# 23 年秋复分析期末复习笔记

$L^IG_UO$

2024 年 1 月 11 日

Pourquoi, alors, tout est si vrai, si beau, et si bon, dans le monde holomorphe ? Parce quela Magie, c'est, en Mathematique, l'Unite : tout, dans la theorie des fonctions holomorphes, s'entrelace: Analyse, Geometrie, Topologie, Algebre, Calcul!

那么，为什么全纯世界里的一切都是如此真实、如此美丽、如此美好呢? 因为魔术在数学中是统一的: 全纯函数理论中的一切都是交织在一起的: 分析、几何、拓扑、代数、微积分!

---

*Analyse Complexe*

Francois DE MARCAY

Departement de Mathematiques d'Orsay

Universit Paris-Saclay, France

注：本笔记采用 *Yum-Tong Siu* 或 Xie, S. 的论文中的笔记符号与定理描述。

# 目录

# 1 Review：IV-VIII

## 1.1 Cauchy's Kernel 与 Newton's Potential

柯西积分公式：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

柯西积分公式非常有用，起码还告诉某区域上全纯函数的以下两个性质：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-a)^n$$

$$\mathrm{Res}_a(f) = \frac{1}{(k-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}[(z-a)^k f(z)]\right\}$$

它还导出了“柯西核”$\dfrac{1}{z}$，意味着所有全纯函数都可以由此线性组合而产生。其与牛顿位势理论的联系起始于：

$$\frac{1}{2\pi}\Delta\log|z| = \delta_0 \tag{C1}$$

其中常数 $2\pi$ 来自于

$$\int_{\mathbb{D}}\Delta\log|z| = \int_{|z|=1}(\partial_{\vec{n}}\log|z|)\mathrm{d}s = \int_{|z|=1}\mathrm{d}s = 2\pi$$

而拉普拉斯算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}$$

实际上，公式 (C1) 更精确的版本应该是

$$\left(\frac{1}{2\pi}\Delta\log|z|\right)(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = \delta_0$$

从而可以让柯西核 $\dfrac{1}{z}$ 出现

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\pi}\Delta\log|z|\right)(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) &= \left(\frac{1}{2\pi}4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}\log|z|\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}\right)\\
&= \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\log|z|^2\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}\\
&= \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\log z+\log\overline{z})\right]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}\\
&= \left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}\\
&= \delta_0
\end{aligned}$$

可以被改写为

$$\left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}\right)\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\overline{\zeta} = \delta_z \tag{C2}$$

假设 $G$ 为 $\mathbb{C}$ 中有分段光滑有界区域且 $z\in G$，$f$ 为定义在 $\overline{G}$ 的开子集上的 $C^\infty$ 函数，从而就有：

$$\mathrm{d}\left(\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right](\mathrm{d}\overline{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta) = \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\overline{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta - f(\zeta)\delta_z$$

利用 Stokes 公式，由于包含 d$\zeta$ 的一形式上的外微分算子 d 就是 $(\mathrm{d}\zeta)\otimes\frac{\partial}{\partial\zeta}$，从而

$$\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_G\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\overline{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta-f(z)$$

也即

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_G\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\overline{\zeta}}$$

**Remark.1**

在沙巴特《复分析导论》第二章 §5 最后给出了该公式的表述及证明，更为简洁明了。

假设 $f\in C^1(G)$，$G$ 为闭包紧区域，边界分段光滑，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int_G\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta\qquad(\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta\,,\,\forall z\in G)$$

证明. 首先给出黎曼-格林公式：

$$\int_{\partial G}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

从而得到：

$$\begin{aligned}\int_{\partial G}f\mathrm{d}z&=\int_{\partial G}(u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\&=2\mathrm{i}\iint_G\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

从而应用于所需证定理：

$$\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\int_{\partial U_\rho(z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=2\mathrm{i}\iint_G\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-(2\pi\mathrm{i}f(z)+O(\rho))=2\mathrm{i}\iint_G\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int_G\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_G\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\overline{\zeta}\end{aligned}$$

□

**Remark.2**

这和微积分基本定理有相似之处：

$$g(x)=g(a)+\int_{t=a}^{b}\chi_{(-\infty,x)}(t)\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\leftrightsquigarrow g(z)\qquad\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\zeta-z}\leftrightsquigarrow\chi_{(-\infty,x)}\qquad\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\leftrightsquigarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\qquad\int_G\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\overline{\zeta}\leftrightsquigarrow\int_{t=a}^{b}\mathrm{d}t$$

由此对比出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{t=a}^{b}\chi_{(-\infty,x)}(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\varphi(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\int_G\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\zeta-z}h(\zeta)\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}=h(z)$$

证明. 第一种方法。假设（需要验证存在性）有一个函数 $F$ 使得：

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}=h(z)$$

写出 $F(z)$ 的柯西积分公式，即证原式。

第二种方法。注意到我们有

$$\mathrm{d}(h(\zeta)\log|\zeta-z|^2\mathrm{d}\bar{\zeta})=\frac{\partial}{\partial\zeta}h(\zeta)\log|\zeta-z|^2\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}+h(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}$$

从而积分可得：

$$\int_{\partial G}h(\zeta)\log|\zeta-z|^2\mathrm{d}\bar{\zeta}=\int_G\frac{\partial}{\partial\zeta}h(\zeta)\log|\zeta-z|^2\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}+\int_G h(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}$$

将算子 $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ 作用于两边，得到

$$\int_{\partial G}\frac{h(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\mathrm{d}\bar{\zeta}=\int_G\frac{\partial h(\zeta)}{\partial\zeta}\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\int_G h(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}$$

写出 $\overline{h}(z)$ 的柯西积分公式，得到

$$\overline{h}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{\overline{h}(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_G\frac{\frac{\partial\overline{h}}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}$$

于是对上式再取共轭，得到

$$h(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{h(\zeta)\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_G\frac{\partial h(\zeta)}{\partial\zeta}\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta$$

然后是个地球人都能发现

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\int_G\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{\zeta-z}h(\zeta)\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}=h(z)$$

□

## 1.2 幅角原理和 Rouche 定理

设 $G$ 是 $\mathbb{C}$ 中具有分段光滑边界 $\partial G$ 的有界区域，$\Omega$ 为 $\overline{G}$ 中开邻域。$f$ 为 $\Omega$ 上亚纯函数且无零点与极点在 $\partial G$ 上[1]，其零点为 $a_1,\ldots,a_k$，重数为 $p_1,\cdots,p_k$，其极点为 $b_1,\cdots,b_l$，重数为 $q_1,\cdots,q_l$。

**Argument Principle**

$$\sum_{\mu=1}^{k}p_\mu-\sum_{\nu=1}^{l}q_\nu=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial G}\frac{f'}{f}=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\arg f$$

**Rouche 定理** $f,g$ 同上，令 $S(f)=\sum_{\mu=1}^{k}p_\mu-\sum_{\nu=1}^{l}q_\nu$。若在 $\partial G$ 上始终有 $|f|>|g|$，则 $S(f)=S(f+g)$

[1]这样定义下的 $f$ 零点和极点的个数必是有限个。

证明. 考虑函数

$$t \to \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{f' + tg'}{f + g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg(f + tg) \quad t \in [0, 1]$$

连续，整值，与 $t$ 无关 □

### 1.3 亚纯函数的分式展开

对于全纯函数，可由柯西积分公式展开成幂级数形式。但对于亚纯函数，需考虑其极点处造成的影响，由此引出了下面的定理。

**定理:** 假设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数，只有单极点且为 $\{a_n\}_{0<|a_1|\le|a_2|\le\cdots}$，留数对应为 $\{b_n\}$。另设一系列围道 $C_n$，$C_n$ 只包含极点 $a_1, \cdots, a_n$，且 $C_n$ 到原点的距离随 $n \to \infty$ 趋向无穷，$C_n$ 的长度 $L_n = O(R_n)$。再假设在 $C_n$ 上有 $f(z) = o(R_n^{p+1})$。则

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{p} \frac{z^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^p}{a_n^{p+1}} \right)$$

证明. 考察积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta$$

其极点只有 $0, z, a_1, \cdots, a_n$，并且：

$$\zeta = 0\text{处，} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}(\zeta - z)} = \frac{-1}{\zeta^{p+1}} \left( \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \cdots \right) \left( f(0) + f'(0)\zeta + \frac{1}{2} f''(0)\zeta^2 + \cdots \right)$$

$$\mathrm{Res}_f(0) = a - \frac{1}{z} \left( \frac{f(0)}{z^p} + \frac{f'(0)}{z^{p-1}} + \cdots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right)$$

$$\zeta = z\text{处，} \mathrm{Res}_f(z) = \frac{f(z)}{z^{p+1}}$$

$$\zeta = a_n\text{处，} \mathrm{Res}_f(a_n) = \frac{b_n}{a_n^{p+1}(a_n - z)}$$

由假设，当 $n \to +\infty$ 时积分趋于 0，故

$$-\frac{1}{z} \left( \frac{f(0)}{z^p} + \frac{f'(0)}{z^{p-1}} + \cdots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right) + \frac{f(z)}{z^{p+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n^{p+1}(a_n - z)} = 0$$

然后得到 ($z = 0$ 处)

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + zf'(0) + \cdots + \frac{z^p}{p!} f^{(p)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n z^{p+1}}{a_n^{p+1}(z - a_n)} \\ &= f(0) + zf'(0) + \cdots + \frac{z^p}{p!} f^{(p)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(z^{p+1} - a_n^{p+1})}{a_n^{p+1}(z - a_n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n - z} \\ &= \sum_{\nu=0}^{p} \frac{z^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(z - a_n) \sum_{\nu=0}^{p} z^\nu a_n^{p-\nu}}{a_n^{p+1}(z - a_n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n - z} \\ &= \sum_{\nu=0}^{p} \frac{z^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^p}{a_n^{p+1}} \right) \end{aligned}$$

□

**Example.1** $\cot z-\frac{1}{z}=\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)$

通过简单的换元，可以知道

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}\right)=\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}=\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\left[(1-\frac{z}{n})\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}\right]$$

结合 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin\pi z}{\pi z}=1$，可得：

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\prod_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\left(1-\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}$$

**Example.2** $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{a}\coth\pi a$

# 2 Weierstrass and Hadamard Factorization of Entire Functions

假如给定序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $a_n \neq 0$，且于 $\mathbb{C}$ 中无聚点，令

$$E_0(z) = 1 - z \qquad E_k(z) = (1-z)\mathrm{e}^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}\,(k \geq 1)$$

从而如果有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k_n+1}} < \infty$，则整函数 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ 以该序列为零点。

这只需要取充分大的 $N$ 使 $\forall n > N, |\frac{z}{a_n}| < \frac{1}{2}$，则

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\sum_{\nu=k_n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\nu=k_n+1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1}$$

反过来，如果整函数 $f$ 的阶为有限值 $\rho_0$，且有整数 $k$ 满足 $k \leq \rho_0 < k+1$，有分解:

$$f(z) = \mathrm{e}^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \qquad \text{其中} \deg P(z) \leq k$$

为了证明 Hadamard 分解的合理性，开始介绍 Nevanlinna 理论。而引入后者，首先需要介绍 Poisson-Jensen 公式。

## 2.1 Poisson-Jensen 公式

作为调和函数的 $u(z)$ 有均值性质：

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

这是于圆盘 $\mathbb{D}_0(1)$ 上的，而对于含有 $a$ 的圆盘 $\mathbb{D}_0(R)$，有双全纯映射：

$$w = g(z) = \frac{R(z-a)}{R^2 - \overline{a}z} \qquad \mathbb{D}_0(R) \to \mathbb{D}_0(1)$$

现令 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = g(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$，从而就有

$$u(a) = u(g^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\psi=0}^{2\pi} u(g^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}))\mathrm{d}\psi$$

再令 $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，结合

$$\mathrm{d}w = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{d}\psi = \frac{R^3 - R|a|^2}{(R^2-\overline{a}z)^2}\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\psi = \frac{R^2-r^2}{(R-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\theta)})^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}\mathrm{d}\varphi = \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

得到

$$u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

**Adult Poisson-Jensen Formula.** 假设 $\{|z| < R\}$ 上的亚纯函数 $f$ 有零点 $a_1, \cdots, a_M$ 和极点 $b_1, \cdots, b_N$，且它们不出现在边界上。令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0 \leq r < R)$ 不是 $f$ 的零点或极点。则

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\mathrm{d}\varphi + \sum_{\mu=1}^{M}\log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\overline{a}_\mu z}\right| - \sum_{\nu=1}^{N}\log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2-\overline{b}_\nu z}\right|$$

证明. 假如 $f$ 为全纯的，则 $\log|f(z)|$ 在 $f(z)$ 零点之外的部分是调和的。若 $f(z)$ 于 $|z|\leq R$ 中全纯且无零点，便直接可得：

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\mathrm{d}\varphi$$

当 $|z|=R$ 上有零点 $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$ 时，则考虑函数 $f(z)/(z-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0})$，只需证明：

$$\log R=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}|\mathrm{d}\varphi\iff\int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|\mathrm{d}\varphi=0\text{ 成立}$$

关于边界上零点的讨论也可以通过直接限定 $R$ 来略去。

对于一般的 $f(z)$，考虑：对 $\{|z|\leq R\}$ 上的不取零值的全纯函数

$$F(z)=f(z)\left(\prod_{\mu=1}^{M}\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\overline{a}_\mu z}\right)^{-1}\left(\prod_{\nu=1}^{N}\frac{R(z-b_\nu)}{R^2-\overline{b}_\nu z}\right)$$

取绝对值后再取对数，注意 $|F(z)|=|f(z)|,\forall|z|=R$，应用上述结论即得。 □

**Baby Poisson-Jensen Formula.** 假设 $\{|z|<R\}$ 上的亚纯函数 $f$ 有零点 $a_1,\cdots,a_M$ 和极点 $b_1,\cdots,b_N$，且它们不出现在边界和 0 处，则：

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\mathrm{d}\varphi+\sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{|a_\mu|}{R}-\sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{|b_\nu|}{R}$$

### 2.2 the First Main Theorem of Nevanlinna Theory

引入 $\log^+x=\max\{\log x,0\}$，利用关系式 $\log x=\log^+x-\log^+\frac{1}{x}$ 将 Poisson-Jensen Formula 改写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log^+|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\mathrm{d}\varphi+\sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{R}{|b_\nu|}=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|}\mathrm{d}\varphi+\sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{R}{|a_\mu|}+\log|f(0)|$$

从而令

$$m(R,f,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log^+|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\mathrm{d}\varphi$$
$$N(R,f,\infty)=\sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{R}{|b_\nu|}$$

便有

$$m(R,f,\infty)+N(R,f,\infty)=\log|f(0)|+m(R,\frac{1}{f},\infty)+N(R,\frac{1}{f},\infty)$$

Nevanlinna 的洞见是深刻的，他考虑的是“almost assuming”的情况，这样就把多项式的逼近性质（取每一个复数值同样次）转移到了亚纯函数域上。引入 Nevanlinna 特征函数（不带值时默认为 $\infty$）

$$T(R,f)=m(R,f)+N(R,f)$$

便有

$$m(R,f,a)+N(R,f,a):=m(R,\frac{1}{f-a})+N(R,\frac{1}{f-a})=T(R,f)-\log|f(0)-a|$$

**the First Main Theorem of Nevanlinna Theory.**

$$m(R,f,a)+N(R,f,a)=T(R,f)+O(1) \qquad \text{as } R\to\infty$$

另外，采取计数函数 $\vec{n}(r,f,a)$，可写出

$$N(R,f,a)=\int_{r=0}^{R}\frac{\vec{n}(r,f,a)}{r}\mathrm{d}r=\int_{r=0}^{R}\left(\log\frac{R}{r}\right)\mathrm{d}\vec{n}(r,f,a)$$

**Question.** $f$ 为有理函数 $\iff T_f(r)\le O(\log r)$，当 $r\to\infty$ 时。

证明. 首先，若 $P,Q$ 为互素的多项式，则

$$T\left(r,\frac{P}{Q}\right)=\max\{\deg P,\deg Q\}\log r+O(1)$$

反过来，若存在 $r_0\ge 1$ 和一个正常数 $C$ 满足

$$N(r,f)+m(r,f)=T(r,f)\le C\log r \quad r\ge r_0$$

从而 $N(r,f)\le C\log r$ $(r\ge r_0)$，故 $f$ 至多只有有限个极点，有多项式 $Q(z)$ 使得 $f(z)Q(z)=g(z)$，而又有 $T(r,g)\le C_1\log r$ $(r\ge r_1)$.

对于整函数 $g(z)$，有：

$$\begin{aligned}T(r,g)\le\max_{|z|=r}\log^+|g(z)|&\le\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=R}\frac{R^2-|z|^2}{|w-z|^2}\log|g(w)|\mathrm{d}\theta\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=R}\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2}\log^+|g(w)|\mathrm{d}\theta\\&=\frac{R+r}{R-r}T(R,g)\end{aligned}$$

$$N(r,g)=0,\ 1<r<R$$

从而取充分大的 $r$，有

$$\max_{|z|=r}\log|g(z)|\le\frac{2r+r}{2r-r}T(2r,g)\le 4C_1\log r$$

而结合：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta\overset{g(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j}{\cong}\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2r^{2j}\le r^{8j}\Longrightarrow a_j=0,j>4C_1$$

□

从而得到 $g(z)$ 为一多项式，$f$ 为有理函数。

### 2.3 Back to Hadamard's Factorization Theorem

**Claim.** 令 $\kappa > \rho_0$，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\kappa} < \infty$

证明. 直接写出 ($f$ 是整函数)

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \log|f(Re^{\mathrm{i}\varphi})|\mathrm{d}\varphi - \sum_{|a_\mu|<R} \log\frac{R}{|a_\mu|}$$

如果在零处有 $m$ 阶零点，则有

$$\log|f^{(m)}(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \log|f(Re^{\mathrm{i}\varphi})|\mathrm{d}\varphi - m\log R - \sum_{|a_\mu|<R} \log\frac{R}{|a_\mu|}$$

选取 $\rho < \mu < \kappa$，从而便有

$$\begin{aligned} &|f(z)| \le A\mathrm{e}^{B|z|^\mu} \quad A, B > 0 \\ &\Rightarrow T(R, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \log|f(Re^{\mathrm{i}\varphi})|\mathrm{d}\varphi \le \log A + BR^\mu \\ &\Rightarrow N(R, f, 0) = O(R^\mu) \le C_\mu R^\mu \quad C_\mu > 0 \end{aligned}$$

从而，利用 $\vec{n}(r, f, a)$ 的单调递增性，可以知道

$$\begin{aligned} &N(R, f, 0) = \int_{r=0}^{R} \frac{\vec{n}(r, f, 0)}{r}\mathrm{d}r \ge \int_{r=\frac{R}{2}}^{R} \frac{\vec{n}(r, f, 0)}{r}\mathrm{d}r \ge \int_{r=\frac{R}{2}}^{R} \frac{\vec{n}(\frac{R}{2}, f, 0)}{r}\mathrm{d}r = n(\frac{R}{2}, f, 0)\log 2 \\ &\Rightarrow \vec{n}(r, f, 0) = O(R^\mu) \end{aligned}$$

这样就得到了

$$\begin{aligned} \sum_{|a_n|\ge 1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\kappa} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{2^j \le |a_n| < 2^{j+1}} \frac{1}{|a_n|^\kappa} \right) \\ &\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j\kappa}} \vec{n}(2^{j+1}, f, 0) \\ &\le C_\mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{j+1})^\mu}{2^{j\kappa}} \\ &= \frac{2^\mu C_\mu}{1 - \frac{1}{2^{\kappa-\mu}}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

□

这也说明了 $\prod_{n=1}^{\infty} E_k(\frac{z}{a_n})$ 的合理性。而对于前述的构造，即

$$f(z) = \mathrm{e}^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

还需证明多项式的次数 $P(z)$ 不超过 $k$。这可通过说明整函数 $\dfrac{f(z)}{z^m}\left(\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\dfrac{z}{a_n}\right)\right)^{-1}$ 的阶数为 $\rho_0$ 来说明，而这又可通过下面的 Claim 推出。

**Claim.** $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left|E_k\left(\dfrac{z}{a_n}\right)\right| \geq -C_\varepsilon|z|^{\rho_0+\varepsilon} \quad \forall \ell\in\mathbb{N}, |z|=R_\ell, \exists C_\varepsilon>0$

证明. 证明起来富有技巧性，不过都是生发于以下两个估计：

$$|E_k(z)| \geq \mathrm{e}^{-c|z|^{k+1}} \qquad |z|\leq \frac{1}{2}$$
$$|E_k(z)| \geq |1-z|\mathrm{e}^{-c|z|^{k}} \qquad |z|\geq \frac{1}{2}$$

不再赘述具体过程。 □

但有一个引理需要注意：

**Lemma.** 整函数 $g(z)$ 满足 $\Re(g)=u(z)\leq Cr^s \quad \forall r>0, |z|=r$，则 $g(z)$ 本身为次数不超过 $s$ 次的多项式。

证明. 令 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta=\begin{cases}a_nr^n & \text{n≥0}\\ 0 & \text{n<0}\end{cases}$$

取共轭，相加可知

$$2\Re(a_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta \qquad a_nr^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta \ (n>0)$$

从而便有：

$$a_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}[u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-Cr^s)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta \ (n>0)$$
$$|a_n|\leq\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}[Cr^s-u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})]\mathrm{d}\theta\leq 2C^{s-n}-2\Re(a_0)r^{-n}$$

□

# 3 Perron Formula

有些反演的味道，类似傅里叶展开中每项的公式，幂级数展开中的系数的柯西积分表示。比如

$$\sum_{n=0}^{N} c_n z^n = \sum_{n=0}^{N} T_n(f) z^n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} f(\zeta) \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta+z|=r} f(z+\zeta) \frac{1-(1+\frac{z}{\zeta})^{n+1}}{\zeta} \mathrm{d}\zeta$$

后面的一些处理过程也和柯西积分公式类似，另外还常用到分部积分的技巧。

**Perron Formula.** $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ 是收敛线为 $\sigma_0$ 的狄利克雷级数。如果 $x$ 不是整数，$c > 0$ 且 $\sigma = \Re(s) > \sigma_0 - c$，则

$$\sum_{n<x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} f(s+w) \frac{x^w}{w} \mathrm{d}w$$

先寻找一个类似于柯西积分公式中的算子：

$$T_k(g) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$$

关于此，我们有如下的 Lemma.

**Lemma.** 令 $c > 0$，则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{a^w}{w} \mathrm{d}w = \begin{cases} 1 & \text{a>1} \\ 0 & \text{0<a<1} \end{cases}$$

证明. 先采取如下的围道：

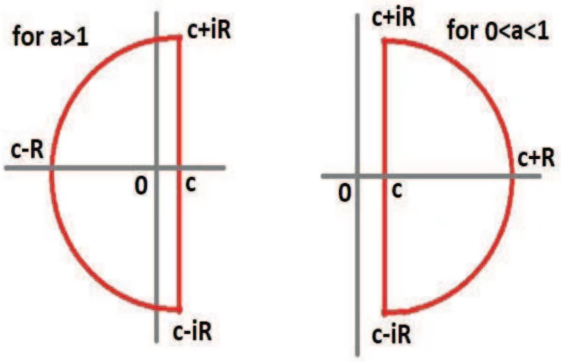


Figure 1: Contours for Proof of Perron's Lemma

图 1: 讲义原图

$a > 1$ 时，由于

$$\int_{C_R} \frac{a^w}{w} \mathrm{d}w = \left[ \frac{a}{w \log a} \right]_{w=c-\mathrm{i}R}^{w=c+\mathrm{i}R} + \int_{C_R} \frac{a^w}{w^2 \log a} \mathrm{d}w$$

结合 $a^w$ 于 $C_R$ 有界性可知在 $R \to \infty$ 时其趋于零。由于 $\frac{a^w}{w}$ 在 $w = 0$ 处的留数为 1，从而积分结果就是 1。

而对于 $0 < a < 1$ 时，同样的估计，但此时右半圆并没有极点，故值为 0。 □

**Corollary.** 令 $x>0, c>0$，则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{\mathrm{d}w}{w}=\begin{cases}1 & \text{n<x}\\ 0 & \text{n>x}\end{cases}$$

证明. 令 $a=\frac{x}{n}$ 即可。 □

下面开始分两步说明 Perron Formula 的正确性。

**Absolute Abscissa of Convergence**

令 $\sigma>\overline{\sigma}-c$，其中 $\overline{\sigma}$ 为绝对收敛线。从而有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}U}^{c+\mathrm{i}T}f(s+w)\frac{x^w}{w}\mathrm{d}w&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}U}^{c+\mathrm{i}T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{s+w}}\frac{x^w}{w}\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c-\mathrm{i}U}^{c+\mathrm{i}T}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{\mathrm{d}w}{w}\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^s}\qquad(T,U\to\infty\text{时})\end{aligned}$$

故由上面的 Corollary，只需证明

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c+\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{\mathrm{d}w}{w}=0$$
$$\lim_{U\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c-\mathrm{i}U}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{\mathrm{d}w}{w}=0$$

而对于固定的 $x$，通过分部积分，有估计：

$$\begin{aligned}\int_{c+\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{\mathrm{d}w}{w}&=\int_{c+\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{w}\mathrm{d}\left(\frac{(\frac{x}{n})^w}{\log\frac{x}{n}}\right)\\&=-\frac{(\frac{x}{n})^{c+\mathrm{i}T}}{(\log\frac{x}{n})(c+\mathrm{i}T)}+\frac{1}{\log\frac{x}{n}}\int_{c+\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{\mathrm{d}w}{w^2}\\&=O\left(\frac{1}{n^cT}\right)+O\left(\frac{1}{n^c}\int_T^{\infty}\frac{\mathrm{d}v}{c^2+v^2}\right)\\&=O\left(\frac{1}{n^cT}\right)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c+\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{\mathrm{d}w}{w}=O\left(\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c-\mathrm{i}U}\left(\frac{x}{n}\right)^{w}\frac{\mathrm{d}w}{w}=O\left(\frac{1}{U}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma+c}}\right)$$

结合 $\sigma+c>\overline{\sigma}$，我们完成了证明。

**for the General Case**

这时需要讨论 $\sigma_0-c<\sigma<\overline{\sigma}-c$。采取转化的思路，取 $\alpha>\overline{\sigma}-c$，采取围道

$$\{c\le\Re(w)\le\alpha,-U\le\Im(w)\le T\}$$

而有估计

$$f(s) = O(t^{1-(\sigma-\sigma_0)+\varepsilon}) \quad s = \sigma + \mathrm{i}t$$
$$f(s+w) = O\left((t+\Im(w))^{1-(\sigma+c-\sigma_0)+\varepsilon}\right) \quad s = \sigma + \mathrm{i}t, \Re(w) = c$$

可选取 $0 < \varepsilon < \sigma + c - \sigma_0$，对于固定的 $s$，有

$$f(s+w) = O((\Im(w))^{\gamma}) \quad 0 < \gamma < 1, \text{当}\Im(w) \to \infty\text{时}$$

而水平边的长度是固定的，故结合围道积分为零，直接得到：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} f(s+w)\frac{x^w}{w}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} f(s+w)\frac{x^w}{w}\mathrm{d}w$$

利用前面已证明的结果，就完成了 Perron Formula 的全部证明。

**Special Case.** 取 $s = 0$，得到我们在证明素数定理中常用的式子：

$$\sum_{n<x} a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} f(w)\frac{x^w}{w}\mathrm{d}w$$

# 4 Dinh-sibony 问题 9.1

原文：Guo, B., & Xie, S. (2023). Universal holomorphic maps with slow growth I: an algorithm. *Mathematische Annalen.*

**Question.** 找到 Nevanlinna-Shimizu-Ahlfors 特征函数

$$T_f(r) := \int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\mathbb{D}_t} f^*w \ (\forall r \geq 1)$$

的最小增长率，其中 $f$ 为万有覆盖的全纯（亚纯）函数，$w$ 为 $\mathbb{CP}^1$ 上的富比尼-施图迪形式 (Fubini-Study form).

**Remark.** 万有覆盖的全纯（亚纯）函数必定有：

$$\int_{\mathbb{D}_t} f^*w \to \infty \qquad (t\to\infty)$$

从而有：

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{T_f(r)}{\log r} \geq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\log r}\int_{r_0}^r\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{\mathbb{D}_{r_0}} f^*w = \int_{\mathbb{D}_{r_0}} f^*w$$

现在需要作反向的估计。

## 4.1 Birkhoff's Theorem

令 $\mathscr{H}$ 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}(\text{resp.}\mathbb{P}^1)$ 的整函数空间，$\mathscr{U}$ 为满足以下条件的函数集合：

$$\mathscr{U} = \{h\in\mathscr{H} \mid \forall f\in\mathscr{H}, \exists a_n\in\mathbb{C}, \lim_{n\to+\infty} h_{a_n}(z) := h(z+a_n)\to f\}$$

**Birkhoff's Theorem** $\mathscr{U}$ 非空。更一般的，取 $a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$，都有 $f\in\mathscr{H}$ 使得

$$\{f, T_a(f), T_a^2(f), \cdots\}\text{在}\mathscr{H}(\mathbb{C})\text{稠密,其中}T_a:\mathscr{H}(\mathbb{C})\to\mathscr{H}(\mathbb{C}),\ f(\cdot)\to f(\cdot+a)$$

证明. 取 $\mathbb{C}$ 中可数且稠密的子域，比如 $\mathbb{Q}_c = \{z = x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbb{Q}\}$，取双射函数 $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2):\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$，取一误差上界数列 $\{\epsilon_i\}_{i\geq 1}$，比如 $\epsilon_i = 1/2^i$，使得 $\lim_{j\to+\infty}\sum_{i\geq j}\epsilon_i = 0$。

重排 $\mathbb{Q}_c[z]\times\mathbb{Q}_+$ 中元素为 $\{f_i, r_i\}_{i\geq 1}$，并且取序列为 $\{(g_j,\hat{r}_j)\}_{j\geq 1}$ 为

$$g_j := f_{\varphi_1(j)}, \hat{r}_j := r_{\varphi_1(j)}$$

现构造一个收敛的全纯函数列 $\{F_i\}_{i\geq 1}$，取极限得到所需要的用以万有覆盖的 $f$：

$$F_i:\mathbb{D}_{R_i}\to\mathbb{C},\quad R_i\to\infty$$

用归纳的方法得到，取 $F_1 := g_1, R_1 := \hat{r}_1, c_1 := 0$，假设 $i$ 已经取到，对于 $i+1$：

1、取 $c_{i=1}\in\mathbb{Z}_+\cdot a$ 使得 $|c_{i+1}| > R_i + \hat{r}_{i+1}$，使 $\mathbb{D}_{R_i}$ 与 $\mathbb{D}(c_{i+1},\hat{r}_{i+1})$ 保持正距离；

2、取 $\mathbb{D}(c_{i+1},\hat{r}_{i+1})$ 上函数 $\hat{g}_{i+1}(\cdot) := g_{i+1}(\cdot - c_{i+1})$，注意可要求 $r_i \leq R_i$；

3、取 $R_{i+1} > |c_{i+1}| + \hat{r}_{i+1}$，使得 $\mathbb{D}_{R_{i+1}}$ 完全包住 $\mathbb{D}_{R_i}$ 与 $\mathbb{D}(c_{i+1},\hat{r}_{i+1})$；

4、利用 Runge 逼近定理，将 $\mathbb{D}_{R_i}$ 上 $F_i$ 与 $\mathbb{D}(c_{i+1},\hat{r}_{i+1})$ 上 $\hat{g}_{i+1}$ 延拓为 $\mathbb{D}_{R_{i+1}}$ 上 $F_{i+1}$，可控制误差为(度量即为 $\mathbb{C}$ 上欧式度量)：

$$\sup_{z\in\mathbb{D}_{R_i}} d_{\mathbb{C}}(F_{i+1}(z),F_i(z))\le\epsilon_{i+1}\qquad \sup_{z\in\mathbb{D}(c_{i+1},\hat{r}_{i+1})} d_{\mathbb{C}}(F_{i+1}(z),\hat{g}_{i+1}(z))\le\epsilon_{i+1}$$

5、令 $f=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(z)$，其全纯，且

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}(c_{i+1},\hat{r}_{i+1})} d_{\mathbb{C}}(f(z),\hat{g}_{i+1}(z)) &\le \sup_{z\in\mathbb{D}(c_{i+1},\hat{r}_{i+1})} d_{\mathbb{C}}(F_{i+1}(z),\hat{g}_{i+1}(z))+\sum_{j\ge i+1}\sup_{z\in\mathbb{D}_{R_j}} d_{\mathbb{C}}(F_{j+1}(z),F_j(z))\\ &\le \epsilon_{i+1}+\sum_{j\ge i+2}\epsilon_j\\ &\to 0\quad (i\to\infty)\end{aligned}$$

也即

$$\sup_{z\in\mathbb{D}(\hat{r}_{i+1})} d_{\mathbb{C}}(f(z+c_{i+1}),g_{i+1}(z))\to 0\quad (i\to\infty)$$

因为 $\mathbb{Q}_c[z]\times\mathbb{Q}_+$ 每个元素都于 $\{(g_j,\hat{r}_j)\}_{j\ge1}$ 中出现无数次，而 $\mathbb{Q}_c[z]$ 本身也于 $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ 中稠密，这就完成了证明。

□

## 4.2 Duios Ruis Theorem

解决了 $f$ 为单变量的全纯万有覆盖函数的情况.

**Theorem.** 令 $\phi:\mathbb{R}_{\ge0}\to\mathbb{R}_{>0}$ 且 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\phi(r)}{r^N}=\infty\ (\forall N\ge1)$。取 $a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$，则存在一个全纯函数 $f$ 在 $T_a$ 作用下于 $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ 中稠密，且

$$|f(z)|\le\phi(|z|)\ (\forall z\in\mathbb{C})$$

首先可知 $\phi(r)$ 控制了一个解析实值函数 $\sum_{i=0}^{\infty}A_ir^i$，其中

$$A_i>0,\lim_{i\to\infty}\frac{A_{i+1}}{A_i}=0$$

我们来进行一些说明。首先选取 $A_0=\dfrac{1}{2}\min\limits_{r\in[0,\infty)}\phi(r)$，对于 $A_{i+1}$，取为

$$A_{i+1}=\min\left\{\frac{A_i}{i+1},\frac{1}{2}\min_{r\in(0,\infty)}\frac{\phi(r)-\sum_{j=0}^{i}A_jr^j}{r^{i+1}}\right\}$$

通过利用 H.Cantan 的等价版本的 Nevanlinna 特征函数，Dinh-sibony 问题 9.1 就得到了部分回答：

$$T_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta+O(1)$$

### 4.3 亚纯情况的解决思路

取可数个有理函数 $f_i : \mathbb{D}_{r_i} \to \mathbb{CP}^1$，使得任意亚纯函数都可以由 $(f_i)_{i\geq 1}$ 中元素取极限得到，事实上在 $\mathbb{Q}_c(z)$ 中取元素即可。同 birkhoff 定理证明过程中的操作类似，取 $g_j : \mathbb{D}_{\ell_j} \to \mathbb{CP}^1 (j \geq 1)$，使得每个 $f_i$ 都在其中重复出现无数次。

形如 $h(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$，其中 $p, q \in \mathbb{Q}_c[z], \deg p < \deg q$ 的函数能很好地逼近多项式 $f_i$ 于 $\mathbb{D}_{r_i}$ 上，形如：

$$\hat{h}_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_{i,j}} \frac{C_{i,j,k}}{z - \xi_{i,j,k}} \quad j = 1, 2, \cdots; N_{i,j} \in \mathbb{Z}_+; C_{i,j,k} \in \mathbb{C}; \xi_{i,j,k} \in \partial \mathbb{D}_{r_i+1}$$

从而能很好地逼近 $\mathbb{Q}_c(z)$。而对于这样的 $\{h(z)\}$，可由前述证明构造万有覆盖的亚纯函数（这里没看懂）：

$$F(z) := \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z - c_j) \quad c_j \in \mathbb{C}; 1 \ll |c_1| \ll |c_2| \ll \cdots$$

不过，最后利用 Nevanlinna 理论：

$$T_F(r) = \underbrace{N_F(r, \infty)}_{\log\text{ 量级, 能选定增长速度}} + \underbrace{m_F(r, \infty)}_{|z| \gg 1, g_i(z) \approx 0, m_F(r,\infty) = O(1)} + O(1)$$

另外还可以采用以下的分解，将 $f_i \in \mathbb{Q}_c(z)$ 用以下可数多个函数代替：

$$f_i \left( \frac{M_{i,j}}{z + M_{i,j}} \right)^{\deg f_i + 1} \quad j = 1, 2, \cdots; M_{i,j} \in \mathbb{Q}_c; r_i \ll |M_{i,1}| \ll |M_{i,2}| \ll \cdots \nearrow \infty$$

这避开了用 Runge 定理来实现 $\{h(z)\}$ 的构造。

# 5 On Ahlfors currents：3.Preparations

原文：Huynh, D.T., & Xie, S. (2021). On Ahlfors currents. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.*

## 5.1 一些记号和基本结果

后面会出现的记号统一列举如下：

$$\begin{aligned}
&\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\mathrm{i}} \\
&x_\mu \in \{z \mid 0 \le \Re(z), \Im(z) < 1\} \\
&c \ge 5 \\
&r_1 \ge 2020 \cdot c, r_{i+1} \ge r_i^4, r_i \nearrow +\infty \\
&A_{r_i} = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{r_i}{2} \le |z| \le r_i\} \\
&B_{r_i} = \bigcup_{\mu \in A_{r_i} \cap c\Gamma} \{\mu + x_\mu\} \\
&\Lambda = \cup_{i \ge 1} B_{r_i} \\
&K：\text{某个常量} \\
&\psi(z) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}}
\end{aligned}$$

**Lemma.1** $\forall i \in \mathbb{Z}_+, \left|\sum_{\lambda \in B_{r_i}} \frac{1}{\lambda}\right| \le \frac{K}{c^2}$

证明. 对于任意的 $\mu \in A_{r_i} \cap c\Gamma$，有估计 $\left|\frac{1}{\mu + x_\mu} - \frac{1}{\mu + 0}\right| \le \frac{K}{r_i^2}$，从而

$$\left|\sum_{\lambda \in B_{r_i}} \frac{1}{\lambda}\right| = \left|\sum_{\mu \in A_{r_i} \cap c\Gamma} \left(\frac{1}{\mu + x_\mu} - \frac{1}{\mu + 0}\right)\right| \le \frac{K}{r_i^2} \left|\sum_{\mu \in A_{r_i} \cap c\Gamma} 1\right| \le \frac{K}{r_i^2} \cdot K \left(\frac{r_i}{c}\right)^2 = \frac{K}{c^2}$$

□

**Lemma.2** $\forall i \in \mathbb{Z}_+, \left|\sum_{\lambda \in B_{r_i}} \frac{1}{\lambda^2}\right| \le \frac{K}{c^2 r_i}$

证明. 对于任意的 $\mu \in A_{r_i} \cap c\Gamma$，有估计 $\left|\frac{1}{(\mu + x_\mu)^2} - \frac{1}{(\mu + 0)^2}\right| \le \frac{K}{r_i^3}$，从而

$$\left|\sum_{\lambda \in B_{r_i}} \frac{1}{\lambda^2}\right| = \left|\sum_{\mu \in A_{r_i} \cap c\Gamma} \left(\frac{1}{(\mu + x_\mu)^2} - \frac{1}{(\mu + 0)^2}\right)\right| \le \frac{K}{r_i^3} \left|\sum_{\mu \in A_{r_i} \cap c\Gamma} 1\right| \le \frac{K}{r_i^3} \cdot K \left(\frac{r_i}{c}\right)^2 = \frac{K}{c^2 r_i}$$

□

**Proposition 3.3** $\forall i \geq 2$ 和 $\frac{r_i}{3} \leq |z| \leq 3r_i$，有 $\log|\psi(z)| \leq K\frac{r_i^2}{c^2}$

证明. 令 $I = \prod_{\ell=1}^{i-1}\prod_{\lambda\in B_{r_\ell}}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}$，从而结合

$$\prod_{\ell=1}^{i-1}\prod_{\lambda\in B_{r_\ell}}\left|1-\frac{z}{\lambda}\right| \leq (1+3r_i)^{\sum_{\ell=1}^{i-1}|B_{r_\ell}|} \leq (1+3r_i)^{K\frac{r_i}{c^2}} \quad (\text{注意有}K\cdot r_{i+1} \geq \sum_{\ell=1}^{i-1} r_i^2)$$

得到

$$\log|I| \leq \log(1+3r_i)^{K\frac{r_i}{c^2}} + \sum_{\ell=1}^{i-1}\sum_{\lambda\in B_{r_\ell}}\left(\frac{|z|}{\lambda}+\frac{|z|^2}{2\lambda^2}\right) \leq K\frac{r_i^2}{c^2} + \sum_{\ell=1}^{i-1}\left(\frac{K}{c^2}r_i + \frac{K}{c^2 r_i}r_i^2\right) \leq K\frac{r_i^2}{c^2}$$

令 $II = \prod_{\lambda\in B_{r_i}}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}$，可知

$$\log|II| \leq K\cdot\left|\sum_{\lambda\in B_{r_i}} 1\right| \leq K\frac{r_i^2}{c^2}$$

令 $III = \prod_{\ell=i+1}^{\infty}\prod_{\lambda\in B_{r_\ell}}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}$，从而结合

$$\left|\frac{z}{\lambda}\right| \leq \frac{3r_i}{r_\ell/2} \ll 1\ ,\ \log\left[\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}\right] = -\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^n$$

得到

$$\log|III| \leq \sum_{\ell=i+1}^{\infty}\left(\sum_{\lambda\in B_{r_\ell}}\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}\left|\frac{z}{\lambda}\right|^n\right) \leq \sum_{\ell=i+1}^{\infty}\left(K\frac{r_\ell^2}{c^2}\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}\left(\frac{3r_i}{r_\ell/2}\right)^n\right) \leq \sum_{\ell=i+1}^{\infty}\left(K\frac{r_\ell^2}{c^2}\cdot K\frac{r_i^3}{r_\ell^3}\right) \leq \frac{K}{c^2}$$

从而就得到

$$\log|\psi(z)| = \log|I| + \log|II| + \log|III| \leq K\frac{r_i^2}{c^2}$$

□

## 5.2 Proposition 3.4

对于 $\forall z\in\mathbb{C}$ 且 $|z|$ 足够大，则有

$$\log|\psi_1(z)| := \log\left|\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\mathbb{D}(z,1)}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}\right| \geq -K\frac{|z|^2}{c^2}$$

证明. 取

$$\eta = \frac{1}{100}\ ,\ \widetilde{A_{r_i}} := \{z\in\mathbb{C} \mid \frac{(1-\eta)}{2}r_i \leq |z| \leq (1+\eta)r_i\}$$

使得 $B_{r_i} \subseteq A_{r_i} \subseteq \widetilde{A_{r_i}}$，下面就 $z$ 的位置，分出两种情况。

**Case(i)** $|z| \notin \bigcup_{i\geq 1} \widetilde{A_{r_i}}$

这说明 $\exists j \in \mathbb{Z}_+, (1+\eta)r_j < |z| < \dfrac{1-\eta}{2} r_{j+1}$ 且 $\psi_1(z) = \psi(z)$。从而就有

$$\begin{aligned}
\log|\psi_1(z)| &= \log|\psi(z)| \\
&= \log\left|\prod_{\ell=1}^{j}\prod_{\lambda\in B_{r_\ell}}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}\right| + \log\left|\prod_{\ell\geq j+1}\prod_{\lambda\in B_{r_\ell}}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}\right| \\
&\geq \underbrace{\log\left|\eta'^{\sum_{\ell=1}^{j}|B_{r_\ell}|}\right|}_{\lambda\in\cup_{\ell=1}^{j}B_{r_\ell}\ ,\ |1-\frac{z}{\lambda}|\geq|\frac{z}{\lambda}|-1>\eta\geq\frac{\eta}{2}=:\eta'} + \underbrace{\log\prod_{\ell=1}^{j}\prod_{\lambda\in B_{r_\ell}}\left|\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}\right|}_{\geq-|z|\sum_{\ell=1}^{j}\frac{K}{c^2}-|z|^2\sum_{\ell=1}^{j}\frac{K}{c^2 r_\ell}} + \underbrace{\sum_{\ell=j+1}^{\infty}-\left(\sum_{\lambda\in B_{r_\ell}}\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}\left|\frac{z}{\lambda}\right|^n\right)}_{\text{Proposition 3.3 , }\log|III|} \\
&\geq \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{j}K\frac{r_\ell^2}{c^2}\right)}_{\leq K\frac{r_j^2}{c^2}\leq K\frac{|z|^2}{c^2}}\underbrace{\log|\eta'|}_{<0} - K\frac{|z|^2}{c^2} - \frac{K}{c^2} \\
&\geq -K\frac{|z|^2}{c^2}
\end{aligned}$$

**Case(ii)** $\exists j \in \mathbb{Z}_+ ,\ |z| \in \widetilde{A_{r_j}}$

只需要讨论 $B_{r_j}$ 这一项，而

$$\log\left|\prod_{\lambda\in B_{r_j}\setminus\mathbb{D}(z,1)}\mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}\right| \underbrace{\geq}_{\text{Lemma1,Lemma2}} -K\frac{|z|^2}{c^2}$$

从而只需要说明：

$$\log\left|\prod_{\lambda\in B_{r_j}\setminus\mathbb{D}(z,1)}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)\right| \geq -K\frac{|z|^2}{c^2}$$

假设 $\mu_0$ 满足 $|\mu_0 - z| \leq |\mu - z|, \forall \mu \in c\Gamma$。

当 $\lambda = \mu + x_\mu \in B_{r_j}$ 且 $\mu \neq \mu_0$ 时，有估计

$$|\lambda - z| \geq |\mu - z| - |x_\mu| \geq \frac{1}{2}(|\mu - z| + |\mu - z_0|) - \sqrt{2} \geq \frac{1}{2}|\mu - \mu_0| - \sqrt{2} \geq \frac{1}{4}|\mu - \mu_0|$$

从而

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda}\right| = \frac{|\lambda - z|}{|\lambda|} \geq \frac{|\mu - \mu_0|}{8|\mu|}$$

由于 $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{|B_{r_j}|} \geq \exp\left(-K\dfrac{|r_j|^2}{c^2}\right)$，只需说明：

$$\log\prod_{\mu_0\neq\mu\in A_{r_j}\cap c\Gamma}\frac{|\mu-\mu_0|}{|\mu|} \geq -K\frac{|r_j|^2}{c^2} \geq -K\frac{|z|^2}{c^2}$$

对于 $r' > 0$，令 $\Gamma_{\leq r'} \subset \Gamma$ 为其中实部与虚部绝对值小于等于 $r'$ 的点，则

Case(ii-1) 对于 $\mu \in A_{r_j} \cap c\Gamma \backslash (\mu_0 + \Gamma_{\le \eta r_j})$，直接从下面两式给出所需估计：

$$\frac{|\mu - \mu_0|}{|\mu|} \ge \frac{\eta r_j}{r_j} = \eta$$

$$|A_{r_j} \cap c\Gamma \backslash (\mu_0 + \Gamma_{\le \eta r_j})| \le K \frac{|r_j|^2}{c^2}$$

Case(ii-2) 需处理 $\mu \in A_{r_j} \cap c\Gamma \cap (\mu_0 + \Gamma_{\le \eta r_j})$ 的情形。

而（$[\cdot]$ 为取整函数）

$$\begin{aligned}
\log \prod_{\mu_0 \ne \mu \in c\Gamma \cap (\mu_0 + \Gamma_{\le \eta r_j})} \frac{|\mu - \mu_0|}{|\mu|} &\ge \log \prod_{0 \ne \mu' \in c\Gamma \cap \Gamma_{\le \eta r_j}} \frac{|\mu'|}{2r_j} \\
&\ge \underbrace{\log \left( c \times 2c \times 3c \times \cdots \times [\frac{\eta}{c} r_j] c \right)^{4[\frac{\eta}{c} r_j]+2+2} - \log \left( (2r_j)^{(4[\frac{\eta}{c} r_j]+2+2)[\frac{\eta}{c} r_j]} \right)}_{c\Gamma \cap \Gamma_{\le \eta r_j} \backslash \{0\} = \pm \{\ell c\}_{\ell=1}^{[\frac{\eta}{c} r_j]} \bigcup \sum_{-[\frac{\eta}{c} r_j]}^{[\frac{\eta}{c} r_j]} \pm \{ic + \ell c\sqrt{-1}\}_{\ell=1}^{[\frac{\eta}{c} r_j]}} \\
&\ge \underbrace{\log \left( (\beta!)^{4\beta+4} \right) + \log \left( (c^\beta)^{4\beta+4} \right) - \log \left( (2r_j)^{(4\beta+4)\beta} \right)}_{\beta := [\frac{\eta}{c} r_j]} \\
&\ge \log \left( (\beta!)^{4\beta+4} \right) - \log \left( (\frac{\eta}{c} r_j)^{4\beta^2+4\beta} \right) + \log \left( (\frac{\eta}{2})^{(4\beta^2+4\beta)} \right) \\
&\ge \underbrace{K(4\beta+4)\beta \log \beta - K(4\beta^2+4) \log \beta + K(4\beta^2+4\beta)}_{\beta! = \beta^\beta e^{-\beta} \sqrt{2\pi\beta} e^{\frac{\rho_\beta}{12\beta}}, |\rho_\beta| \le 1} \\
&\ge \underbrace{-K\beta^2}_{\log \frac{\beta!}{\beta^\beta} \approx -K\beta + o(\beta), \text{由此消去} K\beta^2 \log \beta \text{项}} \\
&\ge -K \frac{|r_j|^2}{c^2}
\end{aligned}$$

那么需要考虑的只有 $c\Gamma \cap (\mu_0 + \Gamma_{\le \eta r_j})$ 可能会超出 $A_{r_j}$，直接相对于 $A_{r_j}$ 令

$$c\Gamma \cap (\mu_0 + \Gamma_{\le \eta r_j}) = (\mu_0 + P_{in}) \bigcup (\mu_0 + P_{out})$$

且能找到 $y \in A_{r_j} \cap c\Gamma$ 使得 $y + P_{out} \subset A_{r_j}$ 且 $(y + P_{out} \subset A_{r_j}) \cap (\mu_0 + \Gamma_{\le 8\eta r_j}) = \emptyset$，如下图所示：

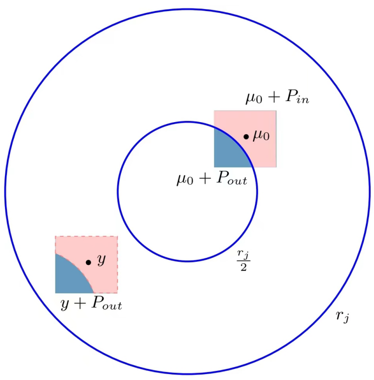


图 2: 论文原图

将 $A_{r_j} \cap c\Gamma$ 分为三类点：$\mu_0 + P_{in}$，$y + P_{out}$，$R$ : remaining。而又有估计：

$$\prod_{\mu \in y+P_{out}} \frac{|\mu - \mu_0|}{|\mu|} \geq \left(\frac{8\eta r_j}{r_j}\right)^{\sum_{\mu \in y+P_{out}} 1} \geq \left(\frac{\sqrt{2}\eta r_j}{r_j/4}\right)^{\sum_{\mu \in y+P_{out}} 1} \geq \prod_{\mu \in \mu_0+P_{out}} \frac{|\mu - \mu_0|}{|\mu|}$$

从而就有

$$\underbrace{\prod_{\mu_0 \neq \mu \in A_{r_j} \cap c\Gamma} \frac{|\mu - \mu_0|}{|\mu|}}_{A_{r_j} \cap c\Gamma = (\mu_0 + P_{in}) \cup (y + P_{out}) \cup (R)} \geq \underbrace{\prod_{\mu_0 \neq \mu \in c\Gamma \cap (\mu_0 + \Gamma_{\leq \eta r_j})} \frac{|\mu - \mu_0|}{|\mu|}}_{c\Gamma \cap (\mu_0 + \Gamma_{\leq \eta r_j}) = (\mu_0 + P_{in}) \cup (\mu_0 + P_{out}),\ \text{Case(ii-2) 前半部分}} \cdot \underbrace{\prod_{\mu \in R} \frac{|\mu - \mu_0|}{|\mu|}}_{\text{Case(ii}-1\text{)+估计}|R| \leq K \frac{|r_j|^2}{c^2}}$$

这就完成了证明。

□

# 6 其他