浅谈实数

程艺编写

0.1 说明

本专题建议在学习完数列极限后参阅.

实数是我们既熟悉又陌生的数.熟悉,是因为我们伴随着识数、数数、算术而成长. 陌生,是我们在中学时代,对那个“无限循环小数”和“无限不循环小数”的概念似懂非懂,尤其是那个被称为“无理数”的“无限不循环小数”真的不敢深究.

本专题仍然不是“深究”实数的理论,而是“浅谈”,当我们学习了极限理论后,可以大致介绍关于实数理论不断进化发展的脉络. 因此,我们并不追求数学上的严格叙述.真正“深究”将在第三册展开.

0.2 关于数的那些事儿

人类对“数”的认识,如同孩童一样,先是认识了“自然数”, 认识了“0”, 然后认识了“负数”（这些数统称为“整数”）. 整数的特点是任何两个整数相加和相乘还是整数.因此我们称整数对加法、对乘法是封闭的. 当我们需要做除法时,发现整数不够用了,因为两个整数相除,其结果不再是整数.这时我们引进了“有理数”（其本意是两个整数之比,也就是分数）, 而且有理数对加减法、乘除法都是封闭的.

古希腊以Pythagoras （毕达哥拉斯,约公元前580年—约前500（490）年）为代表的的学派,认为“数”不但用来计数、丈量等实际应用,更是把“数”上升到哲学层面,提出“数是万物之源”,“数是万物的本质”,并赋予了诸如 $1, 2, 3, \cdots$ 等数以“灵性”. 当然,他们所讲的“数”就是整数和整数之比,也就是有理数.

随后,就产生了那个发现 $\sqrt{2}$ 的故事,人们发现边长为 1 的正方形的对角线的长度所对应的数（我们把它记为 $\sqrt{2}$ ）不再是两个整数之比.这样使得本来看似完美无瑕、代表万物、具有灵性的有理数家族中突然闯进了一个魔鬼.

当然人们后来也逐步接受了这种后来成为“无理数”的数, 直观上也就有了整个实数系的概念. 但是直到十九世纪下半叶才给出实数系的严格的定义.

顺便说一句,“有理数”的名称起源于古希腊,英文的词根是“ratio”,即是“比例”的意思,与古希腊人的定义是相同的,后来出现了“rational number”这个词,不知

为什么中文翻译为“有理数”,其实本意与有理没理没有任何关系.后来把不是有理数（不能表示为整数之比）的数“irrational number”干脆翻译成“无理数”.

0.3 数与数轴

在直线 L 上任意取定一点作为原点或点 0, 将另外一点取作 1（一般我们习惯上取在 0 的右边）.我们采用这两点之间的距离为度量的尺度或单位,并将从 0 到1 的方向定义为正向.有了原点（点 0）、长度单位和方向的直线称为“数轴”.

如果从原点开始, 依单位长度往正向逐次丈量, 就得到自然数在数轴上对应的点,同理往原点左侧的丈量得到负整数对应的点.

为描述有理数对应的点, 设数轴上 1 对应的点为 A, 过原点作一条异于数轴的直线 L', 对任意的自然数 $n>1$,在 L' 上取点 A', B' 满足 $OA'=n$, $OB'=1$,过点 B' 作线段 $\bar{A}A'$ 的平行线, 交数轴于 B 点,则 $OB=\dfrac{1}{n}$. 利用 OB 作为新的尺度逐次丈量,可以在数轴上表出所有有理数.

因此,我们把有理数 r 对应数轴上的点称为有理点. 显然,有理点在数轴上是“稠密”的,也就是任何两个有理点 a 和 b之间必然存在第三个有理点（例如 $\frac{a+b}{2}$）.

原以为这样的对应是“天衣无缝”, 然而事实上,有理点虽然稠密,但并不能填满整个数轴,或者说有理数之间并不是“连续的”,仍然留下了很多“空隙”, 例如在 1 和 2 之间,仍然有一个今天称为 $\sqrt{2}$ 的非有理数. 后来发现有理点之间这些空隙要远比稠密的有理点“多”. 那么自然要问, 这些空隙对应的是什么数? 能否扩充有理数域,使得新的数域与数轴上的点一一对应.

另外,我们在讨论数列极限时,也发现即使数列是由有理数构成的数列（例如 $\{e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$）,明明知道它们收敛,但却发现收敛的极限并不是有理数. 或者说对加减乘除等算术运算都封闭的有理数域,对极限运算却不是封闭的. 因此也有必要扩充有理数域,使得新的数域既保持对算术运算的封闭性,也能对极限运算封闭性.

0.4 实数的公理系统

要想扩展有理数域,自然的想法是扩展的数域要包含有理数并保证有理数的所有运算规律和性质得以继承,就像从整数扩展到有理数一样.

为此,我们通过“公理系统”给出实数集 $\mathbb{R}$ 的如下定义：

定义： 满足以下四组条件的集 $\mathbb{R}$ 叫做实数集,它的元素称为实数.这四组条件构成了实数集的公理系统：

加法公理： $\mathbb{R}$ 中的元素之间具有加法运算,也就是对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 可以定义 $x+y$ 且 $x+y \in \mathbb{R}$.加法运算满足

1、有零元 0: 且 $x+0=0+x=x$.

2、有负元：对每个 $x \in \mathbb{R}$, 有 $-x \in \mathbb{R}$, 且 $x+(-x)=-x+x=0.$

3、交换律：$x+y=y+x.$

4、结合律：$x+(y+z)=(x+y)+z$.

乘法公理： $\mathbb{R}$ 中的元素具有乘法运算：对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 可以定义 $x \cdot y$ 且 $xy \in \mathbb{R}$.乘法运算满足

1、有单位元 1: $1 \cdot x=x \cdot 1=x.$

2、有逆元：对任意的 $x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$, 有 $x^{-1} \in \mathbb{R}$, 使得 $x \cdot x^{-1}=x^{-1} \cdot x=1.$

3、交换律：$x \cdot y=y \cdot z.$

4、结合律：$x \cdot(y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z.$

5、分配律：$(x+y) \cdot z=x \cdot z+y \cdot z.$

序公理： $\mathbb{R}$ 中的元素x, y 之间有关系“$\leq$”, 即 x 和 y 或不满足. 同时

1、$x \leq x.$

2、$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x=y.$

3、$x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z.$

4、$x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z.$

5、$0 \leq x, 0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq x \cdot y.$

完备性公理： 设 X 和 Y 是 $\mathbb{R}$ 中的两个非空子集, 并满足对于任何 $x \in X$, $y \in Y$, 有 $x \leq y$, 那么一定存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得对任何 $x \in X$, $y \in Y$, 有 $x \leq c \leq y$.

不难发现,上述公理系统中,加法公理、乘法公理、序公理都继承了有理数之间的基本运算和关系,只有完备性公理是用来弥补“空隙”或者说弥补极限不封闭的公理,因此是扩充有理数集最本质的公理.

现在问题来了, 是否存在满足上述公理的集合？或者说如何构造一个满足上述公理的集合并将之定义为“实数”？下面介绍的两种方法, 分别从几何的角度和极限的角度定义了满足上述公理的实数模型.

0.5 Dedekind分割

Dedekind（戴德金1831 ~ 1916）用有理数集$\mathbb{Q}$ 的分割来定义实数,并完全依赖于有理数集$\mathbb{Q}$ 上的序.具体思想如下：

把有理数集 $\mathbb{Q}$ 划分为两个非空且不相交的子集A 和 A', 使得对任意的 $a \in A$ 和 $a' \in A'$, 有$a < a'$（注意因为是有理数,所以有理数之间是有大小之分的）. 集合A称为划分的下组,集合 A'称为划分的上组, 并将这种划分记成 $A|A'$.戴德金把这个划分定义为有理数的一个分割. 这样就得出了三种可能：

1、在下组A内无最大数,而在上组 A' 内有最小数r, 例如

$$A = \{a|\ a < 1\},\ A' = \{a'|\ a' \geq 1\};$$

2、在下组A内有最大数,而在上组 A' 内无最小数r, 例如

$$A = \{a|\ a \leq 1\},\ A' = \{a'|\ a' > 1\};$$

3、在下组A内无最大数,而在上组 A' 内也无最小数, 例如

$$A = \{a|\ a^2 < 2\},\ A' = \{a'|\ a'^2 > 2\}.$$

这里所谓的“数”当然是指有理数（现在我们还没有其它数）.显然,上述三种分割中,前两种分割是有理数产生的, 称这样的分割为有理分割.为了确定起见,可以约定：凡是说到有理数r 确定的有理分割时,常把这数放在上组内.

Dedekind 的思想是一个分割对应一个“数”,当分割是有理分割时,对应的数就是有理数,当分割是上述第三种分割时,就对应一个新的“数”,称为“无理数”.

因此把所有分割构成的集合：

$$\mathbb{R} = \{A|A'\ :\ \mathbb{Q}\text{的所有分割}\}$$

定义成实数集合.下一步的任务就是要逐一验证这个集合是否符合实数定义的那四条公理了. 这里我们不打算深入讨论下去, 仅仅举两个例子, 一是如何在两个分割之间定义“大小”, 二是两个分割怎么做加法.

设 $\alpha = A|A',\ \beta = B|B'$ 是两个分割, 根据分割的定义, 要么 $A \subset B,\ B' \subset A'$ 要么 $B \subset A,\ A' \subset B'$. 当 $A \subset B,\ B' \subset A'$ 时,就定义

$$\alpha \leq \beta.$$

这样我们就定义了分割之间的一种序（也就是“大小”）.

令 $C = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, 显然这是一个有理数的子集合, 记$C' = \mathbb{Q} \setminus C$（即不属于$C$ 中的其它有理数集合）. 我们要证明 $C|C'$ 是一个分割, 也就是要证明对任意的 $c = a + b \in C,\ c' \in C'$, 有 $c < c'$.

这是因为对任意的 $a \in A$, $c' - a \notin B$（否则存在$d \in B$ 使得 $c' - a = d$, 推出 $c' = a + d \in C$, 这与 C' 的定义相矛盾）. 因此 $c' - a \in B'$, 所以对任意的 $b \in B$, 有$c' - a > b$, 即 $c' > a + b = c$. 这样我们就定义新的分割 $\gamma = C|C'$ 为 $\alpha = A|A',\ \beta = B|B'$ 的和 $\gamma = \alpha + \beta$.

0.6 有理 Cauchy 列

实数的另一种定义方法是利用有理数构成的 Cauchy 列来实现.

我们发现,一些收敛的数列 $\{a_n\}$, 即使所有的 a_n 都是有理数,但是它的极限未必一定是有理数,也就是说有理数构成的数列在极限运算下是不封闭的.典型的例子是数列

$$\{e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\},$$

它收敛到一个不是有理数的数. 另外,由迭代关系

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),\ a_0 > 0 \text{ 是有理数}$$

产生的数列也是有理数列,而且也收敛到不是有理数的数.

上述例子不是偶然的,它启发我们可以通过已知的有理数列的收敛性来构造新的数.

从极限理论我们知道一个数列收敛,等价于该数列是Cauchy 列（即满足Cauchy收敛准则的数列）, 因此, 判断一个数列收敛与否, 并不需要知道它具体收敛到哪个数, 只要验证它是否是 Cauchy 列. 这样,我们感兴趣的是那些由有理数构成的 Cauchy 列（简称为有理数Cauchy列）.

所谓有理数Cauchy列 $\{a_k\}$ 是指 $a_k \in \mathbb{Q}, k=1,2,\cdots$ 且满足

对任意的正整数 n, 存在一个 K,当 $k, k' > K$ 时, 有

$$|a_k - a_{k'}| < \frac{1}{n}$$

注意,目前我们仍处在只有有理数的时候,因此用任意的 $\frac{1}{n}$ 代替极限理论中任意的 $\varepsilon > 0$, 两者的效果是一样的.

定义一个由所有有理数 Cauchy 列构成的集合：

$$\Omega = \{\text{所有有理数Cauchy列}\}$$

并定义这个集合的每一个有理数Cauchy列对应一个“数”. 显然一个有理数Cauchy列只能收敛到一个“数”, 但是不同的有理数列可能收敛到同一个数.例如有理数 Cauchy 列 $0, 0, \cdots, 0, \cdots$, 收敛到 0, 但是有理数Cauchy列 $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, 也收敛到 0. 为解决这个问题,我们在有理数Cauchy列中引进一种等价关系”$\sim$“:

如果对任意的正整数 n, 存在一个 K, 当 $k > K$ 时,有

$$|a_k - b_k| < \frac{1}{n}$$

则称有理数Cauchy列$\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 等价,记为 $\{a_k\} \sim \{b_k\}$

这种等价性具有

1、自反性：$\{a_k\} \sim \{a_k\}$,

2、对称性：$\{a_k\} \sim \{b_k\} \Longrightarrow \{b_k\} \sim \{a_k\}$,

3、传递性：$\{a_k\} \sim \{b_k\}$, $\{b_k\} \sim \{c_k\} \Longrightarrow \{a_k\} \sim \{c_k\}$

相互等价的有理数Cauchy列都收敛到同一个数, 把与有理数Cauchy列 $\{a_n\}$ 等价的所有有理数Cauchy列组成一个家族, 并定义

$$\mathbb{R} = \{\text{ 所有可能的有理数Cauchy列家族构成的集合}\}$$

那么每个家族就定义一个“数”, 或者说这个“数”就是对应家族的共同标记, 它正是我们所要构造的实数!

为了完成这个构造,接下来我们的任务就是要证明这个有理数Cauchy列家族构成的集合 $\mathbb{R}$ 满足实数那四条公理, 详细构造将在第三册讨论.

0.7 十进制小数

最后,我们再回到中学时代介绍的那个“无限循环小数”和“无限不循环小数”. 我们只对$x > 0$ 给出 x 的十进制小数表示.

记 $[x]$ 为不大于x的最大整数, 称为x的整数部分. 那么 $x - [x]$ 就是x的小数部分, 因此它满足$0 \le x - [x] < 1$. 对于任意正实数x, 定义

$$x_n = \frac{[10^n x]}{10^n},\ n = 0, 1, 2, \cdots .$$

当$n \geqslant 1$时, 因为

$$0 \leqslant 10^n x - [10^n x] < 1,$$

所以

$$0 \leqslant 10^{n+1} x - 10\,[10^n x] < 10$$

这意味着

$$0 \le [10^{n+1} x] - 10\,[10^n x] < 10.$$

因此整数$a_{n+1} = [10^{n+1} x] - 10\,[10^n x]$ 满足 $0 \le a_{n+1} \le 9$. 由此可得

$$x_{n+1} - x_n = \frac{[10^{n+1} x] - 10\,[10^n x]}{10^{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}.$$

也就是 x_n 满足递推关系

$$x_{n+1} == x_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}.\ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

因此 x_n 也可以表示为

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},\ n = 1, 2, \cdots$$

这里 $a_0 = x_0 = [x]$ 是 x 的整数部分, a_j 满足 $0 \le a_j \le 9,\ j = 1, 2, \cdots, n$.

下面要验证两件事.

一是 $\{x_n\}$ 是有理数 Cauchy 列. 这是因为对任意的 $\varepsilon > 0$, 只要取 N 满足 $\frac{1}{10^{N+1}} < \varepsilon$, 那么当 $n > N$ 时, 对任何 p, 有

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{10^{n+p}}\right| \\ &\le \frac{9}{10^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots \frac{1}{10^{p-1}}\right) \\ &\le \frac{1}{10^{n+1}} < \varepsilon.\end{aligned}$$

二是要验证 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. 这是因为

$$\frac{10^n x - 1}{10^n} \le \frac{[10^n x]}{10^n} \le x$$

所以

$$x - \frac{1}{10^n} \le x_n \le x$$

就得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. 这样我们就把 x 表示成了十进制小数, 按照第7章中讨论这种无穷求和（称为无穷级数）的含义,有

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

上式有三种可能.

1、求和中只有有限项非零, 不妨设 $a_j = 0, j > m$, 那么上述求和就是一个有限和

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_m = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}.$$

因此 x 是一个有理数.

2、求和是无限循环求和, 记为

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\dot{a}_{n+1}\cdots\dot{a}_{n+k}$$

那么

$$10^n(x-a_0.a_1a_2\cdots a_n)=0.\dot{a}_{n+1}\cdots\dot{a}_{n+k}$$

所以

$$\begin{aligned}10^{n+k}(x-a_0.a_1a_2\cdots a_n)&=a_{n+1}\cdots a_{n+k}+0.\dot{a}_{n+1}\cdots\dot{a}_{n+k}\\&=a_{n+1}\cdots a_{n+k}+10^n(x-a_0.a_1a_2\cdots a_n)\end{aligned}$$

解得

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{a_{n+1}\cdots a_{n+k}}{10^{n+k}-10^n}$$

所以 x 是一个有理数.

反之，每一个有理数都可以写成有限小数或循环小数.

设 $\frac{q}{p}$ 是有理数，其中 $0<q<p$, $(q,p)=1$（无公约数），则存在正整数 r 使得

$$10^{r-1}q<p,\ 10^rq>p$$

为了简化，不妨设 $r=1$ 也就是

$$10q>p$$

因此存在整数 $a_1, 0\le a_1\le 9$ 使得

$$10q=a_1p+q_1,\ 0\le q_1<p$$

所以

$$\frac{q}{p}=\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}\frac{q_1}{p}$$

对 $\frac{q_1}{p}$ 重复上述过程

$$\frac{q_1}{p}=\frac{a_2}{10}+\frac{1}{10}\frac{q_2}{p}$$

所以

$$\frac{q}{p}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{1}{10^2}\frac{q_2}{p}$$

如此下去 $0\le a_n\le 9$, $0\le q_n<p$，如果有一个 $q_n=0$, 上述过程终止, 如果 $q_n\ne 0$，则在 0到p 之中有限个整数中，必有相等，因此出现无限循环小数。

3、求和是无限不循环求和, 所以无限不循环小数只能是无理数.

注记： 这里我们只讨论了十进制小数. 显然“10”在所有数中并没有什么特别地位, 虽然十进制是最常用的进制. 因此也可以考虑“p–进制”, 这里 p 是一个正整数. 例如另一个常用进制是“2进制”. 有关细节在此就不展开说明了.