Modelo Determinístico para calendarización de partidos de fútbol

Alejandro Cataldo[a], Guillermo Durán[b], Pablo Rey[c], Tomás Reyes[d], Antoine Sauré[e], Denis Sauré[f], Gustavo Angulo[g]

[a] *School of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile, Av. Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile. Corresponding Author. Tel: +56 (2) 2354 1234. Email: aecatald@uc.cl*
[b] *XXX, Universidad de Buenos Aires, XXX, Buenos Aires, Argentina.*
[c] *XXX, Universidad Tecnológica Metropolitana, XXX, Santiago, Chile.*
[d] *School of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile, Av. Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile.*
[e] *Telfer School of Management, Universidad de Ottawa, 55 Laurier Ave E, Ottawa, Canadá.*
[f] *School of Engineering, Universidad de Chile, XXX, Santiago, Chile.*
[g] *School of Engineering, Pontificia Universidad Católica de Chile, Av. Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile.*

1. Formulation of the Model

Comenzamos la formulación del modelo definiendo la notación que será utilizada en su formulación.

Los conjuntos:

- $\mathcal{F}$: conjunto de fechas que restan por jugar en el campeonato.
- $\mathcal{I}$: conjunto de equipos que conforman el torneo.
- $\mathcal{N}$: conjunto de partidos (equipo local vs equipo visitante) que aún deben enfrentarse en alguna de las fechas restantes del campeonato.
- $\mathcal{S}$: conjunto de patrones de localías y visitas posibles en las K fechas que restan por jugar en el torneo.
- $\mathcal{G}$: conjunto de patrones de resultados (V,E,D) en las K fechas que restan por jugar en el torneo.
- $\mathcal{T}$: conjunto de puntos que se pueden lograr en el torneo.
- $\mathcal{H}_{ift} \subseteq \mathcal{G}$: conjunto de patrones de resultados compatibles con el equipo i, y que hasta la fecha f (incluida) le otorgan t puntos.

Los índices:

f, l : índice asociado al conjunto de fechas que restan por jugar ($f \in \mathcal{F}$).

i, j : índices asociados al conjunto de equipos que conforman el torneo ($i, j \in \mathcal{I}$)

n : índice asociado al conjunto de partidos (equipo local vs equipo visitante) que debe programarse en alguna de las fechas restantes del torneo ($n \in \mathcal{N}$).

s : índice asociado al conjunto de patrones de localías y visitas ($s \in \mathcal{S}$).

g : índice asociado al conjunto de patrones de resultados ($g \in \mathcal{G}$).

t, h : índices asociados al conjunto de puntos ($t \in \mathcal{T}$).

Los parámetros:

E_i^t : parámetro binario que toma valor 1 si el equipo i tiene t puntos justo al terminar la fecha anterior a la primera de las fechas que quedan por jugar.

R_{in} : parámetro discreto que toma valor 0, 1 o 3, y que corresponde a la cantidad de puntos que gana el equipo i al jugar el partido n (en el que juegan i vs j).

EL_{in} : parámetro binario que toma valor 1 si el equipo i es local en el partido n, y 0 en cualquier otro caso.

EV_{in} : parámetro binario que toma valor 1 si el equipo i es visita en el partido n, y 0 en cualquier otro caso.

W_{is} : parámetro binario que toma valor 1 si al equipo i se le puede asignar el patrón de localías y visitas s, y 0 en cualquier otro caso.

L_s^f : parámetro binario que toma el valor 1 si el patrón de localías y visitas s indica que el partido es de local en la fecha f, y 0 en cualquier otro caso.

VG_{ig} : parámetro binario que toma el valor 1 si se puede asignar al equipo i el patrón de resultados g, y 0 en cualquier otro caso.

RP_g^f : parámetro discreto que toma valor 0, 1 o 3, y que corresponde a la cantidad de puntos asociados al resultado que contiene el patron de resultados g en la fecha f.

B_i^{tf} : parámetro binario que toma el valor 1 si el equipo i en la fecha f podría llegar a los t puntos, y 0 en cualquier otro caso.

V^f : ponderación del atractivo en la fecha f.

Las variables:

x_n^f : variable binaria que toma valor 1 si el partido n se programa en la fecha f, y 0 en cualquier otro caso.

y_{is} : variable binaria que toma valor 1 si al equipo i se le asigna el patrón de localías y visitas s, y 0 en cualquier otro caso.

z_{ig} : variable binaria que toma valor 1 si al equipo i se le asigna el patrón de resultados g, y 0 en cualquier otro caso.

P_i^{tf} : variable binaria que toma valor 1 si el equipo i tiene t puntos al finalizar la fecha f, y 0 en cualquier otro caso.

A_i^f : variable binaria que toma valor 1 si partido del equipo i en la fecha f es atractivo (por salir campeón), y 0 en cualquier otro caso.

D_i^f : variable binaria que toma valor 1 si partido del equipo i en la fecha f es atractivo (por no descender), y 0 en cualquier otro caso.

Dado todo lo anterior, proponemos el siguiente modelo determinístico para determinar la programación óptima de los partidos que resta por disputar, buscando maximizar el valor en la atractividad de lo que resta de campeonato. Este problema lo llamamos *Scheduling Soccer Tournament Problem under measures of Attractiveness (SSTPA)*, y el siguiente modelo de programación matemática permite resolverlo.

$$\text{(SSTPA)} \qquad \text{Max} \sum_{f\in\mathcal{F}} \sum_{i\in\mathcal{I}} V^f \left(A_i^f + D_i^f\right) \tag{1}$$

s.t:

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} x_n^f = 1 \qquad \forall\, n \in \mathcal{N}. \tag{2}$$

$$\sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{in}+EV_{in}=1} x_n^f = 1 \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F}. \tag{3}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}:W_{is}=1} y_{is} = 1 \qquad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{4}$$

$$y_{is} = 0 \qquad \forall i \in \mathcal{I}; s \in \mathcal{S} : W_{i,s} = 0. \tag{5}$$

$$\sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{in}=1} x_n^f = \sum_{s\in\mathcal{S}:L_s^f=1} y_{is} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F}. \tag{6}$$

$$\sum_{n\in\mathcal{N}:EV_{in}=1} x_n^f = \sum_{s\in\mathcal{S}:L_s^f=0} y_{is} \qquad \forall\, i\in\mathcal{I}; f\in\mathcal{F}. \tag{7}$$

$$\sum_{t\in\mathcal{T}} P_i^{tf} = 1 \qquad \forall\, i\in\mathcal{I}; f\in\mathcal{F}. \tag{8}$$

$$\sum_{g\in\mathcal{G}} z_{ig} = 1 \qquad \forall\, i\in\mathcal{I}. \tag{9}$$

$$\sum_{n\in\mathcal{N}:EL_{in}+EV_{in}=1} x_n^f R_{in} = \sum_{g\in\mathcal{G}:VG_{ig}} z_{ig} RP_g^f \qquad \forall\, i\in\mathcal{I}; f\in\mathcal{F}. \tag{10}$$

$$P_i^{tf} = \sum_{g\in\mathcal{H}_{ift}} z_{ig} \qquad \forall\, i\in\mathcal{I}; f\in\mathcal{F}; t\in\mathcal{T}. \tag{11}$$

$$A_i^f \le \left(1 - P_i^{t(f-1)}\right) + \sum_{h\in\mathcal{T}:h\le t+3(K-f+1)} P_j^{h(f-1)} \qquad \forall\, i,j\in\mathcal{I}; t\in\mathcal{T}; f\in\mathcal{F} : f\ge 2 \wedge i\ne j. \tag{12}$$

$$A_i^f \le \left(1 - E_i^t\right) + \sum_{h\in\mathcal{T}:h\le t+3(K-f+1)} E_j^h \qquad \forall\, i,j\in\mathcal{I}; t\in\mathcal{T}; f\in\mathcal{F} : f = 1 \wedge i\ne j. \tag{13}$$

$$A_i^f \le 1 \qquad \forall\, i\in\mathcal{I}; f\in\mathcal{F}. \tag{14}$$

$$A_i^f \le A_i^{f-1} \qquad \forall\, i\in\mathcal{I}; f\in\mathcal{F} : f\ge 2. \tag{15}$$

$$D_i^f \leq \left(1 - P_i^{t(f-1)}\right) + \sum_{h \in \mathcal{T}: h \geq t-3(K-f+1)} P_j^{h(f-1)} \qquad \forall\, i, j \in \mathcal{I}; t \in \mathcal{T}; f \in \mathcal{F} : f \geq 2 \wedge i \neq j. \tag{16}$$

$$D_i^f \leq \left(1 - E_i^t\right) + \sum_{h \in \mathcal{T}: h \geq t-3(K-f+1)} E_j^h \qquad \forall\, i, j \in \mathcal{I}; t \in \mathcal{T}; f \in \mathcal{F} : f = 1 \wedge i \neq j. \tag{17}$$

$$D_i^f \leq 1 \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F}. \tag{18}$$

$$D_i^f \leq D_i^{f-1} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F} : f \geq 2. \tag{19}$$

$$x_n^f \in \{0, 1\} \qquad \forall\, n \in \mathcal{N}; f \in \mathcal{F}. \tag{20}$$

$$y_{is} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; s \in \mathcal{S}. \tag{21}$$

$$P_i^{tf} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; t \in \mathcal{T}; f \in \mathcal{F}. \tag{22}$$

$$A_i^f, D_i^f \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F}. \tag{23}$$

La restricciones se describen a continuación. La restricción (2) asegura que cada uno de los partidos que se deben programar es programado en exactamente una de las fechas por programar. La restricción (3) asegura que todo equipo juega exactamente un partido en cada fecha. La restricción (4) asigna un único patrón válido (que sea consistente con los dos partidos que ese equipo tuvo antes de la primera de las fechas que se deben programar) de localías/visitas a cada equipo. La restricción (5) se eliminan las asignaciones de patrones no válidas para cada equipo. Las restricciones (6) y (7) relaciona consistentemente la asignación de patrones y la programación de partidos para cada equipo. Las restricciones (8), (9), (10) y (11) son para calcular los puntos que tendrá cada equipo al finalizar cada fecha, dado que se conocen los resultados de cada partido y el patrón de resultados que se le asigna a cada equipo. Las restricciones (12), (13), (14 y (15) permiten clasificar si el partido programado para cada equipo en cada fecha es atractivo aún para determinar el campeón del campeonato. Las restricciones (16), (17), (18) y (19) permiten clasificar si el partido programado para cada equipo en cada fecha es atractivo aún para determinar el último equipo del campeonato. Las restricciones (20), (21), (22), y (23) corresponden a la naturaleza de las variables.

La función objetivo definida en (1) busca maximizar el atractivo total de la programación de los partidos en las fechas por programar.

Ahora, teniendo en cuenta que se ha logrado encontrar una configuración de partidos a fechas, se construirá un modelo que sirva para permutar la posición de estas fechas buscando maximizar una función de aproximación del valor del atractivo esperado del torneo.

Así, la notación empleada para la construcción de este nuevo modelo es:

Los conjuntos:

$\mathcal{C}$	:	conjunto de fechas previamente configuradas desde el modelo anterior.
$\mathcal{F}$	:	conjunto de fechas que se deben programar en el campeonato.
$\mathcal{I}$	:	conjunto de equipos que conforman el torneo.

Los índices:

c	:	índice asociado al conjunto de fechas previamente configuradas ($c \in \mathcal{C}$).
f, l	:	índice asociado al conjunto de fechas que restan por jugar ($f \in \mathcal{F}$).
i, j	:	índices asociados al conjunto de equipos que conforman el torneo ($i, j \in \mathcal{I}$)

Los parámetros:

L_{ic}	:	parámetro binario que toma el valor 1 si el equipo i juega de local en la fecha previamente configurada c, y 0 en cualquier otro caso.

Las variables:

x_c^f	:	variable binaria que toma valor 1 si la fecha previamente configurada c se programa en la fecha f, y 0 en cualquier otro caso.
y_i^f	:	variable binaria que toma valor 1 si al equipo i juega de local en la fecha f, y 0 en cualquier otro caso.
α_i^f	:	variable binaria que toma valor 1 si al equipo i juega de local en la fecha f y en la fecha $f+1$, y 0 en cualquier otro caso.
β_i^f	:	variable binaria que toma valor 1 si al equipo i juega de visita en la fecha f y en la fecha $f+1$, y 0 en cualquier otro caso.

Dado todo lo anterior, proponemos el siguiente modelo determinístico para determinar la programación óptima de los partidos que resta por disputar, buscando maximizar el valor en la atractividad de lo que resta de campeonato. Este problema lo llamamos *Fixture Permutation Problem (FPP)*, y el siguiente modelo de programación matemática permite resolverlo.

$$\text{(FPP)} \qquad \text{Max} \quad \sum_{i \in I} \sum_{f \in F} \sum_{f' \in F : f' > f} (PS_i^f - PS_i^{f'})^2 \tag{24}$$

s.t:

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} x_c^f = 1 \qquad \forall\, f \in \mathcal{F}. \tag{25}$$

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} x_c^f = 1 \qquad \forall\, c \in \mathcal{C}. \tag{26}$$

$$y_i^f = \sum_{c \in \mathcal{C}} L_{ic} x_c^f \qquad \forall i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F}. \tag{27}$$

$$\sum_{l \in \mathcal{F} : f \leq l \leq f+2} y_i^f \leq 2 \qquad \forall i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F} : f \leq |F| - 2. \tag{28}$$

$$\sum_{l \in \mathcal{F} : f \leq l \leq f+2} \left(1 - y_i^f\right) \leq 2 \qquad \forall i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F} : f \leq |F| - 2. \tag{29}$$

$$\sum_{f \in \mathcal{F} : f \leq |F|-1} \alpha_i^f \leq 1 \qquad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{30}$$

$$y_i^f + y_i^{f+1} - 1 \leq \alpha_i^f \qquad \forall i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F} : f \leq |F| - 1. \tag{31}$$

$$\sum_{f \in \mathcal{F} : f \leq |F|-1} \beta_i^f \leq 1 \qquad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{32}$$

$$\left(1 - y_i^f\right) + \left(1 - y_i^{f+1}\right) - 1 \leq \beta_i^f \qquad \forall i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F} : f \leq |F| - 1. \tag{33}$$

$$x_c^f \in \{0, 1\} \qquad \forall\, c \in \mathcal{C}; f \in \mathcal{F}. \tag{34}$$

$$y_i^f, \alpha_i^f, \beta_i^f \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \mathcal{I}; f \in \mathcal{F}. \tag{35}$$

La restricciones se describen a continuación. La restricción (25) asegura que cada una de las fechas previamente configuradas sea programada en exactamente una de las fechas por programar. La restricción (26) asegura que en toda fecha por programar se programa exactamente una única fecha previamente configurada. La restricción (27) indica, para cada equipo, si juega de local en la asignación de fechas previamente programadas a fechas. La restricción (28) garantiza que ningún equipo jugará más de dos partidos consecutivos de local, y equivalentemente, (29) garantiza que ningún equipo jugará más de dos partidos consecutivos de visita. Las restricciones (30), (31), (32) y (33) garantizan que cada equipo no tendrá más de un BREAK (dos partidos seguidos en la misma condición de localía) de local y de visita en la programación final. Las restricciones (34) y (35) corresponden a la naturaleza de las variables.

La función objetivo definida en (24) busca maximizar una función de aproximación del atractivo total de la programación de los partidos en las fechas por programar.