H26-I

$f(x)$を閉区間I上の関数、I上の関数列$\{f_n(x)\mid n=1,2,\cdots\}$が
I上で$f(x)$に各点収束するとは、
任意の$x\in I$に対して$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$を満たすことである。

一方、I上の関数列$\{f_n(x)\mid n=1,2,\cdots\}$が$I$上で$f(x)$に一様収束するとは、

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$$

$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$とは、$\{|f_n(x)-f(x)| \mid x\in I\}$の上限。

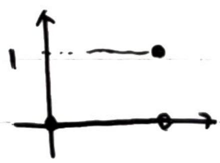
1) $f(x)$に一様収束
任意の$\varepsilon>0$に対して、あるn_0が存在して、$n_0\leq n$を満たす
任意のnに対して、任意の$x\in I$において、

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

が成り立つ。

2) $[0,1]$上の関数$g_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$を$g_n(x)=x^{n-1}$とする。
$\{g_n(x)\mid n=1,2,\cdots\}$
a) この関数列は$[0,1]$上で$g(x)$に各点収束する。

$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	x	x^2



$0\leq x<1$のとき　$x^{n-1}\xrightarrow{n\to\infty}0$
$x=1$　$x^{n-1}\xrightarrow{n\to\infty}1$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

b) 一様収束するか否か。

$x = 2^{-\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}} < 1 \quad (n > 2)$

$|f_n(x) - f(x)| = |x^{n-1} - 0| = |x^{n-1}| = |(2^{-\frac{1}{n-1}})^{n-1}| = \frac{1}{2}$

よって、$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$ となるので、

一様収束しない。

各点収束… 各点に対して $n \to \infty$ で値が一致するかどうか。

収束のスピードは、xの値によって変わるかも知れない。

一様収束… 同じスピードで収束。

<GPT>

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ とする。そして $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ と~~ならない~~なる n_0 が存在しないとする?

$|g_n(x) - g(x)| \cancel{\geq} < \frac{1}{2}$

~~$x = \frac{1}{2}$ のとき~~

~~$g_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{n-1}$ $(\frac{1}{2})^{n-1} - 0 < \frac{1}{2}$ を満たす n について~~

~~$n > 2$~~

$x = 1 - \frac{1}{n}$ について

$g_n(x) = (1 - \frac{1}{n})^{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$

$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{e}$ よって。 ×

<別解>

~~$\varepsilon = \varepsilon_0$ とする~~ $0 \leq x < 1$ において。

$|f_n(x) - f(x)| = |x^{n-1}|$ となるが、 ~~ここで $x^{n-1} > \varepsilon$~~

$= x^{n-1} < x^{n_0-1}$

ここで $x^{n_0-1} > \varepsilon$ について解くと、

$(n_0 - 1) \log x > \log \varepsilon$

~~$\log x > \frac{\log \varepsilon}{n_0 - 1}$~~ $\frac{\log \varepsilon}{\log e^{n_0-1}}$ ~~$= \log(\varepsilon - e^{n_0-1})$~~

~~$> \log \varepsilon e^{\frac{1}{n-1}}$~~

$x^{n_0-1} > \varepsilon$ について解くと

$(n_0-1)\log x > \log\varepsilon \Rightarrow \log x > \frac{\log\varepsilon}{n_0-1}$

$x > e^{\frac{\log\varepsilon}{n_0-1}} = (e^{\log\varepsilon})^{\frac{1}{n_0-1}} = \varepsilon^{\frac{1}{n_0-1}}$

よって、$x > \varepsilon^{\frac{1}{n_0-1}}$ を取ることで、$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ を満たさないので、
一様収束でない。

3) $[0,+\infty)$

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}x & (0\le x<n) \\ \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}x & (n\le x<2n) \\ 0 & (2n\le x) \end{cases}$$

a) この関数列は，$[0,+\infty)$ で $h(x)$ に各点収束.

~~(i) $0\le x<n$ のとき~~

$\cancel{h_n(x) = \frac{1}{n^2}x < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0}$

~~(ii) $n\le x<2n$ のとき~~

$\cancel{h_n(x) = \frac{2}{n}-\frac{x}{n^2} = \frac{2n-x}{n^2} \le \frac{2n-n}{n^2}}$

$\cancel{h_n(0) = \frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{n^2}x}$

(i) $0\le x<n$

$h_n(x)=\frac{1}{n^2}x \qquad 0\le \frac{1}{n^2}x<\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より、はさみうちの原理によって $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}x=0$

(ii) $n\le x<2n$

$h_n(x)=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}x=\frac{2n-x}{n^2} \qquad 0<\frac{2n-x}{n^2}\le\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}h_n(x)=0$

(iii) $2n\le x$

$h_n(x)=0$

よって $h(x)=0$ に各点収束する。

No.

Date

b) $h(x)$に一様収束するであろうか.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 > 0$ のとき; ~~$n_0 \leq n$~~ $n_0 \leq n \to |h_n(x) - h(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [0, +\infty))$

が成り立つことを示せばよい.

$|h_n(x) - h(x)| = |h_n(x) - 0| = |h_n(x)|$

(i) $0 \leq x < n$

$h_n(x) = \frac{1}{n^2}x < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ $\qquad \frac{1}{n_0} = \varepsilon$ と n_0を取れば;

全ての$\varepsilon, x \in [0, n)$ について. $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$ が成り立つ.

(ii) $n \leq x < 2n$

$$h_n(x) = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}x \leq \frac{2n-n}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$$

$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ と n_0を取れば.

全てのε, $x \in [n, 2n)$ について. $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$

(iii)

$h_n(x) = 0$ より $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ と n_0を取れば.

全てのε, $x \in [2n, \infty)$

よって $\forall x \in [0, +\infty)$ において ~~$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ と n_0 を取ることで~~.

$\forall \varepsilon > 0$ $\qquad \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ と n_0を取れば;

$|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$ となるので.

$h_n(x)$は $h(x)$に 一様収束する.

c) $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x)dx$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(\lim_{M \to +\infty} \int_0^M h_n(x)dx\right) = \lim_{n \to \infty} \lim_{M \to +\infty}\left(\int_0^n \frac{1}{n^2}x\,dx + \int_n^{2n} \frac{2n-x}{n^2}\,dx\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{M \to \infty}\left(\left[\frac{1}{2n^2}x^2\right]_0^n + \left[\frac{2}{n}x - \frac{1}{2n^2}x^2\right]_n^{2n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = 1$$

No.
Date . .

4) J [0, 1] $\{f_n(x) \mid n=1,2,\cdots\}$が、$f(x)$に一様収束するならば、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$ を示せ。

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 f_n(x)-f(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

$f_n(x)$が一様収束するので、

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0>0,\ \forall n\ge n_0,\ \forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

~~よって $n\to\infty$のとき~~

$$\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx < \int_0^1 \varepsilon\,dx = \varepsilon$$

すなわち、

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)dx$$

5) $[0, +\infty)$ $f_n(x)$が$f(x)$に一様収束。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

3)より、

(左辺) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} h_n(x)dx = 1$

(右辺) $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0$

より、反例となる。

No.

Date

H26-3

どの2辺もその端点以外では交わらない。

1) $|V(G)| \geq 3$ $|E(G)| \leq 3 \cdot |V(G)| - 6$

$|V(G_4)| = 4$ 点
$|E(G_4)| = 6$ 辺
$|F(G_4)| = 4$ 面

平面グラフGにおいてオイラーの公式
$|F(G)| - |E(G)| + |V(G)| = 2$

面fと接する辺eのペア(f,e)の個数p.
各辺は2つの面に接する.
$\rightarrow 2|E(G)| = p$
各面には少なくとも3つの辺が接する.
$3|F(G)| \leq p$
$3|F(G)| = 3 \cdot (|E(G)| - |V(G)| + 2) \leq 2 \cdot |E(G)|$

$\Rightarrow E(G) \leq 3V(G) - 6$

2) K_5は平面的グラフでない

$|V(G_5)| = 5$
$|E(G_5)| = {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
$E(G_5) \leq 3 V(G_5) - 6$
が成り立たないので ×

3) 頂点vにつながる辺の個数を $\deg(v)$
1つの辺は2つの頂点をつないでいるので.
各頂点に対して、つながる辺の個数の総和をとると
1つの辺を2回カウントするから. 辺の数の2倍に等しい.

No.

Date

4) $|V(G)| \geq 3$ 5以下の頂点が存在.

全て6以上と仮定.

次数の合計 N とおくと.

$N \geq 6|V(G)|$

$N = 2|E(G)|$

$2|E(G)| \geq 6|V(G)|$

$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ に反する