Два однородных стержня имеют массы m_1 и m_2, а также длины l_1 и l_2. Первый стержень одним концом закреплен шарнирно на неподвижной опоре, второй — шарнирно соединен со вторым концом первого стержня. Стержни совершают движение под действием силы тяжести. Стержни движутся в одной плоскости. В начальный момент времени стержни покоятся и отклонены от положения равновесия на углы θ_{10}, θ_{20}.

Найдем общую кинетическую энергию системы. Для $i-го$ стержня обозначим за $\theta_i, v_i, \omega_i, J_i$ – отклонение от положения равновесия, скорость центра масс, угловую скорость вращения и момент инерции относительно центра масс.
Суммарная кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2$$

КЭ первого стержня:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2}{2}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} l_1 \omega_1, \quad J_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2$$

$$T_1 = \frac{m_1 l_1^2 \omega_1^2}{8} + \frac{m_1 l_1^2 \omega_1^2}{24} = \frac{m_1 l_1^2 \omega_1^2}{6}$$

КЭ второго стержня:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1}{2}$$

$$J_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$$

Вычислим v_2^2 используя теорему косинусов:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_B + \vec{v}_{C_2 B},$$

$$v_2^2 = v_B^2 + v_{C_2 B}^2 + 2 v_B v_{C_2 B} \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$v_2^2 = l_1^2 \omega_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} l_1 l_2 \omega_1 \omega_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Отсюда:

$$T_2 = \frac{m_2}{8}\left[4 l_1^2 \omega_1^2 + l_2^2 \omega_2^2 + 2 l_1 l_2 \omega_1 \omega_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + \frac{m_2 l_2^2 \omega_2^2}{24}$$

$$T_2 = \frac{m_2}{12}\left[6 l_1^2 \omega_1^2 + 2 l_2^2 \omega_2^2 + 3 l_1 l_2 \omega_1 \omega_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Таким образом, полная КЭ системы равна:

$$T = \frac{m_2}{12}\left[6 l_1^2 \omega_1^2 + 2 l_2^2 \omega_2^2 + 3 l_1 l_2 \omega_1 \omega_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + \frac{m_1 l_1^2 \omega_1^2}{6}$$

$$T = \frac{\omega_1^2}{2}\left[\frac{m_1}{3} + m_2\right] l_1^2 + \frac{\omega_2^2}{2} \frac{m_2}{3} l_2^2 + \omega_1 \omega_2 l_1 l_2 \frac{m_2}{4} \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Вычислим производные для составления уравнения движения.

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -\omega_1 \omega_2 l_1 l_2 \frac{m_2}{4} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = \omega_1 \omega_2 l_1 l_2 \frac{m_2}{4} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \omega_1 \left[\frac{m_1}{3} + m_2\right] l_1^2 + \omega_2 \frac{m_2}{4} l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_2} = \omega_2 \frac{m_2}{3} l_2^2 + \omega_1 \frac{m_2}{4} l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_1}=\dot{\omega}_1\left[\frac{m_1}{3}+m_2\right]l_1^2+\dot{\omega}_2\frac{m_2}{4}l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\omega_2(\omega_1-\omega_2)\frac{m_2}{4}l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_2}=\dot{\omega}_2\frac{m_2}{3}l_2^2+\dot{\omega}_1\frac{m_2}{4}l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\omega_1(\omega_1-\omega_2)\frac{m_2}{4}l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_1}-\frac{\partial T}{\partial \theta_1}=Q_1$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_2}-\frac{\partial T}{\partial \theta_2}=Q_2$$

Q_1, Q_2 – обобщённые силы.

$$Q_1=\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)g l_1\sin\theta_1$$
$$Q_2=\frac{m_2}{2}g l_2\sin\theta_2$$

Отсюда уравнения движения:

$$\dot{\omega}_1\left[\frac{m_1}{3}+m_2\right]l_1^2+\dot{\omega}_2\frac{m_2}{4}l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\omega_2^2\frac{m_2}{4}l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)=\left[\frac{m_1}{2}+m_2\right]g l_1\sin\theta_1$$
$$\dot{\omega}_2\frac{m_2}{3}l_2^2+\dot{\omega}_1\frac{m_2}{4}l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\omega_1^2\frac{m_2}{4}l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)=\frac{m_2}{2}g l_2\sin\theta_2$$

Примем матричные обозначения:

$$M=\begin{pmatrix} \left(\frac{m_1}{3}+m_2\right)l_1^2 & \frac{m_2}{4}l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ \frac{m_2}{4}l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2) & \frac{m_2}{3}l_2^2 \end{pmatrix},\quad \Omega=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix} \left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)g l_1\sin\theta_1-\omega_2^2\frac{m_2}{4}l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2) \\ \frac{m_2}{2}g l_2\sin\theta_2+\omega_1^2\frac{m_2}{4}l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$M\cdot\dot{\Omega}=F$$
$$\dot{\Omega}=M^{-1}\cdot F$$

То есть мы получили явное выражение для $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$.