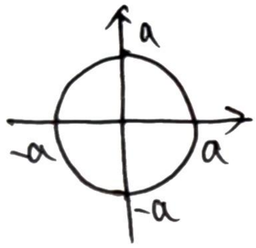
No.

Date

H22-I

1. xy平面上において、原点を中心とする半径aの円の内部を領域D

(円周は含まない)



1) ~~極座~~ $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$0 \le r < a$, $0 \le \theta < 2\pi$

2) ヤコビ行列 J

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|J| = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = \underline{r}$$

3) $$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^a \left[e^{-r^2} r\theta\right]_0^{2\pi} dr = 2\pi\int_0^a re^{-r^2}\,dr$$

$$\left((e^{-r^2})' = -2re^{-r^2}\right) \quad = -\pi\left[e^{-r^2}\right]_0^a = -\pi e^{-a^2} + \pi = \underline{\pi(1-e^{-a^2})}$$

4) $$\lim_{a\to\infty} I = \lim_{a\to\infty} \pi(1-e^{-a^2}) = \underline{\pi}$$

5) 4)の結果を用いて

~~求め~~ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めよ。 $= J$とおく。

~~$J^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)$~~ ~~Jは偶関数なので~~

~~$\frac{J}{2} = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$~~

No.

Date

ここで、

$$I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

6) ガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \cancel{-\int_0^{\infty} (e^{-t})' t^{-\frac{1}{2}} dt = \left[-e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\infty} + \int}$$

~~$t^{-\frac{1}{2}} = s$ とおくと~~ $t^{\frac{1}{2}} = s$

$t: 0 \to \infty$

$s: 0 \to \infty$

t

$t = s^2$

$dt = 2s\,ds$

e^{-x^2}の形を作りたい. tをs^2に置換や!

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{-1} 2s\,ds$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$$

$$= 2 \cdot \tfrac{1}{2} J = \tfrac{2}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

No.

Date

H22-2

Xを正規分布に従う確率変数, Xの期待値 E(X),
実数tについて $E(e^{tX})$ をモーメント母関数 M(t)

1) $\frac{d^2}{dt^2}M(t)\Big|_0 = E(X^2)$ となることを示せ

$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$

$\frac{d^2}{dt^2}M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\cdot \cancel{(tx)}\, x^2 f(x)\,dx$

t=0 とすると $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = E(X^2)$

$e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1!} + \frac{(tx)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!} \cdots$

$M(t) = E\left[1 + \frac{tx}{1!} + \frac{(tx)^2}{2!} + \cdots\right]$

$= 1 + \frac{t}{1!}E[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \cdots$

$M'(t) = E[X] + \frac{t}{1!}E[X^2] \cdots$

$M''(t) = E[X^2] + \frac{t}{1!}E[X^3] \cdots$

$M''(0) = E[X^2]$

2) ~~N(0,1)~~ N(0,1) に従う確率変数 X のモーメント母関数.

$N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率分布の確率密度関数 f(x)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

N(0,1)

$\rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

No.

Date . .

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{x^2}{2}+tx\right)} dx$$

$$(\text{指数部}) = \left(tx - \frac{x^2}{2}\right) = -\left(\frac{x^2}{2} - tx\right) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx\right) = -\frac{1}{2}\left\{(x-t)^2 - t^2\right\}$$

よって $E(e^{tx}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\{(x-t)^2 - t^2\}} dx = \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx$

※ $\frac{x-t}{\sqrt{2}} = s$ とおくと、 $x \mid -\infty \to \infty$, $s \mid -\infty \to \infty$

$\frac{1}{\sqrt{2}} dx = ds$.

よって $E(e^{tx}) = \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \sqrt{2}\, ds$

$= \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \underline{e^{\frac{1}{2}t^2}}$

No.

Date . .

H22-3

1)

a) α, β, γ を命題変数, 以下の命題論理式がトートロジーであるか否か

イ) ~~α~~ $\alpha \vee (\beta \Rightarrow \alpha)$ ×

ロ) $\alpha \vee (\alpha \Rightarrow \beta)$ ○

ハ) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ ○

α	β	$\beta \Rightarrow \alpha$	$\alpha \vee (\beta \Rightarrow \alpha)$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
T	T	T	T	T	T

ニ) $((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$ ○

α	β	γ	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$	$\alpha \Rightarrow \gamma$	
F	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T

b) ブール関数 $H(\alpha,\beta)$ と $G(\alpha,\beta)$

α	β	$H(\alpha,\beta)$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\alpha \vee \beta$	$H(\neg\alpha,\neg\beta)$
F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T

イ) $\neg\alpha$ を関数Hのみを用いて表せ.

$\neg\alpha \simeq H(\alpha,\alpha)$

ロ) $\alpha \wedge \beta \simeq \neg \cancel{H(\alpha,\alpha)}$ $\neg H(\alpha,\beta) \simeq H(H(\alpha,\beta), H(\alpha,\beta))$

1) $\alpha \vee \beta$ $\qquad\qquad$ $H(\alpha,\beta)$ は NAND

$\cancel{\overline{\overline{\alpha\beta}} \simeq \overline{\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}}}$

$\cancel{\neg H(\neg\alpha,\neg\beta) \simeq H(H(\neg\alpha,\neg\beta),H(\neg\alpha,\neg\beta))}$

$\alpha \vee \beta \simeq H(\neg\alpha,\neg\beta) = H(H(\alpha,\alpha),H(\beta,\beta))$

=

α	β	$G(\alpha,\beta)$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\alpha\wedge\beta$	$\alpha\vee\beta$
F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F	T
T	T	T	F	F	T	T

$\cancel{H(\neg\beta, \alpha\vee\beta)}$

$H(\alpha,\neg\beta) \simeq H(\alpha, H(\beta,\beta))$

2) a) x, y, z が自然数であるとき、次の各論理式の真偽.

イ) $\exists x \forall y ((x<y) \vee (x=y))$

真. $x=1$ のとき、任意の y について $1<y$ または $1=y$ が成り立つから.

ロ) $\forall x \forall y \exists z ((x<z) \wedge (y<z))$

真. どのような x, y においても $z=x+1$ あるいは $z=y+1$ の大きい方を z とすることで成り立つ.

ハ) $\forall x \forall y \exists z \cancel{((x<z)} ((x<y) \Rightarrow ((z<x) \vee (y<z)))$

真 $x<y$ が成り立つどのような y においても $y<z$ となるような z を選ぶことができるから.

ニ) $\forall x \forall y ((x<y) \Rightarrow \exists z ((x<z) \wedge (z<y)))$

偽 $x=1, y=2$ としたとき、 $1<z$, $z<2$ を満たすような自然数 z は存在しない.

b) x, y, z が実数であるとき.

イ) $\exists x \forall y ((x<y) \vee (x=y))$

偽　どのような実数xに対しても、xよりも小さい実数が存在するため
任意のyについて成り立たない。

ロ) $\forall x \forall y \exists z ((x<z) \wedge (y<z))$

真　どのようなx, yに対しても、それより大きいzを選ぶことができる.

ハ) $\forall x \forall y \exists z ((x<y) \Rightarrow ((z<x) \vee (y<z)))$

真　任意の$x<y$を満たすx, yについて.
$z<x$ または $y<z$を満たすzが存在する.

ニ) $\forall x \forall y ((x<y) \Rightarrow \exists z ((x<z) \wedge (z<y)))$

真　任意の$x<y$を満たすx, yについて.
$z = \frac{x+y}{2}$ とおくことで、$x<z$ かつ $z<y$ が成り立つ.

H22-7

1) comb1 の A, B, C, D

```
int combI (int n, k) {
    if((k==0) || (k==n)) return 1;
    else return combI(A, B) + combI(C, D);
```

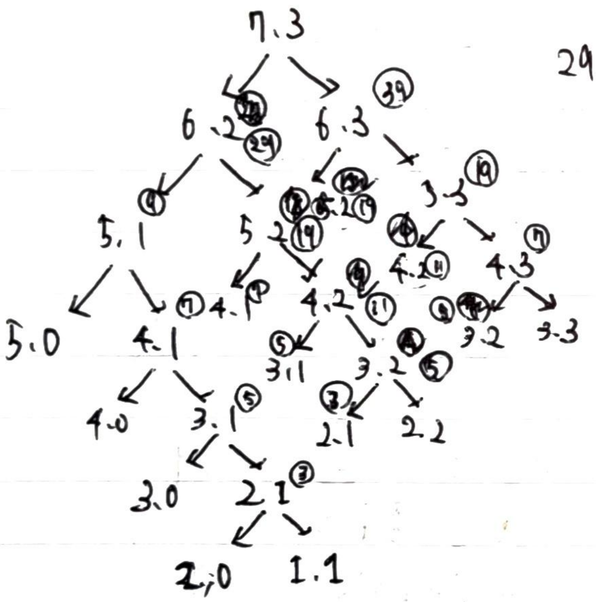
A, B: n-1, k-1　　C, D: n-1, k

$_4C_2 = \frac{\cancel{4}\cdot 3}{\cancel{2}} = 6$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$_5C_2 = {_5C_3}$

2) $_nC_3$, comb1(7, 3)



29 + 39 + 1 = 69

$_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$

3) comb2

```
int pf(m, n) {
    f = 1
    for(i = m; i <= n; i++) {
        f = f * i;
    }
    return f;
}
```

$\frac{n!}{(m-1)!}$

pf(2, 5)
= 2×3×4×5
= $\frac{5!}{(2-1)!}$

pf(i, n) / pf(1, j)

```
int comb2(int n, int k) {
    int i, j
    if(n ≥ 2*k) {
        i = n-k+1;
        j = k
    } else {
        i = k+1;
        j = n-k;
    }
    return pf(E, F) / pf(G, H)
```

$_5C_2$ (n=5, k=2)
i = 4
j = 2

$_5C_3$
i = 4
j = 2

$_5C_2$	$_6C_2$	$_6C_3$
$_5C_3$	$_6C_4$	
i = 4	i = 5	i = 4
j = 2	j = 2	j = 3

$\frac{5!\ 1!}{3!\ 2!}$　$\frac{6!}{2!\ 4!}$

$\frac{n!}{(i-1)!} \times \left(\frac{j!}{1!}\right)^{-1}$

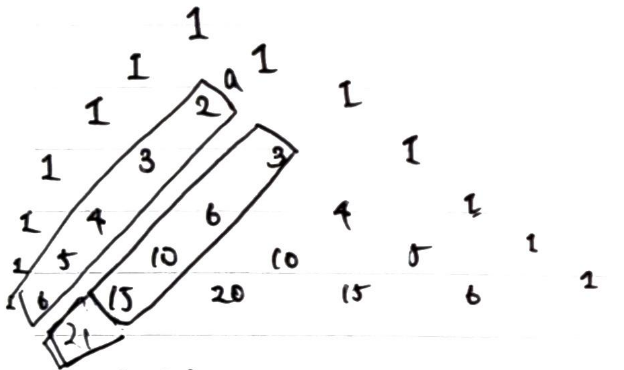
4) comb1の長所と短所

〈長所〉 コードが~~見やすく~~短く、見やすい、$k=0$, $n=k$のときに早くなる.

〈短所〉 一般に~~再帰呼~~び出しを複数回行うので遅くなる.

5) $a[0] = {}_2C_1$, $a[1] = {}_3C_2$

$({}_2C_1, {}_3C_2, {}_4C_3, \cdots, {}_{k+1}C_k)$



〈i=3〉

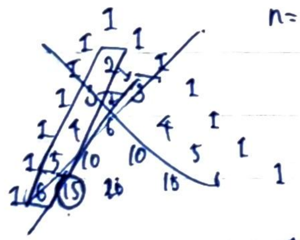
$a[0] = 3$

$a[1] = a[1] + a[0] = 3+3 = 6$

$a[2] = a[2] + a[1] = 4+6 = 10$

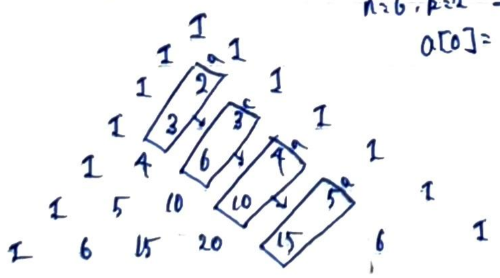
求めたいのが ${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ とすると

$n=6$, $k=2$;



$n=6$, $k=2 \to 15$

$a[0]=2$, $a[1]=3$



```
int comb3(int n, k){
    int i,j;
    int a[MAXRG];                 5C3
    if(n-k<k) k=n-k               →5C2
    if(k==0) return 1;
    if(k==1) return n;
    for(i=0;i<k;i++){
        a[i]=i+2;      aを初期化
    }
    for(i=3;i<=[I];i++){
        a[0]=i;
        for(j=1;j<k;j++){
            a[j] += a[j-1];
        }
    }          a[k-1]
    return [I];
}
```

3から5までやればいい

$\boxed{I} = 5$ $n-k+1$