逻辑性与严谨性

0.1 说明

本专题内容建议在学习数列极限的同时阅读参考.

在数学分析中,特别是关于极限的定义,我们广泛使用了两个逻辑量词: 存在量词 **"存在"**(常用符号 $\exists$ 表示)与全称量词 **"任意"**(常用符号 $\forall$ 表示). 同时比较多地用到 **"充分必要条件"** 或 **"当且仅当"** 等表述, 以及对**数学归纳法**的使用. 这些内容在中学数学教学中已经做过介绍,这里我们对它们的使用规则再作回顾和总结.以强化同学们对极限的定义,以及数学严密性和逻辑性的认识和理解.

0.2 量词的规则

首先观察以下例子:

例1: 下列等式

$$2+1=1+2,\ 2+2=2+2,\ 2+3=3+2,\ 2+4=4+2,\ \cdots\cdots$$

其中的省略号, 默认隐含了一个"无限"事实, 如果利用全称量词, 它写成

对任意正整数 x, 有$x+2=2+x$.

例2: 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ （或简记为 $\{a_n\}$）有界. 这个命题蕴含了存在一个数 M, 使得 $|a_n| \le M,\ n=1,2,\cdots$, 这里省略号也蕴含了一个"无限"事实, 因此用全称量词可以表述为

存在一个实数 M, 使得对任意的正整数 n, 有

$$|a_n| \le M.$$

例3: （极限的定义）数列$\{a_n\}$ 以 a 为极限. 使用量词描述的方式为

对任意大于零的正数 ε（或者说"对任意的 $\varepsilon > 0$"）, 存在正整数 N, 使得对任意大于 N 的正整数 n （或者说"当 $n > N$ 时"）,有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立. 另一种等价的表述方式为

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

对任意大于 N 的正整数 n （或者说“当 $n > N$ 时”）成立.

例4： 对充分大的 n, 数列 $\{a_n\}$ 单调增.

存在一个正整数 n_0, 对任意大于 n_0 的正整数 n（即当 $n > n_0$ 时）, 有 $a_n \leq a_{n+1}$. 或者说存在一个正整数 n_0, 使得不等式

$$a_n \leq a_{n+1}$$

对任意大于 n_0 的正整数成立. 这里存在 n_0 表示数列“从某项开始”或者说对“充分大的 n, 数列单调增”.

需要指出的是,全称量词“任意”是指在一定范围内的“任意”, 而存在量词也是在一定范围之内的“存在”.例如, 在例3 中,第一个“任意”的范围是正实数（不包含负数）,“存在”的范围是正整数,而第二个“任意”的范围是大于 N 的所有正整数. 例4 中存在的 n_0 是正整数,而“任意”的范围是所有大于n_0 的正整数 $n_0+1, n_0+2, \cdots$.

一般地,考虑全称命题：“对任意$x \in U$, $A(x)$ 成立”这句话, 这里U是给定的集合, A是一个含变量x的命题. 它的意思是说“对所有U中的x, $A(x)$成立”. 如果U中的元素可以排成一列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$, 那么“对任意$x \in U$, $A(x)$”就等价于“$A(x_1)$ **和** $A(x_2)$ **和** $A(x_3)$ **和** $\cdots$”. 特别, 如果U是有限集合, 那么“对任意$x \in U$, $A(x)$”就意味着有限次的“**和**”.

类似地, 存在命题：“存在 $x \in U$ 使得 $A(x)$ 成立”就是说“至少有一个U中的元素 x 使得$A(x)$成立”. 如果U中的元素可以排成一列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$, 该命题等价于“$A(x_1)$ **或** $A(x_2)$ **或** $\cdots$”.

当一个命题中出现两个以上的量词, 有些情况是比较简单的. 例如, 整数加法的交换律说: 对任意整数 x, 对任意整数 y, $x+y=y+x$. 显然这里两个全称量词“任意–任意”的顺序无关大局, 因此我们可以把这个命题简写为: 对任意整数 x 和 y, $x+y=y+x$. 同样, 两个以上的存在量词相邻出现, 它们的顺序也不要紧. 例如：“存在整数 x,存在整数 y ,使得 $x+y=2$, $x+2y=3$”. 可以说“存在整数 x 和 y, 使得 $x+y=2$, $x+2y=3$”.

因此, **相同类型的量词可以交换次序或者合并**,**但是对于不同类型的量词来说, 这条规则不成立**. 例如例1 中只包含一个全称量词“任意”,因此也称为“全称命题”.

而例2 中包含了“存在–任意”两个按先后顺序的量词.例3 中包含了“任意–存在–任意”三个按先后顺序的量词.例4 中包含“存在 –任意”两个量词.如果交换顺序,表示的意思就完全不同了.

例5： 考虑命题：对任意的整数a, 存在一个整数b, 满足$b = a + 1$. 如果改变量词**任意**和**存在**的顺序, 则原命题就会变成“存在一个整数 b, 对任意的整数 a, 满足 $b = a + 1$”. 这显然是一个错误的命题.

例6：仍以极限的定义为例,数列$\{a_n\}$ 以 a 为极限, 即

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

如果改变量词的顺序（即“存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 成立“）, 那么只有$a_{N+1} = a_{N+2} = \cdots = a$, 显然与刻画数列极限的本意相矛盾.

否定一个全称命题只需要找到一个反例,即

全称命题“对任意$x \in U$, $A(x)$”的否定等价于存在命题“存在 $x \in U$ 使得非$A(x)$”.

但是否定一个存在命题则需要说明所有的情形都不成立,即

存在命题“存在 $x \in U$ 使得 $A(x)$”的否定为全称命题“对所有 $x \in U$, 非$A(x)$”.

对一个含有不同类型量词的命题来说,它的否命题可以通过改变量词的顺序（或者说是改变量词的类型）得到.

例6： 例2 的否命题：数列 $\{a_n\}$ 无界.

表示方式为对任意的正数 M, 一定存在一个正整数 n 使得 $|a_n| \geq M$.

可以看出,数列有界的“存在–任意”以及最后陈述“ $|a_n| < M$”的命题的否命题变成了“任意–存在”并且用“ $|a_n| \geq M$”否定最后陈述的命题.

同样,例3 中数列以a 为极限的“任意–存在–任意”命题的否命题如下：

例7： 例3 的否命题：数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限.

具体表示为存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的正整数 N, 都存在某个 $n > N$ 使得

$$|a_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

因此例3 中数列以a 为极限的“任意–存在–任意”命题以及最后的陈述：“有$|a_n - a| < \varepsilon$ 成立”的否命题是“存在–任意–存在”命题,并用“使得 $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$”否定最后的陈述.

例8： 例4 的否命题：数列 $\{a_n\}$ 不是单调增的.

对任意的正整数 n, 存在 $n_0 > n$, 使得 $a_{n_0} \geq a_{n_0+1}$,因此是一个“任意–存在”命题.

从上面的例子我们发现, 要写出一个有一串量词的命题的否定, 只需要**依次改变量词**, **并否定最后的陈述**.

含多个量词命题的另一个情形是, 改变不同类型量词的位置, 会得到另外一个命题. 设U, V是两个集合,

考虑命题I, **存在集合U中的某个y使得对集合V中的任意x**, $A(x,y)$**成立**, 或者简单地说: 有某个y 使得$A(x,y)$ 成立, 不管x是什么.

而改变量词顺序得到命题II, **对集合V中的任意x**, **存在集合U中的某个y使得$A(x,y)$成立**, 它说的是：给定x存在依赖于x的y使得$A(x,y)$成立. 换而言之, 命题II意味着存在一个$V \to U$的对应(函数)$y = f(x)$使得$A\big(x, f(x)\big)$成立. 显然命题I蕴含着命题II. 需要注意的是, 对应$y = f(x)$可能不唯一, 因为可能存在某个x, 有两个以上的y使得$A(x,y)$成立.

总之, 论证具有复杂量词串的命题可以想象成与恶魔的博弈. 每次存在量词出现时是你出手, 每次全称量词出现时则轮到恶魔出手. 在存在量词的作用范围内你尽量选择好的变量让事情变好, 而恶魔则全力把事情搞糟. 如果你有一个策略打败恶魔, 那么这个命题就成立, 一个命题的直接证明是具体给出一个打败恶魔的策略.

在论证数列 $\{a_n\}$ 是否以 a 为极限的例2中,恶魔给出任意的 $\varepsilon > 0$,问你能否存在 $N > 0$, 如果你找到了（或证明了）N 的存在性（这个过程就是你战胜恶魔的策略）,你就证明了命题的真实性.

以上关于量词的规则还需要同学们在具体学习过程中不断体会,深刻理解两次的规则和数学分析基本的逻辑用语.

0.3 关于充分必要条件

首先简要回顾关于命题的一些概念.设A, B各表示一个命题. 则“如果A, 那么B”与“A 蕴含 B（或者 A推出B）”是等价的说法. 将“A的否定”记为“非 A”, 那么“非（非 A）”与“A”是同一命题. 命题”A 蕴含 B” 等价于它的逆否命题“非 B 蕴含非 A”, 但是和它的逆命题“B 推出 A”没有必然关系.

如果把命题“A成立或者B成立”简记为“A **或** B”. 那么证明了“A **或** B”并不能告诉我们A、B 两个命题中到底谁为真.

如果把命题“A成立**和**B成立”简记为“A **和** B”. 那么否命题“(非) (A **或** B)”等价于“(非 A) **和**(非 B)”, 否命题“非 (A **和** B)”等价于“(非 A) **或** (非 B)”.

例9： 命题 A: 数列 $\{a_n\}$ 收敛；命题 B: 数列 $\{a_n\}$ 有界.

A 的否命题（非A）即是数列 $\{a_n\}$ 发散,而 B 的否命题即是数列 $\{a_n\}$ 无界.

由教材中定理1.4 可知, $A \Longrightarrow B$. 它的逆否命题（非B蕴含非A）即是无界的数列一定发散,但是逆命题”B推出 A“（即有界数列一定收敛）却是不正确的.

所谓“充分必要条件”是指：如果由命题 A 推出命题 B, **同时也能** 从命题 B 推出命题 A, 则称命题 A 和 B 互为充分必要条件.

“由 A 推出 B", 意思说 A 是条件, B 结论.数学上常记为 $A \Longrightarrow B$.如果以 B 为条件,A 为结论,并由 B 推出 A , 则记为 $B \Longrightarrow A$. 如果上述两个过程同时成立,即 A, B 互为条件,都能推出对方为结论,则说明两者互为充分必要条件. 记为 $A \Longleftrightarrow B$.

因此要证明两个命题 A 和 B 是充分必要的,必须同时证明 $A \Longrightarrow B$ 和 $B \Longrightarrow A$, 也就是 $A \Longleftrightarrow B$.

例10：证明数列 $\{a_n\}$ 收敛（命题 A) 的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列（命题 B）（Cauchey列即是满足Cauchy 收敛准则的数列）.

因此, 首先假设 $\{a_n\}$ 是收敛的,并推出 $\{a_n\}$ 是Cauchy 列这个结论.

同时再假设 $\{a_n\}$ 是Cauchy 列作为条件,推出 $\{a_n\}$ 是收敛的这个结论.

当然上述两个过程也可以调换先后次序,但两者缺一不可.

由A可以推出B,但由B不可以推出A,则A是B的充分条件但不是必要条件.

由A不可以推出B,但由B可以推出A,则A是B的必要条件但不是充分条件.

例 9 中的数列收敛与有界,收敛是有界的充分条件,但不是必要条件（也就是有界不必要求收敛）. 反之,有界是收敛的必要条件,但不是充分条件,也就是无界的数列一定不收敛.

数学上“充分必要”有时也表述成“当且仅当”,**或者称为两个命题“等价”**.用符号就是 $\Longleftrightarrow$

0.4 关于证明的规范性

数学的严谨性和逻辑性也体现在证明过程中的规范性上.每一个步骤必须符合逻辑、严谨规范.这里仅通过一个例子来说明规范性

例11： 证明 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.这里 A, B 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点集,对于一个集合 A 来说, A^c 表示 $\mathbb{R}^2$ 中不包含在 A 中的那些点,称为 A 的余集.

证明： 这是要证明两个集合（一个是$(A\cap B)^c$, 另一个是$A^c\cup B^c$）相等.因此要严格证明“你中有我,我中有你”,或者说互相包含关系, 即要证明 $(A\cap B)^c \subseteq A^c\cup B^c$,同时证明 $(A\cap B)^c \supseteq A^c\cup B^c$. 具体证明如下：

$\forall x \in (A\cap B)^c$, 那么 x 不属于 $A\cap B$, 也就是 $x \notin A$ **或者** $x \notin B$,

$\Longrightarrow x \in A^c$ 或者 $x \in B^c$,

$\Longrightarrow x \in A^c \cup B^c$. 即 $(A\cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

反之,$\forall x \in A^c\cup B^c$, 那么 $x \in A^c$ 或者 $x \in B^c$, 即 $x \notin A$ 或者 $x \notin B$

$\Longrightarrow x \notin A\cap B$ 所以 $x \in (A\cap B)^c$

即 $(A\cap B)^c \supseteq A^c\cup B^c$.

上述过程也可也以简化为如下方式：

$x \in (A\cap B)^c \Longleftrightarrow x \notin A\cap B \Longleftrightarrow x \notin A$ 或者 $x \notin B$,

$\Longleftrightarrow x \in A^c$ 或者 $x \in B^c$,

$\Longleftrightarrow x \in A^c\cup B^c$. 即 $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.

0.5 关于数学归纳法

数学归纳法就是一种用来证明一个包含无穷序列情形的命题都是正确（即第一个、第二个、一直下去概不例外）的数学证明方法.

例12： 任何有 $n+2$ 条边的凸多边形的内角之和等于180° 的 n 倍.

这是一个对每一个自然数 n 都成立的定理. 如果采用一个一个地验证的方式去证明,即使验证到10,100,甚至1000 都是正确的仍然不能说明定理为真. 因此我们必须采用一种严格的数学推理方法来证明. 显然,

$n=1$ 时, 凸多边形就是三角形,我们可以用独立于该定理的其他结果知道, 三角形内角之和为 180° .

对于 $n=2$ 时的四边形,可以画一条对角线把四边形分成两个三角形,因此利用三角形内角之和的结论可知四边形内角之和为 $2\cdot 180^\circ$.

接着 $n=3$ 五边形的情形,可以把它分解成三角形和四边形,再利用已经证明的关于三角形和四边形内角之和的结论得到五边形内角之和为 $180^\circ + 2\cdot 180^\circ = 3\cdot 180^\circ$.

以此类推, 可以逐次证明 $n=4, n=5$, 等情形. 而且每一步都以同样的方式由前面的结论推出.

上述证明的基本思想是：为了证明定理对所有 n 成立, 我们基于以下两点：

1、对 $n=1$ 或前几个情形已知是正确的, 在上述例子中, 借助熟知的三角形内角之和为 180° , 可以直接验证前几种情形的正确性.

2、存在一种一般的方法能够表明：如果定理对 n 成立, 那么对下一个 $n+1$ 也成立. 在上述 $n+1$ 凸多边形内角之和的例子中, 这个一般的方法就是把 $n+2$ 条边的凸多边形分成三角形和 $n+1$ 条边的凸多边形.

以上是数学的一个基本逻辑原则, 我们把它总结为所谓的数学归纳法：

设无穷多个命题:

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$$

要证明上述每个命题成立, 我们可以通过下面两个步骤来完成证明：如果

a) **命题 A_1 成立（或通过直接验证或其他方法证得 A_1 为真）.**

b) **对任意的自然数 n, 由 A_n 成立推出 A_{n+1} 也成立.**

那么所有$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 都成立.

今后, 凡是遇到类似问题时, 我们必须用数学归纳法严格证明，而不能简单采用"如此等等"或"一直这样下去"这类的话来说明, 除非命题中归纳的过程十分显然. 数学归纳法还可以推广为下列情形, 但是基本思想都是一样的.

设无穷多个命题:

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots,$$

（或命题从某个正整数 r 开始, 这样并没有本质区别）.如果

a) **当 $n=1$ 时, A_1 成立.**

b) **对$n>1$, 由 $A_1, \cdots, A_n$ 成立推出 A_{n+1} 成立.**

那么 A_n 对所有正整数 n 成立.

下面这个例子虽然简单, 却说明了一个道理.

例13： 证明下列等式

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{1}$$

证明： 当 $n=1$ 时, 等式显然成立.

如果等式对任何 n 成立, 那么对 $n+1$, 有

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3\\ &= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+(n+1)\right]=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.\end{aligned}$$

即对 $n+1$ 也成立. 由归纳法可知上述公式对任何正整数 n 均成立.

由公式(1) 还可以直接推出下列公式

$$1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3=(n+1)^2(2n^2+4n+1) \tag{2}$$

只要在公式(1) 中考虑 $2n+1$ 情形

$$1^3+2^3+\cdots+(2n)^3+(2n+1)^3=\left[\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}\right]^2$$

而

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+\cdots+(2n)^3+(2n+1)^3\\&\quad=1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3+8\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)\\&\quad=1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3+2n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

就可得到公式(2).

公式(1) 的证明并没有多少困难, 但是归纳法的证明过程, 并没有告诉你这个公式最初是怎么产生的. 为什么前 n 个自然数立方和是 $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ 而不是别的形式？创造出公式 (1) 的人也许根据经验反复猜测、类比和直观或, 甚至通过前几项具体计算寻找一般规律. 一旦猜测出结果, 数学归纳法就可提供严格的数学证明, 虽然证明本身并没有给出发现这个公式的任何线索. 公式(2) 仅仅是通过简单应用, 从公式(1) 中派生出来的.

虽然发现上述公式并证明它的正确性并不是数学史上什么了不起的事件, 但是它说明了一个道理, 即

发现或创造一个数学定理, **需要有很好的数学涵养、积累、经验、洞察力**.

证明一个定理需要需要掌握严格的数学理论、方法和解决问题的能力.

推广一个定理, **是扩大和挖掘定理的内涵、推广和应用**.

发现（创造）、证明、推广都是数学家应具备的基本素质.

与数学归纳法紧密联系的是所谓的**最小自然数原理**, 即

任何非空的正整数集合 C **必有最小元素**.

如果 C 是有限个正整数构成的集合, 只要逐个比较一定有最小元素. 例如 $C=\{1,2,3,4,5\}$, 显然最小元素为 1. 当 C 的元素有无限多个时, 因为非空, 所以存在一个正整数 $n\in C$, 那么集合 $C\cap\{1,2,\cdots,n\}$ 就是一个非空的包含有限个正整数的集合, 它的最小元素就是 C 的最小元素.

这个简单原理并不适用于其它数集, 例如下面的数集

$$C=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$$

就没有最小元素.

下面我们用最小自然数原理, 把数学归纳原理当做一个数学定理一样来证明. 用到的数学方法是另一个常用的数学证明方法：**反证法**.

定理 0.1 *考虑一系列命题 $A_1, A_2, A_3, \cdots$, 如果*

a) A_1 成立.

b) 对任意正整数 n, A_n 成立推出 A_{n+1} 也成立.

则所有命题均成立.

证明： 假设在 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 中有一个不成立, 则使得 A_r 不成立的正整数集合

$$C = \{r: \ A_r \text{不为真}\}$$

不是空集. 按照最小自然数原理, C 中必有最小正整数 m . 由a), A_1 成立, 所以这个正整数必须 $m > 1$. 也就是 m 是最小的使得 A_m 不成立的, 又是大于1 的正整数, 所以 A_{m-1}, $m-1 \geq 1$ 一定成立. 这样就与 b) 矛盾. 因此假设是错误的, 即所有$A_1, A_2, A_3, \cdots$, 都成立.

最后我们再次强调使用数学归纳法必须确保两个条件 a) 和 b) 真正被满足.下面的例子十分有趣.

例14： 记 $\max\{a, b\}$ 为 a 和 b 中较大的一个数. 现在我们对任意的正整数 n, 给出如下命题

命题 A_n : 对给定的 n, 如果 a, b 是使得 $\max\{a, b\} = n$ 任意的正整数, 那么 $a = b$.

按照归纳法的步骤, a) 第一步不难验证 A_1 显然成立, 这是因为对任意两个满足 $\max\{a, b\} = 1$ 的正整数, 一定有 $a = b = 1$

b) 第二步假设命题对 k 成立, 那么对于 $k+1$, 设 a, b 是任意两个使得 $\max\{a, b\} = k+1$ 的正整数, 令

$$a' = a - 1, \ b' = b - 1$$

则 $\max\{a', b'\} = k$, 因为 A_k 成立, 所以 $a' = b'$, 即 $a = b$, 推出 A_{k+1} 也成立.

这样根据数学归纳法, 就有对任意的 n, 命题 A_n 都成立.

现在任取两个正整数 a, b , 记 $r = \max\{a, b\}$, 那么命题 A_r 成立，也就是 $a = b$. 例如取 $a = 5, b = 2$, 则 $r = \max\{5, 2\} = 5$, A_5 成立意味着 $5 = 2$. 这样的结论显然是荒唐的. 但是问题出在哪里呢?

不难看出在上述 b) 的推导过程中取 $a' = a - 1$, $b' = b - 1$, 要保证 a', b' 是正整数, 那么就已经限定了 $a > 1, b > 1$, 因此并不是针对所有正整数.也就是命题的条件并没有真正被满足, 所以得出一个荒诞的结论. 由此可见在进行数学推导时, 必须严格缜密.