

工程结构物的抛物面方程回归计算

程效军^{1,2}, 顾孝烈¹

(1. 同济大学 测量与国土信息工程系, 上海 200092; 2. 现代工程测量国家测绘局重点实验室, 上海 200092)

摘要: 抛物面工程结构物的施工安装、建成后的精度鉴定和变形监测需要用高精度的电子全站仪测定抛物面上许多离散点的三维坐标. 据此, 通过抛物面口的平面方程回归、平面的法向量计算、坐标变换、圆心拟合、坐标轴平移、抛物面方程回归等一系列运算, 得到抛物面方程式和焦距, 以满足对抛物面工程结构物的施工安装、精度鉴定和变形监测的要求.

关键词: 抛物面结构; 施工安装; 变形监测; 坐标变换; 回归计算

中图分类号: P 258

文献标识码: A

Regressive Adjustment of Paraboloid-Equation for Engineering Construction

CHENG Xiaojun^{1,2}, GU Xiaolie¹

(1. Department of Surveying and Geo-Informatics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Modern Engineering Surveying of the State Bureau of Surveying and Mapping, Shanghai 200092, China)

Abstract: A lot of separate points on the paraboloid have to be measured by electronic total-station with high accuracy during the installation of engineering construction, the estimation of construction precision and the deformation observation after the construction. The plane equation regress of the paraboloid opening, the calculation of the plane normal vector, the coordinates transformation, the circle center fitting, the movement of coordinates axis and the regress of paraboloid equation are dealt with and the paraboloid equation and its focus are obtained to satisfy the requirements of the engineering construction, accuracy estimation and deformation observation.

Key words: paraboloid construction; installation; deformation observation; coordinates transformation; regressive adjustment

抛物面天线是一种定向微波天线, 具有结构简单和方向性强等优点. 抛物面天线由反射面和辐射器(发射或接收器)组成, 反射面的几何形状必须精确符合设计的抛物面方程, 辐射器的中心必须精确位于抛物面的焦点上, 即抛物面工程结构物需要有很高的施工安装精度, 测设的物抛物面上点位坐标的理论值应按设计的抛物面方程计算. 而建成后的精度鉴定和变形监测则需要根据实测数据从总体上验证与设计数据的符合程度. 对此必须用高精度电子全站仪测定抛物面上的离散点位, 应用坐标变换和回归计算的方法求得抛物面方程的参数和拟合的抛物面形体. 按照测量的一般原则, 需要有大量的多余观测值^[1]. 因此, 回归计算必须用最小二乘法求取计算成果的最或然值. 在此过程中, 也可评定观测对象的精度和进行变形分析.

位于三维空间的离散点位必须经过坐标变换, 才能测量其有关的数据和拟合其几何形体的标准数学模型. 因此, 求得坐标变换的参数是关键性的. 测定离散点进行抛物面方程的回归计算需要经过下列步骤: 抛物面口的平面方程回归、平面的法向量计算、坐标轴旋转、圆心拟合、坐标轴平移、标准状态下的抛物面方程回归、坐标轴平移和旋转(使抛物面形体与原始观测点拟合). 由于存在大量的多余观测, 在按最小二乘法的平差计算中需要计算改正值, 用于粗差检测和精度评定.

位于任意坐标系中的抛物面如图 1 所示, 其中抛物面口的点所构成的平面用虚线表示. 在抛物面上测定的点的三维坐标组成“观测点集”, 是回归计算的原始数据^[2].

收稿日期: 2008-05-26

基金项目: 国家“十一五”科技支撑计划资助项目(2006BAJ03A07)

作者简介: 程效军(1964—), 男, 教授, 工学博士, 博士生导师, 主要研究方向为数字近景摄影测量与精密工程测量.

E-mail: cxj@tongji.edu.cn

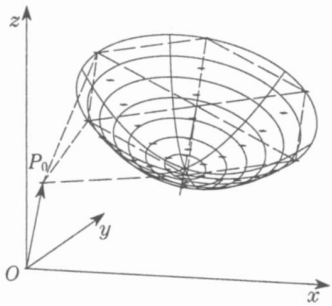


图 1 任意坐标系中的抛物面

Fig.1 Paraboloid in arbitrary coordinate system

1 抛物面口的平面方程回归计算

按照在抛物面口上测定的 m_1 个点拟合出的平面方程式为

$Ax + By + Cz + D = 0$ (1)

将式(1)同除以 D 可得

$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0$ (2)

令

$\frac{A}{D} = A_1, \frac{B}{D} = B_1, \frac{C}{D} = C_1$ (3)

则式(1)可改写为

$A_1x + B_1y + C_1z + 1 = 0$ (4)

对于在同一平面上的点进行多余观测(观测点数 $m_1 > 3$), 则每个测定点的坐标观测值 (x_i, y_i, z_i) 可列出其误差方程式如下:

$v_i = A_1x_i + B_1y_i + C_1z_i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, m_1$ (5)

设误差方程式系数与近似值及其改正值的关系为

$A_1 = A_1^0 + \delta_A$
 $B_1 = B_1^0 + \delta_B$
 $C_1 = C_1^0 + \delta_C$ (6)

则

$v_i = (A_1^0 + \delta_A)x_i + (B_1^0 + \delta_B)y_i + (C_1^0 + \delta_C)z_i + 1$ (7)

$v_i = x_i\delta_A + y_i\delta_B + z_i\delta_C + (A_1^0x_i + B_1^0y_i + C_1^0z_i + 1)$ (8)

式中: $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ 为误差方程式中未知参数, 式(8)右端括号内数值为常数项 l_i . 根据 m_1 个平面观测点的误差方程式组成法方程式, 可解得未知数 $\delta_A, \delta_B, \delta_C$. 由此求得平面方程式(4)的系数 A_1, B_1, C_1 .

计算每个观测点 P_i 到拟合平面的距离(观测点

相对于平面的起伏)如下:

$d_i = \frac{A_1x_i + B_1y_i + C_1z_i + 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m_1$ (9)

最后计算单位权中误差(代表抛物面口平面的平整度)如下:

$m_{01} = \pm \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{m_1 - 3}}$ (10)

式中: m_1 为抛物面口平面上观测的点数; 3 为误差方程式(8)中未知参数的个数.

2 平面的法向量计算

式(1)和式(4)为平面方程式的一般表达式. 为了求得平面法向量的参数, 需要将平面的一般表达式转换为平面的法式表达式如下

$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ (11)

式中: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为法向量与坐标轴的夹角余弦; p 为法向量的长度. 式(4)和式(11)既表达同一平面, 则两式对应的系数应成比例关系. 设 k 为比例系数, 令

$A_1k = \cos \alpha, B_1k = \cos \beta, C_1k = \cos \gamma$ (12)

则

$k = -p$ (13)

将式(12)各式平方相加, 并按向量的夹角余弦定理, 得到

$(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)k^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ (14)

令

$S = \pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$ (15)

则

$k = \frac{1}{S}, \quad p = -\frac{1}{S}$ (16)

如规定法向量长度恒为正, 则 S 应取负值. 以式(16)代入式(12), 得到

$\cos \alpha = \frac{A_1}{S}, \cos \beta = \frac{B_1}{S}, \cos \gamma = \frac{C_1}{S}$ (17)

设法向量的起点为坐标原点 $(0, 0, 0)$, 则端点 P_0 的坐标为 (x_p, y_p, z_p) , 则

$x_p = p \cos \alpha, y_p = p \cos \beta, z_p = p \cos \gamma$ (18)

由此可以求得法向量的方位角 α_{AZM} 和法向量的

天顶距 Z_{em} :

$$\alpha_{AZM} = \tan^{-1} \left(\frac{y_p}{x_p} \right) \quad (19)$$

$$Z_{eni} = \gamma = \cos^{-1} \left(\frac{C_i}{S} \right) \quad (20)$$

3 坐标变换

根据法向量的方位角和天顶距,将坐标轴平移和旋转,进行坐标变换.设抛物面三维坐标测定的坐标系为世界坐标系(WCS),平移和旋转后的坐标系为用户坐标系(UCS).

(1) WCS 变换为 UCS

设 WCS 点的坐标为 (x, y, z) , 同一点 UCS 的坐标为 (x', y', z') , UCS 坐标原点在 WCS 中的坐标为 x_0, y_0, z_0 , 则坐标变换公式为

$$\begin{aligned} x' &= ((x_i - x_0) \cos \alpha_{AZM} + (y_i - y_0) \sin \alpha_{AZM}) \cdot \\ &\quad \cos Z_{eni} + (z_0 - z_i) \sin Z_{eni} \\ y' &= (x_0 - x_i) \sin \alpha_{AZM} + (y_i - y_0) \cos \alpha_{AZM} \\ z' &= ((x_i - x_0) \cos \alpha_{AZM} + (y_i - y_0) \sin \alpha_{AZM}) \cdot \\ &\quad \sin Z_{eni} + (z_i - z_0) \cos Z_{eni} \end{aligned} \quad (21)$$

抛物面上点的 WCS 坐标通过式(21)变换为 UCS 坐标后,组成“标准状态点集”.在此点集中,抛物面口点的拟合平面已平行于 $X'O'Y'$ 平面,其法线已与坐标轴的 Z' 轴相平行.据此可以进行按圆周上的点拟合圆心的平差计算.

(2) UCS 变换为 WCS

UCS 变换为 WCS 的坐标变换公式为

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (z' \sin Z_{eni} + x' \cos Z_{eni}) \cdot \\ &\quad \cos \alpha_{AZM} - y' \sin \alpha_{AZM} \\ y &= y_0 + (z' \sin Z_{eni} + x' \cos Z_{eni}) \cdot \\ &\quad \sin \alpha_{AZM} + y' \cos \alpha_{AZM} \\ z &= z_0 + (z' \cos Z_{eni} - x' \sin Z_{eni}) \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)用于 UCS 中的圆心坐标变换为 WCS 坐标,据此可以将标准状态所作的抛物面图形拟合于 WCS 中的观测点位.

4 抛物面口的圆心拟合

在平面上,圆周上各点的坐标 (x_i, y_i) 与圆半径 R 和圆心坐标 (x_c, y_c) 的关系式如下:

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - R^2 = 0 \quad (23)$$

按圆周上任意三点的坐标可以算得圆半径的近似值 R_0 和圆心的近似值 (x_{c0}, y_{c0}) ^[3], 设平差的改正

值为 δ_x, δ_y , 则

$$x_c = x_{c0} + \delta_x, \quad y_c = y_{c0} + \delta_y \quad (24)$$

对于圆周上任意一点,圆半径的观测值为

$$R_i = \sqrt{(x_i - x_{c0})^2 + (y_i - y_{c0})^2} \quad (25)$$

即

$$R_i^2 = (x_i - x_{c0})^2 + (y_i - y_{c0})^2 \quad (26)$$

设圆半径的观测值和改正值与近似值的关系为

$$\begin{aligned} R_i + v_{Ri} &= R_0 + \delta_R \\ \delta_R &= v_{Ri} + R_i - R_0 \end{aligned} \quad (27)$$

则圆半径观测值的改正值为

$$v_{Ri} = R_0 - R_i + \delta_R \quad (28)$$

对式(26)中的圆心坐标和圆半径求偏微分,并以其改正值 δ_x, δ_y 和 δ_R 代替微分,得到:

$$-2(x_i - x_{c0}) \delta_x - 2(y_i - y_{c0}) \delta_y - 2R_i \delta_R = 0 \quad (29)$$

式(29)中的 δ_R 用式(27)中的 δ_R 代入,得到平差计算的误差方程式如下

$$v_{Ri} = - \frac{(x_i - x_{c0})}{R_i} \delta_x - \frac{(y_i - y_{c0})}{R_i} \delta_y + (R_0 - R_i) \quad (30)$$

按 m_1 个圆周点的坐标观测值组成误差方程式和法方程式,解得圆心坐标的改正值 δ_x, δ_y , 按式(24)得到平差后的抛物面口的圆心平面坐标 (x_c, y_c) . 再取抛物面口各点 Z 坐标的平均值,作为圆心的 Z 坐标 (z_c) . 圆心点 $P_{ec}(x_c, y_c, z_c)$ 是后述坐标变换中不可少的参数.

5 抛物面的回归计算

将“标准状态点集”中的圆心点 P_{ec} 作为坐标原点,进行坐标平移,得到“中心标准状态点集”,如图 2 所示.此时,抛物面的中心轴(焦轴)与坐标轴的 Z 轴重合,抛物面方程的数学式为式(31),是最简单的标准形式,此式便于将测定点位的离散数据进行抛物面方程的回归计算^[4].

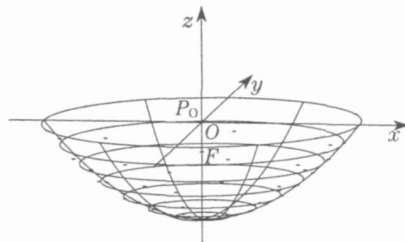


图 2 标准状态下的抛物面

Fig. 2 Paraboloid in standard state

$$z = a(x^2 + y^2) + b \tag{31}$$

式中: a, b 为待定参数. 设 f 为抛物面顶点(底点)至焦点 F 的距离(焦距), 则

$$f = \frac{1}{4a} \tag{32}$$

对于抛物面上每一个测定的点位 (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, \dots, m$), 理论有下式成立:

$$z_i = a(x_i^2 + y_i^2) + b \tag{33}$$

考虑观测值中的误差, 设 z_i 的改正值为 v_i , 则误差方程式为

$$\begin{aligned} z_i + v_i &= a(x_i^2 + y_i^2) + b \\ v_i &= a(x_i^2 + y_i^2) + b - z_i \end{aligned} \tag{34}$$

按 m 个抛物面上点位的坐标观测值组成式(34)误差方程式. 据此组成法方程式如下:

$$\begin{bmatrix} \sum (x_i^2 + y_i^2) & \sum (x_i^2 + y_i^2) \\ \sum (x_i^2 + y_i^2) & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum (x_i^2 + y_i^2) z_i \\ \sum z_i \end{bmatrix} \tag{35}$$

由于法方程式系数和常数项的特殊性, 按常规采用以 m 为单位的坐标值会使法方程式系数的值大小相差悬殊, 不利于方程式的解算. 解决的方法为坐标值采用十米、百米或千米为单位(视抛物面体积大小而定). 解法方程式(35), 得到抛物面方程的参数 a, b .

为了观测中的粗差检验和精度评定, 按式(34)计算观测值的改正值 v_i . 从形式上看, v_i 为每个观测点位的 Z 坐标改正值. 但是根据抛物面方程式(33)可知, 抛物面上任意一点的平面坐标值 (x, y) 必定对应一个高程值 (z) . Z 坐标的改正, 不一定是高程的误差, 而是说明该点坐标观测值 (x_i, y_i, z_i) 总体上与抛物面不完全吻合. 因此, 改正值 v_i 代表该点的点位误差. 由于抛物面的回归计算中, 存在大量多余观测, 因此从离群的改正值中可以按某种标准发现或剔除含粗差的点位^[5]. 观测值的精度评定可按照计算单位权中误差的公式:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i v_i}{m - 2}} \tag{36}$$

式中: m 为在抛物面上观测的总点数; 2 为误差方程式(34)中未知参数的个数.

6 计算实例

抛物面回归计算的成果除了数据以外, 还应该包括抛物面的图形绘制. 在 CAD 中用 LISP 语言编

制应用程序, 能理想地完成计算与绘图任务. 因为 LISP 语言具有完备的计算功能, 可以完成上述各种计算, 并能调用 CAD 绘图命令进行绘图. 但 AutuCAD 应用软件尚缺少直接绘制抛物面的命令, 因此需要采用以下绘图步骤: 从式(33)的抛物面方程来看, 当 $x=0$ 时, $z=ay^2+b$, 说明抛物面与 YOZ 平面的相交线为一条抛物线; 当 $y=0$ 时, $z=ax^2+b$, 说明抛物面与 XOZ 平面的相交线为具有相同参数的抛物线. 因此, 在 XOZ 平面或 YOZ 平面按抛物线方程绘制一定数量的等间距离散点, 用样条曲线连接这些点绘制成抛物线, 然后使其绕 Z 轴旋转而形成抛物面图形. 这个抛物面拟合于“中心标准状态点集”, 如图 2 所示. 按式(32)计算焦距 f , 并绘制焦点 F . 然后用复制命令(copy)复制抛物面及其中心轴和焦点, 再用坐标变换方法(平移和旋转), 将抛物面图形及其中心轴和焦点拟合于原始的“观测点集”, 如图 1 所示, 使观测对象在三维空间的实际位置可视化. 所有计算和绘图任务按本文所提供的数学公式和方法, 编制 LISP 程序在 CAD 中实现, 最后以文件形式提供回归计算的数据和图形成果.

用高精度的无协作目标电子全站仪 NET1200 对某抛物面天线进行测量, 采用独立坐标系观测了抛物面口上 11 个点和抛物面上 29 个点(共观测 40 点)的三维坐标. 先用抛物面口上 11 个点拟合出平面方程式; 根据平面的法向量姿态(方位角和天顶距)进行坐标变换, 使法向量与坐标轴的 Z 轴平行(抛物面口呈水平状态), 然后再根据这 11 个点在平面上拟合出抛物面口的圆心点坐标; 将坐标原点平移至该圆心点; 根据所观测的 40 个点, 在标准状态下按抛物面进行回归计算, 由此得到抛物面方程式:

$$Z = 0.200\ 728(X^2 + Y^2) - 1.018\ 41 \tag{37}$$

由此得到抛物面口圆半径 $R=2.253\ 0\ \text{m}$, 抛物面焦距 $f=1.245\ 5\ \text{m}$. 回归计算的精度为: 平面拟合的单位权中误差 $m_{01}=\pm 1.67\ \text{mm}$, 抛物面拟合的单位权中误差 $m_0=\pm 4.36\ \text{mm}$. 观测与计算结果与实际情况相符合.

本文采用测定离散点进行抛物面方程回归计算, 其理论和方法为通过抛物面口的平面方程回归、平面的法向量计算、坐标变换、圆心拟合、坐标轴平移、在标准状态下的抛物面方程回归等一系列数学运算, 得到符合客观实体的高精度的抛物面方程及其焦点的空间位置. 实践证明其能满足抛物面结构物的施工安装、精度检验和变形监测等的需要.

合平面合理性评价指标,可以有效地剔除那些被误提取出来的拟合平面.

实例表明,利用本文算法可以取得较好的点云数据拟合平面提取结果.

参考文献:

[1] Besl P J, Jain R C. Invariant surface characteristics for 3D object recognition in range images [J]. Computer Vision, Graphics Image Process, 1986, 33(1): 33.

[2] Besl P J, Jain R C. Segmentation through variable-order surface fitting[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1988, 10(2):167.

[3] Fitzgibbon A W, Eggert D, Fisher R B. High-Level CAD model acquisition from range image [J]. Computer-Aided Design, 1997, 29(4):321.

[4] Bose S K, Biswas K K, Gupta S K. An integrated approach for range image segmentation and representation [J]. Journal of Artificial Intelligence in Engineering, 1996, 10(3):243.

[5] 李松涛, 张长水, 荣钢, 等. 一种基于最小二乘估计的深度图像

曲面拟合方法[J].自动化学报,2002, 28(2): 1.

LI Songtao,ZHANG Changshui,RONG Gang,et al.3D range image description via least squares surface fitting [J]. Acta Automatica Sinica, 2002, 28(2): 1.

[6] Yokoya N, Martin D L. Range image segmentation based on differential geometry: a hybrid approach [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(6):643.

[7] Trucco E, Fisher R B. Experiments in curvature-based segmentation of range data[J].IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(2):177.

[8] Fischler M A, Bolles R C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography [J]. Graphics and Image Processing, 1981, 24(6):381.

[9] Jiang X,Bunkea H, Meier U. High-level feature based range image segmentation[J].Image and Vision Computing, 2000, 18(10):817.

[10] Jiang X, Bunke H. Fast segmentation of range images into planar regions by scan line grouping[J]. Machine Vision and Applications, 1994, 7(2):115.

(上接第 1249 页)

参考文献:

[1] 顾孝烈, 鲍峰, 程效军. 测量学[M]. 第 3 版. 上海: 同济大学出版社, 2006.

GU Xiaolie, BAO Feng, CHENG Xiaojun. Surveying [M]. 3rd ed. Shanghai: Tongji University Press, 2006.

[2] 潘正风, 杨正尧, 程效军, 等. 数字测图原理和方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.

PAN Zhengfeng, YANG Zhengyao, CHENG Xiaojun, et al. Theory and method for digital-mapping [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2004.

[3] 程效军, 张京男, 罗鼎. 无协作目标全站仪在钢梁变形监测中的应用[J]. 测绘通报, 2007(4): 17.

CHENG Xiaojun, ZHANG Jingnan, LUO Ding. The application of total-station without cooperative reflector for steel-beam deformation observation[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2007(4): 17.

[4] 杨文茂, 李全英. 空间解析几何[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2001.

YANG Wenmao, LI Quanying. Space Analytic Geometry [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2001.

[5] 江帆, 吕晓华, 王仲兰. 基于复化公式的 DEM 表面积算法分析[J]. 测绘学院学报, 2005, 22(4): 263.

JIANG Fan , LV Xiaohua , WANG Zhonglan. The analysis of DEM surface area based on composed calculus algorithms[J]. Journal of Zhengzhou Institute of Surveying and Mapping, 2005, 22(4): 263.