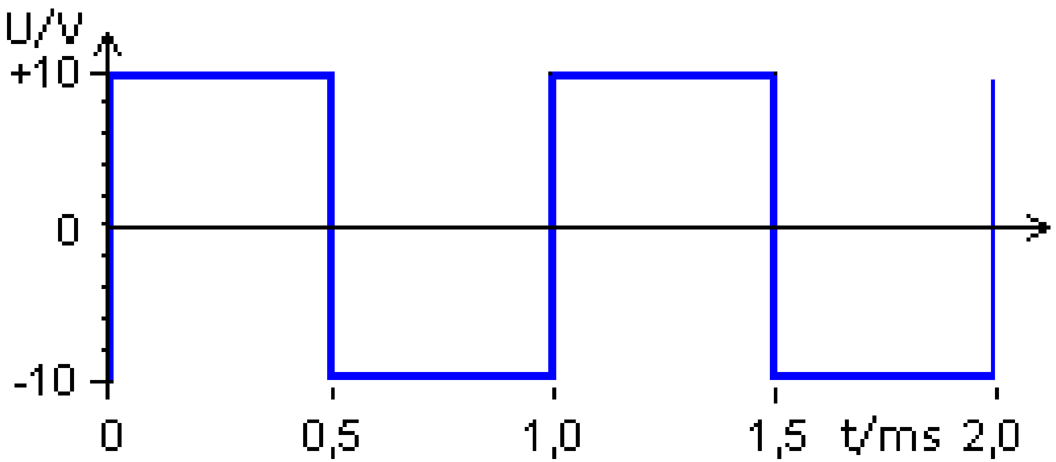
TYPISCHES SPEKTRUM EINES TONS



FOURIER-ANALYSE FÜR EINE RECHTECKSCHWINGUNG

$$f(t) = \frac{4\hat{U}}{\pi}\left[\underbrace{\sin(\omega t)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{3}\sin(3\omega t)}_{3} + \underbrace{\frac{1}{5}\sin(5\omega t)}_{5} + \underbrace{\frac{1}{7}\sin(7\omega t)}_{7} + \ldots\right]$$





FOURIER-ANALYSE FÜR EINE BELIEBIGE PERIODISCHE SCHWINGUNG

Beispiel Rechteckschwingung:

$$f(t) = \frac{4\hat{U}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \ldots\right]$$

➔ Formulierung für beliebige periodische Schwingungen mit der Grundfrequenz ω:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Übergang in die komplexe Schreibweise:

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{j}\omega_k t}$$

Campus Sontheim

HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

› DISKRETISIERUNG A/D- UND D/A-WANDLER

SEB - Signalverarbeitung-2 / Vorlesung 5 / Thomas Klemm

HEILBRONN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

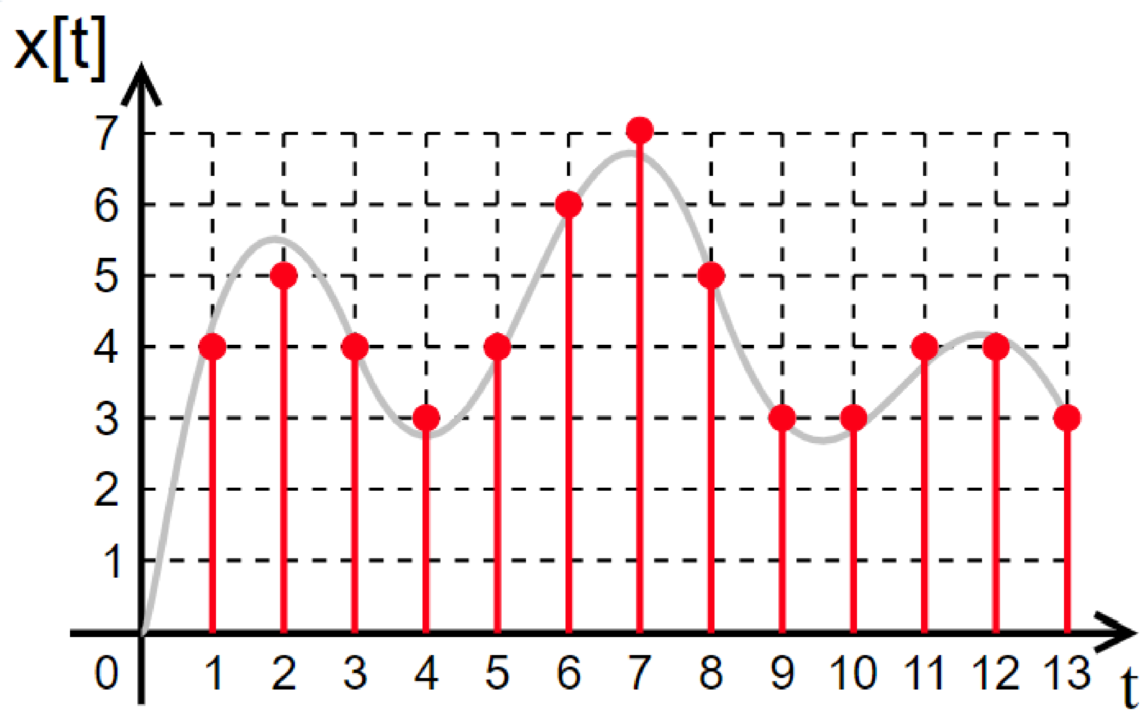
ABTASTUNG (SAMPLING)

Für eine digitale Verarbeitung ist eine Diskretisierung sowohl von

- „Phase“ / zeitlicher Abfolge als auch
- Wert notwendig.

Mathematische Darstellung:
„**Dirac-Kamm**“ (zeitdiskret, periodisch) und „**quantisierte**“ Werten

Beispiel: Puls-Code-Modulation



HEILBRONN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

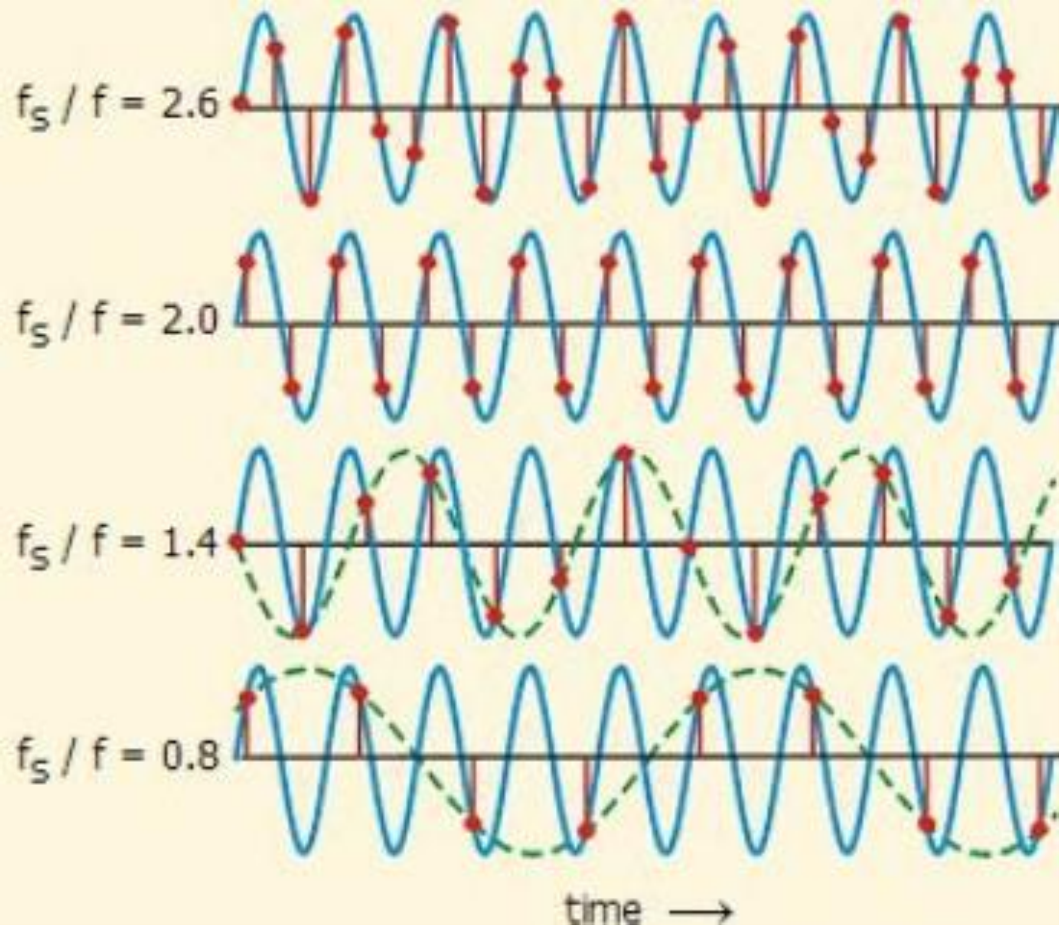
SHANNON-NYQUIST-THEOREM

Für eine **eindeutige Identifikation** des abgetasteten periodischen Signals muss die **Abtastfrequenz** f_S mindestens doppelt so hoch sein wie die maximale Frequenz f des abgetasteten Signals:

$$f_S \geq 2 \cdot f$$

- Nachweis des Shannon-Nyquist-Theorems:
  → Fourier-Reihenentwicklung der Abtastpunkte

- Tieffrequente Pseudosignale bei zu niedriger Abtastfrequenz
  → **Aliasing**



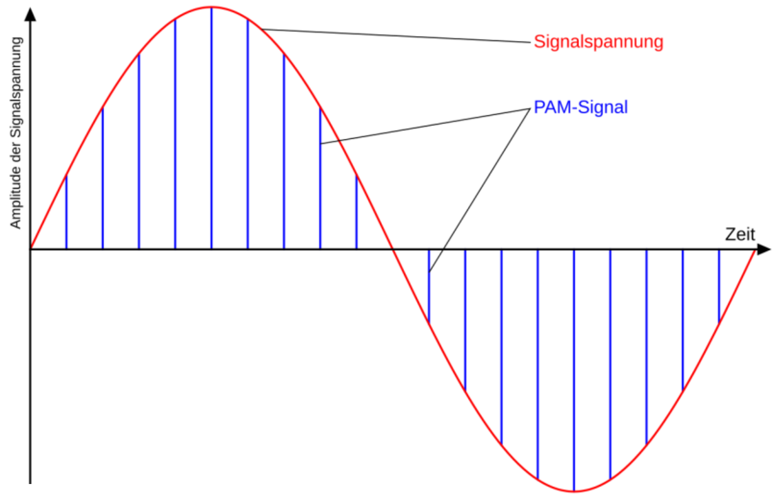
HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

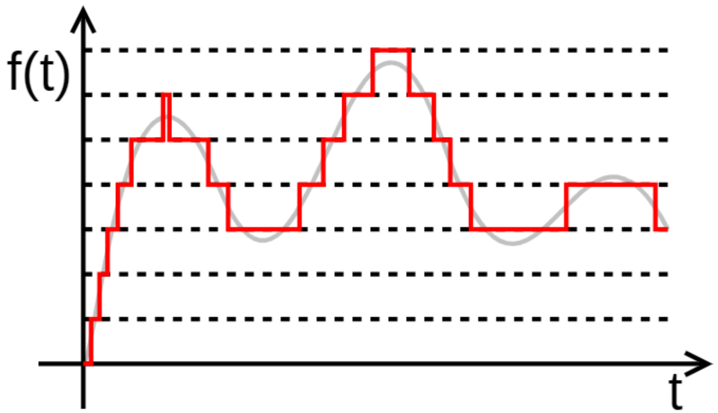
PULS-CODE-MODULATION ANALOG-DIGITAL-UMSETZER

PCM spielt eine große Rolle in der digitalen Telefonie, für CDs und Videosignale

- Für die Erzeugung des zeitdiskreten Signals: Pulsamplitudenmodulation (→ Multiplikation!)

- Quantisierung der Signalwerte:
  – linear (in äquidistanten Abständen) oder
  – nichtlinear
  – Wortbreite → Bits je Wert

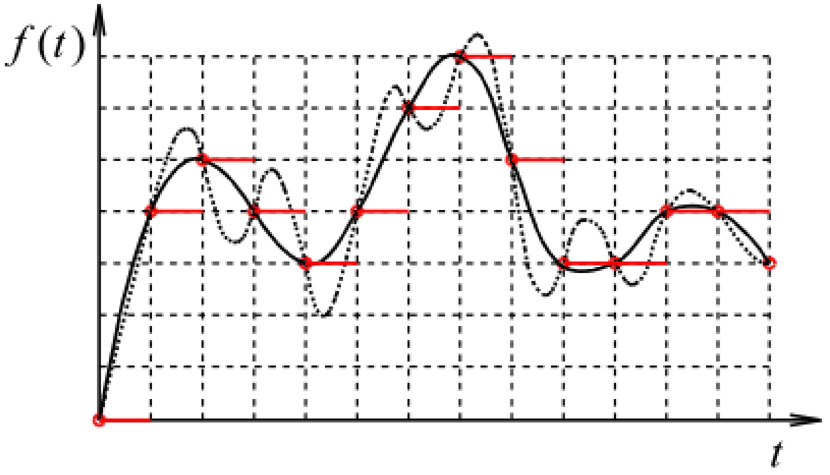


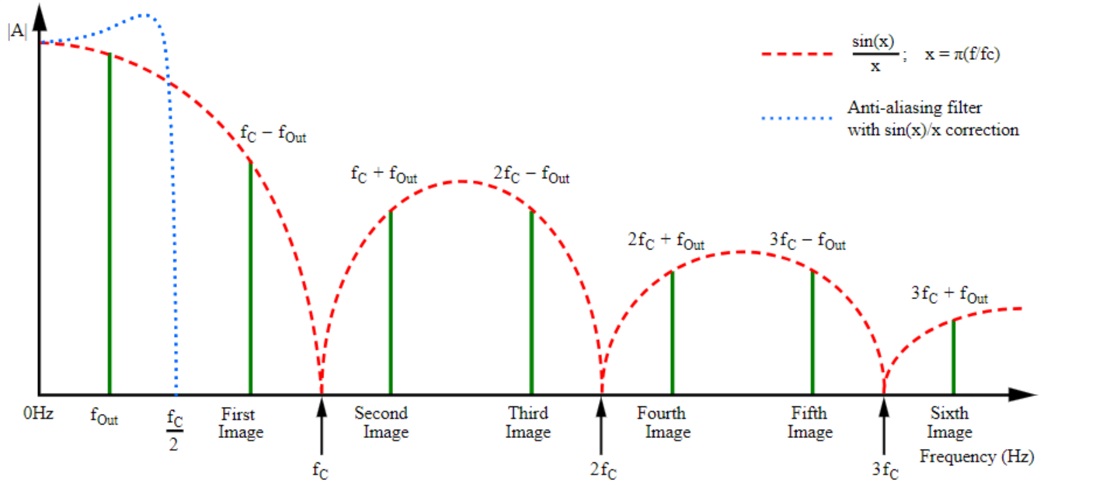


HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

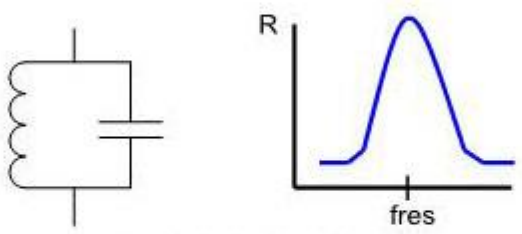
DIGITAL-ANALOG-UMSETZER

Für den umgekehrten Weg Glättung der „Sample-and-Hold“-Kurve sowie diverse Filterungen und Korrekturen notwendig, beispielsweise Anti-Aliasing und Korrektur der fehlenden Spektralanteile aufgrund des rechteckigen Sample-Signals

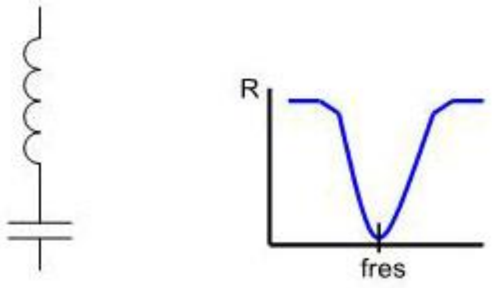




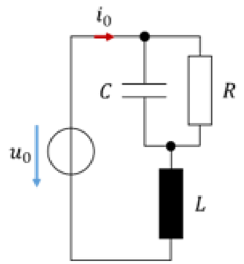
ANHANG / OUT



Parallelschwingkreis



Serienschwingkreis



$$i_0(\omega) = \frac{u_0(\omega)}{Z_{Ges}} = \frac{5V}{\frac{3}{2}\Omega} = \frac{10}{3}A = 3{,}33A$$

$$i_L(\omega) = i_0(\omega) = 3{,}33A$$

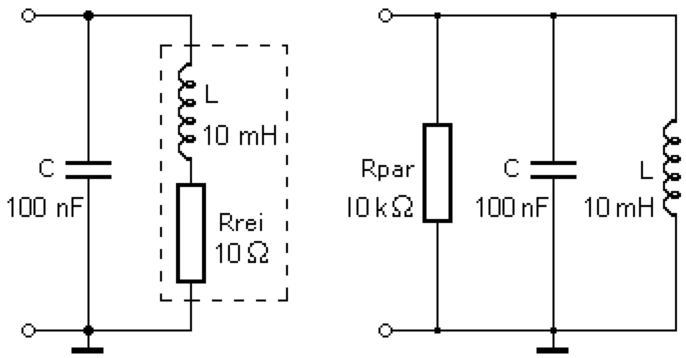
$$u_L(\omega) = Z_L \cdot i_L(\omega) = j\frac{3}{2}\Omega \cdot 3{,}33A = j5V$$

$$Maschengleichung: u_0(\omega) = U_{RC}(\omega) + u_L(\omega)$$

$$U_{RC}(\omega) = U_R = U_C = u_0(\omega) - u_L(\omega) = 5V - j5V$$

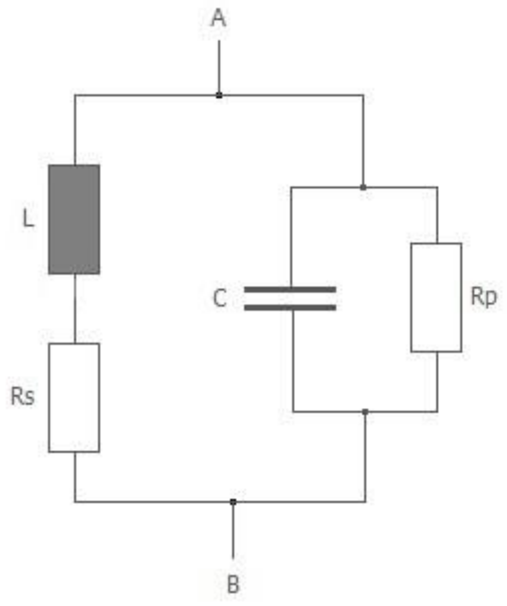
$$Bauelementgleichung: i_R(\omega) = \frac{u_R(\omega)}{Z_R} = \frac{5V - j5V}{3\Omega} = \frac{5 - j5}{3}A = 1{,}67A - j1{,}67A$$

$$Knotengleichung: i_C(\omega) = i_0(\omega) - i_R(\omega) = \frac{10}{3}A - \left(\frac{5 - j5}{3}A\right) = \frac{5 + j5}{3}A = 1{,}67A + j1{,}67A$$


C
100 nF
L
10 mH
Rrei
10 Ω
Rpar
10 kΩ
C
100 nF
L
10 mH

HEILBRONN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

VERLUSTBEHAFTETER SCHWINGKREIS



L = ideale Induktivität
C = ideale Kapazität
Rs = Verlustwiderstand der Induktivität
Rp = Verlustwiderstand der Kapazität

verlustbehafteter Schwingkreis