H25-1

Vを任意の有限次元実ベクトル空間とすると.
Vの任意の線形独立なベクトル集合の線形独立なベクトルの集合は有限集合.

線形独立なベクトルの集合 $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \subseteq V$ は. 任意のベクトル
$u \in V - \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ に対して.
$\{u, w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ が線形従属であるとき. Vの極大線形独立なベクトルの集合であるという.

1) 命題: Vの線形独立なベクトル集合の任意の部分集合は. また線形独立なベクトルの集合である.

〈証明〉

Vの線形独立なベクトル集合を $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ とおく.
線形独立であるから.
$a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n$ をみたす. 少なくとも非零である実数
$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は存在しない.
ここで. この部分集合を $\{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ と~~する~~として.
~~仮定に~~. このベクトル集合が線形従属であるとすると.
$b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_kw_k = 0$ となる少なくとも非零である実数.
$b_1, b_2, \cdots, b_k$ が存在する.
しかし.
$b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_kw_k + \cdots + a_nw_n$ ~~をみ~~ $= 0$ とすると.
~~少なく~~ 非零である実数は存在しないというのに反するので.
部分集合は線形独立である.

2) 命題：~~Iz~~ $I, J \subseteq V$ が線形独立なベクトルの集合、
$|I| = |J| + 1$ であるならば、
$J \cup \{u\}$ が線形独立であるような $u \in I - J$ が
存在する。

a) 補題1

$I = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}\}$, $J = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ (線形独立)
任意の $u_j \in I - J$ に対して、$J \cup \{u_j\}$ が線形従属であると
仮定する。

補題1 任意の j, $(1 \leq j \leq n+1)$ に対して、
$u_j = c_{1j} v_1 + c_{2j} v_2 + \cdots + c_{nj} v_n$ となる
実数 c_{ij} $(1 \leq i \leq n)$ が存在する。

〈証明〉

任意の u_j に対して、$J \cup \{u_j\}$ が線形~~独立~~従属 より、

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + a u_j = 0$ となるような、

少なくとも非零の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a$ が存在する。

ここで、$v_1, v_2, \cdots, v_n$ は線形独立なので、

$a \neq 0$ が分かる。

よって

$$u_j = -\frac{a_1}{a} v_1 - \frac{a_2}{a} v_2 - \cdots - \frac{a_n}{a} v_n$$

ここで $-\frac{a_i}{a} = c_{ij}$ $(1 \leq i \leq n)$ とおけば、

$u_j = c_{1j} v_1 + c_{2j} v_2 + \cdots + c_{nj} v_n$ となる。

No.

Date

b) 補題2.

任意の $j\ (1 \leq j \leq n+1)$ $\mathbb{c}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \cdots, c_{nj})$ と定義すると

$\{\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \cdots, \mathbb{c}_{n+1}\}$ は線形従属である.

$d_1\mathbb{c}_1 + d_2\mathbb{c}_2 + \cdots + d_{n+1}\mathbb{c}_{n+1} = 0$ となる 少なくとも1つは非零である.

$d_1, d_2, \cdots, d_{n+1}$ が存在する.

補題2： $I = \{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \cdots, \mathbb{u}_{n+1}\}$ は線形従属

$\mathbb{u}_1 = c_{11}\mathbb{v}_1 + c_{21}\mathbb{v}_2 + \cdots + c_{n1}\mathbb{v}_n$

$\mathbb{u}_2 = c_{12}\mathbb{v}_1 + c_{22}\mathbb{v}_2 + \cdots + c_{n2}\mathbb{v}_n$

$\vdots$

$\mathbb{u}_{n+1} = c_{1,n+1}\mathbb{v}_1 + c_{2,n+1}\mathbb{v}_2 + \cdots + c_{n,n+1}\mathbb{v}_n$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{u}_1 \\ \mathbb{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{u}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ c_{1n+1} & \cdots & & c_{nn+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1 \\ \mathbb{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{u}_1 \\ \mathbb{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{c}_1 \\ \mathbb{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{c}_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1 \\ \mathbb{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{v}_n \end{pmatrix}$$

$d_1\mathbb{c}_1 + d_2\mathbb{c}_2 + \cdots + d_{n+1}\mathbb{c}_{n+1} = 0$ において,

$d_k \neq 0$ とすると.

$$d_1\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + d_{n+1}\begin{pmatrix} c_{1n+1} \\ c_{2n+1} \\ \vdots \\ c_{nn+1} \end{pmatrix} = 0$$

ここで 一行目について.

$$d_1c_{11} + d_2c_{12} + \cdots + d_kc_{1k} + \cdots + d_{n+1}c_{1n+1} = 0$$

$$c_{1k} = -\frac{d_1}{d_k}c_{11} - \frac{d_2}{d_k}c_{12} - \cdots - \frac{d_{n+1}}{d}c_{1n+1}$$

よって 第i行目について.

$$c_{ik} = -\frac{d_1}{d_k}c_{i1} - \frac{d_2}{d_k}c_{i2} - \cdots - \frac{d_{n+1}}{d}c_{in+1} \cdots ①$$ が成り立つ.

$\mathbb{u}_k = c_{1k}\mathbb{v}_1 + c_{2k}\mathbb{v}_2 + \cdots + c_{nk}\mathbb{v}_n$ に対して ①を代入すると.

$u_t = c_{1t} v_1 + c_{2t} v_2 + \cdots + c_{nt} v_n$

$$= \left(-\frac{d_1}{d_t}c_{11} - \frac{d_2}{d_t}c_{12} - \cdots - \frac{d_{n+1}}{d_t}c_{1\,n+1}\right)v_1 + \cdots + \left(-\frac{d_1}{d_t}c_{n1} - \frac{d_2}{d_t}c_{n2} - \cdots - \frac{d_{n+1}}{d_t}c_{n,n+1}\right)v_n$$

$$= -\frac{d_1}{d_t}(c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \cdots + c_{n1}v_n) - \cdots - \frac{d_{n+1}}{d_t}(c_{1\,n+1}v_1 + c_{2\,n+1}v_2 + \cdots + c_{n,n+1}v_n)$$

$$= -\frac{d_1}{d_t}u_1 - \frac{d_2}{d_t}u_2 - \cdots - \frac{d_{n+1}}{d_t}u_{n+1}$$ （右辺に u_t の項は無い）

~~$\frac{d_1}{d_t}, -\frac{d_2}{d_t}, \ldots, -\frac{d_{n+1}}{d_t}$ のいずれかは非零なので、$\{u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\}$ は線形従属.~~

~~d_{n+1}~~ d_t も 0 より線形従属.

3） X と Y が V の極大線形独立なベクトルの集合.

$|X| = |Y|$ を 1), 2) を用いて示せ.

X と Y が線形独立より

$|X| = |Y| + 1$ が成り立つならば、

$Y \cup \{x\}$ が線形独立であるような $x \in V$ が存在するが、

Y が極大線形独立なベクトルの集合であることに反する.

$|X| = |Y| + 2$ の場合においても同様

また $|Y| = |X| + 1$ の場合も同様に示せるため

$|X| = |Y|$ である.

No.

Date

H25-2

x_1 と x_2 を実数値をとる確率変数. 互いに独立.

$n=(1,2)$ に対して. 確率密度関数 $p_n(x_n)$ を

$$p_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u_n}} \exp\left[-\frac{(x_n-m_n)^2}{2u_n}\right]$$

1) $\mu_{1,2}$ を求めよ.

$$\mu_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1-m_1)(x_2-m_2)\, p_1(x_1)\, p_2(x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x_2-m_2) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x_1-m_1) p_1(x_1)\, dx_1}_{①} \, dx_2$$

$$① = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_1(x_1) dx_1 - m_1 \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) dx_1$$

$$= E[x_1] - m_1 = m_1 - m_1 = 0$$

よって $\underline{\mu_{1,2} = 0}$ //

2) $\mu_{1,1}$

$$\mu_{1,1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1-m_1)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi u_n}} \exp\left[-\frac{(x_n-m_n)^2}{2u_n}\right] = V[x_1]$$

$$= \sigma_1^2 = \underline{u_1}$$ //

~~$x_n - m_n = t$　$x_1 - m_1 = t$ とおくと~~
~~$dx_1 = dt$~~

$$\cancel{\mu_{1,1} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi u_1}} \exp\left[-\frac{t^2}{2u_1}\right] dt}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{2\pi u_1}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left[-\frac{t^2}{2u_1}\right] dt}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left[-\frac{t^2}{2u_1}\right] dt$$

~~$\frac{t}{\sqrt{2u_1}} = s$ とおくと $dt = \sqrt{2u_1} ds$~~

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cancel{2u_1 s^2 \exp\left[-\frac{s^2}{2}\right.}$$

$$= \underline{u_1}$$ //

$\frac{t}{\sqrt{u_1}} = s$　$dt = \sqrt{u_1} ds$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1}{\sqrt{2\pi u_1}} s^2 \exp\left[-\frac{s^2}{2}\right] \sqrt{u_1}\, ds$$

$$= \sqrt{u_1 u_1} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \exp\left[-\frac{s^2}{2}\right] ds}$$

$$\left(e^{-\frac{s^2}{2}}\right)'$$

$$= e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot \left(\frac{s^2}{2}\right)'$$

$$= -s e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -s\left(e^{-\frac{s^2}{2}}\right)' = \left[-s e^{-\frac{s^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

$$= \sqrt{2\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{u_1}\sqrt{2\pi}$$

No.

Date

3) 式(2.4) $y = a_1x_1 + a_2x_2$ 　a_1とa_2は同時に0にならない。
期待値mと分散v.

$$E[y] = E[a_1x_1 + a_2x_2] = a_1E[x_1] + a_2E[x_2] = \underline{a_1m_1 + a_2m_2}$$

$$V[y] = V[a_1x_1 + a_2x_2] = a_1^2V[x_1] + a_2^2V[x_2] = \underline{a_1^2v_1 + a_2^2v_2}$$

4) $p_n(x_n)$のフーリエ変換 $\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_n)\exp(-j\omega x_n)\,dx_n$ を計算せよ.

$$j^2 = -1,\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi v'}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-jb)^2}{2v'}\right]dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi v_n}}\exp\left[-\frac{(x_n-m_n)^2}{2v_n}\right]\exp(-j\omega x_n)\,dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi v_n}}\exp\left[\underline{-\frac{(x_n-m_n)^2}{2v_n} - j\omega x_n}\right]dx_n$$

(指数部) $= -\dfrac{(x_n-m_n)^2}{2v_n} - j\omega x_n$

$$= -\frac{1}{2v_n}\{(x_n-m_n)^2 + 2j\omega x_n v_n\}$$

$$= -\frac{1}{2v_n}\{x_n^2 - 2m_nx_n + m_n^2 + 2j\omega x_n v_n\}$$

$$= -\frac{1}{2v_n}\{x_n^2 - 2(m_n - j\omega v_n)x_n + m_n^2\}$$

$m_n^2 - \omega^2v_n^2 - 2m_nj\omega v_n$

$$= -\frac{1}{2v_n}\left[\{x_n - (m_n - j\omega v_n)\}^2 + \omega^2v_n^2 + 2m_nj\omega v_n\right]$$

$$= -\frac{1}{2v_n}\{x_n - (m_n - j\omega v_n)\}^2 - \frac{1}{2}(\omega^2v_n + 2m_nj\omega)$$

よって

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi v_n}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\omega^2v_n + 2m_nj\omega)\right]\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2v_n}\{x_n - (m_n - j\omega v_n)\}^2\right]dx_n}$$

①

No.

Date

$x_n - m_n = t$

$dx_n = dt$ $\qquad ① = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t - w\tau_n j)^2}{2\tau_n}\right] dt$

$= \sqrt{2\pi\tau_n}$

よって $\quad \exp\left[-\frac{1}{2}(w^2\tau_n + 2m_n j w)\right] = \underline{\exp\left[-\frac{w}{2}(w\tau_n + 2jm_n)\right]}$ //

~~石?~~

5) $y = a_1x_1 + a_2x_2$ の確率密度関数 $g(y)$ とおく。

$E[e^{\theta x}] = e^{\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2}$

$E[e^{\theta a_1 x_1}] = e^{\mu a_1\theta + \frac{\sigma^2}{2}(a_1\theta)^2} = e^{\mu a_1\theta + \frac{\sigma^2 a_1^2}{2}\theta^2}$

よって

$E[e^{\theta y}] = E[e^{\theta(a_1x_1 + a_2x_2)}] = E[e^{\theta a_1 x_1} \cdot e^{\theta a_2 x_2}] = E[e^{\theta a_1 x_1}]E[e^{\theta a_2 x_2}]$

$= \cancel{e^{\mu a_1}} = e^{a_1\mu_1 + \frac{a_1^2\sigma_1^2}{2}\theta^2} \cdot e^{a_2\mu_2 + \frac{a_2^2\sigma_2^2}{2}\theta^2}$

$= e^{(a_1\mu_1 + a_2\mu_2) + \frac{(a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)}{2}\theta^2}$ より、

yは $N(a_1m_1 + a_2m_2,\ a_1^2\tau_1 + a_2^2\tau_2)$ に従う。 正規分布

$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\exp(-jwy)\,dy = \exp\left[-\frac{w}{2}(w\tau_y + 2jm_y)\right]$

$= \exp\left[-\frac{w}{2}\left\{w(a_1^2\tau_1 + a_2^2\tau_2) + 2j(a_1m_1 + a_2m_2)\right\}\right]$

6) $g(y)$

$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a_1^2\tau_1 + a_2^2\tau_2)}}\exp\left[-\frac{\{y - (a_1m_1 + a_2m_2)\}^2}{2(a_1^2\tau_1 + a_2^2\tau_2)}\right]$ //

No.

Date

H25-3

$\Sigma = \{a, b, c\}$　　$W = (a+b+c)^*$

1) $\{ww^R \mid w \in W\}$ は正規言語でないことを証明。

~~$w = a^n b^n$ とする~~。属する文字列として $w = a^n b^n$ とし、

$w' = ww^R = a^n b^n b^n a^n$ として これが正規言語であると仮定すると、

$w' = xyz$ となるような xyz を選ぶことができ、

この正規言語を認識するDFAのポンピング長をnとする。

① $|y| > 0$

② $|xy| \leq n$

③ $xy^i z \in L$

$|xy| \leq n$ より、$xy = a^m$ $(m \leq n)$

よって $y = a^l$ $(l \leq m)$

よって $xy^i z$ は前半のaの数が後半のaの数より多くなるので、

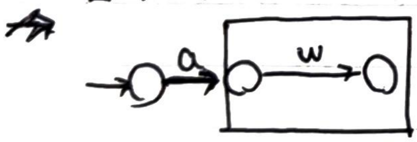
$xy^i z \notin L$

よってLは正規言語でない。

2) Wの任意の集合Uについて、$\{aw \mid w \in U\}$ が正規言語ならば、

Uは正規言語。

$L = \{aw \mid w \in U\}$ として、これが正規言語なので、これを認識するDFAが存在する。



そのDFAは上図のように描けるので、wを受理する部分が存在し、

つまり、wを受理するDFAが存在するので、Uは正規言語。

<メモ>

反復補題を用いて、言語Lの中の特定の文字列が

条件を満たさなければ、証明できる。

3) $\{ww \mid w \in W\}$ は文脈自由言語でないことを証明せよ。

反復補題のnについて、$ww = a^n b^n a^n b^n$ とする。

ここで、$L = \{ww \mid w \in W\}$ とし、Lが文脈自由言語であると仮定すると、

以下を満たすような、$a^n b^n a^n b^n = uvxyz$ を選ぶことができる。

-1 $uv^i x y^i z \in L$ ⇒ $uxz \in L$

-2 $|vxy| \leq n$

-3 $|vy| > 0$

ここで $|vxy| \leq n$ より vxy について以下の選び方が考えられる。

(i) vxyが $a^n b^n a^n b^n$ の前半の $a^n b^n$ に含まれる場合。

~~$a^{n-p} a^p b^q a^{n-q} a^n b^n$ ($p+q = |vxy|$, $uxy = a^p b^q$)~~

$|vy| = m > 0$ とおくと。

$a^{n-p} b^{n-q} a^n b^n$ $(p+q=m)$ は $\notin L$ より仮定に反する。

(ii) vxyが $b^n a^n$ に含まれる。

~~同様~~ $|vy| = m > 0$ とおくと。

$a^n b^{n-p} a^{n-q} b^n$ $(p+q=m)$ $\notin L$

(iii) $a^n b^n$

$a^n b^n a^{n-p} b^{n-q} \notin L$

よって、どのように$uvxyz$を選んでも、ポンピング補題の性質を満たさないので、

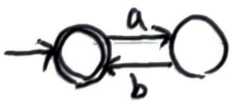
Lは文脈自由言語でない。

4) ~~ある列~~ $L = \{ba, abc\}$ $L^P = \{ab, ba, abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$

Wのある部分集合Vが正規言語であっても、V^Pが文脈自由言語になるとは限らない。

~~例~~ ~~$V = \{abab$~~ $V = \{(ab)^i \mid i = 0, 1, \cdots\}$ とすると、これを認識する

DFAは下のように書けるので、Vは正規言語。



しかし、$v \in V$を並び替えた文字列に $a^n b^n a^n b^n$ が含まれ、

これは3)より文脈自由言語でないので、

~~$a^n b^n a^n b^n \in L^P$~~ V^Pは文脈自由言語になるとは限らない。

No.

Date

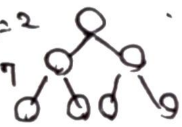
H25-7

1) b[0…n-1] をヒープ配列．対応するヒープ木をTとする．

a) Tの高さをhとするとき，nの最大値をhで表せ．

h=1 →3

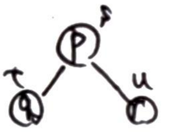
h=2 7



h=3 15

最大の $n = 2^{h+1} - 1$ //

b)



$t = 2s+1$

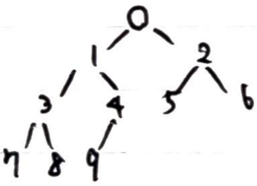
$u = 2s+2$ //

c) b[0…n-1] における n個の要素が相異なる値を持つ．

b[v]…最大値，b[w]…最小値

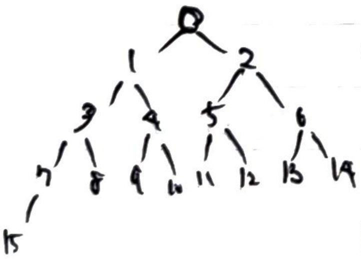
$v = 0$ //

最小値の範囲



n=10

5~9 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \le w \le n-1$ //



n=14

7~13

n=15

7~14

n=16

2) 最大の要素を取り出し、それを除いた配列をヒープ配列として構成

a) [ア], [イ], [ウ]

```
void swap(int a[], int i, int j){}
    ↳ a[i] ⇆ a[j]

void funcI(int a[], int i, int j){
    int k;          2i+1
    while((k=[ア]) <= j){
        if(k<j && [イ]){
            k++;
        }
        if( a[i] >= a[k]){
            break;
        }
        swap(a,i,k);
        [ウ]  i=k;
    }
}
```

a[0]〜a[8]

funcI(a,0,8)

i=0, j=8

swap(a,0,1)

~~a[2*i+1] < a[2*i~~

a[k] < a[k+1]

[ア]: 2*i+1

[イ]: a[k]<a[k+1]

[ウ]: i=k

b) func2 [エ],[オ],[カ]   要素数

```
void func2(int a[], int m){
    int i;     i=m/2-1   i≥0
    for([エ];[オ];i--){
        funcI(a,i,[カ]);
    }                ~~m~~
}                    m-1
                     最後のインデックス
```

a[0]〜a[m-1]をヒープ化.

$\frac{m}{2}-1$

No.

Date

c) func3 ヒープソート

```
void func3 (int a[], int m) {
    キ ; func2(a, m);     ~~swap(a, 0, m-1);~~
    while( m > 1 ) {
        ク ; swap(a, 0, m-1);
        func1 (a, ケ , m-2);
        m--;
    }
}
```

キ : func2 (a, m)

ク : swap(a, 0, m-1)

ケ : 0