作业中存在的问题：

①. P71. 9.

$x_n \in (0,1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^n = 0$. X.

反例： $\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}$.

纠正： $x_n \le x_2 < 1, \ \forall n \ge 2$

$0 \le x_n^n \le x_2^n$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_2^n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^n = 0$.

② 另会一份 pdf. $\varepsilon$, $N$, $l$ 之间的决定关系.

---

①. Rolle 推广)： $f$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，在 $[a,+\infty)$ 上连续，

$f(a)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\Rightarrow \exists \xi \in (a,+\infty)$ s.t. $f'(\xi)=0$.

证明： ①. $f(x) = 0$ , $\forall x \in (a,+\infty)$ ✓.

②. $\exists b \in (a,+\infty)$ s.t. $f(b) \ne 0$. 不妨设 $f(b) > 0$.

对 $\varepsilon = \frac{f(b)}{2}$, $\exists X$ s.t. $|f(x) - 0| < \varepsilon$ , $\forall x > X$.

取 $c > X$, 有 $-\frac{f(b)}{2} < f(c) < \frac{f(b)}{2} < f(b)$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=0 < \frac{f(b)}{2} \\ f(b) > \frac{f(b)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \eta_1 \in (a,b) \text{ s.t. } f(\eta_1) = \frac{f(b)}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(b) > \frac{f(b)}{2} \\ f(c) < \frac{f(b)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \eta_2 \in (a,b) \text{ s.t. } f(\eta_2) = \frac{f(b)}{2}$$

$f(\eta_1) = f(\eta_2) \Rightarrow \exists \xi \in (\eta_1, \eta_2)$ s.t. $f'(\xi) = 0$.

(↑ 还可以写得更简单).

②、$f$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，~~$f(a)=$~~ $f(0)=0$.

$x\geq 0$ 时有 $|f'(x)| \leq |f(x)|$. 证明: $f(x)=0,\ \forall x\in[0,+\infty)$

证明: (1) 先证明 $f(x)=0,\ \forall x\in[0,\frac{1}{2}]$. 若不然:

$f$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导 $\Rightarrow |f|$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续

$\Rightarrow \exists\, x^* \in [0,\frac{1}{2}]$ s.t. $|f(x^*)| = \max\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f(x)| > 0$, $x^*\neq 0$

由中值定理知 $\exists \xi\in(0,x^*)$ s.t. $|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x^*)-f(0)}{x^*-0}\right| = \left|\frac{f(x^*)}{x^*}\right|$

$$> |f(x^*)| \geq |f(\xi)| \geq |f'(\xi)|,$$

矛盾 $\Rightarrow$ $f(x)=0,\ \forall x\in[0,\frac{1}{2}]$.

(2) 可归纳 $f(x)=0,\ \forall x\in[\frac{k-1}{2},\frac{k}{2}]$, $k\in\mathbb{N}^*$.
也可考虑 $\sup\{\cdots\}$. 以第二种为例:

$S = \{\eta:\ f(x)=0,\ \forall x\in[0,\eta]\}$

由(1)知 $\frac{1}{2}\in S$.

若 $\sup S = +\infty \Rightarrow f(x)=0,\ \forall x\in[0,+\infty)$

若 $\sup S = M < +\infty \Rightarrow f(x+M)$ 满足题目条件

$\Rightarrow f(x+M)=0,\ \forall x\in[0,\frac{1}{2}]$.

$\Rightarrow (M+\frac{1}{2})\in S$, 而 $M+\frac{1}{2}>M$, 矛盾.

综上, $f(x)=0,\ \forall x\in[0,+\infty)$.

③. $f(a)>0$, $f'(a)$ 存在. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.

($f^g$, 变为 $e^{g\ln f}$).

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\left(\ln f(a+\frac{1}{n}) - \ln f(a)\right)}$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}} = e^{(\ln f(x))'|_{x=a}}$

$= e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

④ $f(0)=0$. $f'(0)$ 存在. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})\right)$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $\left|\dfrac{f(x)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon,\ \forall |x|<\delta$.

$\Leftrightarrow |f(x) - xf'(0)| < \varepsilon\cdot|x|,\ \forall |x|<\delta$.

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N_1\in\mathbb{N}^*$ s.t. $\frac{1}{n} < \delta(\varepsilon),\ \forall n>N_1$

$\Rightarrow \left|f(\frac{k}{n^2}) - f'(0)\cdot\frac{k}{n^2}\right| < \varepsilon\cdot\frac{k}{n^2},\quad 1\le k\le n$.

求和 $\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) - f'(0)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right| < \varepsilon\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$ → 用上下极限处理会更方便

$= \varepsilon\cdot\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$

$\le 2\varepsilon$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(0)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}f'(0)$

$\Rightarrow \exists N_2\in\mathbb{N}^*$, s.t. $\left|f'(0)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}f'(0)\right| < \varepsilon,\ \forall n>N_2$

令 $N := \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) - \frac{1}{2}f'(0)\right| < 3\varepsilon,\ \forall n>N$

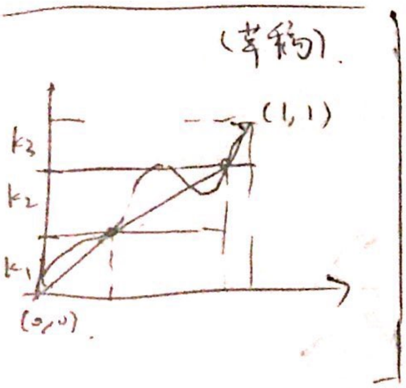
$\Rightarrow \lim\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})\right) = \frac{1}{2}f'(0)$

⑥. $f$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导. $f(0)=0$, $f(1)=1$.
$k_1, \cdots, k_n$ 为 $n$ 个正数.

证明: $\exists\ t_i$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{f'(t_i)} = \sum_{i=1}^{n} k_i$ (*)

证明: (*) $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{k_i}{\sum k_i}\right)}{f'(t_i)} = 1$

令 $k_i' = \dfrac{k_i}{\sum k_i}$. (*) $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i'}{f'(t_i)} = 1$, $\sum k_i' = 1$.




令 $K_i := \displaystyle\sum_{j=1}^{i} k_j'$, $1 \le i \le n$.
$K_0 = 0$.

从 $K_n$ 到 $K_1$ 依次地用介值定理知,

$\exists\ x_i$ s.t. $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$
s.t. $f(x_i) = K_i$.

在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上用中值定理, 有 $\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(t_i)$, $\exists\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Leftrightarrow$ $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

$= K_i - K_{i-1} = k_i'$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{k_i'}{f'(t_i)} = x_i - x_{i-1}$

求和 $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i'}{f'(t_i)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1$.

⑦ 凸函数.

$f$ 在开区间 $I$ 上为凸函数. $\Rightarrow$ $f$ 在 $I$ 上连续

证明: $\forall x_0 \in I$. 下证 $f$ 在 $x_0$ 处连续.

$F(x) = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ 在 $I \cap (-\infty, x_0)$ 上单调递增.

取 $y > x_0$ 且 $y \in I$.

$F(x)$ 在 $I \cap (-\infty, x_0)$ 上有上界 $\dfrac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x)$ 存在且有限. 即 $f_-'(x_0)$ 存在.

同理 $f_+'(x_0)$ 存在 $\Rightarrow$ $f$ 在 $x_0$ 处连续. □.

⑧ 一些例子.

(1). $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$.

$\Rightarrow$ 不能取连续函数所有零点并从小到大排列.

不能说出所有单调区间.

(2) 存在处处连续, 处处不可导的函数 (IR 上)

(3) 存在几乎处处不连续的导函数

(比稠密更强)

⑨. $f$ 在 $[0,1]$ 上可导. $f(0) = 1$. $f(1) = \frac{1}{2}$.

求证: $\exists \xi \in (0,1)$ s.t. $f^2(\xi) + f'(\xi) = 0$.

(1). 无零点、考虑 $F(x) = x - \frac{1}{f(x)}$ 即可.

(2). 唯一零点 $x_0$. $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ 取 $\xi = x_0$.

(3). $\geq 2$个,有限个零点. 取两个相邻零点 $a < b$.

考虑 $F(a^+)$, $F(b^-)$ 用 Rolle

(4). 无限个零点. ~~取零点集的一个~~

存在收敛的零点列 $x_n \to x^*$.

$f(x^*) = f'(x^*) = 0$. 取 $\xi = x^*$.

综上成立.

另解:见老师讲义.