一道数列题的不同解答

1 题目：

若 $\{x_n\}$ 有界，$\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-2x_{n+1}+x_{n+2})=0$
求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$

2 解答：

2.1 by 安贫乐道的玉米

概要 反证。否定结论后，寻找相应的子列说明 $\{x_n\}$ 无界。

倘若 $a_n=x_n-x_{n+1}$ 不收敛于 0, 则 $\exists c>0$, 有子列 $\{a_{n_j}\}$, 使得 $|a_{n_j}|>c$. 再由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a_{n+1})=0$, 知 $\forall\varepsilon\in(0,c),\exists N,\forall n>N,|a_n-a_{n+1}|<\varepsilon$. 取充分大的 n_j 使两式均满足。

不妨设子列 $\{a_{n_j}\}$ 恒正，那么 $\forall m>n>N\, a_m-a_n=\sum\limits_{i=n}^{m-1}(a_{i+1}-a_i)>-(m-n-1)\varepsilon$. 从而 $a_m>a_n-(m-n-1)\varepsilon$. 取 $n>n_j,a_m>a_{n_j}-(m-n_j-1)\varepsilon>c-(m-n_j-1)\varepsilon>c-m\varepsilon$.

取 $M=\left[\dfrac{c}{2\varepsilon}\right]+1$ 使得有 $a_m-a_{n_j}>\frac{c}{2}\,(n_j<m<M)$. 注意到

$$a_{n_j+1}+a_{n_j+2}+\cdots+a_{n_j+M}>M(a_{n_j}+\frac{c}{2})>(\frac{c}{\varepsilon}-1)\frac{3c}{2}$$

取 $\varepsilon\to0$，可使上式任意地大，这与 $\{x_n\}$ 有界矛盾！

2.2 by 空中劈叉的睿智清洁工

概要 估计十分拆。最后把 k 利用起来说明矛盾。

令 $a_n=x_{n+1}-x_n$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有界。令 $M=(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right|)+1$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq0$, 则存在 $\varepsilon_0,\forall N$, 都存在 $n_1>N$，使得 $|a_{n_1}|>\varepsilon_0$. 另外，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$，存在 N，使得 $\forall n>N$, 都有 $|a_{n+1}-a_n|<\dfrac{\varepsilon_0}{kM}$.

$\exists N_2>N$，使得 $|a_{N_2}|>\varepsilon_0$.. 这可导出 $a_{N_2},a_{N_2+1},\cdots,a_{N_2+kM}$ 同号，从而

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N_2+kM}a_i=\sum_{i=1}^{N_2-1}a_i+\sum_{j=0}^{kM}a_j\\&\geqslant -M+\sum_{j=0}^{kM}(\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0 j}{kM})\\&=-M+(kM+1)\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0 j}{kM}\frac{kM(kM+1)}{2}\\&=(\frac{k}{2}\varepsilon_0-1)M+\frac{1}{2}\varepsilon_0\end{aligned}$$

由于 ε_0 固定, 只需 $k>\frac{4}{\varepsilon_0}$, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{N_2+kM}a_i>M$, 矛盾！

2.3 by 葡萄味的玉米

概要 还是反证的思路，由差分的变化限制导出 $\{x_n\}$ 无界。

$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,|x_n-2x_{n+1}+x_{n+2}|<\varepsilon$ 因为 $|x_{n+1}-x_n|<2M$ 故 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 有界，记其上下极限分别为 $\mathcal{L}$ 、ℓ 显然 $\mathcal{L}\geqslant 0\geqslant\ell$.

下证 $\mathcal{L}=0$, 否则，取 $n_1>N$ $x_{n_1+1}-x_{n_1}>\frac{\mathcal{L}}{2}$. 令 $n_2=n_1+\left[\dfrac{\mathcal{L}}{4\varepsilon}\right]$, $x_{n_2+1}-x_{n_2}\geqslant\dfrac{\mathcal{L}}{2}-\varepsilon\left[\dfrac{\mathcal{L}}{4\varepsilon}\right]\geqslant\dfrac{\mathcal{L}}{4}$ 从而，$x_{n_2+1}-x_{n_1}\geqslant\dfrac{\mathcal{L}}{4}(\left[\dfrac{\mathcal{L}}{4\varepsilon}\right]-1)$ 此即 $x_{n_2+1}\geqslant\dfrac{\mathcal{L}}{4}(\left[\dfrac{\mathcal{L}}{4\varepsilon}\right]-1)+x_{n_1}$, 当 ε 足够小时, 可以使 x_{n_2+1} 足够大, 矛盾！类似可证 $\ell=0$.

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{x_{n+1}-x_n\}=0$.

注：上下极限的另解

* 引理: 若 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. 将 $\{x_n\}$ 的上下极限分别记为 $\mathcal{L}$ 、ℓ. 则区间 $[\ell,\mathcal{L}]$ 中的每一个点都是数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

在本题中, 我们看到 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 符合条件, 故 $\dfrac{\mathcal{L}}{2}$ 也为其聚点。若 $\mathcal{L}>0$, 我们取收敛于这个点的子列 $\{x_{n_i+1}-x_{n_i}\}$, 容易得到 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_{n_i+1}-x_{n_i})$ 发散, 这与 $\{x_n\}$ 有界矛盾！