## 2. 데이터 표현

### 1.1. 진법 [25]

- 1) 수와 숫자
  - 수(number)는 그 수를 의미하는 기호인 숫자(numeric character)로 나타낸다.
- 2) 진법
  - 용어
    - 진법
      - 수를 숫자로 나타내는 방법으로  숫자의 위치에 따라 가중치(weight)를 부여하는 방법이다.
    - 가중치(weight)
      - 가중치는 기수(radix 또는 base)의 승수(거듭제곱)를 이용한다.
    - 기수(radix, base)
      - 기수(radix, base)는 2 이상의 양의 정수다.
    - r진법
      - 기수가 r(r >= 2)인 경우의 진법
    - r진수
      - r 진법으로 표현된 수
      - r개의 숫자 (0, 1, 2, ..., r-1)로 표현
    - 기수r
      - r진수임을 나타내기 위해 r진수 오른쪽 아래 기수 r을 표기
  - r진수 N은 정수부분이 n자리, 소수점 이하 부분이 m자리라 할 때 다음과 같이 표현됨
    - $a_k$(a의 아래첨자 k) 는 진법에서 사용하는 숫자로, 각 자리의 계수
    - $0 \le a_k < r$ 이어야 함
  - 여러가지 진법에 따른 수 표현
    - 16진수의 경우 10개의 숫자와 나머지 6개의 숫자(A,B,C,D,E,F)는 영문자에서 빌려쓰고 있음
- 3) 진수변환
  - (1) r진수의 10진수 변환
    - 16진수 9AB.C를 10진수로 변환하시오.  풀이 $9AB.C_{16} = 9\times16^2 + 10\times16^1 + 11\times16^0 + 12\times16^{-1}$ $= 2304 + 160 + 11 + 0.75$ $= 2475.75$
  - (2) 10진수의 r진수 변환
    - 증명[29-30]
    - 문제풀이
  - (3) 2진수와 2^n진수 상호 변환
    - 2진수를 구성하는 각 자릿수는 비트(bit : binary digit)로 표현한다.
    - n개의 비트는 2^n개의 수를 표현할 수 있다.
      - 2진수의 각 비트를 소수점 중심으로 2비트씩 묶으면 4개의 수를 표현할 수 있는 숫자 조합(00, 01, 10, 11)을 얻을 수 있다.
        - 주어진 2진수를 4개의 숫자로 수를 표현하는 4진법으로 해석할 수 있다.
    - 2진수의 2^n진수 변환
      - 예제
        - n비트씩 묶을 때 부족한 비트 수만큼 0이 있다고 가정하고 반드시 필요한 수만큼씩 묶어서 해석해야 함
    - 2^n진수(n>=2)의 2진수 변환
      - 2^n진수의 각 자리의 수에 대응하는 n비트의 2진수로 모두 바꾸면 된다.
  - 4) 기타 변환
    - r진수를 s진수로 변환하는 경우  (단, r!=s, r!=10, s!=10)
      - 1번 변환방법으로 r진수를 10진수로 변환한다음 2번 변환방법으로 다시 s진수로 변환한다.

### 1.1. 진법 (2)

- 4) 산술연산 (arithmetic operations)
  - 진수 r인 수에 대한 산술연산(arithmetic operations)은 10진수의 산술연산과 같다. 다만 r개의 숫자만 사용할 수 있음에 주의해야 한다.
  - 두 개의 2진수에 대한 가산, 감산, 승산, 제산
    - 두 개의 2진수에 대한 가산, 감산, 승산, 제산의 예는 다음과 같다.

- 가산
  - 두 개의 2진수 가산은 모든 자리의 합의 결과가 0이거나 1이 된다는 것을 제외하고는 10진수의 경우와 같은 방법으로 계산하며, 주저인 자리에서 발생하는 올림수(carry)는 바로 윗자리에서 합산한다.
- 감산
  - 주어진 자리 숫자에서의 내림수(borrow)가 피감수의 해당 자리에 2를 더해 주는 것을 제외하고는 10진수$_{10}$의 경우와 같다
- 승산
  - 승수의 숫자가 항상 0이거나 1이므로 부분 곱셈의 결과는 피승수와 같거나 0이 되며, 이들을 자릿수에 맞추어 모두 더해주면 된다.
- 제산
  - 피제수에서 제수를 계속 빼서 (피제수가 제수보다 작아지거나 0이 될 때까지), 그때까지 뺀 횟수가 몫이 되고, 빼고 남은 값이 나머지가 된다.

8진법, 16진법 또는 다른 r진법의 산술연산

8진법$_8$, 16진법$_{16}$ 또는 다른 진법의 산술 연산을 위해서는 두 개의 한 자릿수의 합과 곱의 값을 알 수 있는 표가 필요하다. 예를 들어 4진수$_4$의 가산과 감산을 위해서는 (표 2.2)와 같은 산술 연산표를 이용하면 간편하다.

r진법의 두 수를 가산하는 보다 쉬운 방법

- 주어진 자리의 두 숫자를 10진수로 바꾸어 10진수 덧셈을 하고, 그 결과를 다시 r진법의 합과 올림수로 변환
- 예제
  - 진수가 r인 두 수의 승산은 10진법으로 산술연산하고, 그때마다의 중간 결과를 r진법으로 변환함으로써 이루어진다.
- 예제 2.13 [37]
  - 여기서 오른쪽 계산과정은 왼쪽의 두 8진수$_8$의 각 곱셈 결과를 10진수$_{10}$로 나타내고 다시 8진수$_8$로 나타낸 것이다. 가장 오른쪽의 8진수$_8$에서 ○표를 한 숫자들은 각 자리에서의 올림수(carry)를 의미한다. 예를 들면, $(4×4)_8 = (20)_8$에서 왼쪽 숫자 2는 $(4×7)_8$의 곱셈에 더해질 올림수이고, 마지막 자리 숫자 0만 8진수 부분 곱셈의 해당 자리에 놓이게 되는 숫자이다.

## 1.2. 보수 [38]

개요

- 보수의 개념, 보수를 이용한 r진수의 감산
- 2진수를 다루는 컴퓨터에서의 감산이 보수를 이용하여 가산만으로도 가능함

1) 보수의 개념

r진수$_{(r)}$ N을 r의 보수 (r's complement)와 (r−1)의 보수 ((r−1)'s complement) 등 두 가지 보수가 있다. 예를 들어, 2진수$_2$에는 2의 보수와 1의 보수가 있고, 10진수$_{10}$에는 10의 보수와 9의 보수가 있다.

(1) r의 보수

- 정수부분 n개의 자리로 구성된 r진수 N에 대한 r의 보수는 (식 2.2)와 같이 정의
  - 예를 들어, - 10진수$_{10}$ 35.34의 10의 보수는 $10^2 - 35.34 = 64.66$이고, - 2진수$_2$ 110111의 2의 보수는 $2^6 - (110111)_2 = (1000000_2 - 110111_2) = 001001_2$이다.
  - 위의 공식과 다르게 (r-1)의 보수를 구한 다음 가장 낮은 자리에 1을 더하여 구할 수도 있다
    - 즉, 10진수 678의 9의 보수는 $10^3 - 10^0 - 678 = 999 - 678 = 321$ 이므로 678의 10의 보수는 321 + 1 = 322가 된다. 2진수 1110의 1의 보수는 1110의 1을 0으로, 0은 1로 바꿈으로써 0001을 구한다. 따라서 $1110_2$의 2의 보수는 0001 + 1 = 0010이 된다.

(2) (r-1)의 보수

- 정수부분이 n개의 자리로 구성되고 소수점 아래가 m개의 자리로 구성된 r진수 N에 대한 (r-1)의보수는 다음과 같다.
  - N에 대한 (r−1)의 보수 = r^n − r^(−m) − N
    - 즉, $r^n - r^{-m}$에서 수 N을 빼면 (r-1)의 보수가 얻어진다. 예를 들면, 10진수 35.34에 대한 9의 보수는 $10^2 - 10^{-2} - 35.34 = 99.99 - 35.34 = 64.65$ 이고, 2진수 1101.11의 1의 보수는 $(2^4 - 2^{-2} - 1101.11)_2 = (1111.11 - 1101.11)_2 = (0010.00)_2$
      - 일반적으로 2진수의 1의 보수는 2진수의 0을 1로, 1은 0으로 서로 바꾸면 쉽게 구할 수 있다.
- r의 보수와 (r-1)의 보수의 관계
  - r의 보수 = (r-1)의 보수 + 가장 낮은 자리의 1
    - 즉, 정수에서 2의 보수는 1의 보수에 1을 더한 것과 같다.
    - 위의 공식과 다르게 (r-1)의 보수를 구한 다음 가장 낮은 자리에 1을 더하여 구할 수도 있다

2) 보수를 이용한 감산

- 감산을 보수와 가산으로 처리할 수 있는 이론적 근거
  - 즉, 감수(subtrahend)를 부호(sign)를 보함하여 r의 보수를 한 다음 피감수(minuend)에 가산한다.
    - 10진수 감산 923-678

923−678=245인데 이것을 678의 10의 보수 322를 이용하여 923+322=1245를 구하고, 여기서 올림수 1을 무시하면 동일한 답 245를 구할 수 있다. 그러나 이 경우 678의 10의 보수는 1000−678=322로 구해야 하므로 여전히 감산을 이용해야 한다.

- 2진수 감산 $1011_2-0101_2$

  $1011_2$에 $0101_2$의 2의 보수를 구해 더해 준 다음 올림수만 무시하면 구할 수 있다. 그런데 여기서 $0101_2$의 2의 보수는 먼저 $0101_2$의 1의 보수를 구한 다음 그 결과에 1만 더해 주면 구할 수 있다. 그리고 $0101_2$의 1의 보수는 앞에서 설명한 것처럼 0은 1로, 1은 0으로 바꿈으로써 구할 수 있다.

## 1.3. 부호 있는 2진수[41]

- 개요
  - 수를 표현하는 방법 중 양수뿐만 아니라 음수를 표현하는 방법
    - 수
      - 부호
      - 소수점
      - 수의 크기
  - 소수점의 위치 정하는 방법에 따른 수 표현방법
    - 고정 소수점(fixed point)
      - 소수점의 위치가 고정
    - 부동 소수점(floating point)
      - 소수점의 위치가 상대적으로 이동
    - 이 항에서는 고정소수점 표현 방법에 따라 양의 정수, 영, 음의 정수를 표현하는 방법만 다룬다.
  - 부호 있는 정수를 2진수로 표현하기
    - 우선 표현하고자 하는 수를 몇 비트로 표현할 것인지를 정해야 한다.
    - 4비트를 이용하여 부호 있는 2진수를 세 가지로 표현한 것
      - 어떤 표현방법을 사용하더라도 양수를 표현하는 2진수는 동일하지만, 음수를 표현하는 2진수는 각각 다르다.
- 1) 부호 있는 절대치 표현
- 2) 부호 있는 1의 보수 표현
- 3) 부호 있는 2의 보수 표현