

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
INSTITUTO DE MICROGRAVEDAD IGNACIO DA RIVA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO
MÁSTER UNIVERSITARIO EN SISTEMAS ESPACIALES

Memoria semestral:
Análisis del problema de los tres cuerpos restringido

Sergio MARÍN COCA
Marcos RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ
Carlos RODRÍGUEZ JAMILENA

Grupo 06
Ampliación de Matemáticas: *Entornos de programación*

Abril de 2019

Contenidos

1	Introducción	1
2	Puntos de Lagrange	1
2.1	Cálculo de los puntos de Lagrange	1
3	Estabilidad de los puntos de Lagrange	2
4	Simulación de los puntos Lagrange	4
5	GMAT	9
6	Conclusiones	11

Índice de figuras

1	Simulación del punto de Lagrange L1.	4
2	Simulación del punto de Lagrange L2.	4
3	Simulación del punto de Lagrange L3.	5
4	Simulación del punto de Lagrange L4.	5
5	Simulación del punto de Lagrange L5.	5
6	Tiempo de cálculo en función del número de pasos para un tiempo adimensional de $t = 100$	6
7	Error en función del tiempo adimensional para el punto L1. . . .	7
8	Error en función del tiempo adimensional para el punto L2. . . .	7
9	Error en función del tiempo adimensional para el punto L3. . . .	7
10	Error en función del tiempo adimensional para el punto L4. . . .	8
11	Error en función del tiempo adimensional para el punto L5. . . .	8
12	Satélite en L1.	9
13	Satélite en L2.	9
14	Satélite en L3.	10
15	Satélite en L4.	10
16	Satélite en L5.	10

Índice de tablas

1	Coordenadas adimensionalizadas respecto del centro de masas Tierra-Luna de los puntos de Lagrange.	2
2	Autovalores para el punto L1.	3
3	Autovalores para el punto L2.	3
4	Autovalores para el punto L3.	3
5	Autovalores para el punto L4.	3
6	Autovalores para el punto L5.	3

1 Introducción

El objetivo del presente trabajo es hallar los puntos de Lagrange del sistema Tierra-Luna-Sat, simular cómo evolucionan y estudiar la estabilidad con distintos integradores temporales. Además, se compararán los resultados con los ofrecidos por GMAT.

2 Puntos de Lagrange

Los puntos de Lagrange son las soluciones estacionarias del problema de los tres cuerpos restringido a órbitas circulares. Si, por ejemplo, se tienen dos cuerpos grandes en órbita circular alrededor de su centro de masas común, hay cinco posiciones en el espacio donde un tercer cuerpo, de masa despreciable frente a la de los otros dos, puede estar situado y mantener su posición relativa respecto a los dos cuerpos grandes. Visto desde un sistema de referencia giratorio que rota con el mismo período que los dos cuerpos co-orbitales, el campo gravitatorio de dos cuerpos grandes combinado con la fuerza centrífuga se compensa en los puntos de Lagrange, permitiendo al tercer cuerpo mantenerse estacionario con respecto a los dos primeros.

2.1 Cálculo de los puntos de Lagrange

Las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un cuerpo de masa despreciable atraído por fuerzas gravitatorias de la Tierra y de la Luna se exponen a continuación:

$$\ddot{x} = x + 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{d^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r^3} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = y - 2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{d^3} - \frac{\mu y}{r^3} \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)z}{d^3} - \frac{\mu z}{r^3} \quad (3)$$

Las coordenadas cartesianas de la posición del cuerpo (x , y y z) están adimensionalizadas con la distancia Tierra-Luna (384.400 Km) y se miden respecto al centro de masas Tierra-Luna. Por otra parte, d y r son las distancias adimensionales del cuerpo a la Tierra y del cuerpo a la Luna respectivamente y se pueden calcular como:

$$d^2 = (x+\mu)^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$$

$$r^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

Por último, el parámetro μ es la relación entre la masa de la Luna y la masa total del sistema:

Tabla 1: Coordenadas adimensionalizadas respecto del centro de masas Tierra-Luna de los puntos de Lagrange.

	x	y	z
L_1	0,8369	0	0
L_2	1,1557	0	0
L_3	-1,0051	0	0
L_4	0,4878	0,8660	0
L_5	0,4878	-0,8660	0

$$\mu = \frac{m_L}{m_T + m_L} \quad (6)$$

$$\mu \approx 0,01216$$

Puesto que la posición de los puntos de Lagrange respecto al centro de masas Tierra-Luna se tienen que mantener constante, las derivadas primeras y segundas de las ecuaciones (1) - (3) tienen que ser nulas. De esta manera, para obtener la posición de los puntos de Lagrange se debe resolver el sistema no lineal formado por las siguientes ecuaciones:

$$0 = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{d^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r^3} \quad (7)$$

$$0 = y - \frac{(1-\mu)y}{d^3} - \frac{\mu y}{r^3} \quad (8)$$

$$0 = -\frac{(1-\mu)z}{d^3} - \frac{\mu z}{r^3} \quad (9)$$

Las coordenadas de los cinco puntos de Lagrange se muestran en la Tabla 1. Para hallarlos se ha resuelto el anterior sistema de ecuaciones implementándolo en MATLAB mediante la función *fsolve* con distintas semillas.

3 Estabilidad de los puntos de Lagrange

Para comprobar la estabilidad de cada punto sin necesidad de integrar las ecuaciones del movimiento se puede calcular numéricamente la matriz jacobiana particularizada en dichos puntos y hallar los autovalores asociados.

Los seis autovalores asociados al sistema diferencial de ecuaciones se encuentran en las Tablas (2)-(6):

Tabla 2: Autovalores para el punto L1.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$-2,9322$	$2,9322$	$2,3344i$	$-2,3344i$	$2,2688i$	$-2,2688i$

Tabla 3: Autovalores para el punto L2.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$-2,1587$	$2,1587$	$1,8626i$	$-1,8626i$	$1,7861i$	$-1,7861i$

Tabla 4: Autovalores para el punto L3.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$-0,1779$	$0,1779$	$1,0104i$	$-1,0104i$	$1,0053i$	$-1,0053i$

Tabla 5: Autovalores para el punto L4.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$0,9545i$	$-0,9545i$	$0,2983i$	$-0,2983i$	i	$-i$

Tabla 6: Autovalores para el punto L5.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$0,9545$	$-0,9545$	$0,2983i$	$-0,2983i$	i	$-i$

Analizando los signos de la parte real e imaginaria de todos los autovalores se demuestra que los puntos L1, L2 y L3 son de equilibrio inestable mientras que los puntos L4 y L5 son puntos de equilibrio estables.

4 Simulación de los puntos Lagrange

Para simular los puntos de Lagrange se va a proceder a integrar numéricamente las ecuaciones del movimiento con dos esquemas temporales de orden 4. Estos esquemas numéricos son Dormand-Prince y Adams-Bashforth-Moulton. Esta integración se realiza en un tiempo adimensional de $t = 100$ con un total de 10^5 pasos y con una perturbación en la componente y de la velocidad de 0,01.

Los resultados se observan en las siguientes figuras:

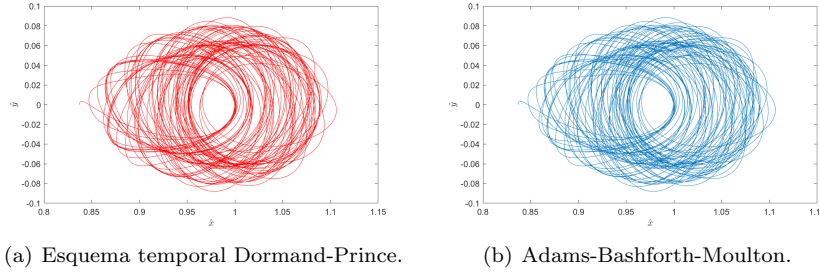


Figura 1: Simulación del punto de Lagrange L1.

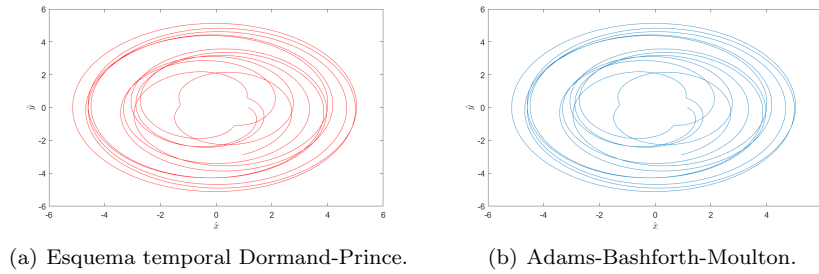
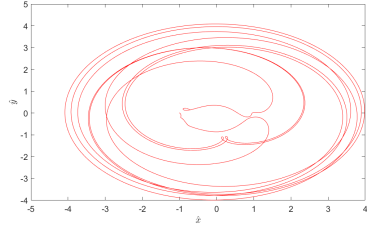
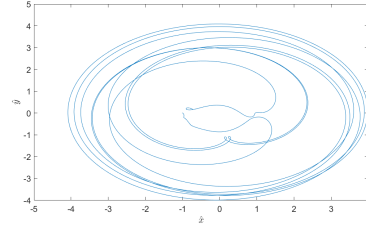


Figura 2: Simulación del punto de Lagrange L2.

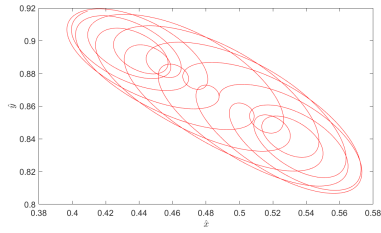


(a) Esquema temporal Dormand-Prince.

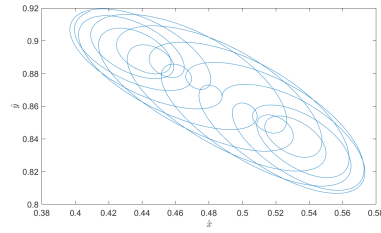


(b) Adams-Bashforth-Moulton.

Figura 3: Simulación del punto de Lagrange L3.

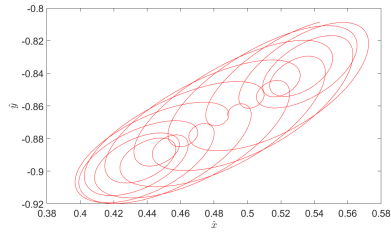


(a) Esquema temporal Dormand-Prince.

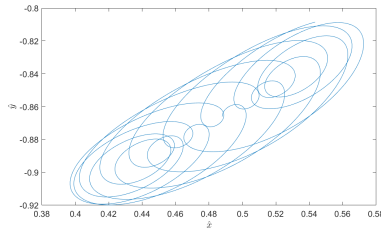


(b) Adams-Bashforth-Moulton.

Figura 4: Simulación del punto de Lagrange L4.



(a) Esquema temporal Dormand-Prince.



(b) Adams-Bashforth-Moulton.

Figura 5: Simulación del punto de Lagrange L5.

Se puede observar que un satélite no puede mantenerse orbitando en los puntos L1 L2 y L3 cuando es sometido a una pequeña perturbación. En cambio, sí que puede mantenerse en los puntos L4 y L5 de forma indefinida.

En la siguiente Figura se compara el tiempo de cómputo necesario para simular el punto L1 durante un tiempo adimensional de 100 en función del número de pasos:

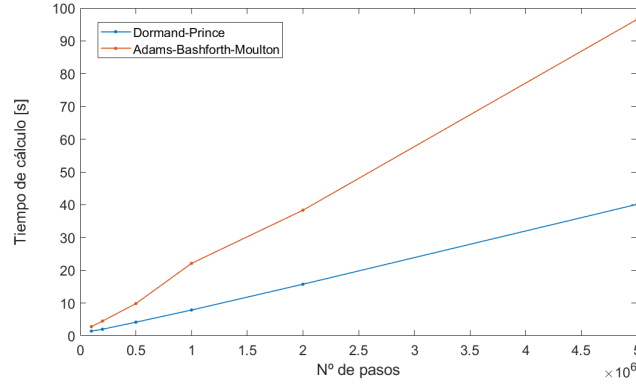


Figura 6: Tiempo de cálculo en función del número de pasos para un tiempo adimensional de $t = 100$.

Como se puede observar, con el método de Dormand Prince el tiempo de cálculo es prácticamente lineal con el número de pasos mientras que con el método de Adams-Bashforth-Moulton este se dispara rápidamente.

En las Figuras (6)-(10) se puede observar en función del tiempo el error, o desviación, en posición y velocidad cuando un satélite orbita en cada uno de los puntos de Lagrange y es sometido a una pequeña perturbación. El esquema numérico empleado es el Dormand-Prince de cuarto orden con un total de 1 millón de pasos temporales.

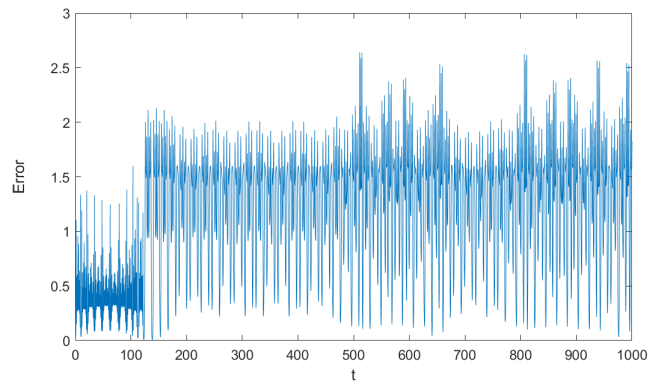


Figura 7: Error en función del tiempo adimensional para el punto L1.

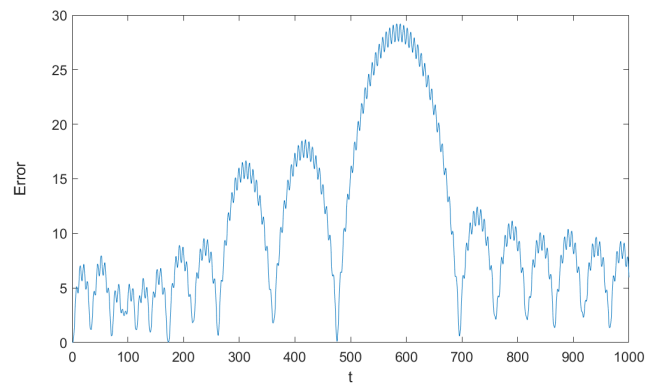


Figura 8: Error en función del tiempo adimensional para el punto L2.

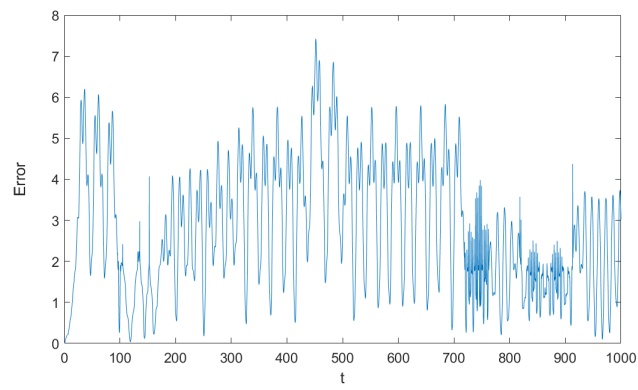


Figura 9: Error en función del tiempo adimensional para el punto L3.

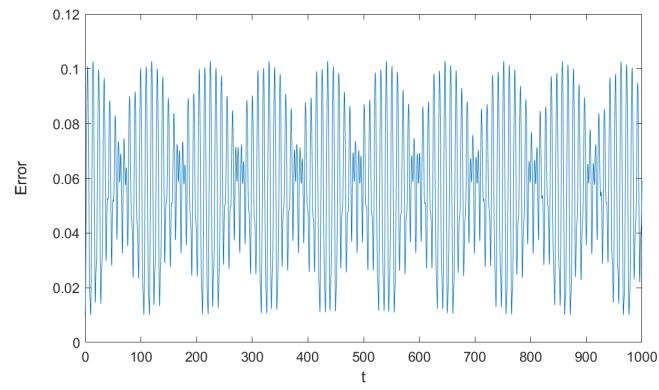


Figura 10: Error en función del tiempo adimensional para el punto L4.

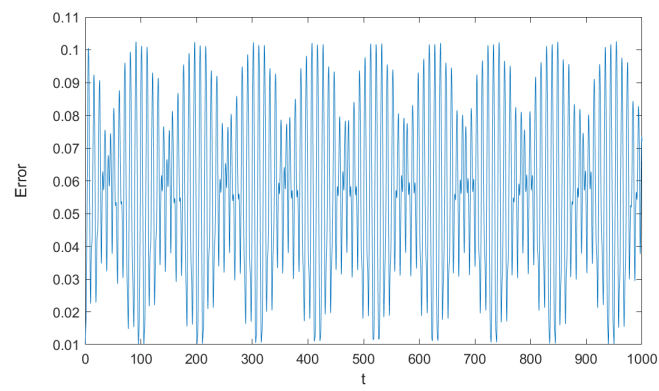


Figura 11: Error en función del tiempo adimensional para el punto L5.

5 GMAT

Mediante GMAT es posible simular los puntos de Lagrange de cualquier par de cuerpos del sistema Solar. Estos puntos se calculan automáticamente al seleccionar la Tierra y la Luna y lo que se hace es situar un satélite en en dichos puntos con velocidad y posición relativas nulas. Los resultados se muestran en las Figuras (11)-(16), se han obtenido seleccionando el esquema numérico de Adams-Bashforth-Moulton y se ha integrado durante 1 año. Adams-Bashforth-Moulton

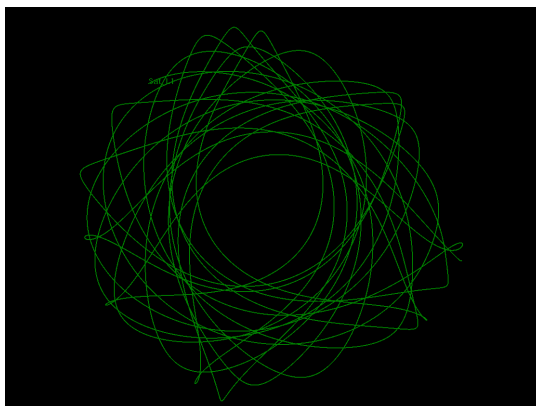


Figura 12: Satélite en L1.

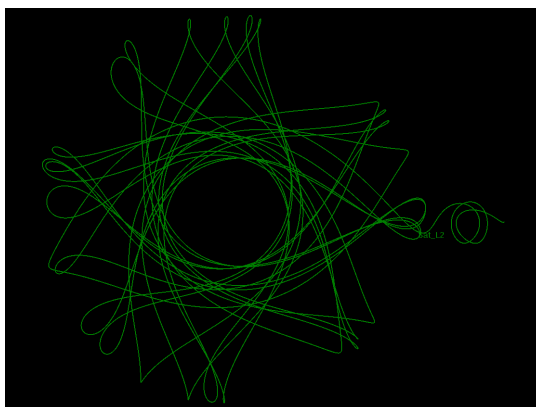


Figura 13: Satélite en L2.

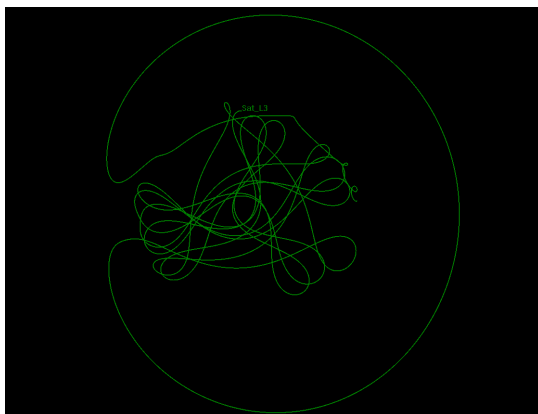


Figura 14: Satélite en L3.

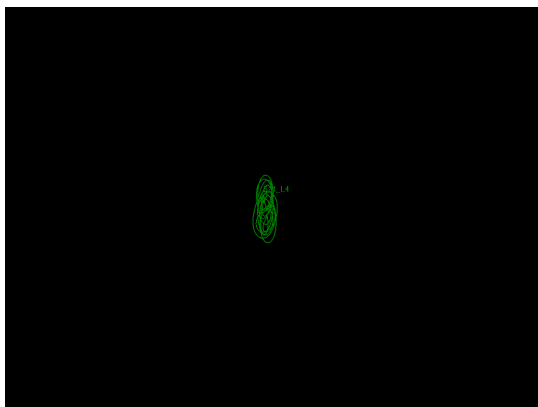


Figura 15: Satélite en L4.

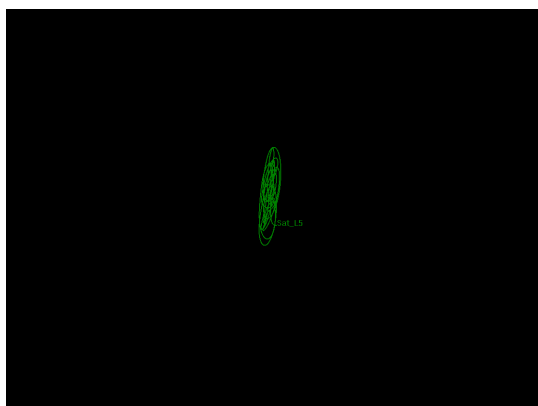


Figura 16: Satélite en L5.

6 Conclusiones

- Tal y como se explicó en el primer informe de la asignatura, el cálculo de la matriz del sistema con una función de pocas líneas de código refresca el tratamiento del problema de estabilidad en el sentido de que queda reducido al análisis de los autovalores de la matriz jacobiana y no es necesaria la integración del sistema de ecuaciones no lineal para ello.
- A la hora de obtener las coordenadas de los cinco puntos de Lagrange, la función *fsolve* de Matlab los calcula de manera lo suficientemente precisa siempre y cuando la semilla inicial sea próxima a la posición de los puntos en cuestión.
- Tras el análisis de los signos de la parte real de los autovalores de la matriz del sistema en estudio, se ha conseguido demostrar que los puntos L1, L2 y L3 son de equilibrio inestable, mientras que los puntos L4 y L5 son puntos de equilibrio estable.
- Una vez realizada la integración, se comprueba lo establecido en el tercer punto de esta lista de conclusiones. Ya sea empleando el esquema Dormand-Prince, como mediante el esquema Adams-Bashforth-Moulton, se ha conseguido concluir que un satélite no puede mantenerse orbitando en los puntos L1, L2 y L3 cuando es sometido a pequeñas perturbaciones, lo que sí ocurre en los puntos L4 y L5.
- En relación a los dos esquemas numéricos empleados, se ha demostrado que el método Dormand-Prince el tiempo de cálculo varía de manera lineal con el número de pasos, mientras que con el método ABM el crecimiento, a pesar de seguir teniendo un carácter prácticamente lineal, es mucho más crítico.
- Para el análisis del error cometido, se ha empleado un Dormand-Prince de cuarto orden con un total de 1 millón de pasos temporales y un tiempo adimensional de 1000. Se ha demostrado que bajo estas condiciones, los errores cometidos para los puntos L1, L2 y L3 son mayores (alcanzando el 28% para el punto L2) que los cometidos para los puntos estables, L4 y L5 (del orden de entre 0.01 y 0.1%). Cabe destacar el carácter oscilatorio de los errores calculados para todos los puntos de Lagrange, unido a que para los puntos L4 y L5 estas funciones error parecen ser periódicas de período $10T$.
- Finalmente, se han comprobado los análisis realizados mediante código propio con los que se obtienen empleando el software GMAT. Para ello, a la hora de implementar el problema en GMAT, se ha intentado respetar al máximo las hipótesis y condiciones tomadas en los cálculos con Matlab. Como ya se ha visto, se ha vuelto a comprobar el carácter estable o inestable de cada uno de los puntos de Lagrange. Lo interesante de esta conclusión es tener la certeza de que, en caso de que sea necesario, en un

futuro los integrantes del grupo no tendremos dudas en adentrarnos en el código propio de GMAT para modificarlo y adaptarlo a las necesidades de cualquier misión.