

中国科学技术大学

期中考试 5, 6 题解答及评分细则

1° 本次 4 小题, 各 6 分

2° 按步得分, 一步 2 分 (每种解法分为 3 步)

3° 如果中间出现笔误, 如分子分母写反, 乙写为 γ

只扣 1 分

4° 如果中间一步出现逻辑错误, 该步 0 分

(认为是失误, 后面正确依旧满分)

5° 对于后面没有列举出的答案

正确——得满分 (6 分)

出现小错误, 易补全——(4 分)

助教能尝试补全——(2 分)

助教不会补全——(0 分)

中国科学技术大学

五 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上有界导数

(1) 证 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续 (6分)

正解: ① $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y|$ (2')

② $\leq M |x - y|$ (2')

③ + 定义证明 (2')

(改的时候, 只要看到写了第2步, 意思正确就是满分)

错解: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(x_0)| \leq M$

$\Rightarrow \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| \leq (M+1)\delta \leq \varepsilon$

\Rightarrow 一致连续

(0分)

(2) 证 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续 (6分)

正解: ① $|f(x)| \leq M |x - a| + |f(a)|$ (2')

② $\left| \left(\frac{f(x)}{x} \right)' \right| = \left| \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \right| \leq \frac{M}{a} + \frac{|f(a)|}{a^2}$ (2')

③ 导数有界 \Rightarrow 是同义, 一致连续 (2')

正解: ① $|f(x)| \leq M |x - a| + |f(a)|$ (2')

② $\left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right| = \left| \frac{yf(x) - xf(y) + yf(y) - xf(y)}{xy} \right|$

$\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{x} + \frac{|f(y)| |y - x|}{xy}$

$\leq M' |y - x|$

$\leq \varepsilon$

1101C-08 201412 2500

(4')

中国科学技术大学

正解3. ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 0$ (2')

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2}$ 有界

② $\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'$ 有界 (2')

③ 导数有界 \Rightarrow 一致连续 (2')

错解1° $\left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right| \leq M$ ✗

2° $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq \left| \frac{f'(x)-f'(y)}{y} \right|$ ✗

(改的时候 如果知道 要用 导数有界 \Rightarrow 一致连续得2分)

六

1. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一阶可导, $f(0)=1$, $f'(x) < f(x)$

证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < e^x$ (6'分)

正解1. ① $g(x) = e^{-x} f(x)$ (2')

② $\begin{cases} g'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) < 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$ (2')

③ 结论 (2')

中国科学技术大学

正解2: ① $g(x) = f(x) - e^x$

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = f(0) - e^0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists \delta$, 在 $(0, \delta)$ 上 $g(x) < 0$ (2')

② 假设 $\exists x$ 使 $f(x) > e^x$

取 最大的 $x_0 > 0$ 满足 $g(x_0) = 0$ (2')

③ 在 $(0, x_0)$ 上 有 $g'(x) < g(x) < 0$

$\Rightarrow g(x) \downarrow$

$\Rightarrow g(x) < g(\frac{x}{2}) < 0$

矛盾! (2')

注: ②处取法不唯一, 只要取(某个集合的下确界), 又可以用这个证完, 就有2分。

③处证法很多, 对了就有2分。

错解: 在③处用数学归纳法: $\exists (\delta, \delta+\delta')$ 上 $g(x) < 0 \dots$ X

2. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0) = 1$, $f'(0) \leq 1$

$f''(x) < f(x)$, 证明 $x > 0$ 时, $f(x) < e^x$ (6分)

正解1: ① $f(x) = e^x (f(x) - f'(x))$ (2')

② $f(0) \geq 0$

$f'(x) = e^x (f(x) - f''(x)) > 0$ (2')

③ $f'(x) < f(x)$, 与上是同理 (2') 1412 2500

中国科学技术大学

正解2. ① $g(x) = f(x) - e^x$

$$g(0) = 0$$

$$g'(0) \leq 0$$

$$g''(0) = f''(0) - 1 < f(0) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \exists (0, \delta) \quad g(x) < 0 \quad (2')$$

② 假设 $\exists x$ 使 $g(x) \geq 0$

取最小的 $x_0 > 0$, $g(x_0) = 0 \quad (2')$

③ 在 $(0, x_0)$ 上, 有 $g(x) < 0$

$$\Rightarrow g''(x) < g(x) < 0$$

$$\Rightarrow g'(x) < g'(0) < 0$$

$$\Rightarrow g(x) < g(0) = 0$$

矛盾! (2')

(注: 这个注与上一问解法2一样)

④ 使用“归谬法”, 且能拿第一步的2分

正解3. ① $g(x) = e^x (f'(x) + f(x))$

$$g'(x) = e^x (f''(x) - f(x)) < 0$$

$$g(0) \leq 2$$

$$\Rightarrow g(x) < 2, \quad f'(x) + f(x) < 2e^{-x} \quad (2')$$

中国科学技术大学

$$(2) \quad h(x) = e^x f(x) - e^{2x} \quad (2')$$

$$(3) \quad \begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(x) = e^x (f(x) + f'(x) - 2e^x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(x) < 0$$

$$\Rightarrow e^x f(x) - e^{2x} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) < e^x \quad (2')$$

(其它解法)

错解 1° 前面提到的“类似归纳法”

$$2^\circ \quad g(x) = e^{-x} (f(x) - f'(x))$$

$$g'(x) = e^{-x} (f(x) - f''(x)) \quad (\text{算错了})$$

3° 构造函数时 $f(x)$ 出现分母上

$$\text{如 } \frac{e^x}{f(x)}$$