9.그래프1

- 개요
  - 학습목표
    - 그래프 이론에서 사용되는 다양한 용어를 설명할 수 있다.
    - 주어진 그래프의 종류를 판별할 수 있다.
    - 주어진 그래프를 발생행렬과 인접행렬로 표현할 수 있다.
  - 주요 용어
    - 그래프
    - 방향 그래프
    - 단순 그래프
    - 부분 그래프
    - 차수
    - 워크
    - 트레일
    - 경로
    - 연결 그래프
    - 완전 그래프
    - 이분 그래프
    - 정규 그래프
    - 발생행렬
    - 인접행렬
    - 연결 리스트
- 1. 기본사항[219]
  - 그래프
    - 그래프
      - 꼭지점(vertex)의 집합과 변(edge)의 집합으로 정의된 도형
      - G = (V, E)
        - 꼭지점의 집합 V와 변의 집합 E를 가지는 그래프의 표현
      - 변
        - 두 꼭지점을 연결하는 역할을 수행
      - 발생(incident)
        - 변 e가 꼭지점 v와 w를 연결하는 경우 v와 w는 e에 의해 발생(incident)되었다고 함
      - 인접(adjacent)
        - v와 w는 서로 인접(adjacent)
      - 루프(loop)
        - 동일한 꼭지점을 연결하는 변
      - 병렬(parallel) 변
        - 두 꼭지점을 연결하는 변이 두 개 이상 있을 때 해당 변
      - 고립(isolated)
        - 어떠한 변도 연결되지 않는 꼭지점
    - 예제 9-1
  - 특징
    - 꼭지점과 변의 위치에 따라서 하나의 그래프는 여러 가지 다른 모습의 그래프로 표현될 수 있음.
  - 방향 그래프(directed graph)
    - 방향 그래프(directed graph)
      - 변이 방향을 가지고 있는 그래프
    - 무향 그래프(undirected graph)
      - 변이 방향을 가지지 않는 그래프
    - 방향 그래프의 특징
      - 꼭지점과 꼭지점 사이의 연결에 방향성이 존재할 때 표현하는 용도

- 리스트나 트리와 같은 자료 구조를 도식화
- 무향 그래프의 특징
  - 꼭지점들 사이에 전후관계가 없을 때 이를 도식화
  - 만약 두 지역을 연결하는 다리의 개수가 중요한 요소가 아니라면 (a)를 그래프로 변환하면서 연결된 지역은 하나의 변으로만 표현할 수 있을 것
- 단순 그래프(simple graph)
  - 꼭지점의 집합 V와 변의 집합 E로 이루어진 단순그래프 G = (V, E)는 루프나 병렬 변을 가지지 않는 무향 그래프이다.
- 부분 그래프(subgraph)와 신장 부분 그래프(spanning subgraph)
  - 부분 그래프
    - 그래프 H와 그래프 G가 있을 때, H의 모든 꼭지점이 G의 꼭지점이고, H의 모든 변이 G의 변일 경우 H를 G의 부분 그래프라고 한다.
  - 신장 부분 그래프
    - 만약, H의 꼭지점과 G의 꼭지점이 완전히 일치하면 H는 G의 신장 부분 그래프라 한다.
  - 즉, G = (V, E)이고, H = (V', E')일 때, (1) $V' \subseteq V$이고 $E' \subseteq E$이면 H를 G의 부분 그래프, (2) V' = V이고 $E' \subseteq E$이면 H를 G의 신장 부분 그래프라고 부른다.
  - 예제 9-4

1. 기본사항 (2) [224]

- 차수(degree)
  - 그래프 G의 꼭지점 v에 대해 v에 인접한 변의 수를 v의 차수라 한다.
  - 변이 루프일 경우 2를 더 한다.
  - G의 총 차수는 G에 있는 모든 꼭지점 차수들의 합이다.
  - 예제 9-5
    - 아무런 변이 없는 그래프 G는 총 차수가 0이고, 하나의 변이 추가될 때마다 그래프 G의 총 차수는 2씩 증가한다.
    - 그래프 G의 총 차수는 변의 개수의 두 배가 되고 총 차수는 언제나 짝수가 된다.
  - 방향 그래프에서 차수
    - 진입차수
      - 해당 꼭지점으로 들어오는 변의 수를 나타냄
    - 진출차수
      - 해당 꼭지점에서 다른 꼭지점으로 나가는 변의 수를 나타냄
    - 예제 9-6
      - loop는 진입차수와 진출차수
- 워크(walk)와 트레일(trail)과 경로(path)
  - 그래프 G = (V, E)에 꼭지점 v_0와 v_k가 있다고 하자.
  - 워크(walk)
    - 유한한 순서쌍
    - $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_kv_k$
  - 시작점(origin)
    - 워크 W에서 v_0를 시작점(origin)
  - 종점(terminus)
    - 워크 W에서 v_k를 종점(terminus)라 한다.
  - 내부점(internal vertices)
    - $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$
  - 정수 k는 W의 길이(length)
  - 워크 W의 시작점과 종점이 같을 경우 W는 닫혀 있다(closed)
  - 만약 $W' = v_0e_1v_1 \cdots e_iv_i$ 라 한다면, WW'는 두 개의 워크의 결합으로 다시 하나의 워크가 된다.
  - 특징
    - 그래프에서 워크 W는 $v_0v_1 \cdots v_k$로 줄여서 표현 가능하나, 단순 그래프가 아닐 경우 워크 W는 $v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_kv_k$ 형태로 표현해야 한다.
  - 트레일(trail)
    - 워크 W의 변들 $e_1, e_2, ..., e_k$가 모두 서로 다르다면, W는 트레일(trail)이라고 한다.
  - 경로(path)

- 트레일 W의 꼭지점들 $v_0, v_1, ..., v_k$가 모두 서로 다르다면, W는 경로(path)라고 한다.
- 워크 W의 길이는 워크에 참여한 변들의 개수를 말한다.
  - 트레일의 길이와 경로의 길이도 마찬가지로 정의한다.
- 예제 9-7
- 워크는 변들이 모두 다른 '트레일'과, 변들도 꼭지점들도 모두 다른 경로를 포함한다.
- 시작점과 종점이 같은 '닫힌 워크'에서는 트레일을 '닫힌 트레일'이라고 하고 경로는 '닫힌 경로' 또는 '사이클'이라고 부른다.

닫힌 트레일(close trail)과 사이클(cycle)
- 닫힌 트레일(close trail)
  - 워크 $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_kv_k$의 변 $e_1, e_2, ..., e_k$가 모두 서로 다르면서 v_0와 v_k가 동일한 경우 W는 닫힌 트레일이라 한다.
- 사이클(cycle)
  - 닫힌 트레일 중에서 $v_0, v_1, ..., v_k$까지의 꼭지점이 모두 서로 다를 경우 사이클이라고 한다.
  - 사이클에 포함된 변의 개수를 사이클의 길이(length)라 하며, k의 길이를 가지는 사이클을 k-사이클이라고 한다.

연결성분(connected component)과 연결 그래프(connected graph)
- 꼭지점의 연결
  - 그래프 G = (V, E)에서 두 꼭지점 u, v를 서로 연결하는 경로(path)가 있을 경우, 두 꼭지점은 서로 연결되어 있다고 한다.
- 연결성분
  - V의 꼭지점들은 서로 연결되어 있고, 다른 집합과는 겹치지 않는 꼭지점의 집합 $V_1, V_2, ..., V_n$으로 나눌 수 있는데, 이들 각각을 **연결성분**이라 한다.
- 연결 그래프
  - G에 오직 하나의 연결성분만 있을 경우, G를 **연결 그래프**라고 한다.   즉, 그래프 G = (V, E)가 있을 때, 임의의 꼭지점 u, v 사이에 경로가 있는 그래프를 연결 그래프라 한다.
- 인접하다
  - 꼭지점 u와 v가 단 하나의 변으로 직접 이어진 것
- 연결하다
  - 꼭지점 u와 v가 하나의 경로(하나 이상의 변으로 구성됨)로 이어진 것
- 예제 9-9
- 예제 9-10

2. 그래프의 종류 [229]

완전 그래프(complete graph)
- 완전 그래프
  - 그래프에 속한 모든 꼭지점이 다른 꼭지점과 인접한 경우 완전 그래프라 하고, n개의 꼭지점을 가지는 완전 그래프는 K_n으로 나타낸다

이분 그래프(bipartite graph)
- 그래프 G = (V, E)의 V가 1) 2개의 집합 V_1과 V_2로 분할되어 있고,   2) 모든 변들이 V_1의 꼭지점과 V_2의 꼭지점을 인접시킬 경우   G를 이분 그래프라고 한다.
- 그래프의 꼭지점을 두 가지 색으로 칠할 때, 모든 변의 양 꼭지점이 서로 다른 색으로 칠해질 수 있는 그래프
- 주어진 그래프가 이분그래프인지 확인하는 방법
  - 1. 꼭지점 하나를 잡아서 빨간색으로 칠한다.
  - 2. 인접한 다른 꼭지점들을 파란색으로 칠한다.
  - 3. 인접한 꼭지점들을 빨간색으로 칠한다.
  - 모든 꼭지점에 색이 칠해질 때까지 반복했을 때 빨간색과 파란색이 중복해서 칠해진 꼭지점이 없다면 이분 그래프이다.
- 홀수의 길이를 가지는 사이클을 갖는 그래프는 이분 그래프가 될 수 없다.
  - 그래프 내에 홀수의 길이를 가지는 사이클이 존재한다면 필연적으로 하나의 노드는 빨간색과 파란색으로 겹칠해지게 되므로 주어진 그래프는 이분 그래프가 될 수 없다.
- 이분그래프라면 그래프 내부에 홀수의 길이를 가지는 사이클을 가지지 않는다.
  - 홀수의 길이를 가지는 사이클이 존재하지 않는다는 것 (그래프가 이분 그래프일 필요충분조건)

완전 이분 그래프(complete bipartite graph)
- 이분 그래프 G = (V, E)에서 정점 집합 V가 V_1과 V_2로 분할되고, V_1의 모든 꼭지점이 V_2의 모든 꼭지점과 변으로 인접되어 있을 때,   G를 **완전 이분 그래프**라고 한다.
- V_1에 포함된 꼭지점의 개수가 m개이고, V_2에 포함된 꼭지점의 개수가 n개라면,   이 그래프는 $K_{m,n}$으로 표현한다.

정규 그래프(regular graph)
- 정규 그래프(regular graph)

└ 그래프 $G = (V, E)$의 모든 꼭지점이 동일한 수의 이웃(즉, 인접한 꼭지점)을 가질 경우, 이를 **정규 그래프**라고 한다.

k-정규 그래프

└ 정규 그래프의 모든 꼭지점은 동일한 차수를 가지며, 특히 각 꼭지점의 차수가 k일 때, 이를 **k-정규 그래프**라고 부른다.

└ 예제 9-13

└ 3. 그래프의 표현 [232]

발생행렬(incidence matrix)

└ 발생행렬

- 그래프의 꼭지점을 행렬의 행으로, 변을 행렬의 열로 하여, 꼭지점과 변의 발생관계를 표현한 것
- 발생행렬의 (i, j) 원소는, 꼭지점 v_i가 변 e_j에 의해 발생되었을 경우 **1**, 그렇지 않을 경우 **0**의 값을 가진다.
- 따라서 그래프 $G = (V, E)$의 발생행렬 M_i는 $|V| \times |E|$ 크기의 부울 행렬이며, $M_i = (a_{ij})$는 다음과 같이 정의된다:
  - └ a_{ij} = 1 (v_i가 e_j에 의해 발생되는 경우) 0 (그 밖의 경우)

인접행렬(adjacency matrix)

인접행렬

- 그래프의 꼭지점을 행렬의 행과 열로 하여, 꼭지점들 사이의 연결 관계를 표현한 것이 **인접행렬(adjacency matrix)**이다.
- 즉, 그래프 $G = (V, E)$의 인접행렬 $M_a = (a_{ij})$는 각 원소 a_{ij}가 꼭지점 v_i에서 꼭지점 v_j로의 **변의 개수**를 나타낸다.
- 이 행렬 M_a의 크기는 $|V| \times |V|$인 **정방행렬(square matrix)**이다.

└ 특징

- 무방향 그래프의 경우, 인접행렬은 대칭 행렬이 됨
- 단순 무향 그래프에서는 $a_{ij} \in \{0,1\}$
- 가중치 그래프에서는 가중치 값이 a_{ij}에 들어갈 수 있음
- (b)에서 각 행의 원소를 모두 더한 것 : 각 꼭지점의 진출차수 각 열의 원소를 모두 더한 것 : 해당 꼭지점의 진입차수

└ 인접 리스트(adjacency list)

└ 인접리스트

- 그래프 $G = (V, E)$의 각 꼭지점에 인접하는 꼭지점들을 차례로 연결 리스트로 표현한 것
- 각 꼭지점에 대해 시작 노드가 주어지고, 그 꼭지점으로부터 인접해 있는 꼭지점들을 연결 리스트로 표시하는 그래프 표현방법
- 주의할 점
  - └ 시작 노드에 연결되는 꼭지점들의 순서는 관계 없다.