1. (习题7.1, 6) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个非负数列满足 $a_{n+1} < a_n + b_n$, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 求证 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

证明: 记 $B_0 = 0$, $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. 由条件, 有

$$a_{n+1} - B_n < a_n - B_{n-1}.$$

这说明数列 $\{a_n - B_{n-1}\}$ 单调递减有下界 $-B$, 因此, 这个数列收敛. 又 $\{B_{n-1}\}$ 收敛, 所以 $\{a_n\}$ 收敛.

2. (习题7.2,10) 递归定义 $[0,1)$ 上的连续可微函数列 $\{f_n\}$ 如下: $f_1 = 1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f'_{n+1}(x) = f_n(x) f_{n+1}(x),\ f_{n+1}(0) = 1.$$

求证: 对每个 $x \in [0,1)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

证明 由条件知,

$$f_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f_n(t)\,dt},\ x \in [0,1). \tag{2}$$

因为 $f_1 = 1$, 所以 $f_2(x) = e^x \geqslant 1 = f_1(x)$. 假设 $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$, 则有

$$f_{n+2}(x) = e^{\int_0^x f_{n+1}(t)\,dt} \geqslant e^{\int_0^x f_n(t)\,dt} = f_{n+1}(x).$$

于是 $\{f_n(x)\}$ 是单调递增的函数列. 又在 $x \in [0,1)$ 有 $f_1 \leqslant \frac{1}{1-x}$. 假设 $f_n(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$, 则

$$f_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f_n(t)\,dt} \leqslant e^{\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt} = \frac{1}{1-x}.$$

这说明 $\{f_n(x)\}$ 有上界 $\frac{1}{1-x}$. 于是对每个 $x \in [0,1)$ $\{f_n(x)\}$ 收敛. 设其极限函数为 $f(x)$. 由于 $\frac{1}{1-t}$ 在 $[0,x]$ 上可积, 根据控制收敛定理知 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上可积, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt. \tag{3}$$

在 (2) 两边取极限, 得

$$f(x) = e^{\int_0^x f(t)\,dt},\ x \in [0,1).$$

此式说明 $f(t)$ 是 $[0,1)$ 上可微函数, 且

$$f'(x) = f^2(x).$$

注意到 $f(0) = 1$. 因而从上面微分方程可得 $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

注　可以不用控制收敛定理, 估计 $f(x)-f_n(x)$ 直接证明它趋于零, 但比较繁琐.

3. (P303,1) 计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$ 的和.

解: 记 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 则 $H_n/n\to 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}H_n&=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)H_n=\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+1}\\&=\sum_{1}^{m}\frac{H_n}{n}-\sum_{n=2}^{m+1}\frac{H_{n-1}}{n}\\&=1+\sum_{n=2}^{m}\frac{H_n-H_{n-1}}{n}-\frac{H_m}{m+1}\\&=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}-\frac{H_m}{m+1}\to\frac{\pi^2}{6},\ (m\to\infty)\end{aligned}$$

4. (P303,3) 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

证明　(充分性) 若 $\{a_n\}$ 有界, 则收敛于 $a>0$. 令 $A_n=a_{n+1}-a_n$, $B_n=\frac{1}{a_n}$. 则 $\{B_n\}$ 单调递减趋于 $\frac{1}{a}$, 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛, 所以根据 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nB_n$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

(必要性) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛于 S. 则有

$$\begin{aligned}S&>\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_n}\,dx\\&\geqslant\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}\,dx=\int_{a_1}^{a_{m+1}}\frac{1}{x}\,dx\\&=\ln a_{m+1}-\ln a_1.\end{aligned}$$

由此知 $\{a_n\}$ 有界.

5. (P303,4) 设 $\alpha > 0$, $\{a_n\}$ 是递增正数列. 求证级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

证明 因为

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}} = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dx}{a_{k+1}^{\alpha+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_{a_1}^{a_{n+1}} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$$
$$= \frac{1}{\alpha}(a_1^{-\alpha} - a_{n+1}^{-\alpha}) < \frac{1}{\alpha} a_1^{-\alpha}.$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}}$ 收敛. 显然级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_k^{\alpha}} - \frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$ 收敛, 因而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}} \left(\frac{1}{a_k^{\alpha}} - \frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$$

收敛. 由

$$\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}a_k^{\alpha}} = \frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}} + \frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}} \left(\frac{1}{a_k^{\alpha}} - \frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$$

知所给的级数收敛.

6. (P303,5) 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是三个非负数列使得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 且

$$a_{n+1} \leqslant a_n - b_n \Phi(a_n) + c_n a_n, \tag{1}$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明: 若有某项 $a_n = 0$, 则由 (1) 知其后的 a_n 均为零. 此时结论自然成立. 不妨设 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 若 $a_{n+1} \leqslant a_n$, 则 $\ln a_{n+1} - \ln a_n \leqslant c_n$. 若 $a_{n+1} > a_n$, 则 $\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln(1 + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}) < \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} < c_n$. 因此, 总有

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n \leqslant c_n. \tag{2}$$

对此式求和可知 $\{\ln a_n\}$ 有界, 因而 $\{a_n\}$ 有界. 从 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 知 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$ 收敛. 根据第 1 题结论知 $\{a_n\}$ 收敛. 若 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, 则存在正数 δ 使得 $a_n > \delta$ 对一切 n 成立, 此时 $\Phi(a_n) > \Phi(\delta)$. 由 (1) 得

$$a_{n+1} + \Phi(\delta) b_n \leqslant a_n + c_n a_n.$$

此式蕴含 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 这与条件不符. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

7. (P303,6) 设 $\{a_n\}$ 是正数列使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n},\tag{1}$$

而且上式右端的系数 2 是最佳的.

证明　由 Cauchy-Schwartz 不等式, 有

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\cdot\frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right).$$

因此, 有

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{4}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}.$$

两边求和, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}&\leqslant 4\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\\&=4\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\&=2\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{2n}{n^2(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\&<2\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\&=2\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\&=2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\&<2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}.\end{aligned}$$

于是 (1) 成立. 下面说明系数 2 不能换成更小的数. 设 $a_n=n^p$, $p>1$. 记 $H_p=$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. 则有 $H_p\to+\infty$, $(p\to 1+)$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p\frac{1}{n}}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{1}{\int_0^{\frac{n+1}{n}}x^p\,dx}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{1}{\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^{p+1}}=(p+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^{p+1}}\\&\geqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{(n+1)^{p+1}}\right)\\&\geqslant 2\left(H_p-\frac{\pi^2}{6}\right).\end{aligned}$$

由此即知系数 2 是最佳的.

8. (P303,7) 设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调递增实数列,且对任意正整数 n 有 $a_n\leqslant n^2\ln n$. 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散. (美国数学月刊 Problem 12004)

证明 若 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 收敛, 因而 $a_{n+1}-a_n$ 趋于零, 故, 结论显然成立. 假设 $\{a_n\}$ 无界, 则从某项开始 a_n 为正. 不妨设 $\{a_n\}$ 是正数列. 记 $b_n=a_{n+1}-a_n$, $B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=a_{n+1}-a_1$. 根据上题的结论, 有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{b_n},$$

即,

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_{n+1}-a_1}\leqslant 2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$$

根据条件有 $a_{n+1}-a_1\leqslant(n+1)^2\ln(n+1)$, 因而

$$\frac{n}{a_{n+1}-a_1}\geqslant\frac{n}{(n+1)^2\ln(n+1)}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

因为级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 发散, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.