H30-1

1)

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) 線形独立かどうか

$$A = (x_1\ x_2\ x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ について

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$Ay = 0$ を解く.

$$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

$y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0$ を満たす解 y について.

$y_1 = y_2 = y_3 = 0$ となる自明の解以外が存在するか調べる.

$Ay = 0$ において. 自明の解以外が存在する条件は.

$\mathrm{rank}\,A = 3\ (= n)$

b) Gram-Schmidt の正規直行化.

$$x_1'' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_2' = x_2 - \langle x_1'', x_2 \rangle x_1'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_2'' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3' = x_3 - \langle x_2'', x_3 \rangle x_2'' - \langle x_1'', x_3 \rangle x_1''$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3'' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{9}{2} - \frac{8}{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) 行列 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&-2\end{pmatrix}$

a) A^TA

$$=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&-2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}13&12&2\\12&13&-2\\2&-2&8\end{pmatrix}}_{/\!/}$$

b) $\mathrm{rank}(A^TA)$

$$\begin{pmatrix}13&12&2\\12&13&-2\\2&-2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&4\\12&13&-2\\2&-2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&25&-50\\0&\cancel{4}\,0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&1\cancel{25}&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A^TA)=\underline{2}_{/\!/}$

c) A^TAの固有値

$|A^TA-\lambda E|$ ~~= 0 を解く~~

$$=\begin{vmatrix}13-\lambda&12&2\\12&13-\lambda&-2\\2&-2&8-\lambda\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1-\lambda&-1+\lambda&4\\12&13-\lambda&-2\\2&-2&8-\lambda\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}0&-1+\lambda&4\\25-\lambda&13-\lambda&-2\\0&-2&8-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(25-\lambda)\begin{vmatrix}-1+\lambda&4\\-2&8-\lambda\end{vmatrix}=-(25-\lambda)\{(8-\lambda)(-1+\lambda)+8\}$$

$$=\cancel{+}(\lambda-25)\{-8+8\lambda+\lambda-\lambda^2+8\}$$

$$=(\lambda-25)\{-\lambda^2+\cancel{\lambda+8\lambda}\ 9\lambda\}$$

$$=\cancel{-\lambda\lambda}=-\lambda(\lambda-25)(\lambda-9)$$

よって固有値 $\lambda=0,9,25$

d) A^TAの正規化された固有ベクトル.

〈$\lambda=0$のとき.〉

$(A^TA)\boldsymbol{x}=0$

$$\begin{pmatrix}13&12&2\\12&13&-2\\2&-2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$とすると $\begin{cases}x+2z=0\\y-2z=0\end{cases}$ $z=t$とおくと.

$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ よって正規化された固有ベクトル$\mathbb{P}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ //

〈$\lambda=9$のとき〉

$(A^TA-9E)\boldsymbol{x}=0$

$$\begin{pmatrix}4&12&2\\12&4&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&6&1\\6&2&-1\\2&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&6&1\\0&-4&-4\\0&-8&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&6&1\\0&4&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&-\frac{1}{2}\\0&4&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{4}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\\1\end{pmatrix}=\frac{t}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\mathbb{P}_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ //

〈$\lambda=25$のとき〉

$(A^TA-25E)\boldsymbol{x}=0$

$$\begin{pmatrix}-12&12&2\\12&-12&-2\\2&-2&-17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-6&6&1\\0&0&0\\2&-2&-17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&-50\\0&0&0\\2&-2&-17\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\mathbb{P}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ //

3) 3変数関数 $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+3$

a) fの偏導関数 f'_x, f'_y, f'_z

$$f'_x = 2x+2y+2z$$
$$f'_y = 4y+2x$$
$$f'_z = 6z+2x$$

b) 全ての臨界点の座標 (x,y,z)

$(f'_x = f'_y = f'_z = 0)$

$f'_x = 0 \Rightarrow 2x+2y+2z=0$

$x+y+z=0 \cdots ①$

$f'_y = 0 \Rightarrow 4y+2x=0$

$x+2y=0 \cdots ②$

$f'_z = 0 \Rightarrow 6z+2x=0$

$x+3z=0 \cdots ③$

①,②,③を同時に満たす

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると

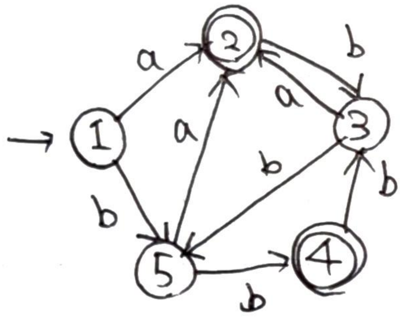
$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x=0,\ y=0,\ z=0$

よって 臨界点の座標 $(x,y,z) = (0,0,0)$

H30-2



DFAの簡略化.

$Q_0=\{2,4\}$, $Q_1=\{1,3,5\}$ に ~~分~~わける.

Q_0に対して aを入力すると.

φ, φ に遷移

bを入力すると.

3, 3に遷移　よって Q_0をさらに分ける必要はない.

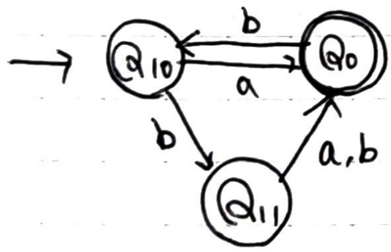
Q_1に対して aを入力

2, 2, 2

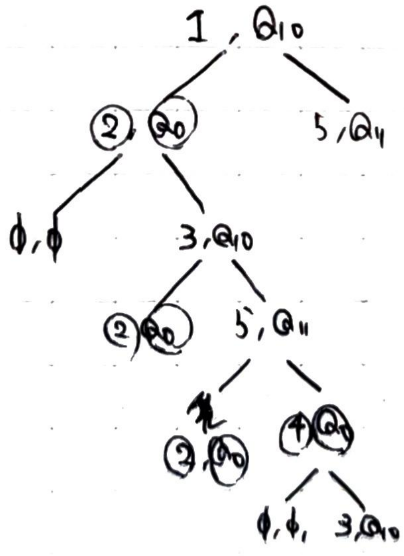
bを入力

5, 5, 4　となり.

状態5のみbを入力したときの遷移先が受理状態. よって $Q_{10}=\{1,3\}$, $Q_{11}=\{5\}$ にわける.



〈等価性の確認〉



2) 言語 $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ は文脈自由言語か

与えられた言語を L とし、L が文脈自由言語であると仮定する。

$w' = a^n b^n a^n b^n \in L$ である。

L は文脈自由言語なので、ある n において、以下を満たすような、

$w' =$ ~~uvxyz~~ $uvxyz$ と分解することができる。

-1 $|vxy| \leq n$

-2 $|vy| > 0$

-3 $uv^ixy^iz \in L$ ($i = 0, 1, \cdots$)

-1より $|vxy| \leq n$ なので、vxy について以下の3つの場合が考えられる。

(i) vxy が前半の a^nb^n に含まれるとき、

~~$|vxy| = m > 0$ とおいて、$|vy| = m > 0$ とおくと、~~

~~-3より $i=0$ とした $w' = uxz \in L$ である。~~

~~$w' = a^{n-i} a^i b^j b^{n-j} a^n b^n$ となる。($i+j \geq m > 0$)~~

~~ここで、$|vy| > 0$ より $i+j > 0$ である~~

~~-3より $i=0$ とした $w' = uxz \in L$ となるが、~~

<GPT>

$L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ が文脈自由言語であると仮定する。

ポンピング補題より、ある定数 p が存在して、

長さ $|s| \geq p$ の任意の文字列 ~~s は~~ $s \in L$ は $s = uvxyz$ に分解でき、

以下の条件を満たす。

① $|vxy| \leq p$

② $|vy| > 0$

③ $uv^ixy^iz \in L$ ($i \geq 0$)

言語 L の文字列として $s = a^pb^pa^pb^p$ を考える。

$|vxy| \leq p$ より、vxy が含まれる~~のは~~場所を場合分けで考える。

(i) 前半の a^pb^p に含まれる場合

$|vy| > 0$ より、v, y のいずれかは空列でない。

よって $s' = uv^2xy^2z$ を考えると、前半の部分の a の数、

あるいは b の数が後半よりも多くなってしまい $s' \notin L$ である。

(ii) ~~a~~ ~~を~~ 後半の a^pb^p に含まれる場合

(i) と同様に ポンピング補題を満たさない.

(iii) 途中の b^pa^p に含まれる場合.

$|vy|>0$ より v, y のいずれかは空列でないが.

$s' = uv^0xy^0z = uxz$ を考えると

~~を~~ ~~を~~ 真ん中の a, b の ~~[illegible]~~ 少なくとも一方は p より少なくなるので

$s' \notin L$

よって、どのように ~~s~~ $uvxyw$ を選んでも. ポンピング補題をみたさないので.

言語Lは文脈自由言語でない.

3) 次の言語クラスが、補集合と ~~和~~ 積 集合について ~~[illegible]~~ 閉じているか否か.

a) 正規言語.

(i) 補集合.

正規言語には、それを認識する決定性有限状態オートマトンが存在し、その受理状態集合を補集合とすることで.

~~[illegible]~~ 正規言語の補集合を認識するDFAになるので.

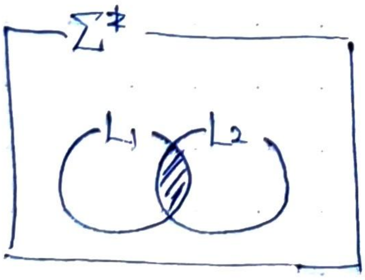
補集合は正規言語. よって閉じている.

(ii) 積集合.

2つの正規言語について DFAが存在しているので.

このDFAを並列につなぎ、2つとも受理状態になったときに受理するNFAを考えることにより、積集合に対応したオートマトンが得られる.

よって閉じている.



$$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - \big(\underbrace{(\Sigma^* - L_1)}_{\substack{\text{正規} \\ L_1'}} \cup (\underbrace{\Sigma^* - L_2}_{L_2'})\big)$$

$$\Sigma^* - ((L_1') \cup (L_2'))$$

$$\underbrace{\Sigma^* - L_{12}'}_{\text{正規}}$$

b) 文脈自由言語.

(i) 積集合

$L_1 = \{ a^n b^n c^m \mid n>0, m>0 \}$ は 文脈自由言語

$P_1 = \{ S \to aAbC$

$A \to aAb \mid \varepsilon$

$C \to cC$

$C \to \varepsilon$

$\}$

同様に $L_2 = \{ a^n b^m c^m \mid n>0, m>1 \}$ も CFL

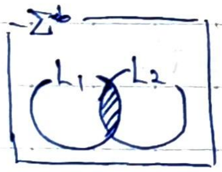
よって $L' = L_1 \cap L_2 = \{ a^n b^n c^n \mid n>0 \}$

L'は文脈自由言語ではないので、

積集合は閉じていない.

(ii)

$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - (\Sigma^* - L_1) \cup (\Sigma^* - L_2)$



ここで補集合について閉じていると仮定すると、

$(\Sigma^* - L_1)$, $(\Sigma^* - L_2)$ は CFL である.

よってそれぞれ L_1', L_2' とする.

$\Sigma^* - L_1 \cup L_2$

ここで和集合については.生成規則を足し合わせることで

閉じているので $L_1 \cup L_2$ も CFL

よって $\Sigma^* - L_1 \cup L_2$ も CFLとなり

$L_1 \cap L_2$ が CFLであることがいえるが

(i)より積集合は閉じていないので矛盾.

よって補集合は閉じていない.

H30-3

1) a) printfの返り値は出力文字数.

CDEFH

b) 「.」,「->」>「&」「*」

i) *x->y　　(ii) &x.y

*(x->y)　　&(x.y)

c) 「.」,「->」は左結合.

「&」,「*」は右結合.

i) x->y->z　　(ii) *&x

(x->y)->z　　*(&x)

2) a)

先頭に挿入する条件

$\boxed{A}$: ~~head~~ p == NULL　　$\boxed{B}$: p->data > data

$\boxed{C}$: p->next != NULL　　$\boxed{D}$ p->next->data ~~>~~ < data

b) insert2

insert2(&head, 10);

headのポインタのポインタ

**p = head_p;

while($\boxed{E}$ && $\boxed{F}$){

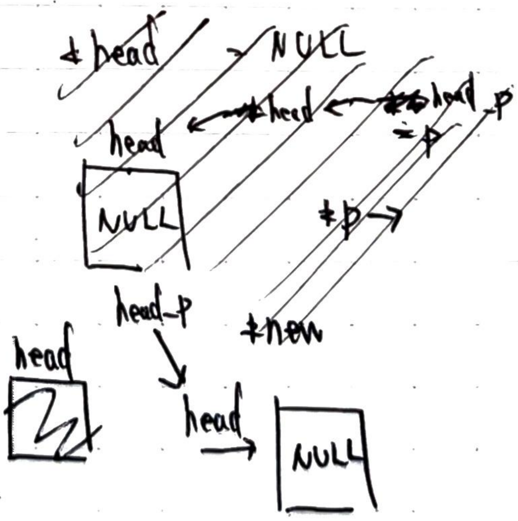
p = $\boxed{G}$

}

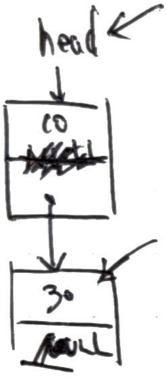
new->next = *p

*p = new;

}



head_p = p



$*p$ = head

$**p$ = NULL

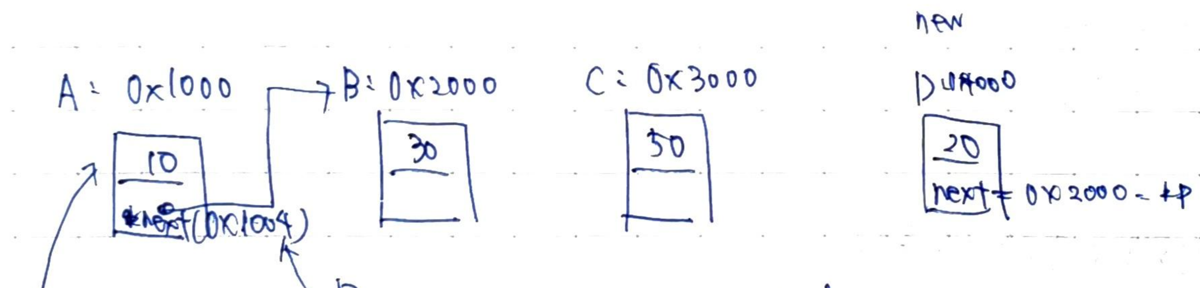
$**p$!= NULL ~~和~~ $*p \to$ ~~next~~ $\to$ data < data

p = ~~&~~($*p \to$ next)

E : ~~$**p$!= NULL~~ $*p \to$ next != NULL

F : $*p \to$ data < data ... (12)

G p = ~~&~~($*p$) $\to$ next ... (17)



head (0x5000)

head_p = & head

~~P~~

$**p$ = head_p ;

p = 0x5000

head = 0x1000

head_p = 0x5000

p = 0x5000

$*p$ = 0x1000 ≠ NULL

p = ~~&~~$(\underbrace{*p}_{0x1000}) \to$ next ;

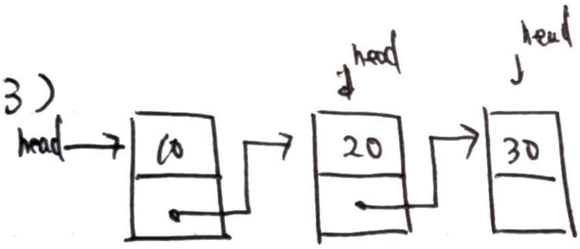
&(0x2000)

$*p$ = 0x2000

new $\to$ data = 20,

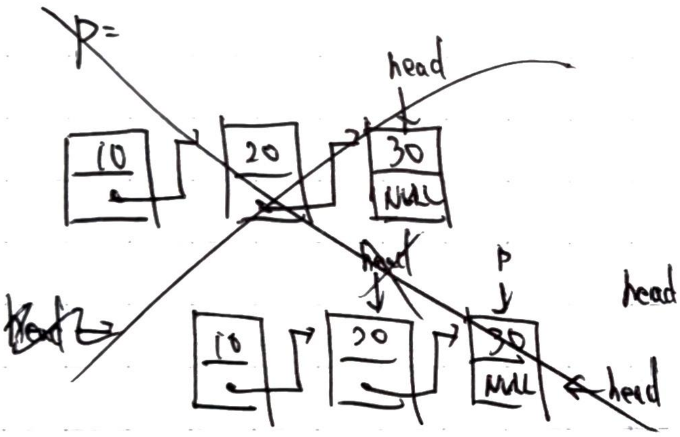
new $\to$ next =

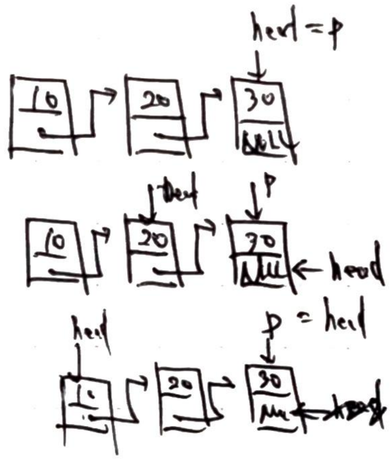
3)

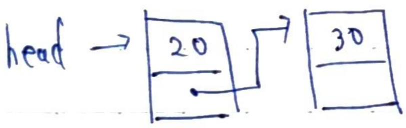


reverse I を適応.

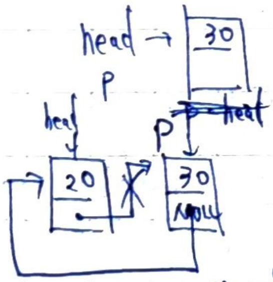
*p=NULL;

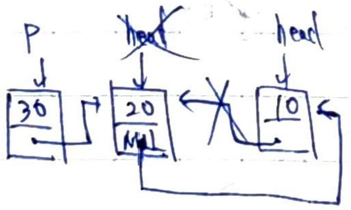




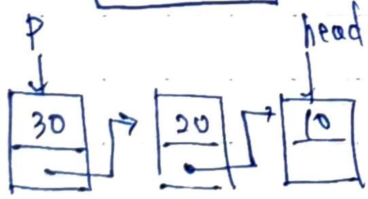


~~P(the~~ P= r(head→next)





return p

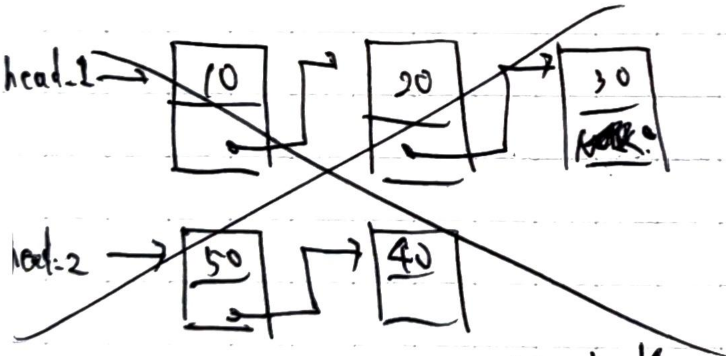


b) 再帰. reverse2(head, NULL);

第1引数
↳ 元のリストをある位置で分割した後半のリスト

第2引数
↳ 元のリストを同じ位置で分割した前半を逆順に並び替えたリスト

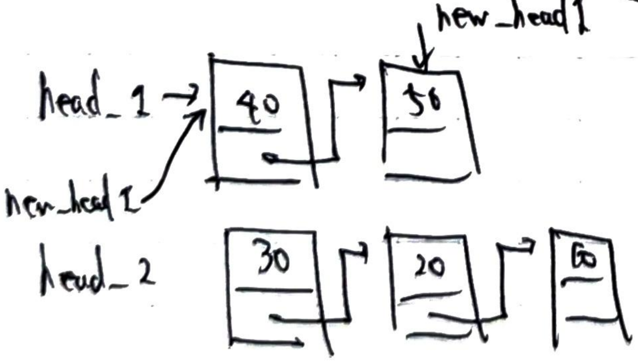
```
CELL *reverse2(CELL *head1, CELL *head2) {
    if(head1==NULL) {
        return head2;
    }
    CELL *new_head1 = [H];
    [    I    ]
    CELL *new_head2 = [J];
    return reverse2(new_head1,new_head2);
}
```



$\boxed{H}$: head1->next;

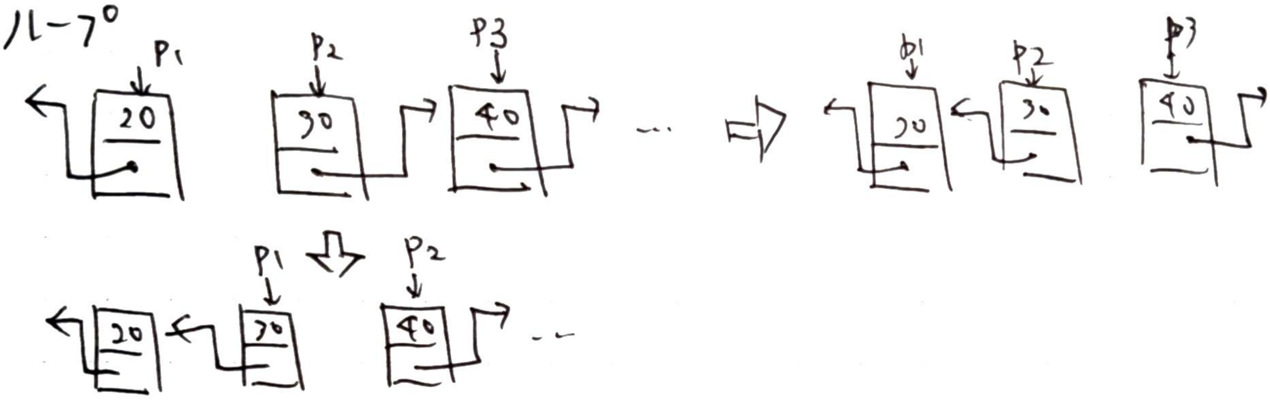
$\boxed{I}$: head1->next = head2;

$\boxed{J}$: head_1;



~~new_head_2~~

c) ループ



while (p2 != NULL) {

$\boxed{k}$ ~~p2~~ p3 = p2->next;

p2->next = p1;

p1 = p2;

p2 = p3;