中国科学技术大学

习题 1.3

1. 用定义证明，就是熟悉一下定义，
可以当作填空

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$

定义：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X$，$x < X$ 时，有 $|a^x - 0| < \varepsilon$

求出 X 即可

$$|a^x| < a^x \le \varepsilon$$

$$X < \log_a \varepsilon$$

取 $X = \log_a \varepsilon$

2. 求极限：

先考虑极限四则运算，如果出现 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$，再考虑先化简

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型

但可以化简：$\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$

这个式子很多同学应该高中时见过，

没见过也没关系，以后要当成常识记住

$$\lim_{x\to 1}(1 + x + \cdots + x^{n-1}) = n$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$

1101C-08 201412·2500

3.证极限不存在

先看极限存在，以下等价

① $f(x)$ 在 x_0 处极限存在 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$)

② $f(x)$ 在 x_0 处左右极限都存在

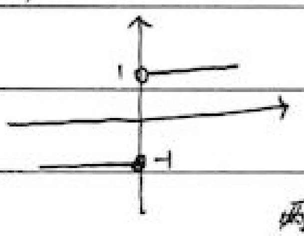
③ $f(x)$ 在 x_0 处满足 Cauchy 判别准则

④ $\forall$ 数列 a_n 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ 存在且相等

我们就从以上4条中选一条最容易证明不对的

(2) 先看①，a 不知道，这里要反证（假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$），比较麻烦

②，我们有这样的发现，画出图像



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

两侧极限不相等

③ $\exists \varepsilon>0$，$\forall \delta>0$，$\exists\ x_1, x_2$ 满足 $0<|x_1-x_0|$，$|x_2-x_0|<\delta$

有 $|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，$x_1=\frac{\delta}{2}$　$x_2=-\frac{\delta}{2}$ 填入上面的位置即可

④ 取 $a_n=(\frac{1}{n})\cdot(-1)^n$ 即可

1101C-08 201412-2500

4. 我们先翻译一下题目

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

证明 a_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=l$

写出定义：

要用 $\begin{cases} ①\ \forall\varepsilon>0,\ \exists X,\ x>X \text{ 时, 有 } |f(x)-l|<\varepsilon \\ ②\ \forall M>0,\ \exists N,\ n>N \text{ 时, 有 } a_n>M \end{cases}$

推出 ③ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $n>N$ 时, 有 $|f(a_n)-l|<\varepsilon$

我们把②中 M 取为 X，然后①②组合起来就是③

(取 $X>0$, $\exists N$, $n>N$ 时, 有 $a_n>X$

因此 $|f(a_n)-l|<\varepsilon$)

5. 讨论函数在 $x=0$ 处的极限，就是问极限是否存在

可以先画图判断一下，再证明，与3相同

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

(类比 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})$ 和等式 $(1+\frac{1}{2^k})(1-\frac{1}{2^k})=(1-\frac{1}{2^{k+1}})$)

我们有 $\sin\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{k-1}}$，当成常识记住

$$\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$

不能忘记这是 $n\to\infty$ 不是 $x\to 0$

$\sin x\sim x$，$\frac{\sin x}{x}\to 1$ 的前提是 $x\to 0$

1101C-08 201412-2500

中国科学技术大学

这是它有 $\frac{x}{2^n}\to 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{a}{n^2}+\sin\frac{2a}{n^2}+\cdots+\sin\frac{na}{n^2}$

（类比 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$ 和 $\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$）

这里我们用 $\sin x=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2\sin y}$

令 $x=\frac{i}{n^2}a$，$y=\frac{1}{2n^2}a$ 即可

一种错误做法：

由 $\sin x\sim x$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{a}{n^2}+\sin\frac{2a}{n^2}+\cdots+\sin\frac{na}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n^2}+\frac{2a}{n^2}+\cdots+\frac{na}{n^2}$

等价无穷小替换仅用于乘除！

但也不是不能这么做

这个错的原因 记 $\sin\frac{ia}{n^2}-\frac{ia}{n^2}=L_{in}$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}L_{in}=0$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{ia}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{ia}{n^2}+\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}L_{in}}_{=0}$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{ia}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{ia}{n^2}+L_{in})$

我们不知道 $\sum\limits_{i=1}^{n}L_{in}$ 是否存在极限

一种保证 $\sum\limits_{i=1}^{n}L_{in}$ 极限存在的方法

$\sin x\sim x\iff\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x}=0\iff\sin x-x=o(x)$

我们用 $\sin x=x+o(x)$

...

中国科学技术大学

下面看 $o(x)$ 的一条性质

$$\sum_{i=1}^{m} o(f_i(x)) = o\left(\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\right)$$

例：$u_n = \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ （$n\to\infty$ 时）

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1} \to 0 \quad (n\to\infty) \quad 即 \sum_{i=1}^{n} o(f_i) = o\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n^2} a_n}{\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty) \quad \sum_{i=1}^{n^2} o(f_i) = o\left(\sum_{i=1}^{n^2} f_i\right)$$

这题 $\sin\frac{i\alpha}{n^2} = \frac{i\alpha}{n^2} + o\left(\frac{i\alpha}{n^2}\right)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{i\alpha}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{i\alpha}{n^2} + \sum o\left(\frac{i\alpha}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\alpha}{2n} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} o\left(\frac{(n-1)\alpha}{2n}\right)}_{=0}$$

8. 做法与第4题类似，模仿第4题，结合·下定义

9. (1) 等价无穷小 $\tan x \sim x \sim \sin x$ （注意 $x\to 0$ 时）

$x\to\infty$ 时不对

(4) 这种 $\left(\frac{T+?}{T-?}\right)^{T}$ 的形式基本都考查基本极限 e

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2x^2}{x^2-1}}$$

记这样一个极限 $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim (\ln f(x)\cdot g(x))}$

$$= e^{\lim \ln f(x)\cdot \lim g(x)}$$

$$= (\lim f(x))^{\lim g(x)}$$

1101C-08 201412-2500

$\therefore$ 式 $= e^2$

中国科学技术大学

10.

(1) $x \to 0$ $\arctan x \sim x$

但 $x \to +\infty$ 时 $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$ 有同学看错

这里用到 $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ 即可

$$\left|\frac{\arctan x}{x}\right| < \frac{\pi}{2x}$$

(3) $\frac{x^3-2x^2}{x-2} = x^2$

12. $y = x\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 无界，不是无穷大

取 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ $y = x$ 无界

取 $x = 2n\pi$ $y = 0$ 不是无穷大

13. 与 12 一样

14. 这题容易漏，建议不要看出一条证一条

按题目的顺序一一去求即可

(i) 垂直~，就看是否在一点趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$

$x = -\frac{1}{e}$

(ii) 水平，看无穷处的极限，无

(iii) 斜渐近线，求一下

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - ax\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) - x$$

1101C-08 201412·2500

中国科学技术大学

一种做法 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(e+\frac{1}{x})-x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e+\frac{1}{x}) - \lim\limits_{x\to+\infty} x$

② $=\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} x$

$=0$

这不对

② $=(+\infty)-(+\infty)$

我们看看 ∞ 的运算

$\infty\cdot\infty=\infty \qquad \infty+c=\infty$

但是 $\infty-\infty$，∞/∞ 无法计算

例：$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-x=0$

$\lim x\ln(e+\frac{1}{x})-x=\lim \ln(1+\frac{1}{ex})^x$

$=\lim \frac{1}{e}\ln(1+\frac{1}{ex})^{ex}$

$=\frac{1}{e}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{\sin^2 x}=1$ 同阶

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{b^x}=\begin{cases}+\infty & a>b \text{ 高阶}\\ 1 & a=b \text{ 同阶}\\ 0 & a<b \text{ 低阶}\end{cases}$

18 (2) $\tan x \sim x$

(6) $(1+f(x))^p-1 \sim p f(x)$ 当 $f(x)\to 0$

第1章 综合

11. 法一：stolz 定理

法二：这种方法在这里比 stolz 复杂

但在没有 stolz 定理这么好的定理的时候，非常常用，

以后你会在积分，级数多次再见到。

思路 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 难以直接估计

分成 $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n$，$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 分别考虑

证：$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i a_i}{n^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i(a_i-a)}{n^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i a}{n^2}$

我们证 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i(a_i-a)}{n^2}\to 0$

需要 $\begin{cases} ① & \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} i(a_i-a)}{n^2}\right|<\frac{C}{n^2}\to 0 \\ ② & \left|\frac{\sum\limits_{i=N+1}^{n} i(a_i-a)}{n^2}\right|<\frac{\sum\limits_{i=N+1}^{n} i}{n^2}\cdot\varepsilon<\varepsilon \end{cases}$

1101C-08 201412-2500

中国科学技术大学

$\forall \varepsilon$, $\exists N$, $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} i(a_n-a)}{n^2}\right| \le \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\right)}\frac{i|a_n-a|}{n^2}$$

这种写法更清晰, 也更节省时间, 在这推荐一下

$$\le \frac{A_N}{n^2}+\varepsilon$$

取 N_1, $n>N_1$ 时 $\frac{A_N}{n^2}<\varepsilon$

$\therefore$ 上式 $\le 2\varepsilon$

$\therefore$ $n\to\infty$ 时 $\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} i(a_n-a)}{n^2}\right|\to 0$

12. 第二题是第一题的一种特情, 不建议倒序写, 会影响自己的思路

可以 (一) (1) 1° 由(2)知, 成立

2° ...

(2) ...

(二) (1) 1° ...

2° ...

(2) 在(1) 1° 中已证

证 (1) 1° $\sum_{i=1}^{n} b_i \to +\infty$ 时, Stolz

2° $\sum_{i=1}^{n} b_i \to b$ 时, $|a_n|$ 有界 记上界为 A

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall m,n>N$ $\left|\sum_{i=n}^{m} a_i b_i\right| \le A\sum_{i=n}^{m} b_i \le A\varepsilon$

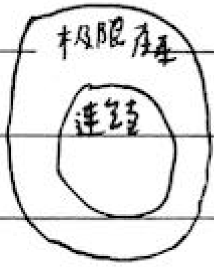
$\therefore$ $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ 收敛

$\therefore$ c_n 收敛

(2) 在(1) 1° 中已证

中国科学技术大学

习题 2.1

1. 

证不连续 $\begin{cases} 1^\circ & \text{证 极限不存在} \\ 2^\circ & \text{证极限存在 但与 } f(x_0) \text{ 不相等} \end{cases}$

1° $f(x) = \begin{cases} 1 & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$

在 $x_0=1$ 处

2° $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x\neq 0 \end{cases}$

在 $x_0=0$ 处

2. 连续是局部的性质，我们只需证在所有点连续

即证 $\forall x \in (a,b)$，$f(x)$ 在 x 处连续

证: $\forall x \in (a,b)$，$\exists\, \varepsilon < \frac{b-a}{2}$，$x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$

$\therefore$ $f(x)$ 在 x 处连续

3. 当 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 不连续时，$f(x)g(x)$ 是否连续

我们知道 $f(x)g(x)\cdot\frac{1}{f(x)} = g(x)$，希望 $f(x)\neq 0$

1° $f(x_0)\neq 0$ 时，假设 $g(x)f(x)$ 在 x_0 连续

则 $g(x) = f(x)g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$ 在 x_0 连续

矛盾!

2° $f(x_0)=0$ 时，无法确定

1101C-08 201412·2500

中国科学技术大学

有同学认为 $f(x_0)=0$ 时 $f(x)g(x)$ 连续，

这是不对的

例 1. $\begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\end{cases}$ $f(x)g(x)$ 在 0 连续

2. $\begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\end{cases}$ $f(x)g(x)$ 在 0 不连续

那有充要条件吗？

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=f(x_0)g(x_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x_0) \text{ 有定义} \\ \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0 \end{cases}$$

其它的情况，没有人写错

4. 上次习题课讲过

$$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2} \quad ①$$

$$\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2} \quad ②$$

我们最希望大家用这个

(1) 由 $\big||f(x)|-|f(x_0)|\big| \leq |f(x)-f(x_0)|$ 可证

(2) 由 ① ② 及 (1) 直接可证

1101C-08 201412-2500

中国科学技术大学

但也可以分类讨论

(2) 1° $f(x_0) > g(x_0)$　　$\exists\, \delta > 0$, $|x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > g(x)$

2° $f(x_0) < g(x_0)$　　同上

3° $f(x_0) = g(x_0)$　有很多错

有人认为 $f(x) = g(x)$ 的点 可以从小到大排为

$x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \cdots$

这不对，例：$f(x) = g(x) = x$　在 $(0,1)$

实事上，以后会学到可数的概念

$(0,1)$ 上所有点无法写成一个数列

有人认为 $\forall\, x_0$　$f(x_0) = g(x_0)$

$\exists\, \delta$,　$0 < |x - x_0| < \delta$ 时　$f(x) \geq g(x)$

或　$g(x) \geq f(x)$

这不对，例

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

在 $x_0 = 0$ 时

应该这样写　$f(x_0) = g(x_0)$ 时

$$|\max(f(x), g(x)) - g(x_0)| \leq \max(|f(x) - f(x_0)|, |g(x) - g(x_0)|) \leq \varepsilon$$

$$|\min(f(x), g(x)) - g(x_0)| \leq \max(|f(x) - f(x_0)|, |g(x) - g(x_0)|) \leq \varepsilon$$

1101C-08 201412·2500