紧算子的谱理论

LIGUO

2024 年 3 月 27 日

目录

注：这份笔记以张恭庆《泛函分析讲义》**CH2**§6、**CH4**§$1,2,3$ 为骨架，整理了其中结论和证明概要，并力所能及地添加了一些具体例子和相关内容。

1 回顾

1.1 谱

闭线性算子：$T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 为线性算子，且由 $x_n\in D(T), x_n\to x, Tx_n\to y$ 能推出 $x\in D(T)$ 且 $y=Tx$.

E.g. $C[0,1]$ 上的算子 $T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, D(T)=C^1[0,1]$.

设 $\mathcal{X}$ 为 B 空间，$A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ 为闭线性算子。A 的预解集为

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{X})\}$$

A 的谱集为：

$$\begin{aligned}\sigma(A)&=\mathbb{C}\backslash\rho(A)\\&=\underbrace{\sigma_p(A)}_{\text{点谱},(\lambda I-A)^{-1}\text{不存在}}\cup\underbrace{\sigma_c(A)}_{\text{连续谱},(\lambda I-A)^{-1}\text{存在},R(\lambda I-A)\neq\mathcal{X},\overline{R(\lambda I-A)}=\mathcal{X}}\cup\underbrace{\sigma_r(A)}_{\text{剩余谱},(\lambda I-A)^{-1}\text{存在},\overline{R(\lambda I-A)}\neq\mathcal{X}}\end{aligned}$$

$\dim\mathcal{X}<\infty$ 时，$\sigma(A)\equiv\sigma_p(A)$。当 $\dim\mathcal{X}=\infty$ 时，以上情况都可能发生。

E.g.1 设 $\mathcal{X}=L^2[0,1]$,$A=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}, D(A)=\{u\in C^2[0,1]\mid u(0)=u(1),u'(0)=u'(1)\}$. 则 $\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{(2n\pi)^2\mid n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

E.g.2 设 $\mathcal{X}=C[0,1], A:u(t)\to t\cdot u(t)$, 则 $\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1]$.

E.g.3 设 $\mathcal{X}=L^2[0,1], A:u(t)\to t\cdot u(t)$, 则 $\sigma(A)=\sigma_c(A)=[0,1]$.

E.g.4 考虑 l^2 上的右推移算子 A, 则 $\sigma_p(A)=\emptyset,\sigma_c(A)=\{|\lambda|=1\},\sigma_r(A)=\{|\lambda|<1\}$.

E.g.5 考虑 l^2 上的左推移算子 A, 则 $\sigma_r(A)=\emptyset,\sigma_c(A)=\{|\lambda|=1\},\sigma_p(A)=\{|\lambda|<1\}$.

E.g.6 考虑双边 l^2 空间上的右推移算子 A, 则 $\sigma(A)=\sigma_c(A)=\{|\lambda|=1\}$

若 $\mathcal{X}$ 为 B 空间，$A\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$，则

$$\sigma(A)\neq\emptyset\ ,\ r_\sigma(A)=\sup\{|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(A)\}=\lim_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$$

1.2 Riesz-Fredholm 理论

若 $A\in\mathcal{K}(\mathcal{X})$（紧算子已要求 $\mathcal{X}$ 为 B 空间），$T=I-A$，则有

(1) $N(T)=\{\theta\}\iff R(T)=\mathcal{X}$

(2) $\sigma(T)=\sigma(T^*),\dim N(T)=\dim(T^*)<\infty$

(3) $R(T)=N(T^*)^\perp,R(T^*)={}^\perp N(T)$

(*) $\mathrm{codim}R(T)=\dim N(T)$

*Remark.*Fredholm alternative theorem 是上面理论的直接推论。

1.3 $\sigma(T) \stackrel{?}{=} \sigma(T^*)$

在上次研讨过程中，大家一致认为” 若 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$，则 $\sigma(A) = \sigma(A^*)$” 这一结论应该改成 $\sigma(A) = \overline{\sigma(A^*)}$，认为两个集合间元素应该是共轭关系。其实结论并没有错误，只是我们有概念上的细微混淆。

设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 为 B* 空间，算子 $T^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ 称为是算子 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的共轭算子，如果

$$f(Tx) = (T^*f)x \qquad (\forall f \in \mathcal{Y}^*, \forall x \in \mathcal{X})$$

所以由 f 的线性性得到 (I^* 也记作 I)

$$f[(\lambda I - A)x] = \lambda f(x) - f(Ax) = [(\lambda I - A)^* f](x) = [(\lambda I - A^*)f](x)$$

得到 $(\lambda I - A)^* = \lambda I - A^*$，故 $\sigma(T)$=$\sigma(T^*)$.

而对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$，$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，其共轭算子由下式定义：

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \qquad (\forall x, y \in \mathcal{H})$$

此时由内积的半双线性性得到 $\sigma(A) = \overline{\sigma(A^*)}$.

两种定义的细微不同，是我们产生疑问的原因。

2 紧算子谱的分布

Thm. 设 $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$，则

(1) $0 \in \sigma(A)$, 除非 $\dim \mathcal{X} < \infty$;

(2) $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$;

(3) $\sigma_p(A)$ 至多以 0 为聚点.

证明. (1)（$\dim \mathcal{X} = \infty$）否则 $0 \in \rho(A), A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$，则由 $R(A) = \mathcal{X}$ 或者 $I = A^{-1}A$ 紧都可导出矛盾.

(2) 由 $N(T) = \{\theta\} \iff R(T) = \mathcal{X}$ 可知除去可能的 0 外，$\sigma_r(A) = \sigma_c(A) = 0$.

(3) 假若由一列 $\lambda_n \in \sigma_p(A)\backslash\{0\}$ 且 $\lambda_n \to \lambda \neq 0$，则取 $x_n \in N(\lambda_n I - A)\backslash\{\theta\}$.$\{x_1, \cdots, x_n\}$ 线性无关. 令 $E_n = \text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 则由 E_n E_{n+1} 和 Riesz 引理可知

$$\exists y_{n+1} \in E_{n+1}, \|y_{n+1}\| = 1, \text{dist}(y_{n+1}, E_n) \geq \frac{1}{2}$$

且

$$\left\|\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ay_{n+p}-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n\right\|=\Bigg\|y_{n+p}-\underbrace{\left(y_{n+p}-\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ay_{n+p}+\frac{1}{\lambda_n}Ay_n\right)}_{\in E_{n+p-1}}\Bigg\|\geq\frac{1}{2}\quad\forall n,p\in\mathbb{N}$$

便与 A 紧性矛盾. □

从而对于无穷维 B 空间上的紧算子 A，其谱只有以下情形：

- $\sigma(A)=\{0\}$
- $\sigma(A)=\{0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$
- $\sigma(A)=\{0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\cdots\}$, 其中 $\lambda_n\to 0$

E.g.1 ℓ^2 空间上，令 $Ax=A(x_n)_{n=1}^{\infty}=\left(0,x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots\right)$，则有

$$\forall\lambda\neq 0, Ax=\lambda x\Longrightarrow x=0\Longrightarrow\lambda\text{是 A 的正则值}$$

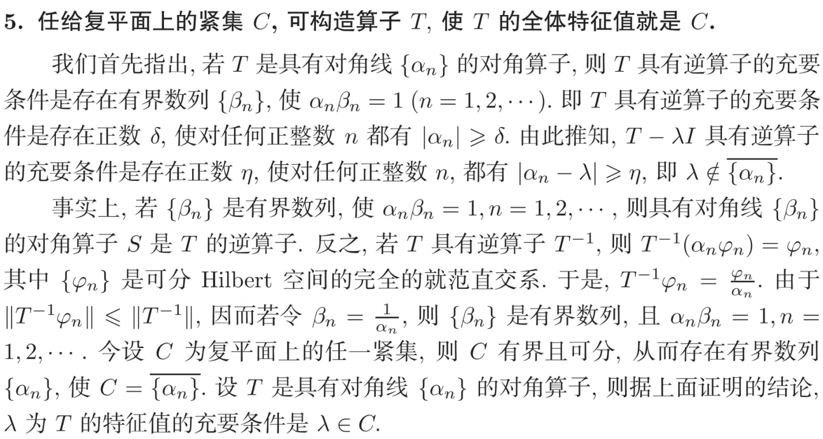
实际上 $\lambda=0\in\sigma_r(A)$.

E.g.2 定义在 $C[0,1]$ 上的 Volterra 算子 $V:f(t)\to\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ 是单射且是紧算子，$r_\sigma(V)=\lim_{n\to\infty}(1/n!)^{1/n}=0$. 故而 $\sigma_p(V)=\emptyset,\sigma(V)=\{0\}$

E.g.3 设 (α_n) 收敛到 0，且 $T\in\ell^2:(u_n)\to(\alpha_1u_1,\alpha_2u_2,\cdots)$.$T$ 是有穷秩算子的逼近，从而是紧的.$\sigma(T)=(\alpha_n)\cup\{0\}$

E.g.4

Remark. 一般算子的谱集很复杂。可参考汪林《泛函分析中的反例》中的一例：



5. 任给复平面上的紧集 C, 可构造算子 T, 使 T 的全体特征值就是 C.

我们首先指出, 若 T 是具有对角线 $\{\alpha_n\}$ 的对角算子, 则 T 具有逆算子的充要条件是存在有界数列 $\{\beta_n\}$, 使 $\alpha_n\beta_n=1$ $(n=1,2,\cdots)$. 即 T 具有逆算子的充要条件是存在正数 δ, 使对任何正整数 n 都有 $|\alpha_n|\geqslant\delta$. 由此推知, $T-\lambda I$ 具有逆算子的充要条件是存在正数 η, 使对任何正整数 n, 都有 $|\alpha_n-\lambda|\geqslant\eta$, 即 $\lambda\notin\overline{\{\alpha_n\}}$.

事实上, 若 $\{\beta_n\}$ 是有界数列, 使 $\alpha_n\beta_n=1,n=1,2,\cdots$, 则具有对角线 $\{\beta_n\}$ 的对角算子 S 是 T 的逆算子. 反之, 若 T 具有逆算子 T^{-1}, 则 $T^{-1}(\alpha_n\varphi_n)=\varphi_n$, 其中 $\{\varphi_n\}$ 是可分 Hilbert 空间的完全的就范直交系. 于是, $T^{-1}\varphi_n=\frac{\varphi_n}{\alpha_n}$. 由于 $\|T^{-1}\varphi_n\|\leqslant\|T^{-1}\|$, 因而若令 $\beta_n=\frac{1}{\alpha_n}$, 则 $\{\beta_n\}$ 是有界数列, 且 $\alpha_n\beta_n=1,n=1,2,\cdots$. 今设 C 为复平面上的任一紧集, 则 C 有界且可分, 从而存在有界数列 $\{\alpha_n\}$, 使 $C=\overline{\{\alpha_n\}}$. 设 T 是具有对角线 $\{\alpha_n\}$ 的对角算子, 则据上面证明的结论, λ 为 T 的特征值的充要条件是 $\lambda\in C$.

图 1: CH13 第 5 例

3 紧算子的不变子空间

若 $\mathcal{X}$ 为一 B 空间，$M \subset \mathcal{X}$ 对于 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ 满足 $A(M) \subset M$，则称为 A 的不变子空间.

Thm. 若 $\dim \mathcal{X} \geq 2$, 则 $\forall A \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$，$A$ 有非平凡的闭不变子空间.

证明. 不妨设 $\dim \mathcal{X} = \infty$,$\|A\| = 1$,$\sigma_p(A)\backslash\{0\} = \emptyset$(否则 $0 \neq \lambda \in \sigma_p(A)$,$N(\lambda I - A)$ 即为所求). 若 A 没有非平凡的闭不变子空间，则

$$\forall y \in \mathcal{X}\backslash\{0\}, \overline{L}_y := \overline{\{P(A) \mid P\text{为任意多项式}\}} = \mathcal{X}$$

则存在 $x_0 \in \mathcal{X}$ 使得 $\|Ax_0\| > 1$, 得 $\|x_0\| > 1$,$C := \overline{AB(x_0, 1)}$ 紧且不含 θ. 对于 $\forall y_0 \in C$, 存在 $T_{y_0} \in \{P(A)\}, \delta_{y_0} > 0$ 使得

$$\|T_{y_0} y - x_0\| < 1 \quad \forall y \in B(y_0, \delta_{y_0})$$

从而可取 C 的一有限覆盖 $C \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \delta_{y_i})$

简化这 n 个点对应的多项式记号 T_{y_i} 为 T_i, 则 $\forall y \in C$, 存在 $i_1 (1 \leq i_1 \leq n)$ 使得

$$\|T_{i_1} y - x_0\| < 1 \Longrightarrow T_{i_1} y \in B(x_0, 1), AT_{y_i} y \in C$$

迭代知 $\left\| \prod_{j=1}^{k+1} T_{i_j}(A^k y) - x_0 \right\| < 1$, 从而得到

$$\|x_0\| - 1 \leq \left\| \prod_{j=1}^{k+1} T_{i_j}(A^k y) \right\| \underbrace{\leq}_{\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \|T_i\| > 0} \mu^{k+1} \|A^k y\|$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\mu} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\|x_0\| - 1}{\mu \|y\|} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\|A^k y\|}{\|y\|} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = 0$$

得到矛盾. □

Remark.1 C.J.Read 的一系列工作表明每个无限维可分 Banach 空间 X 上都存在一个没有非平凡不变子空间的连续线性算子，只要 X 包含 ℓ_1 或者 c_0 作为它的补子空间。但考虑可分 Hilbert 空间或者自反 Banach 空间，这一问题还没解决[1]。

Remark.2 (Lomonosov's Theorem)[2] The Lomonosov Theorem is a remarkable breakthrough on the invariant subspace problem. The full version of it, mentioned above, can be split into two parts:

(i) If an operator commutes with a nonzero compact operator, then it has a nontrivial invariant subspace;

(ii) if it is nonscalar, then it has a nontrivial hyperinvariant subspace.

[1]参考 arXiv:2203.14670v2 [math.FA] 一文的综述部分.

[2]Kubrusly, C.S. (2003). The Lomonosov Theorem. In: Hilbert Space Operators. Birkhäuser Boston.

4 紧算子的结构

Thm. 令 $A \in \mathcal{K}(\mathcal{X}), T = I - A$，则存在非负整数 p 使得 $\mathcal{X} = N(T^p) \oplus R(T^p)$，且 $T|_{R(T^p)}$ 为线性有界可逆算子.

证明. 使得 $\{\theta\} \subseteq N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq \cdots$ 停止的最小整数 p 称为零链长，类似有像链长 q，我们有 $p = q < \infty$. 这只需要注意到

$$\forall k \in \mathbb{N}, T^k = I + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-A)^j = I + \text{紧算子}, \text{则有} \dim N(T^k) = \text{codim} R(T^k)$$

从而可知

$$N(T^p) \cap R(T^p) = \{\theta\}, \mathcal{X} = N(T^p) \oplus R(T^p), T|_{R(T^p)} \text{可逆（逆算子定理）}$$

□

Remark. 本节最后指出，更精细的讨论可以参阅[3]：Ringrose, J.R. (1971). Compact non-self-adjoint operators.

[3]这本书在 Zlib 上可以下载到. 我略读了其中 **CH**4§2, §3 内容，重要的结论为 **Thm**.4.2.1, 4.3.4, 4.3.10. 但我感觉并没有太多“更精细”的地方，反而有些处理不如张恭庆一书上的简练直接.