競プロ勉強会04

elzup

DP (Dynamic Programming)

動的計画法

DP 動的計画法

- 分割統治
  - 問題を分割しその結果から全体を解決する
- メモ化
  - 計算結果を保存しておき使い回す

DP: フィボナッチ

- フィボナッチ数列の n 番目を求める

- １１２３５８13

問題の分割とは

- フィボナッチ数列の定義

- f(0) = 0
  f(1) = 1
  f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)　　(n >= 2)

問題の分割とは

- n 番目のフィボナッチを求める
- -> (n - 1) 番目のフィボナッチを求める +
- (n - 2) 番目のフィボナッチを求める

- 漸化式は典型的な例
- -> 漸化式に落とし込んでから解く

実装してみよう

- AOJ - Fibonacci Number
- http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/description.jsp?id=ALDS1_10_A

fibonacci 関数(再帰)

- int fibonacci(int n) {
  if (n == 0) { return 0; }
  if (n == 1) { return 1; }
  return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);

メモ化する (メモ化再帰)

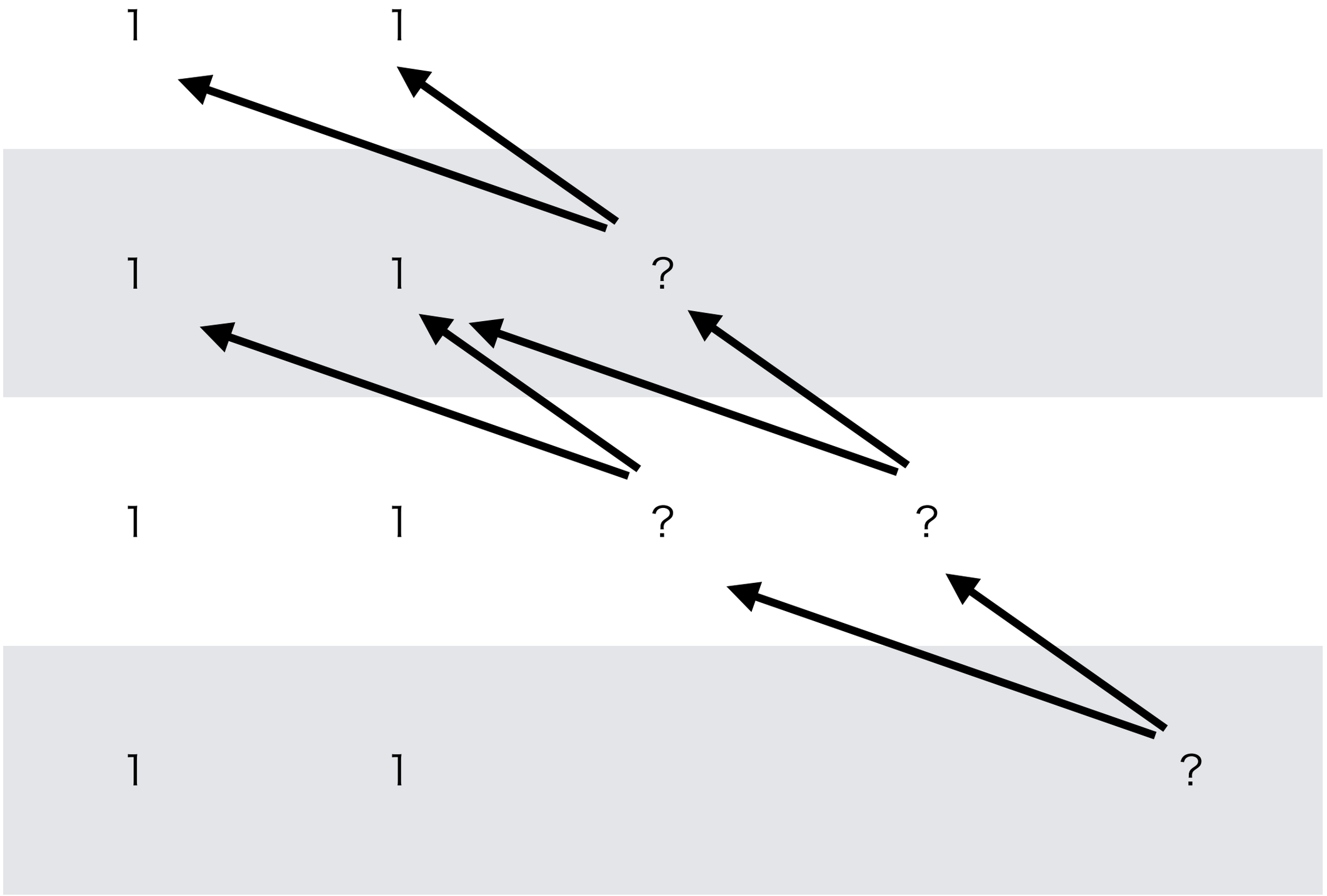
```
int fibonacci(int n) {
    if (memo[n] != -1) {
        return memo[n];
    }
    if (n == 0) { return 1; }
    if (n == 1) { return 1; }
    memo[n] = fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);
    return memo[n];
}
```

ボトムアップとトップダウン

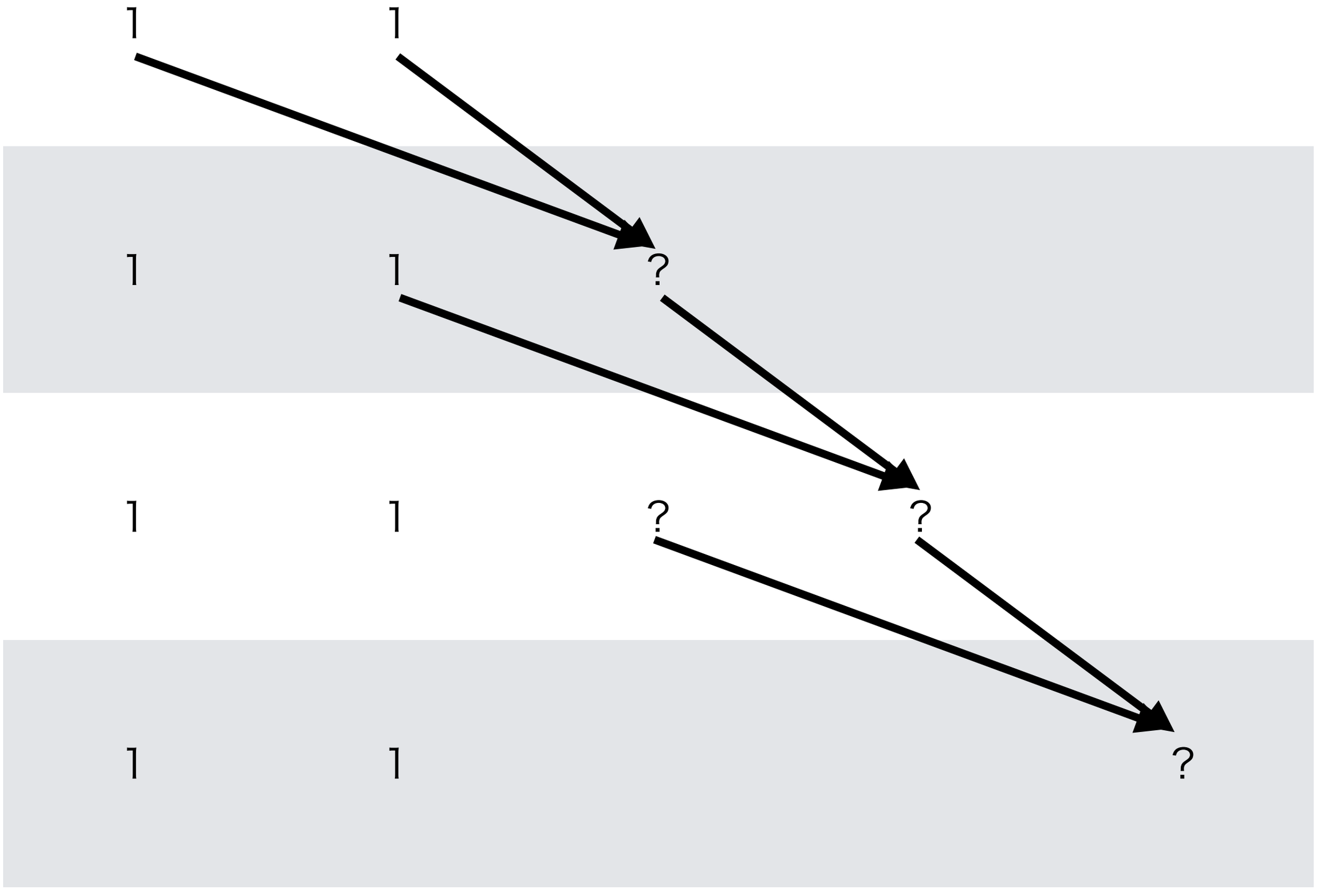
- トップダウン: 必要となった部分問題を解く
  再帰
- ボトムアップ: 先に部分問題を解いておく
  配列とループ

- さっきfibonacciの書き方はトップダウン

トップダウン



ボトムダウン



フィボナッチを
ボトムアップで書いてみる

```
int main() {
    int n;
    cin >> n;
    fill(dp, dp + 100, -1);
    dp[0] = dp[1] = 1;
    for (int i = 2; i <= n; ++i) {
        dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2];
    }
    cout << dp[n] << endl;
}
```

フィボナッチを
ボトムアップで書いてみる

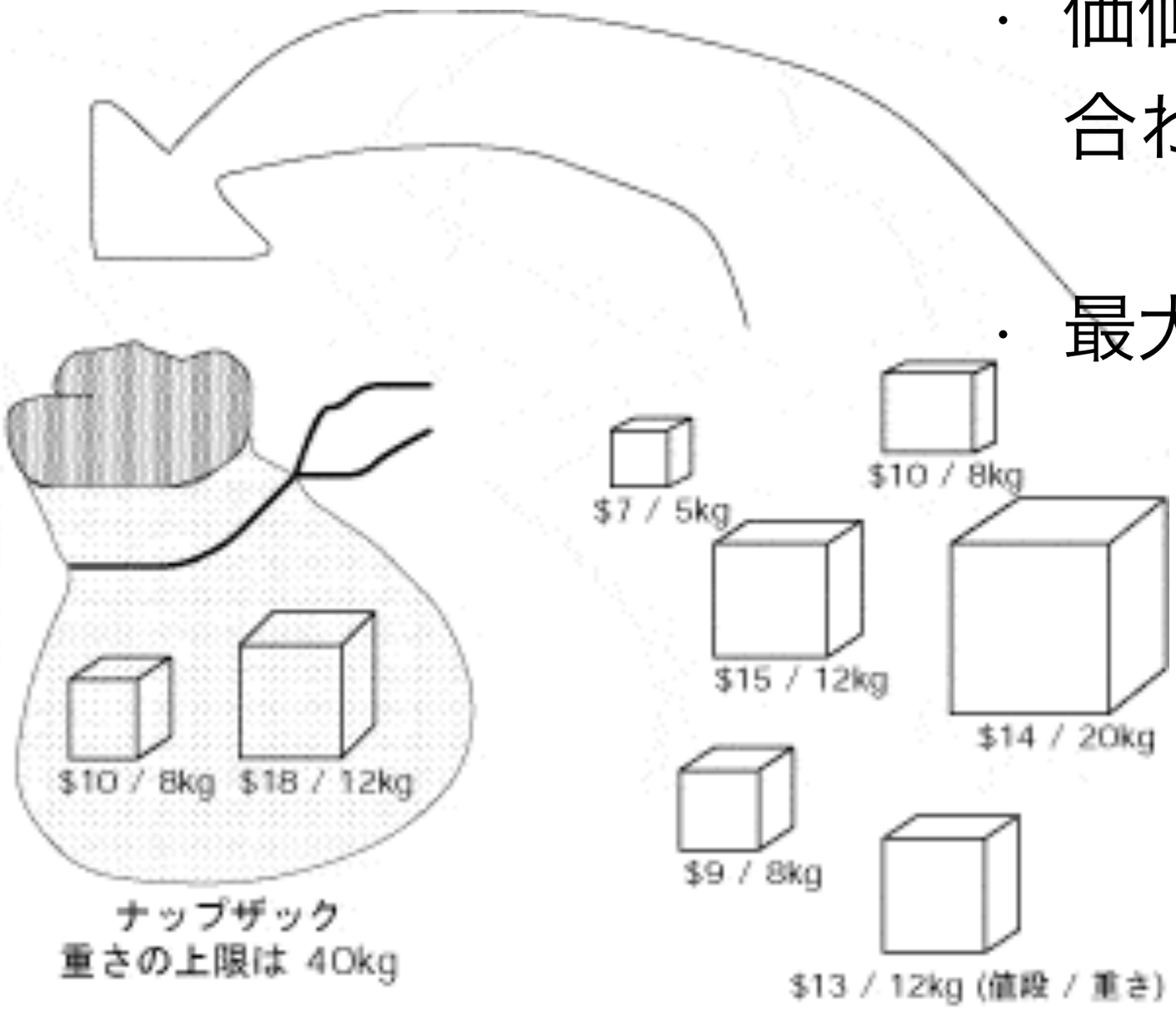
- 漸化式を順番に計算していく感じ

- => 再帰がなくなる!

DP: もう一問

- AOJ - 0-1 Knapsack Problem
- http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/description.jsp?id=DPL_1_B&lang=jp

ナップサック問題



- 価値が最大になる組み合わせはどれ？
- 最大となる時の価値は？

Input

```
4 5
4 2
5 2
2 1
8 3
```

```
N W
v1 w1
v2 w2
...
v(N) w(N)
```

DP: 考え方

- 全てのパターン(それぞれの有無)を試す？
- -> n個なら O(2 ^ n)
- -> (1 <= n <= 100) なので　不可能

DP: 考え方(トップダウン)

- １つずつ順番に入れるか入れないかを考えていったとする

- k番目の品物を入れた場合と入れなかった場合で価値が高い方

- [k 番目までと容量 w で最大価値] ->

- MAX(
  (k - 1)番目までと容量 w で最大価値,
  (k - 1)番目までと容量 (w - k番目の重さ) で最大価値 + k番目の価値])

再帰実装

```
int dp(int k, int w) {
    if (w < 0) { return NEGA_INF; }
    if (k == -1 || w < 0) { return 0 ; }
    return max(
            dp(k - 1, w - weight[k]) + value[k],
            dp(k - 1, w));
}
```

メモ化

- 関数について (k, w) の組み合わせが同じ時は前回の結果を返す -> memo[k][w]

- int dp(int k, int w) {

```
    if (w < 0) { return NEGA_INF; }
    if (k == -1 || w < 0) { return 0; }
    int &m = memo[k][w];
    if (m != -1) { return m; }
    return m = max(
            dp(k - 1, w - weight[k]) + value[k],
            dp(k - 1, w));
}
```

DP: 考え方(ボトムアップ)

- http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/commentary.jsp?id=DPL_1_B

- ループする時の順番を意識 k, w はそれぞれ昇順?降順?

- k番目の品物を入れた場合と入れなかった場合で価値が高い方

実装

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 0; j <= w; j++) {
        dp[i][j] = max(
            dp[i - 1][j],
            dp[i - 1][j - weight[i - 1]] + value[i - 1];
}}
```

実装

- dp[i][j] = dp[i - 1][j];

```
if (j - weight[i - 1] >= 0) {
    dp[i][j] = max(dp[i][j], dp[i - 1][j - weight[i -
1]] + value[i - 1]);
}
```

参考資料

- AOJ - DP-Intoroduction
  http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/topic.jsp?cid=ALDS1#problems/ALDS1_10
  http://judge.u-aizu.ac.jp/onlinejudge/topic.jsp?cid=DPL#problems/DPL_1

- AOJのDP問題集 http://d.hatena.ne.jp/kyuridenamida/20111009/1318091499

- DP - フィボナッチで理解 http://qnighy.hatenablog.com/entry/20091220/1261284700