No.

Date

H24-1

1) $V_1 = \{(a,b,c) \mid a,b,c$ は実数$\}$

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

2) $V_2 = \{(a,b,c) \mid a,b,c$ は実数 かつ $a^2+b^2+c^2 \leq 1\}$

$u = (1,0,0) \in V_2$

$2u = (2,0,0) \notin V_2$

3) $V_3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c$ は実数 かつ $a+b=b+c=0\}$

$\cancel{\{(1,-1,0),\ (0,-1,1)\}}$ $\{(1,-1,1)\}$

4) $V_4 = \{(a,b,c) \mid a,b,c$ は実数 かつ $a+b=b+c=1\}$

$u = (1,0,1) \in V_4$

$2u = (2,0,2) \notin V_4$

5) $V_5 = \{M \mid M$ は 2×2 実行列$\}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

6) $V_6 = \{M \mid M$ は 2×2 実行列 かつ $\mathrm{Tr}\,M = 0\}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

7) $V_7 = \{M \mid M$ は 2×2 実行列 かつ $|M| = 0\}$

$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V_7,\quad v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V_7$

$u + v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin V_7$

8) $V_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \text{は実数, かつ} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$

$b = a$
$c = b$ $\qquad a = b = c \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
$a = c$

9) $V_9 = \{ f(x) \mid f(x)$ は次数が2以下の多項式であり、かつ $f(1) = 0 \}$

$\cancel{(x-1)}(x-$ $\qquad ax^2 + bx + c$

$x = 1 \mid \ a + b + c = 0 \qquad b = -s$
$c = t$

基 $\ s(x^2 - x) + t(x^2 - 1)$

$\{ x^2 - x, \ x^2 - 1 \}$

10) $V_{10} = \{ f(x) \mid f(x)$ は次数が2以下の多項式 かつ $f(1) = 1 \}$

$u = x^2 \in V_{10} \qquad 2u = 2x^2 \notin V_{10}$

$\cancel{\alpha =}$

No.

Date

H24-2

1) 1次元の確率分布に独立に従う標本

$x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=0$

a) 標本の平均, 分散

$\mu = \frac{1}{3}(1+3+0) = \frac{4}{3}$

$\sigma^2 = \frac{1}{3}(1+9+0) - \cancel{\frac{4}{3}} = \cancel{\frac{10}{3}-\frac{4}{3}}$

$\frac{16}{9} = \frac{10}{3} - \frac{16}{9} = \frac{14}{9}$

b) $y_i = 3x_i + 2$ とおいたときの μ, σ^2

$E[y] = E[3x+2] = 3E[x]+2 = 4+2=6$

$V[y] = V[3x+2] = 9V[x] = 14$

2) 確率変数 X が $[-1,4]$ 上の一様分布に従うとき、

確率変数 $Y=3X+2$ の期待値, 分散, 確率密度関数。

$\cancel{f(x)} = \int_{-1}^{4} p_0\,dx = [p_0 x]_{-1}^{4} = 5p_0 = 1$

$p_0 = \frac{1}{5}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & (-1 \le x \le 4) \\ 0 & (x<-1,\ 4<x) \end{cases}$

$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{4} x p_0\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^2\right]_{-1}^{4} = \frac{1}{10}(16-1) = \frac{3}{2}$

$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{4} x^2 p_0\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}x^3\right]_{-1}^{4} = \frac{1}{15}(64+1) = \frac{13}{3}$

$\frac{68}{15}$

$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2$

$= \frac{13}{3} - \frac{9}{4} = \cancel{\frac{44-27}{12}} = \cancel{\frac{17}{12}}$

$= \frac{52-27}{12} = \frac{25}{12}$

No.
Date

よって $Y=3X+2$ の変換によって

$$E[Y]=E[3X+2]=3E[X]+2$$
$$=3\cdot\frac{3}{2}+2=\frac{9}{2}+2=\underline{\frac{13}{2}}$$

$$V[Y]=V[3X+2]=9V[X]=9\cdot\frac{25}{12}=\underline{\frac{75}{4}}$$

確率密度関数 $f(y)$ は、

$-1\le x\le 4 \rightarrow -1\le y\le 14$

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{15} & (-1\le y\le 14)\\ 0 & (y<-1,\ 14<y)\end{cases}$$

3) 2次元の同時確率分布に独立に従う標本

$t_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $t_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $t_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を考える.

a). t_1, t_2, t_3 の平均，分散共分散行列.

$$\bar{t}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+1+0\\0+2+0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

分散共分散行列

$$\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \sigma_{XY}\\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2\end{pmatrix} \qquad S=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(t_i-\bar{t})(t_i-\bar{t})^T$$

$$(t_1-\bar{t})=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} \quad (t_2-\bar{t})=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix},\ (t_3-\bar{t})=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\ \cancel{=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}}\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\-\frac{2}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{4}{9}\\\frac{4}{9} & \frac{16}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{4}{9}\\\frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{6}{9} & \frac{6}{9}\\\frac{6}{9} & \frac{24}{9}\end{pmatrix}\times\frac{1}{3}=\underline{\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\\frac{2}{9} & \frac{8}{9}\end{pmatrix}}$$

b) $u_i = \begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix} t_i + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

u_1, u_2, u_3 の平均，分散共分散行列

$$\bar{u} = \begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\bar{t} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cancel{\times \frac{1}{3}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cancel{\frac{1}{3}}\left(\begin{pmatrix}\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\\\frac{6}{3}+\frac{8}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}3\\\frac{23}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\\frac{23}{3}\end{pmatrix} \text{//}$$

$$S_U = A S_t A^T$$

$$= \begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{8}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{4}{9}+\frac{2}{9} & \frac{4}{9}+\frac{8}{9}\\\frac{6}{9}+\frac{8}{9} & \frac{6}{9}+\frac{32}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{6}{9}&\frac{12}{9}\\\frac{14}{9}&\frac{38}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&\cancel{1}3\\\cancel{3}1&4\end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix}\frac{12}{9}+\frac{36}{9} & \frac{6}{9}+\frac{48}{9}\\\frac{24}{9}+\frac{114}{9} & \frac{14}{9}+\frac{342}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{48}{9}&\frac{54}{9}\\\frac{138}{9}&\frac{356}{9}\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{12}{9}+\frac{12}{9} & \frac{18}{9}+\frac{48}{9}\\\frac{28}{9}+\frac{38}{9} & \frac{42}{9}+\frac{152}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{24}{9}&\frac{66}{9}\\\frac{66}{9}&\frac{194}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{3}&\frac{22}{3}\\\frac{22}{3}&\frac{194}{9}\end{pmatrix} \text{//}$$

No.

Date . .

4) 確率変数Tが 2次元標準正規分布に従うとき、

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

の期待値，分散共分散行列.

$$\mu_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} //$$

$$S_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 共分散は0.

$$S_u = A S_t A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1 & 6+4 \\ 6+4 & 9+16 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}} //$$

同時確率密度関数

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} t^T t}$$

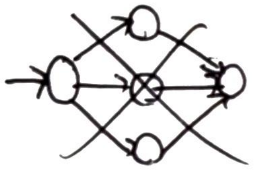
$$f_U(u) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(S_U)}} e^{-\frac{1}{2}(u-\mu_u)^T \cancel{\Sigma_u} S_U^{-1} (u-\mu_u)} \quad ?$$

H24-3

開始状態を含めた5状態DFA

命題1：長さ3の入力列を1つ以上受理した場合、
受理言語は無限集合.

偽



はaaaのみ受理するDFAである.

命題2： 4 〃

偽

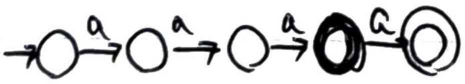
はaaaaのみを受理するDFA.

命題3 5 〃

真 上のように、直列につないだ場合でも4つの記号しか入力できないので
どこかでループしなければならない。よってそのループを何周もすることができ、
受理言語は無限集合.

命題4 長さ3以下の入力列を全く受理しない場合、
受理言語は空集合である.

偽



は 3以下の文字列を受理しないが、
aaaaは受理する.

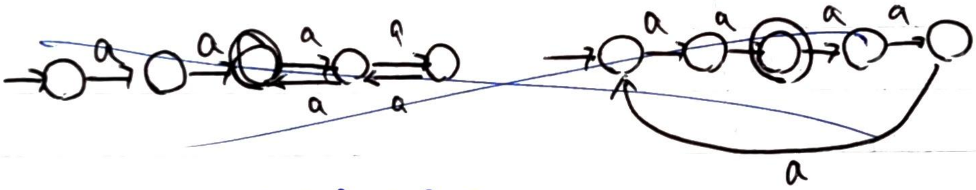
命題5 〃 4 〃

真 4以下で全く受理しないため、
受理する状態がないことになる.

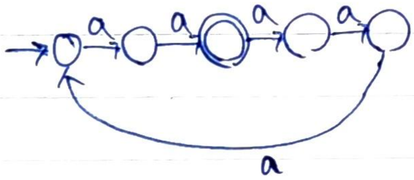
全ての状態は長くとも
4つの記号列で到達可能
なので、4以下を受理しないと
受理状態がないことになる.

命題6 真

命題7 長さ2の入力列を1つ以上受理し、長さ3以上10以下を全く受理しない場合、受理言語は有限集合。



偽



はaaを受理し、3〜6を受理しないが受理言語は無限集合。

命題8 長さ2と10以上は有限集合

真 10以上は5状態では表現できない（3〜9は受理しないという条件下で）
そのため、長さ2のみを受理する

No.

Date

H24-7

二分木

search … 値の探索

insert … 二分探索木の逐次構築.

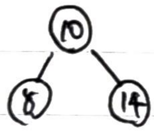
1) [A], [B], [C]

```
node* search (node *ptr, int key) {
    if(ptr == NULL) return (NULL);
    if(key < ptr->key) return (search (ptr->left, key));
    else if (key == ptr->key) return (ptr);
    else return [A]
}
```

key > ptr->key

[A] search(ptr->right, key)

20



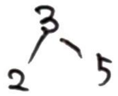
右を探す.

```
node* insert ( node *root , int key ) {
    node *new, *ptr;
    while( ptr != NULL) {
        if(key < ptr->key) {
```

~~ptr->left = new; break;~~

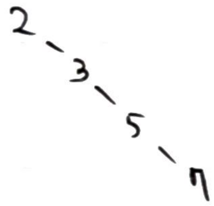
```
        } <left が NULL 追加 break>
[B]     ptr = ptr->left;
    } else
        < right が NULL 追加 break>
[C]     ptr = ptr->right;
    }
}
return (root);
}
```

2) 3個のデータ. 3,5,2

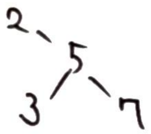


$h(3,5,2) = 2$

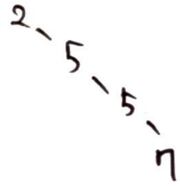
$h(2,3,5,7) = 4$



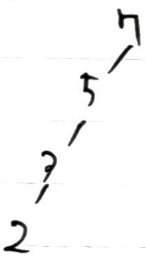
$h(2,5,3,7) = 3$



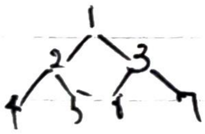
$h(2,5,5,7) = 4$



$h(7,5,3,2) = 4$



3) 相異なる n個のデータで構築される二分探索木の高さの最小値.



$\lceil \log_2 n \rceil =$

1

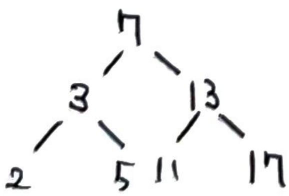
$\lceil \log_2 1 \rceil = \lceil 0 \rceil = 1$

$\lceil \log_2 3 \rceil = \lceil 1.\cdots \rceil = 2$

$\cancel{h = \lceil \log_2 n \rceil}$

$h = \lfloor \log_2(n) + 1 \rfloor$

4) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17



$h(7,3,13,2,5,11,17)$

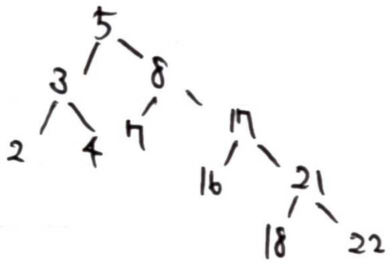
$= 3$

No.

Date

5) 相異なるn個を入力。どのような入力順にすればよいか。
n個を昇順にソートする。
中間値を最初に入力し、左と右に配列を分けて考える。
分けた配列の中間値をまた入力し、再び分ける動作を再帰的に行う。

6) (5, 8, 17, 3, 7, 21, 16, 2, 22, 4, 18)



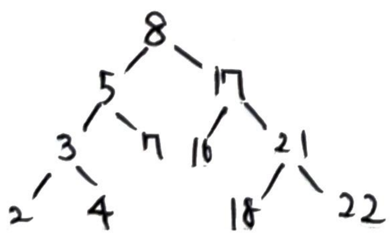
7) 6)で構築された二分探索木に対して。
データがランダムにsearchされるとき、searchの呼び出し回数の期待値。

$$\left.\begin{aligned} 1\times1 &= 1\\ 2\times2 &= 4\\ 3\times4 &= 12\\ 4\times2 &= 8\\ 5\times2 &= 10 \end{aligned}\right\} 35$$

$\frac{35}{11} \fallingdotseq 3.2$

$11 \overline{)35}$ = 3.18
33
20
11
90

) ②回転して平らに。
5を中心に左回転



$1 = 1$
$2\times2 = 4$
$3\times4 = 12$
$4\times4 = 16$

$\frac{33}{11} = 3$

期待値は小さく、平均的な探索効率が上がった。