数学分析讲义

（一）

中国科学技术大学

二〇〇九年十一月

序　言

本讲义是针对中国科学技术大学少年班（含 00 班）的同学所编写的。计划中的内容如下：第一册以单变量函数的微积分以及无穷级数为主，第二册包括多变量函数的微积分、Fourier 分析和关于（常）微分方程的简介。前两册基本含盖了微积分的主要内容，有一个相对完整的体系。第三册含实数理论、积分理论及其延伸、以及微分形式等内容，侧重点在于建立微积分严格的数学基础和论证、用现代数学观点重新审视微积分并介绍微积分中现代数学的基本思想。采取这种方式的目的有三：

其一是少年班有一个显著特点，学生进校时没有专业，要到一年甚至两年以后才决定自己该学什么。因此需要有一套灵活的教材，既要满足他们自由的选择，又要使得他们有扎实的数学基础。对于部分今后选择偏应用专业的学生来说，前两册内容的深度和广度已经足够满足进一步地学习，第三册可根据个人喜好决定是否选修。对于选择数理或对数学有进一步兴趣和能力的学生来说，通过学习第三册的内容，足可以达到数学专业学生对微积分的要求。

其二是少年班的培养模式已经逐步推广到全校，比如对于中国科学技术大学的学生来说，当他们结束大学一年级的学习后，有一次自主选择专业的机会。因此需要重新审视传统上将数学专业和非数学专业的微积分分成两套相互独立的系统的做法，是否满足学生更具有个性化、更自由的专业选择趋势。我们理想中的目的，是希望在一年级学生中建立一个相对统一的微积分知识平台，使得学生在自主选择专业时，不至于出现关于微积分知识的衔接问题。

其三是长期的教学经验告诉我们，对待微积分的认识，正如微积分的发展一样，有一个渐进的过程。如果刚进入大学的学生一开始就死抠数学的严密性，沉迷于解决一些难题和怪题，往往容易忽视微积分主要的思想和精髓，导致学生偏离微积分的主线。部分学生甚至被开始的一记闷棍打懵，从而影响到整个大学期间的学习。因此，采取一开始就紧扣微积分的主线，使得学生首先掌握微积分基本的思想、方法和运算，然后再建立基础性和严密性的证明，同时引进现代数学的观点审视学过的大致内容，不失是一种新的尝试。

事实上，这样的思考早在几年前就已在数学系部分教师中开始。本讲义的编写自始至终得到了数学系教授们的鼎立支持。史济怀教授给予了我们很大的鼓励和期望，陈发来教授不但给予了支持，同时也参与了教学实践，梁进教授将作为本讲义第一册的第一个实践者，而陈卿教授将于本学期按已设定的体系，首次讲授第三册的内容。今后还将有更多的教师参与相关的教学实践。

讲义的第一册关于极限、单变量微分和积分的内容编写已经于两年前由余红兵教授完成初稿，本次编写对他的原稿进行了适当的修改和补充。余红兵教授对例题和习题的挑选十分精心，因此讲义中只做了少量增加。第二册的内容正在编写中，第三册将在陈卿教授于本学期讲授过程中随之完成。我们希望经过几轮的教学实践后，再经过大家的实

践、修改和完善，逐步形成一套较成熟的讲义。

讲义的编写过程中，受到了数学系几代人在教学上的积累和出版的一系列教材的高度影响。同时我们选择了以下教材作为编写的主要参考书: Richard Courant, Fritz John:《Introduction to Calculus and Analysis》; Walter Rudin:《Principles of Mathematical Analysis》; Harold M. Edwards: 《Advanced Calculus: A Differential Forms Approach》。前两本书的中文版已经出版。我们也翻阅了国外一些大学关于微积分的网页，或多或少会在编写中受到影响，在此就不罗列了。

在编写过程中，我们力图做到以讲清楚微积分的基本思想、含义和方法为主，甚至适当介绍一点学生可以接受的背景知识，同时力图使得讲义具有一定的可读性。但是，要做到这一点，对我们来说确实是一个很大的挑战。为此，Morris Kline 所著的、由北京大学数学系的教授们所翻译的那套著名的《古今数学思想》一书时常放在手边。特别是龚升教授所著的《话说微积分》以及后来的《微积分五讲》深深地影响我们的编写。我们建议读者在适当的时候，读读那套著名的数学史书以及龚升教授所著的小册子。

对于以本讲义作为教材的学生来说，希望在学习过程中，能认真理解微积分的基本思想、基本含义、以及思维方式，而不仅仅是会计算就了事。缺少理解的运算，是一种照猫画虎似的运算，而缺少运算能力的理解，显然是浮浅的理解。因此理解和运算“两手都要抓，两手都要硬”。讲义中一些注记并非是不重要的补充。读者还可以根据自己的时间，适当选择一些参考书，如上面所列的 Courant 和 John、Rudin 所编写的两本教材或其它教材和教学参考书。学会阅读，学会思考，学会分析是所有课程教学过程中所共同期望的。现在有一句及其时髦的词，叫做“创新”，虽然本讲义的主要内容早在十七、十八世纪就已经建立起来了。但是当我们在学习这些内容时，不仅要继承前人所创造的知识，还要体会前人创新的思维方式。事实上，基础课程中充满了大量创新的原始思想和方法。希望读者在学习的过程中能体会和欣赏到前人深邃的思想。

本讲义的编写得到了国家精品课程项目《微积分》的资助。

程艺

2005 年 8 月

目　录

第 1 章　极限

本章将讲述微积分中一个基本概念 —— “极限”. 为了便于解释 “极限”, 我们首先讲述数列的极限, 它是极限的一种离散形式.

§1.1　数列极限

1.1.1　数列极限的定义

所谓**“数列”**, 就是定义在自然数集上, 并按照自然数顺序排列的一串实数.

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

通常用 $\{a_n\},\ (n \geqslant 1)$ 这样的记号来表示, 第 n 项 a_n 则称为这个数列的通项. 或者说, 数列 $\{a_n\}$ 是定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n),\ n \in \mathbf{N}$.

如果把实数和坐标轴上的点对应, 则数列可以看成是实轴上的一串点. 所以我们有时也称数列为**“点列”**. 在本书的讨论中, 我们只考虑实数列.

数列 $\{a_n\},\ (n \geqslant 1)$ 的极限, 就是研究当 n 无限增大时, 通项 a_n 的变化趋势. 例如

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\cdots;$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ 1,\ \frac{1}{n},\cdots;$$

当 n 无限增大时, 第一个数列的通项 “无限接近” 一个固定的数 “0”；第二个数列则不然, 它的通项一会儿是 1, 一会儿接近 0, 其性态与第一个数列完全不同, 不能 “无限接近” 于任何一个固定的数.

一个数列 $\{a_n\},\ (n \geqslant 1)$ 中的通项 a_n 当 n **“无限增大”**时**“无限接近于某个实数 a”**, 是我们感兴趣的事情. 所谓 “无限接近” 某个实数, 即是 “要说多接近就多接近”. 也就是说, 如果有一个实数 a, 不管你预先指定 “接近” 的程度是多小, 当 n 足够大后, 所有的 a_n 总能达到你的要求.

因此, 代替这种描述性的解释, 我们必须要有刻划 “接近” 的度量, 同时在数学上和逻辑上对**“n 足够大后”**以及**“a_n 与 a 接近程度达到要求”**等这类说法赋予确切的含义.

在实数集合中, 或者说在实数轴上, 数的绝对值, 自然给出了一种度量, 用以衡量两个数之间的距离. 随着 n 的不断增大, $|a_n - a|$ 愈小, 则表示 a_n 与 a 愈接近.

以数列 $a_n = \frac{1}{n},\ n \geqslant 1$ 为例, 对于固定的数 “0”, 如果你要求 $\frac{1}{n}$ 与 0 的接近的程度小于 10^{-2}, 则当 $n > 100$ 后, 所有的 $a_n = \frac{1}{n}$ 都能满足你的要求：$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-2}$；如果你要求接近的程度小于 10^{-100}, 则当 $n > 10^{100}$ 后, 所有的 $\frac{1}{n}$ 都满足你的要求：$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-100}$.

一般地，如果你任意选定一个正数 ϵ，并要求当 n 足够大后，$\frac{1}{n}$ 与 0 的接近程度不超过 ϵ：$|\frac{1}{n}-0|<\epsilon$（即，不超过预先指定的接近程度）. 那么，n 大到什么程度后，能够保证满足你的要求呢? 我们发现，对于眼前这个例子，只要 $n>N=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$（这里 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数）后，就有

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\epsilon$$

所以，对于任意给定一个正数 ϵ，是否在 n 充分大后，数列与一个数接近的程度不超过 ϵ 的关键，就成了是否能够找到这样的 N，来刻划“n 充分大后”. 虽然 $N=N(\epsilon)$ 的存在可能会依赖于 ϵ，而且也不是唯一的（上面的例子看得很清楚）. 通常，ϵ 愈小, (要求愈严), 相应的 N 也就愈大.

定义 1 设 $\{a_n\}$ 是给定的数列. 如果有一个实数 a 具有下列性质：对任意给定的一个正数 ε，总存在一个自然数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，或数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 记成

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\quad \text{或} \quad \lim a_n=a,$$

也可以记成 $a_n\to a\,(n\to\infty)$，称为**“当 n 趋于无穷时，a_n 趋于 a”**.

有极限的数列称为**收敛数列**, 不收敛的数列称为**发散数列**.

注意到，上述定义还需要说明定义的合理性，即要说明根据上述定义，数列的极限是唯一的. 我们将在极限的性质中说明这种唯一性.

如果把实数与数轴上的点相对应，则数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的几何描述是: 对任意的 ε，都有相应的自然数 N，使得 N 以后的所有项 (或点)a_n 都落在以 a 为中心，以 ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 之中，而落在这个区间之外的点，之多只有 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ 这有限几个点（如图 1.1）.

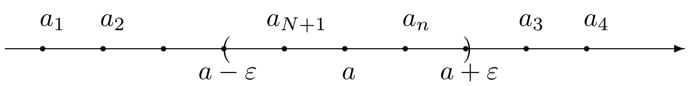

图 1.1

例 1 $a_n=a\,(n=1,2,3,\cdots)$，称为常数列. 则 $\lim a_n=a$.

例 2 $\alpha>0$, 则 $\lim\frac{1}{n^\alpha}=0$.

证 对任意给定的正数 ε，解不等式

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$$

得，$n > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}}$，所以只要取

$$N = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] + 1,$$

当 $n > N$ 时，就有 $|\frac{1}{n^\alpha} - 0| < \varepsilon$. 由定义可知 $\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

请注意，ε 的作用是刻划 a_n 与 a 接近的程度，因此我们只对它越小越感兴趣. ε 的取值过大，就没有什么意思了. 有时也可限定 ε 的一个上界.

例 3 设 q 是一个给定的实数，满足 $|q| < 1$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

证 当 $q = 0$ 时，结论显然成立，故以下假设 $q \neq 0$. 为了论证方便，设任意给定的正数 ε 满足 $\varepsilon < 1$. 直接解不等式

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon,$$

得 $n \ln|q| < \ln\varepsilon$. 由于 $0 < |q| < 1$，并且已经假设 $0 < \varepsilon < 1$，故 $\ln|q| < 0$, $\ln\varepsilon < 0$，因此有 $n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. 根据这些分析，只要取

$$N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right] + 1,$$

则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

证 设 ε 是任意给定的一个正数，要想效仿前面的例子，从不等式 $\left|\frac{2^n}{n!} - 0\right| = \frac{2^n}{n!} < \varepsilon$ 中直接找出一个 N 来不大容易，好在我们只要求 N 是存在的，对它没有别的要求，所以可以将 $\left|\frac{2^n}{n!} - 0\right|$ 适当放大

$$\left|\frac{2^n}{n!} - 0\right| = \frac{2\cdot 2\cdots 2}{1\cdot 2\cdots n} < 2\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

所以解不等式 $\frac{4}{n} < \varepsilon$，得 $n > \frac{4}{\varepsilon}$.

故若取 $N = \left[\frac{\varepsilon}{4}\right] + 1$，则当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{2^n}{n!} - 0\right| <= \frac{2^n}{n!} < \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \varepsilon$$

所以结论得证.

利用极限的定义，可以证明一些简单的数列有极限. 然而，这样的过程实际上是预先看出具体的极限值，再根据定义来验证. 如果要求一些较为复杂的数列的极限，一方面它的极限值未必容易观察出来，另一方面，即使观察出来了，利用定义来验证，可能是相当困难的. 因此，我们需要进一步了解极限的种种性质. 同时，对极限性质的掌握，也可以扩大我们如何计算极限的视野.

1.1.2 收敛数列的性质

本节, 将讨论收敛数列的一些基本性质. 在理解和证明这些性质的过程中, 上一节关于数列收敛的几何解释是非常有帮助的.

定理 1

1° 如果 $\{a_n\}$ 是收敛数列, 则 $\{a_n\}$ 的极限是唯一的.

2° 改变数列中有限多项的值, 不影响数列的收敛性及其极限.

证 1° 如果 $\{a_n\}$ 有两个极限值 a 和 b. 根据极限的定义可知, 对于任意的正数 ε, 对应两个极限值, 分别存在正整数 N_1 和 N_2, 使得当

$$n > N_1 \text{ 时有 } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$n > N_2 \text{ 时有 } |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此, 当 $n > \max(N_1,\ N_2)$ 时 (即 n 同时满足 $n > N_1,\ n > N_2$), 上面两个不等式都满足, 所以

$$|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \leqslant |a_n-a|+|a_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

两个数的距离要小于任意一个数, 这两个数必须相等, 即 $a = b$.

从几何上看, 如果有两个不相等的极限值 a 和 b, 则一定能够做两个分别以 a 和 b 为中心、且没有公共点的开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 和 $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$ (事实上, 只要取 ε 小于 a 和 b 之间距离的一半即可). 根据极限的定义, 当 n 充分大后, a_n 既要落到第一个开区间中, 又要落到第二个开区间中去. 这显然是不可能的. 所以, 不存在两个不同的极限值.

2° 因为极限的定义完全取决于充分大以后的各项取值的趋势, 所以, 改变有限项的值不会影响充分大以后的事情.

定理 2 设 $\{a_n\}$ 为收敛数列, 极限值记为 a,

1° 则 $\{a_n\}$ 为有界数列. 即存在一个正数 M (与变量 n 无关), 使得 $|a_n| \leqslant M$ 对所有的 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 成立 (即收敛数列必有界).

2° 如果存在 $b,\ c$ 两个实数, 使得 $b < a < c$, 则当 n 充分大时, 有 $b < a_n < c$. 特别地, 如果 $a > 0$, 则当 n 充分大时, 有 $a_n > 0$.

证 1° 取 $\varepsilon = 1$, 由定义知道, 当然存在一个自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < 1$, 即当 $n > N$ 时, 有 $|a_n| < |a| + 1$. 取

$$M = \max(|a|+1,\ |a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_N|),$$

注意到, 第一, 有限个数中一定能取到一个最大的; 第二, 上面确定的 M 显然与 n 无关. 则对所有自然数 n, 也就是数列的所有项, 都有 $|a_n| \leqslant M$.

2° 因为 $b < a$, 所以取 $\varepsilon = a - b$, 则存在一个自然数 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$|a_n - a| < \varepsilon = a - b$，因此

$$-(a-b) < a_n - a$$

即，当 $n > N_1$ 时，不等式 $a_n > b$ 成立. 类似可证明，存在自然数 N_2，当 $n > N_2$ 时，不等式 $a_n < c$ 成立. 所以当 $n > \max(N_1,\ N_2)$ 时，不等式 $b < a_n < c$ 成立.

定理 1 说明收敛数列的极限必唯一. 因此，当数列收敛时，不管你采用那种方法，其收敛的结果是一样的.

定理 2（1°）给出了收敛数列的一个必要条件，由此断言无界数列一定是发散的. 例如数列 $0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ \cdots,\ 0,\ n,\ \cdots$ 是一个无界数列，因此是发散的. 但是并非所有有界的数列都是收敛的，例如 $\{(-1)^{n-1}\}$ 是一个有界数列，但是它不收敛（见下面的例子）. 也就是说，有界不能保证收敛性. 有界只是对数列每一项取值范围的限制，是一种宏观控制，而收敛是要求数列的通项坚定不移地无限接近一个固定的数.

定理 2（2°）可以推出下列结果，它由收敛数列通项 a_n 的界限，推断其极限的界限.

推论 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，b 和 c 是两个实数，如果 $b \leqslant a_n \leqslant c$ 对充分大的 n 成立，则 $b \leqslant a \leqslant c$.

事实上，如果 $a < b$，则根据定理 2（2°），有 $a_n < b$ 对充分大的 n 成立，这与假设矛盾，所以 $a \geqslant b$，同样可证 $a \leqslant c$.

注意到，推论中即使是 $a_n > b$（即是严格的不等式），也不一定能够保证 $a > b$. 例如 $a_n = \frac{1}{n} > 0$，但它的极限值却是 0.

定理 3 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b，

1° 如果当 n 充分大时有 $a_n \geqslant b_n$，则 $a \geqslant b$；

2° 如果 $a > b$，则当 n 充分大时，有 $a_n > b_n$.

证 1° 假设结论不真，即 $a < b$，取 c 满足 $a < c < b$，则由定理 2（2°）知，当 n 充分大时，即存在正数 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，有 $a_n < c$. 同理，存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，有 $b_n > c$. 所以当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时，就有 $a_n < c < b_n$，这与条件相矛盾，所以假设是错误的，定理的结论是正确的.

2° 取 c 满足 $a > c > b$，因为 $\{a_n\}$ 的极限是 a，所以由定理 2（2°）知，存在一个整数 N_1，使得 $n > N_1$ 时，有 $a_n > c$. 同理，存在一个整数 N_2，使得当 $n > N_2$ 时，有 $b_n < c$. 所以当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时，就是我们所希望证明的结果.

推论 设 $\{a_n\}$ 为收敛数列，其极限是 a.

1° 如果当 n 充分大时，有 $a_n \geqslant 0$，则 $a \geqslant 0$;

2° 如果 $a > 0$，则当 n 充分大时，有 $a_n > 0$.

1.1.3 子数列

数列 $\{a_n\}$ 的子数列（简称子列），是指取自原数列 $\{a_n\}$ 中的无穷多项，按照原数列

中同样的顺序写成的一个新的数列. 于是，$\{a_n\}$ 的子列是这种形式：$\{a_{n_k}\}$ $(k \geqslant 1)$，其中 n_k $(k \geqslant 1)$ 都是正整数，满足 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$.

下面的结果, 在直观上是显然的

定理 4 设 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则其任意一个子数列也收敛于 a.

证 设 $\{a_{n_k}\}$ $(k \geqslant 1)$ 是 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 的一个子列, 对于任意给定的正数 ε, 我们要指出, 存在一个正数 K, 使得 $k > K$ 时, 有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$

事实上, 由于 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 所以对于上述的 ε, 一定存在一个正数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

因为 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，而且都是正整数，所以一定存在某个 K，使得当 $k > K$ 时，$n_k > N$，于是，当 $k > K$ 时，有

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

即

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

定理的另一个含义是，如果一个数列有两个子列分别收敛到不同的值，或者有一个子列不收敛, 则原数列一定没有极限. 因此, 这个定理通常用来证明一个数列没有极限.

例 5 求证: 数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

证 设 $a_n = (-1)^n$, 则它的子列 $\{a_{2k}\}$ 以 1 为极限，而子列 $\{a_{2k-1}\}$ 以 -1 为极限. 故原数列发散.

例 6 设数列

$$1,\ 1, 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ \cdots,\ 1,\ n,\ \cdots$$

则它有一个子列

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \ldots$$

是发散的, 所以, 原数列发散.

例 7 若一个收敛数列的极限不为 0, 则这个数列中至多只有有限多个项为 0.

证 若数列中有无穷多项是 0, 则这些项可构成原数列的一个子列, 它的极限显然是 0, 但由定理 4 知, 它的极限应该和原数列一样, 所以不为 0, 矛盾. 故原结论成立.

1.1.4 收敛数列的四则运算

定理 5 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b, 则

1° 数列 $\{a_n \pm b_n\}$ 收敛, 且极限是 $a \pm b$, 即有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b.$$

2° 数列 $\{a_nb_n\}$ 收敛，且极限是 ab，即有

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab.$$

特别地，

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = ca.$$

其中 c 是一个常数，也就是说，常数可以提取到极限号之外.

3° 若 $b\neq 0$，则数列 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 收敛，且极限是 $\frac{a}{b}$，即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

所以，收敛数列的极限运算和四则运算是可以交换的. 同时上述结果也不难推广到有限多个收敛数列参与四则运算的情形. 对于 3° 中的结论，可能会因为某些 b_n 为 0，而使得分式没有定义，但是因为 $\{b_n\}$ 的极限 $b\neq 0$，所以这样的 b_n 至多只有有限多个，因此，我们可以改变这有限多个项的值，不会改变 $\{b_n\}$ 的收敛性，也不会改变它的极限. 或者干脆在 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 中删除这些没有定义的有限多个项，不会改变其收敛性和极限的.

证 1° 首先对求和的情况进行证明. 即要证明，对于任意的正数 ε，可找到一个整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$.

由于 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b，所以对于上述 ε，分别存在 N_1 和 N_2 使得，

$$\text{当 } n>N_1 \text{ 时，有 } |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

以及

$$\text{当 } n>N_2 \text{ 时，有 } |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此，若取 $N=\max(N_1,N_2)$，则当 $n>N$ 时，上面两个式子同时成立，所以有

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| \leqslant |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

同样可证明两个数列相减的情况.

2° 首先注意到

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab| &\leqslant |a_nb_n-a_nb|+|a_nb-ab|\\ &= |a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|.\end{aligned}$$

其次注意到，由于 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是收敛数列，故都是有界的，取一个大的界 M，使得

$$|a_n|,\ |b_n|<M \quad (n\geqslant 1).$$

因而 $|b|\leqslant M$. 而且，对于任意的正数 ε，存在一个整数 N，使得当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad |b_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

同时成立. 所以当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &< M|b_n - b| + M|a_n - a| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.\end{aligned}$$

3° 因为

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

由 2° 可知, 只需证明数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 收敛于 $\frac{1}{b}$ 即可.

不妨假定 $b > 0$. 我们有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|}.$$

所以, 对于任意给定的正数 ε, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$b_n > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

及

$$|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}.$$

故知, 当 $n > N$ 时

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

有了定理 5, 在计算极限的时候, 往往只要将一些已知极限的值进行四则运算就可以了, 而不必再使用 "ε–N" 语言作机械繁琐的叙述.

例 8 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n).$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 9 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - n + 5}{2n^3 + n^2 + n + 1}.$$

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - n + 5}{2n^3 + n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}.$$

把分子、分母的各项用它们的极限值代进去, 就得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - n + 5}{2n^3 + n^2 + n + 1} = \frac{3}{2}.$$

例 10 求极限
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot 3^n}{3^n+5\cdot 2^n}.$$

解
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot 3^n}{3^n+5\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+5}{1+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=5.$$
这里用到
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0.$$

1.1.5 数列收敛的判别法则

确定一个数列是否收敛，是数列极限中的基本问题. 正如我们前面提到的那样，极限的定义，虽然是最基本的概念，但是用它来判断一个数列的收敛性，还显得过于原始. 我们这里讲述数列收敛的几个重要判别方法.

第一个判别方法是初等而实用的. 大致上说，其基本精神是用已知收敛的数列，推断所考虑的数列的收敛性. 当它奏效时，不仅能证明数列的收敛性，而且还能求出具体的极限值. 其具体做法是：如果被考虑的数列的通项，被夹在两个收敛到同一个极限的数列的通项之间，那么，它一定也会“被迫”收敛，而且具有相同的极限. 所以通常称为两边夹法则.

定理 6 若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛于 a，且对所有充分大的 n，有
$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n.$$
则数列 $\{c_n\}$ 收敛，而且极限也为 a.

证 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛于 a，所以对于任意给定的正数 ε，一定存在相应的整数 N_1 和 N_2，使得当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$，从而
$$a-\varepsilon<a_n.$$
当 $n>N_2$ 时，$|b_n-a|<\varepsilon$，从而
$$b_n<a+\varepsilon$$
条件中所谓“对所有充分大的 n”，即表明存在整数 N_3，使得当 $n>N_3$ 时，有
$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n.$$

现在取 $N=\max(N_1,N_2,N_3)$，所以当 $n>N$ 时，上述三个不等式同时满足，进而有
$$l-\varepsilon<a_n\leqslant c_n\leqslant b_n<l+\varepsilon.$$
即 $|c_n-a|<\varepsilon$，这表明 $\{c_n\}$ 收敛于 a.

例 11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}$，其中 α 是给定的正实数.

解 当 $\alpha > 0$ 时，显然有

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} < 1 + \frac{1}{n^\alpha}$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$，所以应用定理 6，所求极限为 1.

例 12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 注意到

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

而

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}, \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

所以，利用定理 6，可知所求的极限为 1.

例 13 $a > 0$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

证 当 $a = 1$ 时，结论是显然的. 若 $a > 1$，因为 $\sqrt[n]{a} > 1$. 故可设 $\sqrt[n]{a} = 1 + \lambda_n \quad (\lambda_n > 0)$，于是有

$$a = (1+\lambda_n)^n > 1 + n\lambda_n.$$

即有

$$0 < \lambda_n = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n} = 0$，故由定理 6 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

若 $0 < a < 1$，则 $\frac{1}{a} > 1$，故有

$$\lim \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = 1.$$

例 14 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

证 命 $\sqrt[n]{n} = 1 + \lambda_n$, 则有

$$\begin{aligned} n = (1+\lambda_n)^n &= 1 + n\lambda_n + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2 + \cdots \\ &> 1 + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2, \end{aligned}$$

由上式解得 $\lambda_n < \sqrt{\dfrac{2}{n}}$，故有

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 = \lambda_n < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

由两边夹法则，就得到所证结果.

如果不借助外在信息，而仅根据数列自身内在的特性如何判断数列的收敛性，是我们特别感兴趣的. 从数列收敛的定义来看，它主要在于估计差值 $|a_n - a|$，但这种判断方法只是当极限值是已知的情况下才有可能应用. 我们需要建立一种不要求预先知道极限值，而仅根据数列内在的性质，来判断收敛性判别方法. 这就是下面的定理 7 和定理 8. 在讲述这两个定理之前，我们回忆一下所谓“单调”的概念. 数列 $\{a_n\}$ 称为

$$\text{单调递增的，如果}\quad a_n \leqslant a_{n+1},\ (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\text{单调递减的，如果}\quad a_n \geqslant a_{n+1},\ (n = 1, 2, \cdots)$$

单调递增和单调递减数列，通称单调数列.

定理 7 （单调有界判别法） 单调数列收敛的充分必要条件是其为有界数列.

注意：如果数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的，则其有界等同于说它有上界，即有一个常数 M，使得 $a_n \leqslant M,\ n = 1, 2, \cdots$，如果 $\{a_n\}$ 是单调递减的，其有界等同于说它有下界，即有一个常数 M，使得 $a_n \geqslant M,\ n = 1, 2, \cdots$.

我们知道，收敛数列一定是有界的，但反之不然. 因为有界只是一种宏观控制，并不能确定数列的通项 a_n 随着 n 增大时的趋向. 而对于单调数列则不然. 例如一个单调递增的数列 $\{a_n\}$，如果没有界，a_n 的趋向就会一步步增大到无穷. 一旦有界，虽然 a_n 随着 n 的增大而不断增大，但前方有一个界“阻难”着，所以 a_n 越来越接近某一点. 这些只是一个形象地描述，不能代替证明. 要想证明“单调有界必有极限”这个结论，首先要了解“界”这个概念. 但是必须事先指出，下面提到的“确界”的概念，虽然在实数范围内非常直观，但证明需要用到实数理论。我们将在第三册详细说明.

设 $\mathbf{E}$ 是一个由实数组成的集合，如果存在一个实数 A，使得对于任何 $x \in \mathbf{E}$，有 $x \leqslant A$，则称 A 是数集 $\mathbf{E}$ 的上界. 如果存在实数 B，使得对于任何 $x \in \mathbf{E}$，有 $x \geqslant B$，则称 B 是数集 $\mathbf{E}$ 的下界. 如果数集 $\mathbf{E}$ 既有上界，又有下界，则称 $\mathbf{E}$ 是有界集合.

显然，数集 $\mathbf{E}$ 如果有上界（或者下界），则它的上界（或者下界）不是唯一的. 我们感兴趣的是**最小的上界** 或**最大的下界**.

所谓 $\mathbf{E}$ 的最小的上界 A 是指：1° A 是它的一个上界；2° 比 A 小一点点的数都不是它的上界. 用数学的语言来描述就是，对于任意的正数 ε，$A - \varepsilon$ 不是 $\mathbf{E}$ 的上界，因此一定存在一个数 $x_\varepsilon \in \mathbf{E}$，使得 $x_\varepsilon > A - \varepsilon$. 这种最小的上界称为 $\mathbf{E}$ 的 **“上确界”**，记为 $\sup \mathbf{E}$. 同理可定义**下确界**，记为 $\inf \mathbf{E}$.

例如：

$$\inf\left\{\frac{1}{n},\ n = 1, 2, \cdots\right\} = 0, \quad \sup\left\{\frac{1}{n},\ n = 1, 2, \cdots\right\} = 1$$

$$\inf(0,\ 1) = 0, \quad \sup(0,\ 1) = 1$$

读者可以在实轴上给出上 (下) 界以及上 (下) 确界的几何描述.

确界原理 非空有上界的数集 $\mathbf{E}$ 必有上确界；非空有下界的数集 $\mathbf{E}$ 必有下确界.

根据这个原理，我们可以证明定理 7.

定理 7 的证明　设数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，因此根据确界原理，数集

$$\mathbf{E}=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$$

必有上确界，记为 a. 我们将看到，a 就是数列 $\{a_n\}$ 的极限. 注意到，对于任意给定的正数 ε，则 $a-\varepsilon$ 不是 $\mathbf{E}$ 的上界，因此必存在一个数 $a_N\in\mathbf{E}$，使得 $a_N>a-\varepsilon$. 又因为 $\{a_n\}$ 是单调递增的，所以当 $n>N$ 时，有

$$a_n\geqslant a_N>a-\varepsilon$$

显然 $a+\varepsilon>a\geqslant a_n$ 对任何 n 成立. 所以当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

例 15　设 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n 重根式), 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解　a_n 满足递推关系

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}.$$

因此定义了一个数列 $\{a_n\}$. 首先观察到，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>a_1$，$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}>\sqrt{2+\sqrt{2}}=a_2$，如果 $a_n>a_{n-1}$ 成立，则

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n+2}-\sqrt{a_{n-1}+2}=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{a_n+2}+\sqrt{a_{n-1}+2}}>0$$

即 $a_{n+1}>a_n$，所以由归纳法证得，$\{a_n\}$ 是单调递增的.

另一方面，利用归纳法，因为 $a_1<2,\ a_2<2$，若 $a_n<2$，则 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}<2$. 即数列 $\{a_n\}$ 是有上界的. 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设其极限为 a. 将递推公式变为

$$a_{n+1}^2=a_n+2$$

在上式两端令 $n\to\infty$（注意上式两端的极限都已经知道是存在的，所以可以这么做）得

$$a^2=a+2$$

解得 $a=-1$ 或 $a=2$. 但是 $a_n>0$，故 $a\geqslant 0$，从而可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

对于有界数列，根据确界原理，我们可以证明如下列紧性定理.

定理 8 (Bolzano-Weierestrass 定理) 从任何有界的数列中可选出一个收敛的子列.

证 不妨设 $\{a_n\}$ 是一个有界的数列, 令 $\alpha_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$, 则 $\{\alpha_n\}$ 单调增且有上界, 因而收敛. 设 α 为其极限. 根据 α_1 是下确界的性质, 存在自然数 n_1 使得 $\alpha_1\leqslant a_{n_1}<\alpha_1+1$. 又存在 a_{n_2} 使得 $\alpha_{n_1+1}\leqslant a_{n_2}<\alpha_{n_1+1}+\frac{1}{2}$. 按照这个过程, 可以构造 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $\alpha_{n_k+1}\leqslant a_{n_{k+1}}<\alpha_{n_k+1}+\frac{1}{k+1}$. 且 $n_{k+1}\geqslant n_k+1$. 因为 $\alpha_{n_k}\to\alpha\ (k\to\infty)$, 所以 $a_{n_k}\to\alpha\ (k\to\infty)$. 证毕.

对于一般的数列，我们有下面的 Cauchy 收敛准则. 简单地说，这个准则断言，一个数列收敛，必须且只须其充分靠后的任意两项均接近到任意指定的程度. 或者从几何上看，收敛的充要条件是存在任意小的一个区间，使得数列只有有限项落入区间之外.

定理 9 (Cauchy 准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对任意给定的正数 ε，存在整数 $N=N(\varepsilon)$（即 N 可能依赖于 ε），使得当 $m,n>N$ 时，就有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

定理的必要性部分是容易证明的（请读者自行完成），但是充分性的证明要用到实数理论，我们同样留在第三册讨论.

定理中的条件也可以说成：对任意给定的正数 ε，存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，就有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

对所有自然数 p 成立.

例 16 设 $a_n=\dfrac{\sin 1}{1^2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{n^2}$，证明：$\{a_n\}$ 收敛.

证 因为

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right|\\&\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

所以，对于任意给定的正数 ε，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，对任何自然数 p 都有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 判则可知 $\{a_n\}$ 收敛.

例 17 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 求证:$\{a_n\}$ 发散.

证 对任何自然数 n，取 $p=n$，则有

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

由 Cauchy 判则可知 $\{a_n\}$ 发散.

1.1.6 数 e

我们将证明下面的重要结果.

定理 10 设 $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$n\geqslant 1$，则数列 $\{e_n\}$ 收敛.

证 首先证明数列是递增的. 事实上，由二项式定理可得

$$\begin{aligned}e_n&=1+1+\sum_{k=2}^{n}C_n^k\cdot\frac{1}{n^k}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}\\&=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),\end{aligned}$$

$$e_{n+1}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

比较 e_n 和 e_{n+1} 两个表达式子的右端和号中的对应项，显然，前者较小. 而 e_{n+1} 所多出来的一项 $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 0$，故 $e_{n+1} > e_n$. 所以 $\{e_n\}$ 为严格单调增加数列.

然后，我们证明数列是有界的. 在 e_n 上述展开中

$$0 < \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1$$

所以

$$\begin{aligned} e_n &< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

最终我们证明了该数列是单调递增有上界的，因此一定收敛. 记

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

由上面的证明可见 $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$，所以 $2 \leqslant e \leqslant 3$. 进一步还可以证明，$e$ 是一个无理数，其数值是 $e = 2.71828182\cdots$.

微积分中以及在其他方面，常用到以 e 为底的对数（我们将在介绍导数时作一种解释），这种对数称为自然对数，简记为 ln.

注记 定理 10 是用极限来产生一个数的例子（关于 e 是无理数的证明将在第三章讨论函数的 Taylor 展开时给出）. 或者说是无理数 e 可以用有理数列的极限表示. 类似构造的另一个例子，就是关于圆周率 π 的定义，它是借助单位园的具有 2^n 条边的内接正多边形的面积所构成的数列的极限（有兴趣的读者可参阅有关文献）. 关于实数系统与极限概念的联系，将在第三册中详细讨论.

例 18 求 $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right] = e$$

1.1.7 发散到无穷大的数列

大致地说，当 n 无限增大时如果数列 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 中的通项 a_n 的绝对值任意地大，就称该数列发散到无穷大.

定义 2 设 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 是给定的数列，若对于任意给定的正数 M，都存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $|a_n| > M$，则称数列 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 发散到无穷大，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{或} \quad a_n \to \infty\ (n \to \infty)$$

必须注意的是，趋于无穷大的数列是发散的数列，因此关于极限的运算等定理，对于这种数列一般并不成立.

由定义可知，发散到无穷大的数列一定是无界的，但反之不然. 例如数列

$$0,\ 1,\ 0,\ 2,\ \cdots,\ 0,\ n,\ \cdots$$

显然是无界的，但并不趋于无穷大. 然而，对于单调数列，趋于无穷大与无界是等价的（试比较定理 7）.

定理 11 单调数列发散到无穷大的充分必要条件是其为一个无界数列.

证 条件的必要性已经在上面提过. 现在证明充分性，即：如果 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 是单调递增但无上界的数列，则 $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$.

事实上，对任意的正数 M，因为 $\{a_n\}$ 无上界，故必然存在自然数 N，使得 $a_N > M$. 由于数列是单调递增的，所以当 $n > N$ 时，有 $a_n > a_N > M$. 这就是所要的证明.

关于单调递减数列 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 的情况可以类似的证明，也可以利用上面的结果，因为 $\{-a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 就转化为单调递增的情况.

数列 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 发散于无穷大，则称当 n 趋于无穷时 a_n 是**无穷大量**. 对应地，如果一个数列 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 收敛于 0，则称当 n 趋于无穷时 a_n 是**无穷小量**.

1.1.8 上极限与下极限

根据定理 4 我们知道收敛数列是有界的而且任何子列与原数列有相同的极限. 又根据定理 8，有界数列必有收敛子列. 一般来说有界数列可能有许多有不同极限的子列. 我们要问：当有界数列的任何收敛子列都有相同的极限时，该有界数列是否收敛? 回答是肯定的，证明留作习题. 因此, 不收敛的有界数列至少有两个有不同极限的子列. 显然有界数列的所有子列的极限所成的集合仍是有界的集合, 这个集合有确定的上极限和下极限. 对于无界的数列, 也可以取出趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的子列. 对于数列 $\{a_n\}$, 集合

$$E = \{l \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}:\ a_n \text{ 中有子列 } a_{k_n} \to l,\ n \to \infty\}$$

总是非空的. 令 $a^* = \sup E$, $a_* = \inf E$, 他们分别被称为数列 $\{a_n\}$ 的**上极限**和**下极限**, 记作

$$\limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n$$

根据上确界和下确界的定义, 可以证明 a^* 和 a_* 都在 E 中, 因此数列 $\{a_n\}$ 的上 (下) 极限正是它的一切收敛子列的极限所组成的集合中的最大 (小) 者. 显然下确界不超过上确界, 而且不难证明 $a_n \to a$ 等价于 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$.

习题 1.1

1. 用定义证明下面的结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{5+3n} = \dfrac{1}{3}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

2. 若数列 $\{a_n\}(n \geqslant 1)$ 满足条件: 任给正数 ε, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

3. 证明: 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.(数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

4. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leqslant M, (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

6. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

7. 证明下列数列不收敛:

   (1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$;　　(2) $a_n = 5\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + (-1)^n$.

8. 求下列极限:

   (1) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1}$;

   (2) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$;

   (3) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{2}{n(n+1)}\right)$;

   (4) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

   (5) $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n}),\ (|q| < 1)$.

9. 若 $a_n \neq 0\,(n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

10. 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

11. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

12. 下面的推理是否正确?

   (1) 设数列 $\{a_n\}$: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   解: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

   (2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
&= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n\text{个}} = 0.
\end{aligned}
$$

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1$.

13. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 $a,\ b$. 若 $a>b$, 则从某一项开始, 有 $a_n>b_n$; 反过来, 若从某项开始恒有 $a_n\geqslant b_n$, 则 $a\geqslant b$.

14. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b. 记 $c_n=\max(a_n,b_n),\ d_n=\min(a_n,b_n)\,(n=1,2,\cdots)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\max(a,b),\quad \lim_{n\to\infty}d_n=\min(a,b).$$

15. 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$; (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]$, 其中 $0<k<1$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$; (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}$;

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$.

16. 设 $a_1,\cdots,a_m$ 为 m 个正数, 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$.

17. 证明下列数列收敛:

(1) $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n=\alpha_0+\alpha_1 q+\cdots+\alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k|\leqslant M,(k=1,2,\cdots)$, 而 $|q|<1$;

(4) $a_n=\frac{\cos 1}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2}{2\cdot 3}+\frac{\cos 3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{\cos n}{n\cdot(n+1)}$

18. 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

(1) $a_n=\frac{n}{c^n},\ (c>1)$;

(2) $a_1=\frac{c}{2},\ a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2},\ (0\leqslant c\leqslant 1)$;

(3) $a>0,\ a_0>0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$, (提示: 先证明 $a_n^2\geqslant a$.);

(4) $a_0=1,\ a_n=1+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$;

(5) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1$, (n 个 $\sin$).

19. 设 $a_n\leqslant a\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

20. 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

21. 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, 求下列数列的极限:

(1) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$; (2) $a_n=\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$;

(3) $a_n=\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$; (4) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$.

22. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, 且 $|b_n|\geqslant b>0\,(n=1,2,\cdots)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$.

23. 确定 $n\to\infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n\sin\frac{n\pi}{2}(n\geqslant 1)$ 是否有界, 是否趋于无穷大.

24. 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}\,(n\geqslant 1)$ 定义. 证明: $a_n\to+\infty\,(n\to\infty)$.

§1.2 函数极限

1.2.1 函数

函数就是量与量之间的数学关系式. 数学和其他科学中绝大部分关系都受到函数关系的支配. 例如

自由落体下落时间与下落距离之间的关系是 $h=\frac{1}{2}gt^2$ (其中, g 是重力加速度);

质量是 m 的运动质点的动能是通过它的运动速度 v 按照公式 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 给出的;

而导线中有电流通过单位时间内产生的热量与电流强度 I 的关系是 $Q=\frac{1}{2}RI^2$, 其中 R 是导线的电阻;

在几何中, 对于给定锐角 α 的直角三角形, 与 α 相邻的直角边的长度 x 与三角形面积 S 之间的关系是 $S=\frac{1}{2}(\tan\alpha)x^2$, 二维平面坐标中抛物线上点的横坐标与纵坐标之间的关系是 $y=\frac{1}{2}ax^2$ (其中 a 表示抛物线开口的方向和大小).

这些来自不同问题的量与量之间的关系, 都是同样的二次函数.

对于定义在实数集合 $\mathbf{R}$ 的子集上、取值为实数的函数, 其严格的定义如下:

设 A 是 $\mathbf{R}$ 的子集, 若对于 A 中的每一个数 x, 有**唯一确定**的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应 (即函数的单值性), 将 y 记成 $f(x)$, 那么, 就称 f 是 A 上的一个实值函数. 集合 A 称为 f 的定义域, 而数 $f(x)$ 称为 f 的值. f 的一切值的集合叫做 f 的值域, 通常记成 $f(A)$, 即 $f(A)=\{y\mid y=f(x),\ x\in A\}$. 习惯上, 称上述的 x 为自变量, y 为因变量.

一个函数, 也可以看成是一个将 $A\subset\mathbf{R}$ 映入 $\mathbf{R}$ 内的一个映射:

$$f:\ A\longrightarrow\mathbf{R},\quad \text{或}\quad f:\ x\longmapsto y=f(x)$$

如果把实数与实数轴上的点一一对应, 则定义在实数上、取值为实数的函数, 有一种几何表示, 即 $y=f(x)$ 的图象. 将定义域所在的数轴作为二维坐标平面 Oxy 的横轴、值域所在的数轴作为纵轴, 则 $y=f(x)$ 的图象即是 Oxy 中坐标为 $(x,\ f(x))$ $(x\in A)$ 的点构成的平面点集 (大多数情况下, 这个点集是一条 (分段) 曲线).

反之, 平面上一条曲线上点的坐标 (x,y) 如果满足方程 $y=f(x)$ (或 $x=f(y)$), 则称曲线有函数表示. 例如开口向上或向下的一种抛物线就是 $y=ax^2$, 而开口向两侧的一种抛物线则是 $x=ay^2$.

函数的单值性反映在函数的图象上, 就是任何一条平行于 y 轴的直线, 与 $y=f(x)$ 的图象至多有一个交点.

设函数 f 的定义域为 A, 一般而言, 其值域 $f(A)$ 的性态及其复杂, 但有三种情形在微积分中特别重要.

1° **函数的值域** $f(A)$ **是一个有界数集**. 若存在一个常数 M, 使得 $f(A)$ 包含在区间 $[-M,\ M]$ 中, 即对任何一个 $x\in A$, 有 $|f(x)|\leqslant M$. 称满足这种情形的函数为 A 上的有界函

数，或者说函数 f 在 A 上有界.

2° **定义域 A 与值域 $f(A)$ 同序（或者反序）**. 即 A 中任意两个数 x_1, x_2 的大小次序，均与它们对应的值域 $f(A)$ 中的两个数 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ 的大小次序相同（或者相反），此时称函数 f 是单调的. 确切地说，$f(x)$ 称为 A 上

单调递增函数，对任意的 x_1, $x_2 \in A$, 如果 $x_1 < x_2$, 有$f(x_1) \leqslant f(x_2)$;

单调递减函数，对任意的 x_1, $x_2 \in A$, 如果 $x_1 < x_2$, 有$f(x_1) \geqslant f(x_2)$;

单调递增和单调递减函数，统称为单调函数. 若上面的不等号为严格不等号，则称 $f(x)$ 为严格单调递增（减）函数.

3° **定义域 A 与值域 $f(A)$ 一一对应**。即对每一个 $y \in f(A)$，都有唯一确定的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$。从函数图象上看，就是任何一条平行于 x 轴的直线，与函数的图象至多有一个交点. 此时，自然地导出一个由 $f(A)$ 到 A 地映射. 这个映射称为 f 的反函数（或逆映射），记为 f^{-1}. 它的定义域为 $F(A)$，值域为 A.

很明显，若 A 上的函数 f 有反函数，则 f 必然是 A 到 $f(A)$ 的一个一一映射.

不同的函数在他们公共有定义的区域内是可以进行加、减、乘、除四则运算的（做除法时，只要分母不出问题）. 这里主要介绍函数的另一种运算——函数的复合运算.

设有函数 $y = f(u)$，定义域为 B，值域为 C，以及 $u = g(x)$，定义域为 A，值域包含在 B 内. 则由

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

定义了 A 一个新函数 $f \circ g$，称之为 f 与 g 的**复合函数**. 通常记为 $y = f(g(x))$，而 u 称为中间变量.

从映射的角度看，就是从 A 到 B 再到 C 的一个映射

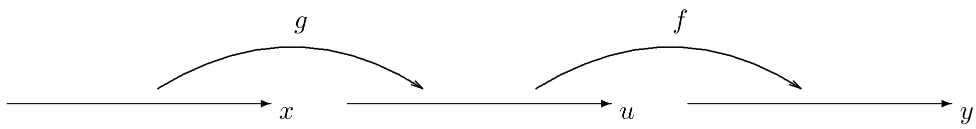

图 1.2

注意，$f \circ g$ 与 $g \circ f$ 一般并不相同，但容易看到，符合运算是满足结合律的

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

因此用 $f \circ g \circ h$ 表示，或者记为 $f(g(h(x)))$，这是三个函数的复合. 类似地可以考虑任意有限多个函数地复合.

最后，我们简单地罗列一些微积分中经常涉及地函数.

最基本的函数自然是常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数，称它们为**基本初等函数**. 由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除和复合运算得出的函数称为**初等函数**.

例如，有限种幂函数的线性组合，就是**多项式函数**：

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

两个多项式函数 $f(x)$、$g(x)$ 的商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 称为有理函数. 它的定义域当然就是不包括 $g(x)=0$ 的实根的所有实数.

有一种函数虽然不是初等函数，但是也是常见的，称为**分段函数**. 所谓符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

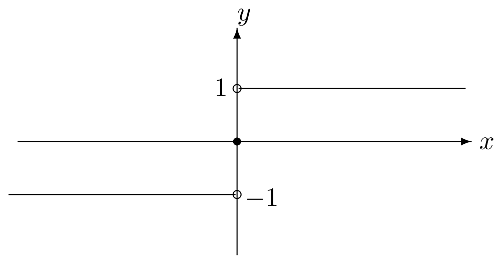

图 1.3

就是这种函数. 一般来讲，分段函数就是对于自变量的某些不同的值，相应的函数表达式不同的函数.

还有一类函数称之为参数方程表示的函数.

大家知道，由方程 $y = f(x)$ 表示的平面曲线有很大的限制. 这样的曲线与平行于 y 轴的直线相交不能多于一点. 典型的例外就是平面上的圆. 如果用参数方程表示曲线，就会灵活的多. 所谓参数方程表示，是指曲线上点的两个坐标 x 与 y 之间的关系是通过一个参数相联系的，即 x 和 y 可表示成下列形式

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

这样的参数方程表示也可以看成是从 $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$ 到平面 Oxy 内的一个映射（因此也称上式为函数的参数方程表示），

$$[\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \text{或} \quad t \longmapsto (x(t),\ y(t))$$

映射的像是 Oxy 平面内的一条曲线.

例如，以原点为圆心，半径为 r 的圆的参数方程

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

它在 Oxy 平面上的图象是一个圆，t 表示圆的中心角.

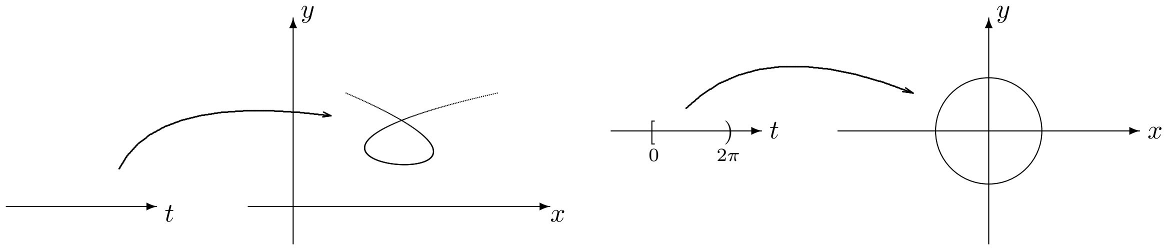

图 1.4

当一个圆沿着 x 轴匀速而无滑动地滚动时, 圆上一点的运动轨迹称为**摆线**. 它的参数方程是

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

其中 a 是圆的半径, t 表示时间.

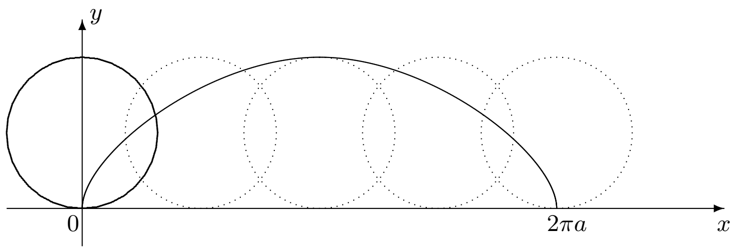

图 1.5

对于显式表示的函数 $y = y(x)$, 可以将它看成是一个参数方程表示的函数

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \end{cases} \qquad x \in [a, b]$$

这里, x 扮演了参变量的角色.

然而, 参数方程表示的函数一般情况下不能写出通常的显式表示. 以圆为例, 显然它不能表示成 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$, 因为无论在那种情况下, 都无法保证单值性. 但是, 如果分别考虑上半圆和下半圆, 则可以分别写出显式表达式(两个不同的函数).

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \;\; x \in (-r,\ r) \quad \text{或} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2}, \;\; x \in (-r,\ r)$$

1.2.2 函数在无穷大处的极限

类比于数列极限, 我们首先讨论函数 $y = f(x)$ 当 $|x|$ (相当于数列的 n) 无限增大时, $f(x)$ 是否有一个"确定的趋势". 当然, 这里我们要求函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义.

例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ (类比于离散的数列 $a_n = \frac{1}{n}$), 不难看出, 当 $|x|$ 无限增大时, $f(x) = \frac{1}{x}$

无限接近于 0. 也就是说，只要 $|x|$ 充分大，我们就能使 $\frac{1}{x}$ 接近于 0 达到预先指定的程度. 事实上，对于任意给定的正数 ε，只要 $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$，就有 $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$.

定义 1 设 $y = f(x)$ 至少在 $|x| > a > 0$ 有定义. 如果有一个实数 l 具有下列性质：对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 $X = X(\varepsilon) > a$，使当 $|x| > X$ 时有

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

则称当 x 趋向正无穷大时，$f(x)$ 的以 l 为极限. 记成

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l, \quad 或 \quad f(x) \to l \ (x \to \infty)$$

这种定义和数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限的定义基本意思是一样的. 只不过数列 $\{a_n\}$ 是定义在自然数集上的函数，其自变量 n 离散地增加直至无穷大. 而函数 $f(x)$ 的自变量 $|x|$ 则是连续地增加直至无穷大.

上述定义同样也有几何上的直观描述. 即在直角坐标系 Oxy 中，$f(x) \to l \ (x \to \infty)$ 等价于说，对于任意给定的正数 ε，在 x 轴上，总存在一点 X，使得当 $|x| > X$（或 $x > X$, $x < -X$）时，函数 $f(x)$ 的图象，一定会落在以两条平行于 x 轴的直线 $y = l - \varepsilon$, $y = l + \varepsilon$ 所夹的狭长区域之内（图 1.6）.

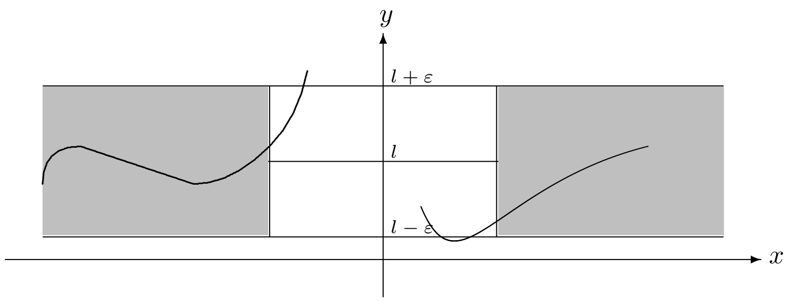

图 1.6

类似于上述定义，我们还可以给出当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 以 l 为极限的定义；以及当 $x \to -\infty$ 时，$f(x)$ 以 l 为极限的定义. 只要把定义 1 中的“$|x| > X$”分别换成“$x > X$”和“$x < -X$”即可（读者可以自行给出完整的叙述）. 分别记成

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l, \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

$f(x)$ 在正（或者负）无穷大处的极限，称为 $f(x)$ 在无穷大处的（两个）单侧极限. 不难看出，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件，是两个单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在且相等.

例 1 设 k 是正整数，证明：$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$

证 对任意的正数 ε，要想找到所希望的 X，只要解不等式

$$\left|\frac{1}{x^k} - 0\right| < \varepsilon$$

解得 $|x|>\varepsilon^{\frac{1}{k}}$. 所以只要取 $X=\varepsilon^{\frac{1}{k}}$，当 $|x|>X$ 时，就能保证上列成立，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0$$

例 2　设 $0<a<1$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$.

证　对任意给定的正数 ε，不妨设 $\varepsilon<1$，要使 $|a^x-0|=a^x<\varepsilon$，只要

$$x\ln a<\ln\varepsilon,$$

由于 $\ln a<0,\ \ \ln\varepsilon<0$，故只要取 $X=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}>0$，所以当 $x>X$ 时，有 $|a^x-0|=a^x<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=0,\ (0<a<1)$$

例 3　证明：$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

证　任给一个正数 $\varepsilon<1$，要使 $0<|e^x-0|=e^x<\varepsilon$，只要 $x<\ln\varepsilon$. 故取 $X=-\ln\varepsilon$，则当 $x<-X=\ln\varepsilon$ 时有 $e^x<\varepsilon$，即是所要证明的结论.

例 4　证明

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

证　任给正数 ε，要使

$$-\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\arctan x<-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$$

只须 $x<\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$，所以取 $X=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)>0$，当 $x<-X$ 时，就有

$$\left|\arctan x+\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

同理可证

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

由于当 x 趋于正、负无穷大时，函数 $\arctan x$ 的两个单测极限不相等，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

1.2.3　函数在一点处的极限

现在考虑当 x 与某个有限数 x_0（或者说数轴上一个固定的点）无限接近时，函数 $f(x)$ 的变化趋势. 这里自然要求 $f(x)$ 在 x_0 点的附近有定义（但在点 x_0 处可以没有定义），即函数在点集，或者数轴上包含点 x_0 的某个开区间

$$\{x\mid |x-x_0|<\eta\}$$

上有定义.

因此，如果当 x 与 x_0 无限接近时，函数 $f(x)$ 无限接近一个数 l，则说 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时，以 l 为极限. 或者说当 $|x-x_0|$ 充分小时，$|f(x)-l|$ 可以任意小. 换成“ε-δ”语言，就有

定义 2 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义（在 x_0 不要求有定义）. 如果对任意给定的正数 ε，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 则称 l 为当 x 趋向 x_0 时 $f(x)$ 的极限，记成

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l, \quad \text{或} \quad f(x)\to l\ (x\to x_0).$$

从函数 $f(x)$ 的图象可以看出，$f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时以 l 为极限的几何意义如图 1.7 所示

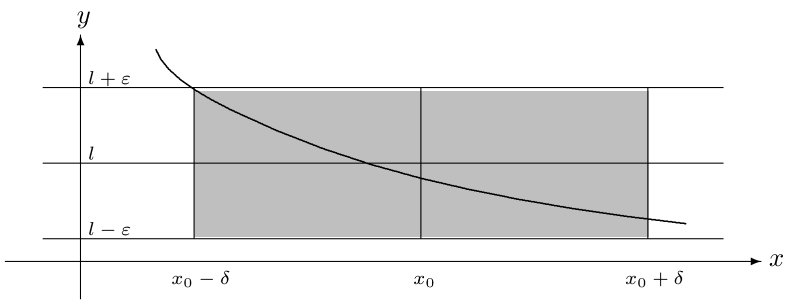

图 1.7

即，当 x 的值限制在区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内时，$f(x)$ 的图象夹在平行于 x 轴的两条直线 $y=l+\varepsilon$ 和 $y=l-\varepsilon$ 之间.

显然，常值函数 $f(x)=c$ 在任何一点 x_0 的极限是 c. 下面列举一些其他例子.

例 5 设 $f(x)=x$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0$

证 任给一个正数 ε，我们只要取一个正数 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

解 注意，函数在 $x=0$ 处没有定义. 当 $x\neq 0$ 时，总有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|.$$

因此，对任意的正数 ε，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 7 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$.

证 $\frac{x^2-1}{x^2-x}$ 在 $x=1$ 处不能有定义，而当 $x\neq 1$ 时，我们要估计

$$|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2|=|\frac{x-1}{x}|.$$

由于所说的极限仅与 1 附近的 x 有关，故可以先限制 x 的范围，例如设 $|x-1|<\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$. 在这个范围内，上面的估计为

$$|\frac{x-1}{x}|<2|x-1|.$$

所以，对于任意给定的正数 ε，取 $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2|=|\frac{x-1}{x}|<2|x-2|<2\delta\leqslant\varepsilon.$$

在定义 2 中，并没有限制 x 从什么方向接近 x_0. 如果要求 x 从直线上一个固定方向接近 x_0，就是所谓的单侧极限.

定义 3 设 $f(x)$ 在 x_0 的左侧附近有定义. 如果有一个常数 l 满足下述性质：对于任意的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 则称 l 是 $f(x)$ 在 x_0 的左极限，记成

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=l,\quad \text{或}\quad f(x)\to l\ (x\to x_0-0)$$

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的右侧附近有定义，类似地可以定义 $f(x)$ 在 x_0 的右极限，只要在关于左极限定义中的不等式 $-\delta<x-x_0<0$ 换成 $0<x-x_0<\delta$ 即可. 习惯上，记函数 $f(x)$ 的左右极限为 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$.

定理 1 函数 $f(x)$ 在 x_0 有极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 的左右极限都存在而且相等.

证明是显然的. 这个简单的事实可以用来判断函数 $f(x)$ 在 x_0 没有极限.

例 8 证明 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$，这里 $a>0$.

证 当 $a=1$ 时，结论显然成立. 故以下设 $a\neq 1$. 先证 $\lim\limits_{x\to 0+0}a^x=1$. 为此分两种情形：

设 $a>1$，此时 $a^x>1$. 对于任意的正数 ε，要使

$$|a^x-1|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad 1<a^x<1+\varepsilon,$$

只要

$$x\ln a<\ln(1+\varepsilon)\quad \text{或}\quad x<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$$

即可. 所以只要取 $\delta=\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$，则当 $0<x<\delta$ 时上述不等式成立，即 $\lim\limits_{x\to 0+}a^x=1$.

当 $0<a<1$ 时，只要注意到此时 $\ln a<0$，其他类似上述证明，可得到 $\lim\limits_{x\to 0-0}a^x=1$. 所以本例子的结论成立.

例 9 设

$$f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\geqslant 1\\ 2x-5, & x<1\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

证 不难看出在 1 的左侧，$f(x)=2x-5$，所以左极限为 $f(1-0)=-3$；而在 1 的右侧，$f(x)=3x+1$，所以，右极限为 $f(1+0)=4$，因此，函数 $f(x)$ 在 x 无限接近 1 时，左右两边的性态不同，所以极限不存在.

1.2.4 函数极限的性质和运算

在前面的 2、3 两小节中，我们分别定义了 $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$, $x\to x_0$ 以及 $x\to x_0$ 等极限过程. 本小节将要讨论极限的基本性质和四则运算. 为了便于讨论，这里只考虑 $x\to x_0$,(x_0 是有限) 的情形，其他情形可类似得到.

定理 2 若当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 有极限 l，则

1° 极限是唯一的.

2° $f(x)$ 在 x_0 的近旁是有界的. 即存在正数 M 和 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

3° 若 $a<l<b$，则在 x_0 的近旁，有 $a<f(x)<b$，即存在一个正数 δ，使得对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的所有 x，有 $a<f(x)<b$.

定理 3 设当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 l 和 l' 为极限，则

1° 若在 x_0 的附近，有 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $l\geqslant l'$.

2° 若 $l>l'$，则在 x_0 的附近，必有 $f(x)>g(x)$，即存在 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$.

3° 作为 1° 和 2° 的推论，如果在 x_0 的附近，有 $f(x)\geqslant 0$，则 $l\geqslant 0$；如果 $l>0$，则在 x_0 的附近，有 $f(x)>0$.

定理 4 设当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 l 和 l' 为极限，则

1° $f(x)\pm g(x)$ 在 x_0 处有极限，且极限为 $l\pm l'$，即

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x_0)\pm\lim_{x\to x_0} g(x_0).$$

2° 函数 $f(x)g(x)$ 在 x_0 有极限，且极限是 ll'，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x).$$

特别，$\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，其中 c 是常数.

3° 对于 $l'\neq 0$，函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限存在，且等于 $\dfrac{l}{l'}$. 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

定理 2— 4 的证明与数列极限的对应定理的证明完全类似，不再重复.

定理 5 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$, 但当 $t\neq t_0$ 时,$g(t)\neq x_0$. 则

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t))=l=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

证 任给一个正数 ε, 根据 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ 知, 一定存在一个正数 δ, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$，所以对于正数 δ，一定存在一个 $\tau>0$，使得当 $0<|t-t_0|<\tau$ 时，有 $0<|g(t)-x_0|<\delta$. 所以，当 $0<|t-t_0|<\tau$ 时有

$$|f(g(t))-l|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t))=l.$$

定理 5 告诉我们, 在求极限的过程中可以使用“变量代换”, 从而有可能简化求极限的过程.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+3x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=1.$

例 11 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则对于任意一点 x_0，有

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0).$$

证 利用 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$，得 $\lim\limits_{x\to x_0} x^k=x_0^k$，再利用极限得加法，就得到结果.

例 12 求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

解 当 $x\to -1$ 时，原式括号中的每一项都没有极限. 所以不能直接利用极限的性质计算. 但是，当 $x\neq -1$ 时，可以将括号内的分式进行通分和化简得

$$\frac{x-2}{x^2-x+1},$$

此时，分子分母在 $x\to -1$ 时，都有极限，因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)&=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+1)}=-1.\end{aligned}$$

例 13 设 $a>0$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$.

证 记 $y=x-x_0$, 则当 $x\to x_0$ 时有 $y\to 0$, 故由定理 6 就得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0}) &= a^{x_0}\lim_{x\to x_0}(a^{x-x_0}-1)\\ &= a^{x_0}\lim_{y\to 0}(a^y-1)=0.\end{aligned}$$

定理 6 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时有极限的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}$ $(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$.

证 "必要性" 设 $\{a_n\}$ $(a_n\neq x_0)$ 是一个以 x_0 为极限的数列. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$, 故对于任意给定得正数 ε, 一定存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$, 所以对于已经有的 $\delta>0$, 存在一个自然数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $0<|a_n-x_0|<\delta$, 所以当 $n>N$ 时, $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 即是

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=l.$$

"充分性" (反证) 假设当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 不以 l 为极限. 那么一定有一个 $\varepsilon_0>0$, 使对于任何一个正数 δ, 都能找到一个 x_δ, 即使 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$, 但是 $|f(x_\delta)-l|\geqslant\varepsilon_0$.

因此, 取 $\delta_n=\frac{1}{n}$, 对应每一个这样的 δ_n, 都可找到 a_n, 使

$$0<|a_n-x_0|<\delta_n=\frac{1}{n},\quad 但\quad |f(a_n)-l|>\varepsilon_0$$

当 $n\to\infty$ 时, 上面第一个不等式表明 $\{a_n\}$ 以 x_0 为极限, 而第二个不等式表明, $\{f(a_n)\}$, $(a_n\neq x_0)$ 不以 l 为极限. 这与条件相矛盾, 所以假设不成立, 所以必有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=l.$$

该定理说明, 当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 的的性态如果在两个趋于 x_0 的点列上不一致, 则 $f(x)$ 一定没有极限.

例 14 证明: 当 $x\to 0$ 时 $\sin\frac{1}{x}$ 没有极限.

证 取 $a_n=\frac{1}{2n\pi}$, $b_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$. 显然有 $\lim a_n=\lim b_n=0$. 但是, $\lim f(a_n)=0$, $\lim f(b_n)=1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

1.2.5 函数极限存在判别法

定理 7 设在 x_0 的附近, 有

$$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x).$$

则, 当 $x\to x_0$ 时, 如果函数 $h(x)$ 和 $g(x)$ 都以 l 为极限, 那么, $f(x)$ 也以 l 为极限.

其证明与数列时的"两边夹"的定理类似.

定理 8 设 $f(x)$ 在 (a,b) 中单调有界, 则 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 均存在.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调增. 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 有上界, 故有上确界 M. 下面就来证明 $f(b-0)=M$.

任给 $\varepsilon>0$, 由于 $M-\varepsilon$ 不是 $f(x)$ 的上界, 故必有 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>M-\varepsilon$. 取 $\delta=b-x_0$, 由 f 的单调性可知, 当 $b-\delta=x_0<x<b$ 时, 就有

$$M-\varepsilon<f(x)\leqslant M.$$

因此 $f(b-0)=M$.

类似可证明 $f(a+0)$ 存在.

推论 设 $f(x)$ 在 (a,b) 中单调有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 中每一点 x_0 都有左右极限.

取 $x_0\in(a,b)$，只要分别在 (a,x_0) 和 (x_0,b) 中应用定理 8 即可.

定理 9 (Cauchy 判别准则) 函数 $f(x)$ 在 x_0 有极限的充分必要条件是：任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x'-x_0|,\ |x''-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

证 "$\Rightarrow$" 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故当 $0<|x'-x_0|,\ |x''-x_0|<\delta$ 时

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&\leqslant|f(x')-l|+|l-f(x'')|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" 任取一个以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}(a_n\neq x_0)$，对于任意给定的正数 ε，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x'-x_0|,\ |x''-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 因为 $\lim a_n=x_0, a_n\neq x_0$，故存在自然数 N，使得当 $m,n>N$ 时，有 $0<|a_m-x_0|,\ |a_n-x_0|<\delta$，因此也就有

$$|f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon.$$

所以数列 $\{f(a_n)\}$ 满足数列的 Cauchy 收敛准则，故收敛. 设

$$\lim f(a_n)=l.$$

这个极限 l，也正是函数在 $x\to x_0$ 时的极限. 事实上

对于任意给定的正数 ε，一方面，由定理 9 中的充分条件可知，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x'-x_0|,\ |x''-x_0|<\delta$ 时，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2},$$

另一方面, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, 故存在一个自然数 m, 使 $0 < |a_m - x_0| < \delta$ 及 $|f(a_m) - l| < \varepsilon/2$, 于是当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}|f(x)-l| &\leqslant |f(x)-f(a_m)| + |f(a_m)-l| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

1.2.6 两个重要极限

本节中, 我们将利用函数极限的“两边夹”的方法, 证明两个重要的函数极限.

定理 10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

为此我们需要证明一个引理, 引理的本身也是非常有用的.

引理 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$.

证 如图 1.8 所示, 单位圆的切线与 OD 的延长线交于点 B, 由于

$$\triangle AOD\ \text{面积} < \text{扇形}AOD\ \text{面积} < \triangle AOB\ \text{面积},$$

也就是

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$

这就是要证明的结果.

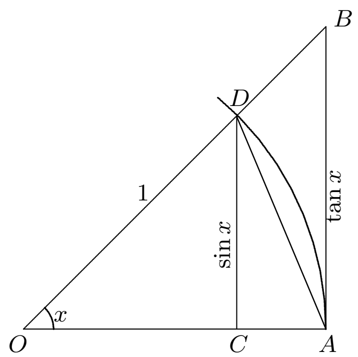

图 1.8

由引理易知, 对于所有实数 x, 有 $|\sin x| \leqslant |x|$, 且等号只在 $x = 0$ 成立.

现在证明定理. 首先考虑右极限. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 由于 $\sin x > 0$, 由引理易知

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{即} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

因此

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 < 2\sin\frac{x}{2} < x$$

所以, 由两边夹的方法得到

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

当 $x \to 0-$ 时, 令 $y = -x$, 则 $y \to 0+$, 所以

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0+}\frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0+}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

所以定理得证.

定理 11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

换句话说，当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限存在，而且和数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ $(n\geqslant 1)$ 的极限相等（前者是连续的变量，后者是离散的变量）.

证 由于对任意的 $x>1$，有 $[x]\leqslant x<[x]+1$，以及

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=e$$

根据两边夹的法则，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

当 $x\to-\infty$ 时，令 $y=-x$，则 $y\to+\infty$，利用上面结果，就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y\\&=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

从而就有了定理的结果.

定理 11 中的极限，还有下列一种常见的等价形式

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

上述两个极限不但证明是基本的，而且不少求极限问题可以最终归结到上述两个极限. 我们在此几个例子.

例 15 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

证明 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，因为

$$0<1-\cos x<x$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x=1$. 但 $\cos x$ 是偶函数，故有 $\lim\limits_{x\to 0-}\cos x=1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

根据这个结果，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例 16 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

例 17 设 x_0 是任意实数，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

由引理得到的不等式 $|\sin x|\leqslant|x|$ 可知

$$0\leqslant|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|$$

利用两边夹的方法，可知结论成立.

1.2.7 无穷大量与无穷小量

在某极限过程中趋于无限大的量，就叫“无穷大量”，严格地说，就是

定义 4 设 $f(x)$ 在 x_0 的附近有定义（在 x_0 这一点上可能没有定义）. 如果对于任意给定的一个正数 $M>0$，都存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>M.$$

则称**“$f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量”**. 记成

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad\text{或}\quad f(x)\to\infty\ (x\to x_0).$$

如果当 x 在 x_0 的某个邻域中变化时, 无穷大量 $f(x)$ 保持恒正或恒负, 我们就给 ∞ 也冠以相应的符号, 即可以定义

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty,\quad\text{或}\quad\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty.$$

对于其他形式的极限过程，也可以类似地定义无穷大量.

注意,“无穷大量”并非指（绝对值）很大的数，而是在变化过程中趋于无穷大的变量. 例如

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=\infty,\quad\lim_{x\to 0+}\ln x=-\infty,\quad\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty\quad\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

结论 1 显然，在同一个极限过程中（例如同是 $x\to\infty$ 或同是 $x\to x_0$ 等等），两个无穷大量的积还是无穷大量，但是两个无穷大量的和、差、商的性态具有个中可能. 故分别称为“$\infty\pm\infty$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式. 关于这些未定式的极限的计算将在 3.4 节中讨论.

类似于无穷大量的定义，我们称如果函数 $f(x)$ 在某一个极限过程中趋于零，则称“$f(x)$ **是当** $x \to x_0$ **(或其他极限过程)时的无穷小量**”.

例如，x, x^2, $\sin x$ 等函数是 $x \to 0$ 时的无穷小量；$\frac{1}{x}$, $\dfrac{1}{1+x^2}$ 等函数，是 $x \to \infty$ 时的无穷小量. 同样需要注意的是,“无穷小量”这个名称，所要描述的是其在某个极限过程中的变化特征，而不是一个量的大小.

结论 2 有限个无穷小量的代数和(线性组合)仍然是无穷小量；有限个无穷小量的积仍是无穷小量；一个有界变量与无穷小量的乘积仍然是无穷小量. 但是两个无穷小量的商却有各种不同的性态，称为“$\frac{0}{0}$ 型不定式”.

例如，当 $x \to 0$ 时，

$$x, \quad x^2, \quad \sin x, \quad x \sin \frac{1}{x}$$

都是无穷小量，但是它们的商在 $x \to 0$ 时，就有不同的性态：$\frac{x^2}{x} = x$ 是无穷小量；而 $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ 却是无穷大量；$\frac{\sin x}{x}$ 的极限为 1，而 $\frac{x \sin \frac{1}{x}}{x}$ 都不是无穷大(小).

结论 3 显然，在同一个极限过程中，如果 $u(x)$ 是无穷大量，则 $\dfrac{1}{u(x)}$ 就是无穷小量. 反之如果 $u(x)$ 是无穷小量(即在同一极限过程中趋于零)，但 $u(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{u(x)}$ 就是无穷大量；如果 $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l$，则 $u(x) - l$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

定义 5 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大量，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

1° 如果有非零常数 c, 使 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$, 就称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 (当 $x \to x_0$ 时的) 同级无穷大量. 特别当 $c = 1$ 时, 称它们是等价无穷大量, 记成

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

2° 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0\,(\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty)$, 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低级的无穷大量或 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 高级的无穷大量. 记成

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to x_0).$$

例 18 $x^2 + 3x + 5 \sim x^2$ $(x \to \infty)$.

例 19 证明:$\ln x = o(x)$ $(x \to +\infty)$.

证 对 $x > 1$, 则有自然数 k, 使得

$$2^{k-1} < x \leqslant 2^k.$$

故有

$$\ln x \leqslant k \ln 2 < k.$$

于是

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2k}{2^k} = \frac{2k}{(1+1)^k}$$
$$< \frac{2k}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{4}{k-1}.$$

由于当 $x \to +\infty$ 时,$k \to +\infty$, 故由夹逼原理即有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

设 $\alpha > 0$, 则当 $x \to +\infty$ 时,$y = x^\alpha \to +\infty$, 故

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^\alpha}{\alpha x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0.$$

所以对任何 $\alpha > 0$, 都有

$$\ln x = o(x^\alpha) \quad (x \to +\infty).$$

即当 $x \to +\infty$ 时, 不管 α 是多小的正数,$\ln x$ 都是比 x^α 还低级的无穷大量. 所以它趋向无穷大的速度“很慢”.

定义 6 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的两个无穷小量.

1° 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$. 则称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是 (当 $x \to x_0$ 时的) 同级无穷小量. 特别, 当 $c = 1$ 时, 称它们是等价无穷小量, 记成

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \qquad (x \to x_0)$$

2° 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ ($\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$), 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高级的无穷小量, 而 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低级的无穷小量. 记成

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (x \to x_0)$$

例如, 我们已经知道, 当 $x \to 0$ 时

$$\tan x \sim \sin x \sim x, \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

定理 12 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的等价无穷小量 (即 $\alpha(x) \sim \beta(x), \quad (x \to x_0)$), 如果

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) u(x) = l, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{v(x)}{\alpha(x)} = l',$$

则

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) u(x) = l, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{v(x)}{\beta(x)} = l',$$

其中 l 和 l' 还可以是无穷大.

证 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \alpha(x) u(x) = l.$

另一个等式类似可证.

定理 12 说明,**在求极限的过程中, 一个无穷小因子用一个与它等价的无穷小量替换, 最终结果不变**. 由于无穷大量的倒数是无穷小量, 所以**无穷大因子也可以实行等价替换**.

例 20 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$

解 因为 $\sin x\sim x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=2$$

例 21 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

需注意的是只能对无穷小量和无穷大量的因子实行等价替换, 而用加、减号连接的式子里, 就不能任意实行等价替换, 例如在例 21 中, 分子里的 $\tan x$ 和 $\sin x$ 如果用等价无穷小量 x 去替换, 就会得到错误的结果.

注记 在一个极限过程中对两个量(不管是不是无穷大(小)量)进行比较时,“O” 和 “o” 是两个常用的记号。通常

(1) 如果在 x_0 附近, 比值 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 有界, 即存在一个常数 $c>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant c|g(x)|,$$

就记

$$f(x)=O(g(x))\quad x\to x_0.$$

特别,

$$f(x)=O(1)\quad (x\to x_0)$$

表示 $f(x)$ 在 x_0 的附近是有界量.

(2) 如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则记

$$f(x)=o(g(x))\quad (x\to x_0).$$

需注意的是, 这里的等号, 只表示在 $x\to x_0$ 时, 两者之间的一种比较.

习题 1.2

1. 按定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0,\ (a>1)$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$;

(3) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x} = 2$;　(4) $\lim\limits_{x\to0+0} x^{\frac{1}{q}} = 0$ (q 为自然数).

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1} \left(x^5-5x+2+\frac{1}{x}\right)$;　(2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ (n 为自然数);

(3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

3. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$;　(2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{|x|}{x}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在正无穷大处的极限为 l, 则对于任意趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$. 特别地 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = l$.

5. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的极限.

(1) $f(x) = [x]$;　(2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;

(3) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 1+x^2, & x<0 \end{cases}$;　(4) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x>0 \\ x,\ x\leqslant 0 \end{cases}$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

7. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{2}$.

(提示: 先证明 $(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)\cdot\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}$.)

8. 证明: 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, 则 $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确. 叙述并证明, 当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时类似的结论.(应用本题结论, 可将极限过程为 $x\to\infty$ 的问题化为 $x\to0$ 处理, 或者反过来. 例如, 由定理 6 我们有 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.)

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$;　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

10. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\arctan x}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\frac{1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$;　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x^3-x+1)$.

11. 按定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,\ (a>1)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty,\ (a>1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=+\infty$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

12. 证明: 函数 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界; 但当 $x\to+\infty$ 时, 这个函数不是无穷大量.

13. 函数 $y=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是否有界? 又当 $x\to 0+0$ 时, 这个函数是否为无穷大量?

14. 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 C. 若动点沿曲线无限运离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 C 的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线　易知 (垂直于 x 轴的) 直线 $x=x_0$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\infty\ \text{ 或 }\ \lim_{x\to x_0+0}f(x)=\infty.$$

(ii) 水平渐近线　易知 (平行于 x 轴的) 直线 $y=b$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b\ \text{ 或 }\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

(iii) 斜渐近线　请读者证明, 方程为 $y=ax+b(a\neq 0)$ 的直线 L 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big);$$

或者

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-ax\big).$$

这里自然要假定所说的极限都存在.(提示: 以 $x\to+\infty$ 为例, 设曲线 C 及直线 L 上的横坐标为 x 的点分别为 M,N. 则 M 至 L 的距离, 是 $|MN|$ 的一个常数倍. 因此, 直线 L 为曲线 C 的渐近线, 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$, 由此易得所说的结果.)

求下列曲线的渐近线方程.

(1) $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$;　　(2) $y=\dfrac{3x^2-2x+3}{x-1}$.

15. 证明:(在同一极限过程) 等价的无穷小量有下列性质

(1) $\alpha(x)\sim\alpha(x)$　(自反性);

(2) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, 则 $\beta(x)\sim\alpha(x)$　(对称性);

(3) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x),\ \beta(x)\sim\gamma(x)$, 则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$　(传递性).

(注意,(1) 中自然需假定 $\alpha(x)$ 不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量 (在极限过程中) 均不取零值.)

16. 当 $x \to 0$ 时, 比较下列无穷小量的级

(1) $\tan x - \sin x$ 与 x^3; (2) $x^3 + x^2$ 与 $\sin^2 x$;

(3) $1 - \cos x$ 与 x^2.

17. 当 $x \to +\infty$ 时, 试比较下列无穷大量的级:

(1) n 次多项式 $P_n(x)$ 与 m 次多项式 $P_m(x)$ $(m, n$ 均为自然数);

(2) x^α 与 x^β,$(\alpha, \beta > 0)$;

(3) a^x 与 b^x,$(a, b > 1)$.

18. 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m, n$ 均为自然数); (2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{\arctan x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

第 1 章补充习题

1. 求下列数列的极限:

(1) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \frac{2n-1}{2n}$ (提示:$\dfrac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.);

(2) $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$;

(3) 设 $a_1 > 1,\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n},\ n = 1, 2, \cdots$;

(4) 设 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n},\ n = 1, 2, \cdots$.

2. 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 a, 证明, 当 n 充分大时有 $a_n \leqslant a$.(对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

3. 证明下面的数列收敛:

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$;

(2) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

4. 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 ε, 存在自然数 N, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

5. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 M, 使得对一切 n 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leqslant M.$$

证明: (1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛; (ii) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

6. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = a$.

8. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

9. 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

10. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

11. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$.

12. 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$

13. 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

第 2 章　函数的连续性

§2.1　连续函数的基本概念

2.1.1　连续的定义

直观上讲，函数连续，就是指函数的图象是一条“没有断开”的“连续”的曲线. 为了进一步给出严格的定义，首先观察以下几个例子.

第一个例子是符号函数（图 2.1 中第一个图象）

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

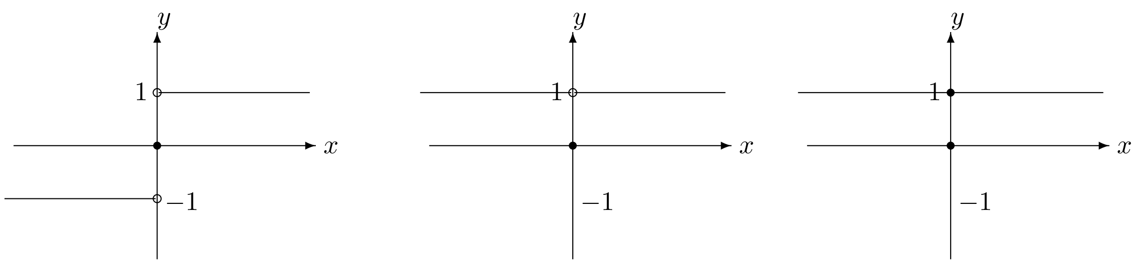

图 2.1

从图形上看，它在 $x = 0$ 处是断开的. 而在“间断点” $x = 0$ 处的显著特点是，当 $x \to 0$ 时，函数没有极限（因为左右极限分别为 -1 和 1，两者不相等）. 因此从直观上看，要使函数在一点是“连接”的，也就是“连续”的，应该要求函数在这一点有极限.

第二个例子是（图 2.1 中的第二个图象）

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然，它在 $x = 0$ 处是断开的，原因是函数虽然在 $x = 0$ 以 1 为极限，但极限值与函数本身在这一点的函数值（$f(0) = 0$）不相符.

如果改变这个函数在 $x = 0$ 的定义，使得函数在 $x = 0$ 的值等于函数在 $x = 0$ 的极限值，那么它在 $x = 0$ 处就连续了. 改变后的函数是 $f(x) = 1,\ x \in (-\infty, +\infty)$（图 2.1 中的第三个图象）.

所以我们观察到，函数在一点 x_0 处如果连续，应该具备两个要素：**其一是函数在这一点 x_0 处应该有极限，其二是极限值应该等于函数在这一点的值**.

定义 1 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内 (即包含 x_0 的一个开区间) 有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

就称 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续，否则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续.

根据上述定义，函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处的连续性，取决于 f 在这一点附近的值和在这点的值，这个事实表明 (在一点的) 连续性，是一种“局部性质”.

如果用“$\varepsilon - \delta$”语言叙述，就是

称函数在定义域内的一点 x_0 连续，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

另一种等价的定义叙述是基于所谓“增量”(亦称“改变量”) 的概念.

设函数在 x_0 的一个邻域内有定义，当自变量由值 x_0 变到另外一个值 x 时，就说自变量在 x_0 处有了一个增量 $\Delta x = x - x_0$ (注意，增量 Δx 可正可负，也可以是零). 相应地，随着自变量有了一个增量，函数由值 $y_0 = f(x_0)$ 变到新的值 $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$，因此，函数值也就有了一个与自变量的增量相应的增量

$$\Delta y = y - y_0 = \Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta) - f(x)$$

根据上述增量的语言，函数在一点 x_0 连续，就等价于说当 x_0 的增量 Δx 趋于 0 时，函数的增量 Δy 也趋于 0，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0, \quad \text{或} \quad \Delta y \to 0 \ (\Delta x \to 0)$$

于是，函数在一点连续可以简单地描述为：当自变量在该点变化很小时，相应的函数值的变化也很小.

定义 2 如果 $y = f(x)$ 在区间 $I = (a, b)$ 中的任一点连续, 则称 $y = f(x)$ 在区间 I 连续.

这样，我们就定义了区间上的连续函数. 直观上看，区间上连续的函数图象，就是一条没有断开的曲线.

例如，第一章中所介绍的多项式函数，是连续函数；从第 1.2 节中的例 17 可知，函数 $f(x) = \cos x$ 是连续函数. 函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

2.1.2 左 (右) 连续与间断

为了判别函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的连续性，即是否有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，有时考虑 $f(x)$ 在一点 x_0 的两个单测极限更为方便. 根据函数极限的定义以及函数连续性的定义，$f(x)$ 在一点 x_0 连续等价于 $f(x)$ 在一点 x_0 的左、右极限都存在而且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$$

定义 3 如果 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ 就称 $y = f(x)$ 在 x_0 右连续; 如果 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, 就称 $f(x)$ 在 x_0 左连续.

显然 $f(x)$ 在 x_0 连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左连续并右连续.

$f(x)$ 在一个包含端点的区间上连续, 是指 $f(x)$ 在区间内部每一点都连续, 并且在端点上有相应的单侧连续性.

定义 4　使 $f(x)$ 不连续的点, 叫 $f(x)$ 的间断点，函数在一点 x_0 发生间断会有下列三种方式：

1°　函数在一点 x_0 左右极限都存在且相等（所以在这一点有极限），但不等于 $f(x_0)$，

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0);$$

2°　函数在一点 x_0 左右极限都存在，但是不相等，

$$f(x_0+0)\neq f(x_0-0);$$

3°　函数在一点 x_0 左右极限至少有一个不存在.

对于情形 1° 中的间断（参见图 1 中的第二个图象），只要重新定义（改变或补充）$f(x_0)$ 的值为 $f(x_0+0)$ 就可以修复 $f(x)$ 在 x_0 的连续性，因此这类间断点不是本质的，称为**可去间断点**.

对于情形 2° 中的间断，因为 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，此时函数值在 x_0 处有一个“跳跃”（跳跃的幅度是 $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$）. 因此称 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃点**.

情形 1° 和 2° 中的间断点（即可去间断点和跳跃点）统称为 $f(x)$ 的**第一型间断点**.

情形 3° 中的间断点称 x_0 为 $f(x)$ 的**第二型间断点**.

显然 $f(x)$ 在定义区间的端点就只有两种间断情况: 可去间断 (在该端点 $f(x)$ 的相应单侧极限存在但与函数值不等) 和第二型间断点 (在该端点 $f(x)$ 的相应单侧极限不存在).

例 1　研究函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}\ (x\neq 0)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，虽然函数在 $x=0$ 没有定义，但只要补充定义函数在 $x=0$ 的值为 1，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

则函数在 0 连续.

例 2　讨论

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geqslant 1,\\ 2x-5 & x<1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处的连续性.

解　因为 $f(1+0)=4,\ f(1-0)=-3$，故 $x_0=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃点, 跃度为 7.（注意函数在 $x=1$ 处是右连续的）.

例 3 讨论

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

证 因为函数在 $x=0$ 的右极限不存在，所以不连续.

例 4 证明下列 Dirichlet 函数在任何一点都有第二类间断.

$$D(x)=\begin{cases}1 & x \text{ 为有理数},\\ 0 & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

证 任给一点 x_0，我们可以取到一个由有理数组成的收敛于 x_0 的数列 $\{a_n\}$，以及以无理数组成的收敛到 x_0 的数列 $\{b_n\}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}D(a_n)=1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}D(b_n)=0$. 所以函数在任何一点都没有极限，当然不连续.

2.1.3 连续函数的运算

根据连续函数的定义，只要求函数在一点 x_0 的极限存在并且极限就是 $f(x_0)$，因此，自然就有连续函数的四则运算和连续函数的复合的连续性结论.

定理 1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 x_0 连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处也连续（当然，对于最后一个函数，必须假定 $g(x_0)\neq 0$）.

定理 2 设 $u=g(x)$ 在区间 I 上有定义，函数 $y=f(u)$ 在区间 J 上有定义，且 $g(I)\subseteq J$. 若 $u=g(x)$ 在 $x_0\in I$ 连续，$y=f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处连续（即 $f(u)$ 在 u_0 连续，$u_0=g(x_0)$），则复合函数 $f(g(x))$ 也在 x_0 连续.

证 对于任意给定的正数 ε，因为 f 在 u_0 连续，则存在一个正数 $\eta>0$，使得当 $|u-u_0|<\eta$ 时，有

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$$

对于上述 $\eta>0$，又因为 g 在 x_0 连续，所以存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|g(x)-g(x_0)|=|u-u_0|<\eta$$

于是，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，从上面两个不等式得到

$$f(g(x))-f(g(x_0))|=|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$$

即函数 $f(g(x))$ 在 x_0 连续.

该定理也可以表示为下面形式

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(g(x_0))=f(\lim_{x\to x_0}g(x))$$

即在连续的条件下，可将复合函数的极限运算移到内层函数来运算.

下面将讨论反函数的连续性问题. 设 $f(x)$ 在 A 上有定义, 则 f 具有反函数的充分必要条件是 f 为定义域到值域的一一映射. 如果 f 在 A 上是严格单调的, 则 f 有反函数. 但是, 有反函数的函数不必是严格单调的 (读者不妨自行举一个这样的例子).

然而, 对于在一个区间上的连续函数, 情形则很不相同, 我们有下列定理, 这是关于反函数的最基本的一个结果.

定理 3 设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $I=[a,b]$ 上的一个连续函数, 则 f 在 I 上有反函数的充分必要条件是 f 在 I 上严格递增 (减). 当这个条件成立时, f 的反函数 f^{-1} 在其相应的定义域内也是严格递增 (减) 的连续函数.

例如, 区间 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)=\frac{1}{x}$, 其反函数为 $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$, 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任何一点连续.

证 不妨设 $y=f(x)$ 在 $I=[a,b]$ 上严格单调递增. 所以有反函数 f^{-1}. 稍后将说明 f 的值域, 也就是反函数 f^{-1} 的定义域也是一个区间 $J=[f(a),f(b)]$.

1° 先证 f^{-1} 也是严格递增的. 任给 $y_1<y_2$, 其中 $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$. 于是 $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$. 如果 $x_2\leqslant x_1$, 则由 $f(x)$ 的单调性, 就有 $y_2=f(x_2)\leqslant y_1=f(x_1)$.

此矛盾说明 $x_1<x_2$, 故 $f^{-1}(y)$ 为严格单调递增.

2° 现在来证明 $x=f^{-1}(y)$ 在值域 J 上的连续性. 任取值域中一点 $y_0\in(f(a),f(b))$. 则有 $x_0\in I$, 使 $y_0=f(x_0)$. 对任给的满足 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset I$ 的正数 ε. 由 $f(x)$ 的单调性可知有

$$y_1=f(x_0-\varepsilon)<y_0=f(x_0)<f(x_0+\varepsilon)=y_2.$$

取 $\delta=\min(y_0-y_1,y_2-y_0)$. 则当 $|y-y_0|<\delta$ 时, 就有

$$y_1<y<y_2.$$

由 $f^{-1}(y)$ 的单调性可知, 当 $|y-y_0|<\delta$ 时必有

$$f^{-1}(y)>f^{-1}(y_1)=x_0-\varepsilon=f^{-1}(y_0)-\varepsilon$$

及

$$f^{-1}(y)<f^{-1}(y_2)=x_0+\varepsilon=f^{-1}(y_0)+\varepsilon.$$

即当 $|y-y_0|<\delta$ 时,

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon.$$

故 $f^{-1}(y)$ 在 y_0 连续, 由 y_0 的任意性 $f^{-1}(y)$ 在 $(f(a),f(b))$ 连续.

至于 $f^{-1}(y)$ 在端点的单侧连续性则用上述方法类似可证.

上述定理从直观上看, 是显然的. 因为, 函数和反函数在平面上的图象是同一个曲线.

2.1.4 初等函数连续性

在前两节中, 我们介绍了连续函数的定义和基本性质. 现在我们将对具体函数的初等函数的连续性进行讨论. 我们将看到, 初等函数在其定义域内是连续的.

（1）多项式函数： 首先注意到，常值函数 $f(x)=c$（c 是一个常数）以及线性函数 $f(x)=x$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续函数. 所以经过四则运算所得到的任何 x 的多项式函数都是连续的.

（2）三角函数（与反三角函数）： 由 §1.2 中的例 17 可知，函数 $\sin x$ 是连续函数. 而 $\cos x$ 可以看成是 $\sin u$ 和 $u=\frac{\pi}{2}-x$ 两个连续函数的复合

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

的结果，所以是连续的. 其他的三角函数

$$\begin{aligned}&\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ (x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\ \text{是整数});\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}\ (x\neq k\pi,\ k\ \text{是整数});\\&\sec x=\frac{1}{\cos x}\ (x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\ \text{是整数});\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}\ (x\neq k\pi,\ k\ \text{是整数});\end{aligned}$$

在各自的定义域内，都是 $\sin x$、$\cos x$ 以及 $f(x)=1$ 经过四则运算所得到的，所以都是连续函数.

对于所有的反三角函数 $\arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \mathrm{arccot} x$，由定理 3 可知它们在各自的定义域内都是连续的.

（3）指数函数与对数函数： 根据 §1.2 中的例 13，指数函数 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$ 是其定义域内的连续函数. 特别 $f(x)=e^x$ 是连续函数. 因为

当 $a>1$ 时，$f(x)=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是严格递增的；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是严格递减的；

而且无论是那种形式，函数的值域都是 $(0,+\infty)$. 根据定理 3，$f(x)=a^x$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是连续的. 特别，$f(x)=\ln x$ 是连续的.

（4）幂函数： 对于幂函数 $f(x)=x^\alpha\ (\alpha\neq0)$，在其基本的定义域 $x>0$ 内，由于

$$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$$

所以幂函数在 $x>0$ 连续.

定理 4 通过上述结论，我们知道所有基本初等函数在各自的定义域内连续的. 再根据定理 1 和定理 2，我们有：**初等函数在其定义域内是连续函数**.

这样一来，一个直接的好处是，若 x_0 是初等函数 $f(x)$ 定义域内的一点，则 $f(x)$ 在这一点的极限就是函数在该点的值 $f(x_0)$.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to0}\sin(\arctan(x+1))$.

解 因为 $x=0$ 是函数 $\sin(\arctan(x+1))$ 定义域内的点，所以极限是 $\sin(\arctan 1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 5 求证 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，令

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ e, & x=0\end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 由于 $\ln y$ 在 $y=e$ 连续，所以复合函数 $\ln f(x)$ 在 $x=0$ 连续，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=1$$

习题 2.1

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 且 $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$. 问 $f(x)$ 是否必在 $x=x_0$ 处连续?

2. 若对任意正数 ε, 函数 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续, 证明:$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

3. 设在点 $x=x_0$ 处, 函数 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 不连续, 问函数 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 的连续性如何? 若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 回答同样的问题.

4. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

   (2) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个区间 I 上连续. 证明, 函数 $M(x)=\max(f(x),g(x))$ 及 $m(x)=\min(f(x),g(x))$ 在区间 I 上均连续.

5. 证明, 存在这样的函数 $f(x)$, 处处不连续, 但函数 $|f(x)|$ 处处连续.(提示: 适当地修改狄利克雷函数可得出一个例子.)

6. 指出下列函数的间断点, 并说明其类型.

   (1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$;　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$;

   (3) $f(x)=[|\cos x|]$;　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

   (5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty\end{cases}$;

   (6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ A, & x=2\end{cases}$.

7. 试确定 a, 使得函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

8. 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在点 x_0 处右连续, 但不左连续.

9. 证明, 对每个实数 x, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在; 将这极限值记为 $f(x)$, 试讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

10. 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则存在一个正数 δ, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有界.(这一结果称为连续函数的局部有界性.)

11. 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0)\neq 0$, 则存在一个正数 δ, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号.(这一结果称为连续函数的局部保号性.) 进一步, 存在某个正数 γ, 使得 $f(x)$ 在这一区间中满足 $|f(x)|\geqslant\gamma$.

12. 证明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a\neq g(x_0)$ (从而 x_0 为 $g(x)$ 的可去间断点),$f(u)$ 在 $u=a$ 处连续, 则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0}g(x))=f(a).$$

(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

13. 证明: 若函数 $u(x),v(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $u(x_0)>0$, 则函数 $u(x)^{v(x)}$ 也在点 x_0 处连续.

14. 当 $x\to 0$ 时, 用 $\sin x\sim x,\ \tan x\sim x$ 证明 $\arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x$; 用 $\ln(1+x)\sim x$ 证明 $(e^x-1)\sim x$.

(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

15. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin(\sin x)}{1-\cos x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$; (6) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$; (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

16. 函数 $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 与 $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 分别称为双曲正弦与双曲余弦 (统称为双曲函数), 它们均在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 证明以下各题.(可与三角函数的性质作比较.)

(1) $\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x,\quad \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x$; (2) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$;

(3) $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$; (4) $\operatorname{ch}2x=\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x$;

(5) $\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$; (6) $\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$.

§2.2 闭区间上连续函数的性质

本节主要介绍在闭区间上连续函数的几个重要性质. 在后面的课程中，当解释清楚所谓“实数理论”之后，这些定理的证明才显得非常清晰.

2.2.1 零点定理与介值定理

回忆一下上节中的一道习题：设函数在一点 x_0 连续，如果 $f(x_0)\neq 0$(不妨设 $f(x_0)>0$)，则存在一个正数 δ，使得在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内，$f(x)>0$. 这就像地上放着一根连续的绳子，如果将绳子的一点提起来，不管提的多高，周边的绳子也会带起来. 这个事实的反面是：如果在以 x_0 为中心的任意一个开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 内，函数 $f(x)$ 既取正值，又取到负值，则只能有 $f(x_0)=0$. 因此，函数在一点连续，就能够由函数在该点附近的某些信息，推断函数在这一点的值为零.

如果函数在一个闭区间上连续，则有下列更强的定理.

定理 1 (零点定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且函数在两个端点的值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，即 $f(a)f(b)<0$，则必有一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f(\xi)=0.$$

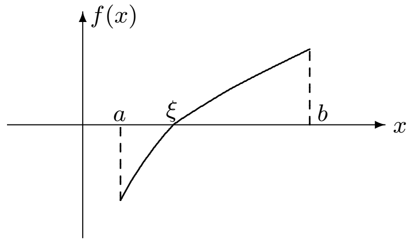

图 2.2

因此，对于闭区间上连续函数，由函数“区间端点的值异号”这样的信息，便能断定函数在区间上有零点. 注意，定理的条件中的三个基本要素是：闭区间、连续、端点异号.

从几何上看，闭区间上的连续函数，从 x 轴的上方通到下方时，必然穿过 x 轴.

定理 2 (介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 能取到介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意值.

证 不妨设 $f(a)<f(b)$，且 r 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个数：$f(a)<r<f(b)$，考虑辅助函数 $g(x)=f(x)-r$，则 $g(x)$ 也是 $[a,b]$ 上连续函数，而且

$$g(a)=f(a)-r<0,\quad g(b)=f(b)-r>0$$

故满足零点定理的条件，因而有 $\xi\in(a,b)$ 使 $g(\xi)=0$, 即

$$f(\xi)=r.$$

注记 对于零点定理，在一个区间上的连续函数只要在区间内任何两点的值异号，就一定有零点. 当然，在介值定理中，函数一定能取到介于任意两点之间的值. 介值定理也可以通过将零值定理沿 y 轴向上平移到 $y=r$ 处的情况.

例 1 证明函数 $f(x)=2^x-4x$ 在区间 $(0,\ \frac{1}{2})$ 内有一个零点.

证 显然，$f(x)$ 在 $[0,\ \frac{1}{2}]$ 上连续. 且 $f(0)=1>0$, $f(\frac{1}{2})=\sqrt{2}-2<0$，所以 $f(x)=2^x-4x$ 在区间 $(0,\ \frac{1}{2})$ 内有一个零点.

例 2 证明任何奇次多项式至少有一个实根.

证 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个奇次多项式，即 n 是奇数，$a_n\neq 0$. 不妨设 $a_n>0$. 则 $P(x)\sim a_nx^n$,（ $x\to\infty$ ）. 因为 n 是奇数，所以当 $x\to\pm\infty$ 时，$P(x)\to\pm\infty$. 故存在两个数 $M'<M$，使得 $f(M')<0<f(M)$，由定理 1 知 $P(x)$ 一定有一个零点.

如果是偶次多项式，结果就不是这样了，例如 $P(x)=x^2+1$，就没有实根.

2.2.2 有界性与最大最小值定理

根据函数的连续性定义，如果函数在一点 x_0 连续，则对于一个正数，例如 $\varepsilon=1$，则存在一个正数 δ，使得当 $|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-f(x_0)|<1$. 换句话说，在区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 上，函数

$$|f(x)|<1+|f(x_0)|$$

因此是有界的. 即"一点连续，意味附近有界". 如果函数在整个区间上连续，是否意味着函数的有界性?

定理 3 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，则它在整个区间上有界. 即存在一个常数 M，使得当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 4 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_1\in[a,b]$ 和 $x_2\in[a,b]$，使得对所有的 $x\in[a,b]$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$$

这个定理比定理 3 更进一步，闭区间上的连续函数，不但有界，而且能达到最大值（最小的上界，即上确界）和最小值（最大的下界，即下确界）.

注记 定理 3 和定理 4 中的条件"闭区间"是必不可少的. 例如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 这个开区间上有定义，但是是 $(0,1)$ 上无界的函数，当然也不可能达到最大值. 连续性的条件，也是必须的. 如函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ \frac{1}{2}, & x=0,1 \end{cases}$$

在开区间 $(0,1)$ 中连续，但在闭区间 $[0,1]$ 上不连续，虽然有界，但是却达不到最大值和最小值.

综合定理 2 和定理 4，我们有

定理 5 闭区间 $I=[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，其值域是一个闭区间.

证 根据定理 4，任何一点的函数值，都介于最大值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间，所以

$$f(I)\subset[f(x_1),\ f(x_2)]$$

另一方面，任给一个数 $r \in [f(x_1),\ f(x_2)]$，根据介值定理（定理 2），一定存在一点 x_0 使得 $r = f(x_0)$，即 $r = f(x_0) \in f(I)$，即

$$[f(x_1),\ f(x_2)] \subset f(I)$$

综合上述结果，即知值域就是闭区间 $[f(x_1),\ f(x_2)]$.

2.2.3　一致连续性

首先观察一个例子

$$f(x) = \frac{1}{x},\quad x \in (0,\ 1)$$

显然它是区间 $(0,\ 1)$ 上的连续函数，即在每一点 $x \in (0,\ 1)$ 都连续. 但是，任给一个正数 ε，对于不同的点 x_0，存在的使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的正数 δ（即刻划“x 充分接近 x_0”的尺度）并不一定是一样的. 例如对于 $x_0 = \frac{1}{n}$，要使

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{1}{x} - n\right| < \varepsilon$$

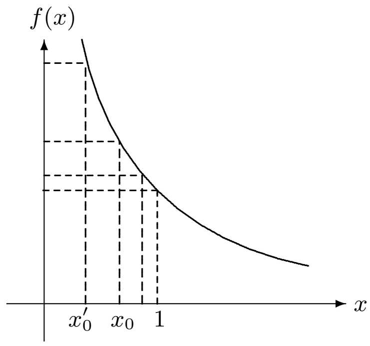

图 2.3

必须

$$-\frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)} < x - \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{n(n-\varepsilon)}$$

因此，对于 $x_0 = \frac{1}{n}$，取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)} \sim \frac{\varepsilon}{n^2}$$

则当 $|x - x_0| < \delta$，时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

而对于同一个正数 ε，在点 $x_0' = 1 - \frac{1}{n}$ 处，要使

$$|f(x) - f(x_0')| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0'}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{n}{n-1}\right| < \varepsilon$$

必须

$$-\frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n+\varepsilon(n-1))} < x - x_0' = x - \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n-\varepsilon(n-1))}$$

因此，对于 $x_0' = 1 - \frac{1}{n}$，取

$$\delta' = \frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n+\varepsilon(n-1))} \sim \varepsilon$$

则当 $|x - x_0| < \delta'$，时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

显然，对于同一个正数 ε，当 x_0 越靠近 0，对 δ 的要求越严，而当 x_0 越靠近 1，δ 的选择越宽. 所以对于不同的连续点来说，对应的 δ 是不一致的.

因此，对于任何一个给定的正数 ε，如果对于所有的点 x_0，存在统一的正数 δ，使得 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，则说这样的连续性是“一致”的. 严格地说，我们有

定义 1　设 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，对任给的 $\varepsilon > 0$, 如果存在 $\delta > 0$，使得任取一点 $x_0 \in I$，只要 $|x - x_0| < \delta$，就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 则称函数 f 在 I 上是一致连续的.

一个等价的说法是：对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，只要 $x_1,x_2\in I$ 及 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

用"增量"的语言就是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个 $\delta>0$，使得不管是在 I 中的哪一点 x，只要在 x 处添加的增量 Δx 满足 $\Delta x<\delta$，就使得函数的增量 $|\Delta y|=|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon$.

例 2 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证 $|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|$.

所以, 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时就有 $|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon$.

例 3 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不是一致连续的.

证 1° 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，对任意的正数 δ，总有自然数 n，使得 $\frac{1}{n}<\delta$. 取 $x'=\frac{1}{n},x''=\frac{1}{n+1}$, 则 $x'-x''=\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n}<\delta$，但 $\dfrac{1}{x''}-\dfrac{1}{x'}=1>\dfrac{1}{2}$. 所以对于特殊的正数 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，函数在 $(0,+\infty)$ 上，不存在统一的 δ.

在例 3 中，如果限制函数定义的区域为 $[a,+\infty)$, $a>0$，则函数是一致连续的. 请读者自证. 所以连续函数的一致连续性与定义的区域有关. 特别如果 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上，则

定理 6 闭区间 $[a,b]$ 上定义的连续函数 $f(x)$，一定在 $[a,b]$ 上一致连续.

习题 2.2

1. 证明, 函数 $x\cdot 2^x-1$ 在 $[0,1]$ 内有零点.

2. 证明, 函数 $x-a\sin x-b$(其中 a,b 为正数) 在 $(0,+\infty)$ 上有零点, 且零点不超过 $a+b$.

3. 证明, 函数 $x-\sin(x+1)$ 有实零点.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且值域就是 $[a,b]$. 证明,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有不动点, 即有 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

5. 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)>g(a),f(b)<g(b)$. 试证: 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$. 证明: 在区间 $[0,a]$ 上存在某个 x_0, 使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

7. 试证: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为此区间中的任意值, 则在 $[a,b]$ 中有一点 ξ, 使得
$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$
更一般地, 若 $q_1>0,q_2>0,\cdots,q_n>0$, 且 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$, 则在 $[a,b]$ 中有一点 ξ, 使得
$$f(\xi)=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n).$$

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

9. 证明函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

10. 是否有满足下面条件的连续函数, 并说明理由.

    (1) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $(0,+\infty)$;

    (2) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $(0,1)$;

    (3) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $[0,1]\cup[2,4]$;

    (4) 定义域为 $(0,1)$, 值域为 $(2,+\infty)$.

11. 举例说明, 若对任意正数 ε, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上有界, 不能保证 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有界.(比较习题 2.1, 第 2 题.)

12. 设 $y=f(x)$ 在开区间 $I=(a,b)$ 上连续并严格单调, 证明: $y=f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也是一个开区间.

13. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 求证 $f(x)$ 在 a 点的右极限存在, 在 b 点的左极限存在.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续. $\{a_n\}$ 是正收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛. 又问仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论是否还成立, 为什么?

15. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. $\{a_n\}$ 是收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛.

第 2 章补充习题

1. 证明, 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数}\\ x, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅在点 $x=0$ 处连续.

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$, 记 $f(x)=\dfrac{|x-x_1|+\cdots+|x-x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $f(x_0)=\frac{1}{2}$.

3. 证明: 函数 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ (其中 $a_1,a_2,a_3>0$, 且 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$) 在 (λ_1,λ_2) 与 (λ_2,λ_3) 内各有一个零点.

4. 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则必存在一点 x_0, 使得 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$ 对任意实数 x 成立.

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对任意自然数 n, 在区间 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 中有一点 ξ, 使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

6. 证明, 存在一个实数 x, 满足 $x^5+\dfrac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}=72$.

7. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

8. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上, 满足条件:$a \leqslant f(x) \leqslant b$ (对任意 $x \in [a,b]$), 且对 $[a,b]$ 中任意的 x, y 有 $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$, 这里 k 是常数,$0<k<1$. 证明

   (1) 存在唯一的 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

   (2) 任取 $x_1 \in [a,b]$, 并定义数列 $\{x_n\}:\ x_{n+1}=f(x_n),\ n=1,2,\cdots,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

9. 证明: 对任意自然数 n, 方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 恰有一个正根 x_n; 进一步证明, 数列 $\{x_n\}(n \geqslant 1)$ 收敛, 并求其极限.

第 3 章　一元函数的微分学

§3.1　导数

3.1.1　导数的定义

在开展具体讨论之前，先来看两个来自几何和物理的例子.

1° **曲线的切线**

首先要明确什么是“曲线上一点的切线”. 在初等几何中，通常将只与圆周有一个交点的直线，定义为园的切线. 然而，对于一般曲线来说，这种定义方式就不适合了. 例如对于抛物线（图 3.1），显然交于抛物线一点 A 的直线有多条，其中有的明显就不是切线. 而对于图 3.2，直线交图示曲线于两点，显然在交点 A 处，直线应该是“切线”. 对于图 3.3 中的曲线在 A 点有一个尖点. 在尖点处，与曲线相交一点的切线却有多条.

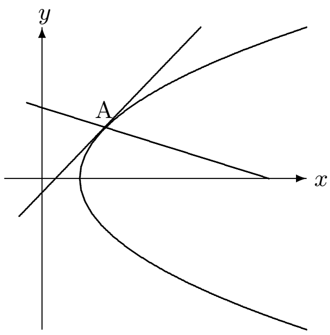

图 3.1

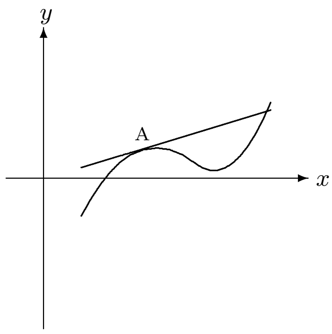

图 3.2

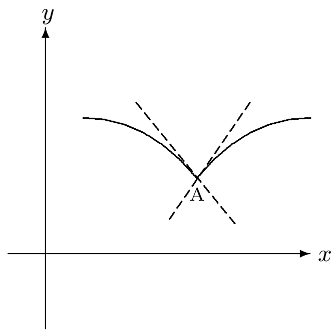

图 3.3

那么，如何定义一般曲线的切线呢? 一个可行的途径是从割线开始，连接曲线 C 上两点 M_0 和 M，作一条割线 L（图 3.4），当点 M 沿着曲线 C 滑动到 M_0 时，如果 L 有一个“极限位置”，我们便将这个“极限位置”的直线，定义为曲线在一点的 M_0 的切线.

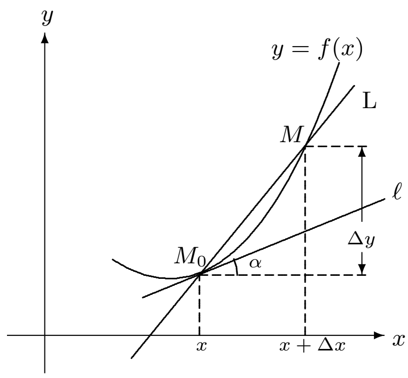

图 3.4

平面上过一点的直线可由直线与 x 轴的正向的夹角 α 来表征. 这个夹角 α 是指正 x 轴绕原点沿逆时针方向转动，并在首次变得与该直线平行时所扫过的角度，因此满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. 角度的正切 $\tan\alpha$ 称为直线的斜率.

设 $\alpha(M)$ 是割线 M_0M 与 x 轴的夹角，如果

$$\lim_{M \to M_0} \alpha(M) = \alpha$$

则极限值 α 应该是 M_0 点处切线与 x 轴的夹角.

现在假设曲线 C 由函数 $y=f(x)$ 表示（或者说曲线是函数 $f(x)$ 的图象），点 M_0 的坐标是 $M_0(x_0,\ f(x_0))$，动点 M 的坐标是 $M(x,\ f(x))$，所以割线的斜率是

$$\tan\alpha(M)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

故上述求极限的过程就是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\tan\alpha(M)=\tan\alpha$$

如果左边的极限存在的话. 就是切线的斜率.

2° **直线运动质点的瞬间速度**

考察沿直线作变速运动的一个质点. 设质点所运动的距离与时间之间的关系为 $S=S(t)$. 因此在从 t_0 到 t 这段时间间隔内，质点运动的平均速度是

$$\bar{v}=\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

显然，这个平均速度并不能完全反映质点在 t_0 到 t 这段时间内更具体的运动规律. 如果要了解质点在某一时刻运动的变化规律（即速度），只要上述平均的时间间隔越来越短. 特别，如果极限

$$\lim_{t\to t_0}\bar{v}=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

存在，则称为在时刻 t_0 时，质点运动的瞬时速度.

无论是几何上的从割线到切线，还是物理中的从平均速度到瞬时速度，极限的形式都是一样的. 抽象地说，都是刻划函数在一点的变化速率. 或者说是在一点函数的变化量与自变量的变化量之间的比率. 我们将其抽象出来，就有了关于导数的定义.

定义 1 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域中有定义, 如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，就称它为 $y=f(x)$ 在 x_0 的**导数**（或**微商**），记成 $f'(x_0)$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}$ 或 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0}$，并称 $f(x)$ 在 x_0**可导**（或**可微**）.

从上面的第一个例子可知，函数的导数的几何意义，就是曲线在一点的切线的斜率，而从第二个例子可知，导数的物理意义就是在一个时刻的瞬时速度.

如果函数在一点的导数不存在，则包含了一种可能，就是极限等于无穷大. 对于这种情况的几何解释是，函数的图象在一点的切线的斜率是无穷大，也就是切线平行于 y 轴. 所以我们一般不考虑平行于 y 轴的切线.

用“增量”的语言，上述定义就是，对于函数 $f(x)$，当给自变量 x 在一点 x_0 处一个增量 Δx 时（这里 Δx 可正可负，但不为零），则函数值就相应有一个增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$f(x)$ 在点 x_0 处的导数，就是两个增量之比的极限

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

和讨论函数的连续性一样，也需要讨论函数的单侧可导性. 它对研究函数在一点的导数，会提供较有用的信息.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右边近旁有定义，如果 $\Delta x>0$, 且

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 的右导数，记成 $f'_+(x_0)$, 并称 $f(x)$ 在 x_0 右可导. 类似可定义 $y=f(x)$ 在 x_0 的左可导和它的左导数 $f'_-(x_0)$.

显然,$f(x)$ 在 x_0 可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左、右可导, 并有

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

定义 3 从定义 1 可知，导数是一个局部概念，但是如果 $y=f(x)$ 在区间 I 的每一点都可导，则称 $f(x)$ 在 I 可导. 如果区间 I 包含有端点, 则在该端点处,$f(x)$ 只需有相应的单侧可导性.

如果 $y=f(x)$ 在区间 I 可导，则对于任意给定的 $x\in I$，

$$x\longmapsto f'(x)$$

这个对应关系又确定了 I 上的一个函数，称为 $f(x)$ 的导函数，记成 $f'(x),y',\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$ 等.

例 1 设 $y=c$(常数), 求 y'.

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$

从直观上看,$y=c$ 是一条水平直线, 其上任意一点都有斜率为零的切线（也是水平的直线）. 从物理上看，一个运动质点的距离在任何时刻都是 c，说明质点是静止的，其瞬时速度当然时时刻刻为零. 后面我们还将证明导数处处为零的函数也只能是 $y=c$.

例 2 设 $y=x^n,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$，其中 n 是自然数. 求 y'.

解 对于任意实数 x，由二项式定理得

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n$$

故

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}$$

即 $y=x^n$ 的导函数是 $y'=nx^{n-1}$，导函数的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$. 特别，当 $n=1$ 时，函数 $y=x$ 的导函数为常值函数 $y=1$，即 $y=x$ 在每一点的切线的斜率都是 1.

例 3 求正弦函数和余弦函数的导函数.

解 记 $y=\sin x,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$. 则对任意一点 x，

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

由 $\cos x$ 的连续性以及基本极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即 $(\sin x)'=\cos x$，类似可得 $(\cos x)'=-\sin x$.

例 4 求对数函数 $y=\log_a x,\ x\in(0,\ +\infty)$ 的导函数，这里 $a>0$，且 $a\neq 1$.

解 对于任意的 $x>0$，有 $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$，且

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{\ln a}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

利用极限（见 §2.1 节例 5）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

得

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

特别当 $a=e$ 时，上面的结果为

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad x\in(0,+\infty)$$

由此可见，对于以 e 为底的自然对数的导数特别简单.

例 5 求下列分段函数的导函数

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$$

解 函数 $f(x)$ 由函数 $y=x^3\ (x\geqslant 0)$ 以及 $y=x^2\ (x<0)$ 在 $x=0$ 处拼接而成（图 5）. 当 $x>0$ 时，$f'(x)=3x^2$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=2x$，当 $x=0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{(\Delta x)^3}{\Delta x}=0$$
$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ 2x, & x<0\end{cases}$$

上面的例子中函数的导函数都存在，而且在定义域内也连续. 这个现象不是偶然的.

定理 1　设 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 连续. 换句话说，如果函数在一点 x_0 不连续，则显然在 x_0 处不可导.

证　由已知条件，极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

存在. 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))&=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0\end{aligned}$$

或者说，在 x_0 的附近，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 有界，即有 $r>0$ 和 $M>0$, 使

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<M\qquad(0<|x-x_0|<r).$$

即当 $0<|x-x_0|<r$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)|<M|x-x_0|,$$

命 $x\to x_0$，也可得证.

定理 1 的逆命题并不成立，即连续函数未必可导.

例 6　函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但是在 $x=0$ 不可导.

证　当 $x=0$ 时

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1,$$
$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1.$$

所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导. 注意，从图 3.5 可以看出，函数在 $x=0$ 有一个尖点，即在 $x=0$ 不光滑，所以没有切线.

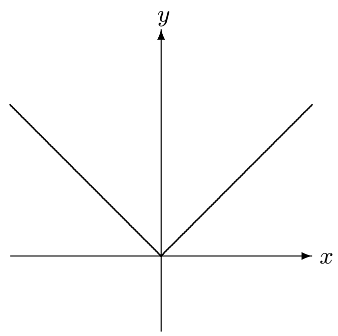

图 3.5

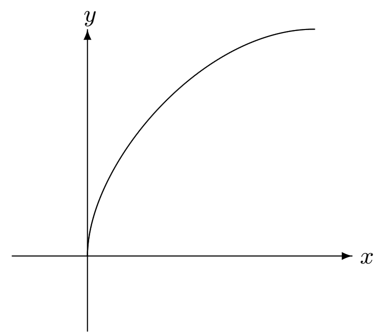

图 3.6

例 7　函数 $f(x)=x^{1/3}$ 在 $x=0$ 连续，但不可导.

证　在 $x=0$ 处

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}=+\infty$$

这个例子说明函数的导数不存在的另一种形式是在一点有所谓“斜率是无穷大”的切线. 此时 $f(x)=x^{1/3}$ 的图形在 $(0,0)$ 处的切线平行于 y 轴 (见图 3.6). 读者可以证明，同样是函数 $y=x^{1/3}$，在 $x\neq 0$ 处，导数是存在的

$$y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

在上面两个例子中的连续函数只在一点不可导. 事实上很容易举出连续函数在若干点不可导的例子. 更令人惊讶的是 Weierstrass 曾提出并构造了一个在实数轴上处处连续、但是处处不可导的函数! 这样的例子告诉我们, 函数的连续性和函数的可导性, 还是有较大差别的. 对比连续和可导的定义, 我们也可以感到这种差别: **连续性只是定性地描述函数的一种局部性态，即当自变量变化很小时，函数对应的变化也很小. 而可导性则给出这种变化的一种定量的刻划，即函数相应的变化与自变量的变化的比值的极限是存在有限的**.关于处处连续、处处不可导函数的构造，将在今后的课程中介绍.

3.1.2 导数的四则运算

定理 2 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导, 则 $f(x)+g(x), f(x)g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x)\neq 0$ 时) 皆可导, 并有

1° $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;

2° $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

3° $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

证 关于 1°, 直接由导数的定义和极限的运算即可证得. 关于 2°, 利用下列恒等式

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\\&=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}&(f(x)g(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

关于 3°, 首先注意到，函数 $g(x)$ 在点 x 处可导，所以在这一点连续. 因此在 x 处，条件 $g(x)\neq 0$ 意味着在 x 的附近 $g(x)$ 也不为零. 所以当自变量的增量 Δx 非常小时，$g(x+\Delta x)\neq 0$，

这时有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}-\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

再由 2° 即得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)}-f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\\ &= \frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

例 8 设 $f(x)$ 可导，则 $(cf(x))' = cf'(x)$，其中 c 是常数. 这个结论是显然的.

例 9 求 $f(x) = x^2(\sin x+\cos x)$ 的导数.

解

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^2)'(\sin x+\cos x)+x^2(\sin x+\cos x)'\\ &= 2x(\sin x+\cos x)+x^2(\cos x-\sin x)\end{aligned}$$

例 10 求函数 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数.

解

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.\end{aligned}$$

类似可得

$$(\cot x)' = -\csc^2 x.$$

例 11 求函数 $\sec x$ 和 $\csc x$ 的导数.

解

$$\begin{aligned}(\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\\ &= \tan x\sec x.\end{aligned}$$

类似可得

$$(\csc x)' = -\cot x\csc x.$$

3.1.3 复合函数的求导法则

现在我们讨论复合函数的求导法则，通常称为“链式法则”. 考虑到大多数函数都是经过初等函数复合而成的，所以复合函数的求导法则扩大了我们求导的范围.

定理 3 设函数 $y=g(x)$ 定义在区间 I 上，函数 $z=f(y)$ 定义在区间 J 上，且 $g(I)\subset J$. 如果 $g(x)$ 在点 $x\in I$ 处可导，而 $f(y)$ 在点 $y=g(x)$ 可导，则复合函数 $f\circ g$ 在点 x 处可导，且有.

$$(f\circ g)'(x)=(f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)$$

证 我们只考虑任意一点 x_0 和 $g(x_0)$ 都不是所在区间的端点的情况（对于出现端点的情况，只需在下面的证明中做一些简单修改）. 考察

$$\begin{aligned}\frac{f\circ g(x)-f\circ g(x_0)}{x-x_0}&=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\\&=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

在上式中，只有当 $g(x)-g(x_0)\neq 0$ 时才有意义. 但是当 $g(x)-g(x_0)=0$ 时，上式右边的第一个分式的分子也是零 $f(g(x))-f(g(x_0))=0$，所以我们约定这个分式为 $f'(g(x_0))$ 不但是合理的，而且上式的两端都等于零. 因此仍然成立. 根据这样的分析，上式对任何情况都是成立的. 令 $x\to x_0$，由于 $g(x)$ 连续，所以 $g(x)\to g(x_0)$. 因此在上式中取极限，就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f\circ g(x)-f\circ g(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=f'(g(x_0))g'(x_0)\end{aligned}$$

在实际使用中，定理 3 也可以表示成：

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

也就是说，如果 z 是变量 x 的复合函数，中间变量为 y，则为了求 z 对 x 的微商 $\frac{dz}{dx}$，可先求 z 对中间变量 y 的微商 $\frac{dz}{dy}$，再求中间变量 y 对 x 的微商 $\frac{dy}{dx}$，将所得结果相乘就得到 $\frac{dz}{dx}$.

对于多层复合函数，由定理 3 也可得到类似的求导法则. 例如 $y=f(u)$ 对 u 可导，$u=g(v)$ 对 v 可导，$v=h(x)$ 对 x 可导，且后一个函数的值域包含在前一个函数的定义域中，则复合函数 $y=f\circ g\circ h(x)$ 对 x 也可导，而且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}=f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$$

例 12 求 $\sin x^3$ 的导数

解 记 $z=\sin x^3$，中间变量 $y=x^3$，则函数可以看成是 $z=\sin y$ 和 $y=x^3$ 的复合函数. 所以，由求导的链式法则

$$(\sin x^3)'=(\sin y)'(x^3)'=\cos y\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3$$

从上面的例子可以看出，求复合函数的导数，首先需要明确该函数是由哪些函数复合而成的，也就是说，要明确中间变量.

例 13 求 $z=\sin(\cos x^2)$ 的导数.

解 该函数是 $z=\sin u,\ \ u=\cos v,\ \ v=x^2$ 等三个函数复合而成的. 所以

$$(\sin(\cos x^2))'=(\sin u)'(\cos v)'(x^2)'=-2x\cos u\sin v=-2x\cos(\cos x^2)\sin x^2$$

例 14 求 $z=(1-x)^9$ 的导数.

解 将 $(1-x)^9$ 用二项式定理展开，应用 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 以及导数的四则运算，可以求出该函数的导数. 但是如果将该函数看成是 $z=y^9$ 和 $y=1-x$ 的复合，则运算更为简单

$$((1-x)^9)'=(y^9)'(1-x)'=-9y^8=-9(1-x)^8$$

例 15 求 $z=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$ 的导数.

解 该函数可以看成是 $z=y^3$ 和 $y=\frac{1+x}{1-x}$ 的复合函数. 所以

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\right]'&=(y^3)'\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=3y^2\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\\&=3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{6(1+x)^2}{(1-x)^4}\end{aligned}$$

例 16 设 $f(x)$ 在点 x 处可导，且 $f(x)\neq 0$，则函数 $\ln|f|$ 在点 x 可导，且

$$(\ln|f|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

特别有

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x},\ \ x\neq 0$$

证 由于 $f(x)$ 在点 x 可导，所以连续，因此存在一个含 x 的区间 $(x-\delta,\ x+\delta)$，使得函数 f 在其上的取值保持同号. 当在 $(x-\delta,\ x+\delta)$ 上取正号时，$|f|=f$，即 $\ln|f|=\ln f$，它是函数 $z=\ln y,\ \ y=f(x)$ 的复合函数，因此

$$(\ln|f|)'=(\ln y)'\cdot f'(x)=\frac{1}{y}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

当函数在 $(x-\delta,\ x+\delta)$ 上取负号时，$|f|=-f$，所以 $\ln|f|=\ln(-f)$，它是函数 $z=\ln y,\ \ y=-f(x)$ 的复合函数，此时

$$(\ln|f|)'=(\ln y)'\cdot(-f'(x))=\frac{1}{y}\cdot(-f'(x))=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

纵上所述，即有本例子的结果.

3.1.4 反函数的求导法则

我们知道，如果函数 f 在区间上连续，且有反函数 f^{-1}，则 f 必须严格单调，而且反函数 f^{-1} 在其定义域上也连续. 如果函数还可导，自然要问，其反函数是否也可到，如果是，那么导数如何计算?

定理 4 设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，且有反函数 f^{-1}，如果 f 在点 x 处可导，且 $f'(x)\neq 0$. 则定义在区间 $J=f(I)$ 的反函数 f^{-1} 在点 $y=f(x)$ 也可导，且

$$(f^{-1})'(y)f'(x)=1$$

或写成

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

证 我们只对 x 以及 y 不是区间端点的情况进行证明. 对于端点，只需将下列证明作一点修改即可.

从定义出发，要证明反函数 $f^{-1}(y)$ 的可导性，就看

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h}$$

的极限是否存在. 因为 y 不是区间 J 的端点，所以当 h 很小时，$y+h\in J=f(I)$. 又因为 f 是严格单调的，所以必存在唯一的 $u=u(h)\in I$，使得 $y+h=f(x+u)$，而且，一方面严格单调性保证了当 $h\neq 0$ 时，$u\neq 0$. 另一方面 $f^{-1}(y)$ 的连续性保证了当 $h\to 0$ 时，

$$\lim_{h\to 0}(x+u)=\lim_{h\to 0}f^{-1}(y+h)=f^{-1}(y)=x$$

即当 $h\to 0$ 时，$u\to 0$. 于是在

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h}&=\frac{f^{-1}(f(x+u))-f^{-1}(y)}{h}\\&=\frac{u}{f(x+u)-f(x)}=\frac{1}{\dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}}\end{aligned}$$

中，当 $h\to 0$ 时，上式最右端的比式的极限是 $\frac{1}{f'(x)}$，说明左端在 $h\to 0$ 时的极限存在. 即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

注记 (1) 注意到，在同一个坐标系中，函数 $y=f(x)$ 和反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表示的是同一条曲线. 于是对于曲线上一点 (x,y) 处的切线 L，从函数 $y=f(x)$ 的角度看，其斜率就是 L 与自变量所在的数轴 x 轴正向的夹角的正切，从 $x=f^{-1}(y)$ 的角度看 L 的斜率就是 L 与自变量 y 所在的数轴 y 轴正向的夹角的正切，两者互为倒数.

(2) 如果 $f'(x_0)=0$，说明，曲线在这一点 (x_0,y_0) $(y_0=f(x_0))$ 的切线平行于 x 轴，因此从 $x=f^{-1}(y)$ 的角度看，切线与自变量所在的数轴 y 轴的斜率是无穷大. 所以 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 不可导 (或者说导数是无穷大).

例如 $y=f(x)=x^3$，这是一个严格单调增的连续函数，其反函数是 $x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$. 因为 $f'(0)=0$，所以 $f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 不可导.

（3）一般来说，习惯上我们用 x 表示一个函数的自变量，y 表示因变量. 所以在不会造成混淆的情况下，我们通常记 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

例 17 求反三角函数的导函数.

解 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y,\ |y|<\frac{\pi}{2}$ 的反函数，而 $x=\sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $(\sin y)'=\cos y\neq 0$，所以在对应的区间 $(-1,1)$ 内，$y=\arcsin x$ 可导，且

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同样可得

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).$$

现在考虑函数 $y=\arctan x$，它是 $x=\tan y$ 的反函数，因为在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内，$(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0$，所以

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2},\ |x|<+\infty.$$

类似有

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2},\quad |x|<+\infty.$$

例 18 求指数函数 $y=a^x$ 的导函数. 这里 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

解 指数函数 $y=a^x$ 是对数函数 $x=\log_a y$ 的反函数，而在区间 $(0,\ +\infty)$ 上，$(\log_a y)'=\frac{1}{y\ln a}\neq 0$，所以反函数 $y=a^x$ 在对应的区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内可导，

$$(y=a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=y\ln a=a^x\ln a,\quad x\in(-\infty,\ +\infty).$$

特别，当 $a=e$ 时，有

$$(e^x)'=e^x,\quad x\in(-\infty,\ +\infty),$$

即以 e 为底的指数函数的导函数等于其自身. 事实上，这是该指数函数的特征性质. 以后我们将看到，满足这种性质的函数一定正比于以 e 为底的指数函数，即如果可导函数 f 满足 $f'=f$，则 $f(x)=Ce^x$，其中 C 是任意常数. 从这个角度看，以 e 为底的指数函数 e^x 以及他的反函数（以 e 为底的对数函数）$\ln x$ 具有一定的特殊地位是可以理解的.

例 19 设 $y=x^\alpha,\ (x>0)$，这里 α 是任意实数. 证明 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

证 当 α 是自然数（包括 $\alpha=0$）时，我们已经根据函数导数的定义给予了证明. 当 $\alpha\neq 0$ 时（当然也包括正的自然数），$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$，它是函数 $y=e^u$ 和函数 $u=\alpha\ln x$ 的复合函数. 所以

$$\frac{dx^\alpha}{dx}=\frac{de^u}{du}\frac{du}{dx}=e^u\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

从例 18 和例 19 可知，如果 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $u=u(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y=a^{u(x)}$ 是 $y=a^u$ 和 $u=u(x)$ 的复合函数，所以在 x 处可导，且导函数是 $(a^u)'=a^u(x)u'(x)\ln a$.

如果 α 是任意常数，函数 $v=v(x)$ 在 x 处可导，且 $v(x)>0$，则 $y=v^\alpha(x)$ 在 x 处也可导，且导数是 $(v^\alpha)'=\alpha v^{\alpha-1}v'(x)$. 综合这些结论，我们有

例 20 设 $u(x),v(x)$ 可导，且 $v(x)>0$，则函数 $y=v(x)^{u(x)}$ 可导，其导数是

$$(v(x)^{u(x)})'=v(x)^{u(x)}\left(u'(x)\ln v(x)+\frac{u(x)v'(x)}{v(x)}\right).$$

证 因为 $y=e^{u(x)\ln v(x)}$ 是函数 $y=e^w,\ w=u(x)\ln v(x)$ 的复合，所以 y 在 x 处的导数是

$$\begin{aligned}y'(x)&=e^{u(x)\ln v(x)}(u\ln v)'(x)\\&=v(x)^{u(x)}\left(u'(x)\ln v(x)+\frac{u(x)v'(x)}{v(x)}\right).\end{aligned}$$

本题也可采用下面的方法：在 $y=u^v$ 的两边取对数，得

$$\ln y(x)=u(x)\ln v(x)$$

求该式两端对 x 的导数，有

$$\frac{y'(x)}{y(x)}=u'(x)\ln v+u(x)\frac{v'(x)}{v(x)}$$

由此也给出了结果.

注记 两边取对数的方法具有一定的普适性. 因为对数的功效是将积化为和. 对于某些涉及乘积（或幂）的函数来说，取对数再求导往往能带来便利.

3.1.5 基本初等函数的导数

至此，我们已经掌握了六类基本初等函数的导数公式，汇总如下：

$(c)'=0$ (c 为常数);

$(\sin x)'=\cos x$; $(\cos x)'=-\sin x$;

$(\tan x)'=\sec^2 x$; $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

$(e^x)'=e^x$; $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

$(a^x)'=a^x\ln a$; $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$;

我们看到基本初等函数的导函数都是初等函数.

由上面公式，并运用求导的四则运算、复合函数求导（链式法则）以及反函数求导，不但可以断定初等函数在其定义域内是可导的，而且可以求出它们的导数.

3.1.6 高阶导数

设 $y = f(x)$ 在区间 I 可导，它的导函数 $y' = f'(x)$ 也称为一阶函数 f 的导数（微商）.$y' = f'(x)$ 作为 x 的函数，仍然可以研究它在一点的导数.

如果 $f'(x)$ 在一点 x_0 可导，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导. 其导数值 $(f'(x))'|_{x=x_0}$ 通常记为

$$f''(x_0),\quad y''(x_0),\quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

称为函数 $f(x)$**在** x_0 **处的二阶导数**.

有时候在不引起混淆时也记

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \frac{d^2y(x_0)}{dx^2}$$

类似可以讨论函数 $y = f(x)$ 在一点 x_0 的三阶、四阶 $\cdots$ 导数 $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$, $\cdots$ 以及三阶、四阶 $\cdots$ 导函数 $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $\cdots$.

一般地，对 $n \geqslant 1$，如果函数 $y = f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}(x)$ 在点 x_0 可导，则称 f 在 x_0 处 n 阶可导，记为

$$y^{(n)}(x_0),\ f^{(n)}(x_0),\ \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=x_0},\ \text{或}\ \left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

称为函数f **在一点** x_0 **处的** n **阶导数**.

如果 $f^{(n-1)}(x)$ 的导函数 $(f^{(n-1)}(x))'$ 存在，则称其为**函数** f **的** n **阶导（函）数**，记作

$$y^{(n)}(x),\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}(x),\ \text{或}\ \frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

显然有

$$\frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right).$$

注记 （1）从定义看，一个函数的导函数不必可导，甚至不必连续（见本节习题中的第 12 题）. 因此对函数求导的阶要求越高，对函数的限制越多. 以 $f(x) = |x|$ 这个例子看，该函数在 $x = 0$ 不可导，函数的图象在此有一个尖点，不光滑. 因此一个函数可导，通常形象地称函数光滑. 函数具有越高的高阶导数，则函数就越“光滑”. 因此，一般而言，函数的性态也就越好.

（2）求高阶导数只不过是连续多次求导, 从技术上看并没有什么值得特别说明的地方. 例如，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都 n 阶可导，则显然有

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$$

而对于两个函数乘积的 n 阶导数，则有

定理 5 (Leibniz) 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都有 n 阶导数，则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

证 对 n 用归纳法.$n=1$ 时是显然的, 设当 $n\geqslant 1$ 时有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

则

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)}&=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\right)'\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k u^{(n-k+1)}v^{(k)}+C_n^k u^{(n-k)}v^{(k+1)}\right)\\&=u^{(n+1)}v+\sum_{k=1}^{n}C_n^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}+\sum_{k=1}^{n}C_n^{k-1}u^{(n+1-k)}v^{(k)}+uv^{(n+1)}\\&=u^{(n+1)}v+\sum_{k=1}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})u^{(n+1-k)}v^{(k)}+uv^{(n+1)}\\&=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}.\end{aligned}$$

由归纳法可知, 定理成立.

例 21 设 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个 n 次多项式, 求它的各阶导数.

解 我们有

$$P_n'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

其结果是一个 $n-1$ 次多项式, 从而多项式的导函数比原多项式“简单”, 即其次数降低了一次. 继续求导, 当求到第 k 次 ($1\leqslant k\leqslant n$) 时, 其结果是一个 $n-k$ 次多项式

$$P_n^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}+\cdots+k!a_k.$$

特别当 $k=n$ 次时, 其结果是一个常数

$$P_n^{(n)}(x)=n!a_n$$

而当求导的次数高于 n 次 ($k\geqslant n+1$) 时, 其结果即为零

$$P_n^{(k)}(x)=0.$$

所以多项式经过多次求导, 是越求越“简单”, 即次数越来越低, 直至为零.

注记 对于多项式, 我们还可以证明这样一个结论:

如果 x_0 是多项式 $P_n(x)$ 的 r 次重根, 即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x)=(x-x_0)^rQ_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n-r$ 次多项式, 且 $Q_{n-r}(x_0)\neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0)=0,\ \ P_n'(x_0)=0,\ \ \cdots,\ \ P_n^{(r-1)}(x_0)=0,\ \ P_n^{(r)}(x_0)\neq 0.$$

读者可应用定理 5 和多项式求导的特点给予证明. 事实上，上述条件和利用因式分解定义根的重数是等价的. 但该条件可以推广到定义任意一个可导函数零点的重数. 即对于函数 $f(x)$，如果

$$f(x_0)=0,\quad f'(x_0)=0,\quad \cdots,\quad f^{(r-1)}(x_0)=0,\quad f^{(r)}(x_0)\neq 0.$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的 r 重零点.

例 22　求 $f(x)=e^{ax},\ x\in(-\infty,+\infty)$，其中 a 是常数.

解　$(e^{ax})'=ae^{ax},\ (e^{ax})''=(ae^{ax})'=a^2e^{ax},\ \cdots$，一般有

$$(e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax}$$

特别

$$(e^x)^{(n)}=e^x$$

例 23　求 $f(x)=\ln(1+x),\ x\in(-1,+\infty)$ 的 n 阶导函数.

解　用归纳法可证

$$\frac{d^n\ln(1+x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad n=1,2,\cdots$$

因此

$$\left.\frac{d^n\ln(1+x)}{dx^n}\right|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

例 24　求 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 n 阶导函数，$x\in(-\infty,+\infty)$.

解　用数学归纳法易证

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

特别，在 $x=0$ 处，

$$(\sin x)^{(n)}|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{如 } n \text{ 为偶数}\\ (-1)^{(n-1)/2}, & \text{如 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$(\cos x)^{(n)}|_{x=0}=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{n/2}, & \text{如 } n \text{ 为偶数}\\ 0, & \text{如 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

例 25　求 $(1+x)^\alpha,\ \ x\in(-1,+\infty)$ 的 n 阶导函数.

解　由幂函数求导法则易知

$$((1+x)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\quad n=1,2,\cdots$$

特别

$$\left.((1+x)^\alpha)^{(n)}\right|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1),\quad n=1,2,\cdots$$

例 26 设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解 由 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ 可知，函数 $\arctan x$ 有任意阶导数，且

$$(1+x^2)y'=1.$$

由 Leibniz 公式得到

$$(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

将 $x=0$ 代入就得到递推公式

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).$$

由于 $y(0)=0, y'(0)=1$. 就得到

$$y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!,\quad y^{(2k)}(0)=0.\ \ (k=0,1,2\cdots)$$

3.1.7 向量值函数的导数

所谓向量值函数，就是一个从实数集合到 $\mathbf{R}^k$ 的一个映射

$$\boldsymbol{f}:\ [a,b]\subset\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}^k,\quad \boldsymbol{f}:\ t\longmapsto\boldsymbol{f}(t)$$

其中简单地讲，$\mathbf{R}^k$ 是所有 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k),\ \ x_i\in\mathbf{R}$ 形式的向量所构成的空间. 因此如果写成分量形式，则

$$\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_k(t))$$

即每个分量 $f_i=f_i(t)$ 都是 t 的函数.

$\mathbf{R}^k$ 是一个度量空间，其度量是

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_k-y_k)^2}$$

根据这个度量，可以定义向量值函数的连续性，只要将连续函数的定义中的不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 换成 $|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{f}(t_0)|<\varepsilon$ 即可，这里的“绝对值”是上面关于向量的度量. 显然，向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 连续的充分必要条件是它的每一个分量 $f_i(t),\ 1\leqslant i\leqslant k$ 连续.

我们也可用同样的方法定义 $\boldsymbol{f}(t)$ 的导数，即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{f}'(t)$$

如果上式左边的极限存在. 不难看出，向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 可导的充要条件是它的每一个分量 $f_1(t),\cdots,f_k(t)$ 均可导，而且

$$\boldsymbol{f}'(t)=(f_1'(t),\cdots,f_k'(t))$$

$\mathbf{R}^k$ 中向量具有加法、数乘、内积，特别对于 $k=3$，还有我们熟悉的外积. 因此我们有下列性质

1° $(\boldsymbol{f}(t) \pm \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}'(t) \pm \boldsymbol{g}'(t)$.

2° $(\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}'(t) \cdot \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{g}'(t)$.

3° 对于 $k=3$，有 $(\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}'(t) \times \boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{g}'(t)$.

上述公式读者可以自己完成证明. 但是，并非所有函数导数的性质，都可以自然推广到向量值函数上来. 后面我们将举例说明, 被称为函数的微分中值定理对于向量值函数不再成立.

注记 函数的参数表示 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 也可看成是二维的向量值函数. 通常向量值函数在几何与物理中常用. 例如，几何中的螺旋线是由向量值函数刻划的

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, kt), \quad t \in [0, 2\pi]$$

其中，k 是常数. 物理中万有引力公式是

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\frac{gmM\boldsymbol{r}(t)}{r^3(t)}$$

其中，g 是引力常数，m, M 分别是两个相互作用的质点的质量，$r = |\boldsymbol{r}|$. 力学中习惯上用函数上面加点表示求导.

习题 3.1

1. 讨论下列函数在点 $x=0$ 处是否可导.

(1) $f(x) = |\sin x|$;

(2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$;

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$;

(4) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geqslant 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$;

(5) $f(x) = |x|e^x$;

(6) $f(x) = |x^3|$.

2. 求 a, b 的值, 使下列函数处处可导.

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x < 0 \\ ax+b, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

3. 设函数 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 记 $f(x) = (x-a)g(x)$. 证明 $f'(a) = g(a)$.

4. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 证明

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} = (\alpha + \beta) f'(x_0) \ (\alpha, \beta \text{ 为常数}).$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a) \neq 0$, 证明, 函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 也可导. 若 $f(a)=0$, 结论是否仍成立?

6. 求下列函数的导数.

(1) $y=\frac{3x^2+9x-2}{5x+8}$; (2) $y=\sin x\tan x+\cot x$;

(3) $y=x^2\log_3 x$; (4) $y=\frac{x}{1-\cos x}$;

(5) $y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$; (6) $y=\frac{(1+x^2)\ln x}{\sin x+\cos x}$;

(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$; (8) $y=x^3\cdot\tan x\cdot\ln x$.

7. 求下列函数的导数.

(1) $y=x\sqrt{1-x^2}$; (2) $y=\sqrt[3]{1+\ln^2 x}$;

(3) $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; (4) $y=(\sin x+\cos x)^3$;

(5) $y=(\sin x^3)^3$; (6) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(7) $y=\sin[\sin(\sin x)]$; (8) $y=\sin[\cos^5(\arctan x^3)]$;

(9) $y=\left(\frac{x^3-1}{x^4+1}\right)^3$; (10) $y=x\sqrt{1+x^2}\sin x$;

(11) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$; (12) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

(13) $y=x^{x^x}+x^x+x^{2^x}$; (14) $y=(\ln x)^{e^x}$;

(15) $y=(\tan x)^{\cot x}$; (16) $y=10^x\cdot(\sin x)^{\cos x}$;

(17) $y=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$; (18) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$.

8. 设 $f(x)=x^3$, 求 $f'(x^2)$ 与 $[f(x^2)]'$.

9. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $g(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$, 求 $f'[g(x)]$, $[f(g(x))]'$.

10. 设 $f(x)$ 处处可微, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y=f(x^3)$; (2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

(3) $y=f(e^x+x^e)$; (4) $y=\sin[f(\sin f(x))]$;

(5) $y=f\{f[f(\sin x+\cos x)]\}$; (6) $y=f(e^x)e^{f(x)}$.

11. 求下列函数的导数.

(1) $y=\begin{cases}\dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$; (2) $y=|1-2x|\sin x$.

12. 设 n 为自然数, 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. 证明

(1) 当 $n=1$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导;

(2) 当 $n=2$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 但导函数在 $x=0$ 处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且导函数在 $x=0$ 处连续.

13. 证明, 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上处处可导, 但导函数在这个区间上无界.

14. 求下列函数的反函数的微商.

(1) $y=xe^x$; (2) $y=\arctan\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=2x^{-x}-e^{-2x}$; (4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

15. 证明, 可微的偶函数的导数为奇函数; 而可微的奇函数的导数为偶函数.

16. 证明, 可微的周期函数的导数仍是周期函数.

17. 求下列各式的和.

(1) $P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

(2) $Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$;

(3) $R_n=\cos 1+2\cos 2+\cdots+n\cos n$.

18. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=e^{-x^2}$; (2) $y=x^2 2^x$;

(3) $y=(1+x^2)\arctan x$; (4) $y=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$.

19. 设函数 $f(x)$ 处处有三阶导数, 求 y'', y'''.

(1) $y=f(x^2)$; (2) $y=f(e^x+x)$.

20. 设 $f(x)=x^n|x|$ (n 为自然数), 证明 $f^{(n)}(0)$ 存在, 但 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

21. 证明，如果 x_0 是多项式 $P_n(x)$ 的 r 次重根，即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x)=(x-x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n-r$ 次多项式，且 $Q_{n-r}(x_0)\neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0)=0,\ \ P_n'(x_0)=0,\ \ \cdots,\ \ P_n^{(r-1)}(x_0)=0,\ \ P_n^{(r)}(x_0)\neq 0.$$

22. 求下列函数的高阶微商.

(1) $(x^2e^x)^{(n)}$; (2) $[(x^2+1)\sin x]^{(n)}$;

(3) $\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$; (4) $(\sin x\cdot\cos x)^{(n)}$.

23. 求曲线 $y = \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程与法线方程.

24. 证明: 双曲线 $xy = 1$ 上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

25. 有一底半径为 r 厘米, 高为 h 厘米的正圆锥容器. 现以 a 厘米 ^{3}/秒的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

26. 水自高为 18 厘米, 底半径为 6 厘米的圆锥形漏斗流入直径为 10 厘米的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 厘米时水平面下降的速率为 1 厘米/分. 试求圆柱形筒中水平面上升的速度.

§3.2 微分

3.2.1 微分的定义

设 $y=f(x)$ 在给定一点 x 的附近有定义. 如果对自变量增加一个改变量 Δx, 则函数值 y 相应的改变量就是 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. 两个改变量 Δx 和 Δy 之间因函数 f 和点 x 而具有因果关系. 也就是说, 对于函数 f, 当给定一点后, 在这点的改变量 Δx, 对应一个函数值的改变量 Δy. 如果这种因果关系在 $\Delta x=0$ 附近近似于线性关系,

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\quad (\text{当 } \Delta x\to 0 \text{ 时})$$

其中 $A=A(x)$ 与 x 有关 (当然与 Δx 无关). 则称线性部分 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x 处的**微分**, 或称为函数在点 x 处有微分. 记为

$$dy=A\cdot\Delta x,\quad \text{或}\quad df(x)=A\cdot\Delta x$$

所以

$$\Delta y=dy+o(\Delta x)$$

也就是说, dy 是函数改变量 Δy 在 $\Delta x\to 0$ 时的主要部分 (另一部分是当 $\Delta x\to 0$ 时的高阶无穷小量).

注意到, 如果函数 f 在 x 可微, 即 $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

也就是, 函数在这一点可导. 反之, 如果 f 在 x 处可导, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-f'(x)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))-f'(x)\Delta x}{\Delta x}=0$$

这说明

$$\varepsilon(\Delta x)=\frac{\Delta y-f'(x)\Delta x}{\Delta x}$$

是当 $\Delta x\to 0$ 时的高阶无穷小量: $\varepsilon(\Delta x)=o(\Delta x)$ 所以 $\Delta y=A\dot{\Delta}x+o(\Delta x)$, 其中 $A=f'(x)$. 因此函数在 x 处可微. 据此分析, 我们有

定理 1 $y=f(x)$ 在 x 可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x 可导, 这时 $dy=f'(x)\Delta x$. 因此函数在一点可导有时也称为在一点可微.

当我们取 $y=f(x)=x$ 时, 就得到

$$dy=dx=(x)'\Delta x=\Delta x.$$

即自变量的微分与改变量相等. 于是函数 $y=f(x)$ 在点 x 的微分又可记成

$$dy=df(x)=f'(x)dx.$$

现在，dx 与 dy 都有完全确定的意义，它们分别是自变量 x 和函数 y 的微分，并且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

即函数在一点的导数是其因变量的微分和自变量的微分的商. 以往我们把 $\frac{dy}{x}$ 当作一个完整记号来表示微商，而现在可以将它看成是“两个微分的商”. 这也是“微商”这个名词的来由.

几何解释 如图 3.7，过 $y = f(x)$ 的图象上一点 $(x, f(x))$ 作切线 L. 易知，函数图象纵坐标的改变量（即函数的改变量）是 Δy，而 L 上点的纵坐标的改变量就是函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分 $dy = f'(x)\Delta x$.

由于 $|\Delta y - dy| = o(\Delta x)$，故当 $|\Delta x|$ 很小时，函数在点 x 的改变量与切线的改变量的差，相比自变量的改变量 Δx 来说，是高阶无穷小. 因此在点 x 附近，可以用过 $(x, f(x))$ 的切线代替函数描述的曲线. 这就是微积分中**“以直代曲”**的基本思路.

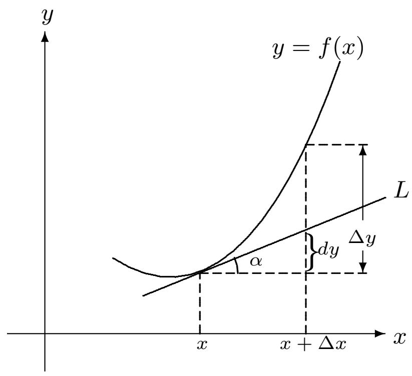

图 3.7

顺便指出，过曲线上一点 (x_0, y_0), $(y_0 - f(x_0))$ 的切线方程是

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

3.2.2 微分运算的运算与一阶微分形式的不变性

由微分的表达式 $dy = f'(x)dx$ 以及基本初等函数的求导公式，可以对应地给出基本初等函数地微分公式

$d(c) = 0$ (c 为常数);

$d\sin x = \cos x\,dx$; $\qquad d\cos x = -\sin x\,dx$;

$d\tan x = \sec^2 x\,dx$; $\qquad d\cot x = -\csc^2 x\,dx$;

$d\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $\qquad d\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

$d\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$; $\qquad d\mathrm{arccot}\, x = -\dfrac{1}{1+x^2}\,dx$;

$de^x = e^x\,dx$; $\qquad d\ln x = \dfrac{1}{x}\,dx$;

$da^x = a^x \ln a\,dx$; $\qquad d\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}\,dx$;

$dx^\mu = \mu x^{\mu-1}\,dx$;

此外，由于微分和导数的对应关系，我们不难得到下列定理

定理 2 设函数 u 和 v 在 x 处可微，则函数 cu, $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$（其中，对于最后的分式，$v \neq 0$）在 x 处可微，且有

$d(cu) = cdu$, 其中 c 为常数;

$d(u \pm v) = du \pm dv$;

$d(uv) = vdu + udv;$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0.$

以上公式和法则都是微分定义和求导运算的直接结果.

定理 3 设 $y=\varphi(x)$ 定义在区间 I 上，$z=f(y)$ 定义在一个包含 $\varphi(I)$ 的区间 J 上. 如果 $y=\varphi(x)$ 在 x 上可微，$z=f(y)$ 在 $y=\varphi(x)$ 处可微，则复合函数 $z=f(\varphi(x))$ 在 x 处也可微，并有

$$dz = f'(y)dy$$

其中 $dy=\varphi'(x)dx$ 是函数 $y=\varphi(x)$ 在 x 处的微分.

证 由微分表达式和复合函数求导的链式法则，有

$$\begin{aligned} dy &= (f(\varphi(x)))'dx = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= f'(y)dy. \end{aligned}$$

定理 3 说明，从形式上看无论 y 是自变量还是中间变量,$z=f(y)$ 的（一阶）微分具有相同的形式 $df(y)=f'(y)dy$. 这种性质称为**一阶微分形式不变性**.

注意，这里仅是形式不变，实际含义并不相同：当 y 是自变量时，y 的微分和改变量相等 $dy=\Delta y$；当 y 是中间变量时，它也是另一个变量的函数 $y=\varphi(x)$，此时 $dy=\Delta y+o(\Delta x),\ (\Delta x\to 0)$.

例 1 求 $y=e^{-ax}\sin bx$ 的微分，其中 $a,\ b$ 都是常数.

解 利用微分的乘法运算和一阶微分形式的不变性，有

$$\begin{aligned} dy =& d(e^{-ax}\sin bx) = e^{-ax}d\sin bx + \sin bx de^{-ax} \\ &= e^{-ax}\cos bx d(bx) + \sin bx e^{-ax}d(-ax) \\ &= be^{-ax}\cos bx - b\sin bx e^{-ax} = e^{-ax}(b\cos bx) - a\sin bx)dx \end{aligned}$$

例 2 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ 的微分，其中 a 是常数.

解

$$\begin{aligned} d\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right) &= \frac{d(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(dx + \frac{d(x^2+a^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx. \end{aligned}$$

由此还可以得到该函数的导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

例 3 设 $0<q<1$，函数 $y=y(x)$ 满足下列方程

$$y-x-q\sin y=0$$

求函数 $y=y(x)$ 的导数.

解 我们不能从方程中解出 y 的显示表示，因此为了求 $y'(x)$，在上列等式的两端对 x 求微分，并利用一阶微分形式的不变性，得

$$dy-dx-q\cos y dy=0$$

故

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-q\cos y}$$

下面的例子非常重要，它给出了由参数方程所表示的函数的微商（有关函数的参变量表示，参见 §1.2 节）.

例 4 设由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 由 $dy=\psi'(t)dt,\ dx=\varphi'(t)dt$, 故有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\varphi'(t)dt}d\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\\ &=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.\end{aligned}$$

习题 3.2

1. 设 $y=x^2+x$, 计算在 $x=1$ 处, 当 $\Delta x=10,1,0.1,0.01$ 时, 相应的函数的改变量 Δy 和函数的微分 dy, 并观察差 $\Delta y-dy$ 随 Δx 减小的变化情况.

2. 求下列函数的微分

(1) $y=\ln\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$;　　(2) $\sin x-x\cos x$;

(3) $y=\arccos\frac{1}{|x|}$;　　(4) $y=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$;

(5) $y=5^{\sqrt{\arctan x^2}}$;　　(6) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(7) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;　　(8) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. 对下列函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(1) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \varphi \cos \varphi, \\ y = \varphi \sin \varphi; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = \cos^3 \varphi, \\ y = \sin^3 \varphi. \end{cases}$

4. 求下列曲线在已知点处的切线方程与法线方程.

(1) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处;

(2) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处.

5. 对于以下两种情形: (1) x 为自变量. (2) x 为中间变量, 分别求函数 $y = e^x$ 的一阶微分 dy 和二阶微分 d^2y.

6. 设 $y = \sin x,\ x = e^t$, 试用 (1) x 和 dx; (2) t 和 dt 表示 d^2y.

§3.3 微分中值定理

从本节开始到本章结束，我们将通过函数 f 的导数，来进一步了解函数本身的基本性质. 我们注意到，导数是函数的差商

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

的极限状态，而不是差商在某个 Δ 处的值. 差商是一个涉及函数在 x 以及 x 周边的值，反映的是一种“整体”性质，而导数只是函数在一点 x 的“局部”性质. 我们的目的就是要通过函数导数的局部性质，推导出函数整体的性质. 但这个过程并不显然.

以一个极其简单的函数为例. 设函数 $f(x)=c$ 是一个常值函数，则它在任何一点 x 的导数 $f'(x)=0$. 反之，如果已知一个函数 f 在每一点的导数为零，是否推出这个函数就一定是一个常数? 答案应当是肯定的. 因为从几何上看，如果一个函数在每一点的切线都是水平的，则这个函数的图象本身也应当是水平的. 从物理上看，如果一个质点的运动速度始终为零，则这个物体一定是静止的. 但是，抽象地从极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

推断函数 f 是一个常数，却不是一件显然的事情.

3.3.1 Fermat 定理和 Rolle 定理

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有定义，如果对其中的任一点 x, 都有

$$f(x_0)\geqslant f(x),\quad 或\quad f(x_0)\leqslant f(x),$$

则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的局部**极大值**（或**极小值**），x_0 称为 $f(x)$ 的一个**极大值点**（或**极小值点**）. 极大值和极小值统称为**极值**，极大值点和极小值点统称为**极值点**.

注意，极值或极值点的定义本身，与函数是否连续，是否可导无关.

定理 1 (Fermat) 设函数 $f(x)$ 在其定义区间 I 的一个内点（即不是端点）x_0 处取到局部极值，如果函数在这一点可导，则必有 $f'(x_0)=0$.

证 不妨设函数在 x_0 取到极大值. 根据定义，存在一个 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant 0$$

只要改变量 h 满足 $|h|<\delta$. 于是差商

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0,\quad 当\ h<0\ 时$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant 0,\quad 当\ h>0\ 时$$

又因为函数在 x_0 可导，所以在上列两式中分别令 $h\to 0-0$ 和 $h\to 0+0$，有

$$f'_-(x_0)\geqslant 0,\quad f'_+(x_0)\leqslant 0$$

故 $f'(x_0)=0$. 当 f 在 x_0 取到极小值的情况，可类似证明.

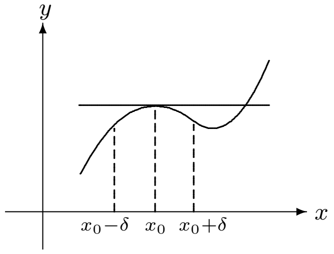

图 3.8

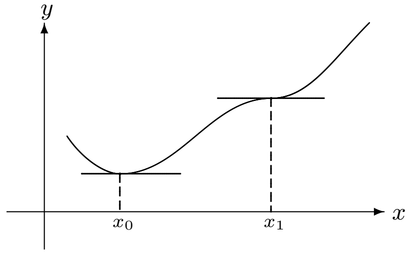

图 3.9

从几何上看, 函数 f 在一点 x_0 取到极大 (极小) 值, 如果函数在此点的切线存在, 那么在这点的切线是水平的 (平行于 x 轴).

注记 Fermat 定理的逆并不成立，也就是说，即使函数 f 在一内点的导数为零，未必这一点是极值点，最简单的反例是 $f(x)=x^3$, $x\in[-1,1]$，显然，$f'(0)=0$，但是 $x=0$ 不是该函数的极值点. 即便如此，Fermat 定理提供了这样的途径，即由导数的信息，推断函数的有关 (极大、极小) 值是否存在? 通常, 称导数为零的点为函数的驻点, 因此想了解函数的极值点，只要在驻点中作进一步讨论即可 (我们随后将进行详细讨论).

定理 2 (Rolle)设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，而且 $f(a)=f(b)$, 则必有 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证 根据闭区间 $[a,b]$ 上连续函数一定有最大值和最小值 (最大值和最小值当然也是极值) 的实事，如果最大值和最小值中至少有一个在 (a,b) 内部一点 ξ 取得，则由定理 1 知，$f'(\xi)=0$. 反之，最大值和最小值都只能在端点 a 和 b 处取得，而 $f(a)=f(b)$, 所以最大值和最小值相等，即，函数是一个常值函数，此时函数的导函数在任何一点都为零.

读者可自行举例说明，Rolle 定理中的条件：闭区间上连续、开区间上可导、端点等值，三者缺一不可.

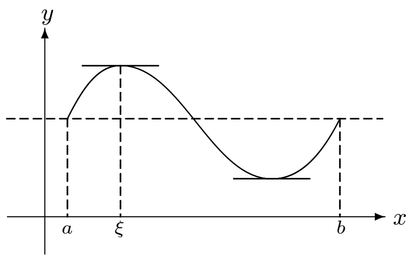

图 3.10

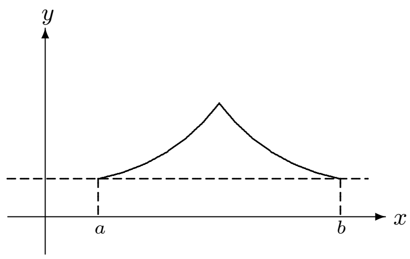

图 3.11

3.3.2 微分中值定理

定理 3 (Lagrange) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可微，则必有 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

有时，我们也称微分中值定理为 Lagrange 中值定理. 注意，如果 $f(a)=f(b)$，则中值定理化为了 Rolle 定理，因此它是比 Rolle 定理更一般性的定理.

从几何上看，微分中值定理的结果是不难理解的. 考虑函数的差商

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

它是割线 AB 的斜率. 设想一下，如果我们平行移动这条割线，则它至少有一次机会达到这样的位置，即在曲线上与割线 AB 距离最远的那一点 M，成为曲线的切线（图 3.12）. 也就是说，存在介于 a 和 b 之间的一点 ξ，使得定理 3 成立.

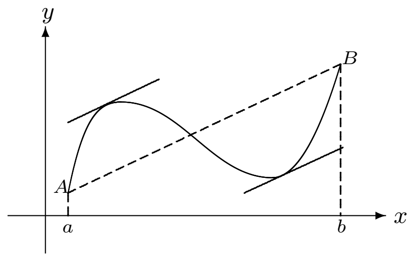

图 3.12

从物理上看，一个沿直线运动的质点，必然在某一个时刻的瞬时速度，等于整个运动过程的平均速度.

定理 3 的证明 论证的策略是，将一般性命题，化为其特殊情形—— Rolle 定理来解决. 从条件上看，中值定理只是放松了对于端点是否相等的要求. 从几何图象上看（比较图 3 和图 4），只是把 Rolle 定理中的示意图斜一个角度而已. 因此我们构造一个辅助函数 $F(x)$，使得 $F(x)$ 满足 Rolle 定理（即是把图 4 摆平了看）. 因为连接 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 两点的弦的直线方程是

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

因此设

$$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a).$$

则容易验证：$F(b)=F(a)=0$，而且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，因此 $F(x)$ 满足 Rolle 定理的三个条件，故存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

这即是定理的结论.

在微分中值定理得条件下，我们可以考虑区间 $[a,b]$ 上任意两点 x_1, x_2（不妨设 $x_1<x_2$）之间的中值定理. 即一定存在介于 x_1, x_2 之间的一点 ξ, $x_1<\xi<x_2$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

如果取

$$\theta=\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1},$$

容易验证 $0<\theta<1$，因此上式经常表示成

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1).$$

或者用增量的语言，表示成

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

在微分中值定理中，除了 ξ 位于两点 $x_1,\ x_2$ 之间外，对于 ξ 的位置并未作出任何明确的断言. 例如，对于 $f(x)=x^2$，

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2=f'(\xi)=2\xi$$

所以 $\xi=\frac{x_1+x_2}{2}$，它是 $[x_1,x_2]$ 的中点，而对于 $f(x)=x^3$ 来说，$f'(x)=3x^2$，所以

$$\xi=\sqrt{\frac{x_2^2+x_1x_2+x_1^2}{3}}$$

情况就复杂的多. 尽管如此，我们仍然能够通过微分中值定理，得到函数自身的一些性质. 其中一个直接结果，就是关于本节开始时所提到的问题，即导数为零的函数是否是常值函数，为此有

推论 1 如果函数 f 在一个区间上连续，且对区间内的每一个点 x，都有 $f'(x)=0$，则函数 f 在区间上一定是常值函数. 对于两个可导函数 f 和 g，如果它们的导数相等，则两个函数相差一个常数.

证 任取区间上两点 $x_1<x_2$，在 $[x_1,x_2]$ 上，由中值定理知，存在一点 ξ 使得

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

但 $f'(x)$ 恒为零，所以 $f'(\xi)=0$，于是 $f(x_1)=f(x_2)$，即函数在区间上任意两点的值相等，所以是常值函数.

另一方面，我们知道，可微函数一定连续. 但微分中值定理为连续性提供了更加定量化的结果，即

推论 2 设函数 f 在区间 I 可微，且 $|f'(x)|\leqslant M$（即导数有界）. 则

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$$

满足上述公式的函数被称为满足Lipschitz **连续性条件**. 所以具有有界导数的函数一定是 Lipschitz 连续的. 反之，Lipschitz 连续未必可导. 详细情况就不多讨论了.

注记 对于向量值函数, 微分中值定理不再成立, 例如设 $\boldsymbol{f}(\theta)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$. 显然,

$$\boldsymbol{f}(2\pi)=\boldsymbol{f}(0)=(1,0)$$

但是

$$\boldsymbol{f}'(\theta)=(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$

即 $|\boldsymbol{f}'(\theta)|=1$, 所以不可能存在一点 ξ 使得 $\boldsymbol{f}(2\pi)-\boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{f}'(\xi)(2\pi-0)$. 于是微分中值定理不再成立.

例 1 证明：对任意常数 c，方程 $x^3-3x+c=0$ 在 $[0,1]$ 中不可能有两个相异的实根.

证 记 $f(x)=x^3-3x+c$. 若对某个 c，方程在 $[0,1]$ 上有两个相异的实根 x_1, x_2 不妨设 $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ 则 $f(x_1)=f(x_2)=0$，因此 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足 Rolle 定理的三个条件，所以必有 $x_1<\xi<x_2$ 使得

$$f'(\xi)=3(\xi^2-1)=0.$$

即 $|\xi|=1$，但 $0 \leqslant x_1<\xi<x_2 \leqslant 1$，故矛盾. 矛盾说明有两个相异实根的假设是不对的.

例 2 设 $0<a<b$，证明

$$\frac{b-a}{b}<\ln \frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

证 由于 $0<a<b$，故在 $[a, b]$ 上，函数 $\ln x$ 显然满足中值定理的条件，所以存在一点 $\xi \in(a, b)$ 使得

$$\ln b-\ln a=\left.(\ln x)'\right|_{x=\xi}(b-a)=\frac{1}{\xi}(b-a)$$

但

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$$

即有所证的结果.

例 3 证明恒等式

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, \quad|x| \leqslant 1$$

证 命 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$. 则 $f'(x) \equiv 0$. 所以

$$\arcsin x+\arccos x \equiv c \quad \text{(常数)}.$$

将 $x=0$ 代入, 即得 $c=\frac{\pi}{2}$.

3.3.3 函数的单调性与极值

作为微分中值定理一个重要的应用，我们将讨论如何利用函数导数所提供的信息，研究函数自身的单调性.

定理 4 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 的内部可微，如果对 I 内的每一点 x，有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上是严格单调递增的；如果对 I 内的每一点 x，有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 I 上是严格单调递减的.

证 考虑 $f'(x)>0$ 的情形（$f'(x)<0$ 的情形可类似证明）. 设 $x_1,\ x_2$ 是 I 中任意两点，并且 $x_1<x_2$. 定理的条件表明，函数 f 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，在 (x_1, x_2) 内可微. 故由中值定理知，存在一点 $\xi \in(x_1, x_2)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

因为对所有的 x，有 $f'(x)>0$，所以 $f'(\xi)>0$；而 $x_2-x_1>0$，推得 $f(x_2)-f(x_1)>0$. 从而 f 是严格单调递增的.

定理 4 说明如果函数在区间上的变化率是正(负)的,则函数是单调递增(减)的. 从几何上看 (图 3.13), 作为 f 的图象的曲线,如果在曲线上每一点 $(x,\ f(x))$ 处切线的斜率都是正的(即切线与 x 轴正向的夹角满足 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$),则曲线呈上扬趋势. 而当曲线上每一点 $(x,\ f(x))$ 处切线的斜率都是负的时($\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$),曲线呈下降趋势.

根据上述分析,如果一个函数 $f(x)$ 在区间 I 内某一点 x_0 的左边 $f'(x)>0$,而在右边 $f'(x)<0$,则函数在点 x_0 的左边是严格单调增的,在右边是严格单调减的,因此在 x_0 应该是局部极大. 类似可分析局部极小.

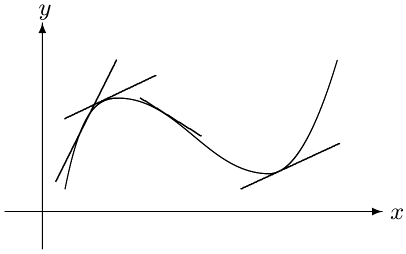

图 3.13

事实上,定理 4 确实给出了函数极值的一个简单实用的判别法. 为了讲清楚这个判别法,我们再次明确,函数 $f(x)$ 在其定义区间 I 内的极值点,必是 I 中这样的内点:要么满足 $f'(x)=0$(即是 $f(x)$ 的驻点),要么函数 $f(x)$ 在这些点不可导. 我们把这样的点称为**"可疑极值点"**.

定理 5 设 x_0 是函数 $f(x)$ 在区间 I 内的可疑极值点,且 $f(x)$ 在 x_0 连续.

1° 如果 $f(x)$ 在 x_0 左边的某个区间内(即对某个 $\delta>0$,在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内),有 $f'(x)>0$,而在 x_0 的右边某个区间内(即对某个 $\delta'>0$,在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内),有 $f'(x)<0$,则 x_0 为一个局部极大值点.

2° 如果 $f(x)$ 在 x_0 左边的某个区间内(即对某个 $\delta>0$,在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内),有 $f'(x)<0$,而在 x_0 的右边某个区间内(即对某个 $\delta'>0$,在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内),有 $f'(x)>0$,则 x_0 为一个局部极小值点.

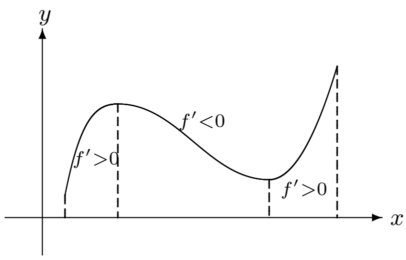

图 3.14

3° 如果 $f(x)$ 在 x_0 左、右的某个区间内,$f'(x)$ 的符号相同,则 x_0 不是极值点.

从图 3.14 可以看出,这些判别规则是一目了然的.

作为定理 5 的一个直接结果,如果要求连续函数在一个闭区间上的最大值、最小值,可先求出函数在区间内的极值点,再比较函数在这些极值点的值和两个端点的值,即得出结果(注意,连续函数有可能在闭区间的端点达到最大、最小值).

至此,我们知道了如何利用函数的(一阶)导数所提供的信息,判断函数自身的单调区间和极值点,同时也掌握了函数图象的一个基本轮廓. 但是要揭示函数图象的更细致的方面,还需要求助于函数的二阶导数. 下面的定理说明如何用二阶导数从驻点中甄别极值点,其他关于利用二阶导数研究函数的性质将在 §3.5 中讨论.

定理 6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 有二阶导数,x_0 是 $f(x)$ 的一个驻点,即 $f'(x_0)=0$. 如果 $f''(x_0)<0$,则 x_0 是函数的极大值点;如果 $f''(x_0)>0$,则 x_0 是函数的极小值点(习题 3.3,

第 19 题).

例 4 证明：当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x$.

证 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，显然它是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的连续函数. 又因为在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，有

$$f'(x)=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg}x)<0$$

这是因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x>0$，$\tan x>x$（我们在证明一个重要的极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 时曾经证明过这个不等式）. 故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内严格单调递减，所以对 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，有

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$$

例 5 求函数 $f(x)=e^{-x^2}$ $(x\in(-\infty,+\infty))$ 的单调区间与极值.

解 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$，所以驻点为 $x=0$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,\ +\infty)$ 时，$f'(x)<0$. 所以函数在区间 $(-\infty,0]$ 上严格单调增，在 $[0,+\infty)$ 上严格单调减，$x=0$ 是函数的极大值点，且极大值是 $f(0)=1$.

例 6 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值与最小值.

解 显然，$f(x)$ 在区间 $(-4,4)$ 内可导，由

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

得，$f(x)$ 的驻点为 $x_1=-1,\ x_2=3$. 因 $f(-1)=10,\ \ f(3)=-22$，而在区间的端点处，$f(-4)=-71,\ \ f(4)=-15$，比较这些值的大小可知函数 $f(x)$ 在驻点 $x_1=-1$ 处取到最大值 10，在端点 $x=-4$ 处取到最小值 -71.

例 7 设 $x>0,\ \ 0<\alpha<1$，证明 $x^\alpha-\alpha x\leqslant1-\alpha$.

证 记 $f(x)=x^\alpha-\alpha x,\ x>0$，则 $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$，所以函数只有唯一的驻点 $x=1$. 因为 $0<\alpha<1$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，而当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$. 故函数在 $x=1$ 达到整个区间 $x>0$ 上的最大值，即 $f(x)\leqslant f(1)=1-\alpha$ 对所有 $x>0$ 成立，即是所要结果.

例 8 试在给定直线上求出一点 P，使得这一点同两个已知的固定点 A 和 B 的距离之和为最小.

解 如果这两点分别在直线的两侧，则 P 点显然就是直线与线段 AB 的交点. 所以不妨设 A 和 B 在直线的同一侧.

取给定的直线为 x 轴，A 点在 y 轴上（图 3.15），坐标为 $A(0,h)$，B 点的坐标为 $B(a,b)$，所要求的点坐标是 $P(x,0)$. 根据题目要求，即是要求

$$|AP|+|PB|=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(x-a)^2+b^2}=f(x)$$

取最小值. 因为

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$
$$f''(x)=\frac{h^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}}+\frac{b^2}{\sqrt{[(x-a)^2+b^2]^3}}$$

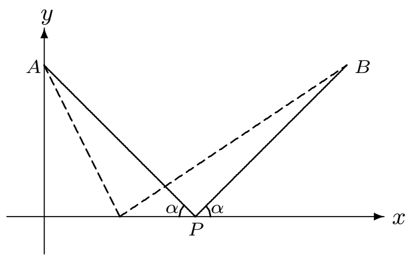

图 3.15

方程 $f'(x)=0$ 的解满足

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{a-x}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}$$

即是条件

$$\cos\alpha=\cos\beta$$

其中 α 和 β 分别是直线段 AP 和 BP 与 x 轴的锐夹角. 也就是说当 P 点满足上面条件时，其横坐标 x 满足 $f'(x)=0$，又因为 $f''(x)>0$，所以是唯一的极小值点. 因此是最小值点（函数在两个端点 $\pm\infty$ 趋于无穷）.

这个问题的解与光学中著名的 Fermat 最短时间原理有着密切联系. 即光线在镜面上的入射角等于反射角.

习题 3.3

1. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 确定方程 $f'(x)=0$ 的实根的个数, 并指出根所在的区间.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有二阶微商, 且 $f(1)=f(2)=0$. 记 $F(x)=(x-1)^2f(x)$, 则在区间 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $F''(\xi)=0$.

3. 举例说明, 中值定理的下述意义下的逆不成立: 设 $\xi\in(a,b)$ 是指定的一点, 则存在 $c,d\in[a,b]$, 使得 $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$.(提示: 考虑函数 $f(x)=x^3$, $\xi=0$.)

4. 证明下列不等式.

   (1) 当 $a>b>0,n>1$ 时, 有 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$;

   (2) 当 $x>0$ 时,$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$;

   (3) 当 $0<a<b$ 时,$(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b$.

   (4) 当 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

5. 证明下列恒等式.

$$(1)\ \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2)\ \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1 \end{cases}.$$

6. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的可微函数, 对任意 $x \in [0,1]$ 有 $f(x) \in (0,1)$; 并且对每个 x, $f'(x) \neq 1$. 证明, 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x, 使 $f(x) = x$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, 且 $|f'(x)| < 1$, 又 $f(0) = f(1)$. 证明: 对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1, x_2, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$.

8. 若 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x) = f(x)$. 证明 $f(x) = Ce^x$, C 为任意常数.

9. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$. 证明, 在 (a,b) 内存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) > 0$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. 证明

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0;$$

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

11. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 (有限) 开区间 (a,b) 内有有界的导函数, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内也有界. 如果有限区间 (a,b) 改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

12. 设对所有的实数 x, y, 不等式 $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^2$ (M 为常数) 都成立. 证明:$f(x)$ 恒为常数.

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+\delta]$ 上连续 (这里 $\delta > 0$), 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = l$ (这里的 l 可以是无穷大), 则 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数也为 l, 即

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x).$$

(将区间 $[x_0, x_0+\delta]$ 换为 $[x_0-\delta, x_0]$ 有类似的结论.)

14. 应用上一题的结论证明

(1) 函数 $x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x = 0$ 处不可导;

(2) 函数 $\arcsin x, \arccos x$ 在 $x = 1$ 处没有左导数, 在 $x = -1$ 处没有右导数.

15. 证明, 若函数 $f(x)$ 在一个区间内处处可导, 则导函数 $f'(x)$ 不能有第一类间断点, 即在 (区间内) 每一点处, $f'(x)$ 或者连续, 或者有第二类间断.(由本题推出, 具有第一类间断点的函数, 如 $\operatorname{sgn} x$, 不能成为某个函数的导数.)

16. 设 $f(x)$ 在一个区间 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,$f(x)$ 在 I 内部的导数为正 (负), 则 $f(x)$ 在 I 上严格单增 (减).(注意, 在例外的点处,$f(x)$ 可能不可导.)

17. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 内部满足 $f'(x) > g'(x)$; 设 $a \in I$, 使得 $f(a) = g(a)$. 则当 $x \in I$ 且 $x > a$ 时, 有 $f(x) > g(x)$; 当 $x \in I$ 且 $x < a$ 时, 有 $f(x) < g(x)$.

18. 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可微,$f(0) = 0$, $f'(x)$ 严格递增. 证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 严格递增.

19. 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个可疑极值点, 且 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可微, 且 $f''(x_0) \neq 0$. 证明: 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点. (提示: 现在必有 $f'(x_0) = 0$.)

    举例说明: 若 $f''(x_0) = 0$, 则 x_0 可以是 $f(x)$ 的极大值点, 或极小值点, 也可以不是极值点.

20. 求下列函数的单调区间与极值.

    (1) $y = 2x^3 - 3x^2$;　　(2) $y = x^{\frac{2}{3}}$;

    (3) $y = x^2 e^{-x^2}$;　　(4) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

    (5) $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$;　　(6) $y = \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

21. 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

    (1) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2, 2]$;

    (2) $y = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

    (3) $y = \arctan\dfrac{1 - x}{1 + x}$, $[0, 1]$;

    (4) $y = x \ln x$, $(0, +\infty)$.

22. 证明下列不等式.

    (1) 若 $0 < x \leqslant 1$, $p > 1$, 则 $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$;

    (2) $\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

    (3) $\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$, $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$;

    (4) $\ln(1 + x) > \dfrac{\arctan x}{1 + x}$, $x > 0$;

    (5) $1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geqslant \sqrt{1 + x^2}$, x 为任意实数;

    (6) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\dfrac{x}{\sin x} > \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\cos x$; 并说明, 右端的常数 $\frac{4}{3}$ 不能换为更大的数.

23. 试确定下列函数实零点的个数及所在范围.

    (1) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10$;　　(2) $ax - \ln x$ (其中 $a > 0$).

§3.4 Cauchy 中值定理和未定式的极限

3.4.1 Cauchy 中值定理

本节的主要目的是求未定式的极限. 所谓“未定式”是指当 x 趋于某一个值(或无穷)时, 函数的极限没有统一的结果, 有可能是任意实数, 或者极限不存在. 在解决未定式的极限问题时, L'Hospital 法则是一个非常有效的方法, 为此首先要证明下列 Cauchy 中值定理.

定理 1 (Cauchy) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微. 而且对任一点 $x \in (a,b), g'(x) \neq 0$. 则在 (a,b) 内, 必存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

这里, 因为 $g'(x) \neq 0$, 由 Lagrange 中值定理知, $g(b)-g(a) \neq 0$, 所以上式的左边是有意义的.

证 注意到, 当 $g(x)=x$ 时, Cauchy 中值定理就是 Lagrange 中值定理, 因此前者是后者的推广. 类似 Lagrange 中值定理的证明, 在 Lagrange 中值定理证明中所构造的辅助函数 $F(x)$ 中, 将 x 换成 $g(x)$ (从而对应地将 a, b 换成 $g(a)$, $g(b)$). 即设辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

易知, $F(x)$ 满足 Rolle 定理的三个条件: 在闭区间上连续、开区间内可导, 且

$$F(b)-F(a)=0.$$

所以存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0.$$

此即定理的结论.

3.4.2 $\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 2 (L'Hospital 法则) 对于一个固定的点 x_0, 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

如果

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

这里 l 可以是一个有限实数, 也可以是 ∞. 则当 $x \to x_0$ 时, 有

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

证 定理中条件

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l,$$

蕴涵着这样的假设：存在一个区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，使得对区间内任意一点（点 x_0 可能除外），$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都存在，而且 $g'(x)\neq 0$

由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，而且当 $x\to x_0$ 时，$\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限与函数 f 和 g 在 x_0 的无关，因此我们不妨假设 $f(x_0)=g(x_0)=0$，这样，函数 f 和 g 在 x_0 都连续.

设 x 是区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 中的任意一点（$x\neq x_0$），在以 x 和 x_0 为端点的闭区间上，f 和 g 满足 Cauchy 中值定理的一切条件，于是存在介于 x 和 x_0 之间的一点 ξ，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因为 $|\xi-x_0|<|x-x_0|$，所以当 $x\to x_0$ 时，$\xi\to x_0$. 由定理的假设, 即得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=l.$$

上述结果不是孤立的，我们必须注意到

一方面，从上面的证明不难看出，定理中的极限过程可改为单测极限（即 $x\to x_0\pm 0$），此时结论同样成立，另一方面对于极限过程 $x\to+\infty,\ x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 时的“$\frac{0}{0}$”型未定式，也有类似的 L'Hospital 法则. 我们以 $x\to\infty$ 时为例.

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$

证明的过程中只要设 $y=\frac{1}{x}$，则 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$，而且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}{g\left(\dfrac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{1}{y^2}f'\left(\dfrac{1}{y}\right)}{\dfrac{1}{y^2}g'\left(\dfrac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

另一方面，在使用 L'Hospital 法则时，如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是“$\frac{0}{0}$”型未定式，即不但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g'(x)=0$，则可以继续考虑二阶导数，如果 $\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=l$，则 $\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=l$. 不管使用几次，前提条件一是前者必须是“$\frac{0}{0}$”型未定式，二是后者的极限一定存在，两者缺一不可.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$.

解 这是一个“$\frac{0}{0}$”型未定式，但由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)'}{(\ln(1+x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\dfrac{1}{1+x}}=2$$

所以由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}=2.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

解 这是一个 “$\frac{0}{0}$” 型未定式. 但分子分母各自求导后的比式

$$\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(\sin^2 x)'}=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$$

仍然是一个 “$\frac{0}{0}$” 型未定式, 因此需要再次使用 L'Hospital 法则, 即

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2\cos 2x}=1$$

3.4.3 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

无论是 x 趋于固定的有限数, 还是趋于无穷, 还是取单测极限, 对于 “$\frac{\infty}{\infty}$” 型未定式的极限, L'Hospital 法则同样有效. 证明的方法也是基于 Cauchy 中值定理, 但证明的过程有些繁琐, 我们将不作详细讨论. 在此, 我们列出对于 $x\to x_0$ 的情形的完整叙述.

定理 3 (L'Hospital 法则) 对于一个固定的点 x_0, 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty.$$

如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l,$$

这里 l 可以是一个有限实数, 也可以是 ∞. 则当 $x\to x_0$ 时, 有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

例 3 设 $\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

解 这是一个 “$\frac{\infty}{\infty}$” 型未定式, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

如果用 $\frac{1}{x}$ 代替 x, 则 $\lim\limits_{x\to 0+0}x^\alpha\ln x=0$.

例 4 设 $\mu>0,\ a>1$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{a^x}$.

解 注意到, 只要 $\mu-k>0$, 当 $x\to x_0$ 时, 本题的分子部分 k 次导函数仍是无穷大量, 而分母部分的任意阶导函数都是无穷大量. 因此取正整数 $n>\mu$. 则当 $x>1$ 时有

$$0<\frac{x^\mu}{a^x}<\frac{x^n}{a^x}.$$

接连使用 n 次 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\cdots\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0.$$

注记 例 3 说明，无论 α 是多小的正数，当 $x\to+\infty$ 时，幂函数 x^{α} 总是比对数函数更高阶的无穷大量. 而例 4 说明，无论 μ 是多么大的正数，只要常数 $a>1$，当 $x\to+\infty$ 时，指数函数 a^{x} 总是比幂函数 x^{μ} 更高阶的无穷大量.

3.4.4 其他类型的未定式

除了前面重点介绍的“$\frac{0}{0}$”型未定式和“$\frac{\infty}{\infty}$”未定式之外，还有下列几种未定式

$$“0\cdot\infty”,\quad “\infty-\infty”,\quad “1^{\infty}”,\quad “0^{0}”,\quad “\infty^{0}”$$

前两种均容易化成“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型；而后三种可通过现对函数取对数，再化为基本的“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型. 因此上述五类未定式，都可以用 L'Hospital 法则处理.

我们用一些具体的例子来说明处理的方式.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

解 这是一个 "$0\cdot\infty$" 型未定式，可将它化为“$\frac{0}{0}$”型未定式处理

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^{2}}}{\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{1+x^{2}}=1.\end{aligned}$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}\right)$

解 这是一个“$\infty-\infty$”型未定式.；令 $y=x-1$，则当 $x\to1$ 时有 $y\to0$. 原式可化为“$\frac{0}{0}$”型未定式. 在处理过程中，可以用同阶的无穷小量进行替代，如 $\ln(1+y)\sim y,\ y\to0$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}\right)&=\lim_{y\to0}\frac{y-\ln(1+y)}{y\ln(1+y)}=\lim_{y\to0}\frac{y-\ln(1+y)}{y^{2}}\\&=\lim_{y\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+y}}{2y}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$.

解 这是 1^{∞} 型未定式，令

$$y=y(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$$

则

$$\ln y=\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^{2}}$$

这是一个 $\frac{0}{0}$” 型未定式，所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$.

解 这是“0^0”型未定式，由例 3 以及指数函数的连续性得

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x}=e^0=1$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

解 这是“∞^0”型未定式，记 $y=y(x)=x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 由例 3 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y}=e^0=1$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x}$.

解 这是 0^0 型未定式

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x}=\lim_{x\to 0}e^{\tan x\ln(1-\cos x)}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\tan x\ln(1-\cos x)&=\lim_{x\to 0}x\ln(1-\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^{-2}(\cos x-1)}=0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x}=1.$$

例 10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}$.

解 这是 ∞^0 型未定式

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{(\arctan x-\frac{\pi}{2})\ln x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)\ln x&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}=1.$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$.

解 这是 ∞-∞ 型未定式

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

在计算未定式的极限时, 使用等价代换, 常能简化计算过程, 对此应多加注意. 我们在此将曾经求出过的一些当 $x\to 0$ 时的等价无穷小量罗列于下, 以备查用.

$$\begin{aligned}&\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x,\\&1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\\&\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2},\ x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}.\end{aligned}$$

习题 3.4

1. 试给出柯西中值公式的几何解释.(提示: 参考拉格朗日中值定理的几何意义, 及 §3.2 中例 4.)

2. 试说明在闭区间 $[-1,1]$ 上柯西中值定理对函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^3$ 为什么不正确?

3. 设 $b>a>0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(ab>0)$, 在 (a,b) 上可微. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m,n 为自然数,α,β 为实数);

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m,n 为自然数);

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ (α 为任意实数);

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\tan x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arctan^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(12) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\ln(1-x)$;

(13) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{2x-\pi}$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$;

(15) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\dfrac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(e^{x^2}-1)\tan^2 x}$;

(17) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arctan x^2)}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\cdot\left(2-\dfrac{x}{e^x-1}\right)$;

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}$ (n 为自然数,$a>1,k>0$);

(20) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^k}$ (n 为自然数,$k>0$).

§3.5　凸凹性及曲率

通过 §3.3 节的讨论，我们基本上了解了根据函数的一阶导数所提供的信息，可确定函数的增或减的区间范围，以及函数的极值点. 因此，从函数的图象是 Oxy 平面上的曲线这个角度看，我们就掌握了曲线上升、下降等大致的形象.

然而，一阶导数所提供的信息，仍然只是一个大概. 比如同样是曲线的上升（下降），可上升（下降）的方式不尽相同，曲线的弯曲程度一般也有差异. 对于极值点，函数在一点的一阶导数为零，只提供了该点是可疑的极值点（即驻点）的信息，却没有提供如何从驻点中进一步甄别极值点的信息.

为了更精确地掌握函数自身的性质，我们还需要借助函数的二阶导数，即函数“变化率的变化率”. 关于如何利用二阶导数在驻点中甄别极值点的问题，已经在 §3.3 节的最后做了讨论. 因此，本节所要讨论的函数 (曲线) 的凸凹性和曲率.

3.5.1　函数的凹凸性

首先从几何上看，设在直角坐标系 Oxy 中，有一条曲线 L，在曲线的某一段范围内，如果任取该曲线段上的两点，连接这两点的直线线段（即曲线段的弦）总是位于曲线段的上方（下方），则称曲线在该曲线段是凸的（凹的），这里“上方”或“下方”是指与 y 轴的正方向一致或相反（图 3.16，图 3.17）.

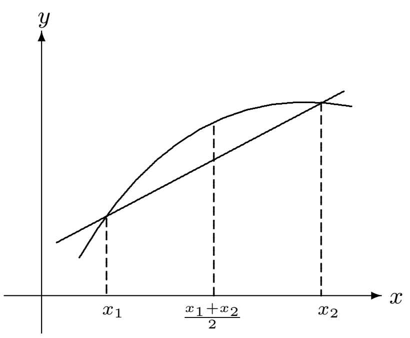

图 3.16

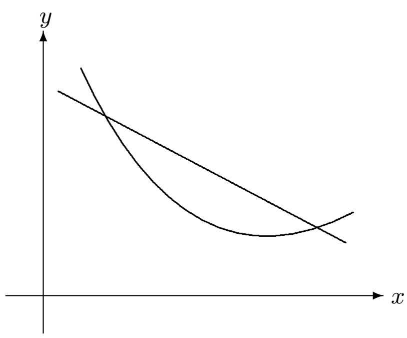

图 3.17

如果曲线 L 是函数 $f(x)$ 的图象，或者说曲线 L 是由方程 $y = f(x),\ x \in I$ 给出，这里 I 是一个区间. 则曲线是凸的（凹的），就称函数 $f(x)$ 是是区间上的凸函数（凹函数）.

注意，如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸的，则 $-f(x)$ 在区间 I 上是凹的. 因此，我们只需讨论函数的凸性.

对于凸函数 $f(x)$，以及它的图象 L（一条凸曲线），任取 L 上的两点 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$（不妨设 $x_1 < x_2$），连接这两点的直线方程是

$$y = g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),\ x \in [x_1, x_2]$$

根据上述凸（凹）性的几何描述，该直线在曲线 L 的下方. 即

$$f(x) \leqslant f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),\ x \in [x_1, x_2]$$

特别

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

对 I 中的任意两点 x_1, x_2 成立.

反之，对于 I 上的连续函数，能够证明，如果上述不等式对 I 中的任意两点 x_1, x_2 都成立，则函数的图象一定是凸的（函数当然也就是凸的）. 这个等价性的证明比较繁琐，在此略去. 因此本书对函数的凸性采用下面比较简单的定义

定义 1 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果任给 I 中两点 x_1, x_2，有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称函数是区间 I 上的**凸函数**, 当上式的不等号改为 “$<$” 时，就称 $f(x)$ 为严格凸的（如果将上面的不等号 “$\leqslant$” 换成 “$\geqslant$”，就得到凹函数的定义）.

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，区间内可微，如果 $f'(x)$ 在 I 内 (严格) 单调递增的，则 $f(x)$ 在 I 上是 (严格) 凸函数.

证 任给 I 中两点 x_1, x_2，不妨设 $x_1 < x_2$，取 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，则在 $[x_1, x_0]$ 和 $[x_0, x_1]$ 上分别应用微分中值定理，则存在 $\xi \in (x_1, x_0)$，$\eta \in (x_0, x_2)$，满足

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}, \quad f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

显然 $x_1 < \xi < x_0 < \eta < x_2;\ \ x_0 - x_1 = x_2 - x_0$，所以 $f'(\xi) < f'(\eta)$，将上式代入即可定理得结果.

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\eta),$$

定理 2 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内二阶可导. 如果对 I 中任意一点 x，有中 $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) > 0$)，则 $f(x)$ 是 I 上的凸函数 (严格凸函数).

因为 $f''(x) > 0$，所以函数的一阶导函数 $f'(x)$ 严格单调递增，由定理 1 就可得本定理的结论.

注记 （1）函数或者曲线的凸和凹，只是看图象的角度不同而已，不同的书上会出现不同的定义. 往往甲书上定义的凸，却是乙书上定义的凹，没有一个相对统一的说法. 因此，查阅文献时，首先要看文献中对凸凹性的定义.

（2）凸函数有许多非常好的性质和应用，仅是它的定义就有多种形式. 在我们的讨论中，有很多性质没有涉及. 比如定理 1 和定理 2 的逆命题事实上也是成立的；再比如，对于在区间 I 内可微的凸函数 $f(x)$，它的图象一定位于其每一条切线的上方（切点处除外），即对于任意的一点 $x_0 \in I$，有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{对任意的 } x \in I,\ x \neq x_0 \ \text{ 成立}$$

利用凸函数，还可以推导出一些不等式.

这些结果，有些只需要微积分的基本知识就可以了，有些更深刻的性质和应用，则是数学中一个专门的研究课题. 读者如有兴趣，可以查阅相关的参考书.

然而，本节的目的，是为了讨论如何利用函数的导数，了解函数自身的性质. 为此我们对凸函数更多的内容不作介绍. 下面将讨论函数的二阶导数对函数自身所提供的更精细的信息.

首先观察一个例子 $f(x)=x^3,\ x\in(-\infty,\ +\infty)$，因为 $f''(x)=6x$，不难看出在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f''(x)<0$，因此函数在 $(-\infty,0]$ 上是凹的，而在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f''(x)>0$，因此函数在 $[0,+\infty)$ 上是凸的. 也就是说函数 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 的两侧的凸凹性相反.

一般地，我们定义

定义 2 设 $y=f(x)$ 在包含点 x_0 的区间上连续，如果点 x_0 是 $f(x)$ 的凸、凹区间的一个分界点，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个**拐点**（或称**扭转点**）. 有时也称函数图象上的点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线的拐点.

对于上面的例子 $f(x)=x^3$ 来说，$x=0$ 就是函数的一个拐点.

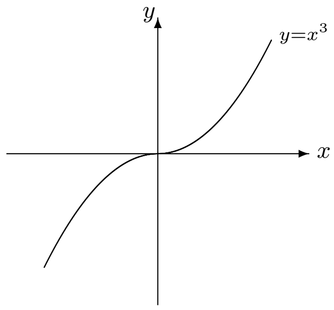

图 3.18

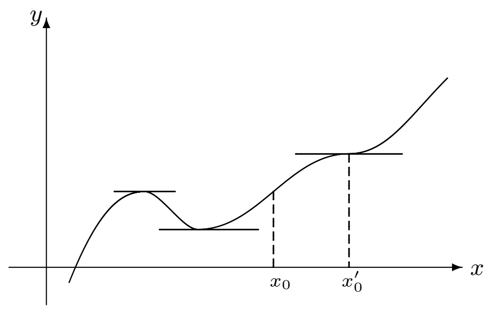

图 3.19

如何判别什么样的点是拐点是我们所关心的. 根据定理 2，如果函数在区间内有连续的二阶导数，则在拐点 x_0 处，一定有 $f''(x_0)=0$. 因此，为凸 (凹), 则称 x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

由定理 1 和定理 2 可知有

定理 3 设 $f(x)$ 在 x_0 连续，在 x_0 的一个邻域内（不包含 x_0）可微. 如果在 x_0 的左侧某个区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f'(x)$ 严格单调递增 (或递减)，而在 x_0 的右侧某个区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f'(x)$ 严格单调递减 (或递增)，则 x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

定理 4 设 $f(x)$ 在 x_0 连续，在 x_0 的一个邻域内（不包含 x_0）二阶可微. 如果在 x_0 的左侧某个区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f''(x)>0(<0)$，而在 x_0 的右侧右侧某个区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f''(x)<0(>0)$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的拐点. 特别，当 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数时，x_0 是拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

这样，就通过函数的二阶导数给出了函数拐点的一个有效判别法. 注意函数在一点的二阶导数为零，只是判断拐点的必要条件，即拐点处二阶导数必然为零，但二阶导数为零的点未必是拐点. 例如对于函数 $f(x)=x^4$，不难看出 $f''(0)=0$，但显然 $x=0$ 不是函数

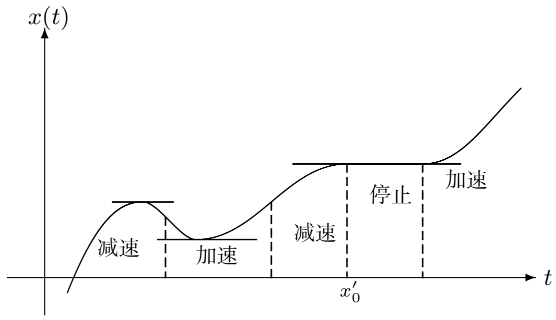

图 3.20

的拐点.

注记 函数的凸凹性对于较精确地掌握函数的性态有了进一步的帮助. 特别是对具有一阶和二阶导数的函数, 其导函数就提供了函数的上升和下降、极值点、凸凹性以及拐点的信息. 有助于我们更精确了解函数随自变量的变化而变化的规律.

例如, 考察一个质点在平面上沿直线运动, 如果在运动的二维空间上看, 其运动轨迹就是一条直线. 这条直线反映不出质点运动的具体规律. 如果考虑质点所走过的路程与时间的关系是一个函数 $x=x(t)$. 在 Otx 时空平面上, 函数图象的上升、下降、凸和凹不但反映了质点运动过程中前进还是倒退, 也反映了运动的加速和减速 (见图 3.20).

因此, 不管函数的背景如何, 掌握函数图象较精确的形态, 是非常有意义的. 一般来说, 这个过程可分为下列步骤.

1° 确定函数的定义域, 找出函数的间断点.

2° 确定函数是否具有奇偶性或周期性.

3° 确定函数的单调区间范围与极值点.

4° 确定函数的凸、凹区间和拐点.

5° 确定函数的渐近线 (参考 §1.2 的习题中第 14 题).

例 1 确定函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的形态.

解 首先注意到函数是一个偶函数 (所以只要掌握半直线上的形态即可). 因为

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\quad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

所以当 $x<0$ 时, $f'(x)>0$, 函数是单调递增的; 当 $x>0$ 时, $f'(x)<0$, 函数是单调递减的; 当 $x=0$ 时 $f'(0)=0$ 因此是极大值点. 而 $f''(x)=0$ 的解是 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, 它们是可能的拐点.

在区间 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 中, $f''(x)<0$, 故函数在其上是凹的;

在区间 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 以及在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 中, $f''(x)>0$, 故函数在这两个区间上是凸的; 于是, 上述二阶导函数的两个零点 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 都是函数的拐点. 从数轴的负方向看过来, 在拐点 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处, 函数由凸变凹, 在拐点 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处, 函数由凹变凸.

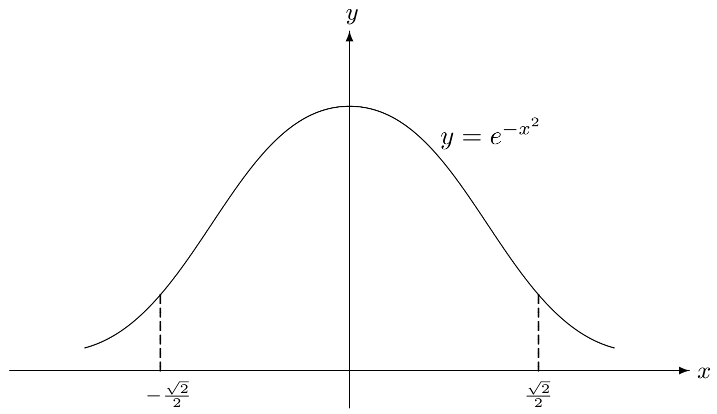

图 3.21

为清楚起见，将上面的结果列成一个表如下：

x	$-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2},0$	0	$0,\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	凸	拐点	凹	极大值点	凹	拐点	凸

又因为 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$，故 x 轴是曲线的一条渐近线（除此之外没有其他的渐近线）.

根据上面的所有信息，就可以在 Oxy 平面上绘制函数的图象（图 3.21）. 顺便指出，函数 $f(x)=e^{-x^2}=0$ 在概率论和数理统计中是一个非常基本的函数，是一种称之为“正态分布（或 Gauss 分布）”的简化形式.

3.5.2 平面曲线的曲率

设 Oxy 上的曲线 L 是函数 $y=f(x)$ 的图象，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，则函数二阶导数 $f''(x)$ 的符号，就确定曲线 L 的凸凹性，也就是曲线弯曲的方向. 现在，本节将讨论曲线的弯曲程度，即曲线的曲率.

如图 3.22 所示，沿曲线 L 从 A 点弯曲到 B 点，切线的方向也随之转了一个角度 φ，如果记曲线上从 A 点到 B 点的弧长的增量为 σ，则曲线的弯曲程度可以由 φ 和 σ 来刻划. 易于看出，当两个弧长段的增量相等时，切线转动角度大者弯曲程度较大（图 3.23）；当两段弧的切线转动角度相等时，弧长增量小者弯曲程度较大（图 3.24）

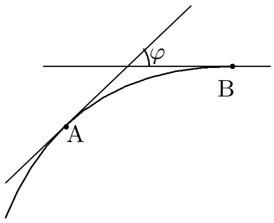

图 3.22

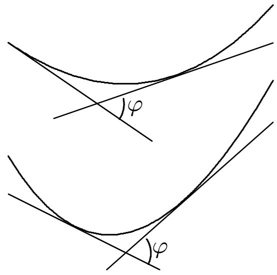

图 3.23

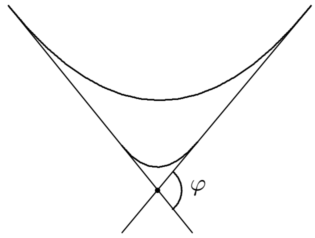

图 3.24

因此，很自然地利用 φ 和 σ 这两个量的比 $\frac{\varphi}{\sigma}$ 来表示该段弧 AB 的平均弯曲程度. 称之为曲线在这段弧上的平均曲率.

为了定义曲线在一点 A 处的弯曲程度，让点 B 沿着曲线 L 接近 A 点，当 B 越接近 A，弧 AB 的平均曲率越能反映出曲线在 A 点的弯曲程度. 如果 $\lim\limits_{B\to A}\frac{\varphi}{\sigma}$ 或 $\lim\limits_{\sigma\to 0}\frac{\varphi}{\sigma}$ 收敛，就将这极限值定义为**曲线在 A 点的曲率**. 记为 $\kappa=\kappa(A)$.

弄明白了概念，下面的问题是如何有效地进行计算.

（1）平面曲线由显式 $y=f(x),\ x\in[a,b]$ 表示.

在这种情况下，设曲线上点 A 和 B 的坐标分别是 $A(x,\ f(x))$ 和 $B(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$（图 3.25）.

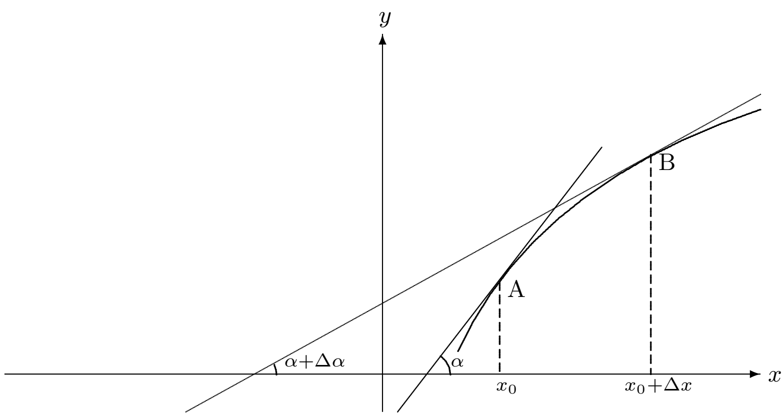

图 3.25

如果从起点 $(a,f(a))$ 到任意动点 $(x,f(x))$ 的弧长记为 $s=s(x)$，动点 $(x,f(x))$ 处切线正向与 x 轴正向的夹角记为 $\alpha(x)$. 则对应于 x 的增量 Δx，弧长的增量是 $\Delta s=s(x+\Delta x)-s(x)$，夹角的增量为 $\Delta\alpha=\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)$. 不难看出

$$\Delta\alpha=\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x).$$

所以

$$\begin{aligned}
\kappa=\kappa(A)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x)}{s(x+\Delta x)-s(x)}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x)}{\Delta x}\Big/\frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}\right)\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x)}{\Delta x}\Big/\lim_{\Delta x\to 0}\frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

上式分子的极限是

$$(\arctan f'(x))'=\frac{f''(x)}{1+f'^2(x)}$$

而分母的极限是

$$s'(x)=\sqrt{1+f'^2(x)}$$

这个公式将在求曲线的弧长的章节内证明. 从而，函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线 L 在一点处的曲率为

$$\kappa=\kappa(x)=\frac{f''(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)^{3/2}}$$

从上面的公式我们看出，函数 $y=f(x)$ 的一阶和二阶导数，刻划了函数所表示曲线的弯曲程度. 一个最简单的例子是直线 $f(x)=ax+b$，这里 a, b 是常数，易知它在任何一点的曲率为零，直线当然是“没有弯曲的曲线”.

注意，曲率不仅刻划了曲线的弯曲程度，事实上，它也刻划了曲线弯曲的方向（也就是凸凹性），即当 $\kappa(x)>0$ 时，曲线是凸的，当 $\kappa<0$ 时，曲线是凹的. 凸或凹的程度由 $|\kappa|$ 刻划.

（2）平面曲线由参数方程 $x=\phi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ t\in[\alpha,\beta]$ 表示.

我们设曲线弧长 $s(t)$ 增加的方向与参变量 t 增加的方向一致，即 $s(t)$ 是 t 的单调递增函数. 此时，$(\phi'(t),\ \psi'(t))$ 表示曲线上一点 (x,y) 处切线的方向向量.

则根据 §3.2 节中的例 4，不难得出曲线在任何一点的曲率是

$$\kappa(t)=\frac{\phi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{\left(\phi'^2(t)+\psi'^2(t)\right)^{3/2}}$$

其中 $\left(\phi'^2(t)+\psi'^2(t)\right)\neq 0$.

当选取 $x=x,\ y=f(x),\ x\in[a,b]$ 时（这里 x 扮演了参变量的角色），就回到显式表示的情况.

注记 对于由参数方程表示的曲线，只要选定弧长 $s(t)$ 增加的方向，与参数 t 增加的方向一致，则当 $\kappa<0$ 时，α 随着 s（也就是 t）增加而减少. 因此切线随着 t 的增加顺时针旋转. 当 $\kappa>0$ 时可做类似的分析. 关于曲线的曲率，是微分几何中的核心内容，本书不作过多讨论.

例 2 计算抛物线 $y=\frac{1}{2}ax^2$ 的曲率.

解 因为 $y'=ax,\ \ y''=a$, 所以

$$\kappa=\frac{a}{(1+a^2x^2)^{3/2}}$$

当 $a>0$ 时 (抛物线开口向上), 曲线是凹的. 当 $a<0$ 时 (开口向下), 曲线是凸的. 在 $x=0$ 处 $|\kappa|$ 达到最大值, 也就是抛物线在顶点弯曲的最厉害.

例 3 计算椭圆

$$x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,\ \ t\in[0,2\pi]$$

上任何一点的曲率.

解 因为 $\phi'(t)=-a\sin t,\ \phi''(t)=-a\cos t,\ \psi'(t)=b\cos t,\ \psi''(t)=-b\sin t$, 代入公式即可得

$$\kappa=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

特别, 当 $a=b=R$ 时, 方程退化成半径为 R 的圆的参数方程表示. 而圆上任何一点的曲率为

$$\kappa=\frac{1}{R}$$

即圆的弯曲程度与半径成反比. 圆越大, 弯曲程度越小, 圆越小弯曲程度越大.

如果引进 $\rho=\frac{1}{|\kappa|}$, 称为曲线在一点的**曲率半径**. 从例 3 中的特例可得, 圆的曲率半径就是圆的半径.

注记 函数 $x=x(t)$ 的一阶导数在物理上对应速度, 在几何上对应切线. 而二阶导数在物理上对应加速度, 在几何上对应曲率.

在物理中, Newton 方程告诉我们, 一个运动质点的加速度, 正比于质点所受到的外力 $F=mx''(t)$, 因此在一个外力场的作用下, 只要给定质点的初始位置 (即给定函数在初始的值 $x(t_0)$) 和初始速度 (即给定一阶导数在初始的值 $x'(t_0)$), 则通过解 Newton 方程 $F(t)=mx''(t)$, 就可确定质点在任何时刻的运动规律.

在几何中, 如果给定曲率, 并事先设置曲线经过给定的位置 (即给定函数 $f(x)$ 在一点的值 $f(x_0)$) 和曲线在这点的走向 (即给定函数在这点的切方向 $f'(x_0)$), 则也可以通过解方程求出一条满足给定曲率的曲线. 这些内容是微分几何中所感兴趣的, 明显已经超出了本书的范围. 我们在此提及此事, 其目的是为了让读者体会到物理与几何的这种对应, 而这种对应的共同点都是函数的二阶导数.

习题 3.5

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处可导, 且除了有限个点之外, 均有 $f''(x)>0$. 则 $f(x)$ 在 I 上是凸的. 将本题用于 $-f$, 就得到关于凹函数的类似结论.(提示: 参考定理 1 的证明及习题 3.3 中第 16 题.)

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有连续的二阶导数. 若 x_0 是 $f(x)$ 的一个扭转点, 则 $f''(x_0)=0$.

3. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近二阶可导, 且 $f''(x_0)=0$. 若 $f'''(x_0)$ 存在但不为零, 则 x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

4. 求下列函数的凸凹区间和扭转点.

(1) $y=2x^3-3x^2-36x+25$; (2) $y=x+\frac{1}{x}$;

(3) $y=x^{\frac{5}{3}}$; (4) $y=(1+x^2)e^x$;

(5) $y=x^4$; (6) $y=x+\sin x$.

5. 求 a,b 值, 使点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点.

6. 描绘下列各曲线的图形.

(1) $y=x^3+6x^2-15x-20$; (2) $y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$;

(3) $y=x-2\arctan x$; (4) $y=xe^{-x}$.

7. 设函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 C. 记 C 上一点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $k(k\neq 0)$, 过点 M 引曲线的法线, 在此法线上曲线凸的一侧取点 D, 使 $|DM|=\frac{1}{k}=\rho$, 以 D 为圆心,ρ 为半径作圆; 这个圆称为曲线在点 C 处的曲率圆, 其圆心 D 称为曲线在点 M 处的曲率中心, 半径 ρ 称为曲线在点 M 处的曲率半径.

求下列曲线在指定点的曲率, 曲率中心及曲率半径.

(1) $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处; (2) $y=e^{-x^2}$ 在点 $(0,1)$ 处.

8. 求下列曲线在指定点的曲率.

(1) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 在 $t=1$ 处;

(2) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处.

9. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点的曲率半径最小? 并求出该点的曲率半径.

10. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数且有上界. 求证: $f(x)$ 是常数.

§3.6 Taylor 展开

设函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x,x_0),$$

其中

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x,x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$$

因此，在 x_0 的附近，可以用一个关于 $x-x_0$ 的一次多项式

$$P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

代替 $f(x)$，由此产生的误差（或称为余项）$R(x,x_0)$ 当 $x\to x_0$ 时，是比 $x-x_0$ 更高阶的无穷小量.

当假设 f 在一个区间 I 内有二阶导数时，则对于 I 内的任意两点 x 和 x_0，类似 Lagrange 中值定理的证明，构造辅助函数

$$g(t)=f(t)-P_1(t)-\frac{f(x)-P_1(x)}{(x-x_0)^2}(t-x_0)^2$$

根据 $g(t)$ 的构造以及 $P_1(x)$ 满足 $P_1(x_0)=f(x_0),\quad P_1'(x_0)=f'(x_0)$ 的性质有，

$$g(x)=0,\quad g(x_0)=g'(x_0)=0$$

所以由 Lagrange 中值定理可知在 x_0 和 x 之间，存在一点 ξ_0，使得 $g'(\xi_0)=0$，在 ξ_0 和 x_0 之间，存在一点 ξ，使得 $g''(\xi)=0$. 即

$$g''(\xi)=f''(\xi)-2\frac{f(x)-P_1(x)}{(x-x_0)^2}=0$$

所以

$$R=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

即 R 至少是一个关于 $x-x_0$ 的二阶无穷小量. 对于这个余项的掌握，使我们了解了函数 $f(x)$ 在整个区间 I 上和多项式 $P_1(x)$ 之间的误差.

如果我们希望用相对简单的函数代替 $f(x)$ 并提高误差的精度，我们自然希望，一方面，如果函数 f 在 x_0 有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$，在 x_0 的附近，能够有一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式来代替 $f(x)$，而且由此产生的误差（称为余项）

$$R_n=f(x)-(a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n)$$

当 $x\to x_0$ 时，是比 $(x-x_0)^n$ 更高阶的无穷小量. 另一方面，如果函数无穷次可导，我们还希望当 $n\to\infty$ 时，余项 R_n 也会在 x_0 附近变小而趋于零. 这样一来，一个函数就可以在一点的附近，表示成一个“无穷次的多项式”（通常称为幂级数）. 关于 $n\to 0$ 的情况，将在“无穷级数”一章内讨论.

因此，对一个函数 $f(x)$ 来说，问题的核心是讨论如何把它展开成为一个多项式以及对余项 R_n 作出尽可能精确的估计.

注记 在展开讨论之前，我们从两个侧面体会“简单代替复杂”的意义. 无论是已经接触或是将要接触到的内容显示，多项式函数是一类相当简单的函数. 比如它任意次可导，而且导函数仍然是多项式，其次数会随着求导而逐渐下降，直至为零. 再比如，计算多项式在一点的函数值时，只用到加法和乘法，因此非常易于在计算机上进行运算. 因此，当一个函数 $f(x)$ 在局部或在一点的附近能够用多项式来近似时，一方面为研究函数在一点附近的性态提供了有力的工具，另一方面也为计算函数 $f(x)$ 在一点附近的近似值提供了一种有效途径. 事实上，利用 Taylor 展开，可以开展一些近似计算，如 $\sin 31^\circ$ 的值等等. 当然，如何更有效、高精度地进行数值计算，那是计算数学所要讨论的事情.

3.6.1 Taylor 公式

我们首先要确定，如果有一个 n 次的多项式 $P_n(x)$ 在 $x \to x_0$ 时，是函数 $f(x)$ 的高阶近似，问这个多项式应该是什么样的形式? 即如何确定它的系数 a_0, a_1, $\cdots$, a_n.

定理 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有直至 n 阶的导数. 如果 $f(x)$ 为一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式而且余项当 $x \to x_0$ 时，是比 $(x-x_0)^n$ 更高阶的无穷小量，即

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

而且余项当 $x \to x_0$ 时，是比 $(x-x_0)^n$ 更高阶的无穷小量，即

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$$

则 $P_n(x)$ 的系数必必须是

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

从而 $P_n(x) = T_n(x)$，其中

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称之为**函数** $f(x)$ **在点** x_0 **处的** n **次** Taylor **多项式**.

证 定理所说的条件等价于

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^k} = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

这是下面证明过程中的基本出发点（请回忆一下什么叫高阶无穷小量）. 在这个公式中，当 $k=0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - P_n(x)) = (f(x_0) - P_n(x_0)) = 0$$

即

$$a_0 = f(x_0).$$

利用这个结果，当 $k=1$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+a_1+a_2(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^{n-1}\right)$$

即

$$a_1=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

利用 $k=0,1$ 时得结果，当 $k=2$ 时，利用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-P_n''(x)}{2}=0$$

即

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2}$$

如果对于任意的 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$a_0=f(x_0),\ 1!a_1=f'(x_0),\ \cdots,\ (k-1)!a_{k-1}=f^{(k-1)}(x_0)$$

即

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ \cdots,\ P_n^{(k-1)}(x_0)=f^{(k-1)}(x_0)$$

所以，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)-P_n(x)$ 直至 $k-1$ 次导数都是无穷小量，因此对于 k，多次使用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}(f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x))=f^{(k)}(x_0)-P_n^{(k)}(x_0)=0$$

即

$$k!a_k=f^{(k)}(x_0),\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

定理 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有直至 n 阶的导数，$T_n(x)$ 是函数 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式，则当 $x\to x_0$ 时，余项

$$R_n=f(x)-T_n(x)$$

是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

换句话说，当 $x\to x_0$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

称之为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的具有 Peano 余项的 Taylor 公式.

证 只要注意到 $f(x)-T_n(x)$ 及其直至 n 阶的导数当 $x\to x_0$ 时，都是无穷小量这个事实，然后在计算极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}$ 过程中连续使用 L'Hospital 法则，即可完成证明.

特别，如果函数 f 在 $x=0$ 附近 n 阶导数，定理 2 中取 $x_0=0$，则 Taylor 公式为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),\quad x\to 0$$

并称之为函数 $f(x)$ 的 n 阶**具有** Peano **余项的** Maclaurin **公式（或展开式）**.

3.6.2 余项的表示与估计

定理 2 有一定的局限性. 它只反映了当 $x \to x_0$ 时, 函数的性态. 我们进一步希望能够对余项有一个较为精确的估计. 为此我们加强条件, 假设函数 f 在某个区间具有直至 $n+1$ 阶的导数, 则有

定理 3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内 $n+1$ 阶导数, 且 n 阶导数在 I 上连续. 设 x 和 x_0 是 I 中任意两个不同的数, $T_n(x)$ 是 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式. 则在 x 和 x_0 之间存在一个数 ξ, 使得

$$f(x) = T_n(x) + R_n$$

公式中的余项 R_n 具有下列形式

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

或者说 $f(x)$ 在 x 点处可以表示成

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

R_n 称为Lagrange **余项**, 而整个公式称为**具有** Lagrange **余项的 (整体)** Taylor **公式**.

证 对区间 I 内固定的 x 和 x_0, 设辅助函数如下:

$$g(t) = f(t) - T_n(x) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t-x_0)^{n+1}, \quad t \in I$$

显然, $g(t)$ 在 I 内有 $n+1$ 阶导数. 根据 $T_n(t)$ 的定义可知

$$g(x_0) = g(x) = 0, \quad g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - T_n^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots n$$

所以存在介于 x 和 x_0 之间的一个数 ξ_1, 使得 $g'(\xi_1) = \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0$; 由 $g'(x_0) = g'(\xi_1) = 0$ 推出, 存在介于 ξ_1 和 x_0 之间的一个数 ξ_2, 使得 $g''(\xi_2) = 0$, 如此类推, 在 ξ_n 和 x_0 之间 (当然, 也在 x 和 x_0 之间), 存在一个数 ξ, 使得 $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, 因为 $T_n^{(n+1)}(t) = 0$, 所以

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

故定理得证.

有时记 Lagrange 余项为 R_n, 因为 ξ 是介于 x 和 x_0 的一个数, 所以可表示成为

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

因此余项也表示成

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

事实上, 对于不同的函数, 根据不同的需要, Taylor 公式的余项 $R_n(x)$ 有多种不同的表达形式. 我们将在第五章给出一个积分形式的表达式.

我们同时也注意到，当 $n=0$ 时，定理 3 就是熟知的 Lagrange 中值公式. 因此定理 3 的结果，也可看成是 Lagrange 中值定理的推广.

注记 对于 Taylor 展开的几何解释可以从下列两个方面来看. 我们假定函数 $f(x)$ 有连续的各阶导数. 首先注意到在一点 x_0 附近，函数 $f(x)$ 与它的 Taylor 多项式 $T_n(x)$ 之间的误差随着 n 的增大越来越小，而且 $f(x)-T_n(x)$ 在 x_0 处直至 n 导数都为零 $f(x_0)-T_n(x_0)=0$, $f'(x_0)-T_n'(x_0)=0,\cdots,f^{(n)}(x_0)-T_n^{(n)}(x_0)=0$, 我们称它们所定义的曲线有$n$ **阶接触**（事实上完全类似地可以定义任意两个函数之间的 n 阶接触），$T_n(x)$ 也称为 $f(x)$ 的**密切"抛物线"**，虽然只有当 $n=2$ 时，$T_2(x)$ 才是真正的抛物线. 图 3.26 是关于函数 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的最初三条密切抛物线，从中读者可以体会"密切"的含义. 其中

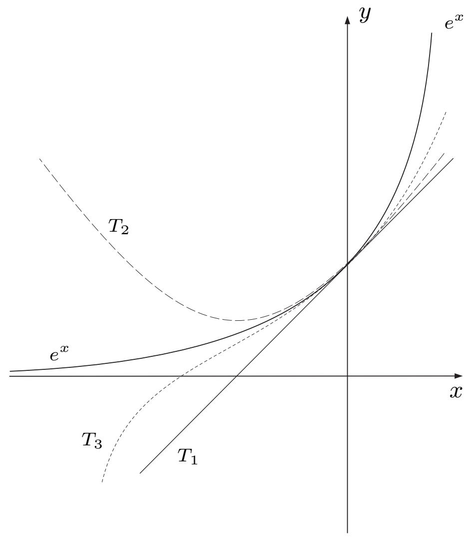

图 3.26

$T_1(x)=1+x,\ T_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2,\ T_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3$

另一方面，在求极值过程中，在一个驻点 x_0 处（即 $f'(x_0)=0$），如果二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$, 则根据二阶导数在 x_0 的正或负, 推断函数在 x_0 处取. 到极大或极小值. 但是当 $f''(x_0)=0$ 时，x_0 是极值点或不是极值点的可能性都有（例如对于 $f(x)=x^4$，在驻点 $x=0$ 处，虽然 $f''(0)=0$，但是是极小值点. 而对于 $f(x)=x^3$ 情况则完全不同，虽然同样 $x=0$ 是驻点，而且同样有 $f''(0)=0$，但是 $x=0$ 不是极值点）. 利用 Taylor 展开我们可以给出一般性的充分条件：设 x_0 是函数 $f(x)$ 的驻点即 $f'(x_0)=0$），观察 $f(x)$ 在一个驻点处的 Taylor 展开式，

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这时，问题的关键是看上式右边的第一个非零项是 $x-x_0$ 的偶次幂还是奇次幂. 对于偶次幂，x_0 是极值点，在该点取到极大还是极小取决于这一项的系数是负还是正. 对于奇次幂，x_0 不是极值点. 读者不妨给予严格的证明（习题中的第 11 题）.

推论 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有有界的 $n+1$ 阶导函数，即 $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$，则在区间 I 上，$f(x)$ 与它的 Taylor 多项式之间的误差（也就是余项）是

$$|f(x)-T_n(x)|=|R_n|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

该公式使得误差更加清晰. 特别当 $n\to\infty$ 时，有 $R_n\to 0$，这是今后我们考虑把函数表示成"无穷次多项式"时的一个最简单的保证.

推论 2 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内具有 $n+1$ 阶导数，如果在一点 x_0 处存在自然数 $r,\ r<n$ 使得

$$f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ \cdots,\ f^{(r-1)}(x_0)=0,\ f^{(r)}(x_0)\neq 0$$

则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个 r 重零点. 结论是 x_0 是 $f(x)$ 的 r 重零点的充分必要条件是存在一个函数 $g(x)$，使得

$$f(x)=(x-x_0)^r g(x),\ g(x_0)\neq 0$$

证 设 x_0 是 $f(x)$ 的 r 重零点，利用 Taylor 公式，将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开得

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\\
&=(x-x_0)^r\left(\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-r}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n-r+1}\right)\\
&=(x-x_0)^r g(x),
\end{aligned}$$

其中

$$g(x)=\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-r}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n-r+1}$$

满足 $g(x_0)=\frac{1}{r!}f^{(r)}(x_0)\neq 0$. 反之则只需要利用 Leibniz 求导法则可直接验证. 当然上述结果也可用 L'Hospial 证明.

推论 3 当 0 是区间 I 内一点时，Taylor 公式的一个特殊形式值得单独提出. 在公式中取 $x_0=0$，则 $\xi=\theta x,\ \ 0<\theta<1$，因此

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

这个在 $x=0$ 的 n 阶 Taylor 展开式也称为**具有** Lagrange **余项的** Maclanrin **公式**. 我们不难得到下列五种常见的初等函数的 Maclanrin 公式.

$$\begin{aligned}
e^x&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.\quad(-\infty<x<+\infty)\\
\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),\qquad(x>-1)\\
R_n(x)&=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.\qquad(0<\theta<1)\\
\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x),\qquad(-\infty<x<+\infty).\\
R_{2m}(x)&=\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos\theta x.\qquad(0<\theta<1)\\
\cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}+R_{2m-1}(x),\qquad(-\infty<x<+\infty)\\
R_{2m-1}(x)&=\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\cos\theta x.\qquad(0<\theta<1)\\
(1+x)^\alpha&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),\\
R_n(x)&=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}.\qquad(0<\theta<1).
\end{aligned}$$

对于最后一个展开式，当 α 是自然数时，$(1+x)^\alpha$ 就自动化为 Newton 二项式公式.

为了求出函数 $f(x)$ 的 Maclaurin 公式，原则上应求出函数在 0 点的导数值 $f^{(k)}(0)$, $k = 0,1,2,\cdots n$. 但有时候函数的高阶导数值并不容易计算. 因此，我们更多地是采取间接方式. 这是基于对 Maclaurin 公式基本含义的下述理解：

定理 1 的基本含义是，如果函数 $f^{(n)}(0)$ 存在，则无论用什么方法，只要取出具体形式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n), \quad x \to 0$$

的展开式，则他一定就是函数 f 的 Maclaurin 公式. 作为副产品，我们也顺便计算出了 $f^{(n)}(0) = k!a_k$，这样，我们就能求出更多函数的 Maclaurin 公式（见例 1）.

2 例子和应用

例 1 求函数 e^{-x^4} 的 $4n$ 阶 Maclaurin 公式.

解 因为当 $x \to 0$ 时，$-x^4 \to 0$，利用 e^x 展开的结果，直接将 $-x^4$ 替代 e^x 展开式中的 x，有

$$\begin{aligned} e^{-x^4} &= 1 + (-x^4) + \frac{(-x^4)^2}{2!} + \frac{(-x^4)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^4)^n}{n!} + o((-x^4)^n),\ x \to 0 \\ &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2!} - \frac{x^{12}}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!} + o(x^{4n}),\ x \to 0 \end{aligned}$$

由此我们也得到了

$$(e^{-x^4})^{(4k)}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^k (4k)!}{k!}, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 的其他导数为零.}$$

这比直接计算函数 e^{-x^4} 要容易的多.

例 2 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶的 Maclaurin 公式.

解 利用

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

以及 $\cos x$ 的 Maclaurin 公式，注意到当 $x \to 0$ 时，$2x \to 0$，所以

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!} + o((2x)^{2n})\right) \\ &= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}2^{2n-3}x^{2n-2} + o(x^{2n}), \quad x \to 0 \end{aligned}$$

下面一个例子是利用函数的展开式，计算极限问题.

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x^4} - \cos^2 x - x^2}{x^4}$.

解 这是一个“$\frac{0}{0}$”型的未定式. 如果用 L'Hospital 法则，则会遇到复杂的求导过程. 如果利用函数的 Maclaurin 公式，由例 1 和例 2 得

$$\begin{aligned} e^{-x^4} - \cos^2 x - x^2 &= (1 - x^4 + o(x^4)) - (1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) - x^2 \\ &= -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

所以所求的极限为：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^4}-\cos^2 x-x^2}{x^4}=-\frac{4}{3}.$$

注意，由于分母在 $x\to 0$ 时，是一个 4 阶无穷小量，因此分子只要展开到 4 阶即可. 另一方面在本题的计算过程中，不管是有限个无穷小量的和，还是有限的数乘以无穷小量，其结果还是无穷小量.

例 4　设 $f(x)=\frac{1}{x}$, 求 $f(x)$ 在 $x=2$ 的 Taylor 公式.

解　由 $\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}+1\right)^{-1}$.

在 $(1+x)^{-1}$ 的 Maclaurin 公式中, 用 $\frac{x-2}{2}$ 代替 x, 就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-2}{2}+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-2}{2}\right)^n+2R\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+R,\end{aligned}$$

这里

$$R=\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{2^{n+2}}\left[1+\frac{\theta(x-2)}{2}\right]^{-n-2}.\qquad(0<\theta<1)$$

例 5　计算 e 的值，使误差不超过 10^{-5}.

解　在 e^x 的展开式中，取 $x=1$，得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}\quad 0<\theta<1$$

由于

$$0<\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

所以，只要确定 n，使得

$$\frac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$$

即可，易知，要达到这样的精度，只需取 $n=9$，这时

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}=2.718282$$

例 6　证明 e 是无理数.

证　（反证法）如果 e 是有理数，设 $e=\frac{q}{p}$，其中 $p,\ q$ 是正整数. 取 $n>b$ 且 $n>3$，则

$$e=\frac{q}{p}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}\quad 0<\theta<1$$

于是有

$$\frac{n!q}{p}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{n!e^\theta}{(n+1)!}$$

由 n 的选取可知，上式除右边最后一项外，其余各项都是整数. 因此 $\frac{n!e^\theta}{(n+1)!}$ 也必是整数. 但实际上

$$0<\frac{n!e^\theta}{(n+1)!}=\frac{e^\theta}{n+1}<\frac{3}{n+1}<\frac{3}{4}<1$$

所以矛盾. 矛盾说明 e 不是有理数.

例 7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上二阶可导，且对任意的 x，有 $|f''(x)| \leqslant M$（M 是一个常数），以及 $f(0)=f(1)=0$. 证明：在 $[0,1]$ 区间上有 $|f(x)| \leqslant \frac{M}{8}$.

证 对任意的 $x \in (0,1)$，由 Taylor 公式，得

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2, \quad \xi_1 \in (0,x)$$
$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2, \quad \xi_2 \in (x,1)$$

将第一式乘以 $(1-x)$，第二式乘以 x，然后相加得

$$|f(x)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}x(1-x)^2\right| \leqslant \frac{M}{2}x(1-x) \leqslant \frac{M}{8}$$

习题 3.6

1. 写出下列函数的 (具有皮亚诺余项的) 马克劳林展开式.

   (1) $y=\dfrac{x^3+2x+1}{x-1}$; (2) $\sin^2 x$.

2. 求出函数 $e^{\sin x}$ 的 (具有皮亚诺余项的) 三阶马克劳林展开.

3. 求出函数 $\ln\cos x$ 的 (具有皮亚诺余项的) 六阶马克劳林展开.

4. 已知 $f(x)$ 是一个四次多项式, 并且 $f(2)=-1,\ f'(2)=0,\ f''(2)=2,\ f'''(2)=-12,\ f^{(4)}(2)=24$. 计算 $f(-1),\ f'(0),\ f''(1)$.

5. 求下列函数具有拉格朗日型余项的泰勒公式.

   (1) $y=\tan x$ 在 $x=0$ 的二阶泰勒展开式;

   (2) $y=\frac{1}{x}$ 在 $x=-1$ 的 n 阶泰勒展开式.

6. 求下列极限.

   (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}}{x^2}$;

   (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$.

7. 设函数 $f(x)$ 处处有 $n+1$ 阶导数, 证明: $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式的充分必要条件是 $f^{(n+1)}(x)$ 恒为零.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x\in[0,2]$, 有 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$. 证明: $|f'(x)|\leqslant 2, x\in[0,2]$.

9. 设 n 为自然数, 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^{n+1}, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$. 证明 $f'(0)=0$; 但 $f''(0)$ 不存在.(提示: 证明 $f(x)$ 仅在一点 $x=0$ 可导.)

注意, 我们显然有

$$f(x)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n+o(x^n),\quad x\to 0.$$

但当 $n>1$ 时, 并不能断言 $f^{(k)}(0)=0(2\leqslant k\leqslant n)$. 因此, 定理 1 中的条件: 函数在点 x_0 处有 n 阶导数, 是至关重要的.

10. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$, 它在 $x\neq 0$ 处显然有任意阶导数. 证明,$f(x)$ 在 $x=0$ 处的任意阶导数都存在, 而且都等于零.(提示: 首先, 易用归纳法证明, 当 $x\neq 0$ 时, 对 $n=1,2,\cdots$ 有 $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 t 的 $3n$ 次多项式; 此外, 由导数定义及洛必达法则, 得出 (记 $y=\frac{1}{x}$))

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0,$$

即 $f'(0)=0$. 现在, 所说的结论易用归纳法及洛必达法则证明.)

本题意味着, 对任意的自然数 n, 函数 f 在 $x=0$ 处的 n 阶泰勒多项式是 0; 换句话说, 余项总是等于 $f(x)$. 因此, 即使是函数在一点附近的性态, 用 (在该点的) 足够高阶的导数也未必能将其揭示出来.

11. 设函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的 n 阶微商存在, 并且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad \text{而 } f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

(1) 若 n 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值;

(2) 若 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值. 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x)$ 在点 x_0 处取极小值; 当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x)$ 在点 x_0 处取极大值.

本题表明, 若函数 $f(x)$ 在驻点上存在如上所述的高阶导数, 则由此可确定驻点是否为极值点. 然而, 我们注意, 上一题中的函数 f 在 $x=0$ 处显然有极小值, 但却不可能用这一判别法判别.

第 3 章补充习题

1. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

2. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0.\end{cases}$$

(1) 确定 a 的值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 对 (1) 中确定的 a, 证明 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且导函数连续.

3. 设 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$, 证明, 方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

5. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的两阶可微函数,$f(0)=f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

6. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$, 及 $f'(a)f'(b)>0$. 证明, 在 (a,b) 内存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

7. 设 f 是 $[a,b]$ 上的可微函数, 则对介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意值 λ, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f'(\xi)=\lambda$.(提示: 无妨设 $f'(a)<f'(b)$. 先考虑特殊情形:$f'(a)<0,f'(b)>0$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$. 为了证明这一点, 注意 f 在 $[a,b]$ 上必有最小值; 而由 $f'(a)<0$ 及 $f'(b)>0$ 可知, 最小值在 (a,b) 内某点取得, 由此用费马定理即得结果.

   为了将一般情形化为上述特殊情形, 只需考虑辅助函数 $g(x)=f(x)-\lambda x$.)

   本题的结果称为达布 (Darboux) 定理, 它揭示了导函数的一个令人惊奇的性质 —— 具有介值性: 若函数在区间 I 上可微,c,d 是 I 中任意两个不同点 $(c<d)$, 则 $f'(x)$ 在 $[c,d]$ 上取得 $f'(c)$ 与 $f'(d)$ 之间的一切值.(参考 §2.2, 定理 2 的推论.) 注意, 由于导函数不一定是连续函数, 因此, 上述结果不是连续函数介值定理的推论.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且满足 $f(a)>0,f'(a)<0$, 以及当 $x>a$ 时,$f''(x)\leqslant 0$. 试证在区间 $(a,+\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,$f'(x)$ 严格单调增. 若 $f(a)=f(b)=\lambda$, 则对任意 $x\in(a,b)$, 有 $f(x)<\lambda$.

10. 函数 $\frac{\sin x^2}{x}\,(x>0)$ 表明, 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 不能保证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在. 证明: 若已知这极限存在, 则其值必然为零.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时二阶可微, 且 $f''(x)<0,f(0)=0$. 证明: 对任意正数 x_1,x_2, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

12. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

13. 证明下列不等式.

   (1) 对任意实数 x, $e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$;

(2) 对 $x>0$, $x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$;

(3) 对 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$;

(4) 对任意实数 x,y, 有 $2e^{\frac{x+y}{2}}\leqslant e^x+e^y$.

14. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可微,$f''(x)<0$. 则对任意 $x_1,\cdots,x_n\in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i),$$

当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时等号成立.(提示: 记 $x_0=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, 证明 $f(x_i)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)$, $i=1,\cdots,n$.)

特别地, 取 $f(x)=\ln x$, $I=(0,+\infty)$, 就得到了著名的算术 – 几何平均不等式: 对任意正数 $x_1,\cdots,x_n$, 有

$$\frac{x_1+\cdots x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},$$

当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时等号成立.

15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

16. 求 $\sqrt[n]{n}(n=1,2,\cdots)$ 的最大值.

17. 试给出函数 $x\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的一个尽可能小的上界.

18. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

第 4 章　原函数

§4.1　原函数及其基本的计算方法

4.1.1　概念

微分学的一个基本问题是，已知一个函数，研究其函数值对自变量的变化率. 例如，已知一个质点沿直线运动的规律 $s = s(t)$，要确定质点运动的（瞬时）速度 $v = v(t)$，或者加速度 $a = a(t)$；另一方面，我们有一个自然的反问题：如果已知质点运动的速度 $v = v(t)$（或加速度 $a = a(t)$），要确定其运动的规律 $s = s(t)$. 由于 $v(t) = s'(t)$（$a(t) = v'(t)$，因此类似这样的问题，从数学上讲，实际上是导数 (或微分) 的逆运算问题，即求一个未知函数，使得其导数等于一个已知的函数.

定义　设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对每个 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**.

容易看出，一方面如果 $F(x)$ 是 $f(x)$（在区间 I 上）的一个原函数，则 $F(x)$ 加上一个任意常数后仍然是 $f(x)$ 的一个原函数；另一方面，对于函数 f 在区间 I 上任两个原函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，它们的差 $F_1(x) - F_2(x)$ 一定满足 $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$，所以是一个常数. 因此,f(在区间 I 上) 的原函数的全体可表示为

$$F(x) + C$$

的形式, 其中 $F(x)$ 为 f(在区间 I 上) 的任一个原函数, 而 C 是任意的常数.

函数 f 的原函数的全体也称为 $f(x)$**不定积分**，记作

$$\int f(x)dx,$$

其中“$\int$”称为积分号,$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)dx$ 称为被积表达式.

我们提醒读者注意, 在积分记号 $\int$ 下所写的是所求的原函数的微分, 而不是微商. 因此, 求函数 $f(x)$ 的不定积分, 应更确切地称为微分 $f(x)dx$ 的不定积分.

注　“不定积分”这一名词以及其相应记号的由来, 我们将在 §5.1 节中作些解释. 读者很快能看到, 这一记号, 对于求不定积分 (原函数) 的运算, 将表现出许多便利.

由导数的几何意义, 可以从几何上解释求函数 $f(x)$ 的原函数的问题: 在 Oxy 直角坐标系中找出一条曲线 $y = F(x)$, 使其在横坐标为 x 的点处的切线斜率为 $f(x)$. 这样的一条曲线, 称为 $f(x)$ 的一条积分曲线, 将它沿着 y 轴的方向作平移, 便得出所有其余 (符合上述要

求) 的曲线. 因此, 在几何上, 不定积分 $\int f(x)dx$ 表示包含上述全部积分曲线的曲线族 (如图 4.1).

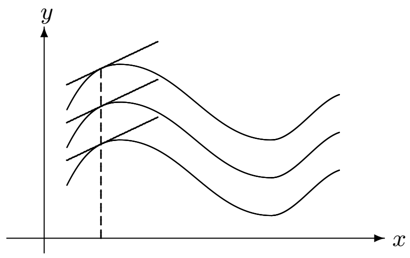

图 4.1

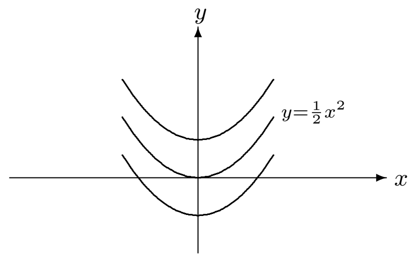

图 4.2

例如，要求 $f(x)=x$ 的原函数，就是要求 Oxy 平面中这样的曲线 $y=F(x)$，它在点 $(x,F(x))$ 处的切线的斜率随着 x 的增长而线性增长. 这样的曲线的全体由 $y=F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ 表示，其中 C 是任意常数 (图 4.2) .

有些问题中, 要求出 $f(x)$ 的过给定一点 (x_0,y_0) 的积分曲线. 这时，可根据要求，使得常数是一个确定的值. 以 $f(x)=x$ 为例，如果要求求一条过 $(0,1)$ 的积分曲线，则由 $1=F(0)$ 得 $C=1$，所以这条特定的积分曲线是 $y=F(x)=\frac{1}{2}x^2+1$.

通常，称确定常数 C 的条件

$$y(x_0)=y_0,\quad \text{或 } y|_{x=x_0}=y_0,$$

为初始条件. 带有初始条件的求原函数问题, 称为初值问题.

现在的问题是：

(1) 什么样的函数有原函数 (或者说什么样的被积函数有不定积分)?

(2) 如果一个函数 $f(x)$ 有原函数，那么如何具体算出 $f(x)$ 的原函数?

(3) 在第三章中，我们注意到初等函数的导数仍然是初等函数，那么作为导数的逆运算，一个初等函数的原函数 (或者说不定积分) 是否一定还能够表示成初等函数?

由第三章习题 3.3, 第 15 题可知，符号函数 $y=\mathrm{sgn}x$ 是不能表示成一个函数的导数的，因为作为其他函数的导函数，是不可能有第一类间断点的函数. 然而，我们将在下一章中证明一个重要事实：**对于给定区间上的连续函数，在这区间上必有原函数**.

本章只考虑定义在一个区间上的连续函数的不定积分，并以求出不定积分作为主要目标.

注意，这里所谓的 “求出不定积分”，是指可将不定积分表示为初等函数. 确实有这样的初等函数, 例如它们的不定积分 (当然存在) 却是无法表示成初等函数的. 例如, 可以证明下列积分

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{1}{\ln x}dx,\quad \int \sin x^2 dx$$

等是不能表示成为初等函数的. 我们将在下一章中，讨论这样的连续的被积函数和它们

的不定积分.

4.1.2 基本积分表

由于不定积分（即求原函数的运算）是微分的逆运算，所以一个微分公式 (或导数公式) 相应地就得出一个不定积分公式. 于是由 §3.2 中的微分公式表, 可得到下面的不定积分公式表 (其中 C 为任意常数).

(i) $\int 0dx = C$;

(ii) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$;

(iii) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \ (a > 0, a \neq 1)$;

(iv) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$;

(v) $\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int \sec^2 x dx = \tan x + C; \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$;

(vi) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$;

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C'$.

(关于 (iv), 可参看 §3.1 中例 15; 而 (vi) 中的常数 C'(易知) 为 $C + \frac{\pi}{2}$, 从而也是任意常数.)

4.1.3 不定积分的线性性质

(i) 若 a 是常数 $(a \neq 0)$, 则 $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$;

(ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

我们注意, 关于不定积分的等式实际上是关于函数族的等式 (即一个集合等式). 等式 (i) 的含义是, 当 $a \neq 0$ 时,$a \cdot f$ 的原函数可由 a 乘 f 的原函数得到; 而且 a 乘 f 的原函数也必是 $a \cdot f$ 的原函数. 等式 (ii) 具有类似的含义. (我们再次提一下, 在函数连续的前提下, 原函数的存在性已得到了保证.)

等式 (i) 和 (ii) 是微分法则的显然推论 (例如, 由于 (i) 式两端中函数的微分都是 $af(x)dx$, 从而 (i) 成立; 类似地可得出 (ii)). 此外, 易知 (ii) 对于多个函数的情形也成立.

由这两个等式, 可以将一个较复杂的不定积分化为若干个已知的不定积分的和, 进而得出结果. 这种方法, 称为分项积分法.

例 1 求 $\int \frac{x^2-3x+1}{x+1}dx$.

解 原式 $= \int \left(x - 4 + \frac{5}{x+1}\right)dx = \int xdx - 4\int dx + 5\int \frac{dx}{x+1}$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5\ln|x+1| + C.$$

(注意, 上面第二个等式右端的每一个不定积分都含有一个任意常数, 最后合并记作 C; 这一点我们以后不再申明.)

例 2 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$.

解 原式 $\displaystyle= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx$

$= \tan x - \cot x + C$.

例 3 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$.

解 原式 $\displaystyle= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= -\frac{1}{x} - \arctan x + C$.

4.1.4 换元积分法

换元积分法是求不定积分的一种基本方法，它与复合函数的微分法则相对应. 其原则 —— 大致地说, 是引入新的积分变量, 以改变被积函数的形式, 使不定积分易于求出.

定理 1 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

（即 $F'(x) = f(x)$ ），并设 $u = \varphi(x)$ 可微, 且 $\varphi'(x)$ 为连续函数. 则我们有

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

即 $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ 的一个原函数是 $F(\varphi(x))$

证 由一阶微分形式的不变性, 关系式

$$dF(u) = f(u) du$$

在以函数 $\varphi(x)$ 代替自变量 u 时仍然成立, 由此导出所说的等式.

在实践中, 设待求的不定积分可表达为形式 $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$, 此即 $\int f(\varphi(x)) d\varphi(x)$. 若不定积分 $\int f(u) du$ 易于求得, 则由定理 1 便求出了 $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$.(这一方法也称为 “第一代换法”, 或 “凑微分法”.)

定理 2 设函数 $x = \varphi(t)$ 是严格单调的可微函数, 且 $\varphi'(t)$ 不取零值 (从而 φ 有反函数 φ^{-1}). 若 $G(t)$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数, 即

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = G(t) + C,$$

则有

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

即 $G(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

证 我们由复合函数求导法则, 反函数求导法则以及已知条件, 得出

$$\begin{aligned}\frac{dG(\varphi^{-1}(x))}{dx}&=\frac{dG(t)}{dx}=\frac{dG}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\\&=G'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=f(\varphi(t))=f(x).\end{aligned}$$

由此导出所说的结果.

定理 2 提供了另一种方式的代换: 设待求的不定积分为 $\int f(x)dx$, 且不易直接积分. 我们可作一个适当的代换 $x=\varphi(t)$,(这里,$\varphi(t)$ 满足定理 2 中的要求), 将 $\int f(x)dx$ 化为

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

若右端的不定积分易于求得, 则只要在其结果中以 $t=\varphi^{-1}(x)$ 将变量 t 换回变量 x, 就求出了 $\int f(x)dx$.(这一方法通常称为 "第二代换法".)

例 4 求 $\int \tan x dx$.

解 所求的不定积分 $=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(d\cos x)}{\cos x}$

$$=-\ln|\cos x|+C.$$

例 5 求 $\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

解 所求的不定积分 $=\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x)=\int\frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$ (记 $t=\ln x$)

$$\begin{aligned}&=\int\frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}}dt=\int\sqrt{1+t}d(1+t)-\int\frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}}\\&=\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}-2\sqrt{1+t}+C\\&=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}-2\sqrt{1+\ln x}+C.\end{aligned}$$

例 6 求 $\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

解 设 $t=\sqrt{e^x+1}$, 则 $e^x+1=t^2$, 故 $e^xdx=2tdt$, 即 $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$. 所求的不定积分为

$$\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=2\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)-x+C.$$

例 7 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

解 被积函数的定义域为 $x>0$. 我们令 $x=t^6\ (t>0)$ 以消除所有根号. 则 $\sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2, dx=6t^5dt$, 从而

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}&=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int dt-6\int\frac{dt}{1+t^2}\\&=6(t-\arctan t)+C.\end{aligned}$$

最后, 由于 $t=\sqrt[6]{x}$, 故所求的不定积分为 $6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$.

例 8 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, 其中 a 是一个常数,$a>0$.

解 为了去除二次根号, 我们令 $x=a\sin t$, 这里 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 则 $t=\arcsin\frac{x}{a}$, 且 $dx=a\cos tdt$. 故所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int a^2\cos^2 tdt&=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.\end{aligned}$$

例 9 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$, 这里 a 是一个常数, $a>0$.

解 被积函数的定义域为 $x>a$ 或 $x<-a$. 我们先考虑 $x>a$ 的情形. 此时作三角代换 $x=a\sec t$(其中 $0<t<\frac{\pi}{2}$), 可得出结果; 但本题采用双曲代换则更为方便.

令 $x=a\operatorname{ch}t$, 其中 $t>0$.(参考习题 2.1, 第 16 题). 则 $dx=a\operatorname{sh}tdt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh}t$, 故所求的积分化为 $\int dt=t+C$. 现在, 易由双曲余弦函数的反函数表达式得出 (对 $x>a$)

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C',$$

其中 $C'=C-\ln a$, 为任意常数.

当 $x<-a$ 时, 令 $x=-a\sec t\,(0<t<\frac{\pi}{2})$; 或者令 $x=-a\operatorname{ch}t$ $(t>0)$, 类似地可得出结果为 $\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C'$.(更简单的, 令 $x=-t$, 则将后一种情形, 化为了前一种情形.) 因此, 两种情形下的结果可合并为

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

例 10 求 $\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx$, 这里 a 是常数,$a>0$.

解 被积函数的定义域为 $|x|<a$, 且 $x\neq 0$. 本题可以用三角代换求解, 这里介绍另一种有效的代换 —— 倒数代换.

当 $0<x<a$ 时, 令 $x=\frac{a}{t}$, 则 $t>1$, 且 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 由例 9 的结果, 易知所求的不定积分为

$$\begin{aligned}-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt&=-\frac{1}{a}\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+C\\&=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.\end{aligned}$$

同样, 当 $-a<x<0$ 时, 令 $x=\frac{a}{t}$(其中 $t<-1$), 得出的结果与上面的相同. 综合起来, 得到

$$\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$$

我们提醒读者, 若被积函数在定义域上连续, 则必须求出被积函数在整个定义域上的不定积分 (我们知道, 它必定存在), 而不是部分定义域上的不定积分. 我们举个例子, 以作说明.

例 11 求 $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx.$

解 当 $x \neq 0$ 时, 将被积函数的分子、分母同除以 x^2, 得出

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C.$$

为了求出 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$ 在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数 $F(x)$, 由已得的结果, 可设

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C_1, & x<0; \\ C, & x=0; \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C_2, & x>0. \end{cases}$$

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 得出

$$\lim_{x\to 0+0}F(x) = \lim_{x\to 0-0}F(x) = F(0),$$

即 $\frac{\pi}{2}+C_1 = C = -\frac{\pi}{2}+C_2$, 故 $C_1 = C-\frac{\pi}{2}$, $C_2 = C+\frac{\pi}{2}$. 由此 (应用习题 3.3, 第 13 题) 易知

$$F'_+(0) = F'_-(0) = f(0).$$

从而 F 在 $x=0$ 处可导, 且 $F'(0)=f(0)$. 故

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}-\frac{\pi}{2}+C, & x<0; \\ C, & x=0; \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+\frac{\pi}{2}+C, & x>0. \end{cases}$$

本题也可采用下面的方法 (避免了上面的麻烦):

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)+(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

(易于验证, 这一结果与前面的结果实质相同.)

4.1.5 分部积分法

不定积分中的分部积分法是处理积分问题时广泛采用的另一种方法，它与函数乘积的微分法则

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x), \quad \text{或} \quad d(u(x)v(x)) = v(x)du(x)+u(x)dv(x)$$

相对应. 因此 $(u(x)v(x))'$ 的一个原函数就是 $u(x)v(x)$，所以我们立即就有下面的定理.

定理 3 (分部积分法) 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 有连续的微商, 则

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx;$$

这可简记为

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

定理中的任意常数进行了合并. 该定理最直接的应用是利用求 $u'v$ 和 uv' 其中一个的不定积分，给出另一个的不定积分.

例 12 求 $\int \ln x dx$.

解 取 $u(x)=\ln x, dv(x)=dx$, 则可取 $v(x)=x$, 得出

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x\ln x - \int xd(\ln x) = x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

例 13 求 $\int e^{ax}\sin bx dx$ (a,b 是不等于零的实数).

解 记所说的不定积分为 I, 则由分部积分公式, 得出

$$I = \frac{1}{a}\int \sin bx\cdot d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

对右端第二个积分再用分部积分公式, 得

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

因此, 我们有

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}I.$$

移项得到 (注意,I 表示一个函数族)

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

例 14 记 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ $(n=1,2,\cdots)$, 其中 a 是非零实数. 证明下面的递推公式成立:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n \ (n=1,2,\cdots).$$

(由此及 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$, 可递推地求得 I_n.)

证 分部积分 (即取 $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $v=x$, 则 $du = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$, $dv=dx$), 得

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\right)\\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(I_n - a^2 I_{n+1}\right),\end{aligned}$$

由此即得结果.

许多不定积分的计算, 需将分部积分法与换元法结合使用, 我们举一个这样的例子.

例 15 求 $\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx$.

解 我们先由分部积分得出

$$\begin{aligned}\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx &= -\int 2xd\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right)\\ &= -\frac{2x}{\sqrt{1+e^x}}+2\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.\end{aligned}$$

而上式中的不定积分可用代换法求得 (见例 6), 我们最后有

$$\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx = 4\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)-2x-\frac{2x}{\sqrt{e^x+1}}+C.$$

习题 4.1

1. 用分项积分法求下列不定积分:

(1) $\int x(x-1)^3dx$; (2) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$;

(3) $\int (2^x+3^x)^2dx$; (4) $\int \tan^2 xdx$;

(5) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$; (6) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

2. 用第一代换法求下列不定积分:

(1) $\int (2x-1)^{100}dx$; (2) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$;

(3) $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$; (4) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;

(5) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$; (6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

(7) $\int \frac{\arctan\dfrac{1}{x}}{1+x^2}dx$; (8) $\int \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx$;

(9) $\int \sin^2 xdx$; (10) $\int \sin^5 x\cos xdx$.

3. 用第二代换法求下列不定积分:

(1) $\int \sqrt{e^x-2}dx$; (2) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$, a 为常数,$a>0$;

(3) $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}dx$, a 为常数,$a>0$;

(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, a 为常数,$a>0$;

(5) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$;　(6) $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$;

(7) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx$;　(8) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} dx$, a 为常数,$a>0$;

(9) $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$;　(10) $\int \frac{x^{\frac{1}{7}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}}+x^{\frac{1}{14}}} dx$;

(11) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$;　(12) $\int \frac{1}{x^8(1+x^2)} dx$.

4. 用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int x\sin x dx$;　(2) $\int x^2 \ln x dx$;

(3) $\int \cos\ln x dx$;　(4) $\int x^2\cos 5x dx$;

(5) $\int \sec^3 x dx$;　(6) $\int x^2 e^x dx$;

(7) $\int x \arcsin x dx$;　(8) $\int x(\arctan x)^2 dx$;

(9) $\int (\arcsin x)^2 dx$;　(10) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1}) dx$.

5. 求下列的不定积分:

(1) $\int |x| dx$;　(2) $\int \max(1, x^2) dx$.

6. 导出下列不定积分的递推公式:

(1) $\int \sin^n x dx \quad (n=1,2,\cdots)$;　(2) $\int x^n e^x dx \quad (n=1,2,\cdots)$.

7. 求下列的不定积分:

(1) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$;　(2) $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx$;

(3) $\int \frac{1}{x^4+x^6} dx$;　(4) $\int x\sqrt{x-2} dx$;

(5) $\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x} dx$;　(6) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}} dx$;

(7) $\int xe^x \sin x dx$;　(8) $\int \frac{1}{(1+\tan x)\sin^2 x} dx$;

(9) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx$;　(10) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$;

(11) $\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^3} dx$;　(12) $\int \frac{x}{1+\sin x} dx$;

(13) $\int \arcsin\sqrt{x} dx$;　(14) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$;

(15) $\int x\sin^2 xdx$;

(16) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

(17) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$;

(18) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$;

(19) $\int e^{2x}(1+\tan x)^2dx$;

(20) $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$;

(21) $\int \cos x\cos 2x\cos 3xdx$;

(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$;

(23) $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx$;

(24) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$;

(25) $\int e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}}dx$;

(26) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

§4.2 有理函数的不定积分

前面我们已介绍了求不定积分的一些基本方法和原则，同时也指出了有许多初等函数的不定积分虽然存在，却不是初等函数.

然而，对于本节所讨论的初等函数类，不定积分理论中有一个很有意义的一般结果：**一切有理函数的不定积分都是初等函数**.

4.2.1 有理函数的不定积分

再次提醒，所谓有理函数是指一个分子、分母都是 x 的多项式的分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\quad a_n\neq 0;$$

$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0,\quad b_m\neq 0.$$

若 $n\geqslant m$, 称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理假分式; 若 $n<m$, 称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理真分式.

由多项式的除法易知, 任何有理假分式可表示为一个多项式与一个有理真分式之和. 由于多项式的原函数易于计算，其结果仍是一个多项式. 因此, 求有理函数的不定积分, 只需考虑有理真分式的不定积分.

有理真分式的不定积分, 依靠下面两个属于代数学的事实, 它们的证明本书中略去.

定理 1 任何实系数的多项式 $Q(x)$ 可分解为乘积

$$Q(x)=b_m(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l},$$

这里 $r_1+\cdots+r_k+2s_1+\cdots+2s_l=m$, 所有的 $\alpha_i,\beta_j,\gamma_t$ 都是实数, 且 $\beta_i^2-4\gamma_i<0\ (i=1,2,\cdots,l)$(即这些二次多项式在实数范围内不能再分解因式).

定理 2 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 分别是 n 和 m 次实系数多项式, 并且 $n<m$. 若 $Q(x)$ 已分解为定理 1 中说的形式, 则存在实数 $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, 使得

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)}+\cdots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\cdots\\&+\frac{A_{k,1}}{(x-\alpha_k)}+\cdots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\\&+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)}+\cdots+\frac{B_{1,s_1}x+C_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}}+\cdots\\&+\frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_l)}+\cdots+\frac{B_{l,s_l}x+C_{l,s_l}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}}.\end{aligned}$$

此式称为有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的 “部分分式分解”.

简单地说, 若 $Q(x)$ 的分解中有因式 $(x-\alpha)^r$, 则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的部分分式分解中包含着项:

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\cdots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r};$$

若 $Q(x)$ 的分解中有因式 $(x^2+\beta x+\gamma)^s$(其中 $\beta^2-4\gamma<0$), 则 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的部分分式分解中包含下列形式的项:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\cdots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}.$$

如何对一个有理函数进行分解，可先假设有理函数有上述分解表达式，其中所有的常数 A_i, B_i, C_i 待定. 然后进行通分，比较通分后分子的各次幂的系数，确定所有待定的常数. 通常称为**待定系数法**. 定理 2 保证了待定系数是一定能够成功的.

定理 2 的主要作用是将一般的有理真分式分解为某些较简单的有理函数之和，由此可将求不定积分 $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 的问题, 化为求以下两种特殊类型的不定积分:

(i) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-\alpha)^k}dx$;

(ii) $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx$.

(其中 k 为自然数, 而 $\beta^2-4\gamma<0$.)

显然, 形如 (i) 的不定积分是初等函数 (注意,$k=1$ 及 $k>1$ 时的情形不同). 对于 (ii) 中的不定积分, 记 $t=x+\dfrac{\beta}{2}$, $a^2=\gamma-\dfrac{\beta^2}{4}$, 它可化为

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt+\left(C-\frac{B\beta}{2}\right)\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt.$$

当 $k=1$ 时, 上式右端的第一个不定积分是对数函数形式, 第二个是反正切函数形式, 所以是初等函数. 当 $k>1$ 时, 上式右端的第一个不定积分为

$$\frac{1}{(1-k)}\cdot\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}}+C,$$

这是初等函数; 而由 §4.1 中例 14 的递推公式知, 上式右端的第二个不定积分也是一个初等函数. 这样, 我们就证明了有理真分式的原函数 (进而任意有理函数的原函数), 都是初等函数.

例 1 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+1}dx$.

解 被积函数的分母可分解为

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

由定理 2, 可设

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

其中,A,B,C 均是待定的实数. 将上式去分母, 得到恒等式

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1.$$

比较等式两边同次幂的系数, 有

$$\begin{cases}A+B=0,\\-A+B+C=0,\\A+C=1.\end{cases}$$

由此可解得 $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$. (求 A, B, C 也可采用 "代值法". 例如, 在上述恒等式中取 $x=-1$, 可得 $A=\frac{1}{3}$; 取 $x=0$, 得 $C=\frac{2}{3}$; 再取 $x=1$, 得出 $B=-\frac{1}{3}$.) 现在

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

求有理函数的不定积分，原则上可先作出有理函数的部分分式分解. 为了做到这一点，待定系数法是相当基本的方法. 然而，针对问题的特点，采用适当的恒等变形，有时能更简单地作出所需要的分解. 另一方面, 有些问题中, 采用上述原则将产生冗长和复杂的计算, 我们宁愿采用其他的求解方法（参见下面的例 2 与例 3）.

例 2 求 $\int \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)}dx$.

解 我们有

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(x^2+x+1)-(x+1)x}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1},$$

由此易知所求的不定积分为

$$\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

例 3 求 $\int \frac{1}{x(x^8+1)}dx$.

解 我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^8+1)}dx = \int \frac{1+x^8-x^8}{x(x^8+1)}dx &= \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{8}\int \frac{d(x^8+1)}{x^8+1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{8}\ln(x^8+1) + C.\end{aligned}$$

4.2.2 三角函数有理式的不定积分

由三角函数及常数经过有限次四则运算构成的表达式, 称为三角函数的有理式. 易于得知, 三角函数的有理式可记作 $R(\sin x, \cos x)$, 这里 $R(u, v)$ 是关于变量 u, v 的有理函数, 即是两个关于 u, v 的二元多项式之商.

三角函数有理式的不定积分

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

通过下列的 "万能变换"

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi),$$

可化为有理函数的积分, 因而其不定积分也是初等函数. 事实上，通过 "万能变换"，有

$$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2\frac{x}{2}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \sin^2\frac{x}{2}$$

由三角函数的倍角公式得

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

也就是 $\sin x$ 和 $\cos x$(进而所有三角有理式) 都能经过“万能变换” 表示成有理式. 而经过微分, 有

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

即 x 对 t 的导数也可表示成有理式. 由此可将 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 化为

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt,$$

这是关于 t 的有理函数的不定积分, 故可表示为 t 的初等函数; 从而 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 也是 x 的初等函数.

例 4 求 $\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$.

解 令 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则

$$5 + 4\sin x = \frac{5t^2+8t+5}{t^2+1}.$$

从而

$$\int \frac{1}{5+4\sin x}dx = 2\int \frac{dt}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{3}\arctan\frac{5t+4}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3} + C.$$

对于双曲函数有理式的积分

$$\int R(\cosh x, \sinh x)dx$$

也可类似地引进一种万能变换

$$u = \tanh\frac{x}{2}$$

将积分化为有理函数的积分. 读者可充分利用双曲函数类似于三角函数的一系列性质进行讨论.

请读者注意，在原则上, 不管是三角有理函数还是双曲有理函数，万能变换是处理它们不定积分的一般方法. 但针对具体问题, 适当地应用三角恒等变形 (和双曲函数类似的恒等式) , 可采用更灵活、简便的方法.

例 5 求 $\int \sin^4 x dx$.

解　本题有多种解法; 用万能变换则较为麻烦. 我们两次用倍角公式, 得出

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx \\ &= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.\end{aligned}$$

注记　上面引进的变换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 的几何意义是: 如图 4.3, 在单位圆周上一点 P, 它的坐标为 (u,v), $u=\cos x$, $v=\sin x$, 而 $t=\tan\frac{x}{2}$, 即是线段 SP(或当 $|x|>\frac{\pi}{2}$ 时 SP 的延长线) 与 v 轴的交点 R 的纵坐标. 因此, 单位圆周上的一般点 $P(u,v)$ 可通过参数 t 的有理式

$$u=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad v=\frac{2t}{1+t^2}$$

来表示. 它是圆周 (除 S 点之外) 与整个实数轴之间的一一对应: 当 t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时, 对应的点 $P(u,v)$ 则从 S 点出发, 逆时针方向绕圆一周. 圆周这样的表示, 显然就是恒等式

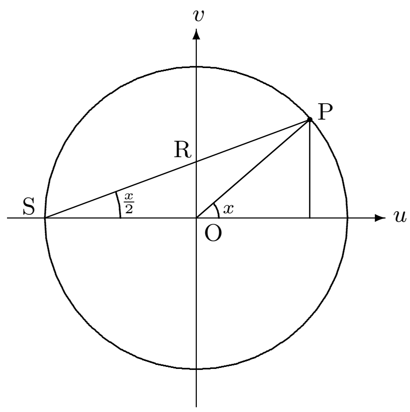

图 4.3

$$(t^2-1)^2+(2t)^2=(t^2+1)^2,\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

注意到, 当 t 是整数时, 上式给出了 Pythagoras(毕达哥拉斯) 整数 $a=t^2-1$, $b=2t$, $c=t^2+1$, 即满足方程 $a^2+b^2=c^2$ 的整数解 (勾股定理). 特别当 $t=2$ 时,$a=3$, $b=4$, $c=5$.

4.2.3　其他类型的初等函数的不定积分

如同前面的记号, 记 $R(u,v)$ 是关于变量 u,v 的有理函数, 即 $R(u,v)$ 是两个关于 u,v 的多项式所形成的分式.

1°　$R(x,\sqrt{1-x^2})$ **的不定积分**

积分

$$\int R(x,\sqrt{1-x^2})dx$$

可通过下列代换

$$x=\cos u,\ \text{则}\ \sqrt{1-x^2}=\sin u,\quad dx=-\sin u du$$

化为三角函数的有理式的不定积分. 而后者通过万能代换 $t=\tan\frac{u}{2}$ 化为有理函数的积分, 所得到的结果是关于 t 的初等函数. 因此, 只要利用两个代换的反函数, 就可以把本小节所讨论的函数的不定积分表示成初等函数.

如果将两次代换合起来

$$t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}};\quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

则

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2};\quad \frac{dx}{dt}=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

就可以直接将积分化为有理函数的积分问题.

2° $R(x,\sqrt{x^2-1})$ **的不定积分**

在积分

$$\int R(x,\sqrt{x^2-1})dx$$

中, 我们利用双曲余弦函数作为代换

$$x=\cosh u,\quad \text{则}\quad \sqrt{x^2-1}=\sinh u,\quad dx=\sinh u$$

将积分化为双曲有理函数的积分. 再使用双曲有理函数的万能代换，最终将积分化为有理函数的积分.

3° $R(x,\sqrt{x^2+1})$ **的不定积分**

对于此类型的积分

$$\int R(x,\sqrt{x^2+1})dx$$

可作代换 $x=\sinh u$ 将积分化为双曲有理函数的积分. 或者利用代换

$$u=x+\sqrt{x^2+1}$$

一步就可将积分化为有理函数的积分.

习题 4.2

1. 求下列有理函数的不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+x-2}dx$;　(2) $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$;

(3) $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-x}dx$;　(4) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}dx$;

(5) $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$;　(6) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

(7) $\displaystyle\int\frac{x^5-x}{x^8+1}dx$;　(8) $\displaystyle\int\frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}dx$.

2. 求下列三角函数有理式的不定积分:

(1) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$;　　(2) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$;

(3) $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}dx$;　　(4) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

(5) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$;　　(6) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$;

(7) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;　　(8) $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}dx$;

(9) $\int \frac{1}{2\sin x+\sin 2x}dx$;　　(10) $\int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$, a, b 为常数,$a^2+b^2\neq 0$.

第 5 章　单变量函数的积分学

§5.1　积分

5.1.1　积分的定义

积分, 也称定积分, 是微积分中的另一个主要概念. 我们将通过两个分别取自几何与物理中的例子来引出积分的定义.

(i) 曲边梯形的面积

对于多边形，定义面积时，我们接受几何直观，即承认对于每一个（平面）多边形 P 都有面积，其面积是一个正数 $A(P)$，并具有下面的性质：

1° 两个全等的多边形有相同的面积;

2° 整体面积是它的各部分面积之和：如果两个多边形 P' 与 P'' 拼凑在一起形成一个新的多边形 P，则 P 的面积是

$$A(P) = A(P') + A(P'')$$

所谓 “拼凑” 或者说 “并”，即是 P' 与 P'' 仅有某些边为公共部分.

因此，为了度量面积, 必须选定一个多边形, 以它的面积作为面积的单位. 我们约定将面积单位取作边长等于长度单位的正方形的面积.

由性质 1° 和 2° 能够证明, 任一矩形的面积等于其长与宽的乘积; 进而, 任一三角形的面积以其底、高之积的一半作为度量; 最后, 因任一多边形可划分为若干个三角形的并, 从而可确定其面积.

面积的定义，也可以完全按数学方式定义，即严格地证明, 对于每个多边形能够对应一个具有上述两个性质的正数，并且约定单位长度的正方形所对应的正数为单位.

如果考虑的对象是一个由封闭曲线围成的平面图形. 则可以将图形划分为如图 5.1 所示的曲边梯形的并 (图 5.2 与图 5.3 是曲边梯形的蜕化情形: 其中一条边或两条边缩成为一个点). 因此，我们只要考虑每一个曲边梯形的面积就可以了.

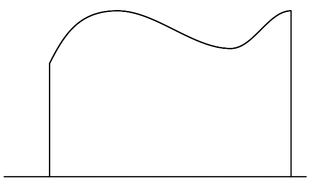

图 5.1

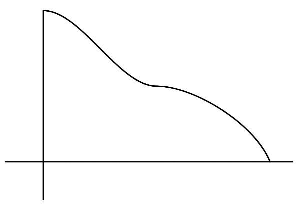

图 5.2

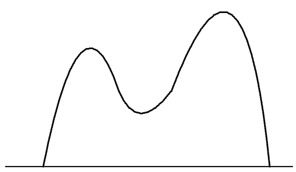

图 5.3

取定一个直角坐标系 Oxy，使所考虑的曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geqslant 0)$, 与 x

轴, 两直线 $x=a$ 及 $x=b$ 所围成 (如图 5.4).

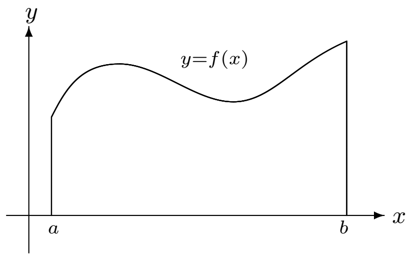

图 5.4

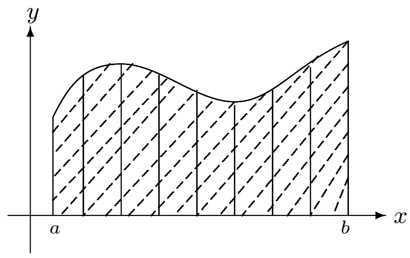

图 5.5

直观上看, 如果我们接受这样的假设: 这种图形的面积是一个有确定意义的数, 因而现在的工作就是求出这个数. 为此我们在 a 与 b 之间插入 $n-1$ 个分点 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$, 其中 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$, 称为区间 $[a,b]$ 的一个 "分割". 若记 $x_0=a, x_n=b$, 则区间 $[a,b]$ 分成了 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$. 这些小区间的长度可以是任意的, 彼此不必相等. 在每一个分点上画出与 x 轴垂直的直线, 于是所说的曲边梯形被分成 n 个小 "长条" (如图 5.5).

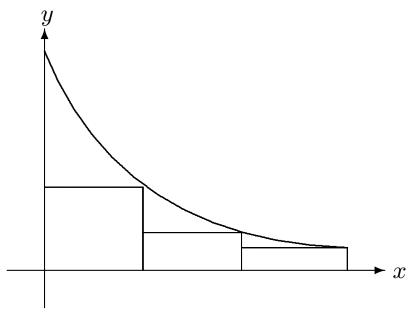

图 5.6

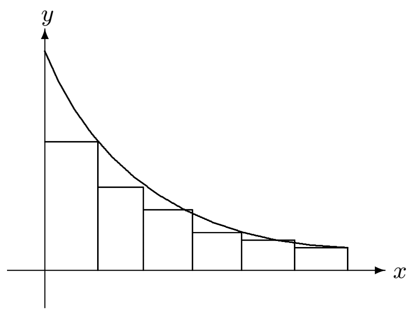

图 5.7

求这些小长条的面积, 难度并未降低, 但可以考虑用小的矩形长条来作近似 (这一过程, 相当于在每个小区间上用 f 在其中某个点的值代替 $f(x)$). 我们用 S_n 表示这样得到的 n 个小矩形面积之和. 在直观上可以看出, 若区间 $[a,b]$ 分割得越来越细, 即 n 无限增大时, 诸小区间的最大长度趋向于零, 则 "近似值" S_n 趋向于曲边梯形的面积. 这样, 曲边梯形的面积表示成了这些小矩形的面积和的极限.

然而, 几何上的直观, 无论多么令人信服, 都只能作为数学描述的导引和背景.

现在我们不靠直观预先认定所说的曲边梯形存在面积, 而是首先考虑上面定义的和 S_n, 当分割越来越细时, 如果这些和趋于一个确定的极限, 我们就将这个极限值定义为曲边梯形的面积. 这样我们就给出了定义面积的一种方式.

更确切地说, 我们在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中任意取一个点 ξ_i, 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=$

$1, 2, \cdots, n$)，则每一小块矩形的面积是 $f(\xi_i)\Delta x_i$，它们的和式为

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

如果当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i \to 0\ (n \to \infty)$ 时, 无论分点 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 及点 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 怎样选取, 和 S_n 必定有极限; 这一极限值记为

$$\int_a^b f(x)dx,$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分, 并定义为所说的曲边梯形 (图 4) 的面积.

(ii) 质点沿直线运动走过的路程

一个质点沿直线运动, 且在时间区间 $[a, b]$ 内任一时刻 t 的速度为 $v = v(t)$, 我们考虑质点在这一段时间内走过的路程.

从物理意义上来看, 所说的路程当然存在. 为了求出这一路程, 我们用分点 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, 将区间 $[a, b]$ 分为 n 个小区间 $[t_{i-1}, t_i] (i = 1, \cdots, n)$. 在每个区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 ξ_i，将质点在时间区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的运动近似为以速度为 $v(\xi_i)$ 的匀速运动. 由此, 可得到质点从 $t = a$ 到 $t = b$ 走过的路程的近似值为

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

直观上看, 当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta t_i \to 0 (n \to \infty)$ 时, 近似值 S'_n 便趋于所求的路程.

一般地, 我们给出积分的如下定义

定义 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义. 用分点

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间 $[a, b]$ 分割成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, \cdots, n)$. 在每一个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i, 并记

$$\|T\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

则

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上对应于分割 T 的一个**积分和**，或者称为Riemannn**（黎曼）和**, $\|T\|$ 称为分割的**“宽度”**.

如果当 $\|T\| \to 0\ \ (n \to \infty)$ 时, 无论分点 x_i 与点 ξ_i 怎样选取, 和数 S_n 总有极限, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上**可积**; 并将这极限值称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分, 记为

$$\int_a^b f(x)dx.$$

由定义我们看到, 函数可积及其积分, 反映的是函数在一个区间上的整体性质 (这与函数的可微性完全相反). 实际上, 若记 $q_i = \dfrac{1}{b-a}\Delta x_i$, 则 $q_i > 0\,(i=1,\cdots,n)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1$. 那么,$f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 意味着函数值 $f(\xi_i)$ 的加权平均

$$\sum_{i=1}^{n} q_i f(\xi_i)$$

具有一种好的性态: 在 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} q_i \to 0$ 时有极限.

积分的上述定义是十九世纪德国数学家 Riemann (黎曼) 给出的, 因此如果在某个区间上的函数在这一意义下可积, 也称这函数在所说的区间上 Riemann 可积, 相应的积分称为 Riemann 积分. (Riemann 积分这一名称, 则是为了将上述积分与各种推广的积分概念区分开来.)

记号 $\int_a^b f(x)dx$ 中, 积分号相应于 (积分和中的) 求和号 $\sum$. 作为一个整体, $f(x)dx$ 相应于 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 称为被积表达式, $f(x)$ 称为被积函数, x 称为积分变量; 而 a 与 b 分别称为积分下限与积分上限.

容易看到, 用怎样的字母来表示积分变量, 是完全无关紧要的. 因此, 可以将 $\int_a^b f(x)dx$ 写成 $\int_a^b f(t)dt$, 或 $\int_a^b f(u)du$. 我们顺便提一下, 象 $\int_a^x f(x)dx$ 或 $\int_x^b f(x)dx$ 这样的表达式, 其中相同的字母既用来表示积分变量, 又用来表示积分的上 (下) 限, 这有时将引起误解, 因而应当避免使用.

(定) 积分是面积、路程这些具体问题的数学抽象, 它明确了这些直观概念的数学含义, 但问题还远远没有真正解决. 我们目前不知道哪些函数可积; 更不知道, 当一个函数在某个区间上可积时, 怎样求出相应的积分值.

5.1.2 可积函数类

什么样的函数可积, 是否能给出一个简明的准则判别一个函数在某个区间上可积, 这些问题不是一个简单问题. 这里, 我们罗列出几类重要且基本的可积函数类, 对于这些断言的证明将在第二节中讨论.

在叙述可积的几个充分条件之前, 我们首先指出函数可积的一个简单但基本的必要条件.

定理 1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证 由定义易知, 可积函数的 Riemann 和 $S_n(T)$ 当 $\|T\|\to 0$ 时有极限 A, 所以一定是有界的. 取 $\varepsilon = 1$, 则存在正数 δ, 使得对于区间 $[a,b]$ 的一个分割 $T:\ \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$, 只要 $\|T\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant |A| + 1$$

注意到上式对于任意一组点 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 都成立.

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则 $f(x)$ 必在某个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上无界. 现在再取定一组 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 这里 $i=1,\cdots,n$, 但 $i\neq k$. 此时

$$|f(\xi_k)|\Delta x_k\leqslant\left|\sum_{i\neq k}f(\xi_i)\Delta x_i\right|+|A|+1$$

对任意 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ 成立. 上式的右边是一个固定的数. 因此与 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上无界矛盾.

定理 1 能够用于判断某些函数在给定的区间上不可积，但是定理 1 的逆并不正确. 例如，Dirichlet 函数（§2.1, 例 4，即在有理点上取值为 1，无理点上取值为 0 的函数）在任一区间 $[a,b]$ 上有界，但是，直接利用定义就可判断它在 $[a,b]$ 上是不可积的，请读者自行完成证明.

现在我们叙述关于函数可积的几个基本结果，证明留在第二节进行.

定理 2 闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 (因而是有界的)，在 $[a,b]$ 上一定是可积的.

定理 3 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界, 且在这区间上至多只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 4 若 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数 (这蕴含了 f 在 $[a,b]$ 上有界), 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 2 是可积性理论中最为基本的结果. 特别地, 这一定理保证了 (曲边梯形) 面积的数学定义的合理性. 易于看到（图 5.8），如果 $[a,b]$ 上的连续函数 f 不恒为正，积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也有明了的几何含义.

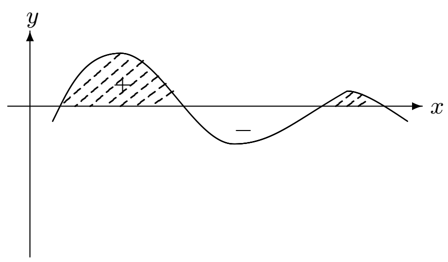

图 5.8

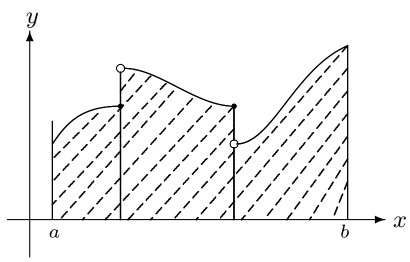

图 5.9

定理 3 是定理 2 的一个推广. 它表明可积函数类比连续函数类大. 因为连续函数是每一点都要求连续，而积分是一个“积累”的极限，所以对于在若干点有些问题尚可容忍. 图 5.9 是一个具有有限个间断点的曲线所覆盖的面积的示意图.

定理 4 在理论上也甚为重要. 我们在此提及它，主要是希望读者了解：可积的函数也可以有无穷多个间断点的例子. 例如, 函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)\\ 0, & x=0\end{cases},$$

在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 这无穷多个点上间断; 但在区间 $[0,1]$ 上,f 单调增且有界, 从而 f 在 $[0,1]$ 上可积. 我们注意, 只有当函数在 $[a,b]$ 上有无穷多个间断点时, 定理 4 才显示出其意义. 在相反的情形下，定理 4 则是定理 3 的推论，因为单调函数的间断点一定是第一类的.

5.1.3 积分的初等例子

有一些基本且重要的函数, 能够通过定义来计算它们的积分. 为了叙述方便, 我们采用上述积分定义中的记号, 而不特别申明.

例 1 区间 $[a,b]$ 上的常值函数 $f(x)=c$ 的积分是 $\int_a^b cdx=c(b-a)$.

证 因为常值函数在任何点的值都是一样的，所以

$$S_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=c\sum_{i=1}^n \Delta x_i=c(b-a).$$

因此当 $\|T\|\to 0$ 时,S_n 有极限, 且极限为 $c(b-a)$. 当 $c>0$ 时，例 1 的几何意义为: 长、宽分别为 c 与 $b-a$ 的矩形的面积是 $c(b-a)$, 这与初等几何中的定义一致.

例 2 设 $a<b$，证明 $\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

证 连续函数的积分存在定理，保证了所说积分存在. 即无论采取什么样的区间分割方式以及无论取什么样的点 ξ_i，对应的 Riemann 和的极限存在. 在此前提下，为了用定义计算积分，我们可选择某种特殊的分割方式，取特殊的点 ξ，以便于处理相应的 Riemann 和. 这里我们将区间 $[a,b]$ 用分点

$$a+h,a+2h,\cdots,a+(n-1)h$$

划分为 n 等份, 其中 $h=\frac{b-a}{n}$. 将每个小区间的右端点取作 ξ_i, 则相应的积分和为

$$\begin{aligned}S_n&=(a+h)h+(a+2h)h+\cdots+(a+nh)h\\&=nah+\frac{1}{2}n(n+1)h^2\\&=a(b-a)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)(b-a)^2.\end{aligned}$$

故当 $n\to\infty$ 时,$S_n\to\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

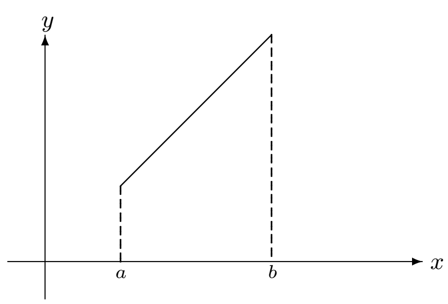

图 5.10

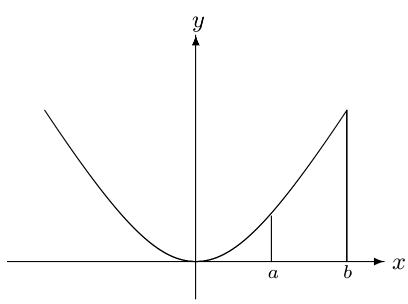

图 5.11

例 3 设 $a<b$，证明 $\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

证 因为被积函数 $f(x)=x^2$ 连续，所以和例 2 的理由一样，并采用与例 2 中相同的分点及点 ξ, 得出积分和

$$\begin{aligned}S_n&=(a+h)^2h+(a+2h)^2h+\cdots+(a+nh)^2h\\&=na^2h+n(n+1)ah^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)h^3\\&=a^2(b-a)+\left(1+\frac{1}{n}\right)a(b-a)^2+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)(b-a)^3.\end{aligned}$$

由此易知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

本题说明：抛物线 $y=x^2$, 与 x 轴, 以及两直线 $x=a$ 和 $x=b$ 围成的曲边梯形的面积为 $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$（图 5.11）. 这个结果远在 Archimedes（阿基米德）时代就已知道.

例 4 求 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分.

解 首先，$f(x)=\sin x$ 是连续函数，所以一定可积. 在此前提下，取区间与例 2 一样的分点，并将每个小区间的右端点取作 ξ_i，则 Riemann 和为

$$\begin{aligned}S_h&=h[\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\cdots+\sin(a+nh)]\\&=\frac{h}{2\sin\dfrac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]\\&=\frac{h}{2\sin\dfrac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

上式的推导过程中，对

$$2\sin\frac{h}{2}[\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\cdots+\sin(a+nh)]$$

中的每一项，利用三角函数的积化和差公式就得到第一个等式，只要 h 不是 2π 的倍数. 而第二个等式用到了 $b=a+nh$. 因此当 $h\to 0$ 时，上式最左端的第一个因子

$$\frac{h}{2\sin\dfrac{h}{2}}\to 1$$

所以有

$$\int_a^b\sin xdx=-(\cos b-\cos a)$$

同理还可以得到

$$\int_a^b\cos xdx=\sin b-\sin a$$

下面的例 5, 涉及最简单的不连续函数的积分, 我们在后面的讨论中还将提到它.

例 5 设 $a<b$, 而 c 满足 $a\leqslant c\leqslant b$. 考虑函数

$$J(x)=\begin{cases}0, & x\in[a,b],x\neq c,\\1, & x=c.\end{cases}$$

证明 $\int_a^b J(x)dx = 0$.

证 $J(x)$ 仅在一点 $x = c$ 处间断; 由定理 3 知,$J(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 这一事实在下面的计算中同时也得到了证明.

对区间 $[a,b]$ 的任一划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 设包含点 c 的区间是 $[x_{k-1}, x_k]$, 则对任何点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 我们有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} J(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \Delta x_k \leqslant \|T\|$$

所以当 $\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i \to 0$ 时，上面极限为零，故 $J(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且积分是 0.

5.1.4 积分的基本性质

从前面的例子看出，每一个实例都是特殊的方法来处理的. 显然，用定义计算积分，不能使我们走得太远. 而微积分的一个基本点正是在于寻找和建立一种统一的思想方法得出这些结果. 而不是用这种或者那种特殊的方法. 在积分问题上，我们将看到存在这样一个犀利的思想方法，使得积分的计算问题 —— 至少在很大程度上, 能以一种非凡的统一方式方式得以解决, 这就是著名的 Newton—Leibniz（牛顿 — 莱布尼兹）公式.

在证明 Newton—Leibniz 公式之前，首先讨论积分的一些基本性质. 这些性质在直观上均是易于接受的.

我们要讲述的第一个性质，称为积分的区间可加性，几何上看就是面积的可加性.

定理 5 设 $a < c < b$. 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积. 反过来, 若 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.f 在三个区间上的积分满足

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

几何直观上该定理的结论是清楚的，分析的证明中，可按下述方式分割区间：即把 c 取作一个分点 $c = x_m$（或者说对一个分割，可插入 c 使之成为一个分点）. 这样 $[a,b]$ 的一个分割，就分成为 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的分割. 反之如果 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 分别有各自的分割，则合在一起就是 $[a,b]$ 的一个分割. 不难发现 $[a,b]$ 分割 T 的 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 分割 T_1 和 T_2 的宽度之间的关系

$$\|T_1\|,\ \ \|T_2\| \leqslant \|T\| = \max\{\|T_1\|,\ \|T_2\|\}$$

注记 至此, 我们仅对 $a < b$ 的情形定义了 $\int_a^b f(x)dx$. 为了今后的方便, 也需要在 $a = b$ 及 $a > b$ 的情形赋予符号 $\int_a^b f(x)dx$ 明确的意义：定义的方式应使得定理 5 中积分的区间可加性公式保持成立. 因此, 当 $c = a$ 时

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.$$

所以事先定义

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

是合理的. 如果取 $b<a$, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

其中, 右端的积分具有原先规定的意义. 这样, 积分的定义中上下限就没有了大小之分, 而且对与在可积区间范围内的任意三个数 a, b, c, 定理 5 中的可加性都成立.

积分的第二个性质涉及可积函数的 (两类) 运算的可积性.

定理 6 设函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积. 则

(i) 对任意常数 α,β, 函数 $\alpha f+\beta g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx;$$

(ii) 函数 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 6(i) 称为积分的线性性: 即**两个可积函数的"线性组合"仍是可积的**, **并且积分值就等于这两个函数的积分的 (相应的)"线性组合"**.特别, 取 $g(x)$ 恒为零, 则由 $f(x)$ 可积, 可推出 $\alpha f(x)$ 可积, 且

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx,$$

即被积表达式中的常数因子可提取至积分号之外.

定理 6(i) 易于推广至多个可积函数的情形. 因此计算积分时, 经常应用这一性质. 例如, 由 (前面的) 例 1— 例 3, 就能求出任一个二次多项式在一个区间上的积分.

由定理 6(i), 还能推出可积函数的一个值得注意的基本性质: 考虑区间 $[a,b]$ 上在除一点的值为 1, 其余值都为 0 的函数 J. 由例 5 可知,J 在 $[a,b]$ 上可积, 且积分为 0; 进而, 对任意常数 α, 函数 αJ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_a^b \alpha J(x)dx=0$. 将 αJ 加到一个 (在 $[a,b]$ 上) 可积的函数 f 上, 所得的函数仍然可积, 并且

$$\int_a^b(f(x)+\alpha J(x))dx = \int_a^b f(x)dx.$$

由此可见,**改变可积函数在一点处(进而有限个点处)的值**, **不会破坏其可积性, 也不改变其积分值**.

定理 6(ii) 表明, 两个可积函数的乘积仍然可积. 然而, 积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 一般不能用 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 来表示; 特别地, 一般而言,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

关于定理 6(i) 的证明是比较显然的, 请读者自行完成. 定理 6(ii) 的证明, 利用第三节讨论中的手段, 也容易完成.

请读者注意, 可积函数的复合运算不一定保持可积性. 事实上, 存在这样两个函数 f 和 g, 使得 g 在 $[a,b]$ 上可积,f 在 g 的值域 $[A,B]$ 上可积, 但复合函数 $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上不可

积. 由于举出这样一个例子将使我们走得太远, 因而这里不作讨论. 另一方面, 若上述的 f 和 g 均在所说的区间上连续, 此时虽然 $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积, 但积分 $\int_a^b f(g(x))dx$ 一般却不能用 f 与 g 的积分来表示. 这一切都表明, 函数的可积性及相应积分的计算, 均是复杂和困难的问题.

由于计算积分的困难, 因而积分的估值在积分理论中就有某种特别的意义. 我们讲述的 (积分的) 第三个性质与此相关.

定理 7 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(i) 若对所有 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\geqslant 0$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0;$$

(ii) 若 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上一个可积函数, 使得对所有 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx;$$

(iii) 函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

在定理 7 中,(i) 称为积分的保号性，可由积分的定义直接推出来.

(ii) 称为积分的单调性, 它是 (i) 及定理 6(i) 的显然推论.

我们特别提一下, 当 $\int_a^b f(x)dx$ 不易计算时,(ii) 给出了估计这一积分的一个基本原则: 在 $[a,b]$ 上, 给出 $f(x)$ 的一个尽可能好的 (可积的) 上界函数 $g(x)$, 使得 $\int_a^b g(x)dx$ 易于计算, 这往往能得到 $\int_a^b f(x)dx$ 的较精确的上界. 同样的原则当然也适用于估计 $\int_a^b f(x)dx$ 的下界.

(iii) 中第一个断言表明, 绝对值运算保持可积性, 这是可积性理论中很基本的事实. 经过第二节的讨论之后，将会很容易给出证明. 对可积函数 f 来说，$-|f|$ 也可积，而且

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)| \quad (\text{对所有 } x\in[a,b])$$

以及 (ii), 便易于导出 (iii) 中的不等式.

由定理 7(ii) 及例 1 立即得出了下面的推论, 它给出了积分的最为简明的估值.

定理 8 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积,M 及 m 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的一个上界及一个下界, 即对所有 $x\in[a,b]$, 有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

(注意, 由定理 1 知, 这样的两个数一定存在.) 则

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

我们最后要讲述的一个基本性质, 称为积分学的中值定理, 它给出了连续函数的积分这一整体的量, 与其单个函数值的一种简明的联系, 这在理论上相当重要.

定理 9 (积分中值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

证 由 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 从而它在这个区间上有最大值 M 与最小值 m, 于是由上述推论可知

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

根据连续函数的介值定理, 在区间 $[a,b]$ 上存在点 ξ, 使得 $f(\xi)$ 取得中间值 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, 这就是要证明的结果.

定理 7、定理 8 和定理 9 都有着鲜明的几何意义, 请读者自己绘图并给予解释.

我们顺便提几条关于积分中值定理的注释. 首先, 定理中的 ξ, 事实上可取在区间的内部, 即 $a<\xi<b$; 其次, 定理中连续性的条件是必不可少的; 最后, 中值定理还有一个有趣的 “加权” 推广, 这也是积分学中值得注意的结果. 所有这些, 请读者参考习题 5.1 中第 7 题和第 9 题.

5.1.5 微积分基本定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. 由定理 5 可知, 对任一区间 $[a',b'] \subseteq [a,b]$, f 在 $[a',b']$ 上也可积; 这一积分依赖于积分限 a' 和 b', 即是两个积分限 a' 和 b' 的函数. 为了方便地讨论 (积分) 对于积分限的这种依赖关系, 我们将下限取为一个固定的数; 习惯上就取为 a, 而上限则用 x 来表示, 以表明我们将上限看作变量. 于是, 我们记

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

因为对每个 $x \in [a,b]$, 上式右端均唯一确定了一个数值与之对应, 因此 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个新的函数，称为**变上限的积分**.

注意，“变上限积分” 不是一个新的积分，只不过是在区间 $[a,x]$ 上的定积分，其中，积分的上限有一个可活动的范围.

定理 10 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 的变上限积分 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

证 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 所以 f 在这区间上有界，即存在 M 使得 $|f(t)| \leqslant M, \quad a \leqslant t \leqslant b$. 设 $x_0 \in [a,b]$, 则对 $x_0 \leqslant x \leqslant b$, 根据定理 5, 定理 7(iii) 及定理 8, 我们有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right| \leqslant \int_{x_0}^x |f(t)|dt \leqslant M(x-x_0).$$

因此，任给一个正数 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $0 \leqslant x-x_0 \leqslant \delta$ 时, 就有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$, 这就证明了 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处右连续. 同样可证明 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续. 因此 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

定理 11 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(i) 如果 f 在 $x = x_0$ 处连续，则 $f(x)$ 的变上限积分 φ 在 $x = x_0$ 处可微, 且 $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.(在 $x_0 = a$ 或 b, $\varphi'(x_0)$ 当然理解为 φ 的右导数或左导数.)

(ii) 如果 $f(x)$ 在整个区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 的变上限积分在 $[a,b]$ 上可微, 并且

$$\varphi'(x) = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad \text{或} \ \ d\varphi(x) = d\int_a^x f(t)dt = f(x)dx.$$

即 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 所以我们也有这样的结论：**连续函数一定有原函数**.

证　首先考虑 x_0 不是 a 或 b 的情形. 由于 f 在 x_0 处连续, 则对给定的 $\varepsilon > 0$, 有一个正数 δ, 使得在 $|t - x_0| < \delta$ 且 $a \leqslant t \leqslant b$ 时,

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

因此, 若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 而且 $a \leqslant x \leqslant b$, 则由上一不等式, 可推出

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]dt\right| < \varepsilon.$$

这就直接证得了 $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

若 x_0 为 a 或 b，将上面的证明作显然的修改, 便能得出所说的结果.(ii) 是 (i) 的直接推广.

对于连续函数 $f(x)$ 来说，因为 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$，都可以表示为 $F(x) = \varphi(x) + c$. 这样就有了下面的重要结果.

定理 12　设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数，则

(i) $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ (即 $dF(x) = f(x)dx$) 都可以表示成下列形式

$$F(x) = \varphi(x) + c = \int_a^x f(t)dt + c$$

(ii) 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

这一等式也常表示为

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

这就是所谓的Newton—Leibniz **(牛顿—莱布尼兹) 公式**，定理 12 也称为**微积分基本定理**. 它揭示了刻划局部性质的微分与反映整体性质的积分这两个概念之间的深刻的互逆关系.

值得一提的是：从定义来看, 原函数 (即微分的逆运算) 和 (定) 积分原本是两件事情, 在揭示了它们之间的关系后, 我们才有理由使用 “不定积分” 这一术语称呼原函数, 并且还将原函数的全体记为 $\int f(x)dx$.

从计算上看，如果可以计算函数 f 的积分，则可求出 f 的一个原函数. 反之，要计算一个函数 $f(x)$ 的积分，如果我们知道它的一个原函数 $F(x)$，则积分就是原函数在积分上、

下限取值的差. 因此能成功地应用 Newton—Leibniz 公式计算积分, 关键在于我们能另有方法求出一个初等函数 $F(x)$ 满足定理 12 的要求, 这正是第四章中工作的一个价值. 例如, 对于

$$F(x)=\frac{x^3}{3} \quad 和 \quad f(x)=x^2,$$

则在 $[a,b]$ 上有 $F'(x)=f(x)$, 由此就求出了前面例 3 中的积分.(类似地可求得例 1 和例 2 中的积分.)

然而,Newton—Leibniz 公式只是部分地解决了积分的计算问题. 这主要有两个方面的原因. 其一, 我们在第四章中已提到过, 存在许多连续函数 (例如 $f(x)=e^{-x^2}$), 虽然它们的原函数一定存在, 但原函数不能表示成为初等函数. 其二, 存在许多函数, 虽然在指定的区间上可积, 但却没有原函数, 即不能成为某个函数的导数 (参考定理 3 以及习题 3.3 中第 15 题). 因此, 计算这两类函数的积分, Newton—Leibniz 公式便无甚用处.(例如, 作为例 1—例 3 的对比, 前面例 4 中的函数 $J(x)$, 在所说的区间上便没有原函数, 因此我们不能直接用 Newton—Leibniz 公式来计算例 4 中的积分.)

由于 Newton—Leibniz 公式的重要性, 我们因此提及其下述的加强结果, 它在较弱的条件下给出了相同的结论.

定理 13 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且

$$F'(x)=f(x), \quad a<x<b.$$

则我们有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

证 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 是区间 $[a,b]$ 的任一个划分. 则

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big)=F(b)-F(a).$$

显然 $F(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上满足微分中值定理的条件. 因此, 存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_i)\Delta x_i.$$

于是我们得出

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=F(b)-F(a).$$

上式左边是相应于前述划分的一个积分和. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\to 0$ 时, 这个积分和趋于 $\int_a^b f(x)dx$, 从而导出了所说的等式.

5.1.6 积分的计算

应用 Newton—Leibniz 公式计算积分, 原则上只需求出被积函数的原函数. 然而, 很多情形下, 直接求原函数将导致许多麻烦和困难, 而 (结合) 应用积分的某些性质则可使问题

大大简化. 因为 Newton—Leibniz 公式建立了微分和积分之间的关系，所以通过这个公式，可以将微分中两个重要的性质反映到积分中来，这就是**微分中的复合函数求导法则，对应积分中的换元法则；微分中函数求导的链式法则对应积分中的分部积分法则**.这两个法则, 是积分理论中非常基本和重要的结果, 为此我们因此首先讲述这两个法则. 读者可通过两个法则的证明, 再次体会微分与积分的关系.

定理 14 (定积分的换元法则) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 而函数 $x=\varphi(t)$ 满足下面条件

1. $\varphi(\alpha)=a$ 及 $\varphi(\beta)=b$, 且当 t 从 α 变到 β 时,$x=\varphi(t)$ 所确定的值全部含于区间 $[a,b]$;
2. 函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$) 上有连续的微商 $\varphi'(t)$. 则有下面的换元公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

证 首先设 $\alpha<\beta$. 由定理中的条件可知, 上式两端的积分都存在, 且函数 $f(x)$ 和 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 分别在区间 $[a,b]$ 及 $[\alpha,\beta]$ 上有原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$(在 $[a,b]$ 上) 的一个原函数，则根据复合函数的求导法则可知，$F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个原函数. 由 Newton—Leibniz 公式, 我们有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

以及

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a).$$

这就证明了所说的等式.

当 $\alpha>\beta$ 时证明可类似地进行.

注记 与不定积分的换元法相比, 定积分的换元法要简单许多; 因前者最终应将新变量换回原来的积分变量, 而在定积分的换元法中则无需这样做; 因此, 定理 14 中不要求变量替换函数 $x=\varphi(t)$ 有反函数 (试比较 §4.1, 定理 2). 此外, 请读者注意, 定理 14 中, 新的积分上、下限 (即 α 和 β) 的大小无关紧要; 这是因为, 定理的证明依靠了 Newton—Leibniz 公式, 而这在 (积分) 下限大于上限时仍然成立.

定理 15 (定积分的分部积分法) 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的微商 $u'(x)$ 与 $v'(x)$. 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx;$$

或者

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

证 由微分中的求导法则

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

及已知条件可知, 上式的两边都是连续的，因此可积. 对上式两边进行积分，并用 Newton—Leibniz 公式, 得出

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

即得所要证明的等式.

例 5 计算 $\int_0^2 |x^3-1|dx$.

解 求 $|x^3-1|$ 的原函数较为麻烦. 我们应用积分的区间可加性以及 Newton—Leibniz 公式, 得出

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^3-1|dx &= \int_0^1 |x^3-1|dx + \int_1^2 |x^3-1|dx \\ &= \int_0^1 -(x^3-1)dx + \int_1^2 (x^3-1)dx \\ &= -\int_0^1 x^3dx + \int_1^2 x^3dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 + \frac{1}{4}x^4\Big|_1^2 = 3\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 6 计算 $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx$.

解 函数 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处有一个第一类间断, 因此它在 $[-1,1]$ 上没有原函数, 从而不能直接用 Newton—Leibniz 公式计算积分.

我们首先由积分的区间可加性, 得出

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x dx + \int_0^1 \operatorname{sgn} x dx.$$

在区间 $[-1,0]$ 上, 将 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处的值, 改变为函数在 $x=0$ 处的左极限值 -1, 则被积函数在 $[-1,0]$ 上连续 (注意, 这一手续不改变函数的可积性及相应的积分值), 进而由 Newton—Leibniz 公式得

$$\int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x dx = \int_{-1}^0 -dx = -x\Big|_{-1}^0 = -1.$$

同样, 在区间 $[0,1]$ 上, 将 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处的值, 改变为函数在 $x=0$ 处的右极限值 1, 类似地得 $\int_0^1 \operatorname{sgn} x dx = 1$. 因此所求的积分为 0.

如果用加强的 Newton—Leibniz 公式 (定理 13), 则计算更为直接:$f(x)=-x$ 在区间 $[-1,0]$ 上连续, 在其内部可导, 且导数为 $\operatorname{sgn} x$. 故由这定理得出 $\int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x dx = -1$. 同样可求出 $\int_0^1 \operatorname{sgn} x dx = 1$.

例 7 计算 $\int_{-1}^0 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解 可以先求被积函数的不定积分. 对 $x \neq 0$, 将被积函数的分子、分母同时除以 x^2, 得出

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx &= \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]+C.\end{aligned}$$

但这样求出的原函数限制了 $x \neq 0$, 不能直接用于计算问题中的定积分.

为了用上面的结果计算 (定) 积分, 我们采用下面的办法: 记

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right],\quad -1\leqslant x<0.$$

由于 $F(0-0)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, 我们定义 $F(0)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, 则 $F(x)$ 在 $[0,-1]$ 上连续, 且在这区间上的导数正是 $\frac{x^2+1}{x^4+1}$ (参见 §4.1, 例 11). 因此, 由 Newton—Leibniz 公式,

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=F(0)-F(-1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

另一种计算方法如下: 由于变上限积分 $\int_{-1}^{x}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt\,(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 是 x 的连续函数, 故 (在区间 $[-1,x]$ 上用 Newton—Leibniz 公式)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt&=\lim_{x\to 0-0}\int_{-1}^{x}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt=\lim_{x\to 0-0}[F(x)-F(-1)]\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.\end{aligned}$$

注意, 也可以避免上述那样除以 x^2, 而求得 $\frac{x^2+1}{x^4+1}$(在其整个定义域上) 的一个原函数为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

用这一原函数及 Newton—Leibniz 公式可直接求得问题中的积分值.

例 8 求 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\,(a>0)$.

解 令 $x=a\sin t\,(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$. 则当 $x=0$ 时,$t=0$; 当 $x=a$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$. 所以 (由定积分的换元法则)

$$\begin{aligned}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\cos 2t]dt\\&=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2.\end{aligned}$$

例 9 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\,(n=0,1,2,\cdots)$.

解 作替换 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 则当 $x=0$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$; 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时;$t=0$, 故由积分的换元法得出

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx.$$

因此我们只需求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$. 显然 $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. 对 $n\geqslant 2$, 由分部积分得到

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd(-\cos x)\\&=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}.\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 xdx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx.\end{aligned}$$

即

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqslant 2).$$

由这递推公式, 我们得出

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)}{2n} I_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

类似地得到

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n-2)}{(2n-1)} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

综合起来, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

例 10 计算 $I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$.

解 分部积分得出

$$I = \arctan x \cdot \ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

为计算后一积分, 令 $x = \tan\theta$, 这里 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则积分变为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta) d\theta$. 但

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\theta},$$

故有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\theta d\theta.$$

作替换 $\theta = \frac{\pi}{4} - \varphi$(这里 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 0), 可将右边第二个积分化为第一个积分, 从而

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2,$$

于是 $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

5.1.7 用积分定义函数

在第四章和本章中，我们分别进了两个概念，一个是不定积分（原函数），一个是定积分. 通过 Newton—Leibniz 公式，我们知道，对于存在原函数的被积函数，其在区间上的定积分，就是原函数在区间的两个端点值的差. 反之，一个函数的原函数，也可以通过其变上限积分给出. 因此不管是求一个函数的原函数，还是求这个函数的定积分，我们通称为求函数的积分.

大量的例子说明，初等函数的原函数仍是初等函数，在第四章中，我们都是尽可能详尽地列出可用初等函数来积分的函数（即把函数的积分结果，用初等函数来表示）.

但是，对于下列初等函数的不定积分

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{1}{\ln x}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \sin x^2 dx,$$

或

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}},\quad \int \sqrt{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}dx$$

试图用初等函数表示积分的结果实际上是不可能的.

因此，一味追求初等函数的积分能够表示成初等函数的要求，本身就是不合理的. 突破这样的限制，反而开拓了我们的视野.

对于一个连续函数来说，其积分是一定存在的（见第二节），它的变上限积分不但连续，而且可导. 当它的积分能够通过我们已经熟知的函数（初等函数）来表示时，表明我们熟知的函数也可以用积分来定义（虽然它们可能有原来的出处）. 当积分不能用熟知的函数表示时，我们不妨引入这个积分作为一个新产生的函数. 因此，积分的过程乃是产生新函数的一个方法. 下面举两个例子.

1° **用积分定义对数函数**

虽然对数函数是一个熟知的初等函数，我们将看到，用一个有理函数 $\frac{1}{x}$ 的积分来定义它，同样可以得到它的一系列性质. 被积的有理函数 $\frac{1}{x}$ 显然是定义在 $x>0$ 上的连续函数.

现在假设我们事先不知道什么是对数函数，对于 $x>0$，通过积分定义

$$f(x)=\int_1^x \frac{1}{u}du$$

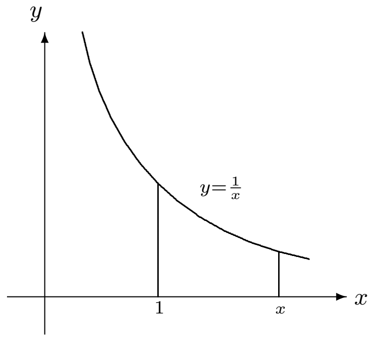

图 5.12

它是定义在 $x>0$ 上一个连续而且可导的函数. 从几何上看，它是曲线 $y=\frac{1}{u}$ 覆盖下的面积

因此，无论是几何直观，还是根据积分的性质，我们首先得到上式所定义的函数满足 $f(1)=0$，$f(x)$ 严格单调递增，因此当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$.

对于 $x>0,\ \ y>0$，函数 $f(x)$ 具有下列性质：

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

这是因为

$$f(xy)=\int_1^{xy}\frac{1}{u}du=\int_1^x\frac{1}{u}du+\int_x^{xy}\frac{1}{u}du$$

这里，用到了积分对积分区间的可加性. 对上式右边的第二个积分进行换元 $u=xt$，有

$$\int_x^{xy}\frac{1}{u}du=\int_1^y\frac{1}{xt}xdt=\int_1^y\frac{1}{t}dt$$

所以性质成立. 特别，

取 $y=x$，得

$$f(x^2)=2f(x)$$

取 $y=x^{-1}$，则有

$$f(x)+f(x^{-1})=f(1)=0,\quad \text{即}\quad f(x^{-1})=-f(x)$$

上面结果的自然推广是

$$f(x^n)=nf(x),\quad x>0,\quad n\text{ 是任何(正或负)的整数}$$

对于任何正的有理数 $\alpha=\frac{m}{n}$，记 $x^\alpha=y$，因此 $x^m=y^n$，则

$$f(x^m)=f(y^n)\quad\Longrightarrow\quad mf(x)=nf(y)$$

所以

$$f(x^\alpha)=\alpha f(x),\quad x>0$$

下面证明

$$f(e)=1$$

根据数列的极限, 我们知道

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

注意到函数 $f(x)$ 的连续性, 有

$$\begin{aligned}f(e)&=f\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}nf\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

利用积分中值定理, 可知存在一点 $\xi\in\left[1,1+\frac{1}{n}\right]$, 使得

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right)=\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{u}du=\frac{1}{\xi}\frac{1}{n}$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时,$\xi\to 1$, 所以得 $f(e)=1$.

我们把上面定义的函数记做 $\log x$ 或 $\ln x$.

注记 类似于用积分定义对数函数的过程, 我们也可以积分过程和求反函数的过程来引入三角函数, 为此只需取

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$$

和

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

作为函数 $\arctan x$ 和 $\arcsin x$ 的定义, 然后通过求反函数得到三角函数. 用这种方式来定义三角函数, 没有涉及直观的几何, 也没有”角”的概念. 可以直接根据上述定义证明三角函数的基本性质.

2° **椭圆积分与椭圆函数**

如果说上面用积分定义的函数仍然是我们原先熟知的初等函数的话, 超出初等函数的第一个重要例子是椭圆积分以及它所定义的函数. **椭圆积分是这样一些积分, 它的被积函数是三次或四次多项式的平方根的有理函数**. 在这些积分中, 特别重要的又是下列椭圆积分所定义的函数 (称为椭圆函数) 和反函数

$$u(s)=\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

其中 k 是一个参数, 当 $k=0$ 时, 上述积分就给出了 $\arcsin x$. 我们再次强调, 这样的积分是不能用初等函数表示的. 但是, 它已被人们充分研究过, 而且还象三角函数那样, 其值已经被编制成表.

在一些物理和几何问题的研究中 (如单摆问题的研究中以及椭圆弧长的计算中, 我们将在后续内容中讨论), 不少积分最终可化为椭圆积分. 例如

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

通过变换 $u=\sin x$ 可化为椭圆积分.

我们的目的只是想展示一下即使是通过对初等函数的的积分, 仍然能构造一些新的函数, 所以在此不讨论椭圆积分的种种性质.

5.1.8 Taylor 展开中余项的积分表示

利用积分，我们再次讨论关于 Taylor 公式中余项的估计. 这种余项的积分表示，从另一个侧面反映了微分与积分的关系.

首先还是从最简单的情况开始. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，记

$$R=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$

是 Taylor 一阶展开的余项. 如果把 a 看成变量 (注意这时 $f(x)$ 和 x 看成是常数)，并对其求导，得

$$R'(a)=-f'(a)-f''(a)(x-a)+f'(a)=-f''(a)(x-a)$$

此式对任何区间中的 a 都成立. 从上式出发，首先对 a 积分，并注意到当 $a=x$ 时，$R(x)=0$，有

$$R(a)=\int_a^x f''(t)(x-t)dt$$

其次利用微分中值公式得

$$\frac{R(a)-R(x)}{x-a}=\frac{R(a)}{x-a}=-R'(\xi)=f''(\xi)(x-\xi)$$

所以

$$R(a)=(x-a)(x-\xi)f''(\xi)$$

其中 ξ 是介于 a 和 x 之间的一个点.

将上述思想推广到更高阶的展开中去，设函数 $f(x)$ 在区间中具有直到 $n+1$ 阶的连续导函数. 考虑函数在 $x=a$ 处的 Taylor 展开式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n$$

这里，余项 R_n 可以表示成

$$R_n(a)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

现在，将 a 看成变量，所以当 $a=x$ 时，$R_n(x)=0$. 如果等式的两边对 a 求导，则

$$\begin{aligned}R_n'(a)=&-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\frac{f'(a)}{1!}-\frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)\\&-\cdots-\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\end{aligned}$$

消去绝大部分项后，有

$$R_n'(a)=-\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

对上式进行积分，并注意到 $R_n(x)=0$，有

$$R_n(a)=\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

这就是Taylor **展开中余项的一个精确的积分表示式**.同样，利用微分中值公式有

$$\frac{R(a)-R(x)}{x-a}=\frac{R(a)}{x-a}=-R'(\xi)=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

所以

$$R(a)=\frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)$$

其中 ξ 是介于 a 和 x 之间的一个点.

利用上面的结果，我们可以得到其他形式的余项表示式.

1° **余项的 Lagrange 表示式：** 在积分表示式中，注意到被积函数部分的 $(x-t)^n$ 在 a 和 x 之间不变号! (不管是 $a<x$ 或 $a>x$)，因此根据积分中值定理 (习题 5.1: 9)，存在一点 ξ 介于 a 和 x 之间，使得

$$R_n=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x(x-t)^n dt=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

再次令 $\xi=a+\theta h,\ h=(x-a),\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$，就有

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

2° **余项的 Cauchy 表示式：** 将 $\xi=a+\theta h,\ h=(x-a),\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$ 代入

$$R(a)=\frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)$$

中，并注意到 $x-\xi=(x-a)(1-\theta)$，就有

$$R(a)=\frac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\xi)$$

注记 Taylor 展开式以及它的余项，也可以直接从

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt=\int_a^x f'(t)d(t-x)$$

反复进行分部积分推导出来，例如

$$\begin{aligned}f(x)-f(a)&=\int_a^x f'(t)dt=\int_a^x f'(t)d(t-x)\\&=f'(t)(t-x)\Big|_a^x-\int_a^x f''(t)(t-x)dt\\&=f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(t)(x-t)dt\end{aligned}$$

读者可以继续往下推导，给出一般结果.

习题 5.1

1. 指出下面的哪些函数在区间 $[0,1]$ 上可积, 并说明理由.

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases};$$

$$(2)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases};$$

$$(3)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

2. 证明,Dirichlet 狄利克雷函数在任意区间 $[a,b]$ 上不可积. (因此有界的函数未必可积.)

3. 举例说明, 一个函数的绝对值函数在 $[a,b]$ 上可积, 不能保证这函数在 $[a,b]$ 上可积. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出这样一个例子. 比较习题 2.1 中第 5 题.)

4. (1) 设可积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负, 且在一点 c 处连续 (这里 $a\leqslant c\leqslant b$). 若 $f(c)>0$, 则 $\int_a^b f(x)dx>0$. (这可与定理 7(i) 作比较.)

(提示: 若 c 不是区间端点, 则由已知条件可知 (见习题 2.1, 第 11 题), 存在一个小区间 $[c-\eta,c+\eta]\subset[a,b]$ 及一个正数 γ, 使 f 在这区间上有 $f(x)\geqslant\gamma$, 由此及

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c-\eta}f(x)dx+\int_{c-\eta}^{c+\eta}f(x)dx+\int_{c+\eta}^b f(x)dx,$$

易推出结果. 若 $c=a$ 或 b, 可类似地处理.)

(2) 证明, 若 f 是区间 $[a,b]$ 上非负的连续函数, 且不恒为零, 则 $\int_a^b f(x)dx>0$.

(3) 举例说明, 有这样的可积函数 f, 在区间 $[a,b]$ 上非负且不恒为零, 但 $\int_a^b f(x)dx=0$.

5. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 则

$$(b-a)f(a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant(b-a)f(b).$$

(若 f 在 $[a,b]$ 上单调递减, 也有一个类似的不等式.)

6. 证明下列不等式:

(1) $\int_0^{2\pi}|a\sin x+b\cos x|dx\leqslant 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$ (a,b 为常数).

(2) $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx\leqslant\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ ($m>0,n>0$, 均为常数).

7. (1) 证明, 积分中值定理 (定理 9) 中的中值 ξ, 可取在区间 $[a,b]$ 内部.

(提示: 由这定理的证明可见, 只要指出当 f 的最大值 M(或最小值 m) 在区间端点取得, 且等于 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 时, 结论成立. 可以用第 4 题中 (2).)

(2) 举例说明, 积分中值定理中连续性的条件是必要的.

(提示: 在 $[-1,1]$ 上,$f(x)=x$ 的积分为 0; 而改变 f 在某个点处的值, 不改变积分值.)

8. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 若 $\int_a^b f(x)dx=0$, 则 f 在 (a,b) 中至少有一个零点.(因此, 由函数的积分这一整体信息, 能够推断函数值的某些性质.)

9. (1) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 而 g 在 $[a,b]$ 上可积且是非负 (或非正) 的. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

这一结果是积分中值定理的 (加权) 推广.(提示: 与积分中值定理类似地证明.)

(2) 举例说明,(1) 中对于函数 g 的假设是必不可少的.(提示: 在 $[-1,1]$ 上, 取 $f(x)=g(x)=x$.)

注 加权的积分中值定理, 也提供了估计积分的一个手段: 当 $\int_a^b\varphi(x)dx$ 不易计算时, 可试作将 $\varphi(x)$ 写成 $f(x)g(x)$, 其中 f 和 g 满足上面 (i) 中的条件, 且使得 $\int_a^b g(x)dx$ 易于计算. 由此导出

$$m\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^b\varphi(x)dx\leqslant M\int_a^b g(x)dx,$$

这里 M,m 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最大值及最小值. 易于看到,$\int_a^b\varphi(x)dx$ 这一上、下界估计, 优于直接用定理 8 所得的结果.

10. 举例说明: 在定理 11 中, 函数 f 在 $x=c$ 处连续, 不是 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $x=c$ 处可导的必要条件.(提示: 参考例 4.)

11. 求下列函数的导数.

(1) $f(x)=\int_0^{x^2}\sin t^2dt$; (2) $f(x)=\int_x^1\frac{1}{1+t^2+\cos^2 t}dt$;

(3) $f(x)=\int_x^{x^2}e^{-t^2}dt$; (4) $f(x)=\sin\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin t^2dt\right)dy\right)$.

12. 对下面的函数, 求 $(f^{-1})'(0)$.

(1) $f(x)=\int_0^x[1+\sin(\sin t)]dt$;

(2) $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$.

(提醒:f^{-1} 表示函数 f 的反函数.)

13. 设函数 $f(x)$ 处处连续. 记 $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$, 求 $F'(x)$.

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为正值连续函数. 证明, 当 $x>0$ 时, 函数

$$G(x)=\int_0^x tf(t)dt\Big/\int_0^x f(t)dt$$

单调递增.

15. 用 Newton-Leibniz 公式计算下列积分.

(1) $\int_0^\pi\sin xdx$; (2) $\int_0^1 x^\alpha dx,\ \alpha$ 为常数,$\alpha>0$;

(3) $\int_1^2\ln xdx$; (4) $\int_2^3\frac{1}{2x^2+3x-2}dx$.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$, 求 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$; 并研究 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的可微性.

17. 计算下面平面图形的面积.

(1) 由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 所围成的图形;

(2) 由曲线 $y=x^2,y=\frac{1}{4}x^2$ 及 $y=1$ 围成的图形.

18. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^3dt}{x^4}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin^3 x}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2dt$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}},\ p$ 是常数, $p>0$.

19. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b e^{-nx^2}dx$, 这里 a,b 为常数, 且 $0<a<b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. (提醒: 若用积分中值定理, 所说的积分为 $\frac{\xi^n}{1+\xi}$, 其中 $0<\xi<1$; 但这时 ξ 与 n 有关, 故在 $n\to\infty$ 时, 不能断言 $\xi^n\to 0$.);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}dx$, 这里 a 为常数, 且 $a>0$.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续. 证明:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$;

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

(本题在几何上看是十分明显的.)

21. 设 $f(x)$ 为具有周期 T 的连续函数, 证明, 对任意的常数 a, 有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

(提示: 证明 $\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$, 这在几何上看是显然的.)

22. 计算下面的积分.

(1) $\int_0^{2\pi}|\cos x|dx$;　　(2) $\int_{-3}^4 [x]dx$;

(3) $\int_{-1}^1 \cos x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$;　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^x}\cos^3 xdx$;

(5) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx$;　　(6) $\int_0^1 x\arcsin xdx$;

(7) $\int_0^1 x^3e^xdx$;　　(8) $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$;

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}dx$;　　(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$, ($a>0,b>0$ 都是常数);

(11) $\int_{-1}^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx$;　　(12) $\int_0^{2\pi}\sin^6 xdx$;

(13) $\int_{-1}^1 e^{|x|}\cdot\arctan e^xdx$;　　(14) $\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}dx$.

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx;$$

并用这一结果计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

24. 证明:$\frac{1}{6}<\int_0^1 \sin x^2dx<\frac{1}{3}$. (提醒: 求问题中的积分将是徒劳的. 解答本题的一个方法在本节的正文中已提到过.)

25. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 我们 (自然地) 将 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 定义为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

对下列函数, 计算在指定区间上的平均值, 以及最大、最小值.

(1) $f(x)=x$, 区间为 $[0,1]$ 及 $[0,10^5]$;

(2) $f(x)=e^{-x}$, 区间为 $[0,1]$ 及 $[0,10^5]$;

(3) $f(x)=xe^{-x}$, 区间为 $[0,1]$ 及 $[0,10^5]$.

建议读者将所得的结果列成一个便于比较的表格, 以对积分的意义, 估值积分的定理 8 的力度留下一个印象.(参考上面第 9 题的注释.)

26. 考虑积分 $I=\displaystyle\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$.

(1) 试给出 I 的尽可能好的上、下界估计;

(2) 求出 I 的近似值, 精确到 0.0001. (提醒: 本题用本节中的知识就能 (容易地) 解决.)

27. (1) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减的连续函数. 证明, 对任意 $\alpha\in(0,1)$, 有

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)dx.$$

(2) 若仅假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 证明同样的结论.

(提示:(1) 有几种证法. 第一种方法: 利用 $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx=\alpha\int_0^1 f(\alpha x)dx$; 第二种方法: 考虑 $g(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx\,(0<\alpha<1)$, 证明 $g(\alpha)$ 是减函数. 注意, 这两种方法都需要 f 连续这一假设, 因此都不适用于解决 (2).)

28. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $|f'(x)|\leqslant M$(对任意 $x\in[a,b]$).

(1) 若 $f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b |f(x)|dx\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2;$$

(2) 若 $f(a)=f(b)=0$, 证明

$$\int_a^b |f(x)|dx\leqslant\frac{M}{4}(b-a)^2.$$

(提示: 通过对积分的上限求导能得出 (1) 的一个证明, 即考虑函数

$$G(t)=\int_a^t |f(x)|dx-\frac{M}{2}(t-a)^2,\quad a\leqslant t\leqslant b.\ )$$

29. 利用变换 $u=\sin x$, 将下列积分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

变为椭圆积分的形式.

30. 利用

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)d(t-x)$$

经过多次分部积分，详细推导出 Taylor 展开式和它的余项的积分表示.

§5.2 函数的可积性

本节着重研究什么样的函数是可积的. 我们的重点是强调研究问题的方法. 由于可积函数一定是有界的 (§5.1 中的定理 1), 所以本节中我们总是假定在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 是有界的, 并设它的上下确界分别是 M 和 m

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a,b]$$

5.2.1 函数的可积性

在定积分的定义中, 有两个关键点:

一是区间的分割

$$T: \ \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是任意的 ($x_i, \ i = 1, \cdots, n$ 称为分割点), 而且在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中所取的点 ξ_i 是任意的.

二是一个极限过程, 即当分割的最大宽度 $\|T\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \to 0$ 时, Riemann 和的极限存在.

根据第一个关键点, 对于给定的分割 T, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界分别为

$$M_i = \sup\{f(x): \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad m_i = \inf\{f(x): \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

并记

$$\omega = M - m; \quad \omega_i = M_i - m_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

分别称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 和 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅.

定义

$$\overline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}(T) = \sum_{i=1} m_i \Delta x_i$$

称之为函数 $f(x)$ 的"Darboux 上和"与"Darboux 下和". 显然, 对于任意的点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 有

$$m \leqslant m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i \leqslant M, \ \ i = 1, \cdots, n$$

因此函数 $f(x)$ 的任意一个 Riemann 和

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

一定介于它的 Darboux 上和与 Darboux 下和之间, 而且三种和都是有界的

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}(T) \leqslant S(T) \leqslant \overline{S}(T) \leqslant M(b-a)$$

现在考虑分割. 注意到，如果 T' 是分割 T 中增加一个分割点形成的分割，即

$$T:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b,$$
$$T':\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k' < x_k < \cdots < x_n = b.$$

则函数 $f(x)$ 分别在两个子区间 $[x_{k-1}, x_k']$ 和 $[x_k', x_k]$ 的上确界不会超过它在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的上确界（部分的上确界不会超过整体的上确界）

$$M_k \geqslant M_k' = \sup\{f(x):\ x \in [x_{k-1}, x_k']\}, \quad M_k \geqslant M_k'' = \sup\{f(x):\ x \in [x_k', x_k]\}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\overline{S}(T) - \overline{S}(T') &= M_k(x_k - x_{k-1}) - M_k'(x_k' - x_{k-1}) - M_k''(x_k - x_k') \\ &\geqslant M_k(x_k - x_{k-1}) - M_k(x_k' - x_{k-1}) - M_k(x_k - x_k') = 0.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\bar{S}(T) - \bar{S}(T') &\leqslant M(x_k - x_{k-1}) - m(x_k' - x_{k-1}) - m(x_k - x_k') \\ &= \omega(x_k - x_{k-1}) \leqslant \omega\|T\|.\end{aligned}$$

即

$$\bar{S}(T) \geqslant \bar{S}(T') \geqslant \bar{S}(T) - \omega\|T\|.$$

这个结果，对于分割 T 和通过增加任意多个分割点所得到的新的分割 T' 之间也是成立的；对于 Darboux 下和也有对应的结果，即有

定理 1 设 T' 是通过对分割 T 添加 l 个分割点所得到的新的分割，则

$$\underline{S}(T) \leqslant \underline{S}(T') \leqslant \underline{S}(T) + l\omega\|T\|,$$
$$\bar{S}(T) \geqslant \bar{S}(T') \geqslant \bar{S}(T) - l\omega\|T\|.$$

定理 1 说明，**在对分割加密（即分割点的密度增加）的过程中，上和不增，下和不减，具有一种“单调性”**.

下面分析 Darboux 上和与下和之间的进一步关系. 设 T_1 和 T_2 分别是两个任意的分割，则将两个分割的分割点合起来形成一个新的分割 T，则 T 既是对 T_1 的加密，也是对 T_2 的加密后所得到的分割，所以

定理 2 对于区间 $[a, b]$ 的任意两个分割 T_1 和 T_2，一个分割对应的下和，总是不超过另一个分割对应的上和，即

$$\underline{S}(T_1) \leqslant \underline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T_2)$$

有了上面的分析，我们希望观察 Darboux 上和与下和当 $\|T\| \to 0$ 时的极限. 因为上和与下和都是有界的，而且具有某种单调性（定理 1），类比于“单调有界数列有极限，而

且极限就是数列的上确界或下确界”的事实，所以对于函数 $f(x)$，我们考虑所有上和（下和）组成的集合的下确界（上确界），记

$$\overline{I}=\inf_T \overline{S}(T),\quad \underline{I}=\sup_T \underline{S}(T)$$

称为函数 $f(x)$ 的**上积分**和**下积分**. 作为定理 3 的直接推论，对于任意两个分割，有不等式

$$\underline{S}(T_1)\leqslant \underline{I}\leqslant \overline{I}\leqslant \overline{S}(T_2)$$

定理 3 对于任意一个有界函数 $f(x)$，有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T)=\overline{I},\quad \lim_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)=\underline{I}$$

证 我们只证明第二个公式，第一个公式的证明是类似的. 根据上确界的定义，对于任意给定的正数 ε，存在区间 $[a,b]$ 的一个分割

$$T_0:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_l=b$$

使得

$$\underline{I}\geqslant \underline{S}(T_0)>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}$$

取

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2l\omega+1}>0,$$

对于任意分割 T，只要 $\|T\|<\delta$ 时，将 T 和 T_0 的分割点合起来组成一个新的分割 T'，这时 T' 是在 T 的分割点基础上，至多增加了 T_0 的 l 个分割点（“至多”的含义是有可能分割点有重复）. 因此，由定理 1 可知，

$$\begin{aligned}\underline{S}(T)&\geqslant \underline{S}(T')-l\omega\|T\|\geqslant \underline{S}(T_0)-l\omega\|T\|\\&>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}-l\omega\frac{\varepsilon}{2l\omega+1}>\underline{I}-\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)=\underline{I}$$

回顾一下上面的定义，记 $\omega_i=M_i-m_i$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$，$(i=1,\cdots n)$ 上的振幅，则

定理 4 有界函数 $f(x)$ 的 Darboux 上和与下和的极限相等，充分必要条件是

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i=0$$

这个结果的证明是简单的，只要注意到于任意分割 T，

$$\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i=\overline{S}(T)-\underline{S}(T)$$

即可.

至此，对于一个有界函数 $f(x)$，当 $\|T\| \to 0$ 时，虽然并不知道它的任意 Riemann 和 $S(T)$ 是否有极限，但它的 Darboux 上和 $\overline{S}(T)$ 与下和 $\underline{S}(T)$ 的极限是存在的. 由关于三种和的不等式

$$\underline{S}(T) \leqslant S(T) \leqslant \overline{S}(T)$$

立刻可知，如果 Darboux 上和与下和的极限相等，则任意的 Riemann 和有极限.

反之，如果函数 $f(x)$ 可积，即它的 Riemann 和有极限，即存在一个数 I，对于任意的正数 ε，存在一个正数 δ，使得当分割 T 满足 $\|T\| < \delta$ 时，有

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \cdots, n$ 成立, 因而分别对每一个小区间中取上 (下) 确界, 有

$$I - \varepsilon < I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} < I + \varepsilon$$

即上和与下和的极限相等.

这样我们就有了最终的结果

定理 5 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界，则函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件是它的 Darboux 上和与下和的极限相等，或者说

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$$

其中，$\omega_i = M_i - m_i$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$，$(i = 1, \cdots n)$ 上的振幅.

5.2.2 可积的函数类

现在我们来检查一下哪些函数是可积的.

定理 6 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界单调，则 $f(x)$ 可积.

证 不妨设 $f(x)$ 单调递增. 对于任意分割 T，有

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant \|T\| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \|T\|(f(b) - f(a))
\end{aligned}$$

这里注意到单调递增函数在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅就是函数在两个端点函数值的差，所以

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i = 0$$

定理 7 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续 (因而有界)，则 $f(x)$ 可积.

证　因为闭区间上连续函数一定是一致连续的，而且连续函数一定能够取到上（下）确界，所以对任意给定的正数 ε，一定存在一个正数 δ，使得，当任意两点 $x, x' \in [a,b]$ 满足 $|x-x'|<\delta$ 时，一定有

$$|f(x)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

对于 $[a,b]$ 的一个分割

$$T:\quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

设

$$M_i = f(s_i), \quad m_i = f(t_i), \quad s_i,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \cdots, n$$

则只要 $\|T\|<\delta$ 时，显然有 $|s_i - t_i| \leqslant \|T\| < \delta$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(s_i) - f(t_{i-1}))\Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 可积.

习题 5.2

1. 求区间 $[0,1]$ 上 Dirichlet 函数在区间 $[0,1]$ 上的上积分和下积分.

2. 试给出 Darboux 上和与下和的几何解释.

3. 证明，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积，而且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

4. 证明，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都可积，则 $f(x)g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且至多只有有限个间断点，证明，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

§5.3 微元法

几何与物理学中有许多整体性质的量 (记为 Q)(如曲线的弧长, 非均匀物体的重心等等), 可以应用积分来确定. 这里所谓的整体性质的量, 是指这样的量与某个区域有关, 并且还具有区域可加性. 具体地说, 在一维情况下区间 $[a,b]$ 上量 Q 的分部应满足

$$Q([a,c])+Q([c,b])=Q([a,b]),\quad a\leqslant c\leqslant b$$

(因此当 $c=a$ 时, 自然有 $Q(a)=0$)

用积分求某一个量, 在数学上看, 是说这个量的定义能够表示为一个积分. 然而, 若依据几何直观或物理意义, 我们也可将这一过程看作是求值的四个步骤: 分割 —— 近似代替 —— 求和 —— 取极限, 而将所说的量化为一个积分计算.(读者可参考前面关于曲边梯形面积的讨论.) 实际上, 上面说的四个步骤, 往往简化为两步, 这就是所谓的微元法:

在一维情况下, 设所考虑的量 Q 分布在区间 $[a,b]$ 上, 函数 $Q(x)$ 表示量 Q 对应于区间 $[a,x](a\leqslant x\leqslant b)$ 的部分量.

第一步. 在区间 $[a,b]$ 上任取一个长度为 dx 的小区间 $[x,x+dx]$, 求出局部量 $\Delta Q=Q(x+dx)-Q(x)$ 的一个近似值 $f(x)dx$, 其中 $f(x)$ 是某个函数, 使得 $\Delta Q-f(x)dx$ 是较 dx 更高阶的无穷小:

$$\Delta Q=f(x)dx+o(dx),$$

即 $f(x)dx$ 是函数 $Q(x)$ 的微分 (参考 §3.2, 定理 1). 我们也将 $f(x)dx$ 称为整体量 Q 的微元.

第二步. 将所得的微元在区间 $[a,b]$ 上 "无限累加"—— 积分, 则由 Newton–Leibniz 公式得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\int_a^b Q'(x)dx=Q(x)\Big|_a^b=Q(b)-Q(a)\\&=Q(b)=Q.\end{aligned}$$

即量 Q 可以表示为积分

$$Q=\int_a^b f(x)dx.$$

微元法的关键在于确定微元. 因为量 Q 是待求的, 部分量 $Q(x)$ 是未知的. 因此, 一般而言, 求出 $Q(x)$ 的微分, 即 ΔQ 的线性主要部分, 是一件相当困难的事.

在几何上, 微元法并无特别的意义. 下面讲的几个几何量, 以及用微元法得出的结果, 在数学上都能够严格地定义和证明; 这里的处理, 可视为一种 "拟真推理", 无非说明了导出这些结果的基本精神. 但在物理学中, 微元法则是一个较为广泛使用的方法, 因为所说的微元, 即 ΔQ 的正确的近似, 不是从数学上, 而是从物理意义上来确定的.

我们现在举几个应用微元法的例子.

5.3.1 平面曲线的弧长

设一个曲线段 $\widehat{AB}$ 的 (直角坐标) 方程为

$$y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b).$$

$\widehat{AB}$ 长度的数学定义为: 在 $\widehat{AB}$ 上任取分点 (如图 1).

$$A = M_0,\ M_1,\ \cdots,\ M_{n-1},\ M_n = B,$$

顺次连结这些分点, 得出 $\widehat{AB}$ 的一条内接折线. 若当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} M_{i-1}M_i \to 0$ 时, 折线的长度的极限存在, 就称 $\widehat{AB}$ 是可求长的, 并且这一极限就定义为 $\widehat{AB}$ 的长度.

能够证明, 当 $f(x)$ 连续可微时 (即 f' 存在且连续, 此时, 我们常说 $\widehat{AB}$ 是光滑的), $\widehat{AB}$ 一定是可求长的, 并且其长度可表示为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

这称为 (直角坐标系下的) 弧长公式.

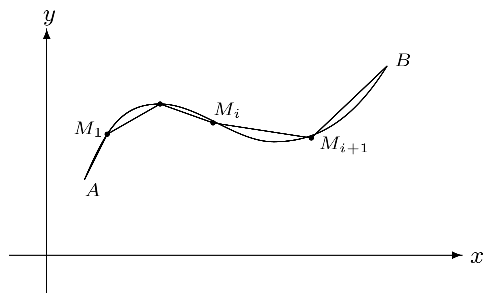

图 5.13

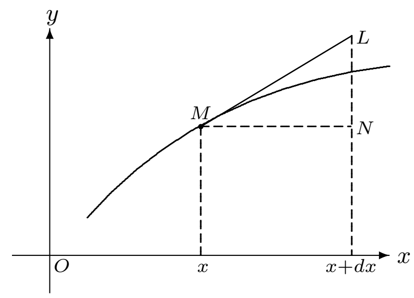

图 5.14

我们现在用微元法导出这一公式: 设 $dx > 0$, 在 $\widehat{AB}$ 上任取两点 M 和 M', 其横坐标分别为 x 与 $x + dx$. 则这两点的距离为

$$\sqrt{(dx)^2 + [f(x + dx) - f(x)]^2} = \sqrt{(dx)^2 + [f'(x)dx + o(dx)]^2}.$$

我们由此得到弧长的微元 (即弧长的微分)

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

将 ds 在区间 $[a, b]$ 上积分, 即得上述弧长公式.

由于 $dy = f'(x)dx$, 故弧长的微分也可表达为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

弧长的微分 ds 有明显的几何意义. 如图 2 所示, 在以切线 ML 为斜边的三角形 (称为微分三角形) LMN 中,$MN = dx,\ LN = dy$. 故

$$ML = \sqrt{MN^2 + LN^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

即 $ML = ds$. 因此, 几何上看, 弧长的微分就是微分三角形的斜边长.

许多问题中, 曲线弧的方程由参数方程或极坐标方程给出, 我们现在给出相应的弧长计算公式:

设曲线弧 $\widehat{AB}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的微商, 且 $x'(t), y'(t)$ 不同时为零. 我们还假定, 当参数 t 从 α 变到 β 时, 弧 $\widehat{AB}$ 上的点则从 A 变到 B, 则当 $dt > 0$ 时, 有 $ds > 0$. 于是弧长的微分现在成为

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

从而得到参数方程下的弧长公式

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \tag{4}$$

若曲线弧 $\widehat{AB}$ 由极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

给出, 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的微商. 设 θ 从 α 变到 β 时, 曲线上的点从 A 变到 B. 我们可选用 θ 作为参数, 将 $\widehat{AB}$ 的方程表示为参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

则易知 $[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = r^2(\theta) + r'^2(\theta)$, 故有弧长公式

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta. \tag{5}$$

作为一个例子, 我们来求椭圆

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的弧长, 其中 $a > b > 0$.

实际上, 由对称性, 只需考虑椭圆相应于 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 弧段的长度, 由此易知椭圆的弧长为

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t} dt,$$

其中 e 为椭圆的离心率. 继续实行换元, 令 $u = \cos t$, 则上述积分化为

$$s = 4a\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - e^2u^2}}{\sqrt{1 - u^2}} du,$$

这是一个 u 的二次多项式的平方根的有理式, 因此是一种椭圆型积分 (椭圆积分的名词也来源于此). 这样的被积函数的原函数是不能用初等函数表示的.

5.3.2 平面图形的面积

我们已讨论过平面曲线围成的面积的定义, 并且在直角坐标系下 (原则上) 能够求出图形的面积. 这里将用微元法导出极坐标下的一类图形的面积计算公式.

设曲线由极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

给出, 其中 $r(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 我们要确定这条曲线与射线 $\theta = \alpha$ 及 $\theta = \beta$ 所围成的曲边扇形的面积 (如图 5.15).

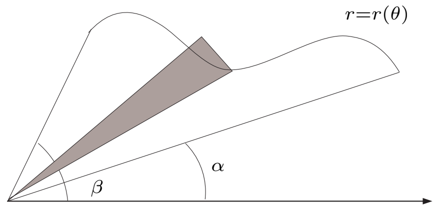

图 5.15

在区间 $[\alpha, \beta]$ 内任取一个长度为 $d\theta$ 的区间 $[\theta, \theta + d\theta]$. 在这个小区间上, 用圆弧 $r = r(\theta)$ 代替曲线弧, 得到面积微元 (图 5.15 中阴影部分的面积)

$$dS = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta.$$

因此, 所求的面积是

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta. \tag{6}$$

我们顺便提及, 由公式 (6) 可以导出某些由参数方程给出的闭曲线所围成的图形的面积.

设平面图形由封闭曲线

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

围成, 其中 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 具有连续的微商, 且 $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\psi(a) = \psi(b)$. 因为

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x},$$

由复合函数的微商法则, 得出

$$\theta'_t = \frac{d\theta}{dt} = \frac{x y'_t - x'_t y}{x^2 + y^2}.$$

故 $\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} |x y'_t - x'_t y| dt$. 若极角 θ (按反时针方向) 从 α 变到 β, 对应于参数 t 从 a 变到 b, 则此图形的面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b |\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)| dt. \tag{7}$$

例如, 我们易求出椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的面积为

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b \cos t + a \sin t \cdot b \sin t) dt = \pi ab.$$

5.3.3 旋转体的体积

关于空间立体的体积, 我们将在多元微积分中给出数学定义, 这里则完全依靠几何直观, 并用微元法导出几类立体的体积.

设空间中某个立体由一曲面与垂直于 x 轴的两平面 $x=a$ 及 $x=b$ 围成 (如图 5.16). 若过任意一点 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 且垂直于 x 轴的平面截立体所得的截面面积 $S(x)$ 为已知的连续函数, 现在要确定该立体的体积 V.

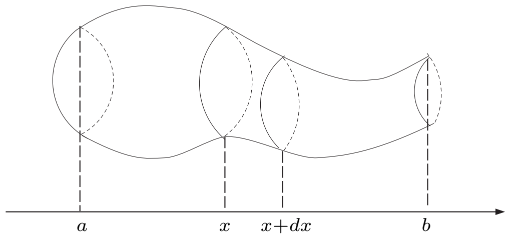

图 5.16

我们任取区间 $[a,b]$ 上一个长度为 dx 的小区间 $[x,x+dx]$, 这一小区间上的立体可近似地看作上、下底的面积都是 $S(x)$, 而高为 dx 的小的正柱体. 于是得出体积的微元为 $dV=S(x)dx$. 将 dV 从 a 到 b 积分, 则有

$$V=\int_a^b S(x)dx. \tag{8}$$

由上述原则可求出某些旋转体的体积.

设有连续函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)\geqslant 0$(对 $x\in[a,b]$). 由 $y=f(x)$, 直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形, 绕 x 轴旋转一周, 得一旋转体, 现在要求出这一旋转体的体积 V.

对区间 $[a,b]$ 上任一点 x, 作垂直于 x 轴的平面, 截旋转体所得截面的面积, 等于半径为 $y=f(x)$ 的圆的面积, 即 $S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x)$. 因此, 由 (8) 知, 旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \tag{9}$$

现在我们用微元法导出上述的曲边梯形 (其中 $a>0$) 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 v.

在区间 $[a,b]$ 上任取一长度为 dx 的区间 $[x,x+dx]$, 相应 (于这一小区间) 的小曲边梯形绕 y 轴旋转一周的旋转体的体积, 可近似地看作高为 $f(x)$, 而底半径分别为 $x+dx$ 及 x 的两圆柱的体积差, 即是

$$f(x)[\pi(x+dx)^2-\pi x^2]=2\pi xf(x)dx+\pi f(x)(dx)^2.$$

略去 dx 的高阶无穷小 $\pi f(x)(dx)^2$, 得体积的微元为 $2\pi xf(x)dx$, 故所求的体积为

$$v=2\pi\int_a^b xf(x)dx.0 \tag{1}$$

5.3.4 旋转体的侧面积

空间曲面的面积, 也将在多元微积分中讨论. 我们则依靠几何直观, 导出下面一类旋转曲面的侧面积.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的微商, 并且 $f(x)\geqslant 0$(对 $x\in[a,b]$). 将此曲线段绕 x 轴旋转一周, 要确定所产生的旋转曲面的侧面积 F.

在区间 $[a,b]$ 上任取长度为 dx 的小区间 $[x,x+dx]$, 考虑相应于这区间上的弧段 MM' 绕 x 轴旋转所得的侧面积 ΔF(参考图 5.17). MM' 可用切线段 ML(长度为 ds) 近似代替, 因此 ΔF 可由 ML 绕 x 轴旋转所得的圆台的侧面积来近似代替 (图 5.17). 熟知, 所说的圆台侧面积为

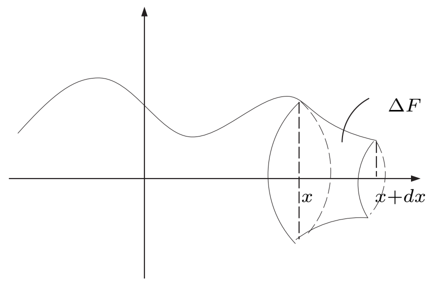

图 5.17

$$\begin{aligned}&\pi\cdot(\text{上底半径}+\text{下底半径})\cdot\text{斜高}\\&=\pi[y+(y+dy))]\cdot ds=2\pi yds+\pi dy\cdot ds.\end{aligned}$$

略去 dx 的高阶无穷小 $\pi dy\cdot ds$, 得到侧面积微元 (用 (2))

$$dF=2\pi yds=2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx.$$

于是所求的侧面积为

$$\begin{aligned}F&=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx.\\&=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.\end{aligned}\tag{11}$$

我们提一下, 若问题中曲线段由参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出, 其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的微商, 则侧面积公式为

$$F=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.\tag{12}$$

若曲线段由极坐标方程

$$r=r(\theta)\quad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

给出, 则可选 θ 作为参数, 而由公式 (12), 得出

$$F=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.\tag{13}$$

现在我们举两个用微元法处理物理问题的例子.

5.3.5 变力作功

一般而言, 确定变力对物体所作的功, 需应用以后讲述的线积分. 但对于下面一种较为简单的情形, 可以用微元法处理.

设物体在 (变) 力 $F=F(x)$ 的作用下沿 x 轴作直线运动 (力的方向与物体的运动方向一致), 若物体从 a 点运动到 b 点, 要确定变力对物体所作的功 W(假定 $F(x)$ 是 x 的连续函数).

在区间 $[a,b]$ 上任取一个长度为 dx 的小区间 $[x,x+dx]$. 由于在这个小区间上, 由变力的连续性, 变力所作的功可近似地看作恒力 $F(x)$ 所作的功. 于是得到功的微元 $dW=F(x)dx$. 将 dW 从 a 到 b 积分, 得出变力 $F(x)$ 所作的功为

$$W=\int_a^b F(x)dx.$$

例 1 半径为 R 米的半球形水池内注满了水, 求将全部的水抽干需作的功 (水的比重为 1 吨/米 ^{3}).

解 如图 5.18, 在过球心的垂面上作 Oxy 坐标系, 以垂面和半球所截的半圆的对称轴为 y 轴, 水平切线为 x 轴. 半圆的方程为 $x^2+(y-R)^2=R^2(0\leqslant x\leqslant R)$.

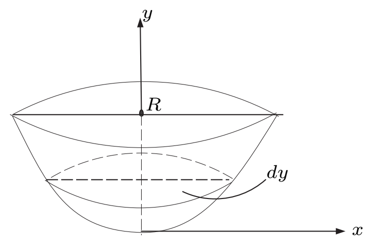

图 5.18

所求的功即是将池内的水全部提升至池沿高度所需的功. 使水位从 $y(0\leqslant y\leqslant R)$ 降到 $y-dy$ 所需的功近似地为 $\pi x^2dy\cdot(R-y)$, 其中 $x^2=2Ry-y^2$. 即功的微元

$$dW=\pi(2Ry-y^2)(R-y)dy.$$

故所需的功为

$$W=\int_0^R\pi(2Ry-y^2)(R-y)dy=\frac{\pi}{4}R^4\ (\text{吨}\cdot\text{米}).$$

5.3.6 引力

由万有引力定律可知, 距离为 r 的两个质点之间的引力为

$$F=k\frac{m_1m_2}{r^2},$$

其中 m_1,m_2 分别是两个质点的质量,k 为引力常数. 如果要确定一个物体对一个质点的引力, 或者两个物体之间的引力, 一般而言, 需要应用多重积分. 但在某些简单情况下, 可以用微元法来解决.

例 2 设有一个均匀细棒, 质量为 m, 长度为 $2l$. 在棒 (所在直线) 的延长线上有一单位质量的质点 Q, 距离棒的中心为 a(这里 $a>l$). 求棒对质点 Q 的引力 F.

解 以棒的中心为原点, 棒所在的直线为 x 轴, 并使质点 Q 在 x 轴正方向上.

对区间 $[-l,l]$ 中任一长度为 dx 的小区间 $[x,x+dx]$. 将这小段近似地视为一质点, 其质量为 $\frac{m}{2l}\cdot dx$, 而与质点 Q 的距离为 $a-x$. 由万有引力定律, 这一小段对 Q 的引力为

$k\dfrac{m}{2l(a-x)^2}dx$, 即

$$dF = k\cdot\frac{m}{2l(a-x)^2}dx,$$

于是棒对质点 Q 的引力为

$$F = \frac{km}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{1}{(a-x)^2}dx = \frac{km}{a^2-l^2}.$$

习题 5.3

1. 求下列曲线弧的弧长.

   (1) 抛物线 $y = x^2$ 在 $x = -a$ 到 $x = -a$ 到 $x = a$ 之间的弧;

   (2) 星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

   (3) 阿基米德螺线 $r = a\theta\,(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

2. 计算下面的曲线所围成的平面图形的面积.

   (1) 双纽线 $r = a^2\cos 2\theta\,(a$ 为常数,$a > 0)$;

   (2) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, 及 x 轴;

   (3) $y = e^x, y = e^{-x}$, 及 $x = 1$.

3. 计算下列的旋转体的体积.

   (1) $y = \sin x\,(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴及 y 轴旋转;

   (2) $y = e^{x^2}(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 与 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转;

   (3) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转.

4. 证明: 以 R 为半径, 高为 h 的球缺的体积为 $\pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)$.

5. 求下列曲线段旋转后所得立体的侧面积.

   (1) $x^2 + y^2 = r^2$ 绕 x 轴, 其中常数 $r > 0$;

   (2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 y 轴, 这里 $a > b > 0$;

   (3) $y = a\,\mathrm{ch}\,x\,(0 \leqslant x \leqslant a)$ 绕 x 轴;

   (4) $r = a(1 + \cos\theta)$ 绕极轴,$a > 0$.

6. 半径为 r 的球沉入水中, 与水面相切 (球的比重为 1). 现将球从水中捞出, 需作多少功?

7. 两条长为 l, 质量为 m 的均匀细杆位于同一直线上, 两杆近端距离为 l, 求两杆之间的引力.

§5.4 广义积分

Riemann 意义下的积分有两个限制, 其一是积分区间有限 (否则就不能保证当分割点越来越多时, 分割的宽度趋于零), 其二是被积函数有界. 如果要突破这两个限制, 必须借助最基本的极限方法, 考虑 Riemann 积分 (关于积分限) 的两类极限. 由此引出两类所谓的"广义积分", 而 Riemann 积分有时则相应地称为常义积分.

5.4.1 无穷区间上的积分

首先考虑积分区间是无穷的情况. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义, 如果 $f(x)$ 在任何一个有限区间 $[a,A]$ 上可积, 而且当 $A\to\infty$ 时, 积分 $\int_a^A f(x)dx=\varphi(A)$ 作为 A 的函数有极限, 则我们将这极限值定义为函数 $f(x)$ 在 (无穷) 区间 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\varphi(A).$$

这时也称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在 (或收敛). 若上述的极限不存在, 则称此无穷积分不存在 (或发散).

类似地, 我们定义函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a]$ 上的无穷积分为

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx.$$

而函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分定义为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx&=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx\\&=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,\end{aligned}$$

其中 a 为任一实数 (通常取 $a=0$). 换句话说, 当上面等式右边两个无穷积分都收敛时, 我们才称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 (其值就定义为两者的和).

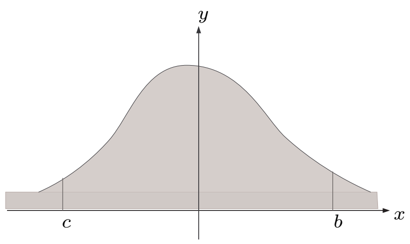

图 5.19

从几何上看, 无穷区间上的积分就是一个开口的曲边梯形的面积.

在现阶段, 判别无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是否收敛, 首先需对求出 $\int_a^A f(x)dx$; 再研究所得结果在 $A\to+\infty$ 时是否有极限 (按这一原则, 若判别了积分收敛, 通常也同时求出了无穷

积分的值.) 为了做到这一点, 我们当然应用 Newton—Leibniz 公式: 若求得了 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一个原函数 $F(x)$, 则问题就化为了求 $\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)$; 当这极限存在时, 其值就用 $F(+\infty)$ 表示, 我们的结果可以表述为

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a).$$

对 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 可同样地处理.

例如, 对于函数 $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, 除去 $\alpha=1$ 的情况, 有

$$\int_1^A\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha}-1)$$

显然, 如果 $\alpha>1$, 则当 $A\to\infty$ 时极限存在, 即

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$$

而当 $\alpha<1$ 时, 极限不存在. 对于 $\alpha=1$ 时, 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的原函数是对数函数 $\log x$, 显然它在无穷远点发散.

然而, 我们知道, 即使被积函数是初等函数, 积分 $\int_a^A f(x)dx$ 的计算一般相当困难, 有时甚至无法用显式表达式来表示. 因此为了判别 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 是否收敛, 上述的原则便不能走得太远. 我们以后将介绍一些有效的判别法则, 以判别无穷区间的积分是否收敛. 这些方法只是根据被积函数自身的性质, 而不必先计算 $\int_a^b f(x)dx$.

然而, 最令人惊奇的是, 常义积分 $\int_a^A f(x)dx$ 无法 (显式) 计算的情况下, 广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 却经常能计算. 例如,$\int_0^A e^{-x^2}dx$ 不可能表示为 A 的初等函数, 但却能求出

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

这类工作往往需要相当精致的技巧, 或者更深入的数学工具, 因此本节中我们不作讨论.

5.4.2 瑕积分

对于在有限区间上无界的函数, 我们的做法是将导致函数无界的点 (称为" 瑕点") 的近旁挖去, 使得函数在剩余的区间上有界. 积分后, 再让挖去的部分的长度趋于零, 如果极限存在, 就定义为无界函数的广义积分, 或称为" 瑕积分".

具体地说, 不妨设区间 $[a,b]$ 的右端点 b 是 $f(x)$ 的唯一一个瑕点, 即函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义, 在点 b 的左近旁无界, 此时在常义之下 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

如果挖去 b 点附近任意一个小区间 $[b-\varepsilon,b)$, 其中 ε 是任意的正数, 而 $f(x)$ 在剩余部分区间 $[a,b-\varepsilon]$ 上可积 (从而 $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ 有意义), 而且当 $\varepsilon\to0+0$ 时, 积分 $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ 作为积分上限的函数有极限, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的瑕积分存在 (或收敛), 并将这极限值定义为瑕积分的值, 记为 $\int_a^b f(x)dx$, 即定义

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx.$$

若上述极限不存在, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分不存在 (或发散).

类似地, 如果区间的左端点 a 是函数 $f(x)$ 的唯一一个瑕点, 则定义 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

只要右端极限内的积分始终存在.

如果区间 (a,b) 的两个端点都是 $f(x)$ 的瑕点, 则对任意 $c\in(a,b)$, 当两个瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛时, 就称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 其值为这两个瑕积分之和, 即定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim_{\eta\to 0+0}\int_c^{b-\eta} f(x)dx,$$

显然, 当瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛时, 其值显然与 c 的选取无关.

如果瑕点产生在区间的内部, 不妨设 $c\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的一个瑕点, 则根据积分可加性的基本原则, 分别考虑函数 $f(x)$ 在两个子区间 (a,c) 和 (c,b) 上的积分或瑕积分. 当两个积分都存在时, 则函数在原来的区间 (a,b) 上广义可积.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有数个瑕点, 根据积分的可加性, 可以将区间 (a,b) 在瑕点处分开. 当 $f(x)$ 在每一小段上的积分或瑕积分都存在, 则它们的和就是函数在整个区间上的瑕积分.

与无穷区间上的广义积分类似, 在现阶段, 为了判别一个瑕积分是否收敛, 我们只能按照定义进行. 不妨设 b 是 $f(x)$ 唯一的瑕点. 若求得了 $f(x)$ 在这区间上的一个原函数 $F(x)$, 则瑕积分是否收敛取决于极限 $\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$ 是否存在. 根据 Newton—Leibniz 公式有知

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a);$$

若 $\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$ 不存在, 则所说的瑕积分发散.

例如, 瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ 被积函数的原函数分别是 $F(x)=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$ 当 $\alpha\neq 1$, 和 $F(x)=\log x$, 当 $\alpha=1$. 因此很容易判断积分在 $\alpha<1$ 时收敛, 在 $\alpha\geqslant 1$ 时发散.

一般情况下, 我们要根据被积函数自身的特点判断瑕积分的收敛性, 这将是我们今后的一个专门话题, 在此不表.

注记 我们顺便说一下, 像下面这样的积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \text{ 与 } \int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx \ (\alpha \text{ 是常数}, \alpha>0),$$

被积函数在 $x=0$ 处虽然没有定义, 但因为函数 $\frac{\sin x}{x}$ 与 $x^\alpha\ln x$ 在 $(0,1]$ 上连续, 且当 $x\to 0+0$ 时都有极限 (从而有界); 因此, 无论怎样定义这两个函数在 $x=0$ 处的值, 都不影响它们在 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积性以及积分值. 通常, 我们对这样的积分不作特别的申明, 并且习惯上默认被积函数在 $x=0$ 处的值, 定义为函数在这一点处的右极限值, 以使得被积函数在整个区间 $[0,1]$ 上连续.

另一方面, 无论是无穷区间上或无界的函数的广义积分, 都是常义积分的一种极限形态, 因此, 在极限的处理之下, 常义积分的基本性质和计算方法得以保留. 下面我们特别讨论广义积分的换元和分部积分两种方法, 以便在计算广义积分时直接应用.

5.4.3　广义积分的换元和分部积分

我们首先讨论广义积分中的换元法. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续, 这里 b 可以是 $+\infty$; 而 $x=\varphi(t)$ 是在区间 $[\alpha,\beta)$ 上严格单调递增的可微函数, $\varphi'(t)$ 连续且不取零值, 这里 β 可以是 $+\infty$, 并且 $\varphi(\alpha)=a$ 及 $\varphi(\beta)=b$ (这应理解为 $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$).

由反函数定理, 在区间 $[a,b)$ 上有 φ 的严格递增且连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 并且 $\lim\limits_{x\to b}\varphi^{-1}(x)=\beta$.

现在设 x_0 与 $t_0=\varphi^{-1}(x_0)$ 是区间 (a,b) 与 (α,β) 中任意一对互相对应的数, 则由常义积分的换元公式, 得

$$\int_a^{x_0} f(x)dx=\int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

显然, 当 $t_0\to\beta$ 时有 $x_0\to b$, 反之亦然. 因此, 若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 则当 $t_0\to\beta$ 时,(5) 式右端的积分必有极限, 即 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 收敛, 并且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

类似地, 若上式右端的积分收敛, 则左边的积分也收敛, 且两者相等.

以上的讨论同样适用于 (变量代换) 函数 φ 为严格递降且 $\alpha>\beta$ 的情形 (这里 $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$).

对 $(a,b]$ 上的 (广义) 积分, 变量代换方法可与上面类似地进行.

广义积分的变量代换法则, 其意义是: 等式中一边的积分收敛, 则另一边的积分也收敛, 且两者相等. 这一法则可用于计算 (已知收敛的) 广义积分, 也可用于证明广义积分收敛.

换元法可以将广义积分转化为常义积分 (在此情况下, 广义积分的收敛性便一目了然), 也可以将一种形式的广义积分转化为另一种形式的广义积分.

例如, 对于无穷区间上的广义积分 $\int_a^b f(x)dx$, $(a>0)$ 进行换元

$$x=\frac{1}{y},\quad 则\quad dx=-\frac{dy}{y^2}$$

因此

$$\int_a^\infty f(x)dx=\int_0^{1/a}\frac{1}{y^2}f\left(\frac{1}{y}\right)dy$$

上式的一端收敛就意味着另一端也收敛.

现在转向广义积分的分部积分. 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续可微, 这里 b 可以是 $+\infty$. 则对任意 $c\,(a<c<b)$, 在区间 $[a,c]$ 上由常义积分的分部积分公式, 有

$$\int_a^c u dv = u(x)v(x)\Big|_a^c - \int_a^c v du.$$

让 $c\to b$, 则我们看到, 上式中三个项中若有两个有极限, 则第三个也有极限, 并且有

$$\int_a^b u dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

这里 $u(x)v(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

这就是广义积分的分部积分公式, 它既可用来计算 (已知收敛的) 广义积分, 也能用来证明广义积分收敛.

对于区间 $(a,b]$ 上的广义积分, 类似地可建立分部积分法则.

例 1 设 α 是任一正实数, 证明

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$

收敛, 并求其值.

解 令 $x=\tan y$, 这里 $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则由换元法则得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^\alpha y}dy,$$

这是一个常义积分 (被积函数在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上连续, 且在 $y\to\frac{\pi}{2}-0$ 时有极限), 从而问题中的广义积分收敛.

为了求出 I 的值. 将积分区间分为 $[0,1]$ 及 $[1,+\infty)$, 并作代换 $x=\frac{1}{t}$, 得出

$$\begin{aligned}I&=-\int_{+\infty}^1\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt-\int_1^0\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt\\&=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt=-I+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt\\&=-I+\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

故 $I=\frac{\pi}{4}$.

例 2 证明: 瑕积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$$

收敛, 并求其值.

解 分部积分, 我们得出

$$I=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx.$$

(注意, 用 L'Hospital 法则可知 $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln\sin x=0$.) 右边的积分是一个常义积分, 因而证明了瑕积分 I 的收敛性.

为了计算 I, 令 $x=2t$, 则

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2tdt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin tdt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos tdt.$$

在上式最后一个 (常义) 积分中作代换 $t=\frac{\pi}{2}-y$, 则得 (见 §5.1, 例 10 的代换)

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin tdt+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin ydy\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,\end{aligned}$$

故 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

习题 5.4

1. 判断下列广义积分是否收敛, 并求出收敛的广义积分的值.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\sin xdx$;

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$;　　(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}dx$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xdx$;　　(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$;

(7) $\displaystyle\int_0^1\ln xdx$;　　(8) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(9) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$;　　(10) $\displaystyle\int_0^1\ln\frac{1}{1-x^2}dx$;

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx$ (n 为自然数);　　(12) $\displaystyle\int_0^1(\ln x)^ndx$ (n 为自然数).

2. 广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 的柯西主值定义为

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)dx.$$

显然, 若广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 则其主值也收敛, 但反过来不一定成立. 研究下列广义积分主值的收敛性.

(1) $\displaystyle P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$;　　(2) $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx$.

3. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续, 并且以 a 为瑕点, 则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^{+\infty}f(x)dx,$$

这是本节讲的两类广义积分的组合, 其中 $b>a$ 是任一个实数. 当上面两个广义积分都收敛时, 我们称 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛; 否则称为发散.

(1) 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ 收敛, 并求其值;

(2) 证明, 对任意实数 α, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ 发散.

4. 设 $a<c<b$, 点 c 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内唯一的瑕点, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 定义为两个瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 的和.

(1) 求 $\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2}dx$;

(2) 求 $\int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}}dx$.

第 5 章补充习题

1. 设 m,n 为正整数, 证明

(1) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0$;

(2) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{如 } m=n \\ 0, & \text{如 } m \neq n \end{cases}$.

(本题的结论, 在以后要讲的富里叶级数理论中具有基本的重要性.)

2. 设 m,n 为正整数, 记

$$B(m,n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx.$$

证明:(1) $B(m,n)=B(n,m)$; (2) $B(m,n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

$B(m,n)$ 是著名的 Beta 函数 (简称 B— 函数) 的特例. 一般的 $B(m,n)$, 对 $m>-1$ 及 $n>-1$ 都有意义, 我们将在以后讨论. 习题 5.1 中第 6.(2) 题, 给出了 $m>0, n>0$ 时,$B(m,n)$ 的一个上界估计.

3. 计算下列积分.

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$;

(2) $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$ (n 为自然数);

(3) 设 $f(x) = \int_x^{x+2\pi}(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t})dt + \frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)dt$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$.

4. 证明 $\frac{1}{2n+2} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx < \frac{1}{2n-2}$ $(n=2,3,\cdots)$.

5. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_a^b f(x)dx>0$, 证明: 必有一个区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 使得对任意 $x\in[\alpha,\beta]$, 有 $f(x)>0$. (比较习题 5.1 中第 8 题.)

(提示: 假设结论不对, 则对 $[a,b]$ 的任一划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上都存在 ξ_i, 使 $f(\xi_i)\leqslant 0$. 由此产生一个非正的积分和, 过渡到极限, 产生矛盾.)

6. (1) 设 f 是处处连续的偶函数, 则 f 必有一个原函数为奇函数;

    (2) 设 f 是处处连续的奇函数, 则 f 的任一个原函数都是偶函数.(试比较习题 3.1, 第 15 题.)

7. 举例说明, 存在一个连续的周期函数 f, 使得 f 的原函数都不是周期函数. (试比较习题 3.1, 第 16 题.) (提示: 选一个连续的周期函数 f, 使它能保证 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 不是周期函数. 注意, 不必考虑 $F(x)$ 的显式表示.)

8. 设 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$. 证明: 多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.(本题是第三章补充习题的第 3 题, 这里要求用积分的手法来论证. 可看习题 5.1 中某个习题.)

9. 设函数 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且有

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx=\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0.$$

证明: 在 $(0,\pi)$ 内存在两点 x_1 和 x_2, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

(提示: 易知 f 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个零点 x_1. 若这是唯一的零点, 则 f 在 $(0,x_1)$ 与 (x_1,π) 内异号. 于是 $\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_1)dx\neq 0$, 这将产生矛盾.)

10. 设 $f(x)$ 处处连续,$f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在. 记 $F(x)=\int_0^1 f(xy)dy$. 证明 $F(x)$ 处处可导, 并求出 $F'(x)$.

11. (1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$. 记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 试研究 $F(x)$ 在哪些点可导. (提示: 与习题 5.1 中第 16 题不同, 本题无法求出 $F(x)$ 的显式表示.)

    (2) 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt$, 求证 $f'_+(0)=0$.

12. 设函数 f 处处连续. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b [f(x+h)-f(x)]dx=f(b)-f(a).$$

(提醒: 本题容易做错.)

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微. 证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0.$$

(提示: 分部积分.)

14. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt=\frac{2}{\pi}$.

15. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=0$. (提示: 直接用积分中值定理, 得出所说的积分为 $\frac{\pi}{2}\sin^n\xi_n$ (其中 $0<\xi_n<\frac{\pi}{2}$), 但这不能导出结果, 因不能排除 $\{\xi_n\}$ 中有一个子列趋于 $\frac{\pi}{2}$. 克服这一困难可采用如下的方法. 对任意正数 $\varepsilon<1$, 取一个参数 δ(与 ε 有关), 将问题中的积分拆成两部分: 一部分用区间长度控制; 另一部分由 $n\to\infty$ 来控制, 以使得两者的和小于 ε. 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx\\&<2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]^n+\delta=2\cos^n\delta+\delta.\end{aligned}$$

现在取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 因 $0<\cos\frac{\varepsilon}{2}<1$, 且 $\cos\frac{\varepsilon}{2}$ 与 n 无关, 故 n 充分大时, 可使上式第一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$.

解答本题的另一方法是应用 §5.1 中例 9. 参考第一章补充习题中第 1.(1) 题.)

16. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x)\geqslant 0$ (对 $x\in[a,b]$). 记 $f(x)$ 在这区间上的最大值为 M, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

17. (1) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递增、非负函数, 则对任意自然数 n, 有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)dx\leqslant f(n);$$

(2) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递减、非负函数, 则对任意自然数 n, 有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)dx\leqslant f(1).$$

此外, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)dx\right)=\alpha$$

存在, 且 $0\leqslant\alpha\leqslant f(1)$.

(提示: 对于 (1), 应用习题 5.1 中第 5 题可知,

$$f(k)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)dx\leqslant f(k+1),$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 求和, 可得出结果. 类似地可证明 (2) 中的不等式.

为证明 (2) 中说的极限存在, 可证明

$$g(n)=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)dx,\quad n=1,2,\cdots$$

是单调递减的函数; 而上面已指出 $g(n)$ 以 0 为下界.)

某些 (不易直接处理的) 离散的量 —— 数列的和, 可以通过 (易于处理的) 连续的量 —— 积分作出估计, 本题给出了最简单的这样的结果 (这在后面的无穷级数理论中还将提及). 例如, 我们现在易于给出 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ 及 $n!$ 的相当精确的上、下界. 我们特别提及, 对 $n\geqslant 1$, 有

$$\ln n\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant \ln n+1,$$

从而 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ 趋于无穷大, 并且与 $\ln n$ 同阶. 此外,

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

存在, 这称为欧拉常数.

18. (柯西积分不等式) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx,$$

等号成立的充分必要条件是:f 和 g 中有一个恒为零, 或 $f(x)=\lambda g(x)$(对 $x\in[a,b]$), 这里 λ 是一个常数.

(提示: 本题有好几种证法. 用对上限求导可得出一个证明, 参见习题 5.1 中第 28 题的提示. 最标准的方法如下: 无妨设 $\int_a^b g^2(x)dx\neq 0$, 否则易知函数 g 恒为零, 结论显然成立 (习题 5.1, 第 4.(2) 题). 考虑关于 t 的二次三项式 $\int_a^b (f(x)+tg(x))^2dx$, 这总是非负的.)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, 则对任意 $a\in[0,1]$, 有

$$|f(a)|\leqslant \int_0^1 |f(x)|dx+\int_0^1 |f'(x)|dx.$$

20. 证明:$0.944<\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx<0.947$.(提示: 参看习题 5.1 中第 24 题的提示.)

21. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $|f'(x)|\leqslant M$. 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant \frac{M}{2n}.$$

第 6 章　可积微分方程

大致地说, 联系着一个自变量 x 与 (未知) 函数 y 及其微商 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 的关系式 (方程)

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为 (常) 微分方程. 方程中所含未知函数微商的最高阶数 n, 称为这个方程的**阶**. 若方程关于 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 均是一次的, 则称其为 (n 阶)**线性方程**.

一个函数 $y = y(x)$ 称为微分方程的解, 如果它能满足该方程. 因此当给定方程后, 最基本的事情当然是求出方程的解, 即未知函数 $y = y(x)$.

微分方程在数学和其他自然科学 (物理学, 化学, 生物学, 天文学) 中扮演着非常基本和重要的角色. 这是易于明了的, 因为在任何自然过程中, 有关的变量及其变化率之间, 按照制约该过程的一些基本的科学原理 (定律), 是彼此相联系的. 将这种联系用数学方式表达出来, 往往就产生一个 (或几个) 微分方程.

例如, 根据 Newton 基本定律, 质点的质量 m 乘以运动的加速度等于质点所受的外力. 如果选定坐标, 设质点在时刻 t 时距离 (或位置) 为 $x(t)$, 所受的外力为 $F(x(t))$, 则 $x(t)$ 满足 Newton 方程

$$F(x(t)) = m\ddot{x}(t)$$

通常, 在力学中用 $\dot{x}$, $\ddot{x}$ 等表示对时间 t 的导数.

最简单的例子是自由落体的运动, 它满足

$$\ddot{x}(t) = -g \quad (g \text{ 是重力加速度})$$

以及质点沿 x 轴被弹性力拉向原点的运动, 此时质点的位置函数 $x(t)$ 满足

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad (k \text{ 是弹性系数})$$

上述刻划物理问题的方程本身不能完全决定质点的运动. 如果我们指定在某一时刻 (比如 $t_0 = 0$) 质点的初始位置 $x(0)$ 和初始速度 $\dot{x}(0)$, 则运动就完全确定了. 即质点从任意给定的位置, 以任意给定的速度出发, 而后的运动就完全由方程所决定.

用数学的语言说, 就是: 除非特别要求, 一般来说微分方程解的个数不唯一.

例如, 最简单的一阶方程

$$y' = f(x)$$

它的解一定是下列形式

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 任一个确定的原函数,C 是任意常数. 即对任意的常数,$F(x)+C$ 都是方程的解. 故称这样形式的解为方程的通解. 如果事先要求所求的解在一个特定的点 x_0 满足 $y(x_0)=\alpha$, 则符合要求的解是唯一的

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+\alpha$$

称为方程的一个特解.

对于自由落体的运动方程, 经过两次积分, 它的通解为

$$x(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_1$$

其中 C_1, C_2 是任意常数. 如果给定在时刻 $t=0$ 时的初始位置和初始速度 $x(0)=\alpha$, $\dot{x}(0)=\beta$, 则符合要求的特解是唯一确定的

$$x(t)=\frac{1}{2}gt^2+\beta t+\alpha$$

对于一般形式的一阶微分方程

$$F(x,y,y')=0 \tag{4}$$

如果没有任何要求, 它的解一般也含有一个任意常数 C, 通常表示为隐式

$$\Phi(x,y,C)=0$$

称为方程的**通积分**. 若从通积分中可解出 y 的一个显函数

$$y=y(x,C)$$

则称为方程的**通解**.

对于一般形式的 n 阶微分方程

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

通积分或通解的含义与上面的类似, 其中包含着 n 个独立, 即彼此不能合并的任意常数 (类比自由落体运动的通解). 而下列初始条件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

一般来说决定了方程的一个特解.

求微分方程的解, 是一个相当困难和复杂的问题. 但从上面的一些具体例子看出, 求解的过程就是一个积分的过程. 所以当微分方程的通积分 (或通解) 能够用初等函数及初等函数的不定积分来表示, 则称方程为**可积微分方程**, 而导出这种解的方法称为**初等积分法**.

能用初等积分法求解的方程事实上是非常少的, 但这一基本方法在微分方程中仍很重要. 我们在本节将简要介绍一些用初等积分法求解的一阶或高阶方程的解法. 而对于 (常) 微分方程的一般理论, 将在后续课程中介绍.

§6.1 一阶微分方程

6.1.1 分离变量法

我们考虑形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

的一阶方程. 即便是这样简单的方程, 求解也是一个困难的事情. 当方程具有某种特殊类型时, 则易于用初等积分法解决.

若 $f(x, y) = g(x)h(y)$, 这里 g, h 分别是 x 和 y 的连续函数, 且 $h(y)$ 不恒为零. 则方程为

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \tag{2}$$

这可 (分离变量) 化为

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx. \tag{3}$$

我们注意, 根据一阶微分形式的不变性, 若 y 为自变量时有

$$\int \frac{dy}{h(y)} = H(y) + C,$$

则当 y 是 x 的可微函数时, 等式仍然成立. 所以, 在 (3) 式两边分别求关于 y 和 x 的不定积分, 得出

$$H(y) = \int g(x)dx = G(x) + C, \tag{4}$$

其中 $G(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数,C 是任意常数 (上式左边也应包含一个任意常数, 但这可与 $\int g(x)dx$ 中的任意常数合并为 C). 这就是方程 (2) 的通积分.

注意, 对 $h(y)$ 的任一零点:$h(a) = 0$, 常值函数 $y = a$ 显然是方程 (2) 的解. 这些解, 往往在分离变量 (即 (2) 化为 (3)) 时丢失, 且有时不能包含在通积分 (4) 中, 故应将这样的解补上.

我们看到, 方程 (2) 中, 可将其中 x 的函数与 dx 置于等式一边, 而将 y 的函数与 dy 置于等式的另一边, 从而两边可各自求不定积分. 这样的方程称为**可分离变量的方程**, 这一解法也称为**分离变量法**.

例 1 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

解 将方程分离变量后, 有

$$ydy = -xdx.$$

两端求 (不定) 积分, 得方程的通积分

$$x^2 + y^2 = C \quad (C \text{ 为任意常数}),$$

这在 Oxy 坐标系中, 表示以原点为圆心的同心圆族.

例 2　求解方程

$$(1+x^2)ydy+\sqrt{1-y^2}dx=0.$$

解　当 $1-y^2\neq 0$ 时, 分离变量后, 方程可改写成为

$$-\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{1+x^2}.$$

两边积分, 得方程的通积分为

$$\sqrt{1-y^2}=\arctan x+C\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

又 $y=\pm 1$ 都是原方程的解, 故应补上. 因此这个方程的解是

$$\sqrt{1-y^2}-\arctan x=C\text{ 及 }y=\pm 1.$$

6.1.2　齐次方程

有些方程本身不能直接分离变量, 但作适当的代换后, 可用分离变量法求解. 所谓的齐次微分方程就是这样的一类方程.

一个函数 $f(x,y)$ 称为 n 次齐次函数, 如果对某个范围内的 x,y 与 t 有

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y).$$

一阶微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

称为**齐次**的, 如果函数 P 和 Q 是同次的齐次函数. 现在 $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 是 0 次齐次函数, 因此它可写为 $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式. 于是上述的齐次微分方程可化为形式

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).\tag{5}$$

为了解方程 (5). 我们引入新的未知函数

$$u=\frac{y}{x}.$$

则 $y=ux$, 从而

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}.$$

于是方程 (5) 变成

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u.\tag{6}$$

方程 (6) 可分离变量, 成为

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

两边积分, 得到

$$\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \ln|x| + C.$$

求出上式左边的不定积分后, 再用 $\frac{y}{x}$ 代换其中的 u, 即得方程 (5) 的通积分. 注意, 若 $\varphi(u)-u$ 有一个实零点 u_0, 则 $y=u_0x$ 就是丢失的一个特解, 应当补上.

例 3 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

解 这是一个齐次方程, 在其中令 $y=ux$, 并分离变量, 得出

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C_1,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式, 得出原方程的通积分为

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\arctan\frac{y}{x}}, \quad 其中\ C=e^{-C_1}.$$

若采用极坐标, 则上述通积分可写成

$$r = Ce^{\theta},$$

这表示平面上一族以原点为心的对数螺线.

例 4 求解方程

$$xdy = (y+\sqrt{x^2+y^2})dx.$$

解 先考虑 $x>0$ 的情形, 此时原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

这是一个齐次方程. 作代换 $y=ux$, 得

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}, \quad 即\ \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

积分后得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln x + C_1,$$

其中 C_1 是任意常数. 以 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式, 可得

$$y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2, \quad 其中\ C=e^{C_1}>0.$$

由此可解出

$$y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right).$$

当 $x<0$ 时, 可求得与上面相同的结果.

故原方程的解为 $y=\frac{1}{2}\left(Cx^2-\frac{1}{C}\right)$(其中 $C>0$ 是常数).

6.1.3 一阶线性方程

若一阶微分方程中的未知函数 y 及其导函数 y' 都是一次的, 则称方程为一阶线性方程, 它可化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x). \tag{7}$$

若右端的 $Q(x)$ 恒为零, 则方程称为 (一阶)**线性齐次方程**; 否则, 方程称为 (一阶) **线性非齐次方程**. 注意, 这里 "齐次" 的含义与前面说过的完全不同.

线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{8}$$

的求解是相当容易的, 因为这是一个可分离变量方程: 当 $y \neq 0$ 时, 我们有

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

得出

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C_1,$$

由此得

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad 其中\ C = \pm e^{C_1}\ (\neq 0).$$

显然 $y = 0$ 是方程 (8) 的解, 在上面的通解中让 $C = 0$ 就得到了这个解, 故线性齐次方程 (8) 的通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C\ 为任意常数). \tag{9}$$

现在来解非齐次方程 (7), 这不能直接用分离变量法, 我们这里采用下面的办法: 设 $\int P(x)dx$ 为 $P(x)$ 的任一个确定的原函数, 在 (7) 两边同乘上 $e^{\int P(x)dx}$, 则所得的结果可变形为

$$\frac{d\left(ye^{\int P(x)dx}\right)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

两边积分即得

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C,$$

即方程 (7) 的通解为 (其中 C 为任意常数)

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right], \tag{10}$$

方程 (7) 的另一种求解方法为: 作代换

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{11}$$

代入方程 (7), 就产生了一个可分离变量的方程

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

由此即得

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dy} + C.$$

这结合 (11) 也导出了方程 (7) 的通解 (10).

注记 比较 (9) 与 (11) 可以看到, 解非齐次方程 (7) 所作的代换, 可视为在相应的齐次方程的通解中, 将任意常数 C 变易为 x 的函数 $C(x)$, 因此, 这一方法也称为**常数变易法**, 这是微分方程中非常重要的一个方法. 此外, 从通解公式 (10) 中还可看到: 线性非齐次方程的通解, 简单地说, 是相应的齐次方程的通解 $Ce^{-\int P(x)dx}$ 与线性非齐次方程的一个特解 $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 之和. 这件事情, 我们以后还将提及.

有些一阶方程, 并不是线性方程, 但可以通过适当的代换化为线性方程, 进而其解易于求得. 这里, 我们只提一类这样的方程, 就是所谓的**贝努利方程**:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \text{ 为不等 } 0,1 \text{ 的实数}. \tag{12}$$

解方程 (12) 可采用下面的方法: 先以 y^n 除方程的两边, 得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

再作代换 $u = y^{1-n}$, 则方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

由此就易求出方程 (12) 的通解.

例 5 求解方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -1.$$

解 这是一个 (一阶) 线性非齐次方程, 可以用前述的方法求解, 也可直接应用通解公式 (17)(取 $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -1$), 我们有

$$\begin{aligned} y = e^{\int \frac{dx}{x}}\left[C + \int -e^{-\int \frac{dx}{x}}dx\right] &= e^{\ln|x|}\left[C - \int e^{-\ln|x|}dx\right] \\ &= |x|\left[C - \int \frac{dx}{|x|}\right]. \end{aligned}$$

上式右端在 $x > 0$ 时是

$$x\left[C - \int \frac{dx}{x}\right] = x[C - \ln|x|];$$

在 $x < 0$ 时是

$$-x\left[C - \int \frac{dx}{-x}\right] = x[-C - \ln|x|].$$

由于 C 是任意常数, 故方程的解可统一表述为

$$y = x[-C - \ln|x|].$$

例 6 求解方程

$$(2y^2 + y - x)dy - ydx = 0.$$

解 当 $y \neq 0$ 时, 方程可变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y^2 + y - x},$$

但这不是线性方程. 若将方程变形为

$$\frac{dx}{dy} = 2y + 1 - \frac{x}{y}, \quad 即\ \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 1 + 2y,$$

便是以 y 为自变量,x 为未知函数的线性方程; 其通解为

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{dy}{y}} \left[\int (1+2y)e^{\int \frac{dy}{y}} dy + C\right] \\ &= \frac{1}{|y|}[\int (1+2y)|y|dy + C] \\ &= \frac{1}{y}\left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^3 + C\right] \\ &= \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{C}{y}, \ 其中\ C\ 为任意常数. \end{aligned}$$

例 7 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = xy + x^3y^3.$$

解 这是贝努利方程, 作代换 $u = y^{-2}$, 将它化为线性方程

$$\frac{du}{dx} + 2ux = -2x^3,$$

其通解易求出为 $u = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}$, 故原方程的通积分是

$$\frac{1}{y^2} = 1 - x^2 + Ce^{-x^2},$$

还有一个特解 $y = 0$.

习题 6.1

1. 求解下列可分离变量的微分方程.

(1) $(1 + x^2)dy = ydx$; (2) $y' = e^{x-y}$;

(3) $xy' + y = y^2$; (4) $yy' = \dfrac{1 - 2x}{y}$.

2. 求解下列的微分方程.

(1) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$;　　(2) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;

(3) $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$;　　(4) $(x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0$.

3. 证明, 形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

的方程, 可通过代换化为齐次方程.(提示: 若方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解 x_0, y_0(即 x_0, y_0 不全为零), 则可令 $u = x - x_0, v = y - y_0$; 在相反的情形更易于处理.)

求解下面的方程

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 3}{x - y + 1}$;　　(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 4y + 3}{x + 2y + 1}$.

4. 求下列线性方程和贝努利方程的解.

(1) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;　　(2) $y' + \frac{1 - 2x}{x} = 1$;

(3) $y' = \frac{y}{x + y^3}$;　　(4) $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$;

(5) $y' = y \tan x + y^2 \cos x$;　　(6) $y - y' \cos x = y^2(1 - \sin x) \cos x$.

5. 求下列方程满足初始条件的特解.

(1) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x},\quad y(1) = 1$;

(2) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x},\quad y(\pi) = 1$.

6. 求解下列微分方程.

(1) $y' + x = \sqrt{x^2 + y}$;　　(2) $y' = \cos(x - y)$;

(3) $y' - e^{x-y} + e^x = 0$;　　(4) $y' + \sin y + x \cos y + x = 0$.

7. 试用常数变易法导出贝努利方程的通解.

8. 一条曲线过点 $(2, 3)$, 其在坐标轴间的任意切线段被切点平分, 求这曲线.

9. 设函数 $f(x)$ 处处连续, 且 $f(x) = \int_0^x f(t)dt$ (对 $x \in R$), 求 $f(x)$.

10. 已知镭的衰变速率与镭的现存量成正比 (比例常数为 k). 设开始时镭的量为 a. 问 t 时刻镭的量 $x(t)$ 为多少?

11. 一汽艇以速度 v 等于 10 公里/小时在静水上运动, 它的发动机在开足马力后关掉, 经过 20 秒后, 汽艇的速度降低为 v_1 =6 公里/小时. 设水对汽艇运动的阻力和汽艇速度成正比, 试求:

(1) 发动机停止 2 分钟后汽艇的速度;

(2) 发动机停止 1 分钟后汽艇所走的路程.

§6.2 可降阶的二阶微分方程

一般的二阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',y'')=0.$$

这一节要讲两种特殊类型的二阶方程, 通过代换, 它们能够化为一阶方程.

(i) 不显含未知函数的二阶方程 若二阶方程中不显含 y, 则这种方程可写成

$$f(x,y',y'')=0. \tag{1}$$

引入新的函数 $p=y'$, 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$. 这时 (1) 化为了一阶方程

$$f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0. \tag{2}$$

若能求出 (2) 的通积分 (或通解), 则将这个通积分 (或通解) 中的 p 换成 $\frac{dy}{dx}$, 这产生另一个一阶方程. 求出了这个一阶方程的解, 也就求出了 (1) 的解. 这一方法, 是将一个二阶方程, 化为两个一阶方程来解决.

(ii) 不显含自变量的方程 若二阶方程中不显含 x, 则方程可写为

$$g(y,y',y'')=0. \tag{3}$$

我们仍令 $p=y'$, 但现在需用对 y 的导数来表示 y'':

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

于是 (3) 可写为

$$g\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0. \tag{4}$$

这是一个一阶方程, 与前面的情形类似, 求出方程 (4) 的通积分 (或通解) 后, 又将问题化为了另一个一阶方程求解.

例 1 求解二阶方程

$$xy''+y'=4x \quad (x\neq 0).$$

解 这是不显含未知函数的方程. 令 $p=y'$, 则方程化为

$$xp'+p=4x. \tag{5}$$

这是一阶线性非齐次方程, 可以用 §6.1 中的方法求解. 但更简单地, 是将 (5) 变形为

$$\frac{d(xp)}{dx}=4x.$$

于是 $xp=2x^2+C_1$, 即

$$\frac{dy}{dx}=2x+\frac{C_1}{x}.$$

积分后, 得方程的通解为

$$y = x^2 + C_1 \ln|x| + C_2,$$

其中 C_1, C_2 是 (独立的) 常数. 注意, 我们前面提到过, 二阶方程的通积分 (或通解) 中, 包含着两个 (独立) 常数.

例 2　求方程

$$y'' - e^{2y} = 0$$

满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解.

解　这是不显含 x 的二阶方程. 令 $p = y'$, 则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. 代入方程后, 得

$$p\frac{dp}{dy} - e^{2y} = 0.$$

分离变量, 并积分, 得出

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1.$$

由 $y(0) = 0,\ p(0) = y'(0) = 1$, 得 $C_1 = 0$. 故 $p^2 = e^{2y}$, 所以

$$\frac{dy}{dx} = e^y.$$

分离变量, 再积分, 得出

$$-e^{-y} = x + C.$$

由 $y(0) = 0$, 得 $C = -1$, 故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$.

习题 6.2

1. 求解下列二阶方程的解.

   (1) $xy'' = y'$;　　(2) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$;

   (3) $y'' = y' + x$;　　(4) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

2. 求下列二阶方程满足初始条件的特解.

   (1) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$;

   (2) $y^3 y'' = -1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

第 7 章　无穷级数

§7.1　数项级数

7.1.1　基本概念

所谓无穷级数, 就是无穷多个数 $\{a_n, n=1,2,3,\cdots\}$ 依次相加的一个形式上的求和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

其中 a_n 叫级数的通项. 这里我们用求和号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 表示求和是从第一项一直求到无穷. (而 $\sum\limits_{n=1}^{n}$ 则表示求和是从第一项一直求到第 n 项). 首先看看几个例子

$$\begin{aligned}
&1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots,\\
&a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots,\\
&1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots,
\end{aligned}$$

第一个级数称为几何级数或等比级数, 不难发现, 它的前 n 项的和是

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad |q| \neq 1$$

因此随着项数越加越多, 总的趋势是 $(1-q)^{-1}$(当 $|q|<1$), 或 ∞(当 $|q| \geqslant 1$). 第二个级数称为算术级数 (等差级数), 它的前 n 项的和是

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

因此当项数越加越多时, 趋势是无穷. 对于第三个级数, 直观上看

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \begin{cases} (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots & = 0 \\ 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots & = 1. \end{cases}$$

因此无法判断求和的值是多少.

为此, 我们必须首先明确无穷项求和的确切意义. 达到此目的一个合理的方案是**从有限过渡到无穷**, 即首先考虑前 n 项的有限和，然后观察随着项越加越多的极限.

(1) **收敛性**

设 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$, 叫级数的前 n 项部分和, 如果数列 $\{S_n\}$ 收敛于 $S\,(\lim S_n = S)$, 则称级数收敛,S 叫级数的和, 并记

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数为发散的. 由此可见**讨论无穷级数的敛散性就是讨论它的部分和构成的数列** $\{S_n\}$ **的敛散性**. 因此, 对于上面的第三个例子, 有 $S_{2n}=0$, $S_{2n+1}=1$, 所以级数发散.

反之, 如果有一个数列 (不妨仍记为 $\{S_n\}$), 则它对应一个以 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n>1)$, $a_1=S_1$ 为通项的级数, 级数的前 n 项的部分和就是 S_n.

注记 根据上述级数收敛性的定义以及与数列的关系, 关于级数的研究似乎是多余的. 然而, 很多数列的极限天然地以无穷级数来表示. 例如一个十进制的正实数 α 就可以表示为一个无穷级数

$$\alpha=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots$$

其中,a_0 是它的整数部分, a_n $(n\geqslant 1)$ 是一个介于 0 和 9 之间的整数. 如果当 a_n 中只有有限项不为零, 或者 a_n 满足某种循环性, 即存在一个自然数 k, 使得 $a_{n+k}=a_n$ $(n\geqslant 1)$, 则上述表达式一定可以写成分数形式. 这样的数就是有理数, 即是有限的或无限循环小数. 而对于无限不循环小数就是无理数, 其表达方式是一个无穷级数.

另一方面, 不是每一个级数, 都可以得到其前 n 项部分和的显式表达式, 因此讨论级数的敛散性, 还得从级数自身的性质入手. 这种情况与无穷区间上的广义积分类似, 在那里, 不是每一个被积函数都有显式表示的原函数.

(2) 基本性质

根据级数收敛性的定义, 类似数列情况, 不难得到下列性质

性质 1 (Cauchy 收敛准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是: 对任给的正数 ε, 存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时, 不等式

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|=|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

对任何正整数 p 成立.

性质 2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim a_n=0$.

这个性质说明，要想无穷多项相加是收敛的，参加求和的项应该越来越小 (趋于 0). 所以通项不趋于 0 的级数根本没有必要考虑收敛性，例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 发散, 因为 $\lim n\sin\frac{1}{n}=1\neq 0$. 但是，通项趋于 0 并不能保证级数一定收敛，还有一个趋于 0 的快和慢的问题. 例如 $\lim\ln\dfrac{n+1}{n}=0$, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$ 中，部分和 $S_n=\ln(n+1)\to\infty$, 所以是发散的.

性质 3 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha a_n$, ($\alpha$ 是一个常数) 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 也收敛, 并有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha a_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

性质 4 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 中, 改变任何有限项的值不影响级数的敛散性.（证明只要利用 Cauchy 收敛准则就行了）.

7.1.2 正项级数的收敛性

当通项 $a_n \geqslant 0$ 时, 称级数为正项级数. 所以，正项级数的部分和 $\{S_n\}$ 是单调增加的：$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$, 故由数列极限的收敛性质可得

(1) 基本结论

（1）正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

（2）正项级数如果发散，一定发散到无穷.

（3）收敛的正项级数，任意调换求和次序后所得到的级数也收敛，并且其和不变.

第三个结论是需要证明一下的. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 经过调换求和次序所得到的级数. 它的部分和记为

$$S'_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$$

注意到 a'_n 不是新的项, 而是原来级数中求和的项，无非次序变了，从新排队了（标明位置的下标变了），所以一定存在 m，使得 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ 在原级数的前 m 项出现，所以 $S'_n \leqslant S_m$，所以原级数收敛，得出新级数收敛，而且收敛值不会超过原来级数的收敛值.

反之，我们可以把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 看成是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ 经过调换次序所得到的级数. 这样我们就得出上述结论.

注意! 加法交换次序在有限求和时，是自然的. 对于无穷求和问题应谨慎. 虽然结论（3）说明正项级数是可以随意调换次序的，但后面我们将看到，这种性质对于某些级数并不成立.

例 1 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

证：这是一个正项级数, 所以只须证明它的部分和有界. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此, 级数是收敛的. 后面将证明的收敛的值是 e.

(2) 正项级数收敛判别法：

现在我们面临的是对于一个给定的正项级数，如何判别它是否收敛，为此我们有

定理 1 (比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 从某项开始有 $a_n \leqslant b_n$, 则

1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证 因为改变有限项的值不改变级数的敛散性, 故可以假定 $a_n \leqslant b_n$ 对所有的 n 都成

立. 于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

1° 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ 有界, 因而 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 也有界, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 无界, 因而 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ 无界, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

例 2 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证 当 $x>0$ 时, 有

$$x > \ln(1+x),$$

故对任意的 n, 有

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散, 所以由比较判别法可知调和级数发散.

例 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 p 级数, 讨论它的敛散性.

解 当 $p \leqslant 1$ 时, 因为

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n},$$

故在此情况下, p 级数发散.

当 $p>1$ 时, 命 $p=1+\alpha\,(\alpha>0)$. 由微分中值定理可得

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{\alpha}{(n-\theta)^{\alpha+1}} > \frac{\alpha}{n^p},$$

其中 $0<\theta<1$, 由于

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1,$$

故由比较判别法可知, 当 $p>1$ 时,p 级数收敛.

例 4 证明 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散.

证 当 $n \geqslant 2$ 时, 总有

$$\ln n < n,$$

故

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n},$$

所以原级数发散.

比较判别法主要是比较通项的大小, 更确切地说是比较从某项开始之后的通项的大小. 注意到收敛的级数的通项必须趋于零, 通项趋于零的速度决定了它们之间的大小. 因此, 我们可以考虑比较判别法的极限形式.

推论 1 (比较判别法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是正项级数,$\lim \frac{a_n}{b_n} = A$. 则

1° 若 $0<A<+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散;

2° 若 $A=0$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

3° 若 $A=+\infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

这个推论的含义是: 对于两个无穷小量 a_n, b_n, $n\to\infty$, 如果 a_n 和 b_n 趋于 0 的速度是一样的，则对应的级数同敛散；如果一个比另一个趋于 0 的速度要快，则慢的都收敛了，快的也就收敛；或者快的发散，慢的更应发散.

证 对于第一种情况, 取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$, 则存在 N, 使当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|<\frac{A}{2},$$

即有

$$\frac{A}{2}b_n<a_n<\frac{3A}{2}b_n.$$

所以分别对两个不等式利用比较判别法, 就就得到结果.

同样, 当 $\lim\frac{a_n}{b_n}=A=0$ 时, 存在 N, 使当 $n>N$ 时有

$$0\leqslant\frac{a_n}{b_n}<1,$$

即有

$$a_n<b_n,$$

而当 $\lim\frac{a_n}{b_n}=A=+\infty$ 时, 存在 N, 使当 $n>N$ 时有

$$\frac{a_n}{b_n}>1,$$

即有

$$a_n>b_n,$$

无论哪种情况, 直接应用比较判别法即可完成证明.

例 5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}$ 收敛.

证 由

$$\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

的收敛性, 可知原级数收敛.

例 6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

证 由

$$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$$

及调和级数的发散, 可知原级数发散.

比较定理提示我们, 可以通过与一个我们熟知的级数 (**例如几何级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$) **进行比较, 讨论级数的敛散性**.

定理 2 (Cauchy 判别法**)** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数. 如果从某项起有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 则级数收敛; 如果有无穷多个 n, 使 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 则级数发散.

或者用极限形式描述, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

则, $q<1$ 时, 级数收敛, 而 $q>1$ 时, 级数发散 (因为是极限形式, 所以当 $q=1$ 时, 是一个无法判断的例外).

证 不妨设对所有的 n 都有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 也就是有 $a_n \leqslant q^n$. 故由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 的收敛性及比较判别法, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

如果有无穷多个 n 使 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 故 $\{a_n\}$ 不以零为极限, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

对于极限形式, 只要注意到一定存在一个正数 ε, 使得对于充分大的 n, 有 $\sqrt[n]{a_n} < q+\varepsilon < 1$ 或者 $\sqrt[n]{a_n} > q-\varepsilon > 1$. 读者可自行完成证明. □

几何级数的后一项和前一项的比等于一个固定的数 (公比), 几何级数的敛散性由公比的大小所确定. 对于一般级数而言, 虽然没有这样的性质, 但是也可以根据级数的前后项之比, 讨论敛散性.

定理 3 (D′Alembert 判别法**)** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数. 如果从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 则级数收敛; 如果从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, 则级数发散. 如果前后项之比具有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

则当 $q<1$ 时, 级数收敛, 而当 $q>1$ 时, 级数发散.

证 不妨设对所有的 n 都有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 故有

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant q,\ \frac{a_3}{a_2} \leqslant q,\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant q,$$

把这些不等式两端相乘, 就得到

$$a_n \leqslant \frac{a_1}{q} q^n.$$

由于 $\frac{a_1}{q}$ 是一个常数, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, 则 $a_{n+1} \geqslant a_n$, 即 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$ 级数的通项 a_n 不会趋于零, 因此级数发散. □

例 7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

证 $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{e}{2} > 1$. 故级数发散.

例 8 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x \geqslant 0)$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim \frac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e},$$

故当 $x > e$ 时级数发散, 而当 $0 \leqslant x < e$ 时级数收敛. 当 $x = e$ 时, 作为习题，大家仔细分析一下.

级数是无穷多个数相加，或者看成是有限和的极限形式，而积分也是一种有限和的极限形式，只是最终的结果不是“无穷求和”，而是“连续求和”. 但是两者之间是有可比性的. 在此我们先讨论一种联系

定理 4 (Cauchy 积分判别法) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义, 在 $[1,+\infty)$ 上非负且单调减少. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散.

证 由 $f(x)$ 的单调性可知, 当 $k \leqslant x \leqslant k+1$ 时有

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k),$$

于是

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k).$$

将上述不等式对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 相加, 就得知, 对任何 $n \in \mathbf{N}$ 有

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

若 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则由上式左半可知 $\sum\limits_{k=2}^{n+1} f(k)$ 有界, 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 若 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则由上式右半可知 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ 无界, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散. □

例 9 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

证 级数与积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$ 同敛散. 而

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \begin{cases} \dfrac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

故原级数当 $\alpha > 1$ 时收敛, 而当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

注记 无论是 Cauchy 判别法, 还是 D′Alembert 判别法，都是和几何级数进行比较. 我们自然会问, 这两种判别法哪一个更强？另一方面，在我们所举的收敛级数的例子中,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n,\ (0 < q < 1);\ \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 1;\ \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta},\ \beta > 1$$

他们的通项趋于 0 的速度一个比一个慢. 因此，是否可建立与其它两个收敛速度较慢的级数进行比较，并产生新的判别法？关于第一个问题的回答有如下一条定理：

定理 设 $\{a_n\}$ 是任意正数列，则

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

从这个公式中可看出，凡是 D′Alembert 判别法能判别的，Cauchy 判别法一定也能判别，但反之不然 (具体例子见习题).

关于第二个问题，先考虑两个正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 之间各自通项的前后项之比如果满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

则后者收敛就意味着前者也收敛 (见习题 7.1 中第 13 题). 现在把一个正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>0$ 进行上述比较，如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}}{\dfrac{1}{n^\alpha}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

则

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha-1}{\dfrac{1}{n}}$$

当 $n\to\infty$ 时，极限值是 α, 所以有下面结论

Raabe 判别法 如果

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$$

则当 $\alpha>1$ 时, 正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 否则当 $0<\alpha<1$ 时, 级数发散.

例 超几何级数：设 α,β,γ,x 都是正数.

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=x$$

所以，当 $x<1$ 收敛，当 $x>1$ 发散. 当 $x=1$ 无法判别. 但是当 $x=1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\gamma-\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1+\gamma-\beta-\alpha$$

所以当 $\gamma>\alpha+\beta$ 时收敛，当 $\gamma<\alpha+\beta$ 时发散. □

如果和收敛更慢的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\beta>1$ 进行比较，还也可以得到所谓 Gauss 判别法，在此就不再赘述了.

7.1.3 一般级数的收敛性

正项级数是一种特殊情况, 比正项级数复杂一点的是下列的交错级数

(1) 交错级数

所谓交错级数就是级数的项一项正、一项负，可以写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，其中 $a_n \geqslant 0$. 因为交错级数的部分和满足

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

所以，当 a_n 单调减趋于 0 时，$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant 0$，而且

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1$$

即，S_{2n} 单调增有上界. 所以收敛：$S_{2n} \to S$. 另一方面，$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S + 0 = S$, 因此

定理 5 (Leibniz) 设 $\{a_n\}$ 单调趋于零, 则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

从上面的分析不难看出，部分和的偶数项和以及奇数项和与极限的误差是

$$0 \leqslant S - S_{2n-1} = a_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) - \cdots \leqslant a_{2n},$$
$$0 \geqslant S - S_{2n} = -a_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) + \cdots \geqslant -a_{2n+1}.$$

收敛交错级数的典型例子是：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$（比较一下 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散性，可以体会一下交错的相互抵消的结果）. 稍后, 我们将知道它的和是 $\ln 2$.

(2). 绝对收敛性和条件收敛

对于一般级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 来说 (即对通项的正负没有限制) , 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**绝对收敛**.

定理 6 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则级数本身一定收敛.

证 显然有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|,$$

故由 Cauchy 准则就可证得结果.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 就称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为**条件收敛**. 例如，$\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 都收敛，但是通项取绝对值后，结果是发散的，所以是条件收敛的.

定理 7 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则任意改变求和次序后所得的新级数仍收敛, 并且其和不变.（对于绝对收敛的一般级数，在这一点上性质与正项级数一样）.

证 设

$$a_n^{\pm} = \frac{|a_n| \pm a_n}{2}$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} 0, & a_n \leqslant 0, \\ a_n, & a_n \geqslant 0; \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0, \\ 0, & a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

因此由 $a_n^\pm$ 构成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\pm$ 都是正项级数，而且满足

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^- \geqslant a_n^\pm$$
$$a_n = a_n^+ - a_n^-$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\pm$ 都收敛，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的求和次序改变后, 相应的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\pm$ 的求和次序作对应的改变. 而后者是正项级数, 改变次序后收敛性和收敛的值不变. 因此前者的收敛性和收敛值也不会变. □

推论 2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛. 但如果级数是条件收敛的, 则两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都发散.

证明 第一个结论是显然的. 对于第二个结论, 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 不能都收敛, 但由

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

可知, 上式中三个级数之中不可能有两个收敛. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 只能都发散. □

绝对收敛级数的收敛是由于通项趋于零的速度足够快, 而条件收敛的级数的通项趋于零的速度有可能不够快, 但通过正负项相抵消使得级数收敛.

作为对比, 我们叙述下面有趣的定理 (略去证明).

定理 8 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则适当改变求和的次序可以使新级数收敛于给定的任意实数, 或者以各种方式发散.

(3). 一般级数收敛的判别法

对于一个一般级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 来说, 最一般的判别法当然是 Cauchy 收敛准则. 但是这个准则有时不好具体使用. 而利用上述绝对收敛的概念, 首先考擦 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$，并利用正项级数的判别法，如果收敛，原级数也就收敛了，如果发散，仍无法断定级数本身是否收敛.

下面两个定理，就是对某一类一般级数给出判别收敛性的判别法. 为此，先要介绍一个引理

引理 (Abel) 设有两串数：$a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, c_n$，记

$$A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

如果 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \cdots b_n \geqslant 0$；$m \leqslant A_k \leqslant M$, $k = 1, 2, \cdots, n$，则

$$b_1 m \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant b_1 M$$

这个引理就是分部积分法的离散形式.

证 约定 $A_0 = 0$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).\end{aligned}$$

□

定理 9 (Dirichlet) 如果 $\{b_n\}$ 单调减，且 $b_n \to 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界：$|A_n| = |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| \leqslant M$. 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 10 (Abel) 如果 $\{b_n\}$ 单调有界；$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 9 的证明可以直接利用 Cauchy 收敛准则、Abel 引理来完成. 定理 10 的证明可以利用定理 9 的结论，因为 $\{b_n\}$ 单调有界，所以有极限，设 $b_n \to b$，所以 $b_n - b$ 或 $b - b_n$ 单调减；而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当然其部分和一定是有界的.

例 1：设 $\alpha > 0$, 对任意 $n \in \mathbf{N}$ 都有 M, 使 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| < M$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛.

也可以直接证明，记 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 所以

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{n^\alpha} = \frac{A_m}{m^\alpha} + \sum_{n=1}^{m-1} A_n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).$$

显然有

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A_m}{m^\alpha} = 0.$$

又由微分中值公式可知有 $0 < \theta < 1$ 使

$$\begin{aligned}\left| A_n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \right| &= \left| \alpha A_n \frac{1}{(n+\theta)^{\alpha+1}} \right| \\ &< \alpha M \frac{1}{n^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ 收敛, 故原级数绝对收敛.

例 2 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解 $x=2k\pi$ 时, 该级数就是调和级数, 故发散.

若 $x\neq 2k\pi$, 记

$$A_n=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x-\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

于是

$$|A_n|<\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|},$$

故级数收敛. 类似可讨论下列级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

例 3 求证:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

证 由例 2 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛, 如果它绝对收敛, 则由 $\cos^2 n\leqslant|\cos n|$ 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$$

也收敛, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}.$$

上式右端第一个级数发散, 第二个级数收敛, 故左端级数不能收敛, 此矛盾说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}$ 发散.

例 4 再来看看交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$，可以把它看成是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 的形式，其中 $a_n=(-1)^{n+1}$，显然，$|A_k|=|a_1+\cdots+a_k|\leqslant 1$，所以，当 b_n 单调减且 $b_n\longrightarrow 0$ 时，级数收敛. 这就是我们前面得到的结果.

关于无穷数项级数的判别法，必须意识到，判别法都不是万能的，只不过它们具有相当广的适用范围. 你还可以继续研究更精细的判别法. 从所列举的各类判别法，它们的证明过程，实际上也是给出了判别级数敛散性的一种方法. 所以，学会使用判别法固然很重要，但是掌握方法却是更加可贵.

习题 7.1

1. 证明下列等式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$.

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛; 试举例说明逆命题不成立; 但若 $a_n>0$, 则逆命题成立.

3. (1) 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$;

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

4. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛; 试问反之是否成立.

5. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个非负数列满足 $a_{n+1}<a_n+b_n$, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

6. 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是三个非负数列满足

$$a_{n+1}\leqslant a_n-b_n\Phi(a_n)+c_na_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty.$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

7. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

8. 研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n-1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{\pi}{4n}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1000^n}{n!}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$;

(14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^k}$;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$;

(16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n\quad(a>0)$.

9. 求下列极限 (其中 $p>1$)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)$.

10. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散, 试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛? 并说明理由.

11. 设 $a_n>0, a_n>a_{n+1}\,(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

是收敛的.

12. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 绝对收敛.

13. 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{n}}-1)$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{p}{n}\right)$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$.

14. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\frac{S_n^+}{S_n^-}$ 当 $n\to\infty$ 时有极限且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-}=1$$

这里，$S_n^{\pm}$ 是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{\pm}$ 的部分和，a_n^+，a_n^- 的定义由 §7.3 给出.

15. 证明如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 并且从某项之后有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

16. 研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

§7.2　函数项级数

7.2.1　概念

设 $u_1(x),\ u_2(x),\cdots,u_n(x),\ \cdots$ 是定义在 E 上的一列函数. 若有限个函数相加，则结果还是定义在同一个定义域中的函数，现在考虑无穷多个函数相加问题.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

称为 E 上的函数项级数. 对 $x_0\in E,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 就是一个数项级数. 如果收敛，则称 x_0 为收敛点，如果发散，则称为发散点.

不妨设函数项级数的收敛点集全体为 $[a,b]$，所以

$$x\in[a,b],\quad x\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$$

定义了一个函数. 或者, 记

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),$$

为函数项级数的前 n 项的部分和, 如果存在函数 $S(x)$，使得对 $x_0\in[a,b]$，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=S(x_0)$

这种定义方式称为函数项级数**逐点收敛**.

从定义中我们得到，函数项级数的收敛，就是部分和所构成的函数列的收敛问题.**今后，如果我们独立地讨论函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛等问题，其定义与关于 $\{S_n(x)\}$ 一样，所以不再赘述**.

例 1　讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛性.

解　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都有定义 (对于固定的 x, 就是一个几何级数), 但只在 $(-1,1)$ 上收敛并有

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

而当 $|x|\geqslant 1$ 时, 级数发散.

例 2　讨论 $x+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots x^{n-1}(x-1)+\cdots$ 的收敛性.

解　$S_n=x+x^2-x+x^3-x^2+\cdots+x^n-x^{n-1}=x^n,$

$$\lim_{n\to\infty}S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

在有限求和过程中，函数的连续性, 以及可导、可积等解析性质都保持. 对于无限求和，和函数是否也能继承这些性质，即

$u_n(x)$ 连续，是否 $\Longrightarrow S(x)$ 连续?

$u_n(x)$ 可导，是否 $\Longrightarrow S(x)$ 可导? 如果可导，是否有

$$S'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}{u'}_n(x)?$$

$u_n(x)$ 可积，是否 $\Longrightarrow S(x)$ 可积? 如果可积，是否有

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x))dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx?$$

上面的例 2 显示，连续函数的和函数可能间断.

例 3 设 $\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$ 是 $[0,1]$ 上有理数的全体，在 $[0,1]$ 上定义

$$S_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots r_n,\\ 0, & x=\text{其他值}\end{cases}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理数},\\ 0, & x=\text{无理数}\end{cases}$$

对于每一个 $S_n(x)$，它是 $[0,1]$ 上可积函数(因为只有有限个间断点)，但 $S(x)$ 却不是 Riemann 可积的.

例 4 设

$$S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots;\quad x\in[0,1]$$

显然 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$. 因而 $\int_0^1 S(x)dx=0$，但

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx=\lim_{x\to\infty}(1-e^{-n^2})=1$$

例 5

$$S_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$$

但是 ${S'}_n(x)=\sqrt{n}\cos nx\nrightarrow 0$.

补充这些例子，是为了理解上述问题并非平凡的. 为了解决这些问题，我们需要引进一种称之为一致收敛的概念.

7.2.2 一致收敛性

函数列和函数项级数在收敛域上的收敛性, 本质上是 “点态” 的收敛. 在各个收敛点有不同的收敛速度. 当收敛速度有某种整体的一致性时, 称其为一致收敛, 准确地说就有下面的定义.

定义 1 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上收敛, 如果存在 E 上函数 $f(x)$, 对任意正数 ε, 都有 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 对所有 $x\in E$ 都有

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$(或一致趋于 $f(x)$).

显然 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$ 等价于 $\{f(x)-f_n(x)\}$ 一致趋于零. 因此我们有等价的命题

定理 1 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0,\quad \text{其中},\ \beta_n=\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|$$

此命题的证明留给读者完成.

当定义中的函数列是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ **的部分和时** (**即** $f_n(x)=S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$), **定义** 1 **也就给出了函数项级数的一致收敛性**.

例 1: $f_n(x)=\dfrac{1}{x+n}\quad f(x)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$

任给 $\varepsilon>0$, 取 $N>\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n>N$ 时,

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$$

对所有 $x\in[0,1]$ 都成立. 所以一致收敛. 或者 $\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}\to 0$

例 2:

$$f_n(x)=x^n,\ x\in[0,1];\quad f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

因为

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1$$

所以不一致收敛 (见下图).

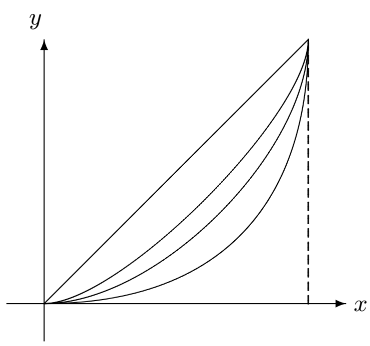

图 7.1

定理 2 (Cauchy 准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是: 对任给的正数 ε, 存在 $N>0$, 使当 $n>N$ 时, 对任何正整数 p 和 $x\in[a,b]$ 都有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+n_{n+p}(x)|=|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon.$$

推论 1 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致趋于零，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |u_n(x)| = 0$. 读者可自行完成定理和推论的证明.

例 3 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 因为 $ne^{-nx} > 0$, 且对 $x > 0$, 有

$$ne^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

所以级数是收敛的. 但是

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |u_n(x)| \geqslant |u_n(\frac{1}{n})| = ne^{-1}$$

所以级数在区间 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

定理 3 (Weierstrass) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；又在 $[a,b]$ 上恒有

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

这里, 称正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上的控制级数. Weierstrass 定理的条件比较强, 它实际上要求级数是绝对收敛的, 但是, 它却是一个最简洁最实用的判别法.

由这个判别法, 不难看出例 3 中的级数虽然在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但是在区间 $[\delta,+\infty)$, $\delta > 0$ 上满足 $|ne^{-nx}| \leqslant ne^{-n\delta}$, 所以是一致收敛的.

例 4 $\alpha > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证 因为

$$\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ 收敛, 所以原级数一致收敛.

若对定义域中每个固定的 x 函数列 $\{u_n(x)\}$ 作为数列是有界的，则称此函数列**逐点有界**. 若存在一个正数 M 使得 $|u_n(x)| < M$ 对所有 n 及定义域中的所有 x 成立，则称此函数列**一致有界**. 仿照数项级数中 Dirichlet 和 Abel 的判别法，我们有

定理 4 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上

（1）（Dirichlet）$\{v_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上单调减，且一致趋于 0；$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和在 $[a,b]$ 上一致有界.

（2）（Abel）$\{v_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上单调减（或单调增），且一致有界；$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

读者可以自己完成证明，但是应注意每一步的一致性体现在何处.

例 5 设 a_n 单调减趋于 0, $\pi > \delta > 0$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 一致收敛.

证 因为

$$A_k(x)=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos kx=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

故

$$|A_k(x)|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\dfrac{\delta}{2}}.$$

所以一致有界. 而 a_n 显然单调减一致趋于 0. 所以原级数在定义的区间上是一致收敛的.

例 6 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $x\geqslant 0$ 一致收敛.

证 因为命 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 一致收敛 (它与 x 根本毫无关系), 而 $\frac{1}{n^x}$ 在 $x\geqslant 0$ 中单调减, 而且 $|\frac{1}{n^x}|\leqslant 1$ 一致有界. 所以原级数在 $x\geqslant 0$ 上一致收敛.

7.2.3 一致收敛级数的性质

我们将看到, 正是一致收敛的概念, 使我们可以讨论和函数的解析性质. 我们不再单独讨论函数列以及它的极限函数的性质, 因为以下所有讨论中, 只要写出部分和的内容, 就是关于函数列的内容.

定理 5 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 且求和项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续.

证 任给定 $x_0\in[a,b]$, 只要证明 $\lim\limits_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$ 即可. 根据连续的定义, 就要估计不等式 $|S(x)-S(x_0)|$. 为此,

对任意的 $\varepsilon>0$, 由一致收敛性可知, 存在 N, 使对任何 $x\in[a,b]$ 都有

$$|S_N(x)-S(x)|<\varepsilon/3.$$

再由 $S_N(x)$ 在 x_0 连续性 (它是有限个连续函数的和) 可知, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|S_N(x)-S_N(x_0)|<\varepsilon/3.$$

所以, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}|S(x)-S(x_0)|\leqslant&|S(x)-S_N(x)|+|S_N(x)-S_N(x_0)|\\&+|S_N(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 在 x_0 连续. 因此 $f(x)$ 在 I 连续. □

注意, 该定理有一个非常常用的推广, 即**如果求和项 $u_n(x)$ 在区间 I 上连续, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 的任一个闭子区间中一致收敛. 则结论是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 收敛, 并有连续的和函数**. 一致收敛是一个整体性质, 而连续是一个局部性质. 要证明 "局部" 的连续, 只要用到在 "局部" 周围的 "整体" 上的一致收敛性即可. 而每一点的连续, 就是整体的连续.

一个典型的例子就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx},\ \ x \in (0,+\infty)$, 它在区间 $(0,+\infty)$ 上，可不是一致收敛的! 但在任何闭子区间上一致收敛, 所以它的和函数连续.

定理 6 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 求和项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

证 我们的主要目的是为了证明积分和无限求和的交换性. 所以不妨设 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，当然 $S(x)$ 也连续，所以可积.

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对 $x \in [a,b]$ 有

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

故当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (S(x) - S_n(x))dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b |S(x) - S_n(x)|dx \\ &< (b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ 是收敛的, 而且收敛于 $\int_a^b S(x)dx$. □

例 7 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$, 求 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$.

解 由级数的一致收敛性, 可知有

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0.$$

定理 7 设级数的求和项 $u_n(x)$ 在 $I = [a,b]$ 有连续导数, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 收敛于 $S(x)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 I 一致收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 I 可微, 并有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$，所以由前面的定理可知 $g(x)$ 连续，而且

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt &= \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt \\ &= S(x) - S(a).\end{aligned}$$

所以 $S'(x) = g(x)$, 即和函数可微, 且求导和求和运算可交换. □

习题 7.2

1. 证明两个在共同区间 I 上一致收敛的级数的和, 在 I 上也一致收敛.

2. 确定下列函数项级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-3^n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

3. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2},\ -\infty < x < +\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n[1+(nx)^2]},\ -\infty < x < +\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n,\ \ (a)\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\quad (b)\ -1 < x < 1$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx},\ 0 \leqslant x < +\infty$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n},\ 0 \leqslant x < +\infty$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},\ 1 < x < +\infty$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n},\ 0 < \delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(ne^n)^x},\ 0 \leqslant x < +\infty$.

4. 在区间 $[0,1]$ 上, 定义

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n} \\ 0, & x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 但是它没有 Weierstrass 判别法中的控制级数.

5. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$ 中一致收敛.

6. 证明函数 $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续, 且有连续的各阶导数.

7. 证明:$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 当 $|x| < +\infty$ 时, 具有连续的二阶微商.

8. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

9. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, 求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$.

§7.3 幂级数和 Taylor 展式

本节我们将讨论一种简单的函数项级数“幂级数”：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

别看它简单，我们会发现，幂级数和后面要讨论的三角级数是应用最广泛也最重要的两类函数项级数. 这也许应证了这样一句话：“简单的即是重要的”. 我们首先要研究清楚它的和函数的性质：定义域、连续性、可微性和可积性.

7.3.1 幂级数的收敛区域

设幂级数的收敛区域为 E. 显然，$x=0$ 是一个收敛点，即 $0 \in E$（所以收敛区域并非空集）. 有这样极端的例子, 使得幂级数的收敛区域仅含一个点 0, 或者收敛区域是所有实数, 例如级数

$$1 + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots + n^nx^n + \cdots$$

只在 $x=0$ 处收敛, 这是因为对于任意 $x \neq 0$, 总能找到这样的 N, 使得 $|x| > \frac{1}{N}$, 所以当 $n > N$ 时, 所有的项 n^nx^n 的绝对值都大于 1.

另一个例子是

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

它对任何的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是绝对收敛的.

如果幂级数在 $x_0 \neq 0$ 收敛，则对于任意满足 $|x| < |x_0|$ 的 x，有

$$a_nx^n = a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nx_0^n = 0$（这是因为幂级数在 x_0 收敛）, 所以 $|a_nx_0^n| < M$（有界）, 即 $|a_nx^n| \leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$, 而 $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1, \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛；因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛. 总之

定理 1 如果幂级数在 $x_0(\neq 0)$ 处收敛，则在所有 $|x| < |x_0|$ 处绝对收敛. 如果幂级数在 x_0 处发散，则当 $|x| > |x_0|$ 时发散.

分析一下，收敛情况有三种可能：

1° 仅在 $x=0$ 处收敛：$E = \{0\}$;

2° 在 $E = (-\infty, +\infty)$ 上处处收敛;

3° 有不为零的收敛点和发散点，所以 E 有界.

定理 2 如果幂级数有非零的收敛点和发散点, 则有正数 R, 使的幂级数在 $(-R, R)$ 中绝对收敛, 而当 $|x| > R$ 时, 幂级数发散.

证 由于有发散点, 所以 E 是非空有界集，故 E 有上确界，记为 R. 又由于有非零的收敛点, 所以 $R > 0$，根据前面的分析就得到本定理的结论. □

称 R **为幂级数的收敛半径;** $(-R, R)$ **称为级数的收敛区间**. 现在基本明白了, 幂级数的收敛区域 E 基本上是一个以原点为中心的区间, 在这个区间内部, 幂级数不但收敛而且绝对收敛. 只是区间的端点尚不确切, 需要具体问题具体对待.

现在的问题是, 如何利用幂级数本身提供的信息 (它的系数), 计算它的收敛半径?

7.3.2 收敛半径的计算

定理 3 如果

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L; \quad \text{或} \quad \lim\sqrt[n]{|a_n|} = L$$

则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为

$$R = \frac{1}{L} = \begin{cases} 0, & L = +\infty; \\ \dfrac{1}{L}, & L \text{ 有限}; \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

证 因为幂级数在收敛区间内是绝对收敛的, 因此由 D′Alembert 判别法可知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x|.$$

故当 $L|x| < 1$, 即 $|x| < R = \dfrac{1}{L}$ 时, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛; 而当 $|x|L > 1$, 即 $|x| > R$ 时, 幂级数发散. 所以, 级数的收敛半径为 R. 关于第二种情况的证明类似, 只是要利用的是 Cauchy 判别法. □

例 1 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x^n$ 的收敛半径 R.

因为 $\lim\dfrac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} = \lim\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = 1$, 故 $R = 1$;

当 $\alpha = 0$: $\sum x^n$ 在 $x = \pm 1$ 发散, 所以 $E = (-1, 1)$ (不含端点).

当 $\alpha = -1$: $\sum \frac{1}{n} x^n$ 在 $x = 1$ 发散, 在 $x = -1$ 收敛. 所以 $E = [-1, 1)$ (含左端点, 不含右端点).

当 $\alpha = -2$: $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ 在 $x = \pm 1$ 都收敛. 所以 $E = [-1, 1]$ (含左右端点).

例 2 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ 的收敛半径 R.

因为 $\lim\dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\dfrac{1}{n+1} = 0$, 故 $R = +\infty$;

例 3 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right) x^{2n}$ 的收敛半径 R.

解 直接用判别式.

$$a_n = \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) x^{2n}, \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 4|x|^2$$

所以当 $4|x|^2 < 1$ 时, 级数收敛; 当 $4|x|^2 > 1$ 时, 级数发散.$R = \frac{1}{2}$

你也可以把级数看成是 $y=x^2$ 的幂级数，只要记住你求的收敛区域是关于 x 的.

例 4 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 其中

$$a_n=\begin{cases}2^k, & n=2k;\\ k, & n=2k+1.\end{cases}$$

你可以把这个幂级数写成两个级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}$$

这样做虽然不大令人放心，不过后面我们会看到，幂级数在公共的收敛区域内是可加的. 利用 D′Alembert 判别法可知，

对于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$：$2|x|^2<1$ 时收敛，$2|x|^2>1$ 时发散；

对于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}$：$|x|^2<1$ 时收敛，$|x|^2>1$ 时发散.

所以，原级数的收敛半径是：$R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

最后两个例子说明, 做事不能太教条. 幂级数还是级数，碰到个例问题，最好的办法是回到根本上去.

7.3.3 幂级数的性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $I=(-R,R)$ 中收敛于 $S(x)$.

定理 4 幂级数在 $I=(-R,R)$ 内任何闭子区间上一致收敛, 因而, 和函数 $S(x)$ 在 I 内连续.

证 任给 $0<r<R$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ 收敛, 而当 $|x|\leqslant r$ 时

$$|a_n x^n|\leqslant |a_n r^n|,$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛. 对于 I 中任意闭区间 J，一定存在 r，使 $J\subset[-r,r]\subset(-R,R)$，所以在 J 上一致收敛. 而和函数的连续性则是显然的. □

定理 5 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $I=(-R,R)$ 中可微, 并有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

且求导后的幂级数的收敛半径仍为 R.

证 先求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径. 任取 $x_0\in(-R,R)$, 存在 $r:\ |x_0|<r<R,\ \sum|a_n r^n|<\infty$, 因此 $|a_n r^n|<M$ 有界, 所以

$$|n a_n x_0^{n-1}|=|a_n r^n|\frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}\leqslant M\frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}.$$

因为 $\sum \frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}$ 当 $|x_0| < r$ 时收敛, 所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 在 x_0 绝对收敛. 也就是说 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 的收敛半径 $R' \geqslant R$.

如果 $R' > R$，则存在 x_0：$R' > x_0 > R$, $\sum |na_nx_0^{n-1}| < \infty$. 因为

$$x_0|na_nx_0^{n-1}| = |na_nx_0^n| \geqslant |a_nx_0^n|$$

所以 $\sum |a_nx_0^n|$ 收敛, 这是不可能的, 所以 $R' = R$.

作为幂级数,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 在 $(-R, R)$ 的任意闭子区间上一致收敛, 所以定理的结论在任意闭子区间上成立, 所以在 $(-R, R)$ 内每一点成立. □

因为幂级数的导数还是同样收敛半径之内的幂级数, 所以可以继续求导, 即幂级数的和函数 $S(x)$ 有任意阶导数，而且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k},$$

收敛半径也是 R.

定理 6　幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $I = (-R, R)$ 内可积，且有

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad x \in (-R, R)$$

并且积分后得到的幂级数的收敛半径仍为 R.

例 5　已知幂级数 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在整个数轴上收敛，则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = S(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

解此微分方程得

$$S(x) = Ae^x.$$

由于 $S(0) = 1$, 故 $S(x) = e^x$, 即

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

例 6　求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的和.

解　容易知道这个幂级数的收敛半径为 1, 但在 $x = \pm 1$ 都发散, 故收敛区间为 $(-1, 1)$. 令 $S(x) = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 再令 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 在区间 $[0, x]$ 上逐项积分, 得

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

再将等式两端对 x 求微商就得到 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, 所以原级数的和函数是

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2},\quad |x| < 1$$

由此又可求出一些数项级数的和. 例如令 $x=\frac{1}{2}$, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$; 令 $x=\frac{1}{3}$, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$.

定理 7 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $I=(-R,R)$. 如果级数在区间的右 (左) 端点收敛, 则和函数 $S(x)$ 在端点处左 (右) 连续.

证 只需证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(0,R]$ 一致收敛. 因为在 $(0,R]$ 上,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛及 $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 单调减少, 故级数在 $(0,R]$ 中一致收敛. 另一端的证明类似. □

7.3.4 幂级数的运算

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2, 取 $R=\min(R_1,R_2)$，两个幂级数在共同的收敛区域可以相加，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n\pm b_nx^n)$$

两个幂级数还可以相乘，其结果还是一个幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

在 $(-R,R)$ 中成立, 其中 $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

注记 从已经掌握的幂级数的信息来看，除了幂级数的收敛区域是一个区间外，其他的解析性质和多项式函数没有什么区别. 求导可以逐项求导，积分也可以逐项积分，只不过幂级数求导或积分后，它的“次数”不会像多项式那样降低或提高（幂级数的“次数”是无穷的）. 可以逐项求导或积分（或者说求和求导或积分可交换）的性质是非常好的性质.

幂级数更一般的形式是在 x_0 展开的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

相当于前面讨论的幂级数在所定义的数轴上做了一个平移. 收敛区间也就平移导以 x_0 为中心的一个区间上：(x_0-R,x_0+R) 以及可能的端点 x_0-R(或 x_0+R) .

7.3.5 函数的 Taylor 展开式

到此为止, 我们确定了幂级数的收敛区域, 并研究了它的和函数的各种性质. 但在实际应用中, 所遇到的经常是相反的问题, 即函数 $f(x)$ 在给定的区间上是否可以展开成一个幂级数?

如果 $f(x)$ 可以表示成幂级数, 即它可以表示成 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$, 所以，$f(x)$ 必有任意阶微商. 两边求导后令 $x=x_0$，有 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. 因此, 如果 $f(x)$ 能够表示成幂级数，那么这个幂级数是唯一确定的，它就是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

反之, 对在点 x_0 有任意阶微商的函数 $f(x)$, 总能构造幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称它为 $f(x)$ 在点 x_0 的**Taylor 级数**, 记作

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别当 $x_0=0$ 时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 $f(x)$ 的**Maclaurin 级数**. 自然要问, 这样构造的幂级数是否收敛于函数 $f(x)$ 自身?

由 Taylor 定理知, 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有任意阶微商, 则

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)&+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\\&+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),\end{aligned}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

而 ξ 是 x_0 与 x 之间的一点. 由此可见

定理 8 设函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 上有任意阶微商, 则 $f(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上可以展成 Taylor 级数的充分必要条件是对这区间内的任意点 x, 都有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

特别, 当 $f(x)$ 的各阶微商在区间 (x_0-R,x_0+R) 内任何闭区间上一致有界, 则 $f(x)$ 在这区间上可以展成 Taylor 级数

各阶导数一致有界即是存在一个正数 M, 使得 $|f^{(n)}(x)|<M\quad(n=1,2,\cdots)$. 于是, 对任意 $x\in(x_0-R,x_0+R)$, 取 $r:\ |x-x_0|<r<R$, 有

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|<M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\\&\leqslant M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

对于初等函数, 其 Taylor 展开中的余项 R_n 已经在第三章中列出, 因此只要检验当 $n\to\infty$ 时, 余项的极限是否为零即可.

1. 指数函数 $f(x)=e^x$：

当 $|x|<M$ 时，$|f^{(n)}(x)|=|(e^x)^{(n)}|=|e^x|\leqslant e^{|x|}\leqslant e^M \quad (n=1,2,\cdots)$，且 $f^{(n)}(0)=1$，所以

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

又因为 M 是任意的, 所以上面的展开式对所有实数成立. 特别取 $x=1$，有 $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

2. 三角函数函数 $\sin x$ 和 $\cos x$：

因为, 对任意的实数 x 都有

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\sin x\right|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1 \qquad (n=1,2,\cdots),$$

故正弦函数 $\sin x$(同样还有 $\cos x$) 可在整个数轴上展成幂级数.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots. \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\cdots. \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

3. 二项式函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ （α 为任意实数）：

用类似上述方法也可以得到二项式 $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开式. 为避免估计余项的困难, 可用下述方法.

因为

$$f^{(n)}(0)=\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha\Big|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$

所以二项式 $(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 级数为

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

由于

$$\lim\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\right|=\lim\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,$$

故这个级数的收敛半径为 1. 为了证明它在收敛区间 $(-1,1)$ 上的和函数就是 $(1+x)^\alpha$, 设

$$F(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

逐项求导得

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1},$$

以 $1+x$ 乘此等式的两端, 并合并右端 x 的同次幂系数就得到关系式

$$(1+x)F'(x)=\alpha F(x),$$

解此微分方程并注意到 $F(0)=1$, 即算得

$$F(x)=(1+x)^{\alpha}.$$

当 α 是自然数时 $(1+x)^{\alpha}$ 的展开式就是熟知的二项式定理.

如果令 $\alpha=-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$, 就得到几个常见的二项式级数.

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1<x<1);$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \qquad (-1<x\leqslant 1).$$

有时对某些函数的 Taylor 展式逐项求导或逐项积分也能得到另一些函数的 Taylor 展式. 例如, 若将展开式

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1<x<1)$$

的两端从 0 到 x 积分就得到对数函数 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (-1<x<1).$$

由于展式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛, 所以展式的成立区间为 $-1<x\leqslant 1$, 且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2.$$

同样从展开式

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (-1<x<1)$$

逐项积分可得反正切函数的 Taylor 展式

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

取 $x=1$, 就得到数 $\frac{\pi}{4}$ 的级数表示

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots.$$

例 7 将函数 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 展成 Maclaurin 级数.

解 由于

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}.$$

又

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n. \qquad (-2<x<2)$$

所以, 当 $-1<x<1$ 时有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

例 8 在 $x=3$ 处, 把 $\ln x$ 展成 Taylor 级数.

解 $\ln x=\ln(x-3+3)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x-3}{3}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}\ln x&=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-3}{3}\right)^n\\&=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n3^n},\end{aligned}$$

展开式在 $-1<\frac{x-3}{3}\leqslant 1$, 即 $-3<x-3\leqslant 3$ 中成立.

注记 在 e^x 的展开式中, 可以用复数代替 x. 特别对于 $x=i\phi$ 是纯虚数时 (其中 i 是虚数单位)

$$\begin{aligned}e^{i\phi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\phi)^n}{n!}=&\left(1-\frac{\phi^2}{2!}+\frac{\phi^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{\phi^{2m}}{(2m)!}+\cdots\right)\\&+i\left(\phi-\frac{\phi^3}{3!}+\frac{\phi^5}{5!}-\cdots+(-1)^m\frac{\phi^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots\right)\end{aligned}$$

不难发现, 上式的实部和虚部正是三角函数 $\sin\phi$ 和 $\cos\phi$ 的 Taylor 展开式, 因此有

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$$

这就是著名的 Euler 公式.

对于一般的复数 $a+ib$, 设 r 是它的模长,ϕ 是幅角, 则复数可以表示成

$$a+ib=r(\cos\phi+i\sin\phi)=re^{i\phi}$$

注意到 $e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$, 所以我们得到三角函数的指数表示

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

对比一下双曲函数

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad \sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

的定义, 不难发现两者的类似性. 读者今后还会发现三角函数和双曲函数在不同的几何空间或物理问题中扮演同样的角色等更多的类似性.

比上面的例子更为广泛的是, 如果我们把幂级数的理论拓展到复系数和复变量的幂级数, 则产生了复变量的解析函数一般理论的出发点. 这些内容, 读者在关于" 复变函数" 的课程中将会详细了解到.

习题 7.3

1. 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n x^{2n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}\ (a>0, b>0)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<R$ 时收敛, 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛, 则

$$\int_0^R f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

(注意: 这里不管 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R$ 是否收敛). 应用这个结果证明

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

3. 求下列幂级数的收敛区域及其和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$.

4. 求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$.

5. 求下列函数在指定点处的 Taylor 展开式, 并给出收敛区域.

(1) $x^3-2x^2+5x-7,\quad x=1$;

(2) $e^{\frac{x}{a}},\quad x=a$;

(3) $\ln x,\quad x=1$;

(4) $\frac{1}{x^2+3x+2},\quad x=-4$;

(5) $\ln(1+x-2x^2),\quad x=0$;

(6) $\cos x,\quad x=\frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 Maclaurin 展开式, 并给出收敛区域.

(1) $\sin^2 x$; (2) $\arcsin x$;

(3) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; (4) $(1+x)\ln(1+x)$;

(5) $\displaystyle\int_0^x \cos x^2 dx$; (6) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$;

(7) $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2} dx$.

7. 方程 $y+\lambda\sin y=x$ $(\lambda\neq-1)$ 在 $x=0$ 附近确定了一个隐函数 $y(x)$, 试求它的幂级数展开式中的前四项.

§7.4 级数的应用

级数的应用范围当然非常广泛, 本节将主要强调三个方面.

7.4.1 用级数方法计算积分

我们知道, 即使被积函数是初等函数, 一些积分的原函数是无法显式地由初等函数表示的, 因而无法使用 Newton—Leibniz 公式. 这使得积分会产生很大困难. 但是如果将被积函数展开成幂级数, 根据幂级数的理论, 我们可以逐项积分, 为此给我们提供了计算积分的一条可能的途径, 起码是能够得到积分的近似值.

例 1 计算积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

解 注意到展开式 $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛半径是 1, 但是在收敛区间的右端点也是收敛的. 因此

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+1}\right)dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

最后的结果是一个收敛的数项级数 (当然也是一个实数).

例 2 计算椭圆积分 $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad k^2 < 1.$

解 作变换 $u = \sin x$, 则

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)}}$$

将被积函数按照

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1 \leqslant x < 1)$$

展开

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n} x$$

注意到 $k^2\sin^2 x < 1$, 所以上式对所有的 x 都成立. 利用

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ 为奇数}, \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & m \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

并逐项积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right)$$

因此, 椭圆积分的任意近似值可以从上式中得到.

7.4.2 近似计算

我们已经知道,$e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 以及 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$. 因此要计算 e 和 π 的近似值, 只要计算展开式的前几项即可, 并估计剩余项的值得到近似的误差.

需要指出的是, 一些无理数有不同的级数表示形式 (我们今后会看到 π 就有多种级数表示式), 在选择近似计算时, 当然要选择那些计算量小, 精度高的表示式.

7.4.3 微分方程的幂级数解

设在二阶微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

中,$p(x)$ 和 $q(x)$ 在 x_0 的邻域可以展成幂级数, 则可以假定方程在 x_0 的邻域有幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

如果已经给出初始条件 $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'$, 则显然应有 $a_0=y_0,\ a_1=y_0'$. 代入方程后, 左端按 $x-x_0$ 的同次幂合并后, 各项的系数都是零, 就可以解出 $a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$, 从而得到方程在 x_0 邻域内的幂级数解.

例 1 求 Airy 方程

$$y''-xy=0$$

的幂级数解.

解 设

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

代入原方程, 就得到

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1})x^n=0.$$

即有

$$a_2=0,\quad a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)},\qquad (n\geqslant 1)$$

在上面的递推关系式中, 不难发现,$a_{3k+2}=0$, 但 a_0 和 a_1 可以是任意的, 不妨设 $a_0=C_1$ 和 $a_1=C_2$, 则

$$\begin{aligned}a_{3k}&=\frac{C_1}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdots(3k-1)\cdot3k}=\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3k-2)}{(3k)!}C_1\\a_{3k+1}&=\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}C_2\end{aligned}$$

故方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

其中

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}$$

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

例 2 设 $\nu \geqslant 0$, 求解方程

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

解 $p(x) = \frac{1}{x},\ q(x) = \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}$. 可假定方程的解为

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0.$$

其中 λ 为待定常数. 计算可得

$$x^2 y'' = \sum_{n=0^\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda},$$

$$x y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda},$$

$$x^2 y = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+\lambda},$$

$$-\nu^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} -\nu^2 a_n x^{n+\lambda}.$$

将上列各式代入方程的左端, 得到

$$(\lambda^2 - \nu^2) a_0 x^\lambda + ((\lambda+1)^2 - \nu^2) a_1 x^{\lambda+1} + \sum_{n=2}^{\infty} (((\lambda+n)^2 - \nu^2) a_n + a_{n-2}) x^{n+\lambda} = 0.$$

首先必有 $\lambda = \pm\nu$.

先设 $\lambda = \nu \geqslant 0$. 这时应有 $a_1 = 0$ 及

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(\nu+n)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}.$$

于是有

$$a_{2k+1} = a_1 = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

及

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2 k(k+\nu)} = \cdots = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (\nu+1) \cdots (\nu+k)}.$$

取 $a_0 = 2^{-\nu}$, 则

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!(\nu+1)\cdots(\nu+k)} \frac{1}{2^{2k+\nu}},$$

就得到方程的一个特解

$$y_1 = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

如果 ν 不是整数, 取 $\lambda=-\nu$, 类似可得 (11.4.7) 的另一个解

$$y_2=J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(-\nu+1)(-\nu+2)\cdots(-\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

由于方程是线性的, 所以方程的通解就是

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

方程 (11.4.7) 叫 ν 阶 Bessel 方程,$J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 叫第一类 Bessel 函数.

当 ν 是整数时,$J_{-\nu}(x)$ 无意义, 要求方程的另一个解, 就需要引进第二类 Bessel 函数, 已超出本书的范围.

7.4.4 Stirling 公式

现在，我们要讨论一个很有趣的问题. 大家知道，当我们比较无穷大量的阶时，有一个体会：n^α $(\alpha>0)$, a^n $(|a|>1)$, $n!$, n^n 一个比一个厉害. Stirling 公式, 就是给出 $n!$ 和 n^n 之间的一种关系, 即

定理（Stirling）

$$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\qquad(0<\theta_n<1).$$

为了证明定理, 首先证明下列引理

引理（Wallis） 记 $2n!!$ 与 $(2n-1)!!$ 分别表示前 n 个偶数和前 n 个奇数的连续乘积, 则

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

证 因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时成立

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,$$

积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}xdx,$$

所以

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

即

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

若令

$$a_n=\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1},\quad b_n=\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

则容易得出 $\{a_n\}$ 是递增数列，$\{b_n\}$ 是递减数列，且

$$b_n-a_n=\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}$$

当 $n\to\infty$ 时，这个差值趋于零，由此得 Wallis 公式. □

下面证明定理. 在展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\cdots+\frac{1}{2m+1}x^{2m}+\cdots\right)$$

中令 $x=\frac{1}{2n+1}$，就得到

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]$$

或写成

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots$$

这个级数的和显然大于 1，而小于把各项分母上的数 $5,7,\cdots$ 代之以 3 后所得的级数之和

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

所以有不等式

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

即

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<\exp\left(1+\frac{1}{12n(n+1)}\right)$$

再考察数列 $\{a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\}$：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

故得

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<\exp\left(\frac{1}{12n(n+1)}\right)$$

从左边不等式推知 a_n 是递减数列，并以 0 为其下界，所以必存在有限极限 a；从右边不等式推知

$$a_n\exp(-\frac{1}{12n})<a_{n+1}\exp(-\frac{1}{12(n+1)})$$

即 $\{a_n\exp(-\frac{1}{12n})\}$ 是递增数列，且仍以 a 为其极限. 如此上面两个单调数列的共同极限 a 必介于这两个数列的通项 $\{a_n\exp(-\frac{1}{12n})\}$ 与 a_n 之间，

$$\{a_n\exp(-\frac{1}{12n})\}<a<a_n.$$

若取 $\theta_n=12n\ln\frac{a_n}{a}$，则 $0<\theta_n<1$，并且

$$a_n=a\exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right)$$

代入 a_n 的表达式就得到

$$n!=a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right).$$

于是余下的问题就是要确定常数 a，由于

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{2n!},$$

但

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n a_n, \quad 2n! = \sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} a_{2n},$$

代入上式的右边，得

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{2n!} = \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{a_n^2}{a_{2n}},$$

令 $n \to \infty$，得

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{4}$$

从而 $a = \sqrt{2\pi}$. 所以就得到 Stirling 公式.

习题 7.4

1. 求下列积分 (1) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ (2) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

2. 求方程 $y'' - xy' + y = 0$ 的幂级数解.

3. 求方程 $y'' + y\sin x = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ 的幂级数解至 x^5 项.

4. 利用 Stirling 公式求极限.

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

5. 研究下列级数的敛散性.

   (1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$

6. 证明: 当 $n \to \infty$ 时,$\ln(n!) \sim \ln n^n$.

第 7 章补充习题

1. 证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = 1$

2. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

收敛, 就称数列 $\{a_n\}$ 是有有界变差的.

(1) 证明具有有界变差的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛.

(2) 构造一个发散的无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 使得其通项 $\{a_n\}$ 是一个具有有界变差的数列.

3. 设函数列 $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上由等式

$$f_0(x)=1,\quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

定义, 证明当 $n\to\infty$ 时, 函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

4. 设 $f_0(x)$ 是区间 $[0,a]$ 上连续函数, 证明按照下列公式

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(u)du$$

定义的函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

5. 利用二项式级数, 计算 $\sqrt{2}$ 到四位小数.

6. 利用函数的幂级数表示, 证明

$$e^xe^y=e^{x+y}$$