H29-1

1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & x^2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(与式) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & x^2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & x^2-1 & \cancel{4}\,5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x^2-1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & \cancel{x}\,1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ x^2-1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{-6(x-1)\cdot 2 + 12 = -\overset{12}{\cancel{6}}x + 12 + 12} = 0$$

$\cancel{-6x = -24}$

$\cancel{x = 4}$

$$= -6\left(2(x-1)-2\right) = -6(2x-4)$$
$$= -12x + 24$$

$\underline{x = 2}$ //

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

a) Aを対角化する正規直行行列.

Aの固有値λを求める.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-5) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$(\lambda-6)(\lambda-1) = 0$

λ=1のとき.

$(A-E)\boldsymbol{x} = 0$ を解く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + 2y = 0$ 　$y = t$ とおくと

$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ よって λ=1の固有空間の基底

$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda=6$ のとき

$$(A-6E)=\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

$2x-y=0$ $x=t$ とおくと.

$x=t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ よって 基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{P}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\mathbb{P}_1'=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_2'=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

よって正規直行行列 $U=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2&1\\1&2\end{pmatrix}$

b) 任意の自然数 n について. A^n を求めよ.

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}$$

$$U^{-1}=\cancel{\frac{1}{-4-1}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$U^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}(ad-bc)}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}(-5)}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$A^n=U\begin{pmatrix}1&0\\0&6^n\end{pmatrix}U^{-1}$$

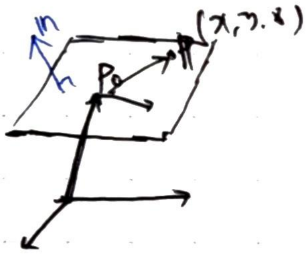
$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2&6^n\\1&2\cdot6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4-6^n&2-2\cdot6^n\\2-2\cdot6^n&-1-4\cdot6^n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6^n+4&2\cdot6^n-2\\2\cdot6^n-2&4\cdot6^n+1\end{pmatrix}$$

3) $P_0(x_0, y_0, z_0)$ とこれを通らない直線. $\frac{x-x_1}{u}=\frac{y-y_1}{v}=\frac{z-z_1}{w}$ を含む平面の方程式を求める.

a) 点P_0を含む任意の平面を表す方程式



$$\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{a}$$

$$=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+ta\\y_0+tb\\z_0+tc\end{pmatrix}$$

法線ベクトルを $\vec{\mathbf{n}}=(a, b, c)$ とおくと.

$\cancel{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n}=0$

$(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)\cdot\mathbf{n}=0$

$(x-x_0)\cdot a+(y-y_0)b+(z-z_0)c=0$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad \cdots (\mathrm{Eq\,I})$

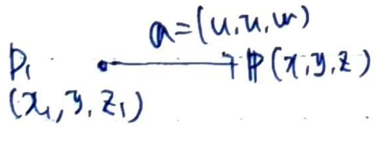
b) Eq1が x_1, y_1, z_1 を含むことを表す式

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)=0$$

c) EqIが上記の直線と平行であることを表す式.

$\frac{x-x_1}{u}=\frac{y-y_1}{v}=\frac{z-z_1}{w}$ つまり、この直線の方向ベクトル

⇔ $\mathbf{a}=(u, v, w)$



$\mathbf{p}=\mathbf{p}_1+t\mathbf{a}$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

EqIの法線 $\mathbf{n}=(a, b, c)$ より、

$\mathbf{a}\perp\mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=0$

$t=\frac{x-x_1}{u}=\frac{y-y_1}{v}=\frac{z-z_1}{w}$

$\underline{au+bv+cw=0}$ //

d) 求める~~方程式~~の 平面の方程式

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

求めたい方程式は、

~~$a(x_1-x_0)+b($~~

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

かつ、

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)\neq 0$$

かつ、

$$au+bv+cw=0$$

(与式)

$$= (x-x_0)(y_1-y_0)w + (y-y_0)(z_1-z_0)u + (z-z_0)(x_1-x_0)v$$
$$- (x-x_0)(z-z_0)v - (y-y_0)(x_1-x_0)w - (z-z_0)(y_1-y_0)u$$

$$\begin{aligned} &= w\{(x-x_0)(y_1-y_0)-(y-y_0)(x_1-x_0)\} \\ &+ u\{(y-y_0)(z_1-z_0)-(z-z_0)(y_1-y_0)\} \\ &+ v\{(z-z_0)(x_1-x_0)-(x-x_0)(z_1-z_0)\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{w(y_1-y_0)-v(z_1-z_0)\}(x-x_0) \\ &+ \{u(z_1-z_0)-w(x_1-x_0)\}(y-y_0) \quad = 0 \\ &+ \{v(x_1-x_0)-u(y_1-y_0)\}(z-z_0) \end{aligned}$$

ここで

$$a=\{w(y_1-y_0)-v(z_1-z_0)\}$$
$$b=\{u(z_1-z_0)-w(x_1-x_0)\}$$
$$c=\{v(x_1-x_0)-u(y_1-y_0)\}$$

と~~おき~~、考えれる。

a) より P_0を含む任意の平面の形をしており、

b) $x=x_1$を入れても 0になるので、$P_1=(x_1, y_1, z_1)$を含む.

c) より、$au+bv+cw=0$ を満たすので、直線と平行である.

よって与えられた行列式を含めた方程式は

求めたい平面の方程式である.

~~H27~~ H29-2

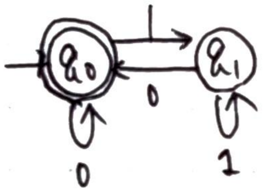
$M = (Q, \Sigma, \delta, q_{init}, F)$

$\Sigma = \{0, 1\}$

1) 偶数のみを受理する2状態 $Q = \{q_0, q_1\}$, $q_{init} = q_0$

A_1

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_1



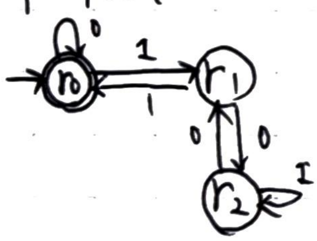
2) 奇数のみ受理

A_1の Fを $F = \{q_1\}$に変更

3) 3の倍数のみを受理するDFA

$Q = \{\cancel{r_1, r_2}, r_0, r_1, r_2\}$, $q_{init} = r_0$

$F = \{r_0\}$



$3k \xrightarrow{0} 6k \rightarrow r_0$

$ \xrightarrow{1} 6k+1 \rightarrow r_1$

$3k+1 \xrightarrow{0} 6k+2 \rightarrow r_2$

$ \xrightarrow{1} 6k+3 \rightarrow r_0$

$3k+2 \xrightarrow{0} 6k+4 \rightarrow r_1$

$ \xrightarrow{1} 6k+5 \rightarrow r_2$

A_2

	δ	0	1
r_0	~~q_0~~	r_0	r_1
r_1	~~q_1~~	r_2	r_0
r_2	~~q_2~~	r_1	r_2

4) A_1とA_2の積をとることによって6の倍数のみを受理するDFA.

新たにA_1の状態とA_2の状態を組み合わせた

~~$Q = \{r_0 q_0, r_1 q_1, r_1 q_2, r_1 q_0, r_0 q_1, r_1$~~

$Q = \{q_0 r_0, q_1 r_1, q_0 r_2, q_1 r_0, q_0 r_1, q_1 r_2\}$

とする。~~q_0は2で割った余りが0も~~、q_0, r_0はそれぞれ2, 3で割った余りが

0,3 であることを表している.

そして 入力0,1に対する遷移については q_0, r_3 で別々に考えれば良い.

~~q_0r_0~~
~~q_1r_1~~
~~q_0r_2~~

	δ	0	1
0	q_0r_0	q_0r_0	q_1r_1
1	q_1r_1	q_0r_2	q_1r_0
2	q_0r_2	q_0r_1	q_1r_2
3	q_1r_0	q_0r_0	q_1r_1
4	q_0r_1	q_0r_2	q_1r_0
5	q_1r_2	q_0r_1	q_1r_2

$F = \{q_0r_0\}$

5) A_1とA_2の和を取ることにより、偶数or 3の倍数のみを受理する ~~DFA~~ NFA

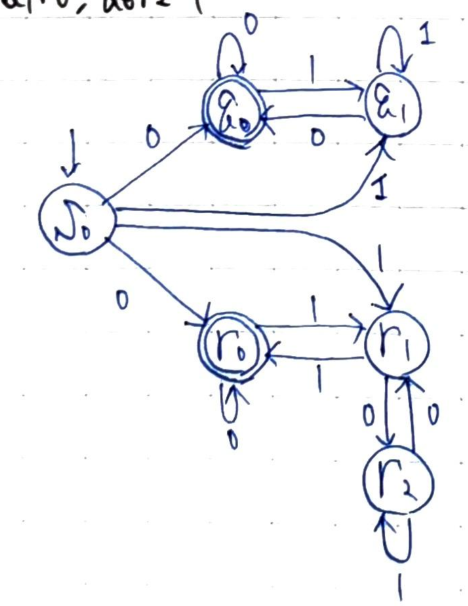
$q_{init} = S_0 \ (= q_0r_0)$

4)と同様に $Q = \{q_0r_0, q_1r_1, q_0r_2, q_1r_0, q_0r_1, q_1r_2\}$ と定義し、

状態遷移関数δは5)と同じでない.

q_0あるいはr_0のどちらかが含まれていれば受理状態となるので.

$F = \{\underset{\underset{S}{\parallel}}{q_0r_0}, q_0r_2, q_1r_0, q_0r_2\}$



2の倍数のDFAと3の倍数のDFAに分ける.

非決定性

6) A_4と等価なDFA

先ほど5)で間違えて書いちゃったやつ.

H29-3

部分和問題

$A=\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ と 正の数 k が与えられたとき、

Aの中から要素を選んで、kに等しくできる → 1

できない → 0

1)

```
int f(int s, int i){
    if(i==n) {return s==k;}
    else {return f(s,i+1)||f(s+a[i],i+1);}
}
```

a) ~~a[0]~~ $a=[8,2,4]$, $n=3$, $k=7$

$f(0,0) \rightarrow 0$

b) 実行が終了するまでのfの呼び出し関係.

f(0,0)

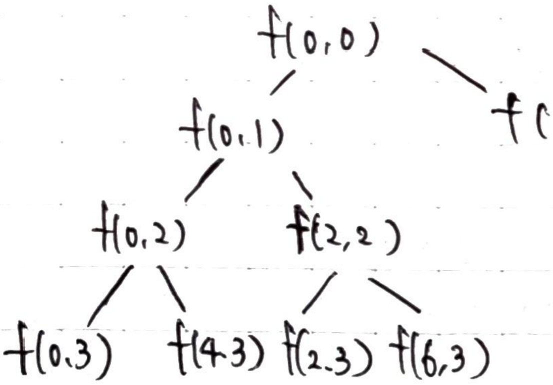
s=0, i=0,

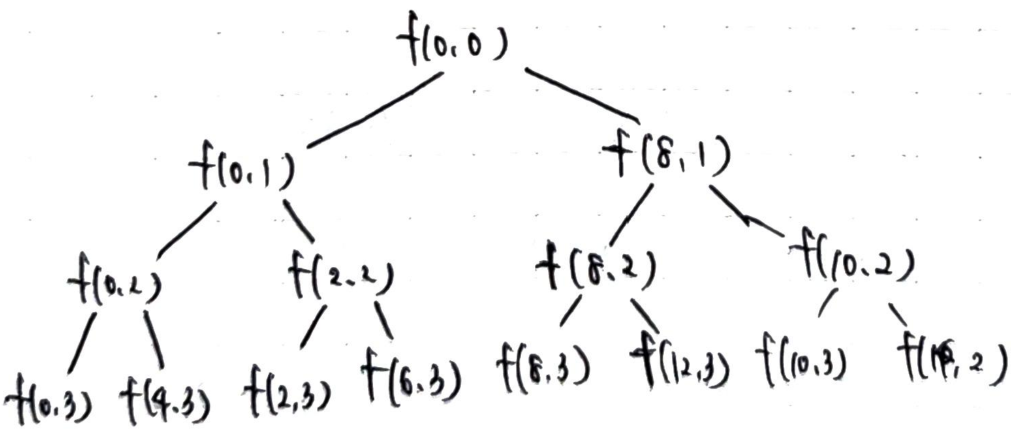
f(0,1) || …

f(0,2) || f(

f(0,3) || f(4,3)

0 0





c) 関数fの2つの引数 s, i は何を表しているか

sは部分和.

iは配列aのインデックス.

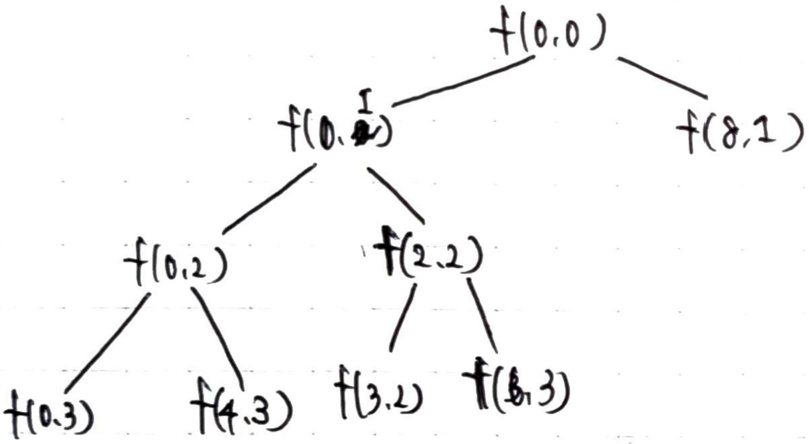
2)

if ($\boxed{①}$ > k) {return 0;}

S

a) $\boxed{①}$: S

b) a = [8, 2, 4]



c)

部分和を計算する際にkの値を超えているものは、途中で計算するのを諦めている。

3) 再帰を呼び出さない。

a) $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$, $A' = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}\}$

$\sum_{a \in T} a = k$ となる A の部分集合 $T(T \subseteq A)$ が存在する

$\Updownarrow$

$\sum_{a \in U} a = k$ である A' の部分集合 $U(U \subseteq A')$ が存在する

or

$\sum_{a \in V} a = k - a[n-1]$ である A' の部分集合 $V(V \subseteq A')$ が存在する。

A の部分和で k を作れるならば、A から a_{n-1} を除いた A' で k を作れるか、$k - a_{n-1}$ を作れなければならない。

b)

```
int g(void){
    int i,j;
    b[0][0]=1;
    for(i=0;i<n;i++){
        for(j=1;j≤k;j++){b[i][j]=0;}
        for(j=0;j≤k;j++){
            if( [③] ){b[i][j]=1;}
            if(i>0){
                                j
                if(b[i-1][④]){b[i][j]=1;}
                if(j≥a[i]){
                    if(b[i-1][⑤]){b[i][j]=1;}
                }
                            j-a[i]
            }
        }
    }
    return b[n-1][k];
}
```

a[i]==j

$\boxed{②}$: ~~a[i]<k~~

$\boxed{④}$: j

$\boxed{⑤}$: ~~j-a[k]~~
j-a[i]

<i=0>

a[i]<k ?

<i=1>

a[1]

<i=2>

a[2]=4

c) a=[8, 2. 4] ,n=3, k=6, g()

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	~~0~~ 1	0	0	0	0
2	1	0	1	0	~~0~~ 1	0	~~0~~ 1

よって

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	1

d) b[i][j] の値が 1 になったとき、
a[0]… a[i] の部分和で j を作ることができる。

e) 計算時間の観点からどちらが優れているか。
図3.1のプログラムは、kの値を超えている場合も
最後まで実行するが
図3.2のプログラムは範囲を $0 \leq j \leq k$ とすることで
計算回数を減らしている。