中国科学技术大学

习题课讲义

甚加误:

第3章综合习题

15 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

错误做法:先求 $\lim\limits_{n\to\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} + o\left(\frac{i}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} o\left(\frac{1}{2}\right)$$

原因: $\sum\limits_{i=1}^{n} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \neq o\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\right)$

下面举个 $\sum\limits_{i=1}^{n} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \neq o\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\right)$ 的例子

数 $a_n^m = \begin{cases} 1 & n\leq m \\ 0 & n>m \end{cases}$ (m 表示第 m 个数列)

有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^m}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 0 \Rightarrow a_n^m = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

但 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_n^i = \sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

且 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_n^i = 1 \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$

中国科学技术大学

正确做法：

① 利用 $x-\frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$

② 利用 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}\xi_x^2$

有 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\xi_{\frac{i}{n^2}}^2 \to 0$

第五章

5.1

4. 参考群内讲义

7. (2) 证明 A定理中 B条件是必要的

即证 若不满B条件 A定理不一定成立

这题有 $\int_{-1}^{1} f(x) = 0 = f(0)(1-(-1))$，只需改变 0 的值

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

9. 使用介值定理，但 $\int_a^b g(x) = 0$ 的情况应单独讨论

① $\int_a^b g(x) = 0$ 时

设 $|f(x)| \leq M$

$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x) g(x)\right| \leq M \int_a^b g(x) = 0$

② $\int_a^b g(x) > 0$ 时

设 $\max f(x) = M \quad \min f(x) = m$

中国科学技术大学

$$m \le \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \le M$$

$\Rightarrow$ 介值定理，$\exists f(\xi)$

11，12，13

使用如下两个公式

① $\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right)' = b'(x) f(b(x)) - a'(x) f(a(x))$

② $\left(\int_0^x g(x) f(t)\,dt\right)' = \left(g(x)\cdot \int_0^x f(t)\right)'$

使用时灵活一点

例. $\int_0^{x^2} (x-t)^2 f(t) = x^2 \int_0^{x^2} f(t) - 2x \int_0^{x^2} t f(t) + \int_0^{x^2} t^2 f(t)$

然后求导

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum \frac{1}{\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}} \cdot \frac{1}{n}$

$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

其实看到 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$ 类似情况

（就是数列每一项都和 n 有关，应首先考虑化为积分）

$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \cdots$ 是最常见的分割

中国科学技术大学

21 求导最简便

令 $g(a)=\int_a^{a+T} f - \int_0^T f$

$\begin{cases} g'(a)=0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow g(a)=0$

22

(13) 一个等式熟记

$\arctan(t)+\arctan(\frac{1}{t})=\frac{\pi}{2}$

证: $(\arctan t+\arctan(\frac{1}{t}))'=0$

且 $t\to 0$ 时 原式 $\to\frac{\pi}{2}$

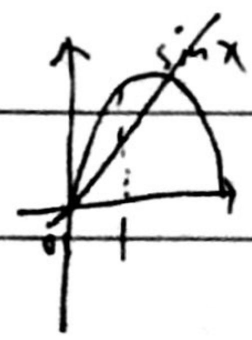
$\int_{-1}^{1} e^{|x|}\arctan e^{x}\,dx$

$=\int_0^1 e^{x}\arctan e^{x}\,dx+\int_0^1 e^{x}\arctan e^{-x}\,dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{x}\,dx$

$=\frac{\pi}{2}(e-1)$

24. 从图上看，希望找到



$g(x^2)<\sin x^2<f(x^2)$

$\Rightarrow \int_0^1 g(x^2)>\frac{1}{6}$, $\int_0^1 f(x)\le\frac{1}{3}$

$f(x^2)=x^2$

$g(x^2)$ 可以找一条割线

例 $\sin x>\frac{1}{2}x$

即 $\sin x>\sin(1)\,x$

使用高阶 Talyor 展开 比较麻烦

中国科学技术大学

27.

(2) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上减，$\alpha \in (0,1)$

证 $\int_0^\alpha f(x)dx \geq \alpha \int_0^1 f(x)dx$

解法1: $\int_0^\alpha f(x)dx - \alpha \int_0^1 f(x)dx$

$= \int_0^\alpha f(x) - \alpha f(x) dx - \alpha \int_\alpha^1 f(x)dx$

$\geq \int_0^\alpha (1-\alpha) f(\alpha) dx - \alpha \int_\alpha^1 f(\alpha)dx$

$= 0$

(我感觉这种方法很妙，但是不是那么容易想到。)

解法2: (一种做积分证明通用的方法)

积分定义: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\|T\|\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i$

若 $f(x)$ 可积，则

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_i^n)\Delta x_i^n$

$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$，$\Delta x_i \xrightarrow{一致} 0$

我们可以随便选自己想要的 ξ_i^n，Δx_i^n

$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\int_0^\alpha f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum f\left(\frac{\alpha i}{n}\right)\frac{\alpha}{n}$

由 $\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{\alpha i}{n}\right)\frac{\alpha}{n} > f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx$

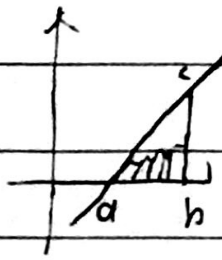
中国科学技术大学

28

由 $|f'(x)| \le M$，去做 $f(x)$ 相关的证明

应立即想到 $|f(x)| \le f(a) + M|x-a|$ 这个式子

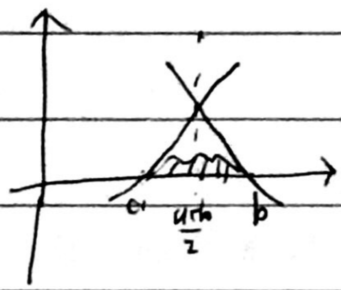
(1) $f(x)$ 为下图中曲线



其实要证就是两个面积关系

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b M(x-a)\,dx$$

(2)



$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| \le \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\,dx$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| \le \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\,dx$$

相加即可

31. 用原函数最简单

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$g(x,y) = F(x+y) - F(x) - F(y)$

$\Rightarrow g(x,y) = g(y,x)$

1101C-08 201412 2500

5.2

4. 用定义

$$w_i' = \sup\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right|$$

$$= \sup\left|\frac{f(x)-f(y)}{f(x)f(y)}\right|$$

$$\le \frac{1}{c^2}\sup|f(x)-f(y)|$$

$$\le \frac{1}{c^2} w_i'$$

$$\Rightarrow \left|\sum w_i' \Delta x_i\right| \le \frac{1}{c^2}\sum w_i \Delta x_i \quad \text{即可}$$

5.4.

1.

(11) 积分内带有 n，优先考虑使用递推公式

(12) $\ln x$ 难以处理，时用 $x=e^t$ 换元

3.

(2)

$\int \frac{1}{x^\alpha}$	0 处	$+\infty$ 处
$\alpha<1$	收敛	发散
$\alpha=1$	发散	发散
$\alpha>1$	发散	收敛

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ 也一样

作用，常用于证明其他积分收敛/发散

$|f(x)|<|g(x)|$ + $\int|g(x)|$ 收敛 $\Rightarrow \int f(x)$ 收敛

$f(x)>|g(x)|$ + $\int|g(x)|$ 发散 $\Rightarrow \int f(x)$ 发散

中国科学技术大学

4. (1) $\int_{-1}^{4}\frac{1}{x^2+x-2}dx$

$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+x-2}dx+\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2+x-2}dx$

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+x-2}dx=\lim\limits_{c\to1}\frac{1}{3}\ln\frac{x+2}{1-x}\Big|_{-1}^{c}=\infty$

$\Rightarrow$ 原积分不存在

错误写法 $\int_{-1}^{4}\frac{1}{x^2+x-2}dx$

$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{4}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}dx$

$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{4}\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{3}\int_{-1}^{4}\frac{1}{x+2}dx$

$\int_{-1}^{4}\frac{1}{x-1}dx$ 不存在

$\Rightarrow\int_{-1}^{4}\frac{1}{x^2+x-2}dx$ 不存在

（但可以写 $\left.\begin{array}{l}\int_{-1}^{4}\frac{1}{x-1}dx \text{ 不存在}\\ \int_{-1}^{4}\frac{1}{x+2}dx \text{ 存在}\end{array}\right\}\Rightarrow\int_{-1}^{4}\frac{1}{x^2+x-2}dx$ 不存在）

原因：见这个例子 $\int_{-\infty}^{\infty}0\,dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x\,dx}_{\text{不存在}}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}-x\,dx}_{\text{不存在}}$

1101C-08 201412·2500