姜伯驹《同调论》复盘笔记

@ 是顾小北

2024 年 4 月 3 日

> 代数拓扑学的宗旨是用代数方法解决拓扑问题……流形的对偶性是同调论的精华之一……
>
> 姜伯驹
>
> 北京大学
>
> 2005 年 6 月

注：这不是一份严肃的讲义，甚至不是一份合格的笔记——我在复盘姜伯驹《同调论》一书的正文内容和阅读笔记时，选取几个典型的、重要的地方进行了梳理归纳，并加入了自己的思考. 并不适合直接阅读学习，更建议作为辅助材料搭配原书使用.

目录

1 复形乘积与各种积 **1**

1.1 自由链上的斜积 1

1.2 胞腔同调中的乘积 2

1.3 奇异同调中的乘法 3

2 万有系数定理 **5**

3 计算：一些具体例子 **6**

4 关于同调的同构 **7**

4.1 de Rham 同调定理 7

4.2 胞腔同调定理及其他 8

5 对偶定理与更多 **10**

5.1 Poincare 对偶定理 10

5.2 Lefschetz 对偶定理与其他 11

6 相交数与不动点 **13**

6.1 Lefschetz 数 14

6.2 Euler 类与 Euler 数 14

1 复形乘积与各种积

自由链复形的张量积仍为自由链复形

$$C \otimes D = \{(C \otimes D)_n, \partial_n^{\otimes}\}$$

且：

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q \qquad \partial_n^{\otimes}(c_p \otimes d_q) = (\partial_p c_p) \otimes d_q + (-1)^p c_p \otimes (\partial_q d_q)$$

对于自由链复形 C, C', D, D'，有以下结果：

$$H_*(C) \cong H_*(C') \quad H_*(D) \cong H_*(D') \Longrightarrow H_*(C \otimes D) \cong H_*(C' \otimes D')$$

Remark 1.1. ***Kunneth* 公式**

设 *C,D* 都是自由链复形，$H_*(D)$ 是有限生成的自由分次群，则

$$H_*(C \otimes D) = H_*(C) \otimes H_*(D) \qquad H^*(C \otimes D) = H^*(C) \otimes H^*(D)$$

证明. 将分次群 $H_*(D)$ 视为边缘算子为零的链复形。则由于自由链复形同伦当且仅当它们同调群相同，得到 $D \simeq H_*(D)$，从而

$$H_*(C \otimes D) = H_*(C \otimes H_*(D)) = H_*(C) \otimes H_*(D) \qquad H^*\text{的推导类似}$$

□

1.1 自由链上的斜积

此时可定义上下同调类的斜积：

$$\backslash : D^q \times (C \otimes D)_{p+q} \to C_p \quad \beta \backslash (c \otimes d) = \langle \beta, d \rangle \cdot c$$

其边缘公式为

$$\partial(\beta \backslash c) = (-1)^p (\delta\beta) \backslash c + \beta \backslash (\partial c)$$

且有以下基本性质：

(1) 结合性 $(\eta \otimes \zeta) \backslash w = \eta \backslash (\zeta \backslash w)$

(2) 对偶性 $\langle \xi \otimes \eta, z \rangle = \langle \xi, \eta \backslash z \rangle$

(3) 自然性

$$
\begin{tikzcd}
D^q & \times & (C\otimes D)_{p+q} \arrow[r, "\backslash"] \arrow[d, "f\otimes g"] & C_p \arrow[d, "f"] \\
D'^q \arrow[u, "g^\bullet"] & \times & (C'\otimes D')_{p+q} \arrow[r, "\backslash"] & C'_p
\end{tikzcd}
$$

1.2 胞腔同调中的乘积

设 X,Y 是胞腔复形，则

$$C_*(X\times Y)=C_*(X)\otimes C_*(Y)$$

并且有胞腔复形的对角线映射:

$$\Delta: X\to X\times X \qquad x\mapsto (x,x)$$

于是可以定义胞腔同调上的上积 $\smile$ 与卡积 $\frown$:

$$
\begin{tikzcd}
H^p(X) & \times \arrow[d, "\times"] & H^q(X) \arrow[r, dashed, "\smile"] & H^{p+q}(X) \\
 & H^{p+q}(X\times X) \arrow[urr, "\Delta^*"] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H^q(X) \arrow[d, equal] & \times & H_{p+q}(X) \arrow[d, "\Delta_*"] \arrow[dr, dashed, "\frown"] & \\
H^q(X) & \times & H_{p+q}(X\times X) \arrow[r, "\backslash"] & H_p(X)
\end{tikzcd}
$$

一些性质：

$$[\alpha]\smile[\beta]=[\widetilde{\Delta}^\#(\alpha\times\beta)] \quad [\alpha]\frown[\beta]=[\beta\backslash\widetilde{\Delta}_\#(\alpha)]$$

$$(\xi_1\smile\xi_2)\frown x=\xi_1\frown(\xi_2\frown x) \quad \langle\xi_1\smile\xi_2,x\rangle=\langle\xi_1,\xi_2\frown x\rangle$$

Remark 1.2. ***Alexander-Whitney* 链映射**

Δ 并不是胞腔映射，故如果需要在链水平上引入上积和卡积，需要一个好的关于 Δ 的胞腔逼近. 借助于棱柱剖分，可得到 Δ 的胞腔逼近 Δ'，其链映射为：

$$\Delta'_\#(s^n)=\mathrm{AW}(s^n)=\sum_{p=0}^n {}_ps\times s_{n-p} \qquad \text{对有序单形} s^n$$

对有序单纯复形 K 上，应该定义：

$$
\begin{aligned}
&\langle \alpha \smile \beta, s\rangle = \langle \Delta'^{\#}(\alpha\times\beta), s\rangle = \langle \alpha\times\beta, \mathrm{AW}(s)\rangle = \langle \alpha,\ {}_p s\rangle\cdot\langle\beta, s_q\rangle \\
&\beta\frown s = \beta\backslash\Delta'_{\#}(s) = \beta\backslash\mathrm{AW}(s) = \langle\beta,\ s_q\rangle\cdot\ {}_p s
\end{aligned}
$$

1.3 奇异同调中的乘法

对于拓扑空间 X, Y，有以下的自然链同伦等价：

$$S_*(X)\otimes S_*(Y)\simeq S_*(X\times Y)$$

其中的链同伦等价还有在链同伦意义下的唯一性，将其、其诱导的上链映射、其诱导的同调上同调，一概称之为 Eilenberg-Zliber 同构.

记 ρ_X, ρ_Y 分别是投射，则

$$\mathrm{EZ}: S_*(X\times Y)\to S_*(X)\times S_*(Y) \qquad \sigma\mapsto\sum_{i+j=n}\rho_{X_\#}({}_i\sigma)\otimes\rho_{Y_\#}(\sigma_j)$$

从而在定义奇异上链的叉积 $\times$ 时，需要过渡一下：

$$
\begin{tikzcd}
S^p(X)\times S^q(Y) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, dashed, "\times"'] & S_*(X)\otimes S_*(Y) \arrow[d, "\mathrm{EZ}"] \\
 & S^{p+q}(X\times Y)
\end{tikzcd}
$$

由此也可以定义奇异上同调的上积、乘积空间的上积.

Remark 1.3. 关于空间偶的乘积

定义胞腔复形偶的乘积为

$$(X,A)\times(Y,B) := (X\times Y, A\times Y\cup B\times X)$$

则有：

$$C_*((X,A)\times(Y,B)) = C_*(X,A)\otimes C_*(Y,B)$$

而对于拓扑空间偶 *(X,A)*，*(Y,B)*，若满足 $\{A\times Y, X\times B\}$ 是 *Mayer-Vietoris* 耦，则有自然的链同伦等价：

$$S_*(X,A)\otimes S_*(Y,B)\overset{\mathrm{EZ}}{\simeq} S_*((X,A)\times(Y,B))$$

Remark 1.4. 上同调环和下同调模

拓扑空间 X 上的上同调群 $H^*(X)$ 在上积运算下称为一个交换的分次环，下同调群在卡积作用下成为上同调环的一个分次模.

上积和卡积的单位是每个点上取值为一的零维上链 ϵ。而交换性是指

$$\xi \smile \eta = (-1)^{pq} \eta \smile \xi$$

其实对于下同调群，也有类似的环结构: 只不过定义过程比较曲折.

假设 M 是有向 n 维流形，定义 $\mathfrak{D}(M)$ 与 M 链之间的交积：

$$\bullet : C_{n-p}(\mathfrak{D}(M)) \times C_{n-q}(M) \to C_{n-(p+q)}(\mathrm{Sd}M) \qquad \mathfrak{D}s^p \bullet s^{n-q} = I(s^{p*}, s^{n-q})$$

交积 $\bullet$ 的边缘公式为

$$\partial(a \bullet b) = (-1)^q (\partial a) \bullet b + a \bullet (\partial b)$$

交积是上积的对偶. 参见下图：

$$\begin{tikzcd}
C_{n-q}(\mathfrak{D}M) & \times & C_{n-q}(M) \arrow[r, "\bullet"] & C_{n-(p+q)}(\mathrm{Sd}M) \\
C^q(M) \arrow[u, "D"] & \times & C_{n-q}(M) \arrow[u, equal] \arrow[r, "I"] \arrow[d, "\mathrm{Sd}_\#"'] & C_{n-(p+q)}(\mathrm{Sd}M) \arrow[u, equal] \\
C^q(\mathrm{Sd}M) \arrow[u, "\mathrm{Sd}^\#"] & \times & C_{n-q}(\mathrm{Sd}M) \arrow[r, "\frown"] & C_{n-(p+q)}(\mathrm{Sd}M) \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

所以有

$$D(\mathrm{Sd}^\# c^p) \bullet a_{n-q} = I(\mathrm{Sd}^\# c^p, a_{n-q}) = c^p \frown \mathrm{Sd}_\# a_{n-q} \qquad c^p \in C^p(\mathrm{Sd}M), a_{n-q} \in C_{n-q}(M)$$

取同调: $D(\xi) \bullet y = \xi \frown y$

$$\Longrightarrow D(\xi) \bullet D(\eta) = \xi \frown D(\eta) = \xi \frown (\eta \frown [M]) = (\xi \smile \eta) \frown [M] = D(\xi \smile \eta)$$

故对于有向 n 维流形 M，下同调群在交积运算下构成 M 的交环，$[M]$ 作为运算的单位。交环与上同调环同构.

2 万有系数定理

考察两种初等链复形：

$$E(\mathbb{Z},n):0\to \overset{n\text{维}}{\mathbb{Z}} \to 0 \quad E(\mathbb{Z}_k,n):0\to \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \overset{n\text{维}}{\mathbb{Z}} \to 0$$

并记

$$G_k=\text{coker}\{G\xrightarrow{k}G\} \quad {}_kG=\ker\{G\xrightarrow{k}G\}$$

从而得到

$$H_q(E(\mathbb{Z},n);G)=\begin{cases}G & q=n\\ 0 & q\neq n\end{cases} \qquad H^q(E(\mathbb{Z},n);G)=\begin{cases}G & q=n\\ 0 & q\neq n\end{cases}$$

$$H_q(E(\mathbb{Z}_k,n);G)=\begin{cases}G_k & q=n\\ {}_kG & q=n+1\\ 0 & q\neq n,n+1\end{cases} \quad H^q(E(\mathbb{Z}_k,n);G)=\begin{cases}{}_kG & q=n\\ G_k & q=n+1\\ 0 & q\neq n,n+1\end{cases}$$

Theorem 2.1. X 是有限胞腔复形，若

$$H_q(X)=\bigoplus_{i=1}^{\beta_q}\mathbb{Z}\oplus\bigoplus_{i=1}^{\gamma_q}\mathbb{Z}_{k_i^{(q)}}$$

则有

$$H_q(X;G)=\bigoplus_{i=1}^{\beta_q}G\oplus\bigoplus_{i=1}^{\gamma_q}G_{k_i^{(q)}}\oplus\bigoplus_{i=1}^{\gamma_{q-1}}{}_{k_i^{(q-1)}}G \quad H^q(X;G)=\bigoplus_{i=1}^{\beta_q}G\oplus\bigoplus_{i=1}^{\gamma_q}{}_{k_i^{(q)}}G\oplus\bigoplus_{i=1}^{\gamma_{q-1}}G_{k_i^{(q-1)}}$$

Corollary 2.2. 设 X 是有限胞腔复形，F_q 是自由部分而 T_q 是有限部分 (Abel 群). 则

$$H_q(X)\cong F_q\oplus T_q \qquad H^q(X)=F_q\oplus T_{q-1}$$

3 计算：一些具体例子

(1) 实系数射影空间

$$H_q(\mathbb{R}P^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{q=0 或 q=n 为奇数}\\ \mathbb{Z}_2 & \text{q= 奇数且 0<q<n}\\ 0 & \text{对于其他的 q}\end{cases}\qquad H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[\xi]/(\xi^{n+1}=0)\quad 0\neq\xi\in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$$

(2) 关于可定向

M 是连通的 n 维胞腔流形，则

$$H_n(M)=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{若 M 可定向}\\ 0 & \text{若 M 不可定向}\end{cases}$$

若 M 是连通的不可定向的 n 维胞腔流形，则 $H^n(M)\cong\mathbb{Z}_2, H_1(M;\mathbb{Z}_2)\neq 0$.

据此还可知单连通的流形一定可定向.

(3) 单纯同调中的例子

$$H^1(X)=\widetilde{\pi_1(X)}\cong\begin{cases}\underbrace{\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}}_{m-1}\times\mathbb{Z}_2 & X=mP^2\\ \mathbb{Z}^{2n} & X=nT^2\end{cases}$$

若 $\underline{s}$ 是 n(n>1) 维单形, 则

$$H_q(\mathrm{Cl}\underline{s})=\begin{cases}\mathbb{Z} & q=0\\ 0 & q\neq 0\end{cases}\qquad H_q(\mathrm{Bd}\underline{s})=\begin{cases}\mathbb{Z} & q=0,n-1\\ 0 & q\neq 0,n-1\end{cases}$$

4 关于同调的同构

4.1 de Rham 同调定理

光滑流形 X 上微分形式 $\Omega(X)$ 与外微分算子构成 $\mathbb{R}$ 为系数域的上链复形 $\{\Omega^*(X), \mathrm{d}\}$，其上同调为 X 的 de Rham：$H^*_{DR}(X)$.

Theorem 4.1.

$$H^*_{DR}(X) \cong H^*(X;\mathbb{R})$$

证明. 用图来说话：

$$\begin{tikzcd}
S_*(X,\mathbb{R}) & \times & S^*(X,\mathbb{R}) \arrow[r, "\text{Kronecker积}"] \arrow[d, dashed, "j^{\#},\simeq"] & \mathbb{R} \\
S_*^{\text{smooth}}(X,\mathbb{R}) = \{\sigma : \Delta_q \to X\} \arrow[u, "j_{\#},\simeq"] \arrow[drr, dash, "\times" description] & \times & S^*_{\text{smooth}}(X,\mathbb{R}) \arrow[r, "\text{Kronecker积}"] & \mathbb{R} \\
 & & \Omega^*(X) \arrow[u, dashed, "\int_{\partial\sigma}\omega = \int_\sigma \mathrm{d}\omega"] \arrow[ur, "(\sigma,\omega)\mapsto\int_\sigma \omega"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Remark 4.1. 关于 Kronecker 积，常把其定义扩充为

$$\langle -, - \rangle : H^*(X,A;G) \times H_*(X,A) \to G$$

于是给我们提供一个同态：

$$\kappa : H^q(X,A;G) \to \mathrm{Hom}(H_q(X,A),G) \quad \kappa([z^q])([z_q]) = \langle [z^q],[z_q] \rangle$$

并且能说明 $\mathrm{Hom}(H_q(X,A),G)$ 是 $H^q(X,A;G)$ 的直和分量.

Remark 4.2. 在 $H^*_{DR}(X)$ 中，微分形式可以相乘，且对应的外微分公式为：

$$\mathrm{d}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{d}\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge \mathrm{d}\psi$$

这使得 $H^*_{DR}(X)$ 成为一个环，它与上同调环 $H^*(X;\mathbb{R})$ 同构.

4.2 胞腔同调定理及其他

Theorem 4.2. 胞腔同调定理

(X,A) 是胞腔复形偶，则 $H_*(C_*(X,A)) \cong H_*(X,A)$.

证明. 更确切地体现在下图中.

$$
\begin{tikzcd}
C_q(X,A) \arrow[dr, dashed, "i_*j_*^{-1}"'] & H_q(X^q \cup A, A) \arrow[l, tail, "j_*"'] \arrow[d, two heads, "i_*"] \\
H_q(C_q(X,A)) \arrow[r, dashed, "\Theta{,}\cong"] & H_q(X,A)
\end{tikzcd}
$$

写开来就是 (记 $\overline{X}^q = X^q \cup A$)

$$
\begin{tikzcd}
 & H_{q+1}(\overline{X}^{q+1}, \overline{X}^q) \arrow[d, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_{q+1}"] & & H_{q-1}(\overline{X}^{q-2}, A) = 0 \arrow[d, two heads, "i_*"] \\
H_q(\overline{X}^{q-1}, A) = 0 \arrow[r, two heads, "i_*"] & H_q(\overline{X}^q, A) \arrow[r, tail, "j_*"] \arrow[d, two heads, "i_*"] & H_q(\overline{X}^q, \overline{X}^{q-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dl, dashed, "i_*j_*^{-1}"', "H_q(C_*(X,A)) \underset{\Theta}{\to} H_*(X,A)"] \arrow[dr, "\partial_q"] & H_{q-1}(\overline{X}^{q-1}, A) \arrow[d, tail, "j_*"] \\
 & H_q(\overline{X}^{q+1}, A) \arrow[d, tail, "j_*"] & & H_{q-1}(\overline{X}^{q-1}, \overline{X}^{q-2}) \\
 & H_q(\overline{X}^{q+1}, \overline{X}^q) = 0 & &
\end{tikzcd}
$$

$$\boxed{j_*^{-1} B_q(C_*(X,A)) = \mathrm{Im}\partial_* = \ker i_*}$$

$$\boxed{Z_q(C_*(X,A)) \overset{j_*^{-1},\cong}{\longrightarrow} H_q(\overline{X}^q, A)}$$

从而 $i_*j_*^{-1}$ 决定了同构 Θ

□

Remark 4.3. $C_*(X,A) = \{C_q(X,A), \partial q\}$ 为 *(X,A)* 的胞腔链复形，其中

$$C_q(X,A) = H_q(X^q \cup A, X^{q-1} \cup A) \quad \text{形如} \bigoplus \mathbb{Z}, \text{自由 } Abel \text{ 群}$$

$$\partial : H_q(X^q \cup A, X^{q-1} \cup A) \overset{\partial_*}{\to} H_{q-1}(X^{q-1} \cup A, X^{q-2} \cup A)$$

这里或许需要注意以下空间三元组的性质：

设 $B \subset A \subset X$，(X,A,B) 为空间三元组，则总有链复形的短正合序列以及正合的同调序列 (i, j 均为含入映射)：

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad 0 \to S_*(A,B) \xrightarrow{i_\#} S_*(X,B) \xrightarrow{j_\#} S_*(X,A) \to 0 \\
&(2) \quad \cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(A,B) \xrightarrow{i_*} H_q(X,B) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A,B) \xrightarrow{i_*} \cdots
\end{aligned}
$$

这一结果由“五引理”或者“图像追踪法”给出.

根据 Eilenberg-Steenrod 同调公理系统，同调论由三部分组成：空间偶的同调群、映射诱导的同调同态、空间偶同调序列中的边缘同态。Θ 是胞腔同调论到奇异同调论的一个自然变换. 前者也有相应的切除定理和 Mayer-Vietoris 正合序列，得益于后者的相应版本结论.

胞腔切除定理

(X,A) 是胞腔复形偶，则有同构：

$$H_*(X,A) \underset{[\pi:(X,A)\to(X/A,A/A)]_*}{\cong} \widetilde{H}_*(X/A)$$

* 注：这有时可用来计算相对同调群，或者利用:

若 (X,A) 是空间偶而 $A \neq \emptyset$，则 $H_*(X,A) \cong \widetilde{H}_*(X \cup CA)$

Mayer-Vietoris 耦版本

X_1, X_2 是胞腔复形 X 的子复形，则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦，也就是：

$$H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \underset{[i:(X_1,X_1\cap X_2)\to(X_1\cup X_2,X_2)]_*}{\cong} H_*(X_1 \cup X_2, X_2)$$

5 对偶定理与更多

5.1 Poincare 对偶定理

Theorem 5.1. M 是一有向 n 维流形，则有 *Poincare* 对偶同构 D，如下交换图所示.

$$\begin{tikzcd} H^q(M) \arrow[r, "D,\cong"] \arrow[dr, "\frown[M]"'] & H_{n-q}(M) \arrow[d, equal] \\ & H_{n-q}(M) \end{tikzcd}$$

证明. 首先，对于有向流形 M，可取其闭链 $z^n = \sum\limits_{s^n \in M} s^n$，其同调类记作 $[M]$. 同调群与胞腔剖分无关，故而简化到对 M 是胞腔流形的情形，对其 q 维有向胞腔，定义其对应在对偶复形 $\mathfrak{D}(M)$ 上的定向链为：

$$\mathfrak{D}(s^q) = \sum_{t^n,\cdots,t^{q+1}} [t^n : t^{n-1}] \cdots [t^{q+1} : s^q] \hat{t}^n \cdots \hat{t}^{q+1} \hat{s}^q$$

实际上有链群同构：$D : C^q(M) \to C_{n-q}(\mathfrak{D}(M)) \quad s^{q*} \longmapsto \mathfrak{D}(s^q)$. 并且

$$D(\mathrm{Sd}^{\#} \underbrace{c^q}_{\in C^q(\mathrm{Sd}M)}) = \underbrace{I(\mathrm{Sd}^{\#} c^q, z^n)}_{\text{交链, 即正则胞腔复形卡积的几何解释}} = \underbrace{c^q \frown \mathrm{Sd}_{\#} z^n}_{I(\mathrm{Sd}^{\#} c^q, s^{q+p}) = c^q \frown \mathrm{Sd}_{\#} s^{q+p}}$$

考虑同调，即得结论。 □

Remark 5.1. 正则胞腔复形的几个概念

设 s 是正则复形胞腔 K 的一个胞腔，则：

(1)重分复形 $\mathrm{Sd}s = \{\hat{t}_0 \hat{t}_1 \cdots \hat{t}_k \in \mathrm{Sd}K \mid s = t_0 \succ t_1 \succ \cdots \succ t_k\}$

(2)对偶复形 $\mathfrak{D}(s) = \{\hat{t}_0 \hat{t}_1 \cdots \hat{t}_k \in \mathrm{Sd}K \mid t_0 \succ t_1 \succ \cdots \succ t_k = s_0\}$

(3)星形复形 $\mathfrak{G}(s) = \{\hat{t}_0 \hat{t}_1 \cdots \hat{t}_k \in \mathrm{Sd}K \mid \exists i : t_0 \succ t_1 \succ \cdots \succ t_i = s \succ t_{i=1} \succ \cdots \succ t_k\}$

而相应的闭复形 $\overline{*}$ 和边缘复形 $\dot{*}$ 只需要将上面的 $=$ 对应改为 $\succeq$ 和 $\succ$.

还有“统联，$*$”的概念，理解以下几个例子:

(1) $S^0 * A = \Sigma A \qquad S^n = (*S^0)^{n+1} \qquad D^p * D^q = D^p * S^q = D^{p+q+1}$

(2) $\overline{\mathfrak{G}}(s) = \mathrm{Sd}\dot{s} * \overline{\mathfrak{D}}(s) = \mathrm{Sd}\bar{s} * \dot{\mathfrak{D}}(s) \qquad \dot{\mathfrak{G}}(s) = \mathrm{Sd}\dot{s} * \dot{\mathfrak{D}}(s)$

Remark 5.2. 对偶配对

相同维数的上下同调群之间的Kronecker 积是对偶配对，由此得到有向 n 维流形 M 上的互补维数的上同调群之间的上积也为对偶配对，全在图中：

$$\begin{tikzcd} H^q(M) \arrow[d, equal] & \times & H^{n-q}(M) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "D{,}\cong"] & H^n(M) \arrow[d, "\langle -{,}[M]\rangle"] \\ H^q(M) & \times & H_q(M) \arrow[r, "\langle -{,}-\rangle"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

而配对为 $P(\xi,\eta) := \langle \xi \smile \eta, [M]\rangle = \langle \xi, \eta \frown [M]\rangle = \langle \xi, D(\eta)\rangle$

当然，如果选取 $\mathbb{Z}_2$ 为系数域，则对于任一 n 维流形 M，$P : H^q(M;\mathbb{Z}_2)\times H^{n-q}(M;\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ 是对偶配对.

5.2 Lefschetz 对偶定理与其他

Theorem 5.2. 假设 *(M,A)* 为有向相对 n 维流形，$j : M - A \to M$ 为含入映射，则有交换图：

$$\begin{tikzcd} H^q(M,A) \arrow[r, "D{,}\cong"] \arrow[dr, "\frown[M{,}A]"'] & H_{n-q}(M-A) \arrow[d, "j_*"] \\ & H_{n-q}(M) \end{tikzcd}$$

证明. 一切尽在下图中:

$$\begin{tikzcd} C^q(M,A) & \times & \overset{z^n}{C_n(M,A)} \arrow[r, "I"] \arrow[d, "\mathrm{Sd}_\#"] & C_{n-q}(M,A) \arrow[d, equal] \\ \overset{c^q}{C^q(\mathrm{Sd}M,\mathrm{Sd}A)} \arrow[u, "\mathrm{Sd}^\#"] \arrow[d, "\mathrm{Sd}^\#"] & \times & C_n(\mathrm{Sd}M,\mathrm{Sd}A) \arrow[r, "\frown"] & C_{n-q}(M,A) \arrow[d, equal] \\ C^q(M,A) \arrow[rr, "D{,}\cong"] & & C_{n-q}(\mathfrak{D}(M,A)) \arrow[r, "j_\#"] & C_{n-q}(M,A) \end{tikzcd}$$

取同调，即得结论：

$$j_\# D(\mathrm{Sd}^\# c^q) = I(\mathrm{Sd}^\# c^q, z^n) = c^q \frown \mathrm{Sd}_\# z^n \Longrightarrow j_* D(\xi) = \xi \frown [M,A]$$

□

特别的，如果 M 是带边流形而 $A=\partial M$，则由于 $j: M-\partial M \to M$ 是同伦等价，从而有以下交换图：

$$\begin{tikzcd} H^q(M,\partial M) \arrow[r, "D{,}\cong"] \arrow[dr, "\frown[M,\partial M]"'] & H_{n-q}(M) \arrow[d, equal] \\ & H_{n-q}(M) \end{tikzcd}$$

Remark 5.3. Alexander 对偶定理

(M,A) 是有向相对 *n* 维流形，*(K,L)* 是 *M* 的子复流形，且 $A \subset L \subset K \subset M$，则有同构：

$$D: H^q(K,L) \to H_{n-q}(M-L, M-K)$$

证明. 只需注意到 $\mathfrak{D}(K-L)=\mathfrak{D}(M-L)-\mathfrak{D}(M-K)$ 与链群的同构：

$$D: C^q(K,L) \to C_{n-q}(\mathfrak{D}(M-L), \mathfrak{D}(M-K))$$

□

而若 *M* 为 *n* 维胞腔流形，是 S^n 的正则剖分，*K* 是 *M* 子复形。则有：

$$\widetilde{H}^q(K)=H^q(K,pt)\cong H_{n-q}(M-pt,M-K)\cong \widetilde{H}_{n-1-q}(M-K)$$

由此我们可以又得到第一章中的两个基本结果：

$$\widetilde{H}_*(S^n-D^k)=0 \qquad \widetilde{H}_q(S^n-S^k)=\begin{cases}\mathbb{Z} & q=n-k-1\\ 0 & q\neq n-k-1\end{cases}$$

而最开始我们利用 Mayer – Vietoris 正合列（也相当于切除定理）作出。

Remark 5.4. Thom 同构定理

(M,A) 是 *n+k* 维有向相对流形而 *(N,A)* 是 *n* 维有向相对流形，$A\subset N\subset M$，则有 Thom 同构：

$$T^*: H^q(N-A) \to H^{q+k}(M-A, M-N)$$

证明. 记 $\tau = T^*(1) \in H^k(M-A,M-N)$ 为 Thom 类，而 $j: N-A \to M-A$ 为含入映射，再简记符号如下：

$$(M',B')=\mathfrak{D}_M(M-A,M-N) \quad N'=\mathfrak{D}_N(N-A)$$

则下图即为证明：

$$
\begin{tikzcd}
C^{q+k}(M',B') \arrow[rr, "D'_M"] \arrow[d, equal] & & C_{n-q}(N,A) \\
C^{q+k}(M',B') & & C^q(N') \arrow[ll, "T^{\#}\circ\delta=\delta\circ T^{\#}"', "T^{\#}=(-1)^{kq}(D'_M)^{-1}\circ D'_N"] \arrow[u, "D'_N"] \\
C^k(M',B') \arrow[u, "\smile"] & \times \arrow[d, Rightarrow, "T^*(j^*\xi)=\xi\smile\tau"', "取同调"] & C^q(M') \arrow[u, "j^*"] \\
& &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H^q(M-A)\times H^k((M-A,M-N)) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "j^*"] & H^{q+k}(M-A,M-N) \\
H^q(N-A) \arrow[ur, "T^*"] &
\end{tikzcd}
$$

□

6 相交数与不动点

对于有向 n 维流形 M，可以定义它的下同调类的相交数：

$$\cdot : H_*(M)\times H_*(M)\to\mathbb{Z} \qquad x\cdot y=\langle\epsilon, x\bullet y\rangle$$

假如 $x=D\xi, y=D\eta$，则相交数是互补维数的下同调群的对偶配对：

$$x\cdot y=\langle\xi,y\rangle=\langle\xi\smile\eta,[M]\rangle=P(\xi,\eta)$$

由于 Poincare 对偶，可以定义转移同态：

$$f^!=D_N^{-1}\circ f_*\circ D_M : H^{m-*}(M)\to H^{n-*}(N) f_!=D_M\circ f^*\circ D_N^{-1} : H_{n-*}(N)\to H_{m-*}(M)$$

6.1 Lefschetz 数

$\Delta_*[M] \cdot \Gamma_*[M]$ 某种意义上代表着 f 的不动点集：

$$\begin{tikzcd} & H_*(M \times M) \arrow[d, "(f\times \mathrm{id})_*"] \\ H_*(M) \arrow[ur, "\Delta_*"] \arrow[r, "\Gamma_*"'] & H_*(M \times M) \end{tikzcd}$$

利用对偶基 $x_i \cdot x'_j = \delta_{ij}$ 得到：

$$\Delta_*[M] = \sum_i (-1)^{|x_i||x'_i|} x'_i \times x_i = \sum_i x_i \times x'_i$$

从而 Lefschetz 数为

$$L(f) = \Delta_*[M] \cdot \Gamma_*[M] = \sum_q (-1)^q \ \mathrm{tr} F^{(q)}$$

微分拓扑学中，常把 Euler 示性数定义为对角线的自相交数：

$$\Delta_*[M] \cdot \Delta_*[M] = L(\mathrm{id}) = \chi(M)$$

6.2 Euler 类与 Euler 数

假如 (M,A) 是有向相对 n+k 维流形，子复形 $N \subset M - A$ 是有向 n 维流形，$\tau = T^*(1)$ 是 Thom 类，则记 $\iota : N \to (M, M - N)$ 为含入映射，得到

$$\text{Euler 类} \quad e := \iota^*(\tau) \in H^k(N)$$

实际上还有：

$$e = T^{*-1}(\tau \smile \tau)$$

这由下图可以得到：

$$
\begin{tikzcd}
H^k(M,M-N) \arrow[d, "j^*"'] \arrow[ddrr, bend right=60, "\iota^*"'] & \times & H^k(M,M-N) \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, equal] & H^{2k}(M,M-N) \arrow[d, equal] \\
H^k(M) \arrow[drr, "h^*"] & \times & H^k(M,M-N) \arrow[r, "\smile"] & H^{2k}(M,M-N) \\
 & & H^k(N) \arrow[ur, "T^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

其中 ι 有分解：

$$N \xrightarrow{h} M \xrightarrow{j} (M, M-N)$$

即知：

$$T^*e = T^*\iota^*\tau = j^*\tau \smile \tau = \tau \smile \tau$$

可以考察对角线上的 Thom 类，我们记 $M^2 = M \times M$，Thom 类 $\tau \in H^n(M^2, M^2 - \Delta(M))$，$j : M^2 \to M^2 - \Delta(M)$ 为含入映射. 则 $j^*(\tau)$ 是 $\Delta_*[M]$ 在 M^2 中的 Poincare 对偶.

从而重新得到有向流形的 Lefschetz 数：

$$L(f) = \langle j^*(\tau), \Gamma_*(M)\rangle = \langle \tau, j_*\Gamma_*[M]\rangle$$

而且可以重新得到 Euler 数——对角线映射在 M^2 中的 Euler 类满足：

$$\langle e, [\Delta(M)]\rangle = \langle \iota^*(\tau), [M]\rangle = \langle \Delta^* j^*(\tau), [M]\rangle = \langle \tau, j_*\Delta_*[M]\rangle = L(\mathrm{id}) = \chi(M)$$

其中我们已把 M 自然地等同于 $\Delta(M)$.