No.

Date

H21-1

1)

a) $\frac{d}{dx}\frac{x^3+2x+1}{x-1}$

$$= \frac{(3x^2+2)(x-1)-x^3-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{3x^3+2x-3x^2-2-x^3-2x-1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3-3x^2-3}{(x-1)^2}$$

b) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(2x+1)\right)$

$$(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}(2x+1)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4x^2-4x-1}}\,2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\cancel{1-1}-4(x^2+x)}} = \frac{2}{2\sqrt{-x(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{-x(x+1)}}$$ //

$x = \sin y$

$dx = \cos y \, dy$

$$\frac{dx}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

No.

Date

4) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が以下を満たすとき、コーシー列と呼ぶ.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m \ \forall n \ [m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon]$$

a) $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^i$ のとき、a_n がコーシー列であることを示せ.

$a_0 = 1$

$\cancel{a_n = 1 + -\frac{1}{2}r + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 r + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) a_n = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n + \frac{1}{2} a_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{3}{2} a_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^m\right\} - \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right|$$

$$= \left|\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{-1}{2}\right)^n - \left(\frac{-1}{2}\right)^m\right\}\right| = \frac{2}{3}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^m\right|$$

$m, n \to \infty$ のとき、$|a_m - a_n| \to 0$ より、

~~$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, \forall n$~~ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は コーシー列.

b) $a_n = (-1)^n$

$$|a_m - a_n| = |(-1)^n - (-1)^m| = \begin{cases} 0 & (n \text{ と } m \text{ の偶奇が同じ}) \\ 2 & (\ \text{〃} \quad \text{異なる}) \end{cases}$$

No.

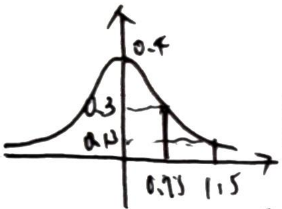
Date . .

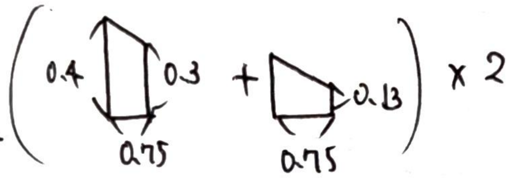
H21-2

1) 平均0、標準偏差1の連続分布D_1に従う標本xが$[-1.5, 1.5]$に存在する確率P

a) D_1が正規分布、区間$[-1.5, 1.5]$を4等分。

$\phi(0)=0.40$, $\phi(0.75)=0.30$, $\phi(1.5)=0.13$





$$\left((0.4+0.3)\times0.75\times\frac{1}{2}+(0.3+0.13)\times0.75\times\frac{1}{2}\right)\times2$$

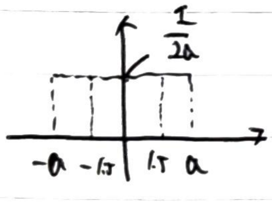
$$=0.75\times\cancel{\tfrac{1}{2}}(0.4+0.6+0.13)=0.75\times1.13\times\frac{1}{2}\cancel{\times2}$$

$\cancel{\doteqdot 0.43 \quad 0.42}$ 　$\doteqdot 0.85$

$\cancel{1.13\times0.75=0.8475,\ 0.4237\cdots}$

b) 分布D_1がある連続した区間上の一様分布

$[-a, a]$上で一様分布とすると。



$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 1$ より。 ($f(x)=p$)

$[px]_{-a}^{a} = 2pa = 1$ 　$p=\frac{1}{2a}$

$$\frac{1}{2a}\times3=\frac{3}{2a}$$

$\mu=0$, $\cancel{\sigma^2}=1$ $\sigma=1$ を使う。$[a, b]$とすると

$\int_a^b p_0 dx = [p_0x]_a^b = p_0(b-a) = 1$ 　$\mu=\int_a^b xp_0dx=\int_a^b\frac{1}{b-a}x\,dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$

$\therefore p_0=\frac{1}{b-a}$ $(b \neq a)$ 　$=\frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2)$

$\therefore \cancel{a=2-b}$ $a=-b$ 　$=\frac{b+a}{2}=0$

$\sigma^2=\int_{-b}^{b}x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-b}^{b}=\frac{1}{2b}\frac{1}{3}(b^3+b^3)$

$=\frac{2b^3}{6b}=\frac{b^2}{3}=1 \Rightarrow b^2=3$ 　$b=\sqrt{3}$ 　よって、$p_0=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

したがって $p=3\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

No.

Date

c) チェビシェフの不等式を用いて、分布 D_1 における確率 P の下限を計算せよ。

◎チェビシェフの不等式

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

X：確率変数、μ：平均、σ^2：分散、~~k~~ k は任意の値。

$$P(|X| \geq k) \leq \frac{1}{k^2} \quad (\mu=0,\ \sigma=1)$$

求めたいのは、$|X| \leq 1.5$ よって、

$$P(|X| \geq 1.5) \leq \frac{1}{1.5^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P(|X| \leq 1.5) = 1 - \frac{4}{9} = \underline{\frac{5}{9}}$$

2) 確率分布 D_2 に従う、n 個の独立な標本 $\{x_i \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

a) D_2 が正規分布のとき、この正規分布の期待値と分散の最尤推定量を標本から求めよ。

D_2 が正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ である。}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ が標本として~~表れる~~現れる確率~~密度~~ L を

$L = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ とおく。

$\log L = \log f(x_1) + \cdots + \log f(x_n)$ 　が最大になるような μ, σ^2 を求める。

$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) + \cdots + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right)$$

$$= n\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x_1-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log L = \frac{1}{\sigma^2}\left\{(x_1-\mu) + (x_2-\mu) + \cdots + (x_n-\mu)\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}(x_1+x_2+\cdots+x_n - n\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\mu = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}$$

$\cancel{\frac{1}{\partial\sigma^2}\log L} = \quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\log L$

$\cancel{n\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^{-1}\right)'}$ $\quad \left(n\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)\right)'$ $\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\{(x_1-\mu)+\cdots+(x_n-\mu)\}$

$\cancel{n\frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{\sigma^2}}$ $\quad n\sqrt{2\pi}\sigma\cdot\cancel{-2\sigma^{-2}}$ $\quad -\frac{1}{2}\{(x_1-\mu)+\cdots+(x_n-\mu)\}(-2)\frac{1}{\sigma^3}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^{-1}\right)'$ $\quad = \frac{1}{\sigma^3}$

$-1\cdot n\sqrt{2\pi}\sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^{-2}$

$= \cancel{\sigma^{-1}} = \frac{-n}{\sigma^1}$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log L = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\{(x_1-\mu)+\cdots+(x_n-\mu)\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma}\left\{-n + \frac{1}{\sigma^2}\{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2\}\right\} = 0$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{n}\{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2\}$$

b) 分布 D_2 が一様分布 $[a,b]$, aとbの最尤推定量.

$a \le x_i \le b$

p_0とすると

$\int_a^b p_0 \, dx = 1$ より. $[p_0 x]_a^b = 1$

∴ $p_0 = \frac{1}{b-a}$ である.

よって $f(x) = \frac{1}{b-a}$ となる.

$L = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n$ より.

Lを大きくするためには $b-a$ を小さくする.

よって $b = \max(X)$, $a = \min(X)$

No.

Date

H21-3

1) SとTは空でない有限集合.

$|S|=m,\ |T|=n$

a) SからTへの全射が存在するための必要十分条件 $m \geq n$

〈⇒を示す〉

$f(S)=T$ ならば、~~全~~ Tの各要素に少なくとも1つSの要素が対応していなければならないので $m \geq n$

〈⇐を示す〉

$m \geq n$ ならば、~~[illegible]~~ ~~Sの要素~~

Tの~~各~~要素一つにSの要素1つを対応することができ、それを写像とすることで、全射を構成することができる。

(構成できるかどうか
必ずできなくてもok?)

b) 単射 $m \leq n$

〈⇒を示す〉

任意の ~~s, s'~~ $s, s' \in S$ に対して、$f(s) \neq f(s')$ が成立つので、Sの要素数mに対してm個の像が考えられるため、少なくともnはmより大きいかイコール.

〈⇐を示す〉

$m \leq n$ ならば、Sの要素をTの要素から別々に一つ選んで対応させることができる.

c) 全単射 $m=n$

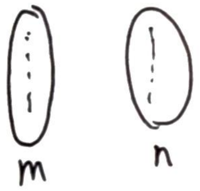
〈⇒〉

a), b) より $m=n$

〈⇐〉

$m=n$ ならば、~~[illegible]~~ Sの要素とTの要素を一つずつ選んで対応させることで全単射を構成

d) SからTへの写像



n^m

$\frac{n!}{m!}$ の謎

$\cancel{\frac{n!}{m!} = n(n-1)\cdots(n-m+1)}$ $(m+1)$

$\cancel{\frac{7!}{4!} = 7\cdot6\cdot5}$

$${}_nP_m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)$$

e) ~~単射~~ 単射

$m \geq n$ $\qquad$ $m \leq n$

n個からm個並べる

${}_nP_m = \frac{n!}{m!}$

$n\cdot(n-1)\cdots\cancel{(n-m+1)}$ $\cancel{(m+1)}$ $\cancel{\frac{n!}{m!}}$

$5 \to 10$

$10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6$

$\frac{10!}{5!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!}$

$4 \to 10$

$10\cdot9\cdot8\cdot7$

2) k個の集合 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 集合 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_k) \mid x_i \in X_i\}$

$\{0,1\}^k$ から $\{0,1\}$ への任意の写像をk変数ブール関数

a) $\{0,1\}^k$ の要素数

2^k

b) k変数ブール関数

$\{0,1\}^1$ $\quad 0 \to 0$ or 1

$1 \to 0$ or 1

2^k の要素数に対して2個の写像先

2^{k+1}

c) 全射

2^{k+1} の写像から2個除外.(全部0, 1)

$2^{k+1} - 2$

d) 単射

k=1

$0 \to 0$ or 1

$1 \to$ 余り

2個

k=2

00

01

10

11

k=1 2個

k≥2 0個

No.

Date . .

e) 全単射 $m=n$ より

$k=1$ $k\geq 2$

2個 0個

No.
Date . .

H21-7

$a>0$, $b>0$ となる2つの整数を入力.

Ⓐ A_1 $r := a$;
A_2 $(r \geq b \to r := r-b)$

$a=17$, $b=3$ 手続きA
$r=17$
$17 \geq 3 \to r=14$
$14 \geq 3 \to r=11$
$11 \geq 3 \to r=8$
$8 \geq 3 \to r=5$
$5 \geq 3 \to r=2$

rへの代入は.
6回

A2の実行中、いずれの時点においても. a, b, r の値について常に成り立つ強い性質.

$\exists x((a = \boxed{2}) \wedge \boxed{3} \wedge x$は整数$) \wedge \boxed{4}$

$\exists x((a = bx+r) \wedge x \geq 0 \wedge$ 〃 $) \wedge r \geq 0$

⑤ $a = bx+r$ ⑥ $a \% b = r$ bで割った余り.

$\forall x(a = \underset{bx+r}{\boxed{2}} \Leftrightarrow a = (\underset{x+1}{\boxed{7}}) \times b + \underset{r-b}{\boxed{8}})$

Ⓑ B1: $r := a$
B2: $x := \boxed{9}$ 0
B3: $(r \geq b \to x := \underset{x+1}{\boxed{7}}; r := \underset{r-b}{\boxed{8}})$

No.

Date . .

A' $A1 \quad r := a$

$A2' \quad (r \geq b \rightarrow c := b ; (r \geq \boxed{10} \rightarrow r := \boxed{11} ; c := c + c))$

$a = 17, b = 3$

$r = 17,$

$17 \geq 3 \rightarrow c := 3 \; (r \geq \overset{c}{\boxed{10}} \rightarrow r := \overset{r-c}{\boxed{11}} \; ; c = c + c)$

$r \geq c \rightarrow r := r - c \qquad c = 6$

$17 \geq 3 \rightarrow r = 14 \qquad c = 6$

$14 \geq 6 \rightarrow r = 8 \qquad c = 12$

$8 \geq 3 \qquad c = 3 \qquad 8 \geq 3 \rightarrow r = 5 \qquad c = 6$

$5 \geq 3 \qquad c = 3 \qquad 5 \geq 3 \qquad r = 2 \qquad c = 6$

B' $B1 \quad r := a$

$B2 \quad x := 0$

$B3' \quad (r \geq b \rightarrow c := \overset{b}{\boxed{12}} ; e := \overset{1}{\boxed{13}} ;$

$(r \geq c \rightarrow r := r - c ; c = c + c ; x := \overset{x+e}{\boxed{14}} ; e := \overset{e*2}{\boxed{15}}))$

$a = 31, b = 3$

$r = 31$

$x = 0$

$31 \geq 3 \rightarrow c = 3 \qquad e := \overset{1}{\boxed{13}}$

$31 \geq 3 \rightarrow r = 28 \quad c = 6 \quad x := x + \overset{1}{e} \quad e := \overset{2}{e * 2}$

$28 \geq 6 \rightarrow r = 22 \quad c = 12 \quad x = 3 \quad e = 4$

$22 \geq 12 \rightarrow r = 10 \quad c = 24 \quad x = 7 \quad e = 8$

$10 \geq 3 \quad c = 3 \quad e = 1$

$10 \geq 3 \quad r = 7 \quad c = 6 \quad x = 8 \quad e = 2$

$7 \geq 6 \quad r = 1 \quad c = 12 \quad x = 11 \quad e = 4$

⑯ : rに代入される値　31→28→22→10→7→1
⑰　x　〃　0→1→3→7→8→11
⑱　c　〃　3→6→12→24→3→6→12

bの2倍,4倍と差分を大きくすることで、r−bの更新回数を少なくする.

b=8として B′がBよりも効率が悪くなる場合の最小のaの値

a=1,2 は同じ

a=3のとき、Bの方が効率が良い.　　$\underline{a=3}$