谈谈一元定积分的中的“换”

2022.12.10

提要:

“换, 易也”, 恰当的代换总能帮助我们解决问题. 本文将对一元定积分的代换中的两个部分——**整散互换**和**积分式再现**——进行分析总结. 其中出现的习题是笔者学习过程中遇到的比较有代表性的题目, 对应的方法也是有意思且重要的方法. 我在其中尽可能给出更多的思考和理解, 习题附有简要提示.

限于如此短的篇幅和笔者水平, 本文注定不能道尽其中妙处. 更多的理解和应用, 是需要同学们自己探索的. 错误、疏漏之处还请指出.

1 整散互换

在极限存在的条件下,$Riemann$ 积分定义为:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

直观来看, 左边是“连续”的形式, 而右边是一项一项的“散”的形式, 等号告诉我们可在两者之间作转换, 这就是本节的出发点.

1.1 级数求和的积分法

上式最直接的应用就是**求解一些数项级数**, 即化为右侧形式, 转化为左侧求解.

比如:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(b^{\frac{1}{n}}-1)\sum_{i=0}^{n-1} b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\,(b>1)\\
=&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}})(\sin b^{\frac{2i+1}{2n}})\\
=&\int_1^b \sin x\,\mathrm{d}x\\
=&\cos 1-\cos b
\end{aligned}$$

注意这里对 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[1,b]$ 上的划分是不均匀的, 但只要保证 $\lambda(P)\to 0$ 即可, 这基于 $f(x)=\sin x$ 是可积函数的已知. 类似的例子有很多, 也不再举.

有一个自然的考虑是, 这两者的误差是多少?

对于一般的分划可能不好估计, 我们选取等分分划, 并可以得到以下比较好的结果.

Problem 1

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty} nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$$

(2)$f(x)$ 二次可微,$f''(x)$ 可积, 记

$$B_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\frac{b-a}{n}$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty} n^2B_n=\frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)]$$

(3) 记

$$A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\qquad B_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2(n+i)-1}$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty} n(\ln 2-A_n)=\frac{1}{4}\qquad \lim_{n\to\infty} n^2(\ln 2-B_n)=\frac{1}{32}$$

Hint: 将 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 拆分, 这种拆分在证明题中也很常用.
(1) 需要利用积分第一中值定理 (2) 仅是计算上的拓展

1.2 积分值的估计

上面一小节都是从右侧转向左侧, 进而计算. 从左侧转向右侧, 最常见的就是**积分值的估计**.

特别是当原函数复杂或者不存在时, 一个精度高、易于计算的估计公式使我们想要的. 这部分以 *Darboux* 和为基础, 也兼容了区间放缩、*Taylor* 公式、第一与第二中值定理和分部积分估计法等内容.

Problem 2

请一步步证明:

(1) 梯形法: 思路是用梯形去拟合, 将弧 $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ 用弦 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 代替. 则:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i$$

(2) 抛物线法: 在每一段上利用与弧凹凸性相同的抛物线去拟合, 进一步减小误差.

(i) 对 $[a,b]$ 作 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=b$ 的等分. 记相应的函数值和曲线点为

$$y_0, y_1, \dots, y_{2n} \qquad P_0, P_1, \dots, P_{2n}$$

(ii) 在 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ 上, 对

$$P_{2i-2}(x_{2i-2}, y_{2i-2}), P_{2i-1}(x_{2i-1}, y_{2i-1}), P_{2i}(x_{2i}, y_{2i})$$

进行抛物线 $g_i(x)=\alpha_i x^2+\beta_i x+\gamma_i$ 拟合

(iii)

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} g_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})$$

(iv)($Simpson$) 公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+y_{2n}\right]$$

(3) 作为应用, 我们有

$$2.02006 \approx \int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \approx 2.1835\ (1) \approx 2.0263\ (2) \quad (\text{二等分})$$

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 3.12993\ (1) \approx 3.14159\ (2) \quad (\text{十等分})$$

* 读者可自行作 (1)(2) 的误差估计

上述两个近似公式都属于 $Newton-Cotes$ 公式的特例. 后者基于 *Lagrange* 插值式, 将近似逼近过程做得更加细化和彻底. 进一步的, 还有复化求积公式、龙贝格公式和高斯公式, 但现在我们没有了解的必要.

还要指出, 定积分估值的另一大方法就是利用关于被积函数的不等式, 这更加富有技巧性.

请看下例:

Problem 3

当 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时, 试证:

(1)

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

(2)

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{1}{3\pi}x^3$$

(3)

$$\frac{\pi^2}{72} < \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi^3}{144}$$

Hint:(2) 试着将刚刚所得不等式取变限积分, 构造新的不等式, 注意取等条件.

1.3 不等式的推广

由 (1.1) 式, 我们可将已知的不等式作“积分型”的自然推广. 读者可以自己探索一下这些不等式的取等条件, 以及推广过程中的证明细节[1].

Cauchy 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

其积分形式为 ($f(x)$,$g(x)$ 均为可积函数):

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

加权平均不等式

设 $a_i \geqslant 0, p_i > 0, (i = 1, 2, \dots, n)$, 我们记

$$M_r(a,p) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^r}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{r}} \qquad G(a,p) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{1\Big/\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

分别为 $\{a_n\}$ 的加权算术平均和加权几何平均.

[1]详情可参考裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》第 371-389 页

则有加权平均不等式[2]:

$$G(a,p) \leqslant M_1(a,p)$$

实际上我们能得到更多:

Problem 4

试证:

$$(1)\ M_r(a,p) \geqslant M_{\frac{r}{2}}(a,p)$$

$$(2)\ G(a,p) = \lim_{r\to 0^+} M_r(a,p)$$

$$(3)\ \lim_{r\to+\infty} M_r(a,p) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} a_i \qquad \lim_{r\to-\infty} M_r(a,p) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$$

Hint: (1) 利用 *Cauchy* 不等式

(2) 对 $M_r(a,p)$ 取 exp,(2)(3) 都是经典极限题.

(下述式子都有意义的情况下) 对于积分型的情况, 我们记

$$M_r(f) = \left[\frac{\displaystyle\int_a^b p(x)f^r(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\right]^{\frac{1}{r}} \quad (r>0) \qquad G(f) = \exp\left[\frac{\displaystyle\int_a^b p(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\right]$$

读者不妨停下来看看, 这是怎么从“离散”到“连续”的？而结论是相似的:

$$G(f) \leqslant M_r(f)$$

如此, 还可做 *Holder* 不等式、*Minkowski* 不等式的推广, 以前者为例[3].

Problem 5

直接给出 $W.H.Young$ 不等式: 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且严格递增,$f(0)=0$, 则:

$$\forall a,b \geqslant 0 \qquad ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \qquad \Longleftrightarrow \quad f(a)=b\text{取等}.$$

(1) 证明: (a)$ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$, 其中 $p,q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

(b) 若 $f,g \in \mathcal{R}[a,b], f,g \geqslant 0$, 且 $\displaystyle\int_a^b f^p\,\mathrm{d}x = \int_a^b g^p\,\mathrm{d}x = 1$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$

(2)(积分型 *Holder* 不等式) 若 $f,g \in \mathcal{R}[a,b], p,q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

[2]若取单位化, 可进一步利用有理序列逼近的思想将其推广到实数上

[3]$Young$ 不等式有直观的几何意义. 伍胜健《数学分析》第二册第 62-63 页对其有个比较简洁的证明. 下面这个问题的思路来自某不可说学长 yzk

2 积分式再现

2.1 引入

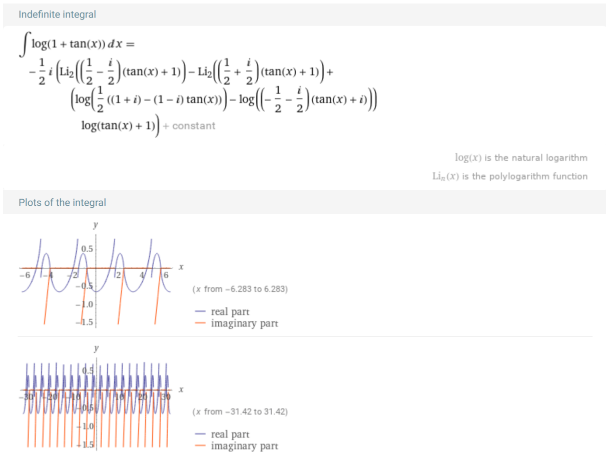
定积分计算中经常用到换元. 我们自然是希望能通过换元, 得到易于计算的式子, 或者重复相似的积分式. 前者不必赘述. 后者启发我们有目的性的换元, 希求“再现”.

其实, **换元并不能改变什么, 但它能让你看得更清楚.**

请看:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$$

首先需要告诉的是, $\int \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$ 有着非初等表达式[4].



这（或者稍微计算就知道其复杂）让尝试 $Newton-Leibniz$ 公式的初想法看起来不切实际. 我们只能通过适当的代换, 看看能不能得到一些重复的、或者易于计算的部分. 要获得相似的结构, 我们试试将 $x \to \frac{\pi}{4} - x$, 则

$$\begin{aligned}
\text{原式} =& \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))\,\mathrm{d}(\frac{\pi}{4}-x)\right] \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{\pi}{8}\ln 2
\end{aligned}$$

[4]图像来自 Wolfram Alpha. 其中 $Li_2(x)$ 为多重对数积分, 是非初等函数.

当然, 一般情况下得不到简洁的结果, 更多的是以下情况:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln\sin 2x - \ln 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln\sin x - \ln 2)\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow\ \text{原式} &= -\frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

2.2 更一般的结论

通过简单的代换, 我们可以得到[5]:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

Problem 6

运用上式, 请得出:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&(2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&(3)\ \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&(4)\ \int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2} \\
&(5)\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f(a+x(b-a))\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Hint:(3) 第二个等号考虑分段, 注意利用前两式

这些都是很基础的式子, 但是其运用却灵活多样. 前四式经常用于化简定积分式, (5) 式在可在很多证明题中起简化形式、突出条件之用.

此外, 在计算的过程中, 我们也要注意其他方法的运用. 比如奇偶函数的性质、倒代换 ($x \to \frac{1}{x}$) 等等. 在不定积分中, 我们也经常用到这种思想: 换元构造对偶式, 与原式一起求解. 比如

$$f(\sin x) \longleftrightarrow f(\cos x) \qquad f(x) \longleftrightarrow f(-x) \qquad f(x) \longleftrightarrow f(\frac{1}{x})\cdots\cdots$$

[5]区间再现公式

当被积函数中出现较为对称的两式时, 常常能考虑使用双元法——命两个相互联系的变元, 起简化形式之用——这里不过多介绍.

这些方法在没有思路时都可以尝试之.

3 习题及附题

这部分是前面相应知识点的配套习题, 并附有尽量有效且简短的提示.

因为讲授的是定积分相关内容, 最后一个版块梳理了一下 Riemann 可积的六个充要条件, 作为参考.

Related exercises

3.1 计算:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i}{n}\pi}{n+\dfrac{i}{n}}$$

3.2 求证:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0\quad (2)\text{若 } f(x) \text{ 连续, }\lim_{h\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$$

3.3 求证:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\text{的值与 }\alpha\text{ 无关}$$

3.4 计算:

$$(1)\ \int_3^5\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(1+x)}}\mathrm{d}x\qquad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\,\mathrm{d}x\qquad (3)\ \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

3.5 求证: 若 $f(x)$ 为正值连续函数, 则

$$e^{\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.6 计算:

$$(1)\ \int_\pi^\pi\frac{x+x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\qquad (2)\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\qquad (3)\ \int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

3.7 若 $f(x)\in C[0,2\pi]$, 求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\left|\sin nx\right|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.8 设 $f(x)\geqslant 0$,$g(x)>0$, 两函数连续, 求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b(f(x))^n g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$$

Hint:

3.1 似乎不能直接凑成定积分形式, 那可以考虑放缩.

3.2 发现困扰我们的是某一处的取值, 那不妨以小量 ε 制造分段, 分而治之.

3.4 利用我们在 Problem 6 得出的式子.(3) 尤其经典, 可以多想想不同的办法.

3.6 (1) 分子拆开计算 (2) 利用倒代换, 注意 $y=\arctan x$ 的恒等式 (3) 构造对偶式, 一并求解.

3.8 利用夹挤原则, 一边是好说明的, 另一边考虑连续函数性质, 给 ε 的小量扰动.

Additional question

本题旨在梳理 $Riemann$ 可积的等价条件, 请一步步证明:

(1)(**必要条件**) 若 $f(x)$ 在某闭区间上可积, 则它在该区间上有界.

(2)(**充分条件**) 若 $f(x)$ 在某闭区间上有界, 且满足以下条件之一:

(a)$f(x)$ 连续

(b)$f(x)$ 至多有有限个不连续点

(c)$f(x)$ 单调

则 $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

(3)(**充要条件**) 设 $f(x)$ 定义在 [a,b] 上, 令划分 P:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

定义

$$\begin{aligned} \Delta x_i =& x_{i+1} - x_i \quad M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x) \quad m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x) \\ S_P =& \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \qquad s_P = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \end{aligned}$$

再令 $f(x)$ 有界, 则下述七个命题等价:

(a)$f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

(b) $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$

(c) 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists P$, 使得 $S_P - s_P < \varepsilon$

(d)$\overline{I} = \underline{I}$, 其中 $\overline{I} = \inf\limits_{\{P\}} S_P$,$\underline{I} = \sup\limits_{\{P\}} s_P$

(e)$\forall \varepsilon > 0, \exists P$, 使得 $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$

(f) 对 $\forall \varepsilon, \sigma > 0, \exists \delta > 0$, 使得对 $\forall P$, 当 $\|P\| < \delta$ 时, 振幅 $\omega_{k'} \geqslant \sigma$ 的区间长度之和 $\sum\limits_{k'} \Delta x_{k'} < \varepsilon$.

(g) 它的不连续点集 D_f 为零测集, 即 $f(x)$ 几乎处处连续.

Hint:

(1) 考虑反证.

(2) (a) 注意一致连续性的应用 (b) 只需要说明有一个不连续点的情况 (c) 单调函数的振幅式很简洁

(3) 注意利用 P 的开拓的 Darboux 大小和和 P 的关系, 有自然的单调关系.