姜伯驹《同调论》复盘笔记

@ 是顾小北

2024年4月3日

代数拓扑学的宗旨是用代数方法解 决拓扑问题······流形的对偶性是同 调论的精华之一·····

> 姜伯驹 北京大学 2005 年 6 月

注:这不是一份严肃的讲义,甚至不是一份合格的笔记——我在复盘姜伯驹《同调论》一书的正文内容和阅读笔记时,选取几个典型的、重要的地方进行了梳理归纳,并加入了自己的思考.并不适合直接阅读学习,更建议作为辅助材料搭配原书使用.

目录

1	复形乘积与各种积		1
	1.1	自由链上的斜积	1
	1.2	胞腔同调中的乘积	2
	1.3	奇异同调中的乘法	3
2	万有	ī系数定理	5
3	计算	I: 一些具体例子	6
4	关于同调的同构		7
	4.1	de Rham 同调定理	7
	4.2	胞腔同调定理及其他	8
5	对佴	定理与更多	10
	5.1	Poincare 对偶定理	10
	5.2	Lefschetz 对偶定理与其他	11
6	相交数与不动点		13
	6.1	Lefschetz 数	14
	6.2	Euler 类与 Euler 数	14

1 复形乘积与各种积

自由链复形的张量积仍为自由链复形

$$C \otimes D = \{(C \otimes D)_n, \partial_n^{\otimes}\}$$

且:

$$(C\otimes D)_n=\bigoplus_{p+q=n}C_p\otimes D_q \qquad \partial_n^\otimes(c_p\otimes d_q)=(\partial_p c_p)\otimes d_q+(-1)^pc_p\otimes(\partial_q d_q)$$

对于自由链复形 C, C', D, D', 有以下结果:

$$H_*(C) \cong H_*(C') \quad H_*(D) \cong H_*(D') \Longrightarrow H_*(C \otimes D) \cong H_*(C' \otimes D')$$

Remark 1.1. Kunneth 公式

设 C,D 都是自由链复形, $H_*(D)$ 是有限生成的自由分次群, 则

$$H_*(C\otimes D)=H_*(C)\otimes H_*(D) \qquad H^*(C\otimes D)=H^*(C)\otimes H^*(D)$$

证明. 将分次群 $H_*(D)$ 视为边缘算子为零的链复形。则由于自由链复形同伦当且仅当它们同调群相同,得到 $D \simeq H_*(D)$,从而

$$H_*(C \otimes D) = H_*(C \otimes H_*(D)) = H_*(C) \otimes H_*(D)$$
 H*的推导类似

1.1 自由链上的斜积

此时可定义上下同调类的斜积:

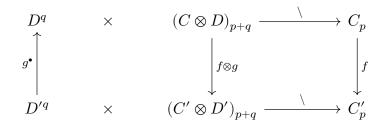
$$\backslash: D^q \times (C \otimes D)_{n+q} \to C_n \quad \beta \backslash (c \otimes d) = \langle \beta, d \rangle \cdot c$$

其边缘公式为

$$\partial(\beta \backslash c) = (-1)^p (\delta \beta) \backslash c + \beta \backslash (\partial c)$$

且有以下基本性质:

- (1) 结合性 $(\eta \otimes \zeta) \setminus w = \eta \setminus (\zeta \setminus w)$
- (2) 对偶性 $\langle \xi \otimes \eta, z \rangle = \langle \xi, \eta \backslash z \rangle$
- (3) 自然性



1.2 胞腔同调中的乘积

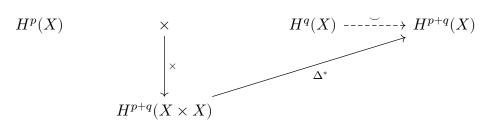
设 X,Y 是胞腔复形,则

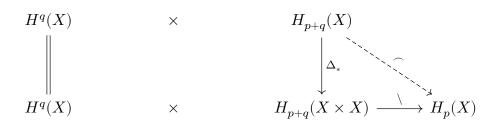
$$C_*(X \times Y) = C_*(X) \otimes C_*(Y)$$

并且有胞腔复形的对角线映射:

$$\Delta: X \to X \times X \qquad x \mapsto (x, x)$$

于是可以定义胞腔同调上的上积 ~ 与卡积 ~:





一些性质:

$$[\alpha] \smile [\beta] = [\widetilde{\Delta}^{\#}(\alpha \times \beta)] \quad [\alpha] \frown [\beta] = [\beta \backslash \widetilde{\Delta}_{\#}(\alpha)]$$
$$(\xi_1 \smile \xi_2) \frown x = \xi_1 \frown (\xi_2 \frown x) \quad \langle \xi_1 \smile \xi_2, x \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \frown x \rangle$$

Remark 1.2. Alexander-Whitney 链映射

 Δ 并不是胞腔映射,故如果需要在链水平上引入上积和卡积,需要一个好的关于 Δ 的胞腔逼近. 借助于棱柱剖分,可得到 Δ 的胞腔逼近 Δ' ,其链映射为:

$$\Delta'_{\#}(s^n) = \operatorname{AW}(s^n) = \sum_{p=0}^n \, {}_p s \times s_{n-p} \qquad \text{对有序单形} s^n$$

对有序单纯复形 K 上,应该定义:

$$\begin{split} \langle \alpha \smile \beta, s \rangle &= \langle \Delta'^{\#}(\alpha \times \beta), s \rangle = \langle \alpha \times \beta, \mathsf{AW}(s) \rangle = \langle \alpha, \, {}_p s \rangle \cdot \langle \beta, s_q \rangle \\ \beta \frown s &= \beta \backslash \Delta'_{\#}(s) = \beta \backslash \mathsf{AW}(s) = \langle \beta, \, s_q \rangle \cdot \, {}_p s \end{split}$$

1.3 奇异同调中的乘法

对于拓扑空间 X,Y,有以下的自然链同伦等价:

$$S_{\downarrow}(X) \otimes S_{\downarrow}(Y) \simeq S_{\downarrow}(X \times Y)$$

其中的链同伦等价还有在链同伦意义下的唯一性,将其、其诱导的上链映射、其诱导的同调上同调,一概称之为 Eilenberg-Zliber 同构.

记 ρ_X, ρ_Y 分别是投射,则

$$\mathrm{EZ}: S_*(X \times Y) \to S_*(X) \times S_*(Y) \qquad \sigma \mapsto \sum_{i+j=n} \rho_{X_\#}(\,_i\sigma) \otimes \rho_{Y_\#}(\sigma_j)$$

从而在定义奇异上链的叉积×时,需要过渡一下:

$$S^p(X)\times S^q(Y) \xrightarrow{\quad \otimes \quad } S_*(X)\otimes S_*(Y)$$

$$\downarrow \text{EZ}$$

$$S^{p+q}(X\times Y)$$

由此也可以定义奇异上同调的上积、乘积空间的上积.

Remark 1.3. 关于空间偶的乘积

定义胞腔复形偶的乘积为

$$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, A \times Y \cup B \times X)$$

则有:

$$C_*((X,A)\times (Y,B))=C_*(X,A)\otimes C_*(Y,B)$$

而对于拓扑空间偶 (X,A), (Y,B), 若满足 $\{A \times Y, X \times B\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦, 则有自然的链同伦等价:

$$S_*(X,A) \otimes S_*(Y,B) \stackrel{\mathrm{EZ}}{\simeq} S_*((X,A) \times (Y,B))$$

Remark 1.4. 上同调环和下同调模

拓扑空间 X 上的上同调群 $H^*(X)$ 在上积运算下称为一个交换的分次环,下同调群在卡积作用下成为上同调环的一个分次模。

上积和卡积的单位是每个点上取值为一的零维上链 ϵ 。而交换性是指

$$\xi \smile \eta = (-1)^{pq} \eta \smile \xi$$

其实对于下同调群,也有类似的环结构:只不过定义过程比较曲折.

假设M是有向n维流形,定义 $\mathfrak{D}(M)$ 与M链之间的交积:

$$\bullet: C_{n-p}(\mathfrak{D}(M)) \times C_{n-q}(M) \to C_{n-(p+q)}(\mathrm{Sd}M) \qquad \mathfrak{D}s^p \bullet s^{n-q} = I(s^{p*}, s^{n-q})$$

交积●的边缘公式为

$$\partial(a \bullet b) = (-1)^q (\partial a) \bullet b + a \bullet (\partial b)$$

交积是上积的对偶. 参见下图:

所以有

$$\begin{split} &D(\operatorname{Sd}^\# c^p) \bullet a_{n-q} = I(\operatorname{Sd}^\# c^p, a_{n-q}) = c^p \frown \operatorname{Sd}_\# a_{n-q} \qquad c^p \in C^p(\operatorname{Sd}M), a_{n-q} \in C_{n-q}(M) \\ & \text{取 同 调} \colon \quad D(\xi) \bullet y = \xi \frown y \\ & \Longrightarrow D(\xi) \bullet D(\eta) = \xi \frown D(\eta) = \xi \frown (\eta \frown [M]) = (\xi \smile \eta) \frown [M] = D(\xi \smile \eta) \end{split}$$

故对于有向n维流形M,下同调群在交积运算下构成M的交环,[M]作为运算的单位。交环与上同调环同构。

2 万有系数定理

考察两种初等链复形:

$$E(\mathbb{Z},n):0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n \not\equiv 1} 0 \quad E(\mathbb{Z}_k,n):0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z} \xrightarrow{n \not\equiv 1} 0$$

并记

$$G_k = \operatorname{coker}\{G \xrightarrow{k} G\} \quad _k G = \ker\{G \xrightarrow{k} G\}$$

从而得到

$$\begin{split} H_q(E(\mathbb{Z},n);G) &= \begin{cases} G & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases} & H^q(E(\mathbb{Z},n);G) = \begin{cases} G & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases} \\ H_q(E(\mathbb{Z}_k,n);G) &= \begin{cases} G_k & q = n \\ kG & q = n+1 \\ 0 & q \neq n, n+1 \end{cases} & H^q(E(\mathbb{Z}_k,n);G) &= \begin{cases} kG & q = n \\ G_k & q = n+1 \\ 0 & q \neq n, n+1 \end{cases} \end{split}$$

Theorem 2.1. X 是有限胞腔复形, 若

$$H_q(X) = \bigoplus_{i=1}^{\beta_q} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_q} \mathbb{Z}_{k_i^{(q)}}$$

则有

$$H_q(X;G) = \bigoplus_{i=1}^{\beta_q} G \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_q} G_{k_i^{(q)}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_{q-1}} {}_{k_i^{(q-1)}} G \quad H^q(X;G) = \bigoplus_{i=1}^{\beta_q} G \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_q} {}_{k_i^{(q)}} G \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_{q-1}} {}_{k_i^{(q-1)}} G \oplus \bigoplus_{i=1}^{\gamma_{$$

Corollary 2.2. 设X是有限胞腔复形, F_q 是自由部分而 T_q 是有限部分(Abel 群). 则

$$H_q(X) \cong F_q \oplus T_q \qquad H^q(X) = F_q \oplus T_{q-1}$$

3 计算:一些具体例子

(1) 实系数射影空间

$$H_q(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{q=0 gq=n 为奇数} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{q= 奇数且 0$$

(2) 关于可定向

M 是连通的 n 维胞腔流形,则

$$H_n(M) = egin{cases} \mathbb{Z} & \mbox{若 M 可定向} \ 0 & \mbox{若 M 不可定向} \end{cases}$$

若 M 是连通的不可定向的 n 维胞腔流形,则 $H^n(M)\cong \mathbb{Z}_2, H_1(M;\mathbb{Z}_2)\neq 0.$ 据此还可知单连通的流形一定可定向.

(3) 单纯同调中的例子

$$H^1(X) = \widetilde{\pi_1(X)} \cong \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{} \times \mathbb{Z}_{2} & X = mP^2 \\ \mathbb{Z}^{2n} & X = nT^2 \end{cases}$$

若s是n(n>1)维单形,则

$$H_q(\mathrm{Cl}\underline{s}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases} \qquad H_q(\mathrm{Bd}\underline{s}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, n-1 \\ 0 & q \neq 0, n-1 \end{cases}$$

4 关于同调的同构

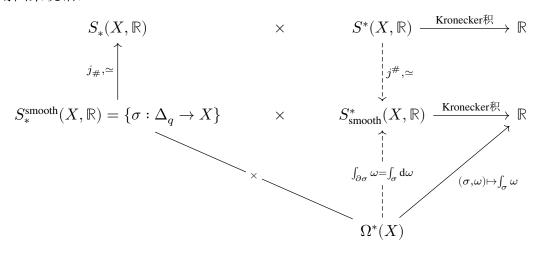
4.1 de Rham 同调定理

光滑流形 X 上微分形式 $\Omega(X)$ 与外微分算子构成 $\mathbb R$ 为系数域的上链复形 $\{\Omega^*(X), \mathbf d\}$,其上同调为 X 的 de Rham: $H^*_{DR}(X)$.

Theorem 4.1.

$$H^*_{DR}(X) \cong H^*(X;\mathbb{R})$$

证明. 用图来说话:



Remark 4.1. 关于 Kronecker 积, 常把其定义扩充为

$$\langle -, - \rangle : H^*(X,A;G) \times H_*(X,A) \to G$$

于是给我们提供一个同态:

$$\kappa: H^q(X,A;G) \to \operatorname{Hom}(H_q(X,A),G) \quad \kappa([z^q])([z_q]) = \langle [z^q], [z_q] \rangle$$

并且能说明 $\operatorname{Hom}(H_q(X,A),G)$ 是 $H^q(X,A;G)$ 的直和分量.

Remark 4.2. 在 $H^*_{DR}(X)$ 中,微分形式可以相乘,且对应的外微分公式为:

$$\mathbf{d}(\varphi \wedge \psi) = \mathbf{d}\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge \mathbf{d}\psi$$

这使得 $H^*_{DR}(X)$ 成为一个环,它与上同调环 $H^*(X;\mathbb{R})$ 同构.

4.2 胞腔同调定理及其他

Theorem 4.2. 胞腔同调定理

(X,A) 是胞腔复形偶,则 $H_*(C_*(X,A)) \cong H_*(X,A)$.

证明. 更确切地体现在下图中.

$$C_q(X,A) \xleftarrow{j_*} H_q(X^q \cup A,A)$$

$$\downarrow^{i_*j_*^{-1}} \downarrow^{i_*}$$

$$H_q(C_q(X,A)) \xrightarrow{\bullet,\cong} H_q(X,A)$$

写开来就是 (记 $\overline{X}^q = X^q \cup A$)

$$H_{q+1}(\overline{X}^{q+1}, \overline{X}^q) \qquad \qquad H_{q-1}(\overline{X}^{q-2}, A) = 0$$

$$\downarrow \partial_* \qquad \qquad \downarrow i_* \qquad \qquad \downarrow i$$

从而 $i_*j_*^{-1}$ 决定了同构 Θ

Remark 4.3. $C_*(X,A)=\{C_q(X,A),\partial q\}$ 为 (X,A) 的胞腔链复形,其中

$$C_q(X,A)=H_q(X^q\cup A,X^{q-1}\cup A)\quad\text{ ff 如 }\bigoplus\mathbb{Z},\ \text{自 由 Abel 群}$$
 $\partial:H_q(X^q\cup A,X^{q-1}\cup A)\overset{\partial_*}{\to}H_{q-1}(X^{q-1}\cup A,X^{q-2}\cup A)$

这里或许需要注意以下空间三元组的性质:

设 $B \subset A \subset X$, (X,A,B) 为空间三元组,则总有链复形的短正合序列以及正合的同调序列 (i,j 均为含入映射):

$$(1) \quad 0 \to S_*(A,B) \overset{i_\#}{\to} S_*(X,B) \overset{j_\#}{\to} S_*(X,A) \to 0$$

$$(2) \quad \cdots \stackrel{\partial_{*}}{\rightarrow} H_{q}(A,B) \stackrel{i_{*}}{\rightarrow} H_{q}(X,B) \stackrel{j_{*}}{\rightarrow} H_{q}(X,A) \stackrel{\partial_{*}}{\rightarrow} H_{q-1}(A,B) \stackrel{i_{*}}{\rightarrow} \cdots$$

这一结果由"五引理"或者"图像追踪法"给出.

根据 Eilenberg-Steenrod 同调公理系统,同调论由三部分组成:空间偶的同调群、映射诱导的同调同态、空间偶同调序列中的边缘同态。Θ 是胞腔同调论到奇异同调论的一个自然变换. 前者也有相应的切除定理和 Mayer-Vietoris 正合序列,得益于后者的相应版本结论.

胞腔切除定理

(X,A) 是胞腔复形偶,则有同构:

$$H_*(X,A) \underset{[\pi:(X,A) \to (X/A,A/A)]_*}{\cong} \widetilde{H}_*(X/A)$$

*注:这有时可用来计算相对同调群,或者利用:

若 (X,A) 是空间偶而
$$A \neq \emptyset$$
,则 $H_*(X,A) \cong \widetilde{H}_*(X \cup CA)$

Mayer-Vietoris 耦版本

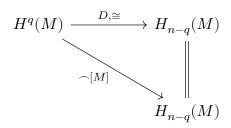
 X_1, X_2 是胞腔复形 X 的子复形,则 $\{X_1, X_2\}$ 是 Mayer-Vietoris 耦,也就是:

$$H_*(X_1,X_1\cap X_2)\underset{[i:(X_1,X_1\cap X_2)\to (X_1\cup X_2,X_2)]_*}{\cong}H_*(X_1\cup X_2,X_2)$$

5 对偶定理与更多

5.1 Poincare 对偶定理

Theorem 5.1. M 是一有向 n 维流形,则有 Poincare 对偶同构 D,如下交换图所示.



证明. 首先,对于有向流形 M,可取其闭链 $z^n = \sum_{s^n \in M} s^n$,其同调类记作 [M]. 同调群与胞腔 剖分无关,故而简化到对 M 是胞腔流形的情形,对其 \mathbf{q} 维有向胞腔,定义其对应在对偶复形 $\mathfrak{D}(M)$ 上的定向链为:

$$\mathfrak{D}(s^q) = \sum_{t^n, \cdots, t^{q+1}} [t^n: t^{n-1}] \cdots [t^{q+1}: s^q] \hat{t}^n \cdots \hat{t}^{q+1} \hat{s}^q$$

实际上有链群同构: $D:C^q(M) \to C_{n-q}(\mathfrak{D}(M))$ $s^{q*} \longmapsto \mathfrak{D}(s^q)$. 并且

$$D(\operatorname{Sd}^{\#}\underbrace{c^q}_{\in C^q(\operatorname{Sd}M)}) = \underbrace{I(\operatorname{Sd}^{\#}c^q,z^n)}_{\text{交链, 即正则胞腔复形卡积的几何解释}} = \underbrace{c^q \frown \operatorname{Sd}_{\#}z^n}_{I(\operatorname{Sd}^{\#}c^q,s^{q+p})=c^q \frown \operatorname{Sd}_{\#}s^{q+p}}$$

考虑同调,即得结论。

Remark 5.1. 正则胞腔复形的几个概念

设s是正则复形胞腔K的一个胞腔,则:

$$(1) 重分复形 \quad \mathrm{Sd}s = \{\hat{t}_0\hat{t}_1 \cdots \hat{t}_k \in \mathrm{Sd}K \mid s = t_0 \succ t_1 \succ \cdots \succ t_k\}$$

$$(2) 对偶复形 \quad \mathfrak{D}(s) = \{\hat{t}_0\hat{t}_1 \cdots \hat{t}_k \in \mathrm{Sd}K \mid t_0 \succ t_1 \succ \cdots \succ t_k = s_0\}$$

$$(3) 星形 复形 \quad \mathfrak{G}(s) = \{\hat{t}_0\hat{t}_1 \cdots \hat{t}_k \in \mathrm{Sd}K \mid \exists i: t_0 \succ t_1 \succ \cdots \succ t_i = s \succ t_{i=1} \succ \cdots \succ t_k\}$$

而相应的闭复形∓和边缘复形;只需要将上面的 = 对应改为 ≥ 和 >.

还有"统联, *"的概念, 理解以下几个例子:

(1)
$$S^0 * A = \Sigma A$$
 $S^n = (*S^0)^{n+1}$ $D^p * D^q = D^p * S^q = D^{p+q+1}$

$$(2)\ \overline{\mathfrak{G}}(s) = \operatorname{Sds}*\overline{\mathfrak{D}}(s) = \operatorname{Sd\bar{s}}*\dot{\mathfrak{D}}(s) \qquad \dot{\mathfrak{G}}(s) = \operatorname{Sd\bar{s}}*\dot{\mathfrak{D}}(s)$$

Remark 5.2. 对偶配对

相同维数的上下同调群之间的Kronecker 积是对偶配对,由此得到有向n维流形M上的互补维数的上同调群之间的上积也为对偶配对,全在图中:

而配对为 $P(\xi,\eta) := \langle \xi \smile \eta, [M] \rangle = \langle \xi, \eta \frown [M] \rangle = \langle \xi, D(\eta) \rangle$

当然, 如果选取 \mathbb{Z}_2 为系数域, 则对于任一 n 维流形 M, $P:H^q(M;\mathbb{Z}_2)\times H^{n-q}(M;\mathbb{Z}_2)\to \mathbb{Z}_2$ 是对偶配对.

5.2 Lefschetz 对偶定理与其他

Theorem 5.2. 假设 (M,A) 为有向相对 n 维流形, $j: M-A \to M$ 为含入映射, 则有交换图:

$$H^q(M,A) \xrightarrow{D,\cong} H_{n-q}(M-A)$$

$$\downarrow^{j_*}$$

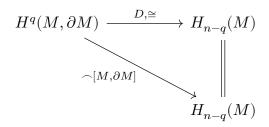
$$H_{n-q}(M)$$

证明. 一切尽在下图中:

取同调,即得结论:

$$j_\# D(\operatorname{Sd}^\# c^q) = I(\operatorname{Sd}^\# c^q, z^n) = c^q \frown \operatorname{Sd}_\# z^n \Longrightarrow j_* D(\xi) = \xi \frown [M, A]$$

特别的,如果 M 是带边流形而 $A=\partial M$,则由于 $j:M-\partial M\to M$ 是同伦等价,从而有以下交换图:



Remark 5.3. Alexander 对偶定理

(M,A) 是有向相对 n 维流形, (K,L) 是 M 的子复流形, 且 $A \subset L \subset K \subset M$, 则有同构:

$$D: H^q(K,L) \to H_{n-q}(M-L,M-K)$$

证明. 只需注意到 $\mathfrak{D}(K-L) = \mathfrak{D}(M-L) - \mathfrak{D}(M-K)$ 与链群的同构:

$$D:C^q(K,L)\to C_{n-q}(\mathfrak{D}(M-L),\mathfrak{D}(M-K))$$

而若M为n维胞腔流形,是 S^n 的正则剖分,K是M子复形。则有:

$$\widetilde{H}^q(K) = H^q(K, pt) \cong H_{n-q}(M-pt, M-K) \cong \widetilde{H}_{n-1-q}(M-K)$$

由此我们可以又得到第一章中的两个基本结果:

$$\widetilde{H}_*(S^n-D^k)=0 \qquad \widetilde{H}_q(S^n-S^k)= \begin{cases} \mathbb{Z} & q=n-k-1\\ 0 & q\neq n-k-1 \end{cases}$$

而最开始我们利用 Mayer - Vietoris 正合列(也相当于切除定理)作出。

Remark 5.4. Thom 同构定理

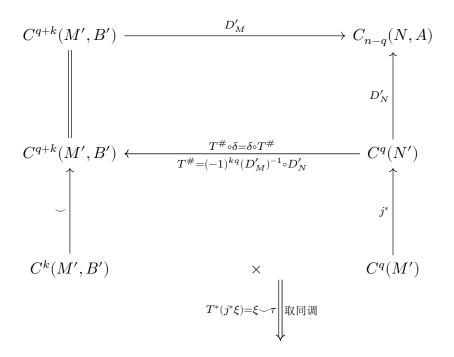
(M,A) 是 n+k 维有向相对流形而 (N,A) 是 n 维有向相对流形, $A\subset N\subset M$,则有 Thom 同构:

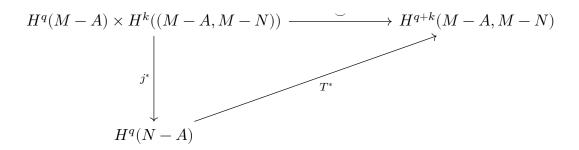
$$T^*:H^q(N-A)\to H^{q+k}(M-A,M-N)$$

证明. 记 $\tau = T^*(1) \in H^k(M-A, M-N)$ 为 Thom 类,而 $j: N-A \to M-A$ 为含入映射,再简记符号如下:

$$(M',B')=\mathfrak{D}_M(M-A,M-N) \quad N'=\mathfrak{D}_N(N-A)$$

则下图即为证明:





6 相交数与不动点

对于有向 n 维流形 M, 可以定义它的下同调类的相交数:

$$\cdot: H_*(M) \times H_*(M) \to \mathbb{Z} \qquad x \cdot y = \langle \epsilon, x \bullet y \rangle$$

假如 $x = D\xi, y = D\eta$,则相交数是互补维数的下同调群的对偶配对:

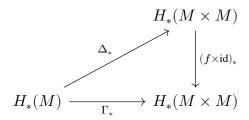
$$x\cdot y = \langle \xi, y \rangle = \langle \xi \smile \eta, [M] \rangle = P(\xi, \eta)$$

由于 Poincare 对偶,可以定义转移同态:

$$f^! = D_N^{-1} \circ f_* \circ D_M : H^{m-*}(M) \to H^{n-*}(N) \\ f_! = D_M \circ f^* \circ D_N^{-1} : H_{n-*}(N) \to H_{m-*}(M)$$

6.1 Lefschetz 数

 $\Delta_*[M] \cdot \Gamma_*[M]$ 某种意义上代表着 f 的不动点集:



利用对偶基 $x_i \cdot x_i' = \delta_{ij}$ 得到:

$$\Delta_*[M] = \sum_i (-1)^{|x_i||x_i'|} x_i' \times x_i = \sum_i x_i \times x_i'$$

从而 Lefschetz 数为

$$L(f) = \Delta_*[M] \cdot \Gamma_*[M] = \sum_q (-1)^q \; \mathrm{tr} F^{(q)}$$

微分拓扑学中,常把 Euler 示性数定义为对角线的自相交数:

$$\Delta_*[M] \cdot \Delta_*[M] = L(\mathrm{id}) = \chi(M)$$

6.2 Euler 类与 Euler 数

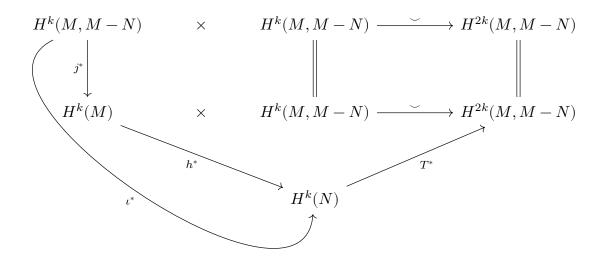
假如 (M,A) 是有向相对 n+k 维流形,子复形 $N\subset M-A$ 是有向 n 维流形, $\tau=T^*(1)$ 是 Thom 类,则记 $\iota:N\to (M,M-N)$ 为含入映射,得到

Euler 类
$$e := \iota^*(\tau) \in H^k(N)$$

实际上还有:

$$e = T^{*-1}(\tau \smile \tau)$$

这由下图可以得到:



其中 ι 有分解:

$$N \stackrel{h}{\rightarrow} M \stackrel{j}{\rightarrow} (M, M-N)$$

即知:

$$T^*e = T^*\iota^*\tau = j^*\tau \smile \tau = \tau \smile \tau$$

可以考察对角线上的 Thom 类,我们记 $M^2=M\times M$,Thom 类 $\tau\in H^n(M^2,M^2-\Delta(M))$, $j:M^2\to M^2-\Delta(M)$ 为含入映射. 则 $j^*(\tau)$ 是 $\Delta_*[M]$ 在 M^2 中的 Poincare 对偶.

从而重新得到有向流形的 Lefschetz 数:

$$L(f) = \langle j^*(\tau), \Gamma_*(M) \rangle = \langle \tau, j_* \Gamma_*[M] \rangle$$

而且可以重新得到 Euler 数——对角线映射在 M^2 中的 Euler 类满足:

$$\langle e, [\Delta(M)] \rangle = \langle \iota^*(\tau), [M] \rangle = \langle \Delta^* j^*(\tau), [M] \rangle = \langle \tau, j_* \Delta_* [M] \rangle = L(\mathrm{id}) = \chi(M)$$

其中我们已把 M 自然地等同于 $\Delta(M)$.