1. P26.

12 (1) × lim 不一定存在.

(2). ×.

14. $\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$.

15 (2) $0 < (n+1)^k - n^k = n^k((1+\frac{1}{n})^k - 1) < n^k((1+\frac{1}{n}) - 1) = n^{k-1}$

(5) $\sqrt[n]{\cos^2 1} \le a_n \le \sqrt[n]{n}$.

16. 记 $a = \max\{a_1, \cdots, a_m\}$

$a \le \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^n} \le \sqrt[n]{m}\, a$,

17 (1) a_n 递减且有下界.

(4). Cauchy 准则.

18. (2). $\begin{cases} ①. (a_{n+1} - a_n) > 0 \\ ②. a_n < 1. \end{cases}$

(3). $a>0$. $a_0 > 0$. $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}) \ge \sqrt{a}$.

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(\frac{a}{a_n} - a_n) \le \frac{1}{2}(\frac{a}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}) = 0$.

5). $a_{n+1} = \sin(a_n) \le a_n$, $a_n \in (0,1]$

19. $0 \le (a - a_n) \le (b_n - a_n)$.

20. 法①. $a_n \searrow$. $a_n > 0 \Rightarrow \lim a_n \ne 0 \Rightarrow \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 = l > 1$. 矛盾.

法②. $\exists N$ 使 $a_{n+1} < l' a_n$, $\forall n > N$ (其中 $l' = \frac{l+1}{2} < 1$).

$\Rightarrow \underline{0 < a_n < l'^{\,n-N-1} a_{N+1}}$, $\forall n > N$.

令 $n \to \infty$.

22. (2) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n-2})^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{n-2})^{-(n-2)}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n-2})^3 = \frac{1}{e}$.

(3). $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1+n}{2+n})^n = \lim \frac{1}{(1-\frac{1}{n+2})^{-(n+2)}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+2})^{-2} = \frac{1}{e}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\Rightarrow \forall M>0$, 取 $M' = \frac{M}{b}$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $|a_n| > M'$, $\forall n > N$.

$\Rightarrow |a_n b_n| > M' \cdot b = \frac{M}{b} \cdot b = M$, $\forall n > N$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

24. $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2 \cdots [\frac{n}{2}] \cdot ([\frac{n}{2}]+1) \cdots n} \geq \sqrt[n]{([\frac{n}{2}]+1)\cdots n}$

$\geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2})\cdots(\frac{n}{2})} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{n}{2}}$

$b_{4k} = 4k\pi \cdot \sin\frac{4k\pi}{2} = 0$. $b_{4k+1} = 4k+1 \to +\infty$.

25. 法①. $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2$.

法②. 若不然, a_n 有界 $\Rightarrow$ a_n 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\Rightarrow a = a + \frac{1}{a}$, 矛盾.

PS3. 1. (1). $0 < a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{\sqrt{1}}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdots \frac{\cancel{\sqrt{2n-1}}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$

(4). 法①. $|a_{n+1} - \alpha| < \lambda |a_n - \alpha|$

法②. a_n 有界. $a_{2k} \nearrow$ $a_{2k+1} \searrow$. 设极限为 α.

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{1+\alpha}$.

3 (2). 均值不等式

4. $\sum \frac{1}{k}$; $\ln(n)$; $\sqrt{n}$.

5. (2). $|a_n - a_m| \leq |A_n - A_m|$.

7. 分两段, 或直接 Stolz.

9. 即 8. 不等式; 上下极限; 定义 / 函数连续性.

① 保持符号.

(1). $\lim_{n\to\infty} a_n > l \Rightarrow \exists N \in N^*$ 使 $a_n > l, \ \forall n > N$.

$\not\Leftarrow$

↳ Example: $a_n = \frac{1}{n}$, $l = 0$.

(2). $\exists N \in N^*, \forall n > N$ ($a_n \geq l$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \geq l$

$\not\Leftarrow$ ↳ Example: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $l = 0$.

↓ 用 $(a_n - b_n)$ 代替 a_n, $l = 0$. ($\lim a_n$, $\lim b_n$ 存在).

$(1)^*$ $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \exists N \in N^*$ 使得 $a_n > b_n, \ \forall n > N$.

$\not\Leftarrow$

$(2)^*$ $\exists N \in N^*$ 使得 $a_n \geq b_n, \forall n > N$ ($\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$

$\not\Leftarrow$

② 切滥用反证法.

一位同学的过程: $a_n \leq a \leq b_n$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$

证明: 利用反证明法. 假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 不成立.

$\Rightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0$. 取 $N = N_0$, $\exists n_0 > N$ 使 $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \Rightarrow$ 取 $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\exists N_0$ 使 $n > N_0$ 时有:

$|a_n - b_n| = b_n - a_n = (b_n - a) + (a - a_n) = |b_n - a| + |a - a_n|$

$< \varepsilon = \varepsilon_0$)

$\Rightarrow$ 矛盾. 故假设 ×

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

这步 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ 使 $|a_n - b_n| < \varepsilon$, $\forall n > N$.

$\Rightarrow |a - a_n| \leq |b_n - a| + |a - a_n| = |a_n - b_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$. 完全可以不用反证.

③ 如何用数学语言

避免"则 bM 也可以取任何正数"一类的表述.

Example: $\lim a_n = \infty$. $|b_n| \geq b > 0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

证明: $\lim a_n = \infty$

$\Rightarrow \forall M > 0$, 取 $M' = \frac{M}{b} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使 $|a_n| > M'$, $\forall n > N$.

$\Rightarrow |a_n b_n| > b \cdot M' = b \cdot \frac{M}{b} = M$, $\forall n > N$

$\Rightarrow \lim a_n b_n = \infty$.

④ 放缩有度.

例 1. $\sqrt[n]{n!}$ 无界.

可以加大放缩力度, 不用做得太麻烦: $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot 2 \cdots [\frac{n}{2}]}_{\text{放成 } 1} \cdot \underbrace{([\frac{n}{2}]+1) \cdots n}_{\text{放成 } (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}}$

$\geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$.

例 2. $\sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{n}$

有的同学下界总取得太紧, 导致证明过程过于冗长.

做题时放缩够用就好

研究上、下界时可以再考虑能不能使界更紧.