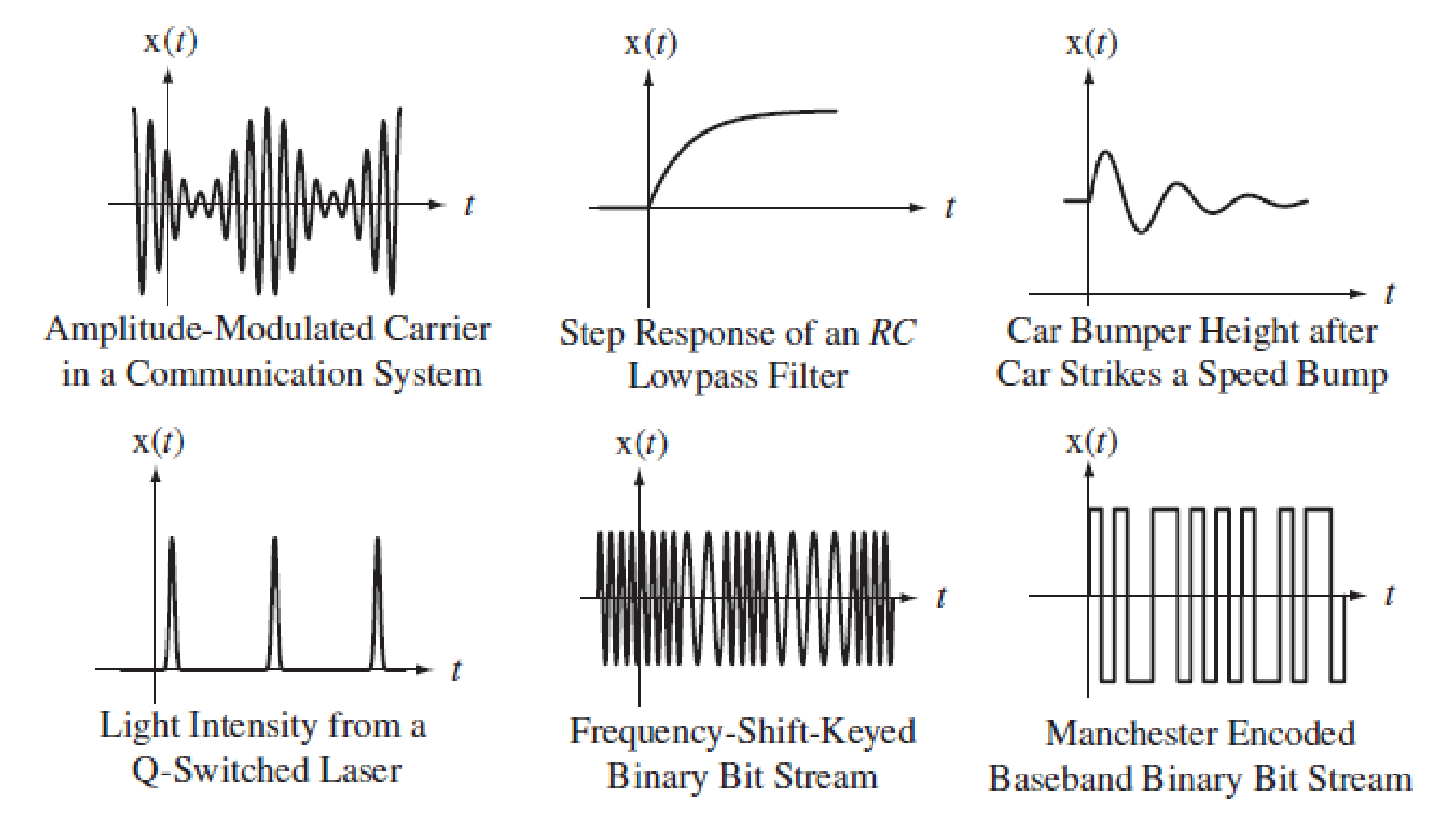
Sinyaller ve Sistemler

2. HAFTA:

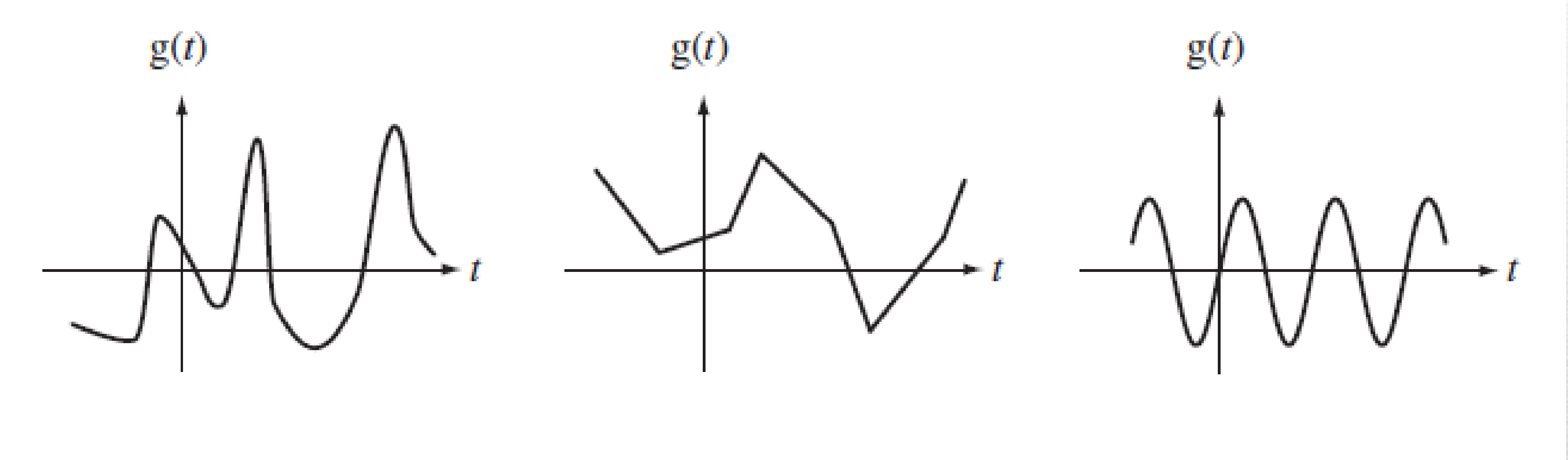
Sürekli Zamanlı Sinyallerin Matematiksel Tanımlaması

- Günlük hayattan örnek vererek sinyalleri hatırlamak gerekirse,



Sinyal

- Fonksiyonun bağımsız değişkeni t ile gösterilen zamansa ve **g(t)** fonksiyonu her **t** değeri için tanımlıysa, bu fonksiyon **sürekli-zamanlı** fonksiyon olarak adlandırılır.

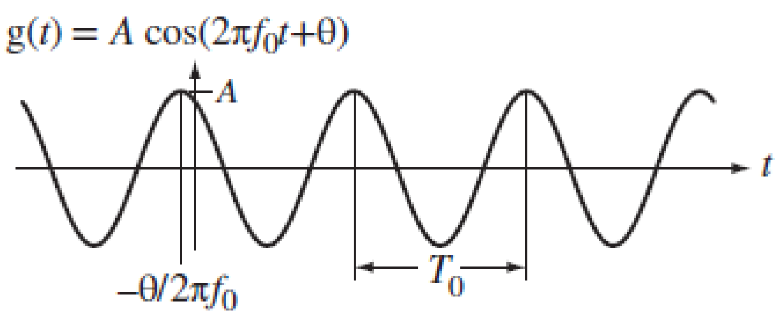


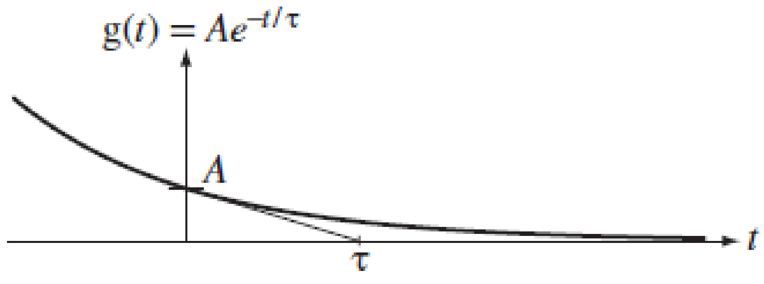
Sürekli Zamanlı Sinyal Fonksiyonları

- Gerçel-değerli sinüzoidler ve üstel fonksiyonlar oldukça bilinen fonksiyonlardır.

$$
\begin{aligned}
g(t) &= A\cos(2\pi t/T_0 + \theta) \\
&= A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \\
&= A\cos(\omega_0 t + \theta)
\end{aligned}
$$

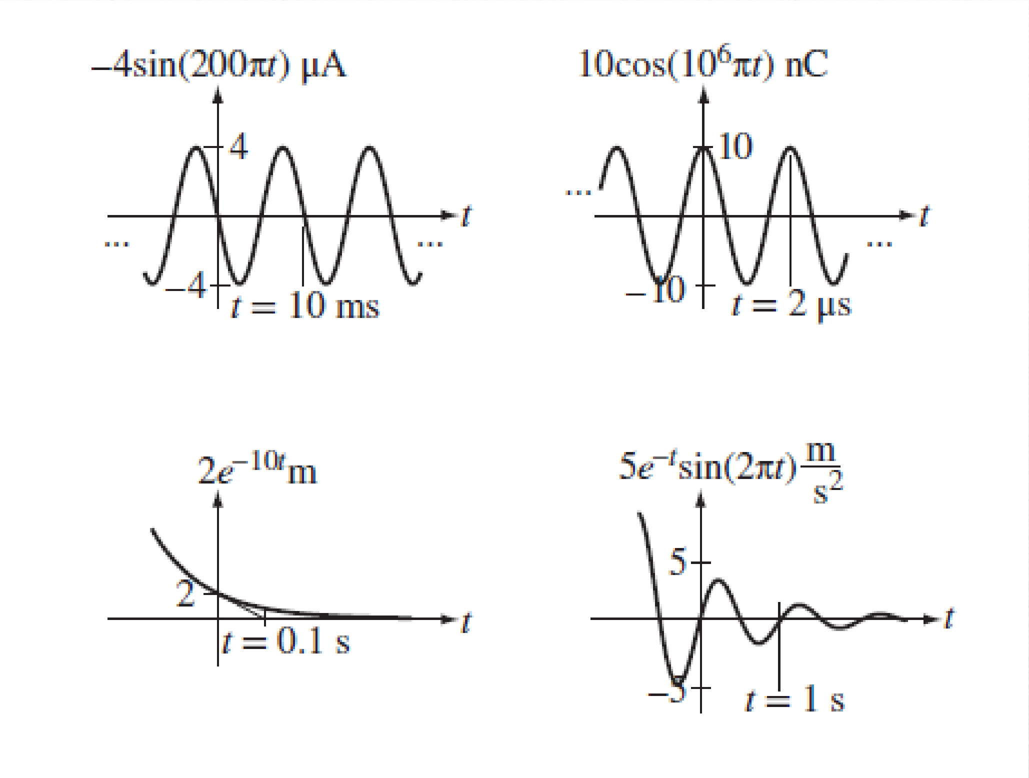
$$
\begin{aligned}
g(t) &= Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} \\
&= Ae^{\sigma_0 t}[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)]
\end{aligned}
$$





Karmaşık Üsteller ve Sinüzoidler

- Denklemlerde A genliği, T_o temel periyodu, f_o sinüzoidin temel çevrimsel frekansını, w_o temel radyan frekansını, t zamanı ve σ_0 üstelin sönüm hızını göstermektedir. Bütün bu parametreler herhangi gerçel sayılar olabilir.



Karmaşık Üsteller ve Sinüzoidler

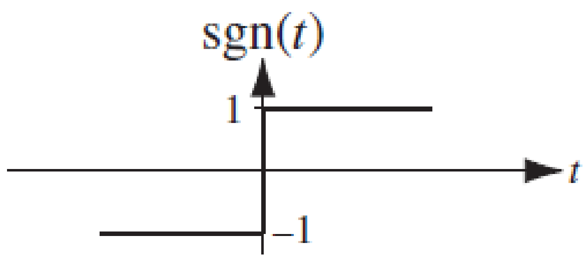
Süreksizlik İçeren Fonksiyonlar

- **Sürekli zamanlı** sinüsler, kosinüsler ve üsteller sürekli ve zamanın her anında türevi alınabilir fonksiyonlardır. Fakat sistem uygulamalarında ortaya çıkan diğer bir çok önemli sinyal türü sürekli değildir ve her yerde türevi alınamayabilir.

- Sinyal ve sistemlerin çözümlemesinde, birbirleriyle integraller ve türevler ile ilişkilendirilmiş olan tekillik fonksiyonları, süreksizlik içeren ve süreksiz türevleri olan fonksiyonları matematiksel olarak tanımlamak için kullanılabilir.

❖ Şimdi bu fonksiyonları inceleyelim.

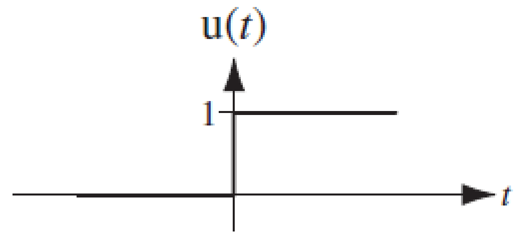
Signum Fonksiyonu



$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}}$$

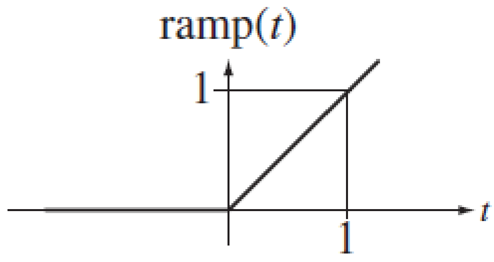
Süreksizlik İçeren Fonksiyonlar

Birim Basamak Fonksiyonu



$$\boxed{u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}}$$

Birim Rampa Fonksiyonu

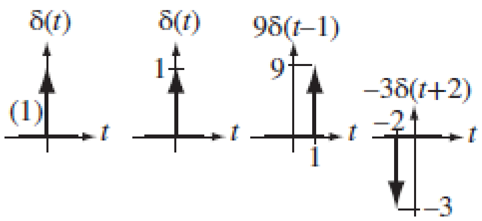


$$\boxed{\mathrm{ramp}(t) = \begin{Bmatrix} t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\, d\lambda = t\,u(t)}$$

- Birim rampa, birim basamak fonksiyonunun integralidir. Sistemlerde ortaya çıkan bir sinyal çeşididir.

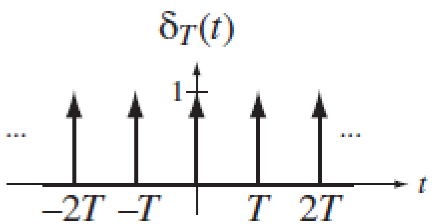
Süreksizlik İçeren Fonksiyonlar

Birim Dürtü



$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \text{ and } \int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 1, & t_1 < 0 < t_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Periyodik Dürtü (Dürtü Katarı)



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Dürtünün Denklik Özelliği

$$\boxed{g(t)A\delta(t - t_0) = g(t_0)A\delta(t - t_0)}$$

Dürtünün Örnekleme Özelliği

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - t_0)dt = g(t_0)}$$

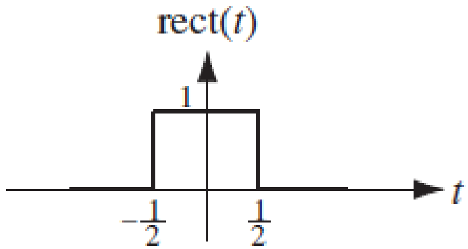
Dürtünün Ölçekleme Özelliği

$$\boxed{\delta(a(t - t_0)) = \frac{1}{|a|}\delta(t - t_0)}$$

Süreksizlik İçeren Fonksiyonlar

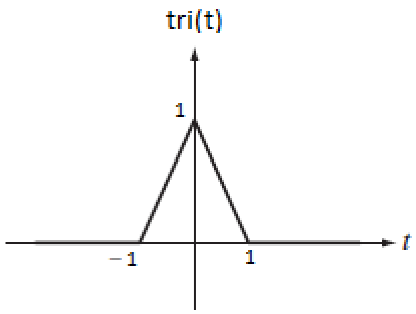
Süreksizlik İçeren Fonksiyonlar

Birim Dikdörtgen Fonksiyonu



$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 1/2, & |t| = 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} = \mathrm{u}(t + 1/2) - \mathrm{u}(t - 1/2)$$

Birim Üçgen Fonksiyonu



$$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Sürekli zamanlı sinyal fonksiyonlarını özetlemek gerekirse,

Sinüs	$\sin(2\pi f_0 t)$ or $\sin(\omega_0 t)$
Kosinüs	$\cos(2\pi f_0 t)$ or $\cos(\omega_0 t)$
Üstel	e^{st}
Birim Basamak	$\mathrm{u}(t)$
Signum	$\mathrm{sgn}(t)$
Birim Rampa	$\mathrm{ramp}(t) = t\,\mathrm{u}(t)$
Birim Dürtü	$\delta(t)$
Periyodik Dürtü	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$
Birim Dikdörtgen	$\mathrm{rect}(t) = \mathrm{u}(t + 1/2) - \mathrm{u}(t - 1/2)$

Sürekli Zamanlı Sinyal Fonksiyonları

- Bir **g(t)** fonksiyonunda **t**'nin her değeri için bir **g** değeri döndürür. Örneğin;

➡ $g(t) = 2 + 4t^2$ $g(1) = ?$

fonksiyonunda t=1 için g(t) = 6'ya eşit olur.

➡ $g(t) = 3 + t^2 - 3t^3$ $g(2t) = ?$

fonksiyonunda $g(2t) = 3 + (2t)^2 - 3(2t)^3$

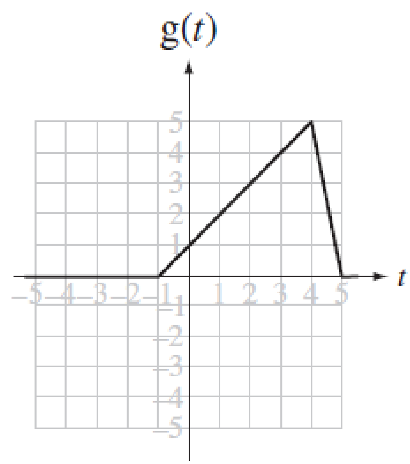
$= 3 + 4t^2 - 24t^3$

➡ $g(t) = 10\cos(20\pi t)$ $g(t/4) = ?$

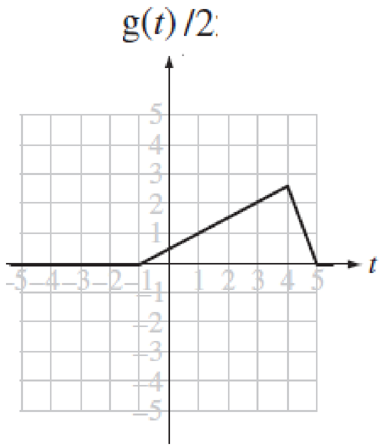
Sinyalerin Hesaplanması ve Birleşimi

Genlik Ölçekleme

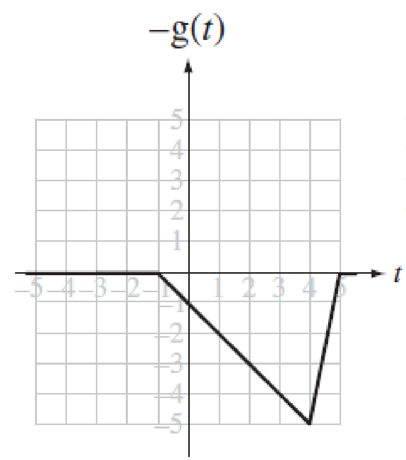
- Bir fonksiyonu Sabit bir sayı ile çarpmak anlamına gelir. **g(*t*) → *A* g(*t*),** gösterim ile ifade edilir. Yani g(*t*) her t için *A değeri ile çarpılır*. Buna genlik ölçekleme adı verilir.



t	$g(t)$
–5	0
–4	0
–3	0
–2	0
–1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	0



t	$1/2\times g(t)$
–5	0
–4	0
–3	0
–2	0
–1	0
0	1/2
1	1
2	3/2
3	2
4	5/2
5	0



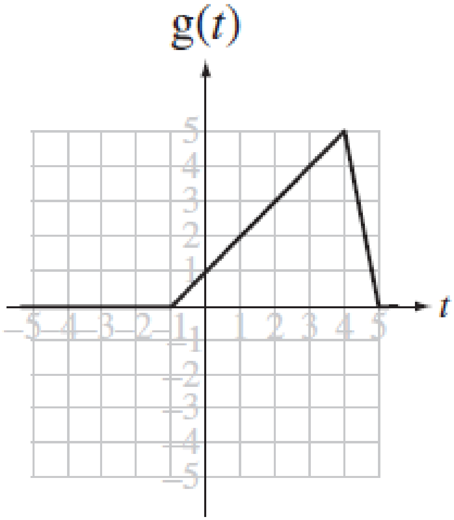
t	$-g(t)$
–5	0
–4	0
–3	0
–2	0
–1	0
0	–1
1	–2
2	–3
3	–4
4	–5
5	0

Kaydırma ve Ölçekleme

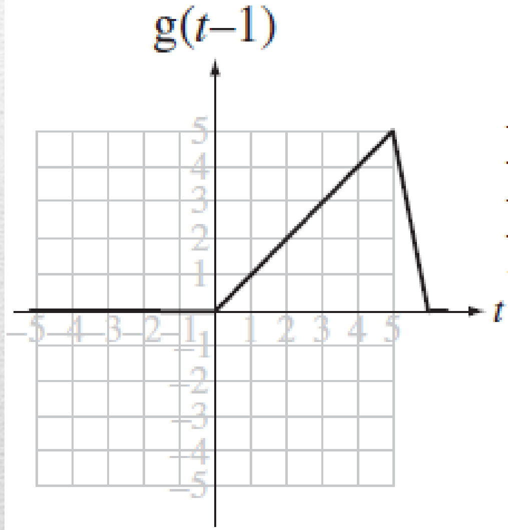
Kaydırma ve Ölçekleme

Zamanda Kaydırma

- Bağımsız değişkenin herhangi bir sabit **t_0** için **$t \rightarrow (t-t_0)$** şeklinde değişmeye zamanda kaydırma veya zamanda öteleme denir. g(t)'yi **t_0** pozitif ilse **t_0** birim sağa, negatif ise **t_0** birim sola kaydırma anlamına gelir.



t	$g(t)$
–5	0
–4	0
–3	0
–2	0
–1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	0

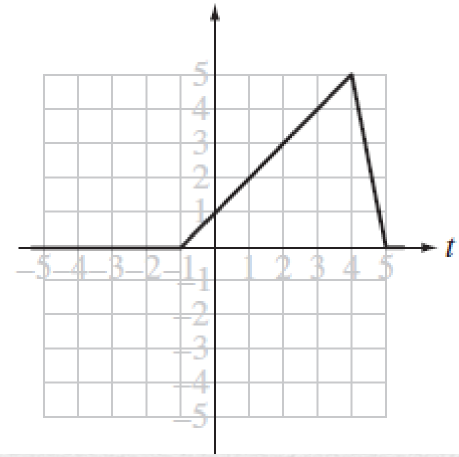


t	$t-1$	$g(t-1)$
–5	–6	0
–4	–5	0
–3	–4	0
–2	–3	0
–1	–2	0
0	–1	0
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5

Zamanda Ölçekleme

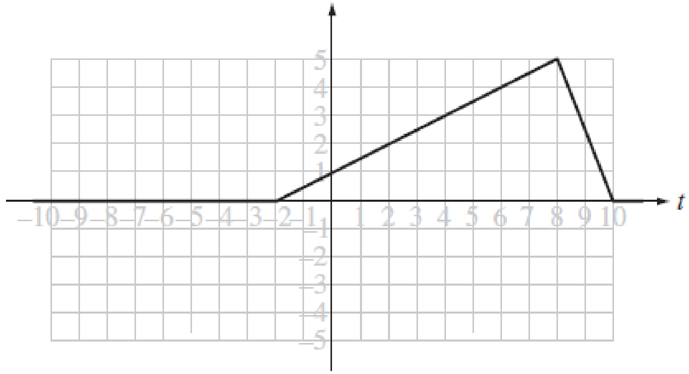
- Bağımsız değişkenin **t → t/a** şeklinde değiştiği durumu ele alalım. Bu değişim **g(t)** fonksiyonunu yatay olarak a faktörüyle **g(t/a)** şeklinde genişletir. Bu durum zamanda ölçekleme olarak adlandırılır. **a<0** olması durumunda sinyal zamanda ters döner, bu durum ise **zamanda tersinme** olarak adlandırılır.

g(t)



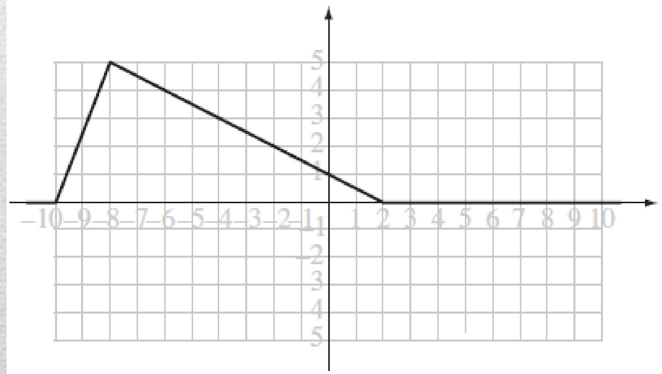
t	$g(t)$
–5	0
–4	0
–3	0
–2	0
–1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	0

g(t/2)



t	$t/2$	$g(t/2)$
–10	–5	0
–8	–4	0
–6	–3	0
–4	–2	0
–2	–1	0
0	0	1
2	1	2
4	2	3
6	3	4
8	4	5
10	5	0

g(–t/2)



t	$-t/2$	$g(-t/2)$
–10	5	0
–8	4	5
–6	3	4
–4	2	3
–2	1	2
0	0	1
2	–1	0
4	–2	0
6	–3	0
8	–4	0
10	–5	0

Kaydırma ve Ölçekleme

Aynı Anda Kaydırma ve Ölçekleme

- Genlikte ölçekleme, zamanda ölçekleme, zamanda kaydırma işlemleri bir arada uygulanabilir.

$$g(t) \to Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right) \quad \to \quad g(t) \xrightarrow{\qquad} Ag(t) \xrightarrow{t \to t/a} Ag(t/a) \xrightarrow{t \to t-t_0} Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$

- Burada değişimlerin sırasının önemli olduğuna dikkat edilmelidir. Zamanda ölçeklemenin ve zamanda kaydırmanın sırasını değiştirirsek şunu elde ederiz.

$$g(t) \xrightarrow{\qquad} Ag(t) \xrightarrow{t \to t-t_0} Ag(t-t_0) \xrightarrow{t \to t/a} Ag(t/a - t_0) \quad \neq \quad g(t) \to Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$

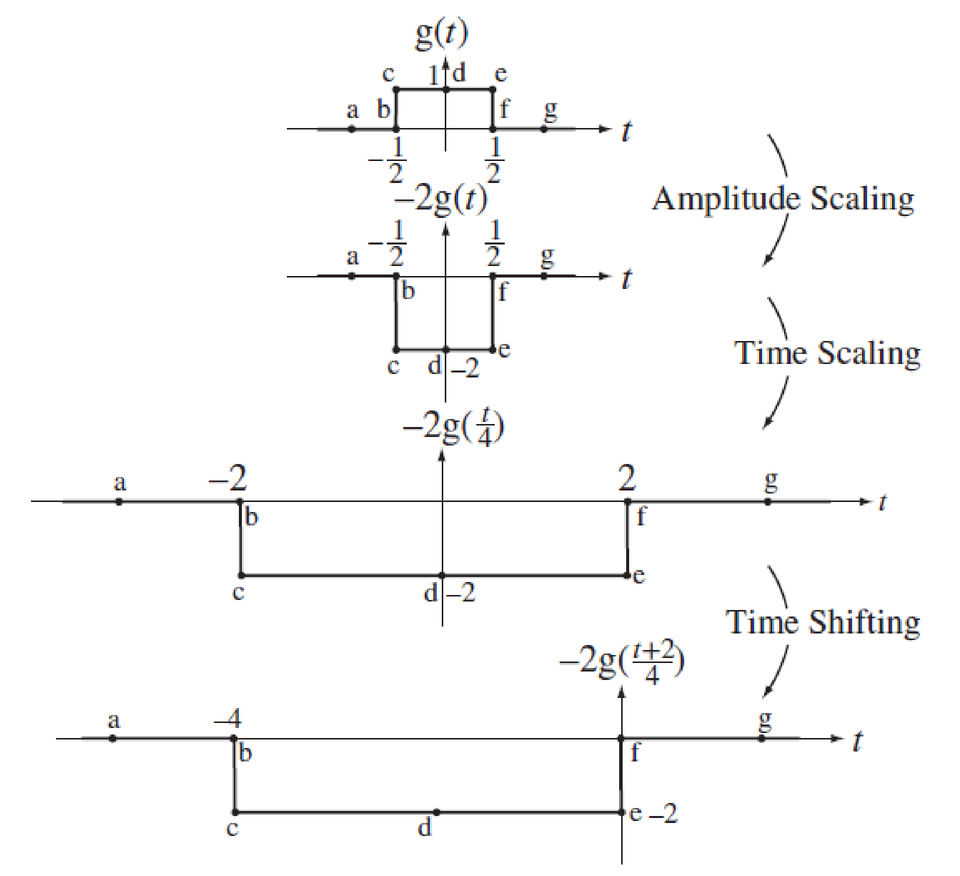
Kaydırma ve Ölçekleme

Aynı Anda Kaydırma ve Ölçekleme

g(t) → -2 g(t)

-2 g(t) → -2 g(t/4)

-2 g(t/4) → -2 g((t+2)/4)



Kaydırma ve Ölçekleme

Bölüm Sonu