关于极限、连续性和可微三个章节的总结提纲

说明：

1、**本提纲不是划定考试范围（也不会给大家划定范围）。本提纲中没有提到的地方并不表示考试不会涉及。**

2、**所举例题不一定具有代表性，更不是考试的模拟试题。**

3、**希望同学们学会总结，在总结中提高。充分理解书中内容的背景和含义，关注不同内容的关联性，掌握分析、证明、推导和计算，通过定理、性质的证明以及例题和习题的训练加深对内容的进一步理解。**

第一章：极限

一、定义与性质:

1、定义: 对"$\varepsilon - N$" 与 "$\varepsilon - \delta$" 语言的理解，以及在一些证明、推导或叙述过程中的作用。这是基础，往往当没有外力可借，或很难说清楚问题的时候，回到原始的定义会看得更清楚。

注意当 $x \to \infty$ 时函数极限的表述。注意函数极限中左右极限的的概念。

2、性质：

唯一性。（数列和函数）极限的唯一性，保证定义的合理性。

局部性：

数列：收敛性只与充分大以后的项有关（即改变有限项不影响收敛性）

函数：收敛性只与 x_0 附近的函数值有关。

注意这里的"充分大"含义是，$\exists N$，对 $n > N$ ......。

"附近"是指：$\exists \delta > 0$ 对 $0 < |x - x_0| < \delta$ ......

有界性：收敛必有界（对函数极限来说是在 x_0 附近有界）

相容性：极限运算与四则运算和函数复合的相容性。特别是复合函数的极限

$$\lim_{y \to y_0} f(y) = a, \lim_{x \to x_0} \phi(x) = y_0, \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(\phi(x)) = a$$

"保序性"：例如：

$a_n \to a,\ a > 0 \Longrightarrow a_n > 0$ 对充分大的 n 成立。反之 $a_n > 0 \Longrightarrow a \geq 0$

$f(x) \to a, (x \to x_0),\ a > 0 \Longrightarrow$ 在 x_0 附近有 $f(x) > 0$. 反之在 x_0 附近有 $f(x) > 0 \Longrightarrow a \geq 0$.(注意正反之间些微的差别！）

二、理论：

1、确界原理：确界的表述（特别是类似"$\varepsilon - \delta$" 语言的表述）和存在性；

确界原理 $\Longrightarrow$ 单调有界必收敛，$\Longrightarrow$ 区间套定理。

2、列紧性：有界数列必有收敛子列（注意证明方法）。

一个直接应用是判别极限不存在。例如，如果有两个子列极限不一致，或者一个子列发散，则数列发散（类似函数极限中利用左右极限是否相等的判别方法）。

3、Cauchy 收敛准则：数列收敛以及函数或在一点或在无穷有极限的收敛准则。

4、函数极限与数列极限的关系：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \Longrightarrow \forall x_n\to x_0, \lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$$

这里 a 可以是有限数也可以是无穷。或判别极限不存在：若存在两个数列x_n 和 y_n使得 $f(x_n)$ 和 $f(y_n)$ 的极限不相等（或有一个发散），则极限不存在。

例：设 $f(x)$ 在(a,b) 上连续，且$\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上不一致连续。

证明：（反证）如果一致连续，则对 $\forall\varepsilon>0$, 一定 $\exists\delta>0$ 当任何两点 x,x' 满足 $|x-x'|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

取数列 $x_n\in(a,b)$, $x_n\to b^-$, 则对于上述 $\delta>0$，一定存在 N，当 $n,m>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\delta$ （Cauchy 收敛准则）

因此$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$

也就是 $f(x_n)$ 满足Cauchy收敛准则，所以 $\{f(x_n)\}$ 收敛。这与 $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$ 矛盾。

三、计算：

1、三明治：关键是估计不等式，如何收和放，原则是**收放适度，恰到好处**。在估计数列不等式中“算术平均大于几何平均”会经常用到。

2、两个重要极限的应用：以下是两个极限以及其他等价的表现形式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

一些极限的计算最终可归结到上述极限形式。

3、单调有界：首先要证明单调增（或单调减）以及有上界（或有下界）。除了常规的方法外，可借助函数的单调增减给予证明。

例：书上第106页，第25题：设 $a\in(0,1)$, $b_1=1-a$, $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{1-e^{-b_n}}-a$，问 b_n 是否收敛?

分析：欲证其收敛，最好单调有界，欲证单调，借助函数

$$f(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}-a,\ x>0$$

显然

$$f(x)=-\frac{0-x}{e^{-0}-e^{-x}}-a=e^{\xi}-a>1-a>0$$

$$f'(x) = \frac{1-(1+x)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} > 0$$

这里用到了不等式 $e^x > 1+x$. 因此 $f(x) > 1-a$, $f(x) \nearrow$. 因为 $b_1 = 1-a > 0$, $b_2 = f(b_1) > 1-a = b_1$.（归纳）如果 $b_1 < b_2 < \cdots b_n$ 则

$$b_{n+1} - b_n = f(b_n) - f(b_{n-1}) = f'(\xi)(b_n - b_{n-1}) > 0$$

所以 $\{b_n\} \nearrow$

如果 b_n 有上界, 记 $b_n \to b$ 因此 $b_n \leq b$，则在 $b_{n+1} = f(b_n)$ 两边取极限得 $f(b) = b$.

因此要证 b_n 有上界，即要证 $f(x) - x = 0$ 有唯一解。为此设

$$g(x) = f(x) - x = \frac{x}{e^x - 1} - a$$

显然

$$g(0+0) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1-a > 0, \lim_{x \to +\infty} g(x) = -a < 0$$

且

$$g'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} < 0$$

这是因为从 $e^x > 1+x$ 中，令 $x \to -x$ 得 $e^{-x} > 1-x, \Longrightarrow (1-x)e^x < 1$. 由零点定理以及 $g(x) \searrow$, 推得 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中有唯一解,记为 b.

下面要证明 b 是b_n 的上界，显然 $b = f(b) > 1-a = b_1$，（归纳）如果 $b > b_n$, 利用 $f(x) \nearrow$，则 $b = f(b) > f(b_n) = b_{n+1}$，所以 b 是b_n 的上界。

这样我们就证明了 b_n 单调增有上界 b，其中 b 是 $f(x) - x = 0$ 的唯一的零点。因此 $b_n \to b$.

4、Stolz 定理和L'Hospital法则：主要解决 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限问题。只要下列等式右边极限存在，就能得到左边 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}, \text{（差商）}$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{（微商）}$$

当然要注意数列和函数情形下的有关条件。除了 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的要求外对于数列，$\frac{0}{0}$ 型要求 b_n 严格递减，$\frac{\infty}{\infty}$ 要求数列 b_n 严格递增。对于函数要求 $g'(x) \neq 0$.

其他不定式可转化为上述两种不定式。

第二章：连续性

一、概念：

函数在一点 x_0 连续是函数在一点 x_0 极限的特殊情形。只是极限值等于函数在这点的函数值：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

极限的左右极限对应连续的左右连续以及三类间断点。

极限与四则运算和函数复合的相容性都继承下来，特别对连续函数

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0), \lim_{x\to x_0} \phi(x) = \phi(x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(\phi(x)) = f(\phi(x_0))$$

只要 $y_0 = \phi(x_0)$.

但是要注意以下一点：一般函数只要自变量和因变量一一对应，就有反函数。但连续函数存在反函数充分必要条件是严格单调。

至此，我们得到如下结论：所有初等函数在其定义域中连续。

二、闭区间上连续函数：

介值性；有界性；达到最大、最小值；值域是一个闭区间。

关键：灵活运用。例如上述性质对闭区间中任意两点之间也适用，即对于 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ 也成立。即便不是闭区间，如果可以化为闭区间上的问题，也可类似处理。例如，对于函数（前面例子中出现的函数）

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - a,\ x \in (0, +\infty)$$

定义在一个无穷的开区间 $(0, +\infty)$ 并有

$$g(0+0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 1 - a > 0, \lim_{x\to +\infty} g(x) = -a < 0$$

根据极限的性质，一定存在靠近 0 的一点$x_1 > 0$ 以及充分大的一点 x_2 分别满足 $g(x_1) > 0,\ g(x_2) < 0$ 因此在 $[x_1, x_2]$ 有零点也就是在 $(0, +\infty)$ 内有零点.

三、一致连续：

概念与连续的区别。同时把握如何判断连续但不一致连续的方法。

$f\Big|_{[a,b]}$ 连续 $\Longrightarrow f\Big|_{[a,b]}$ 一致连续。

$f\Big|_{[a,+\infty)}$ 连续且 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \Longrightarrow f\Big|_{[a,+\infty)}$ 一致连续.

$f\Big|_{[a,b)}$ 连续但 $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty \Longrightarrow f\Big|_{[a,b)}$ 不一致连续.

证明：（第二条）$\forall \varepsilon > 0$ 由条件 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, 并利用Cauchy 收敛准则得 $\exists M > 0$ 对于满足 $x, x' > M$ 的点，有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

在区间 $[a, M+1]$ 上，函数连续因此一致连续，所以存在 $\delta' > 0$ 使得对于 $x, x' \in [a, M+1]$ 中的两点 x, x', 只要 $|x - x'| < \delta'$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

取 $\delta = \min\{\delta', 1\}$ 则对于任意的 $x, x' \in [a, +\infty)$ 只要 $|x - x'| < \delta$, 要么 $x, x' \in [a, M+1]$ 要么 $x, x' > M$, 因此都有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

这里为了防止出现 $x < M < x'$ 时无法判断的问题，做了上述技术处理。一般来说如果考虑有接点的情况，上述处理是常用的，避免出现在跨界处无法说清楚的现象出现。

第三章：微分

一、导数:

差商$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \neq x_0$的极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

几何意义：斜率，切线，以及切线方程。直线方程：过两点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 的直线方程：

$y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$, 其中 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 是斜率。

过一点 $M_0(x_0, y_0)$ 及沿固定方向（由与x 轴正向夹角α刻画）的直线方程

$y = y_0 + \tan\alpha(x - x_0)$

$f(x)$ 的切线方程 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

计算：四则运算、复合函数、反函数的求导规则和微分规则

$\Longrightarrow$ 初等函数在其定义域内可导（可微）

高阶导数的计算

隐函数的求导（微分）

参数方程表示函数的求导（微分）（特别注意参数方程表示的高阶导数，要理解这一点首先要理解参数方程表示的导数是怎么来的，对二阶情形要会推导）

二、理论:

1、微分中值定理：这部分由一系列定理组成：Lagrange；Fermat；Rolle；Cauchy。其中微分中值定理最为重要，因此又称为微分基本定理。这些定理的应用十分广泛，这里仅举一例。

例：设 $f\Big|_{[a,b]}$ 连续， $f\Big|_{(a,b)}$ 二阶可导。记 $M_1(a, f(a))$, $M_2(b, f(b))$ 若线段 $\overline{M_1M_2}$ 与 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ 在 (a, b) 内有交点，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$

证明：设交点为 $M(c, f(c))$, $c \in (a, b)$

$\Longrightarrow \exists \xi_1 \in (a, c), f'(\xi_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$, $\exists \xi_2 \in (c, b), f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$

因为 M 在 $\overline{M_1M_2}$ 上，所以线段 $\overline{M_1M}$ 与线段 $\overline{MM_2}$ 的斜率相等，所以

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \Longrightarrow \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$

例：证明在 (a,b) 上无界的可微函数，其导函数在 (a,b) 上也一定无界。

证明：由于 $f\Big|_{(a,b)}$ 无界，因此对任意的正整数 n，一定存在 $x_n \in (a,b)$ 使得 $|f(x_n)| \geq n$, 即 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$

假如导函数有界：$|f'(x)| \leq M,\ x \in (a,b)$, 则任取 $x_0 \in (a,b)$ 有

$|f(x_n) - f(x_0)| = |f'(\xi)(x_n - x_0)| \leq M(b-a) \Longrightarrow |f(x_n)| \leq M(b-a) + |f(x_0)|$ 矛盾。

2、导函数的介值性：（注意不需要假设导函数是连续的）

左右导数与导函数的左右极限之间的关系 $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$. 从而推出导函数的间断点不能够有第一类间断。

介值性：$f'(x)$ 能取到介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间的任何值。

我们将在Taylor展开中给出一个导函数介值性定理的应用。

三、应用:

进一步了解函数的性态。

1、确定 $f(x)$ 的单调区间：

$f'(x) \geq 0 \Longrightarrow f(x) \nearrow$; $f'(x) \leq 0 \Longrightarrow f(x) \searrow$; $f'(x) = 0 \Longrightarrow$ 驻点

2、确定驻点是否是极值点： 设 $f'(x_0) = 0$

若在 x_0 左侧 $f' \geq 0$, 右侧 $f' \leq 0 \Longrightarrow f(x_0)$ 是极大值。

若在 x_0 左侧 $f' \leq 0$, 右侧 $f' \geq 0 \Longrightarrow f(x_0)$ 是极小值。

$f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f(x_0)$ 极大； $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x_0)$ 极小。

3、确定凸凹性和拐点：

$f'' > 0 \Longrightarrow f$ 凸，$f'' < 0 \Longrightarrow f$ 凹。$f''(x_0) = 0$ 左右两侧分别凸凹，拐点。

4、凸性：定义及其等价的不等式。在等价的不等式中

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

是本质的，夹在两者之间的是上述结果的推论。

5、曲率：一是关于 $y = f(x), x \in [a,b]$ 曲率的计算，二是由参数方程表示的曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$ 曲率的计算。

在应用中，关键是综合多方面知识灵活掌握。比如求函数的零点问题，既可以用连续函数的介值定理，也可以采取求导分析单调或极大极小值给出。

例： 讨论 e^x 与 $x^a, a > 0$ 在 $x > 0$ 的交点.

解：所谓交点即求 $e^x - x^a = 0$ 的根，等价于讨论 $f(x) = e^{\frac{x}{a}} - x$ 的零点问题。显然 $f(0) = 1 > 0,\quad f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ （两端大于零）

$f'(x) = \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - 1$, 驻点 $x_0 = a\ln a$, $f(x_0) = a(1 - \ln a)$ 因此是极小值（最小值）

$f''(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 e^{\frac{x}{a}} > 0$ ， $f(x)$ 是凸函数 $(x > 0)$

综上分析

$f'(x) < 0(x < x_0) \Longrightarrow f(x) \searrow (x < x_0)$;

$f'(x) > 0(x > x_0) \Longrightarrow f(x) \nearrow (x < x_0)$.

结论：当 $a > e$ 时，$f(x_0) = a(1 - \ln a) < 0$, 因此$f(x)$ 分别在 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, +\infty)$ 各有一个零点，共两个零点。当 $a = e$ 时， $f(x_0) = 0$ 一个零点。当 $0 < a < e$ 时，$f(x) \geq f(x_0) > 0$ 没有零点。

例：再补充同学在QQ里提出的题目。设 $f(x)$ 二阶可导， $2f(x) + f''(x) = -xf'(x)$，证明 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有界

分析：这道题看上去有点无从下手的感觉。其实要证明 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有界最简单的想法是它们的平方和 $f^2(x) + f'^2(x)$ 有界，因此求导 $2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x)$. 你发现想利用条件还差一点系数，于是考虑

$$g(x) = f^2(x) + \frac{1}{2}f'^2(x)$$

的有界性，求导得

$$g'(x) = (2f(x) + f''(x))f'(x) = -xf'^2(x)$$

因此 $g'(0) = 0$,

$x > 0 \Longrightarrow g'(x) \leq 0 \Longrightarrow g(x)$ 单调减。

$x < 0 \Longrightarrow g'(x) \geq 0 \Longrightarrow g(x)$ 单调增。

因此 $g(x)$ 在 $x = 0$ 取到最大值，即 $f^2(x) + \frac{1}{2}f'^2(x) \leq f^2(0) + \frac{1}{2}f'^2(0)$, 因此 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有界。

关于第三章综合习题两道题的解法如下。

例： （P142, 第8题）设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导， $f(0) = 1, f(1) = \dfrac{1}{2}$. 求证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0$$

证明

1、若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上无零点：令

$$F(x) = x - \frac{1}{f(x)},\ x \in [0, 1]$$

则 $F(x)$ 满足

$$F(0) = F(1) = -1,\ F'(x) = 1 + \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

根据 Rolle 定理, 推得存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 也就是

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

2、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的一个零点 ξ：显然 $\xi\in(0,1)$，且是最小值点，所以

$$f(\xi)=0,\ f'(\xi)=0$$

结论显然成立。

3、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有超过两个及以上的零点：记

$$E=\{x \mid x\in[0,1], f(x)=0\}$$

因为 $f(0)=1,\ f(1)=\dfrac{1}{2}$, 所以 $E\subset(0,1)$. 分别记 $a=\inf E,\ b=\sup E$.

第一步，证明 a,b 也是零点。这是因为 a 是 E 的下确界，如果 $f(a)\neq 0$, 那么，对任意的 $\dfrac{1}{n}$, $a+\dfrac{1}{n}$ 不是下确界，因此存在零点 $x_n\in E$，使得

$$a<x_n<a+\frac{1}{n},\ f(x_n)=0$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ f(x_n)=0$$

由函数的连续性可知

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0.$$

同理可证 b 也是 $f(x)$ 的零点。

第二步，要证明在区间 $[0,a)$ 和 $(b,1]$ 上，有$f'(a)\le 0,\ f'(b)\ge 0$. 这是因为在 $[0,a)$ 上 $f(x)>0$, 在 $(b,1]$ 上 $f(x)>0$. 所以

$$f'(a)=f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{x-a}\le 0$$

同理可证 $f'(b)\ge 0$.

如果 $f'(a)\le 0,\ f'(b)\ge 0$ 中有一个等号成立，那么 $f^2(a)+f'(a)=0$ 或 $f^2(b)+f'(b)=0$. 结果自然成立. 否则有 $f'(a)<0,\ f'(b)>0$.

第三步，因为 $f'(a)<0$, 由

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}=f'_+(a)=f'(a)<0$$

得，存在$\delta>0$, 使得

$$f(x)<0,\ a<x<a+\delta$$

记

$$\bar{a}=\inf\{x \mid f(x)=0,\ a+\delta<x<b\},$$

那么在 $a < x < \bar{a}$ 中，$f(x) < 0$ 令

$$F(x) = x - \frac{1}{f(x)},\ x \in (a, \bar{a})$$

那么

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to \bar{a}^-} F(x) = -\infty$$

所以 $F(x)$ 在 $(a, \bar{a})$ 中有最大值点 $\xi \in (a, \bar{a})$, 所以

$$F'(\xi) = 0,\ \text{即}\ f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

证毕。

说明 在第二步中，令 $g(x) = f^2(x) + f'(x)$ ，则 $g(a) < 0,\ g(b) > 0$。因为 $f^2(x)$ 连续，所以是某个函数的导函数，不妨设 $F'(x) = f^2(x)$, 这样 $g(x) = F'(x) + f'(x) = (f(x) + f(x))'$ 是 $F(x) + f(x)$ 的导函数，利用导函数 $g(x) = F'(x) + f'(x) = (f(x) + f(x))'$的介值性。直接可以得到存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $g(\xi) = 0$.

例： P142 综合习题第19题。

设 $a > 1$, 函数 $f:\ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 可微. 求证存在数列 $\{x_n\},\ x_n > 0,\ x_n \to +\infty$, 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n).$$

证明 采取反证法。假如不存在题目所示的数列，那么存在 $x_0 \geq 0$, 使得

$$f'(x) \geq f(ax),\ x \geq x_0.$$

推得 $f'(x) > 0\ (x \geq x_0)$, 即函数在$x \geq x_0$ 严格单调增。因为 $a > 1$, 所以只要取充分大的 $x > \dfrac{1}{a-1}$, 就有 $ax > x + 1$. 那么利用微分中值公式知存在 $x < \xi < x + 1$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \geq f(ax) > f(x+1),$$

推得 $f(x) < 0$，矛盾。

四、Taylor 展开:

1、如何展开： 这里唯一性非常重要。也就是说不管用何种方法得到一个 n 次多项式 $T_n(x)$, 只要它与 $f(x)$ 的误差是$x \to x_0$ 时的高阶无穷小$o((x - x_0)^n$. 则这个多项式一定是Taylor 多项式。

2、如何估计余项：

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$$

3、如何利用Taylor公式计算极限和计算近似值：

例：书上第139页，第17题。是给出 $f(x)=x\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上尽可能小的上界。

按照常规做法，对 $f(x)$ 求导 $f'(x)=\cos x-x\sin x$, $f''(x)=-(2\sin x+x\cos x)<0, f''(0)=0$。因此在驻点 $f'(x_0)=0$ 处取到极大。因为 $f(x)>0, 0<x<\frac{\pi}{2}, f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$ ，所以极大值点也是最大值点。函数值就是最小的上界。

但是从 $f'(x)=\cos x-x\sin x=0$ 难以解出具体极值点，更难以计算极值。为此利用Taylor展开计算近似值。因为二阶导数是负的，所以

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\ (x\in[0,\frac{\pi}{2}])$$

为求一个具体的上界，不妨分别选择在 $x_0=0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}$ 处展开.

在 $x_0=0$： $f(x)\leq 0+x\leq\frac{\pi}{2}$,

在$x_0=\frac{\pi}{4}$： $f(x)\leq f(\frac{\pi}{4})+f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+(1-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\right)$.

在$x_0=\frac{\pi}{3}$： $f(x)\leq\frac{\pi}{6}+(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}})(x-\frac{\pi}{3})\leq\frac{\pi}{6}+(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2})\frac{\pi}{3}$

在$x_0=\frac{\pi}{2}$： $f(x)\leq-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})\leq\frac{\pi^2}{4}$

具体比比看，那个上界最小?

4、作为Lagrange中值公式的推广加以应用：

例： 设$f(x)\Big|_{[a,b]}$ 二阶可导，证明，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}f''(\xi)(b-a)^2$$

证明：在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 展开，并在展开式中分别取 $x=a, x=b$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

两式相加得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}$$

因为 $\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$ 介于 $f''(\xi_1)$ 和 $f''(\xi_2)$ 之间，由导函数的介值性可知，存在 ξ 介于 ξ_1 和ξ_2 之间，使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}$$