2.2. 6. $F(x)=f(x)-f(x+a)$

$F(0)\cdot F(a)=(f(0)-f(a))(f(a)-f(0))\leq 0.$

v.s. Chapter 2. 5.

$F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$

$$\begin{cases} F(0)=f(0)-f(\frac{1}{n}) \\ F(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n})-f(\frac{2}{n}) \\ \dots \\ F(\frac{n-1}{n})=f(\frac{n-1}{n})-f(1) \end{cases}$$

$f(0)=f(1)$

$\Rightarrow \exists i,j$ s.t. $F(\frac{i}{n})F(\frac{j}{n})\leq 0.$

13. ① 取 $a_n\to a$ $(a_n>a)$, $|a_m-a_n|<\delta$ $(n\geq N)$

$\Rightarrow |f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon$ $(n\geq N)$

② Cauchy. $|x'-a|<\delta$. $|x''-a|<\delta$ $\Rightarrow |x'-x''|<\delta$

$\Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

16. $\sin x^2$. 取 $a_n=\sqrt{2\pi n}$, $b_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

$b_n-a_n\to 0$, $f(b_n)-f(a_n)=1.$

Chapter 2: 4. 有零点 ✓

无零点: 不妨 $f(x)>0$

令 $M=\inf\{f(x)\}$, 对 $M+1$, $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, $f(x)>M+1$

内部 $[-X,X]$ 有最值.

7. $M=\sup f(x)$. $m=\inf f(x)$. $l=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

$M\geq l\geq m$

if $M>l$, $\varepsilon=\frac{M-l}{2}$, $\exists X>0$. 当 $x>X$, $|f(x)-l|<\varepsilon$

$\Rightarrow f(x)<l+\varepsilon=\frac{M+l}{2}<M$

在 $[a,X]$ 内部有 $M$.

if $m<l$, ✓

if $M=l=m$, $f(x)=C.$

8. $\forall x_1\in[a,b]$. Def $x_{n+1}=f(x_n)$

$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le k|x_n-x_{n-1}|\le\cdots\le k^{n-1}|x_2-x_1|$

$\Rightarrow |x_{n+p}-x_n|\le(k^{n+p-2}+\cdots+k^{n-1})|x_2-x_1|<\frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1|\to 0$.

$\{x_n\}_{n\ge1}$ 收敛.

$f(x)=x-\arctan x+\frac{\pi}{2}$

9. $P_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ $\quad$ ( $x_n<1 \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n^n=0$ . $x_n=(1-\frac{1}{n})^n$ ).

$P_{n+1}(x)=x^{n+1}+P_n(x)$

$P_{n+1}(x_{n+1})=0$. $P_{n+1}(x_n)>0 \Rightarrow x_{n+1}<x_n$

再由 $1-x_n^n=\frac{1}{x_n}-1$ . $x_n^n<x_1^n\to0$. $\Rightarrow x_n\to\frac12$.

10. $f(x_0)=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$

若 $x_0<b$ , 则 $\exists y\in(x_0,b)$, s.t. $f(y)>f(x_0)$ 矛盾

$x_0=b$.

再 $\exists y_1\in(a,b)$ , s.t. $f(y_1)>f(a)$ . 于是 $f(x_0)\ge f(y_1)>f(a)$

$\Rightarrow f(b)>f(a)$.

2. 不妨假设 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$

$f_{min}\le\frac12$

$f(0)+f(1)=1 \Rightarrow f(0)\ge\frac12$ or $f(1)\ge\frac12$.

3.1 17.(1) $P_n=(x+x^2+\cdots+x^n)'$

(2). $Q_n=(x+2x^2+\cdots+nx^n)'=(x(1+2x+\cdots+nx^{n-1}))'$

$=(x(x+\cdots+x^n)')'$

(3). $R_n=(\sin x+\cdots+\sin nx)'\Big|_{x=1}$.

3.1 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\alpha>0$ $C(\mathbb{R})$

$\alpha>1$ 可导 $f'(x)=\begin{cases} x^{\alpha-2}(\alpha x \sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$\alpha>2$ $C'(\mathbb{R})$

3.3 2、$F(1)=F(2)=0 \Rightarrow \exists \xi\in(1,2)$, s.t $F'(\xi)=0$ $\}$ $\exists \xi^{*}\in(1,\xi)$, s.t $F''(\xi^{*})=0$.

$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x) \Rightarrow F'(1)=0$

4. (3). ①. 即证 $\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}-a\ln a<b\ln b-\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$

$f(x)=x\ln x$, $f'(x)=\ln x+1$. $f''(x)=\frac{1}{x}>0$

$\exists \xi\in(a,\frac{a+b}{2})$. s.t $\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}-a\ln a=\frac{b-a}{2}f'(\xi)$

$\exists \eta\in(\frac{a+b}{2},b)$. s.t $b\ln b-\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}f'(\eta)$

$\xi<\eta$ #

②. 利用 $f(x)=x\ln x$ 凸性

6. $\exists \xi\in(0,1)$. s.t $|f(0)-f(1)|=f'(\xi)<1$

若~~如~~ $\exists \eta\in(0,1)$, s.t $f'(\eta)>1$, 则 $\exists x_0$, s.t $f'(x_0)=1$ 矛盾

$g(x)=f(x)-x$. $g'(x)=f'(x)-1<0$

$g(0)>0$. $g(1)=f(1)-1<0$. $\exists x^{*}$. s.t $f(x^{*})=x^{*}$

7. 设 $f(y)=\inf\limits_{x\in[0,1]}f(x)$. $f(z)=\sup\limits_{x\in[0,1]}f(x)$, 不妨 $y\leq z$

$|f(y)-f(0)|<y$. $|f(1)-f(z)|<1-z$

$\Rightarrow |f(y)-f(z)|\leq|f(y)-f(0)+f(1)-f(z)|<1-z+y$

$|f(y)-f(z)|<z-y$

$\Rightarrow |f(y)-f(z)|<\frac{1}{2}$.