No.

Date

H20-1

$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times m}$ の固有値 $\lambda_k\in\mathbb{C}$ $(k=1,2,\cdots,m)$ はすべて相異なり、
$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_m|$ を満たしている。
λ_k に対応する固有ベクトルを $w_k\in\mathbb{C}^m$ で表す。

1) a) $w_1,w_2,\cdots,w_m$ は ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ で一次独立。

~~$A\lambda_1=Aw_1$~~

$Aw_i=\lambda_i w_i$ が成り立つ。

ここで $w_1,w_2,\cdots,w_m$ が一次従属であると仮定すると、

$c_1w_1+c_2w_2+\cdots+\cancel{\ }+c_mw_m=0$

に対して、少なくとも一つは0でない $c_1,\cdots,c_m$ が存在する。

$(A-\overset{\lambda_iE}{\cancel{E\lambda_i}})w_i=0$ より、

$(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)\cdots(A-\lambda_mE)(c_1w_1+c_2w_2+\cdots+c_mw_m)$

$=(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E)\cdots(A-\lambda_mE)(c_1w_1)$

$=0$

よって、 $c_1=0$ 　同様に $c_2,c_3\cdots=0$ が示せるので、
$w_1,w_2,\cdots,w_m$ は一次独立である。

b) 固有値 λ_1 は実数となることを示せ。

~~$A\lambda_1$~~ 　$Aw_1=\lambda_1w_1$ が成り立つ。

$\overline{Aw_1}=\overline{\lambda_1w_1}$ 　ここで、

$\overline{Aw_1}=A\overline{w_1}$, $\overline{\lambda_1w_1}=\overline{\lambda_1}\,\overline{w_1}$

つまり、

$A\overline{w_1}=\overline{\lambda_1}\,\overline{w_1}$ が成り立つ。

~~よって固有値~~ $\overline{\lambda_1}$ も固有値になるが、
$|\lambda_1|=|\overline{\lambda_1}|$ より、 $\lambda_1>\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_m$ という条件に反する。

No.
Date . .

よって実数値 λ_1 に対して

$A w_1 = \lambda_1 w_1$ が成り立つ。ここで $w_1 = u + iw$ とおくと。

$(u, w \in \mathbb{R}^m)$

$$\overline{A w_1} = \overline{\lambda_1 w_1}$$

$$A \overline{w_1} = \lambda_1 \overline{w_1}$$

$$A(u - iw) = \lambda_1 (u - iw)$$

$$Au - iAw = \lambda_1 u - i\lambda_1 w$$ ここで実部が等しいので。

$$Au = \lambda_1 u$$

よって実ベクトル u を固有値に持つ。

2) $M = \left\{ \sum_{k=2}^{m} c_k w_k \,\middle|\, c_k \in \mathbb{C} \ (k = 2, 3, \cdots, m) \right\}$

任意の $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus M$ からベクトル列 $x_1, x_2, x_3 \cdots$ を

$$z_n = A^n x_0$$

$$x_n = \frac{z_n}{|z_n|}$$ と定義する。

a) すべての $y \in \mathbb{R}^m \setminus M$ に対して $Ay \in \mathbb{R}^m \setminus M$ となることを示せ。

~~Ay が~~ $Ay \in M$ と仮定する。

$$Ay = \sum_{k=2}^{m} d_k w_k$$ とかける。

$y \in \mathbb{R}^m \setminus M$ より、

$$y = d_1' w_1 + \sum_{k=2}^{m} d_k' w_k$$ とかける。$(d_1' \neq 0)$

$$Ay = A\left(d_1' w_1 + \sum_{k=2}^{m} d_k' w_k\right) = d_1' A w_1 + \sum_{k=2}^{m} d_k' A w_k$$

$$= d_1' \lambda_1 w_1 + \sum_{k=2}^{m} d_k' \lambda_k w_k$$

ここで、$Ay = \sum_{k=2}^{m} d_k w_k$ と比較すると、$d_1' \lambda_1 w_1 = 0 \Rightarrow d_1' \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow d_1' = 0$ となるが、$d_1' \neq 0$ というのに反するので、

$Ay \in \mathbb{R} \setminus M$ である。

No.

Date

$\|\mathbf{x}_n\| > 0$ となることを示せ.

$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 = AA^{n-1}\mathbf{x}_0 = \cdots = AA\cdots A\mathbf{x}_0$

ここで、$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m \setminus M$ より、$A\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m \setminus M$.

これを再帰的に行うと、$\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m \setminus M$

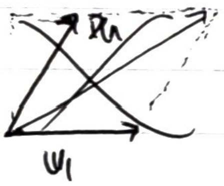
よって任意のnについて $\mathbf{x}_n \neq 0$ である.

$\Rightarrow \|\mathbf{x}_n\| > 0$

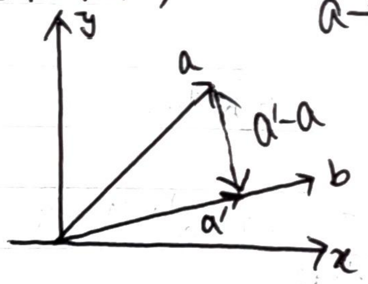
b) u_1 は固有値 λ_1 に対する固有ベクトル.

ベクトル列、$x_1, x_2 \cdots$ に対して $d_n = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \|x_n - \alpha u_1\|$

d_n^2 を x_n と u_1 を用いて、min と α を用いずに表せ.



〈直行射影〉



$a \to a'$ を作る.

$(a'-a)\cdot b = 0$

$a'b - ab = 0$

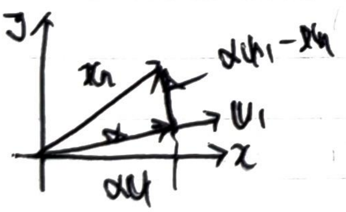
$a'b = ab$

$cb\cdot b = a\cdot b$

$c = \frac{a\cdot b}{b\cdot b}$

$a' = \frac{a\cdot b}{b\cdot b} b$

つまり、



← $(x_n - \alpha u_1)$ と u_1 が直行するときが最小、

$(x_n - \alpha u_1)\cdot u_1 = 0$

$x_n \cdot u_1 - \alpha u_1 \cdot u_1 = 0$

$\alpha = \frac{x_n \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}$

つまり、$d_n = \left\| x_n - \frac{x_n \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 \right\|$

$$d_n^2 = \left(\|x_n\|^2 + \left(\frac{x_n \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right)^2 \|u_1\|^2 - 2\frac{x_n \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}(x_n \cdot u_1) \right)$$

$$= \|x_n\|^2 + \frac{(x_n \cdot u_1)^2}{(u_1 \cdot u_1)} - \frac{2(x_n \cdot u_1)^2}{u_1 \cdot u_1} = \|x_n\|^2 - \frac{(x_n \cdot u_1)}{u_1 \cdot u_1}$$

c) すべての $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus M$ に対して、

$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$

$$A^n u_1 = A^{n-1}\lambda_1 u_1 = \lambda_1 A^{n-2} A u_1 = \lambda_1^2 A \cdots u_1$$

$$x_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_m u_m$$

$$A^n x_0 = A^n(c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m) = c_1 A^n u_1 + \cdots + c_m A^n u_m = c_1 \lambda_1^n u_1 + \cdots + c_m \lambda_m^n u_m$$

λ_1 が一番大きいから。

$$x_n = \frac{c_1\lambda_1^n u_1 + \cdots + c_m \lambda_m^n u_m}{\sqrt{|c_1\lambda_1^n|^2 + \cdots + |c_m\lambda_m^n|^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{c_1\lambda_1^n u_1}{|c_1\lambda_1^n|} = \cancel{\|u_1\|^2} = \frac{u_1}{|u_1|}$$

$$d_n = \sqrt{\|x_n\|^2 - \frac{(x_n\cdot u_1)^2}{\|u_1\|^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\|x_n\|^2 - \frac{1}{\|u_1\|^2}\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}\cdot u_1\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - 1} = \underline{0}_{/\!/} \quad ?$$

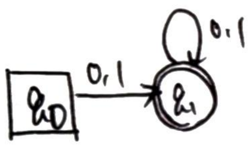
No.

Date

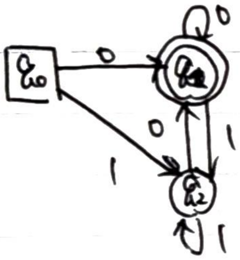
H20-3

1) $\Sigma = \{0, 1\}$, DFA,

a) 任意の二進数のみを受理



b) 偶数のみを受理



最下位ビットが0のもののみ受理される.

c) b)で生成した DFA → RG

$\delta(q_0, 0) = q_1$, $\delta(q_0, 1) = q_2$, $\delta(q_1, 0) = q_1$, $\delta(q_1, 1) = q_2$

$\delta(q_2, 0) = q_1$, $\delta(q_2, 1) = q_2$

$q_0 \to 0q_1$　$q_0 \to 1q_2$　$q_1 \to 0q_1$　$q_1 \to 1q_2$　$q_2 \to 0q_1$　$q_2 \to 1q_2$

$q_0 \to 0$　$q_1 \to 0$　$q_2 \to 0$

よって、正規文法 $G = (N, T, P, S)$ とすると.

N(非終端記号) $= \{q_0, q_1, q_2\}$

T(終端 〃) $= \{0, 1\}$

$P = \{q_0 \to 0q_1 \mid 0 \mid 1q_2,\ q_1 \to 0q_1 \mid 0 \mid 1q_2,\ q_2 \to 0q_1 \mid 0 \mid 1q_2\}$

$S = q_0$

d) 3の倍数のみ受理するDFA

q_1 … 余り1

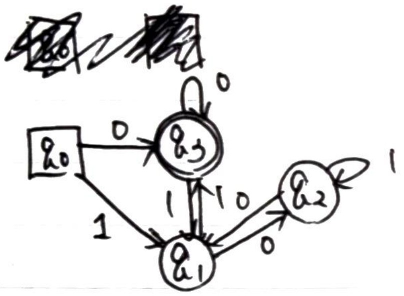
q_2 … 余り2

q_3 … 余り0

q_3 $\xrightarrow{0}$ $3k \cdot 2 = 6k$ … q_3
q_3 $\xrightarrow{1}$ $3k \cdot 2 + 1 = 6k+1$ … q_1

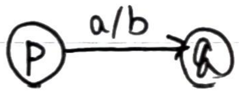
q_1 $\xrightarrow{0}$ $(3k+1) \cdot 2 = 6k+2$ … q_2
q_1 $\xrightarrow{1}$ $(3k+1) \cdot 2 + 1 = 6k+3$ … q_3

q_2 $\xrightarrow{0}$ $(3k+2) \cdot 2 = 6k+4$ … q_1
q_2 $\xrightarrow{1}$ $(3k+2) \cdot 2 + 1 = 6k+5$ … q_2

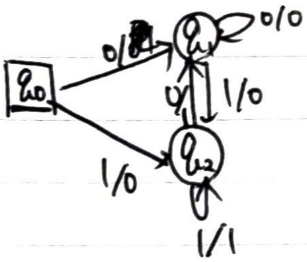


3で割った余りが0のときq_3、
1 〃 q_1
2 〃 q_2 に必ずいる.

2)



a) 入力された二進数を2で割った商を出力.



110 → 011
1101 → 0110 ⇒

2の倍数
$2k \times 2$ ~~+1~~ 2倍
$2k \times 2 + 1$ 2倍

$2k+1$
$2k \times 2 = 4k+2$ 2倍+1
$2k \times 2 + 1$ $4k+3$ 2倍+1

b) 3で割った商を出力.

$3k$

$3k \cdot 2 = 6k$ $\quad q_3, 0$

$3k \cdot 2 + 1 = 6k+1$ $\quad q_1, 0$

$3k+1$

$(3k+1) \cdot 2 = 6k+2,$ $\quad q_2, 0$

$(3k+1) \cdot 2 + 1 = \underbrace{6k+3}_{k+1}$ $\quad q_3, 1$

$3k+2$

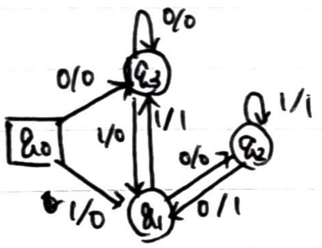
$3k+2 \cdot 2 = 6k+4$ $\quad q_1, 1$

$(3k+2) \cdot 2 + 1 = 6k+5$ $\quad q_2, 1$

0

$0 \cdot 2 = 0$ $\quad q_3, 0$

$0 \cdot 2 + 1 = 1$ $\quad q_1, 0$



No.

Date . .

H20-7

1) ex1

$x = [7, 10, 1, 5]$

$B(0, 1, 3);$

$il = 0,\ m = 1,\ ir = 3,$

$i = 0,\ j = 2$

for ($k = 0$; $k \le 3$; k++) {

④ $temp[0] = x[2] = 1$

$j = 3$

④ $temp[1] = x[3] = 5$

$j = 4$

② $temp[2] = x[0] = 7$

$i = 1$

② $temp[3] = x[1] = 10$

$i = 2$

① if($i > m$) $temp[k] = x[j$++$]$

② else if($j > ir$) $temp[k] = x[i$++$]$

③ else if($x[i] <= x[j]$) $temp[k] = x[i$++$]$

④ else $temp[k] = x[j$++$]$

$x = \{1, 5, 7, 10\}$ //

2) ex2

$x = [9, 3, 4, 2]$

$A(0.3);$

$il = 0,\ ir = 3$

$m = (0+3)/2 = 1;$

$A(0, 1);$

$il = 0,\ ir = 1$

$m = (0+1)/2 = 0$

$A(0, 0);$

$A(1, 1);$

$B(0, 0, 1);$

$il = 0, m = 0, ir = 1$

$i = 0, j = 1$

for ($k = 0$; $k \le 1$; k++) {

① $temp[0] = x[1] = 3$

$j = 2$

② $temp[1] = x[0] = 9$

$i = 1$

$x = [3, 9, 4, 2]$

$A(2, 3)$

$il = 2,\ ir = 3$

$m = (2+3)/2 = 2$

$A(2, 2)$

$A(3, 3)$

$B(2, 2, 3)$

$il = 2, m = 2, ir = 3$

$i = 2, j = 3$

for($k = 2$ ~ $k = 3$)

④ $temp[2] = x[3] = 2$

$j = 4$

① $temp[3] = x[2] = 4$

No.

Date

$x = [3, 9, 2, 4]$

$B(0, 1, 3)$

$A(0,3) \to A(0,1) \to A(0,0) \to A(1,1) \to B(0,0,1) \to A(2,3)$
$\to A(2,2) \to A(3,3) \to B(2,2,3) \to B(0,1,3)$

$B(0,1,3)$ $x = [3, 9, \overset{2,4}{\cancel{4,2}}]$

$il = 0,\ m = 1,\ \cancel{j=3}\ ir = 3$

$i = 0,\ j = 2$

$k = 0 \sim 3$

④ $temp[0] = x[2] = 2$

$j = 3$

④ $temp[1] = x[0] = 3$

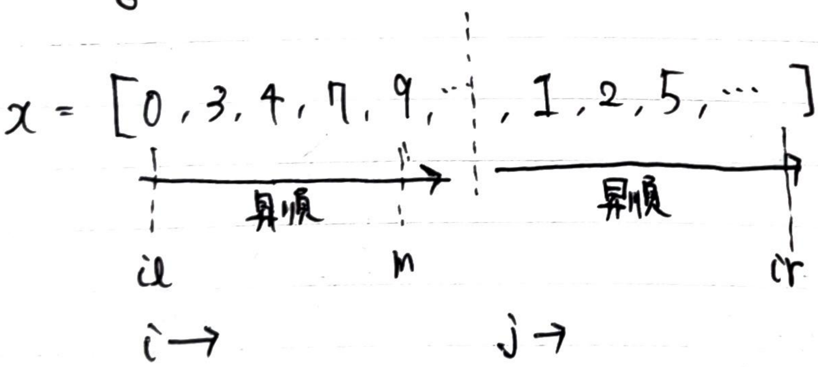
$i = \cancel{2}\ 1$

④ $temp[2] = x[3] = 4$

$j = 4$

② $temp[\overset{}{\cancel{2}}\,3] = x[1] = 9$

$x = [2, 3, 4, 9]$



4) $x[0], x[1], \cdots, x[n-1]$

$A(0, n-1)$ を実行したときの呼び出し回数

a) $n = 2^m$

$A(0,1)$ → $A(0,0)$ $A(1,1)$

$\underline{3}$

~~A(0,2)~~ $A(0.3)$ → $A(0,1)$ $A(2,3)$

② ②

$\underline{7}$

$A(0,7)$ → $A(0,3)$ ⑥ $A(4,7)$ ⑥

~~③ ③ ③ ③~~

~~14~~ 15

$m = \cancel{2}\ 1 \to 3$

$m = 2 \to 7$

$m = 3 \to 15$

$2^{m+1} - 1$

$$\underline{Z(n) = 2^{m+1} - 1} \quad /\!/$$

b) $n = 2 \to 3$

$n = 4 \to 7$

$n = \cancel{4}\ 8 \to 15$

$n = 3 \to 5$

$A(0,2)$

~~A(0,1) A(2,3)~~

$A(0,1)$ ③ $A(2,2)$

$n = 5 \to 9$

$A(0,4)$ → $A(0,2)$ ④ $A(3,4)$ ②

$n = 6 \to 11$

$A(0,5)$ → $A(0,2)$ $A(3,5)$

$n = 2 \to 3$

$n = 3 \to 5$

$n = 4 \to 7$

$n = 5 \to 9$

$n = 6 \to 11$

$n = 7 \to 15$

$$\underline{Z(n) = 2n - 1} \quad /\!/$$

No.

Date

5）再帰呼び出しを用いない関数D

```
void D(int il, int ir){
    int m, i, j, size;
    size=1;
    while( size<=(il-ir)){
        for( i=il, i≤ir; i=i+size*2 ){
            j= i+size*2 -1;
            m=(i+j)/2;
            B(i,m,j);
        }
        size=size*2
    }
}
```

B(0,0,1)

→ B(2,2,3) → B(0,1,3)

~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~9~~

9	3	4	2

il=0　　　ir=3

```
while(size <= 3){
    for(i=0~3){
    <i=0>
        j= i+2-1 = 1
        m= (0+1)/2 = 0
        B(i,m,j)
    <i=2>
        j=2+2-1 = 3
        m= (2+3)/2 = 2
```

```
size=2
for(i=0~3){
    j=0+4-1=3
    m=(0+3)/2=1

i=4 X
```