2024　　8:24〜10:54

1)
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 13 & 5 & a \\ 25 & 8 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & 24 & 3d \end{pmatrix}^{-1}$$

$AA^{-1} = I$

$AA^{-1} = I$
$|A||A^{-1}| = 1$
$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ //

$$\begin{vmatrix} c & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & 24 & 3d \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 24 & 3d \end{vmatrix} = c(27d - 27 \cdot 24) = 27c(d-24)$$

よって ~~$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 13 \end{vmatrix}$~~
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 13 & 5 & a \\ 25 & 8 & b \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & a \\ 8 & b \end{vmatrix} = \cancel{10b}\ 2(5b-8a)$$

よって $|P| = 2(5b-8a) \cdot \dfrac{1}{27c(d-24)}$

$$= \frac{2(5b-8a)}{27c(d-24)}$$ //

2) 2x2 実対称行列Q、~~△~~二次元実ベクトル c

$$h(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + 3$$

a) $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$、$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき、$\dfrac{\partial h}{\partial x_1}$、$\dfrac{\partial h}{\partial x_2}$.

$$h(x) = \frac{1}{2}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (2, 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 3$$

$$= \frac{1}{2}(2x_1 - x_2 \quad -x_1 + 4x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2x_1 + x_2 + 3$$

$$= \frac{1}{2}(2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 4x_2^2) + 2x_1 + x_2 + 3$$

$$= x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + x_2 + 3$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 + 2, \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = 4x_2 - x_1 + 1$$

∴ $x_2 = 2x_1 + 2$
$8x_1 + 8 - x_1 + 1 = 0$
$7x_1 + 9 = 0$
$x_1 = -\frac{9}{7}$
~~$x_2 = -\frac{4}{7}$~~
$x_2 = -\frac{18}{7} + \frac{14}{7} = -\frac{4}{7}$

b) $\dfrac{\partial h}{\partial x_1} = \dfrac{\partial h}{\partial x_2} = 0$ となる全ての組み合わせ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{\ } \\ \cancel{-2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cancel{\ } \\ \cancel{-2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \cancel{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{array}\right)} \rightarrow \cancel{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{array}\right)}$$

$$\rightarrow \cancel{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \end{array}\right)} \rightarrow \cancel{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & -10 \end{array}\right)} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{23}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 7 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 1 & 0 & -\frac{9}{7} \end{array}\right) \qquad (x_1, x_2) = \underline{\left(-\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)}$$

c) $\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$ となる (x_1, x_2) が存在しかつ一意に定まる.

Qが正則. $\mathrm{rank}(Q) = 2$ 逆行列を持つ.

d) 〃 さらにそのような (x_1, x_2) において h が最小値を取る.

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (c_1\ c_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 3$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 \\ q_{12}x_1 + q_{22}x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c_1x_1 + c_2x_2 + 3$$

$$= \frac{1}{2}\left(q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2\right) + c_1x_1 + c_2x_2 + 3$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}q_{11}x_1^2 + \frac{1}{2}q_{22}x_2^2 + q_{12}x_1x_2 + c_1x_1 + c_2x_2 + 3}$$

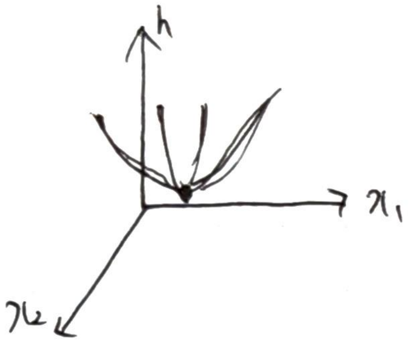
~~ここで $h(x)$ が最小値を取るとき (x_1, x_2) において最小値を取るには~~

~~$q_{11} > 0$, $q_{22} > 0$ である必要がある.~~

$$\cancel{= \frac{1}{2}(q_{11}x_1 + q_{22}x_2)^2 + c_1x_1 + c_2x_2 + 3}$$

$$= \frac{1}{2}q_{11}x_1^2 + \frac{1}{2}q_{22}x_2^2 + q_{12}x_1x_2 + c_1x_1 + c_2x_2 + 3$$

$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$ となる (x_1, x_2) が存在し、そのような (x_1, x_2) において h が最小値を取るならば、



$q_{11} > 0$, $q_{22} > 0$

3) X が $[-1, 1]$ 上の一様分布.

a) 一様分布なので

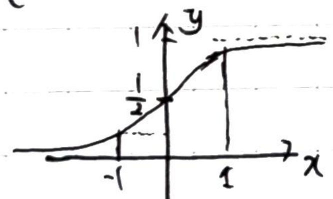
~~No.2~~ $\int_{-\infty}^{\infty} \cancel{f_X(x)} f_X \, dx = 1$ より.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_0 \, dx = \int_{-1}^{1} p_0 \, dx = [p_0 x]_{-1}^{1} = 2p_0 = 1 \quad \therefore p_0 = \frac{1}{2}$$

よって $\cancel{f_X = \frac{1}{2}}$ $\quad f_X = \begin{cases} \frac{1}{2} & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < -1,\ 1 < x) \end{cases}$ //

b) $Y = \dfrac{1}{1+e^{-X}}$ の確率密度関数.

~~$E[Y] = \int$~~



$x = -1$ のとき $y = \dfrac{1}{1+e^{1}} = \dfrac{1}{1+e}$ $\quad x = 1$ $\quad y = \dfrac{1}{1+\cancel{e}} = \dfrac{e}{1+e}$

$$f_{\cancel{X}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{Y}} & \left(\dfrac{1}{1+e} \leq y \leq \dfrac{e}{1+e}\right) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

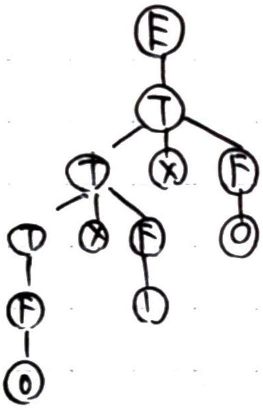
2024-2

1) $G=(N,\Sigma_1,P,E)$ $N=\{E,T,F\}$

$\Sigma_1=\{0,1,\times,+,(,)\}$

$P=\{E\to T,\ E\to E+T,\ T\to F,\ T\to T\times F,\ F\to (E),\ F\to 0,\ F\to 1\}$

a)



正しい。

$0\times 1\times 0$

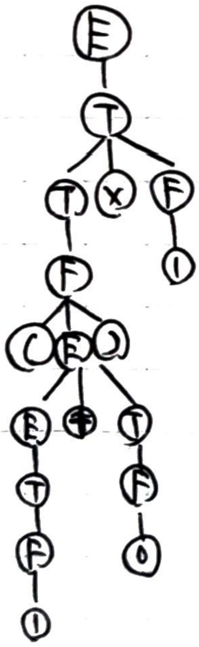
b)

誤り

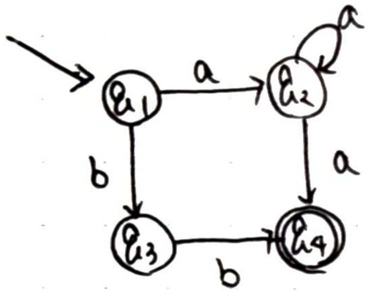
$T\to F\times T$

は生成規則に存在しないから。

c)



2) NFAと正規文法.



$P' = \{U\to aA,\ U\to bB,\ A\to aA,\ \cancel{A\to a},\ A\to a,\ B\to b\}$

3)

a) $\Gamma_1 = \{P_0,\ P_0\to P_1,\ P_1\to P_2,\ P_1\wedge P_2\to P_3,\ P_3\to\neg P_0\}$ は矛盾.

$$\dfrac{P_0 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P_0 \quad P_0\to P_1}{P_1}{\to}E \qquad \dfrac{\dfrac{P_0 \quad P_0\to P_1}{P_1}{\to}E \quad P_1\to P_2}{P_2}{\to}E}{P_1\wedge P_2}\wedge I \qquad P_1\wedge P_2\to P_3}{P_3}{\to}E \qquad P_3\to\neg P_0}{\neg P_0}{\to}E}{\bot}\neg E$$

b) $\Gamma_2 = \{P_0\to P_1,\ P_0\to P_2,\ P_1\wedge P_2\to P_3,\ P_3\to\neg P_0\}$

無矛盾. 仮定に P_0 が含まれていないので.

$P_0=F,\ P_1=T,\ P_2=T,\ P_3\to T$ という割り当てで. 命題集合は全て真になるため.

4) $\Delta = \{\forall x\forall y\forall z\,(x<y\wedge y<z\to x<z),\ \forall x\forall y\,\cancel{\forall z}\exists z\,(x<y\to x<z\wedge z<y)\}$

a) $\mathbb{Z}$, $<$ を $<$ と解釈.

すべての要素を真としない.

$\forall x\forall y\,\cancel{\forall z}\exists z\,(x<y\to x<z\wedge \cancel{z<y}\ z<y)$ について.

⇒ $y=x+1$ となるように取ると, $(x<z)\wedge(z<x+1)$ となるような

整数 z は存在しないから.

b) 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$

すべての要素を真とする。

$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$ について、

$x < y$, $y < z$ が成り立つような任意の x, y, z について、

$x < y < z$ つまり、$x < z$ が必ず成り立つから、

$\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow x < z \wedge z < y)$ について、

$x < y$ を満たす任意の x, y について、$z = \frac{x+y}{2}$ と取れば、

$x < z$ かつ $z < y$ を同時に満たすから、

c) {rock, paper, scissors} をユニバース

すべての要素を真としない。 じゃんけんの関係を表している。

$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$

任意の x, y, z を、rock, paper, scissors と選ぶと

rock < paper ∧ paper < scissors は成り立つが、

rock < scissors は偽である。

よって すべての要素を真としない。

2024-3

1) nに対する増加量

a) $\frac{n}{\log n}$, $\log n$, $(\log n)^3$, 2^n, $n^{\frac{1}{2}}$, $n!$

$\log n < (\log n)^3 < \cancel{\frac{n}{\log n}} < \cancel{n^{\frac{1}{2}}} \quad < \quad 2^n < n!$

$n^{\frac{1}{2}} < \frac{n}{\log n}$

②, ③, ⑤, ①, ④, ⑥

$\left(\frac{n}{\log n}\right)' = \frac{\log n - 1}{(\log n)^2} = \frac{\log n - 1}{(\log n)^2}$

1 2 3 4 5 6
2 4 8 16 32 64

$\log_2(8 \cdot 8) = 6$

$\log_2 8 + \log_2 8$

b) (ア) $2n^3 + 3(\log n)^2 + n^{1.6}\log n$

② $\cancel{(\log n)^2}$ $\quad 2n^3$

16

$\cancel{\log_2(8+8)} = 4$

(イ) $n^{20} + n^{\log n} + \log(n!)$

$\log(n \cdot (n-1) \cdots 1)$

$\log(n) + \log(n-1) \cdots$

⑦ $\cancel{n\log n}$ $\quad n^{\log n}$

$\cancel{\log_2 8 \cdot \log_2 8} = 9$

$3 \cdot 8$

$\cancel{\log_2(8+8)} = 4$ 64

$\log_2 8 \cdot \log_2 8$

(ウ) $n^2(\sin^2 n)2^n$

⑬ $\cancel{n^2 2^n}$ $\quad n^2 2^n$

c)

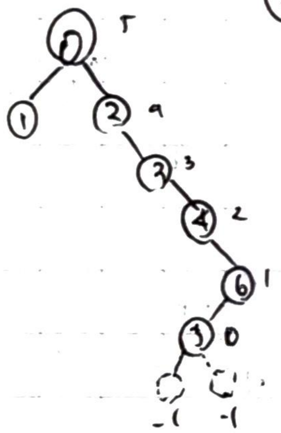
	最悪	平均
クイックソート	n^2	$n\log n$
マージソート	$n\log n$	$n\log n$
バブルソート	n^2	n^2
ヒープソート	$n\log n$	$n\log n$

2) 0, 2, 3, 4, 6, 1, 5

ア: data ①, ウ: data ① エ: new_node ⑤

オ: NULL ④ カ: p→right ⑦ キ p→left ⑨

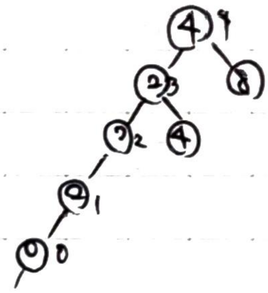
p→right = insert(右)



b) 0, 2, 3, 4, 6, 1, 5

高さ5

c) 4, 2, 2, 2, 0, 4, 8



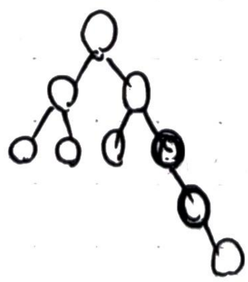
高さ4

AVL木

insert_avl AVLへ挿入.

rotate_left

rotate_right



insert_avl.

0, 2, 3, 4, 6, 1, 5   data = [0, 2, 3, 4, 6, 1, 5]

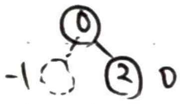
root = insert_avl(root, data[0]);

root = insert_avl (root, data[1])

2

p->right = insert_avl (p->right, data)

$\underbrace{\text{p->right}}_{\text{NULL}}$



create

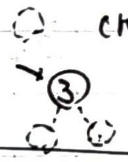
root = insert_avl (root, data[2])

3

p->right = insert_avl(p->right, data)

p->right = insert (ㅎ)

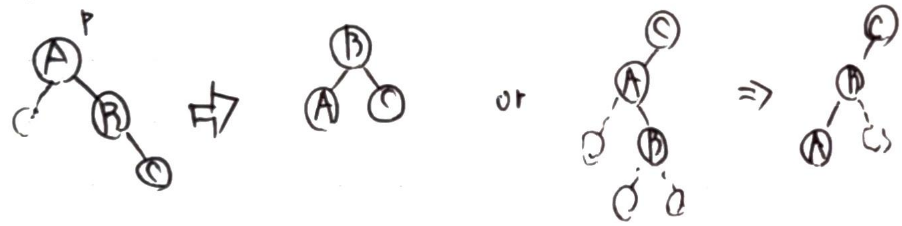
create



3.

[illegible]	right->data	12
[illegible]	p-> ~~left~~ right	10
[illegible]	p->right	10
[illegible]	left->data	11
[illegible]	p->left	9
[illegible]	p->left	9

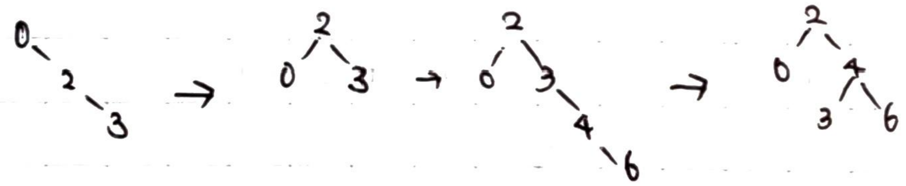
rotate_left

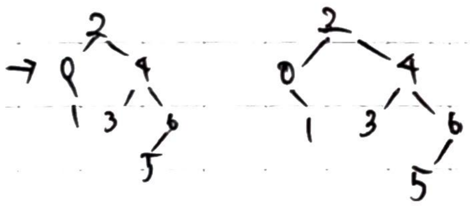


$\boxed{Y}$: right, $\boxed{2}$ right $\boxed{左}$ left $\boxed{12}$ left
③ ③ ② ②

right_child = p→right
p→right = right_child→left
right→child→left = p.

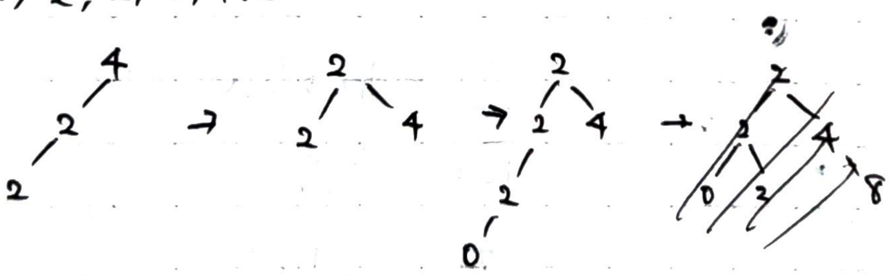
f) 0, 2, 3, 4, 6, 1, 5



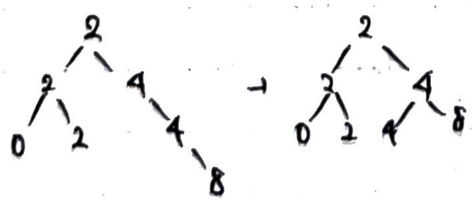


3#

g) 4, 2, 2, 2, 0, 4, 8

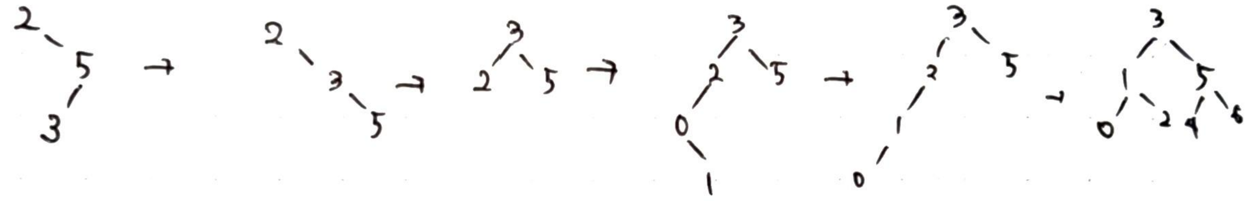


2#



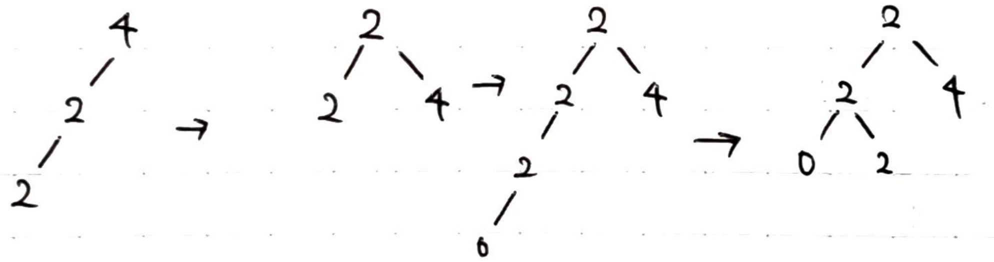
2#

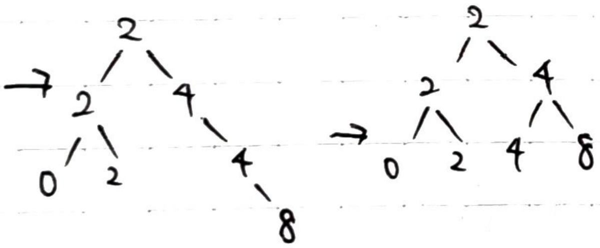
h) 2,5,3,0,1,6,4



$\underline{2}_{4}$

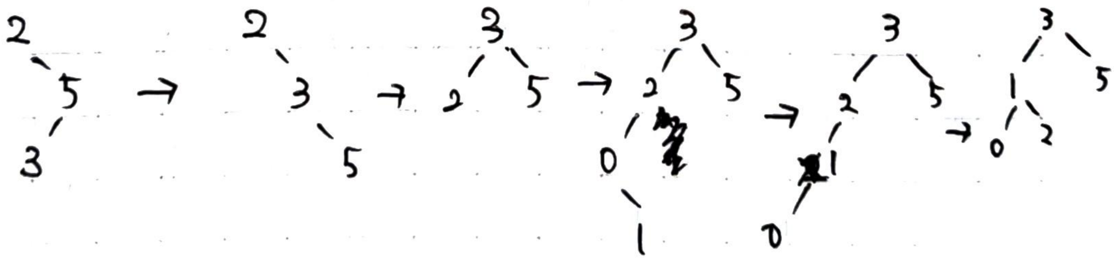
g) 4,2,2,2,0,4,8

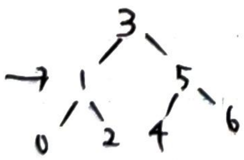




$\underline{2}_{4}$

h) 2,5,3,0,1,6,4





$\underline{2}_{4}$

2024-4 I

3)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{1+e^{-X}}$$

$\cancel{\mapsto x}$. $1+e^{-X} = \frac{1}{Y}$

$e^{-X} = \frac{1}{Y} - 1$ $\quad -X = \log\left(\frac{1-Y}{Y}\right)$

$\cancel{-X = \log\left(\frac{\ }{Y}\right.}$ $\quad X = \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right)$

$\cancel{f_X}$ $\quad f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$ ⋯★

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) = \frac{1-Y}{Y} \cdot \left(\frac{Y}{1-Y}\right)' = \frac{1-Y}{Y} \cdot \frac{1}{(1-Y)^2} = \frac{1}{Y(1-Y)}$$

$$\frac{1-Y+Y}{(1-Y)^2} = \frac{1}{(1-Y)^2}$$

よって

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y(1-y)}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y(1-y)} & \left(\frac{1}{1+e} \leq y \leq \frac{e}{1+e}\right) \\ 0 & \end{cases}$$

試みに..

$$\int_{\frac{1}{1+e}}^{\frac{e}{1+e}} \frac{1}{2y(1-y)}\, dy = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{y}{1-y}\right)\right]_{\frac{1}{1+e}}^{\frac{e}{1+e}} = \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{\frac{e}{1+e}}{1-\frac{e}{1+e}}\right) - \log\left(\frac{\frac{1}{1+e}}{1-\frac{1}{1+e}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{e}{1+e}}{1-\frac{e}{1+e}} \cdot \frac{1-\frac{1}{1+e}}{\frac{1}{1+e}}\right)$$

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

$$\int \frac{1}{y(1-y)}\, dy = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\, dy = \log|y| - \log|1-y| = \log\left|\frac{y}{1-y}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{e}{1+e-e} \cdot \frac{1+e-1}{1}\right) = \frac{1}{2}\log(e \cdot e) \cdot \frac{1}{2}\log e^2$$

$$= \cancel{2}\ 1_{\#}$$

確かに $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, dy = 1$

2)

c) $\nabla h(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix} = Qx + c$

よって $\nabla h(x) = 0$ となる x が存在するとは、

$$Qx + c = 0$$

$$Qx = -c$$

$$x = -Q^{-1}c$$ つまり Q に逆行列が存在

$\Updownarrow$

正則

d) 正定値行列とは任意の非ゼロベクトル x について、

$$x^T Q x > 0$$

$\Leftrightarrow$ 全ての固有値が正。

$$h(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + 3$$

$x = -Q^{-1}c$ で $h(x)$ が最小値を取るかどうかは、

$\frac{1}{2}x^T Q x$ が凸かどうかに依存。

2024

1) 2) d) $h(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + 3$

$$\frac{1}{2}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} p & q \\ \cancel{r} & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (c_1\ c_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 3$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} px_1 + rx_2 \\ \cancel{qx_1 + sx_2} \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c_1x_1 + c_2x_2 + 3$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ px_1^2 + r\underset{x_1}{x_2} + q\underset{x_2}{x_1} + sx_2^2 \right\} + c_1x_1 + c_2x_2 + 3$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = px_1 + qx_2 + c_1 = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = qx_1 + sx_2 + c = 0$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$Qx = c$$

$$x = Q^{-1}c$$

逆行列が存在する.

~~$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + cx + 3$ の場合~~ ~~多Q~~ $\frac{1}{2}x^T Q x$が常に正と言えればよい.

3) $X[-1,1]$

a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x<-1,\ 1<x) \end{cases}$

b) $Y = \frac{1}{1+e^{x}}$ ~~より~~ $y = \frac{1}{1+e^{x}}$ ~~より~~

$dy = (1+e^{-x})^{-1\prime} dx$

$= -(1+e^{-x})^{-2} \cdot (e^{-x})' \ dx$

$= -(1+e^{-x})^{-2} (-e^{-x}) \ dx$

$= (1+e^{-x})^{-2} e^{-x} \ dx$

Yの取り得る範囲は.

$\frac{1}{1+e} \leq y \leq \frac{1}{1+e^{-1}} = \frac{e}{1+e}$

$\cancel{\frac{1}{1+e^{-1}} < y < \frac{1}{1+e}}$

$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\log\frac{y}{1-y}) \frac{dx}{dy} dy$

$y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$(1+e^{-x})y = 1$

$1+e^{-x} = \frac{1}{y}$

$e^{-x} = \frac{1}{y} - 1$

$-x = \log(\frac{1}{y}-1)$

$x = \log(\frac{1-y}{y})^{-1}$

$x = \log\frac{y}{1-y}$

よって

$f_Y(y) = f_X(\log\frac{y}{1-y})\frac{dx}{dy}$

$\cancel{= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{(1+e^{-x})^2 e^{-x}}\right)}$

$\cancel{= \frac{1}{2}(1+e^{-x})e^{x} = \frac{1}{2}e^{x}(1+e^{-x})}$

$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{y(1-y)}$

$dx = \frac{1-y}{y}\left(\frac{y}{1-y}\right)' dy$

$= \frac{1-y}{y} \cdot \frac{(1-y)-(-1)y}{(1-y)^2} dy$

$= \frac{1}{y(1-y)} dy$

よって $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y(1-y)}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y(1-y)} & (\frac{1}{1+e} \leq y \leq \frac{e}{1+e}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$