2020-1

1)

a) $\lim_{x\to\infty}\{\log(2x+3)-\log(x)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(\frac{2x+3}{x}\right)\right\} = \underline{\log 2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \underline{\frac{1}{2}}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\cos x}{x}$ ロピタルの定理より.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-\cos x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}+\sin x}{1} = \underline{3}$

2)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 2 & 1\\ x^2 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}31 & 23 & 17\\ 0 & 11 & 11\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 2 & 1\\ x^2 & 3 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}31 & 23 & 17\\ 0 & 11 & 11\\ 0 & 4 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\times 31\times\begin{vmatrix}11 & 11\\ 4 & 5\end{vmatrix}$$

$= 1\times 31\times(55-44)$

$= 31\times 11 = \underline{341}$

$$\begin{array}{r}31\\ 31\\ \hline 341\end{array}$$

3) 確率密度関数 $f_X(x)$ ~~期待~~ 分散 $V(X)$, 累積分布関数 $F_X(x)$

$\left(\lim_{x \to +0} x^n \log_e(x) = 0\right)$

$$f_X(x) = \begin{cases} -4x\log(x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0,\ 1 < x \end{cases}$$

平均

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 -4x^2\log(x)\,dx = -4\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \log(x)\,dx$$

$$= -4\left[\frac{1}{3}x^3\log(x)\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{1}{3}x^2\,dx = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{9}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 -4x^3\log(x)\,dx = -\left[x^4\log(x)\right]_0^1 + \int_0^1 x^3\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

よって $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{16}{81} = \frac{81-64}{324} = \frac{17}{324}$

累積分布関数

(i) $x \leq 0$ のとき $F_X(x) = 0$

(ii) $1 < x$ 〃 $F_X(x) = 1$

(iii) $0 < x \leq 1$ のとき

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_0^x f_X(x)\,dx = \int_0^x -4x\log(x)\,dx = -4\left[\frac{1}{2}x^2\log(x)\right]_0^x + 4\int_0^x \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= -2x^2\log(x) + 4\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^x$$

$$= -2x^2\log(x) + x^2$$

$$= x^2(1 - 2\log(x))$$

よって

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^2(1-2\log x) & (0 < x \leq 1) \\ 1 & (1 < x) \end{cases}$$

4) $\frac{1}{1000}$で不良品.

A: 不良品である~~確率~~

B: 不良品と判定

不良品でないものを$\frac{4}{5}$で不良品~~判定~~ではないと判定、$\frac{1}{5}$で不良品と判定

$P(A)=\frac{1}{1000}$, $P(B|A)=\frac{99}{100}$, $P(B|\bar{A})=\frac{4}{5}$ $P(B|\bar{A})=\frac{1}{5}$

不良品と判定た製品が、不良品である確率 $P(A|B)$

$$P(A|B)=\frac{P(A,B)}{\cancel{P(A)}\ P(B)}$$

$$P(A,B)=P(B|A)\cdot P(A)$$

~~$P(A,B)=P(B|A)$~~

$$P(B)=P(B|A)\cdot P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

よって

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{1000}}{\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{1000}+\frac{4}{5}\cdot\frac{999}{1000}}$$

$$\cancel{=\frac{99}{99+80\cdot 999}}$$

$$\cancel{=\frac{11}{11+80\times 111}}$$

$$=\frac{\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{1000}}{\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{1000}+\frac{1}{5}\cdot\frac{999}{1000}}=\frac{99}{99+20\cdot 999}$$

$$=\frac{11}{11+20\cdot 111}=\frac{111}{2231}$$

$$\fallingdotseq 0.49\cancel{7}\fallingdotseq \underline{0.50}$$

111
2220
11
2231

0.0~~5~~497
2231) 11100
~~11155~~
8924
21760
20079
16810

5）　ポケット A，B，C，D に区切られたルーレット

本の確率で，A に4回入った．

仮説「このルーレットは A に ~~入りやすい~~ 本で起こる」，有意水準5%，

帰無仮説 H_0 ： $P(A)=\frac{1}{4}$

対立仮説 H_1 ： $P(A)>\frac{1}{4}$

$P(X=4) = {}_5C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right) = 5\cdot\frac{3}{4^5} = \frac{15}{1024}$

$P(X=5) = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$

よって $P(X\geqq 4) = \frac{16}{1024} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

$\frac{1}{64} < 0.05$ より 帰無仮説は棄却．

2020 - 2

1) $\varphi : (\neg p_0 \to \neg p_1) \land (\neg p_1 \to p_0)$

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_0 \to \neg p_1$	$\neg p_1 \to p_0$	φ	
F	F	T	T	T	F	F	(ア)
F	T	T	F	F	T	F	(イ)
T	F	F	T	T	T	T	(ウ)
T	T	F	F	T	T	T	(エ)

b) φはトトロジーでない.

c) φは p_0がT, p_1がFのときにTとなるので 充足可能.

2) 自然演繹

a)

仮定: $(p_1 \land p_2) \land p_3$　　結論: $p_1 \land (p_2 \land p_3)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p_1 \land p_2) \land p_3}{p_1 \land p_2}{\scriptstyle \land E_L}}{p_1}{\scriptstyle \land E_L} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(p_1 \land p_2) \land p_3}{p_1 \land p_2}{\scriptstyle \land E_L}}{p_2}{\scriptstyle \land E_R} \qquad \dfrac{(p_1 \land p_2) \land p_3}{p_3}{\scriptstyle \land E_R}}{p_2 \land p_3}{\scriptstyle \land I}}{p_1 \land (p_2 \land p_3)}{\scriptstyle \land I}$$

b)

仮定: $p_1 \land p_2$, $p_1 \to (p_2 \to p_3)$　　結論: p_3

$$\dfrac{\dfrac{p_1 \land p_2}{p_2}{\scriptstyle \land E_R} \qquad \dfrac{\dfrac{p_1 \land p_2}{p_1}{\scriptstyle \land E_L} \qquad p_1 \to (p_2 \to p_3)}{p_2 \to p_3}{\scriptstyle \to E}}{p_3}{\scriptstyle \to E}$$

c) 命題の集合 $\{\neg P_0 \to \neg P_1, \neg P_1 \to P_0\}$ が矛盾するか、無矛盾か。

矛盾するかどうか。同時に真になる場合があるか？

1.aの真理値表より、同時にTになる行が存在するので

無矛盾。

3) 以下の論理式のモデルは存在するか。

a) $\exists x \exists y \exists z\ \neg(x=y) \wedge \neg(y=z) \wedge \neg(z=x)$

存在する。~~値~~ x, y, zの値がそれぞれ異なる必要があるので、少なくとも3つの値が必要。

よって ユニバース濃度の最小値は3。

~~例~~

b) $\exists x \forall y (x=y)$

ユニバースを $\{a\}$ と設定すると、

xとyはaしか取れないので、x=yが常に成り立つ。

4) 以下が成り立つか否か

$\vdash (\forall x \exists y\, P(x,y)) \to \exists x \forall y\, P(x,y)$

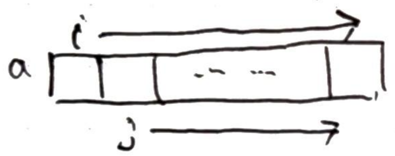
前者は ~~あるxについて~~ ~~x~~ それぞれのxについてyを選んでいるが、

後者はあるxについてすべてのyについてP(x,y)が成り立つと言っている。

従ってこの論理式は成立しない。

2020-3

1) プログラム3.1　　　　プログラム3.2



~~選択ソート~~
バブルソート

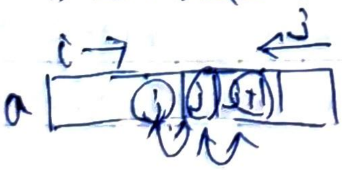
1. 選択ソート
配列の中から最小値を見つけ、それを先頭の要素と交換、次に[0]を除いた配列で再帰的に行う。 ~~よって~~ $O(n^2)$

2. バブルソート
隣り合う要素を比較し、順番が逆であれば、入れ替える。

3. クイックソート
基準となるピボットを選んで、小さい要素を左、大きい要素を右にする。

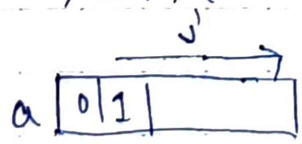
4. 挿入ソート
配列の要素を取り出し、それを ~~配列の~~ 適切な位置に挿入。

プログラム3.1



バブルソート

プログラム3.2



tmp = a[1] ~~tmp~~
i = 0
挿入ソート

2) ヒープソート

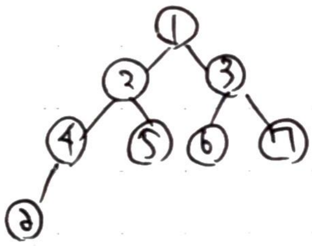
a) 二分ツリーにおいて、根以外の任意の節点の値が満たすべき条件。

~~左の子 < 任意の節点 ≤ 右の子~~

~~⇒~~ 子より親の節点の方が大きい。

+ (節点が詰まっている?)

b)



$\lfloor \log_2 n \rfloor$

c) 平均時間 I, $O(n\log n)$

最悪 ~~オ $O(n^2)$~~ $O(n\log n)$

3)

a) $\langle 1,0,4,3,2 \rangle$ の反転数。

~~(4,3), (4,2) → 2個~~

(1,0), (4,3), (4,2), (3,2) → 2個

b) $\{1,2,\cdots,n\}$ の中で反転数が最大。

$\langle n, n-1, \cdots, 1 \rangle$

$(n-1)+(n-2)+\cdots+1 =$

$S=(n-1)+\cdots+1$

$2S = n\cdot(n-1)$ $S=\frac{1}{2}n(n-1)$ $\frac{1}{2}n(n-1)$

c) 交換回数。

4) マージソート

配列を半分に分割。

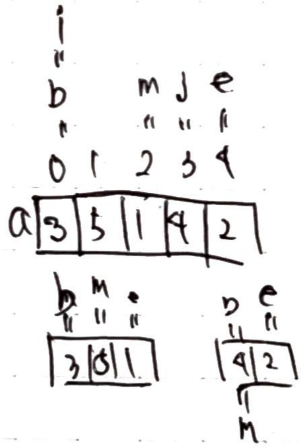
それぞれの部分配列について、さらに再帰的に分割。

```
int  a[5] = {3,5,1,4,2}, w[5];
mergesort(a,0,4,w);

int  mergesort(int a[], int begin, int end, int w[]) {
     mid = (begin+end)/2;
     i=begin, j=mid+1, k,c=0

   if(begin<end){
       mergesort(a,begin,mid,w);
         "       (a,mid+1,end,w);

     for(k=begin; k<=end; ++k){
           if(mid<i){
              [A];
           } else if(end<j){
              [B];
           } else {
              if(a[i]<a[j]) {
                 [C]
              }else{
                 [D]
              }
           }
     }
}
for(k=begin ~ end; ++k){
      [E]
```



mergesort (a, 0, 4, w) ;

b=0, e=4, mid=2

i=0, j=3 , k=0, c=0

mergesort (a, 0, 2, w) ;

b=0, e=2, m=1

~~j=0~~ i=0, j=2 , k=0, c=0

mergesort (a, 0, 1, w) ;

b=0, e=1, m=0

i=0 j=1

mergesort(a,0,0,w) → 0

mergesort(a,1,1,w); → 0

for(k=0 ~ 1)

<k=0>

else. a[i]=3 , a[j]=5

a[k] = a[i++] i=1 ... ~~B~~ [C] : イ

|else

w~~a~~[k] = a[j++] [D] : オ

<k=1>

[A]. w[k]= a[j++]

~~[A]: w[k]= a[~~

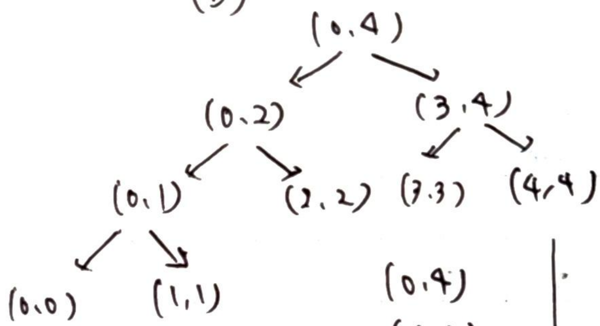
1

w = [3, 5, ...] a = [~~a, 0,~~ 3, 5, 1, 4, 2]

[E]. a[k] = w[k]

~~for(k=~~

(b)



(0,4)
(0,2)
(0,1) … 3
(0,0)
(1,1) … 5
(2,2)
(3,4) … 7
(3,3)
(4,4)

(a)

[A] : ~~a[k]=~~ w[k]= ~~a~~ a[j++] セ

[B] w[k]= a[i++] ナ

[C] w[k]= a[i++] ナ

[D] w[k]= a[j++] セ

[E] a[k] = w[k] キ

c)

~~8:~~

~~追加~~.

~~4行目: int i = begin, j = mid + 1, k, c = 0, c1, c2;~~

~~5行目:~~

8行目: ~~追加~~ c += mergesort(a, begin, ~~end~~ mid, w);

9行目 c += mergesort(a, ~~begin~~ mid+1, end, w);

31行目: return c;