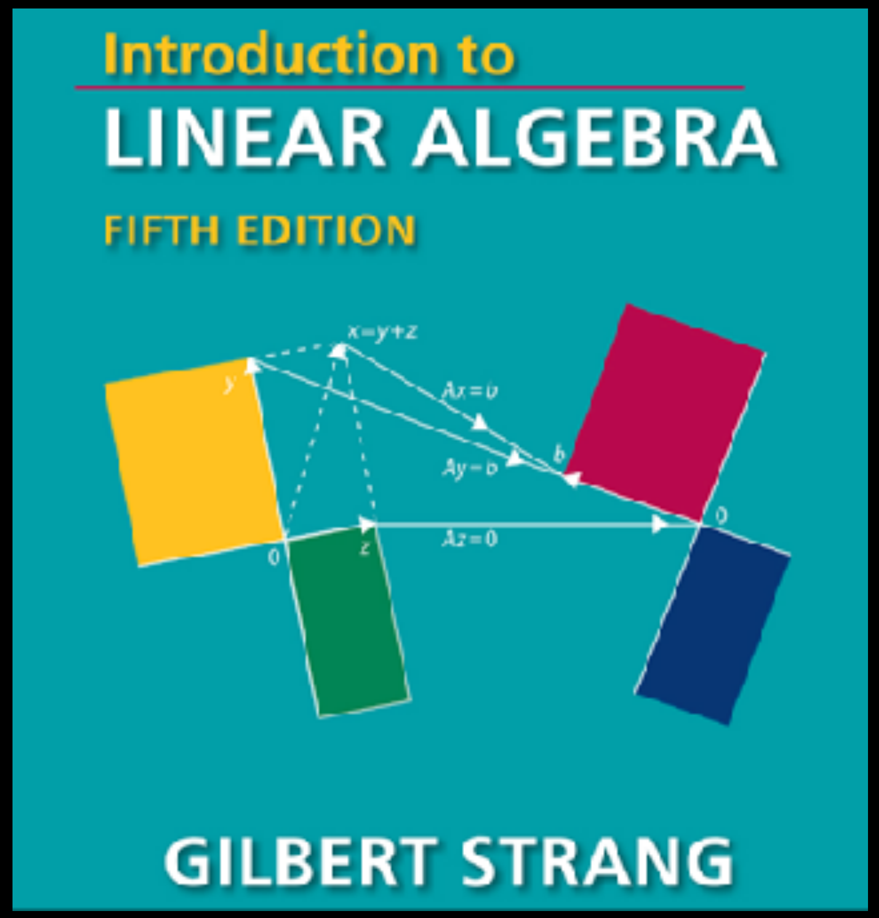
线性代数可视化直观理解：以 矩阵乘法 与 四种空间（Ax=0）为例



By 极客鸭鸭

1. 向量 与 矩阵 相乘

数 number $i \in R^1$

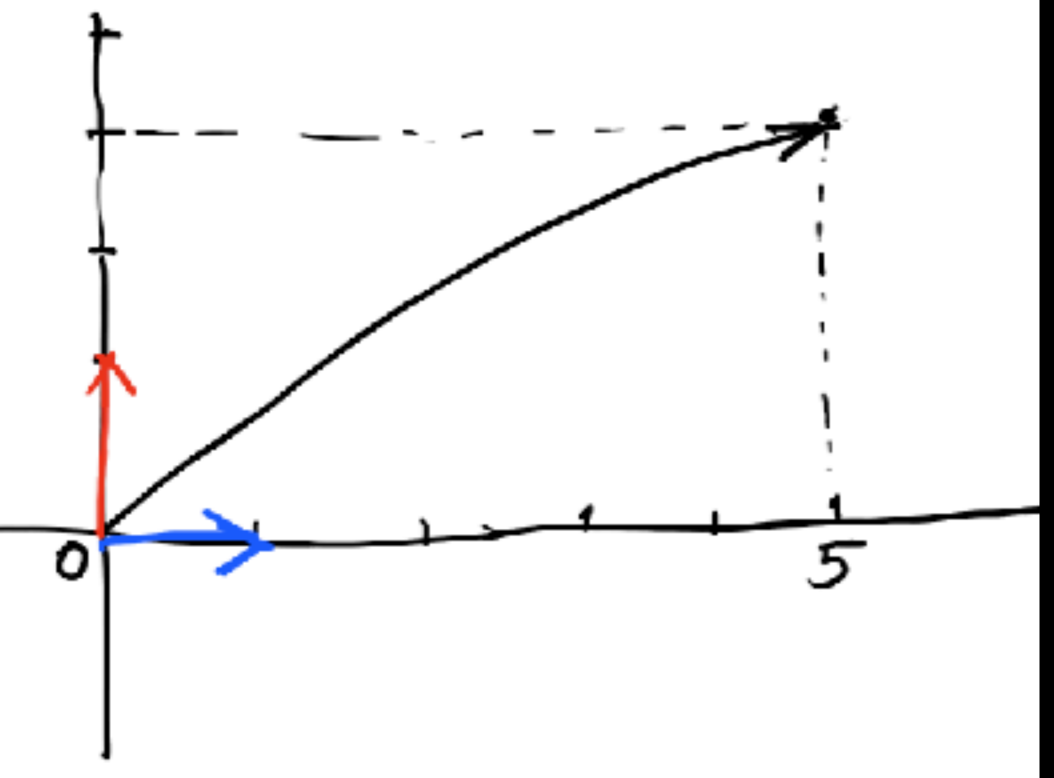
向量 vector $v \in R^m$

矩阵 matrix $A \in R^{m\times n}$

向量 (vector)

$$m\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}. \Rightarrow \begin{cases}1\cdot m+0\cdot n=5\\0\cdot m+1\cdot n=3\end{cases}$$

easy. $m=5$, $n=3$



矩阵 (matrix)

① $$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\text{矩 matrix}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}}_{\text{列向量 column vector}}=\underbrace{\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}}_{\text{列向量}}$$

② $$\underbrace{\begin{bmatrix}m&n\end{bmatrix}}_{\text{行向量}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\text{矩}}=\underbrace{\begin{bmatrix}5&3\end{bmatrix}}_{\text{行向量 row vector}}$$

向量 与 矩阵 相乘;

① $$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$$

② $$\begin{bmatrix}m&n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=m\cdot\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}+n\cdot\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}m&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m&n\end{bmatrix}$$

2. 矩阵 与 矩阵 相乘

向量 (vector)

$$m\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + n\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}.$$

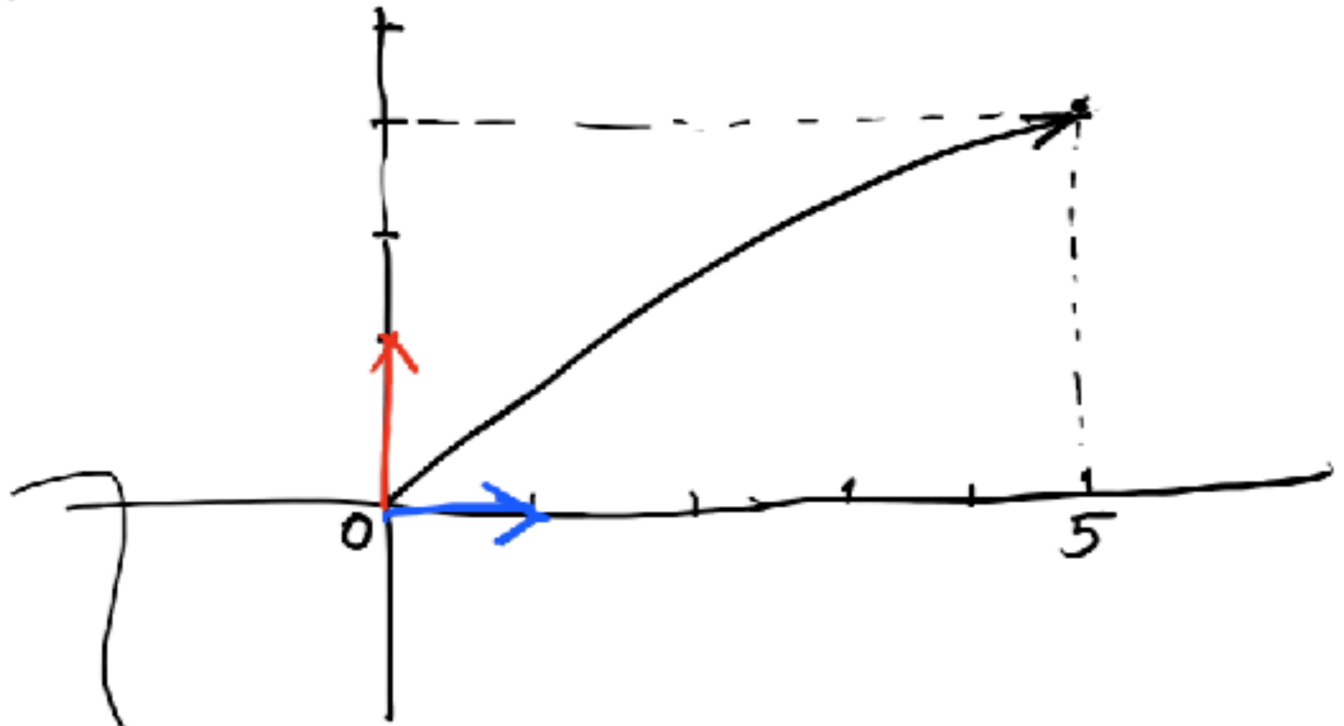
$$\begin{cases}1\cdot m+0\cdot n=5\\0\cdot m+1\cdot n=3\end{cases}$$

easy. $m=5$, $n=3$

矩阵 (matrix)

① $\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\text{矩 matrix}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}}_{\text{列向量 column vector}}=\underbrace{\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}}_{\text{列向量}}$

② $\underbrace{\begin{bmatrix}m & n\end{bmatrix}}_{\text{行向量}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\text{矩}}=\underbrace{\begin{bmatrix}5 & 3\end{bmatrix}}_{\text{行向量 row vector}}$



向量 与 矩阵 相乘;

$U_{m\times n}\cdot V_{n\times k}$

矩阵·矩阵 (即：将行向量/列 stack 在一起)

① → ③ $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}|&|&\\x_1&x_2&\cdots\\|&|&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|&|&\\v_1,&v_2&\cdots\\|&|&\end{bmatrix}$

② → ④ $\begin{bmatrix}\boxed{x_1}\\\boxed{x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b_1-\\-b_2-\end{bmatrix}$ e.g $\begin{bmatrix}5&3\\-1&7\end{bmatrix}$

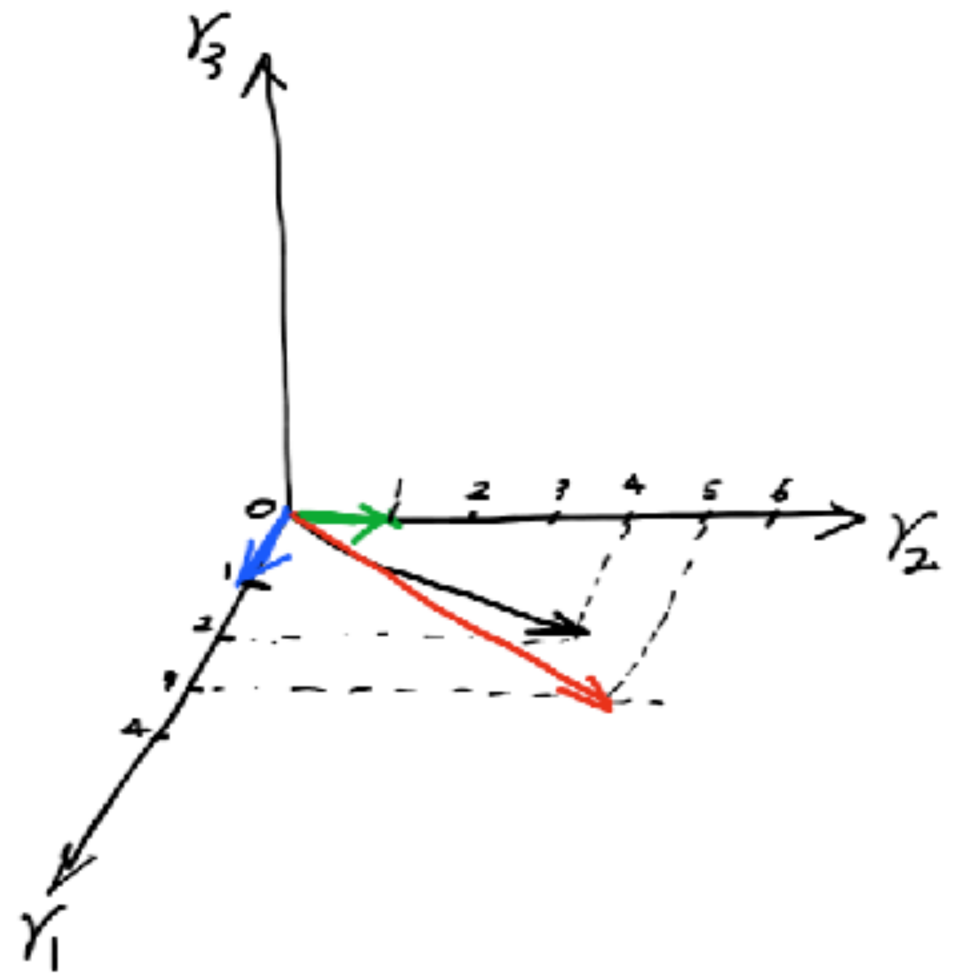
3. 矩阵列向量 的 子空间 （讨论 Ax=0问题）

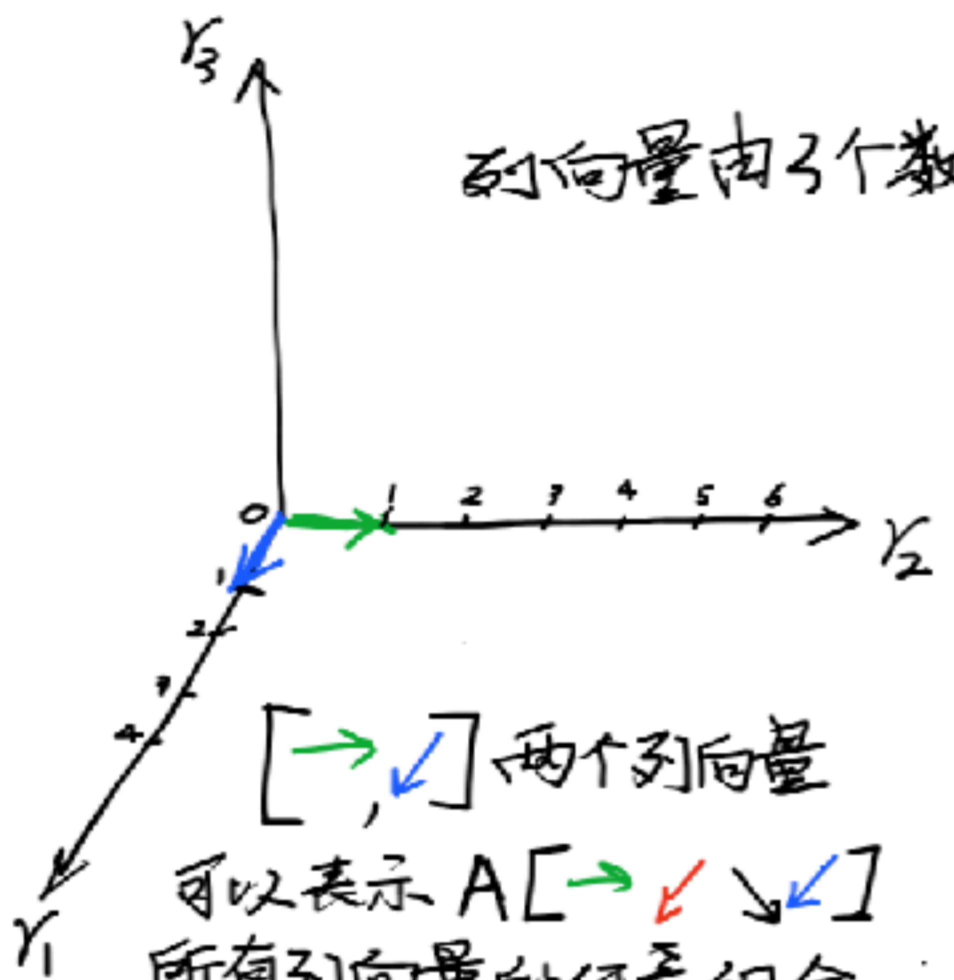
例：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

求解 solve： $A x=\vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}2\\4\\0\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}3\\5\\0\end{matrix}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boxed{x_1}\\\boxed{x_2}\\\boxed{x_3}\\\boxed{x_4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$





列向量由3个数表示，处于3维空间中 $(A^{(i)}\in\mathbb{R}^3)$

[→, ↙] 两个列向量

可以表示 A[→ ↙ ↘ ↙]

所有列向量的任意组合

(Ax ，任意 x)

列向量 生成空间 (span)

$C(A)$： r_1，r_2 过原点的平面

3维空间中 的 2维空间

$N(A)$：对于 x，所有 $Ax=0$ 中 x 生成的空间 span

$(x\in\mathbb{R}^4)$

∴ 子空间 subspace

维度 $\dim(C(A))=2$

秩 $\mathrm{rank}(A)=2$

三个基本概念 (教材里有)

[→ ↙] 列向量构成子空间的一种 基 (basis)

Column space & Null space

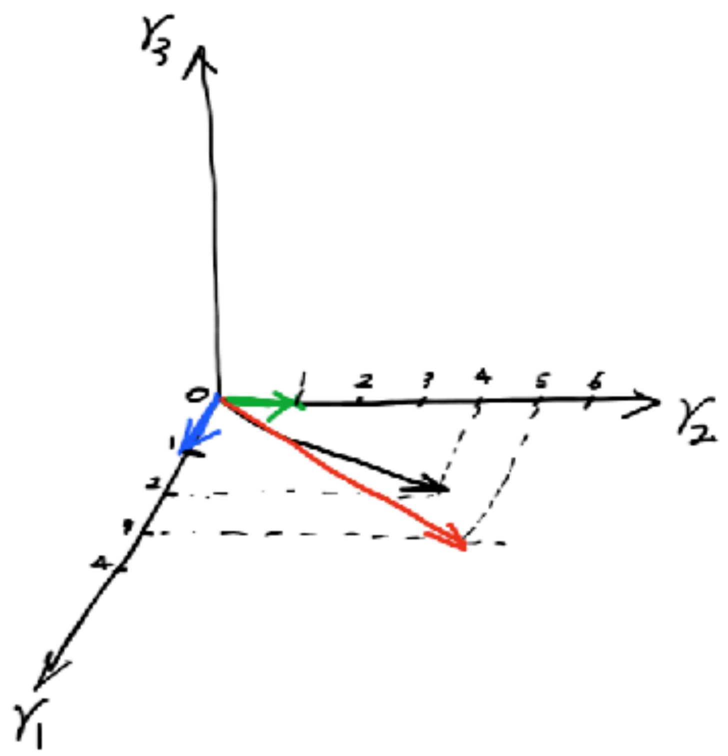
5. 列空间 C(A) 与 零空间 N(A)

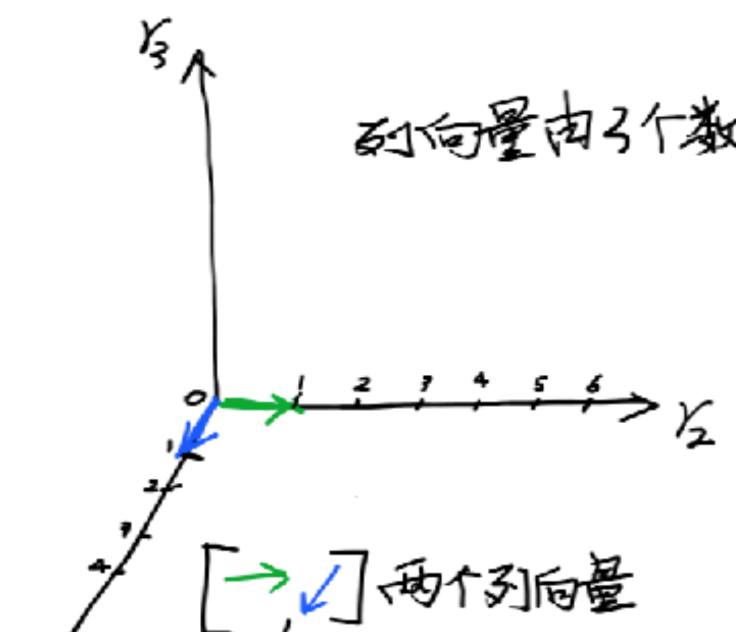
例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

求解 solve: $A x = \vec{0}$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$





列向量由3个数表示，处于3维空间中 $(A^{(i)} \in \mathbb{R}^3)$

[→, ↙] 两个列向量

可以表示 A[→ ↙ ↘ ↙]

所有列向量的任意组合

$(Ax$, 任意 $x)$

列向量 生成空间 (span)

$C(A)$：r_1, r_2 过原点的平面

3维空间中的2维空间

$N(A)$：对于 x，所有 $Ax=0$ 中 x 生成的空间 span

$(x \in \mathbb{R}^4)$

∴ 子空间 维度 $dim(C(A))=2$

秩 $rank(A)=2$

三个基本概念 (教材里有)

subspace

[→ ↙] 列向量构成子空间的一种 基 (basis)

$dim[C(A)]$, $dim[N(A)]$

① "列空间" 2维 $\in \mathbb{R}^3$

② "零空间" 2维 $\in \mathbb{R}^4$

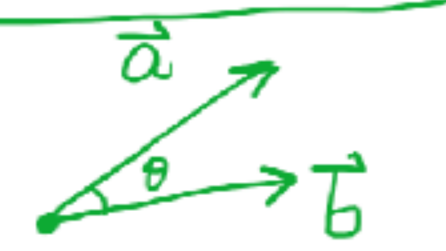
$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$[x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4]$

$Ax = 0$

$\Updownarrow$

$x \perp A_i,\ i \in \{1,2,3\}$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{\|a\| \cdot \|b\|}_{\text{长度}} \cdot \underbrace{\cos\langle a,b\rangle}_{\text{角度}}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ & $a, b \neq \vec{0} \Rightarrow \cos\langle a,b\rangle = 0$

$\angle\langle a,b\rangle = 90^\circ$

Column space & Null space

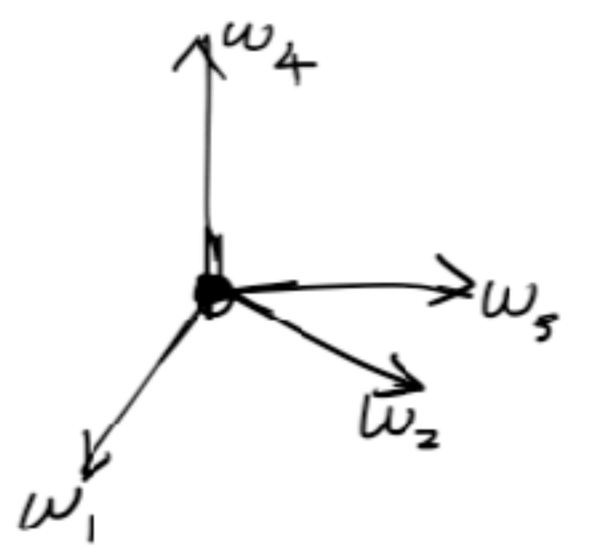
行空间 $C(A^T)$ 与 转置零空间 $N(A^T)$

类似问题：

T：转置 $A^T_{ij} = A_{ji}$

$$A^T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&4&0\\3&5&0\end{bmatrix} = B. \quad \text{solve} \quad By = A^Ty = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&4&0\\3&5&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}v_1 & v_2 & v_3\end{matrix}\end{array} \cdot \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{bmatrix}$$

列向量 $B^{(i)}$ 在4维空间中（4个数表示）$(B^{(i)} \in \mathbb{R}^4)$

易知：$\dim(C(B)) = 2 = \text{rank}(B)$

$\text{rank}(B) = 2$

$\dim(C(A^T))$ $\quad$ $\dim(N(A^T))$

③ B的列空间 =A的"行空间" 2维 $\in \mathbb{R}^4$

④ B的"零空间" ="A^T的……" 1维 $\in \mathbb{R}^3$

$C(B)$： v_1 v_2 过原点的平面(4维) $\Rightarrow (p v_1 + q v_2, \ \forall p, q \in \mathbb{R}^1$

$N(B)$： v_4 v_5 ‥ $By = 0$ 所有 y 生成的空间 span

四种空间的关系 （Four spaces）

$\dim[C(A)]$, $\dim[N(A)]$ $\dim(C(A^T))$ $\dim(N(A^T))$

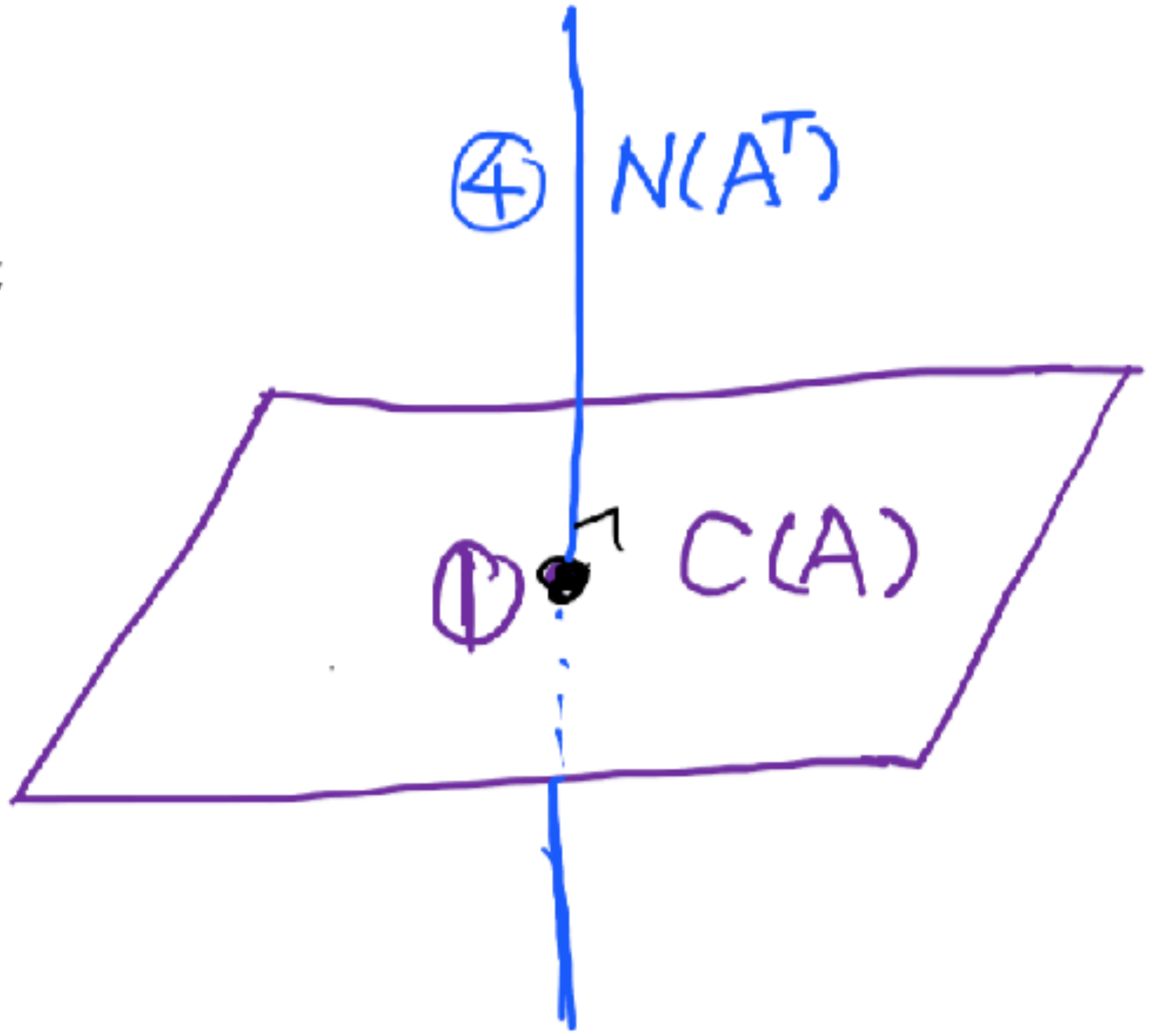
① "列空间" 2维 $\in R^3$

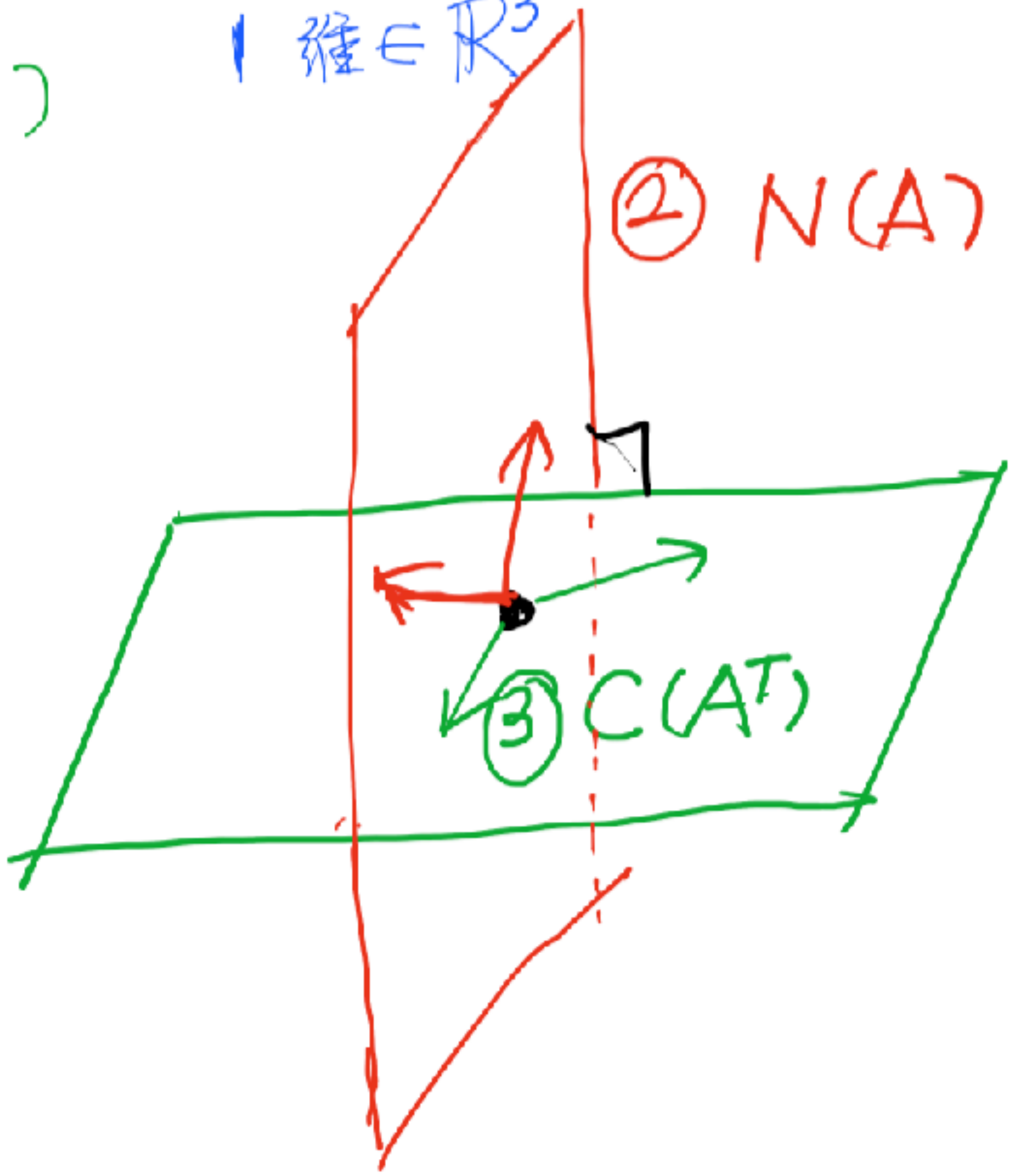
② "零空间" 2维 $\in R^4$

③ B的列空间 =A的"行空间" 2维 $\in R^4$ (行空间)

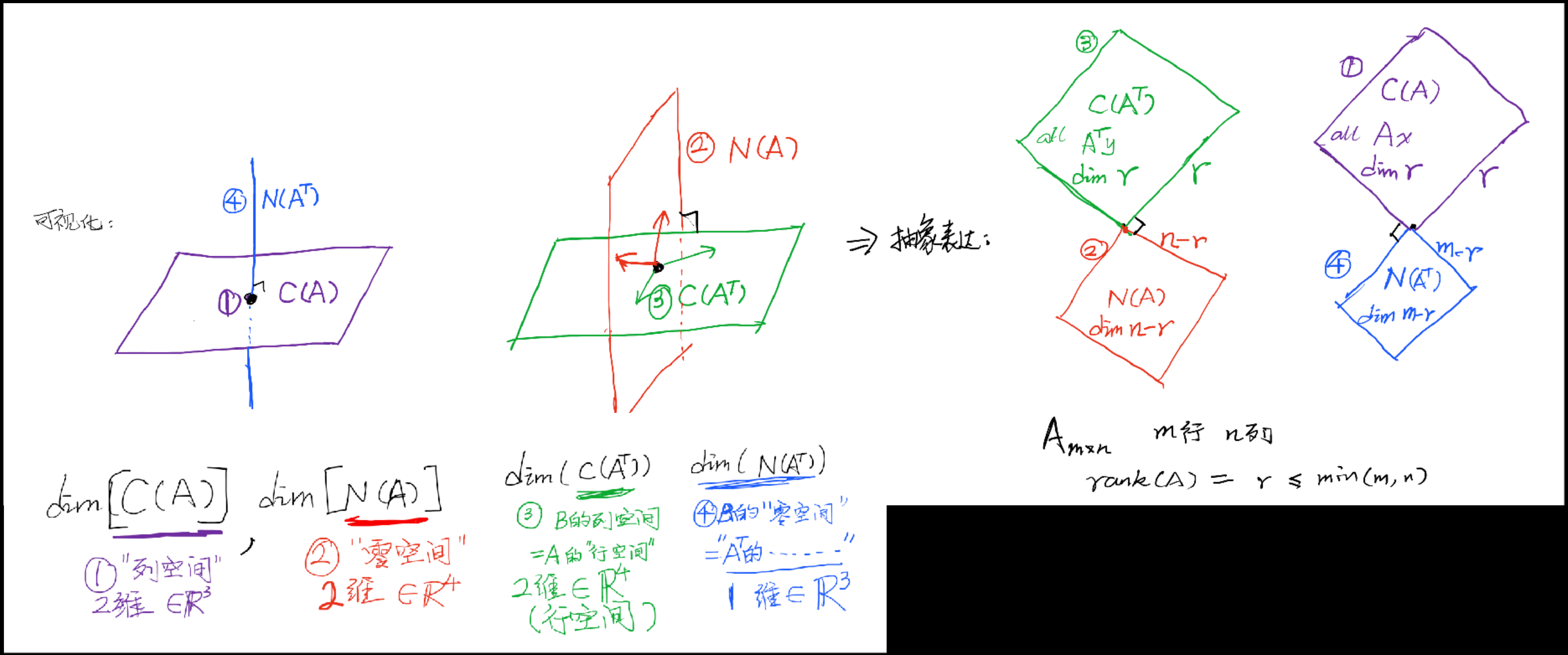
④ B的"零空间" ="A^T的……" 1维 $\in R^3$

可视化：





关系的抽象表达



可视化：
④ N(Aᵀ)
① C(A)
② N(A)
③ C(Aᵀ)
⇒ 抽象表达：
③ C(Aᵀ)
all Aᵀy
dim r
r
① C(A)
all Ax
dim r
r
② N(A)
dim n-r
n-r
④ N(Aᵀ)
dim m-r
m-r
A m×n m行 n列
rank(A) = r ≤ min(m, n)
dim[C(A)]
① "列空间"
2维 ∈ R³
dim[N(A)]
② "零空间"
2维 ∈ R⁴
dim(C(Aᵀ))
③ B的列空间
=A的"行空间"
2维 ∈ R⁴
(行空间)
dim(N(Aᵀ))
④ B的"零空间"
="Aᵀ的……"
1维 ∈ R³

总结：

- 线性代数是很强大的数学表达方法，在很多领域都很重要！很重要！很重要！
- 但是，很多教材/老师没有教好怎么去直观理解几何概念
- 我在这个视频里面只是抛砖引玉，更多内容可以沿着这个思路自己探索

资料：

- 在此只推荐Gilbert Strang的MIT课程（中文课程不是很了解）：
  - https://www.bilibili.com/video/BV1ix411f7Yp?from=search&seid=8915085383882670478&spm_id_from=333.337.0.0
  - 对应教材和这个课件我自己也会上传到GitHub