

H18-1

1) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式

$$|A| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} (9 - 36) = -1$$

2) $\lambda I - A$ の行列式

$$|\lambda I - A| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 3\lambda - 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3\lambda - 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3\lambda - 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \{ (3\lambda - 1)^3 + 16 - 12(3\lambda - 1) \}$$

$$= \frac{1}{27} (27\lambda^3 - 9\lambda^2 + 3\lambda - 1 + 16 - 36\lambda + 12) = \frac{1}{27} (27\lambda^3 - 9\lambda^2 - 33\lambda + 27)$$

$$= \frac{1}{27} (27\lambda^3 - 3 \cdot 9\lambda^2 + 3 \cdot 3\lambda - 1 + 16 - 36\lambda + 12)$$

$$= \frac{1}{27} (27\lambda^3 - 27\lambda^2 - 27\lambda + 27) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = \underline{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}$$

3) A の固有値

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \therefore \lambda = 1, -1$$

4) 各々の固有値に対して、その固有値に対する固有空間の基底

$\lambda = 1$ のとき

$$(I - A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$(I - A)x = 0$ を満たす $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ について、

$x + y + z = 0$, $y = s$, $z = t$ とおく

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ である。

$\lambda = -1$ のとき.

$$(I-A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $(I-A)x = 0$

よって $x + (-z) = 0$

$y + (-z) = 0$

$z = k$ とおく.

$x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ よって 基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5)

U はユニタリ行列 \dots ~~$U^T U = U U^T = I \Rightarrow U^T = U^{-1}$~~

~~$U U^T = U^T U = I$~~

~~$A^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \bar{A}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$~~

~~$\bar{A}^T A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} E$~~

$\bar{A}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{A}^T A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

6) エルミート行列 $\bar{A}^T = A$

(5) おり A はエルミート行列.

7) $A = BDB^*$ を満たす行列 B と対角行列 D を求めよ. $*$ は随伴行列.

(4) おり.

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\text{よって } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = P^{-1}AP$ において対角化できるが
 BAB^* に変換するため \times .

\Rightarrow 対角化行列を正規直行化を行う.

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2' = P_2 - \langle P_2, z_1 \rangle z_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_3' = P_3 - \langle P_3, z_1 \rangle z_1 - \langle P_3, z_2 \rangle z_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot z_1 - 0 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ex } P = (x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P^T P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ex } P^{-1} = P^T \quad P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

~~$$B = P^T A P$$~~

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A = (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^T$$

$$B = P$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

H18-2

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & (t \geq a) \\ 0 & (t < a) \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$1) \quad H(t) = \begin{cases} 1 & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

 $H(t-a)$ のラプラス変換.

② ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[H(t-a)] = \int_0^{\infty} H(t-a) e^{-st} dt$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_a^{\infty} = \frac{1}{s} e^{-sa}$$

2) $H(t-a)$ を用いて $f(t)$ を表せ.

$$f(t) = t^2 H(t-a)$$

$$3) \quad \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_a^{\infty} t^2 e^{-st} dt = \int_a^{\infty} t^2 \cdot \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]' dt$$

(略)

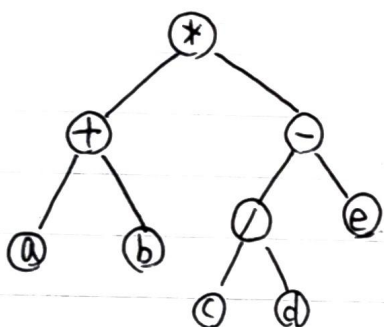
H18-3

$$1) T = \{a, b, c\}, L = \{a^n b^m c b^m a^n \mid n \geq 1, m \geq 0\}$$

$$P = \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow aTa\} \text{ に } 2 \text{ つ付け加える.}$$

$$T \rightarrow c, T \rightarrow bTb$$

$$2) (a+b) * ((c/d) - e)$$



a) 前順序

*, +, a, b, -, /, c, d, e

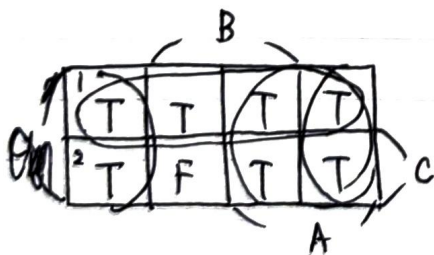
b) 後順序

a, b, +, c, d, /, e, -, *

3) 論理積の論理和に直す.

$$\neg((A \vee B) \wedge (\neg(A \vee \neg C)))$$

A	B	C	$A \vee B$	$\neg C$	$A \vee \neg C$	$\neg(A \vee \neg C)$	$(A \wedge B) \wedge \neg(A \vee \neg C)$	$\neg((A \wedge B) \wedge \neg(A \vee \neg C))$
F	F	F	F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T	F	F	T
T	T	T	T	F	T	F	F	T



$$\underline{A \vee \neg C \vee \neg B}$$

4) $x < y$ を自然数 N 上の大小関係を表す述語

a) 「任意の x に対し、それより大きい y が存在する」

~~$$\forall x \exists y (x < y)$$~~

$$\forall x \in N, \exists y (x < y)$$

b) 述語論理式

$\forall x \forall y \{ \neg (x < y) \Rightarrow (y < x) \}$ の N での真偽を理由とともに述べよ。

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y \{ \neg (x < y) \vee (y < x) \} \Leftrightarrow \forall x \forall y \{ (x < y) \vee (y < x) \}$$

偽: $x = y$ のとき、 $x < y$, $y < x$ のどちらも満たさないため。

c) 冠頭標準形

$$\neg \forall x \forall y \{ \neg (x < y) \Rightarrow (y < x) \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg \forall y \{ \neg (x < y) \Rightarrow (y < x) \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \neg \{ \neg (x < y) \Rightarrow (y < x) \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \neg \{ (x < y) \vee (y < x) \}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \{ \neg (x < y) \wedge \neg (y < x) \}$$

H18-7

1) $b = [13, 9, 6, 1, 4]$

Sort1($b, 5$)

a) swapの1回目の呼び出しから戻ったとき.

$i=0, j=4$

$i=0, j=3$ swapが起きる

 $a[0], a[3]$ を比較

$\Rightarrow a[0], a[3] \quad b = [13, 9, 1, 6, 4]$

b) Sort1($b, 5$)から返ってきたとき.

$b = [1, 4, 6, 9, 13]$

c) compの呼び出し回数

$i=0, j=4 \rightarrow 1$
1 4回

$i=1, j=4 \rightarrow 2$
3回

$i=2, j=4 \rightarrow 3$
2回

$i=3, j=4$
1回

10回

2) 要素数 n の配列の場合, compの呼び出し回数はどうなるか.

$i=0 \quad j=\underbrace{n-1}_{n-1回} \quad \dots \quad i=n-2 \quad j=n-1$
1回

$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)n = \underline{\underline{\frac{1}{2}n(n-1)}}$

3) Sort1とは逆順に整列を行う関数

Sort1の

$if(comp(a[j], a[j-1]))$

 \downarrow

$if(comp(a[j-1], a[j]))$ に置換える.

4) $c = [9, 8, 5, 1, 2]$ sort2(c, 5)

$v = \text{partition}(c, 0, 4)$

~~*~~

$l = 0, r = 4$

$i = -1, j = 4, pv = a[r] = 2$

while(1) {

① while(comp(a[++i], pv)); $a[0], 2$ $i = 0$

② while($i <--j$ && comp(pv, a[j]));

$0 < 3$ $2, a[3]$
1

~~swap~~ $a[0] \leftrightarrow a[3]$

$b = [1, 8, 5, 9, 2]$

① $a[1], 2$ $i = 1$

② $1 < 2$ $2, a[2]$ $j = 2$

③ $1 < 1$ $j = 1$

break;

$a[1] \leftrightarrow a[4]$ $b = [1, 2, 5, 9, 8]$

return i

$v = 1$

sort2-i(c, 0, 0)

sort2-i(c, 2, 4)

$l = 2, r = 4$

~~pv~~ $c = 1, j = 4$ $pv = 8$

① $c = 3$

$a[3] \leftrightarrow a[4]$

$b = [1, 2, 5, 8, 9]$

return 3

$v = 3$

a) swap 1回目

1, 8, 5, 9, 2

$i \rightarrow$ 始めて pv を超えた

$i = j$ になった

$j \rightarrow$ 始めて pv を超えなかった

$i = j$ になった

b) swap 3回目

1, 2, 5, 8, 9

c) 2回目に関数 partition を呼び出すと

partition(c, 2, 4)

$l = 2, r = 4$

d) compの呼び出し回数.

$$C = \{9, 8, 5, 1, 2\} \rightarrow \{1, 8, 5, 9, 2\} \rightarrow \{1, 2, 5, 9, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 9\}$$

$$T \quad \begin{array}{l} 2-9 \\ 2-1 \end{array}$$

$$T \quad \begin{array}{l} 2-8 \\ 2-5 \end{array}$$



$$T \quad \begin{array}{l} 8-5 \\ 8-9 \end{array} ?$$

~~IE~~

6回