第一册4-7章复习提纲

说明：

1、本提纲不是划定考试范围（也不会给大家划定范围）。本提纲中没有提到的地方并不表示考试不会涉及。

2、希望同学们学会总结，在总结中提高。充分理解书中内容的背景和含义，关注不同内容的关联性，掌握分析、证明、推导和计算，通过定理、性质的证明以及例题和习题的训练加深对内容的进一步理解。

第四章：不定积分（原函数）

一、概念:

对一个给定的函数 $f(x)$, 能否找到一个函数 $F(x)$（称为 $f(x)$ 的原函数）, 使得

$$F'(x) = f(x)?$$

即求导运算的逆运算. 注意以下四点：

1、如果存在原函数，那么这样的函数不唯一。

2、连续函数必有原函数（在定积分中通过变上限积分证明了）。

3、即使存在原函数，原函数未必能够用初等函数表示出来，表示不出来直接用积分表示即可。如变上限积分

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是一个原函数。

一、性质:

1° $\displaystyle\int a \cdot f(x)\mathrm{d}x = a \cdot \int f(x)\mathrm{d}x;$

2° $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$

三、一般方法（两大武器，一是换元法，另一是分部积分法）:

换元法：复合函数求导的逆运算

1、已知 $f(u)$ 的一个原函数 $F(u)$, 那么 $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ 的原函数是 $F(\varphi(x))$. 这里 $u = \varphi(x)$ 可微,

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C,$$

2、已知 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数$G(t)$, 那么 $f(x)$ 的原函数是 $G(\varphi^{-1}(x))$. 这里 $x = \varphi(t) \neq 0$ 严格单调的可微.（从而 φ 有可导的反函数 φ^{-1}）. 即

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \Longrightarrow \int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

关键: **找到换元的关系。**

分部积分法：两个函数乘积的导数的逆运算

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x;$$

这可简记为

$$\int f\,\mathrm{d}g = fg - \int g\,\mathrm{d}f.$$

关键：把被积函数分解成两部分。

需要注意的是对两种方法灵活运用，或使用递推的办法。

四、分类:

有理函数，要点：

1、能把有理函数分解成两种基本单元的积分

$$\text{(i)}\quad \int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\mathrm{d}x; \qquad \text{(ii)}\quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\mathrm{d}x.$$

分解的方法：充分利用多项式有关性质，或**待定系数法**。

2、能计算上述两种基本单元的积分，特别是第二种，需要通过换元

$$t = x + \frac{\beta}{2}, \quad a^2 = \gamma - \frac{\beta^2}{4}$$

将其变换为下列积分（即把分母凑成平方和的形式）

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}\mathrm{d}t + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right)\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\mathrm{d}t.$$

三角函数有理式，要点

1、万能变换：

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi),$$

2、灵活把握。书上的例题 $\displaystyle\int \sin^4 x\mathrm{d}x$

其他类型，要点

1、带形如 $\sqrt{1-x^2}$ 根号的：$\int R(x,\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$，用换元

$$x = \cos u, \quad \text{则} \quad \sqrt{1-x^2} = \sin u, \quad \mathrm{d}x = -\sin u\mathrm{d}u$$

2、带形如 $\sqrt{x^2-1}$ 根号的：$\int R(x,\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$，用换元

$$x = \cosh u, \quad \text{则} \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh u, \quad \mathrm{d}x = -\sinh u\mathrm{d}u$$

3、带形如 $\sqrt{x^2+1}$ 根号的：$\int R(x,\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$，用换元可作代换 $x=\sinh u$, 将其化为双曲有理函数的不定积分; 或者利用代换

$$u=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

一步就可将其化为有理函数的不定积分.

4、带形如 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 根号的。 $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, $ad\neq bc$ 可作变换

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\text{ 或 } x=\frac{dt^n-b}{-ct^n+a},$$

则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是 t 的有理式. 于是

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)=\int R\left(\frac{dt^n-b}{-ct^n+a},t\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

化为有理函数的积分.

第五章：积分

一、积分的主要思想和概念：以直代曲、近似、叠加、极限。

1、Riemann**和的含义**：两个任意性：分割的任意性，取点的任意性：

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

这里 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\ \xi_i\in[x_{i-1},\ x_i]$.

2、**性质**：可积必有界，被积函数的可加性、积分区域的可加性，保序性，乘法的可积性、有关不等式以及积分中值定理。 $f\Big|_{[a,b]}$ 可积, M 及 m 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的一个上（下）界： $m\leq f(x)\leq M$, 则

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq M(b-a).$$

$f\Big|_{[a,b]}$连续（因此可积）, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

3、**可积函数类以及**Darboux **上下和（三明治）的证明思想和方法**。其中，可积函数类主要是三大类：

（1）、闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数, 在 $[a,b]$ 上一定是可积的.

（2）、 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界, 且至多只有有限个间断点, 在 $[a,b]$ 上可积.

（3）、 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数（这蕴含了 f 在 $[a,b]$ 上有界）, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

二、微积分基本定理：

变上限积分.：

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad a\le x\le b.$$

结论：

1、 $f(x)\Big|_{[a,b]}$ 可积 $\Longrightarrow \varphi(x)\Big|_{[a,b]}$ 上连续.

2、 $f(x)\Big|_{[a,b]}$ 连续（当然可积） $\Longrightarrow \varphi(x)\Big|_{[a,b]}$ 上可导，且$\varphi'(x)=f(x)$. 因此$\varphi(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数（说明连续函数必有原函数）。这样$f(x)$ 任意原函数都可表示为

$$F(x)=\varphi(x)+c=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c$$

3、若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}F=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

4、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且

$$F'(x)=f(x),\quad a<x<b.$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

三、定积分的换元和分部积分法：

对准上下限： $\varphi(\alpha)=a,\ \ \varphi(\beta)=b,$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

或者写成

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x).$$

四、Taylor展开的余项：

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n$$

其中，余项的三种表示：

$$R_n(a)=\begin{cases}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) & \text{余项的Largrange 表示}\\ \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t & \text{余项的积分表示}\\ \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi) & \text{余项的Cauchy 表示.}\end{cases}$$

五、微元法：

弧长：

$y=f(x)$:, $\mathrm{d}s=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x,\Longrightarrow s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$

$x=x(t),\ y=y(t)$: $\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t,\Longrightarrow s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$

六、反常积分：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a),\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a).$$

1、无穷区间上积分和有限区间上瑕积分：概念都是通过有限区间上Riemann积分取极限，因此，基本计算与Riemann积分无异，只是代入积分限时时不管是端点无限，还是端点是瑕点，都是极限过程。

2、通过换元，无穷区间反常积分与瑕积分可以互相转换；反常积分和Riemann积分可以互相转换.

第6章：常微分方程初步：

一、一阶微分方程的几种解法：

分离变量法：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y)\Longrightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

齐次方程解法：

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

这里 $\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. 引入新的未知函数

$$u=\frac{y}{x},$$

则 $y=ux$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.\Longrightarrow x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u.$$

因而可分离变量:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

一阶线性方程解法：

1、**齐次情形：**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0, \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x,\quad \text{当 } y \neq 0 \text{ 时}$$

当$y=0$ 也是解.

2、**非齐次情形：**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x).$$

两边同乘 $e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}\left(ye^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \Longrightarrow y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right],$$

3、Bernoulli **方程（n 为不等于 0, 1 的实数）：**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

以 y^n 除方程的两边, 再作代换 $u = y^{1-n}$, 得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x), \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

可降阶的（二阶）微分方程

1、不显含未知函数的二阶方程 $f(x, y', y'') = 0$.

引入新的函数 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 这时 (13) 化为了一阶方程

$$f\left(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

如果能求出通解 $\Phi(x, p, C) = 0$, 则将$p = y'$ 代入这个通解中, 这产生另一个一阶方程 $\Phi(x, y', C) = 0$. 可继续求解.

2、不显含自变量的方程 $g(y, y', y'') = 0$.

令 $p = y'$, 但现在需用对 y 的导数来表示 y'':

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

于是原方程为

$$g\left(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = 0.$$

这是一个关于未知函数 $p=p(y)$ 的一阶方程, 求出通解 $p=p(y,C)$ 后, 又将问题化为了另一个一阶方程 $y'=p(y,C)$ 的求解问题.

二、二阶线性微分方程：

一般理论：解的结构：

齐次：$y''+p(x)y'+q(x)y=0$

基本解组，理论上知其一$y_1(x)$, 必可求其二$y_2(x)$，因此通解为：

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

非齐次：$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

非齐次的一个特解+齐次的通解=非齐次的通解。

理论上，非齐次的特解可通过常数变易法求得。所谓常数变易法，即假设非齐次的一个解具有齐次通解的形式，但是系数不再是常数，而是待定的函数：

$$y_0(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$$

代入非齐次方程并假设$c_1(x),c_2(x)$ 满足线性方程

$$\begin{aligned}&c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0.\\&c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=f(x).\end{aligned}$$

解得

$$c_1'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)},\quad c_2'(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

$$\Longrightarrow c_1(x)=-\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t,\quad c_2(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t.$$

于是我们得到非齐次方程的一个特解

$$y_0(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

常系数二阶线性微分方程：

齐次：$y''+py'+qy=0$, 其中 p,q 是实常数. 令解具有形式 $y(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}$ (λ 是待定常数), 则方程化为关于λ 的而次多项式求根问题

$$\lambda^2+p\lambda+q=0.$$

求出根, 就对应一个解 $y(x)=e^{\lambda x}$.注意当根为重根时，或共轭复根时如何给出基本解组。

特别注意以下几点：

1、通解未必包含所有解，解方程时要注意可能丢掉的特解。

2、理论上如果方程加上初边值问题，解是存在唯一的。可以在通解中找出满足初边值问题的特解。

3、灵活运用，切记死记公式。特别是对于求解非齐次方程时，特解可以采取观察或其他办法求得，而不需要通过常数变易法给出。

4、微分方程的幂级数解法：即设未知函数$y(x)$ 可展开成幂级数，其中系数待定。代入方程比较各次幂的系数，如能求出幂级数的系数，则可求出方程的幂级数解。

第7章：无穷级数：

一、定义与性质：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

其中 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ 为部分和。级数敛散性等价于数列 $\{S_n\}$ 的敛散性。

性质：

1、级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$收敛 $\Longrightarrow$ 通项 $a_n \to 0$.

2、Cauchy 收敛准则：级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件是：对任给的正数 ε, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对任何正整数 p 成立.

3、收敛级数可加减

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

4、在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中, 改变任何有限项的值不影响级数的敛散性。

二、正项级数：

部分和 S_n 单调增. 所以

1、一旦是证明部分和有界，则一定收敛，且收敛到上确界，如果发散，则一定发散到无穷.

2、如果收敛，则改变求和次序仍然收敛，其和不变。

判别法：设 $(A)\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $(B)\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 正项级数,

1、比较判别法：

如果从某项开始有 $a_n \le b_n$, 那么

(B) 收敛 $\Longrightarrow (A)$ 收敛;

(A) 发散 $\Longrightarrow (B)$ 发散.

或极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

$0 < A < +\infty \Longrightarrow (A)$ 与 (B) 同敛散;

$A = 0 \Longrightarrow, (B)$ 收敛，(A) 也收敛;

$A = +\infty \Longrightarrow, (B)$ 发散 (A) 也发散.

2、Cauchy**判别法：**

1° 若从某项起有 $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, 则级数收敛;

2° 若有无穷多个 n, 使 $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, 则级数发散;

3° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则当 $q < 1$ 时, 级数收敛; 当 $q > 1$ 时, 级数发散; 当 $q = 1$ 时, 还无法判断级数收敛还是发散.

3、D'Alembert **判别法：**

1° 若从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, 则级数收敛;

2° 若从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, 则级数发散;

3° 若前后项之比具有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则当 $q < 1$ 时, 级数收敛; 而当 $q > 1$ 时, 级数发散; 当 $q = 1$ 时, 还不能判断.

注意：在Cauchy 和 D'Alembert 判别法中，对于非极限形式，那里的 q 不能简单地用 1 代替。

4、Cauchy **积分判别法**：

如果 $f(x)\Big|_{[1,+\infty)}$ 上非负, 单调减, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

提示：了解判别法的出处，证明，对解决一些证明题会有所帮助

二、交错级数：

对交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ，若 $\{a_n\}$ 单调趋于零, 则一定收敛, 部分和 S_n 与级数的和 S 的误差不超过 a_{n+1}.

三、一般级数的绝对收敛与条件收敛：两者对比如下

绝对收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ （这是一个正项级数）仍然收敛。

条件收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散。

绝对收敛：任意改变求和顺序后所得的新级数仍收敛, 并且其和不变.

条件收敛：通过改变求和次序可以使其收敛到任何值，甚至发散。

绝对收敛：则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 都收敛。

条件收敛：则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 都发散。

判别法：对于一般级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n b_n$

1、Dirichlet: 若 $\{b_n\}$ 是单调递减趋于零, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界：$|A_n| = |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| \leq M$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

2、Abel: 若 $\{b_n\}$ 单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

四、级数乘积：

Cauchy**乘积**：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ 都收敛

1、若至少有一个绝对收敛，那么Cauchy乘积收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB, \quad c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$$

2、若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = AB$

一般情况：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ 都绝对收敛，那么无论如何排列乘积的次序都收敛，而且收敛到 AB.

五、函数项级数：

1、收敛性：

收敛点：使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛的点 x 称为收敛点，收敛点的全体为收敛点集，记为 I

和函数：$x \in I, \quad x \longrightarrow S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

部分和: $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛于 $S(x) \Longleftrightarrow$ 函数列 $\{S_n(x)\}$ 对收敛于 $S(x)$.

因此，研究函数列收敛性与研究函数项级数收敛性等价。

2、一致收敛性：

函数列 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性：

如果对任意正数 ε, 都存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

对所有 $x \in I$ 成立，那么称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 。

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一致收敛性：

函数项级数的部分和 $S_n(x)$ 在 I 上一致收敛于$S(x)$，即对任意正数 ε, 都存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时,

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

对所有 $x\in I$ 成立，那么称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$ 。

3、一致收敛性判别法：

（1）函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0,$

（2）函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一致收敛于$S(x)\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=0,$

（3）Cauchy 收敛准则：

$\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$,

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

对任何正整数 p 和 $x\in I$ 成立

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛当且仅当对任给的正数 ε, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_n(x)\right|=|u_{n+1}(x)+\cdots u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对任何正整数 p 和 $x\in I$ 成立。

特别，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一致收敛的必要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|u_n(x)|=0,$

（4）Weierstrass 判别法：

若存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ；使得在 I 上恒有 $|u_n(x)|\le a_n,\ n=1,2,\cdots$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上绝对一致收敛.

（5）Dirichlet 和 Abel 判别法

a、$\{v_n(x)\}$ 单调减 $v_n(x)\ge v_{n+1}(x)$, 且在 E 上一致趋于 0, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}|v_n(x)|=0.$

b、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和在 E 上一致有界, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\le M$

或

a、$\{v_n(x)\}$ 对于 n 单调, 且在 E 上一致有界$|v_n(x)|\le M, x\in E, n=1,2,\cdots$

b、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 E 上一致收敛。

3、一致收敛级数的性质：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$ 在 I 上一致收敛,

连续性： 若 $u_n(x)$ 连续，则 $S(x)$ 连续.

可积性： 若 $u_n(x)$ 可积，则 $S(x)$ 可积，且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

可微性： 若 $u_n(x)$ 可导，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收敛，则 $S(x)$ 可导，且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

注意：内闭一致性问题：即考虑局部的连续性和可导性时，可在一点 x_0 附近考虑一致性即可。

六、幂级数：

1、收敛半径、收敛区域与收敛性质： 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$

（1）存在 R 使得幂级数在 $(-R,R)$ 内闭一致绝对收敛，在 $(-R,R)$ 外发散，在端点需要具体情况具体对待。

所以收敛区域为 $(-R,R)$ 加上可能的端点。

（2）在 $(-R,R)$ 内连续，如果幂级数在 $(-R,R)$ 的右（左）端点收敛, 则和函数 $S(x)$ 在端点处右（左）连续.

（3）在 $(-R,R)$ 内可积，且

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \quad x\in(-R,R)$$

积分后得到的幂级数的收敛半径仍为 R.

（4）在$(-R,R)$ 内无穷次可导，且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k},$$

求导后所得级数的收敛半径也是 R.

注意：收敛半径是指幂级数收敛的主要范围，它是一定存在的，即使下面的判别法无法判断，它也是存在的。

2、收敛半径的判别法：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为

$$R = \frac{1}{L} = \begin{cases} 0, & L=+\infty; \\ \frac{1}{L}, & L \text{ 有限}; \\ +\infty, & L=0. \end{cases}$$

注意：灵活进行收敛半径的计算，特别是对用上述方法无法直接计算的收敛半径，可采用换元的办法，或其他办法。

3、幂级数的加减和乘法：

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$,

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 其中 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

两种情况的收敛区域为**公共收敛区域**，收敛半径$R = \min\{R_1, R_2\}$.

4、函数的Taylor级数：

理论： 设函数$f(x)$ 无穷次可导，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n,$$

那么，$f(x)$在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上可以展成 Taylor 级数的充分必要条件是对这区间内的任意点 x, 都有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0,$$

特别, 当 $f(x)$ 的各阶微商在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内任何闭区间上一致有界, 则 $f(x)$ 在这区间上可以展成 Taylor 级数.

几个基本初等函数在 $x = 0$ 的展开式

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots. \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots. \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

注意：

1、上述展开式要会推导，记得住。

2、把函数展开时，一定不要忽略展开式满足的区域（包括收敛半径以及端点）。

3、灵活掌握，对一些函数可分解成上述基本初等函数，再利用幂级数的加法或乘法，给出原函数的展开式。

4、在不同点有不同的展开式，例如对$\ln x$ 在 $x=3$ 处的展开，就必须对函数

$$\ln x=\ln(x-3+3)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x-3}{3}\right)$$

进行展开。

4、可利用函数的展开进行积分的近似计算。

5、Stirling 公式：

$$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}\qquad(0<\theta_n<1).$$

以及

$$\ln(n!)\sim\ln(n^n),\ (n\to\infty)$$

注意：会利用Stirling公式求一些极限，证明不必掌握。