二、$(f(x^2))' = 2x f'(x^2)$

$(f(x^2))'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$ —— 3

$\Rightarrow (f(x^2))''\big|_{x=0} = 2f'(0) = 2$ —— 4

$f(0)=0 \Rightarrow g(0)=0$

$\Rightarrow g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1$ —— 8

$(g(x^2))'' = 2g'(x^2) + 4x^2 g''(x^2)$ —— 11

$(g(x^2))''\big|_{x=0} = 2g'(0) = 2$ —— 12

注：(1)导数表达式写对错但结果正确的，每个得1分.

(2)用定义求导数合理得满分.

(3)很多同学出现了 $g'(x)\cdot f'(x)=1$ 的写法，原则上是不对的，但这里由于 $f(0)=0$ 不会影响结果，酌情扣1~2分.

三、$\alpha \le 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin\frac{1}{x}$ 不存在

$\alpha > 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin\frac{1}{x} = 0$ $\left(|x^\alpha \sin\frac{1}{x}| \le |x^\alpha|\right)$，连续 —— 5

$\alpha \le 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，不可导

$\alpha > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} = 0$ 可导 —— 10

$x \ne 0$ 时，$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$

$1 < \alpha \le 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} -x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$ 不存在，导数不连续

$\alpha > 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} -x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x} = 0$，连续. —— 15

$$\begin{cases} (1).\ \alpha \in (0,1] \\ (2).\ \alpha \in (1,2] \\ (3).\ \alpha > 2 \end{cases}$$ —— 18

注：(1)本题中有很多同学考虑 α 取非整数时 x^α 存在性的问题。

我们一般认为，考察连续性是在其定义域内而言，所以不考察 x^α 存在性的问题不会扣分。但即使考察上述问题（以(1)为例），α 也不仅仅取1，例如如 $x^{\frac{2}{3}}$ 也可对 $\mathbb{R}$ 中的每一点有意义。

(2)、给出取值范围分析但结果出错的，扣3分

(3)、只考察 $\alpha=1$，$\alpha=2$ 情形的，酌情得 2-6分。

四、法一：由 Bolzano-Weierstrass

$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k\geq1} \subset \{x_n\}_{n\geq1}$，$x_{n_k} \to x_0 \ (k\to\infty)$ —— 4

于是 $f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ —— 10.

法二：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取 max：M，min：m

且 $m \leq f(x_n) \leq M \Rightarrow m \leq A \leq M$ —— 4

由介值定理，$\exists x_0$，s.t. $f(x_0) = A$ —— 10.

法三：(反证) 设 $\forall x$，$f(x) \neq A$

则 $f(x) < A$ or $f(x) > A$ —— 4

不妨 $f(x) < A$，又 f 在 $[a,b]$ 上取 max：$M < A$

$\Rightarrow f(x_n) \leq M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq M \Rightarrow A \leq M$，矛盾 —— 10.

注：(1)、凡是直接得出 $\{x_n\}$ 收敛的，得0分。

(2)、部分同学采用了极限的定义证明，合理得满分。

(3)、讨论 $\{x_n\}$ 敛散情况的，仅将收敛情形给出证明的，得2分。