

H18-1

1)  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  の 行列式

$$|A| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} (9 - 36) = -1$$

2)  $xI - A$  の 行列式

$$|xI - A| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 3x-1 & 2 & 2 \\ 2 & 3x-1 & 2 \\ 2 & 2 & 3x-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \{ (3x-1)^3 + 16 - 12(3x-1) \}$$

~~$$= \frac{1}{27} (27x^3 - 9x^2 + 3x - 1 + 16 - 36x + 12) = \frac{1}{27} (27x^3 - 9x^2 - 33x + 27)$$~~

$$= \frac{1}{27} (27x^3 - 3 \cdot 9x^2 + 3 \cdot 3x - 1 + 16 - 36x + 12)$$

$$= \frac{1}{27} (27x^3 - 27x^2 - 27x + 27) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$= (x-1)(x^2-1) = \underline{(x-1)^2(x+1)}$$

3)  $A$  の 固有値

$$|xI - A| = 0 \quad \therefore x = 1, -1$$

4) 各々の 固有値に対して、その 固有値に対する 固有空間の基底

$$x = 1 \text{ の } \Rightarrow$$

$$(I - A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (I - A)x = 0 \text{ を 満たす } x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ は } x, y, z$$

$$x + y + z = 0, \quad y = s, z = t \text{ とおくと}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

おいて 基底  $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  である。

$x = -1$  かつ

$$(I-A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より  $(I-A)x = 0$ 

$$x + (-z) = 0$$

$$y + (-z) = 0$$

 $\Rightarrow z = \text{未定}$ 

$$x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より 基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 

5)

ユニタリ行列 ...  ~~$U^T U = \bar{U} U^T = I \Rightarrow U^T = U^{-1}$~~ 

~~$U \bar{U}^T = \bar{U}^T U = E$~~

~~$A^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$~~

~~$\bar{A}^T A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} I$~~

$$\bar{A}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}^T A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

6) エルミート行列  $\bar{A}^T = A$

(5) すり  $A$  はエルミート行列.

7)  $A = BDB^*$  を満たす行列  $B$  と対角行列  $D$  を求めよ. (\* は隨伴行列).

(4) すり.

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よし } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = P^{-1}AP$  によって対角化できるか  
 $BAB^*$  に反するため  $X$ .

$\Rightarrow$  対角化行列を正規直行化を行え.

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{z}_1' = P_2 - \langle P_2, \bar{z}_1 \rangle \bar{z}_1 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z}_3' = P_3 - \langle P_3, \bar{z}_1 \rangle \bar{z}_1 - \langle P_3, \bar{z}_2 \rangle \bar{z}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \bar{z}_1 - 0 \bar{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{z}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz } P = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}^T P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz } P^{-1} = \bar{P}^T \quad \bar{P}^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~~B = P<sup>-1</sup>~~ ~~Ansatz~~

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = (\bar{P}^T)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{P}^T$$

$$B = P$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

H18-2

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & (t \geq a) \\ 0 & (t < a) \end{cases} \quad (a > 0)$$

1)  $H(t) = \begin{cases} 1 & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$

 $H(t-a)$  のラプラス変換.

② ラプラス変換

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t-a)] &= \int_0^\infty H(t-a) e^{-st} dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_a^\infty = \frac{1}{s} e^{-sa} \end{aligned}$$

2)  $H(t-a)$  を用いて  $f(t)$  を表せ.

$$f(t) = t^2 H(t-a)$$

3)  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_a^\infty t^2 e^{-st} dt = \int_a^\infty t^2 \cdot [-\frac{1}{s} e^{-st}]' dt$

(因式)

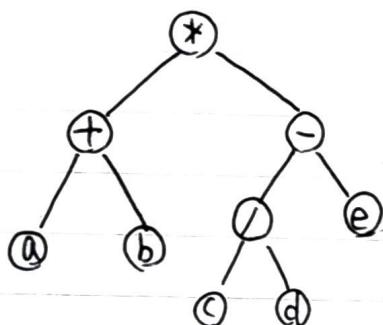
H18-3

$$1) T = \{a, b, c\}, L = \{a^n b^m c b^n a^m | n \geq 1, m \geq 0\}$$

$P = \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow aTa\}$  に 2 つ付加えよ。

$$T \rightarrow C, T \rightarrow bTb$$

$$2) (a+b) + (c/d) - e$$



a) 前順序

+, +, a, b, -, /, c, d, e

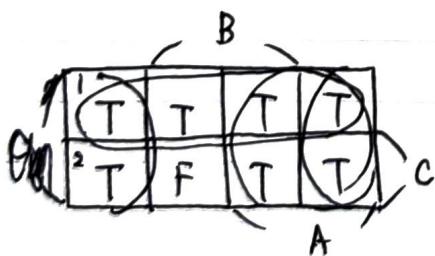
b) 後順序

a, b, +, c, d, /, e, -, \*

3) 論理積, 論理和に直す。

$$\neg((A \vee B) \wedge (\neg(A \vee \neg C)))$$

A	B	C	$A \vee B$	$\neg C$	$A \vee \neg C$	$\neg(A \vee \neg C)$	$(A \wedge B) \wedge \neg(A \vee \neg C)$	$\neg((A \wedge B) \wedge \neg(A \vee \neg C))$
F	F	F	F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	F	F	F	F	T
T	T	F	T	T	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	T	T	F	T	F	F	T



$$\underline{A \vee \neg C \vee \neg B} \neq$$

4)  $x < y$  を 自然数  $N$  上の 大小関係 を 表す 述語

a) 「任意の  $x$  に対し、それより大きい  $y$  が 存在する。」

$$\cancel{\forall x \exists y (x < y)}$$

$$\forall x \in N, \exists y (x < y)$$

b) 述語論理式

$$\neg \forall x \forall y \{ \neg (x < y) \Rightarrow (y < x) \} \in N \text{ の 真偽を 理由と共に 説べよ。}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y \{ \neg (x < y) \vee (y < x) \} \Leftrightarrow \forall x \forall y \{ (x < y) \vee (y < x) \}$$

偽：  $x = y$  のとき、  $x < y$ ,  $y < x$  の どちらも 満たさない。

c) 冠頭標準形

$$\neg \forall x \forall y \{ \neg (x < y) \Rightarrow (y < x) \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \{ \neg (x < y) \Rightarrow (y < x) \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z \{ \neg (x < y) \Rightarrow (y < z) \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z \{ \neg (x < y) \vee (y < z) \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z \{ \neg (x < y) \wedge (\neg (y < z)) \}$$

H18-7

$$1) b = [13, 9, 6, 1, 4]$$

sort1(b, 5)

a) swapの1回目の呼び出しから戻ったとき。

$$(i=0, j=4) \quad (i=0, j=3) \quad \text{swap呼び出し}$$

$$a[1], a[3] \text{を比較} \Rightarrow a[3], a[2] \quad b = [13, 9, 1, 6, 4]$$

b) sort1(b, 5) が3回戻ってきたとき。

$$b = [1, 4, 6, 9, 13]$$

c) compの呼び出し回数

$$(i=0, j=4 \rightarrow 1) \quad 1 \text{回} \quad (i=1, j=4 \rightarrow 2) \quad 3 \text{回} \quad (i=2, j=4 \rightarrow 3) \quad 2 \text{回} \quad (i=3, j=4) \quad 1 \text{回}$$

10回

2) 要素数nの配列の場合、compの呼び出し回数はいくつなるか。

$$(i=0, j=n-1 \sim 1) \quad \dots \quad (i=n-2, j=n-1) \quad 1 \text{回}$$

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

3) sort1を逆順に整列を行なう関数

sort1の

if(comp(a[i], a[i-1])) で

↓

if(comp(a[i-1], a[i])) は置き換入。

4)  $c = [9, 8, 5, 1, 2]$  sort2( $c, 5$ )

$v = \underline{\text{partition}}(c, 0, 4)$

~~X~~

$l = 0, r = 4$

$i = -1, j = 4, pv = a[r] = 2$

while( $i < j$ ) {

① while( $\text{comp}(a[i+1], pv))$ ;  $a[0], 2 \rightarrow 0$

② while( $i < j$  &  $\text{comp}(pv, a[j]))$

$i < 3$

$2, a[3]$

1

~~swap~~  $a[0] \leftrightarrow a[3]$

$b = [1, 8, 5, 9, 2]$

①  $a[1], 2 \quad i = 1$

②  $i < 2 \quad 2, a[2] \quad j = 2$

③  $i < 1 \quad j = 1$

~~break~~:

$a[1] \leftrightarrow a[4] \quad b = [1, 2, 5, 9, 8]$

return 1

$v = 1$

sort2-i( $c, 0, 1$ )

sort2-i( $c, 2, 4$ )

$l = 2, r = 4$

~~swap~~  $a[1], 4$   $pv = 8$

①  $i > 3$

$a[1] \leftrightarrow a[4]$

$b = [1, 2, 5, 8, 9]$

$[1, 2, 5, 8, 9]$

return 3

$v = 3$

a) swap 1回目

1, 8, 5, 9, 2

$\rightarrow$  ~~左~~ PVを右へ

イテレータ

$j \rightarrow$  ~~右~~ PVを左へ

イテレータ

$l = 0, r = 0$  return 1

~~l = partition(c, l, r)~~

~~l = 0, r = 1, i = 2, j = 1, i <= 1, j = 1~~

~~pv = 2~~ break.

①

b) swap 3回目

1, 2, 5, 8, 9

c) 2回目: 関数 partition の出力結果

partition( $c, 2, 4$ )

$l = 2, r = 4$

No.

Date

d) comp の呼び出(回数).

$$C = \{9, 8, 5, 1, 2\} \rightarrow \{1, 8, 5, 9, 2\} \rightarrow \{1, 2, 5, 9, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 8, 9\}$$

$$T \begin{matrix} 2-9 \\ 2-1 \end{matrix}$$

$$T \cancel{\begin{matrix} 2-8 \\ 2-5 \end{matrix}}$$

$$T \begin{matrix} 8-5 \\ 8-9 \end{matrix} ?$$

~~7~~

正

6回