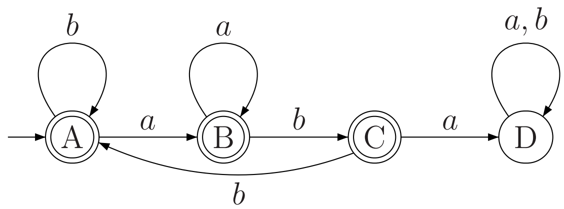
EXAMEN PARTIEL
UN BREF SOLUTIONNAIRE
IFT-2002 : Informatique théorique A 2013
Vendredi 25 octobre 2013, **18h30-21h20**
Enseignant : Hans Bherer

Question 1 (10 points)

Décrivez, en mots ou bien par une expression ensembliste, le langage $L(M)$ sur $\Sigma = \{a, b\}$ où M est l'automate représenté par le diagramme de transitions suivant.



Solution.

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : \ w \text{ ne contient pas la sous-chaîne } aba\}$$

Barème : 5 pts si caractérisation partielle, 10 pts si bonne caractérisation.

Question 2 (10 points)

Montrez, en utilisant le lemme de pompage, que le langage $L = \{a^n b^m : n > m\}$ sur $\Sigma = \{a, b\}$ n'est pas régulier.

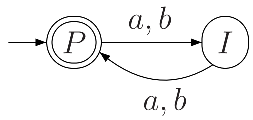
Solution. Supposons que L est régulier. Ainsi, L satisfait le lemme de pompage pour un certain $p \geq 1$. Soit $w = a^{p+1}b^p$. Ainsi $w \in L$ et $|w| \geq p$. Nous avons alors que $w = xyz$ pour certains x, y et z où $|xy| \leq p$, $|y| > 0$ et pour tout $i \geq 0$, $xy^iz \in L$. Or, comme $|xy| \leq p$, y est forcément de la forme a^j pour un certain j tel que $1 \leq j \leq p$. Donc, pour $i = 0$, le mot $xy^0z = xz = a^{p+1-j}b^p \in L$ mais comme $p + 1 - j \leq p$ ce mot n'est pas dans L, d'où la contradiction.

Barème : 3 pts pour un bon mot w, 3 pts pour une bonne utilisation du lemme, 4 pts pour cohérence de la preuve.

Question 3 (20 points)

Soit $L = \{w_1w_2 : w_1, w_2 \in \{a, b\}^* \text{ et } |w_1| = |w_2|\}$ un langage sur $\Sigma = \{a, b\}$. Si L est régulier, construisez un automate fini déterministe M tel que $L(M) = L$. Sinon, montrez, à l'aide du lemme de pompage, que L n'est pas régulier.

Solution. Remarquons que L est simplement le langage des mots de longueur paire de Σ^*. Ce langage est régulier. Voici un automate qui le reconnaît.



Barème : 10 pts pour langage régulier, 10 pts pour l'AFD

Question 4 (20 points)

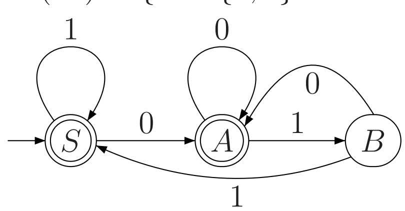
Soit G la grammaire suivante :

$$
\begin{array}{ll}
S \to 0A & S \to 1S \\
S \to \lambda & A \to 0A \\
A \to 1B & A \to \lambda \\
B \to 0A & B \to 1S
\end{array}
$$

Exhibez un automate M tel que $L(M) = L(G)$ et dites, en mots ou bien par une expression ensembliste, quel est le langage accepté par M.

Solution.

$$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* : \ w \text{ ne se termine pas par } 01\}$$



Barème : 10 pts l'automate, 10 pts la description du langage

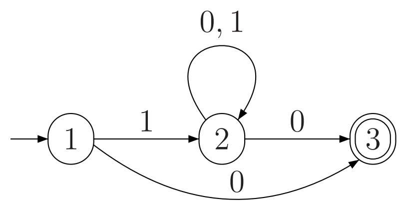
Question 5 (2 x 10 = 20 points)

1. Donnez une expression régulière r telle que $L(r) = L_1 \cup L_2$ où
   $L_1 = \{w : w \in \{a,b\}^* \text{ et } w \text{ débute par } aa\}$ et $L_2 = \{w : w \in \{a,b\}^* \text{ et } w \text{ se termine par } bb\}$ sont deux langages réguliers sur $\Sigma = \{a,b\}$.

2. Soit $r = (1 \circ (1 \cup 0)^* \circ 0) \cup 0$ une expression régulière. Construisez un automate M **de trois états** tel que $L(M) = L(r)$.

Solution.

1. $(aa(a \cup b)^*) \cup ((a \cup b)^* bb)$ **(2 x 5 pts)**
2. **0,3,6,10 pts**



Question 6 (5 x 4 = 20 points)

Dites pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse. Justifier **brièvement** (preuve, contre-exemple, explication etc.). Les L_i sont des langages sur $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Si $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier et que L_1 n'est pas régulier, alors L_2 est régulier.
2. Si $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier et que L_1 est régulier, alors L_2 est régulier.
3. Si $L_1 \neq L_2$, alors $L_1^* \neq L_2^*$.
4. Si L est un langage régulier, alors $L \subseteq L^* \circ L$.
5. Si L_1^* est régulier, alors L_1 est régulier.

Solution.

1. Fausse. $\{0^n1^m : n = m\} \cup \{0^n1^m : n \neq m\} = L(0^*1^*)$
2. Fausse. $L_1 = \Sigma^*$ et L_2 un langage non régulier.
3. Fausse. Contre-exemple : $L_1 = \{1\}$ et $L_2 = \{1, 11\}$.
4. Vraie car $\lambda \in L^*$
5. Fausse. Prenons $L_1 = \{0, 1\} \cup \{0^n1^n : n \geq 0\}$.

Barème : 1 pt pour réponse correcte et 3 pts pour justification