

离散点抛物面拟合的算法研究

陈继华^{1,2} 李广云²

1. 北京航空航天大学仪器与光电工程学院 北京 100083

2. 解放军信息工程大学测绘学院 郑州 450052

摘要 在面天线安装或检测中,常常依据测量系统给出的离散点三维坐标来拟合计算抛物面,以获取被检测天线的安装状态及型面情况。面天线的拟合计算一般采用最小二乘法进行自由拟合解算,但如果采用不同的最小量为拟合准则,得到的解算结果也不相同。因此寻求一种最优的拟合计算法则,对于离散抛物面解算及数值收敛性具有重要意义。对四种不同的最小量拟合计算面天线进行了试验解算,并进行了比较。给出了试算结果,推荐了一种较理想的最小量。

关键词 面天线 抛物面拟合 坐标系转换 最小二乘法

中图分类号 TB921 **文献标识码** A

1 引言

随着现代通讯业的迅速发展,大型抛物面天线被广泛应用于通讯中。有众多的科技文献关注于天线设计及其计算理论,但较少有人关注于抛物面天线的检测及离散解算方法的研究。于来法、付子敖^[3]等提出采用 T2000 电子经纬仪加 PC1500 掌上计算机组成测量系统获取大型抛物面天线上离散点的三维坐标,并给出了拟合计算方法,但该算法使用的最小量无实际意义。李宗春等^[4]针对面天线检测的离散点拟合计算,提出了曲面自由拟合法、公共点转换法、CAD 面型转换法等算法,指出 CAD 面型转换法无需天线曲面模型、无需公共点,且解算结果准确可靠,但该方法必须已知天线的 CAD 模型;当面天线上有公共点可用时,可以采用公共点转换法,但该法的计算精度与公共点自身的精度有关;当没有其他已知信息但知道面天线模型时,可以采用曲面自由拟合法,该法准确度高但容易使计算出的天线错位。李等在文中给出了按焦距差为最小量原则的解算方法,但该算法的计算稳定性较差,常常导致迭代计算不收敛。本文主要针对曲面自由拟合法,提出按四种拟合原则进行面型解算的方法。

2 基本概念

离散抛物面解算涉及到抛物面参数选择,以及坐标系转换等基本概念。

(1) 抛物面参数

在面天线安装或检测中,测量系统给出的离散点三维坐标一般是在测量坐标系(如图 1 所示)下,拟合计算一般也在该任意坐标系下进行。在一个任意坐标系下确定一个抛物面通常需

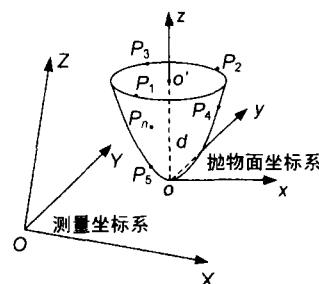


图 1 初始点位置分布

要 7 个参数,即抛物面位置参数(顶点坐标) X_0 、 Y_0 、 Z_0 ,三个旋转参数(抛物面姿态) R_x 、 R_y 、 R_z 以及焦距 F 。对于旋转抛物面,其中独立的参数只有 6 个,解算中一般固定 $R_z = 0$,因此实际具有 5 个独立参数。任一抛物面都可采用上述 5 个独立参数唯一确定。实际上,抛物面的位置参数和旋转参数形成了一个坐标系,称之为抛物面坐标系,如图 1 所示。在抛物面坐标系下,用标准方程来表示某一抛物面,如下式(1):

$$4 \cdot F \cdot z = x^2 + y^2 \quad (1)$$

(2) 拟合计算中的坐标转换

由于测量点的三维坐标是在测量坐标系下,因此列方程时必须进行坐标转换。现假设某一测量点 P 在测量坐标系下的三维坐标为 (X_P, Y_P, Z_P) ,在抛物面坐标系下的坐标为 (x_P, y_P, z_P) ,则

收稿日期:2004 年 10 月 9 日

它们之间的坐标转换关系如下式(2):

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_p - X_0 \\ Y_p - Y_0 \\ Z_p - Z_0 \end{pmatrix} \quad (2)^{[1]}$$

式中, a_1, a_2, \dots, c_3 为姿态旋转参数 R_x, R_y 的函数, 如果令 $dX_p = X_p - X_0, dY_p = Y_p - Y_0, dZ_p = Z_p - Z_0$, 则有:

$$\begin{cases} x_p = a_1 \cdot dX_p + b_1 \cdot dY_p + c_1 \cdot dZ_p \\ y_p = a_2 \cdot dX_p + b_2 \cdot dY_p + c_2 \cdot dZ_p \\ z_p = a_3 \cdot dX_p + b_3 \cdot dY_p + c_3 \cdot dZ_p \end{cases} \quad (3)$$

(3) 参数初值确定

采用最小二乘法进行离散点抛物面拟合需进行迭代计算, 因此在解算前必须确定参数的初值, 如果参数初值不准确, 常常会导致迭代计算失败。

对于被检测的抛物面天线, 其焦距的初值一般是已知的。另外 4 个参数初值一般采用抛物面上 3 个特定的测量点(称为初始点)来计算, 要求该 3 个初始点(设为 P_1, P_2, P_3)大约在抛物面的一个较大的圆形断面上, 如图 1 所示。依据这 3 个初始点可以求得抛物面轴线向量、旋转参数以及该圆形断面的圆心和半径, 进而计算出顶点坐标。如果抛物面天线顶点可以直接测量得到, 则也可以将测量值作为其初值。

3 四种不同的最小量拟合计算

3.1 以轴向偏差为最小量拟合

(1) 抛物面参数求解

如图 1, 抛物面坐标系 z 轴即为抛物面的旋转轴线, 轴向偏差为测量点沿旋转轴线方向到拟合抛物面的距离。如果按照所有点的轴向偏差平方和最小的原则拟合抛物面, 将式(1)的标准方程变化为 $z = \frac{x^2 + y^2}{4 \cdot F}$, 则依据轴向偏差列出误差方程为:

$$V = z_p - \frac{x_p^2 + y_p^2}{4 \cdot F} \quad (4)$$

线性化后为:

$$\begin{cases} V = e_1 \delta X_0 + e_2 \delta Y_0 + e_3 \delta Y_0 + \\ e_4 \delta R_x + e_5 \delta R_y + e_6 \delta F + l \\ l = z_p^0 - \frac{x_p^{02} + y_p^{02}}{4 \cdot F^0} \end{cases} \quad (5)$$

式中, e_1, \dots, e_9 为误差方程系数, 其中带上标 0 的

变量为依据初值计算出的概略值, 以后各式中变量符号意义与此相同。按照上述误差方程组成法方程迭代求解即可求出抛物面的全部参数, 该算法的最小量为轴向偏差。

(2) 法向偏差求解

当对抛物面天线进行安装或检测时, 常常关心各离散点的法向偏差, 即离散点沿抛物面法线方向到抛物面的距离。拟合计算出抛物面参数后, 可以依据抛物面的旋转和平移参数得到测量点在抛物面坐标系下的坐标 (x_p, y_p, z_p) , 若 (x, y, z) 为抛物面上一点, 则测量点到抛物面的距离 dD 为:

$$dD^2 = (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2 \quad (6)$$

将式(1)代入式(6)并整理后得:

$$dD^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 - 2x_px - 2y_py - \left(\frac{z_p}{2F} + 1 \right) \cdot (x^2 + y^2) + \frac{(x^2 + y^2)^2}{16F^2} \quad (7)$$

如果距离 dD 为法向偏差, 则其对 x, y 的偏导数应满足最短距离条件, 即 $\frac{\partial dD^2}{\partial x} = 0$ 和 $\frac{\partial dD^2}{\partial y} = 0$, 对该两个条件整理后得:

$$\begin{cases} x = \frac{x_p \cdot y}{y_p} \\ \left(\frac{x_p^2}{4F^2 y_p^2} + \frac{1}{4F^2} \right) \cdot y^3 + \left(2 - \frac{z_p}{F} \right) \cdot y - 2y_p = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中 x, y, z 的求解, 由于其初值可直接采用离散点在抛物面坐标系下的坐标, 因此可采用牛顿迭代法^[2]进行迭代求解。进而依据式(6)求出法向偏差。

3.2 以径向偏差为最小量拟合

径向偏差是指测量点到抛物面轴线的距离与该点处的旋转半径之差值。如果按照所有点的径向偏差平方和最小的原则拟合抛物面, 则误差方程为:

$$V = 2 \cdot \sqrt{F \cdot z_p} - \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad (9)$$

线性化后得到:

$$\begin{cases} V = e_1 \delta X_0 + e_2 \delta Y_0 + e_3 \delta Y_0 + e_4 \delta R_x + \\ e_5 \delta R_y + e_6 \delta F + l \\ l = 2 \cdot \sqrt{F^0 \cdot z_p^0} - \sqrt{x_p^{02} + y_p^{02}} \end{cases} \quad (10)$$

按式(10)组成法方程, 以径向偏差为最小量进行解算。

3.3 以法向偏差为最小量拟合

根据式(1)可令 $x = 2 \cdot \sqrt{F \cdot z} \cdot \cos \theta$, $y = 2 \cdot \sqrt{F \cdot z} \cdot \sin \theta$, 则法向偏差为:

$$dD = \sqrt{(x_p - 2\sqrt{Fz} \cdot \cos \theta)^2 + (y_p - 2\sqrt{Fz} \cdot \sin \theta)^2 + (z_p - z)^2} \quad (11)$$

如果按照法向偏差的平方和最小的原则拟合, 则误差方程为:

$$V = \sqrt{(x_p - 2\sqrt{Fz} \cdot \cos \theta)^2 + (y_p - 2\sqrt{Fz} \cdot \sin \theta)^2 + (z_p - z)^2} \quad (12)$$

按照上述误差方程, 每列一个误差方程将增加两个参数, 即 z 和 θ , 同时也会增加两个条件,

即最短距离条件 $\frac{\partial dD}{\partial z} = 0$ 和 $\frac{\partial dD}{\partial \theta} = 0$, 整理后为:

$$\left. \begin{aligned} x_p \cdot \sin \theta - y_p \cdot \cos \theta &= 0 \\ (x_p \cdot \cos \theta + y_p \cdot \sin \theta - 2\sqrt{Fz} \cdot F + \\ (z_p - z) \cdot \sqrt{Fz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

因此, 在解算时可以采用带约束条件的优化算法(如惩罚函数法)进行计算。将参数代入误差方程和条件方程并线性化后得到:

$$\left. \begin{aligned} V &= e_1 \delta X_0 + e_2 \delta Y_0 + e_3 \delta Y_0 + e_4 \delta R_x + \\ &e_5 \delta R_y + e_6 \delta F + e_7 \delta \theta + e_8 \delta z + l \\ f_1 \delta X_0 + f_2 \delta Y_0 + f_3 \delta Y_0 + f_4 \delta R_x + f_5 \delta R_y + \\ f_6 \delta F + f_7 \delta \theta + f_8 \delta z + w_1 &= 0 \\ g_1 \delta X_0 + g_2 \delta Y_0 + g_3 \delta Y_0 + g_4 \delta R_x + g_5 \delta R_y + \\ g_6 \delta F + g_7 \delta \theta + g_8 \delta z + w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中系数 $e_1, e_2 \dots e_8, f_1 \dots f_8, g_1 \dots g_8$, 分别为误差方程和条件方程对各参数的偏导数; l, w_1, w_2 为常数项。

3.4 以焦距差为最小量拟合

将式(1)变形为 $F = \frac{x^2 + y^2}{4z}$, 则可列出按焦距拟合的误差方程为:

$$V = F - \frac{x^2 + y^2}{4z}$$

线性化后得到:

$$\left. \begin{aligned} V &= e_1 \cdot \delta X_0 + e_2 \cdot \delta Y_0 + e_3 \cdot \delta Y_0 + e_4 \cdot \delta R_x + \\ &e_5 \cdot \delta R_y + e_6 \cdot \delta F + l \\ l &= F^0 - \frac{x_p^2 + y_p^2}{4 \cdot z_p^0} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

按式(15)组成法方程, 以焦距差为最小量解

算抛物面天线参数。

4 算法比较及实验结果

分别采用上述四种算法, 对一个焦距为 2 m 的抛物面测量数据进行自由拟合计算, 计算结果如表 1 所示。表中算法 1 为以轴向偏差为最小量拟合; 算法 2 为以径向偏差为最小量拟合; 算法 3 为以法向偏差为最小量拟合; 算法 4 为以焦距差为最小量拟合; Max 为最大法向偏差(测量点在拟合抛物面外部, 偏差为正值); Min 为最小法向偏差(测量点在抛物面内部, 偏差为负值); RMS 为所有参与拟合的测量点法向偏差之均方根。

表 1 解算结果

参数		解算中不固定焦距计算结果			
		算法 1	算法 2	算法 3	算法 4
顶点坐标(mm)	X	4522.06	4522.08	4522.10	4522.07
	Y	3764.05	3763.93	3763.94	3763.89
	Z	3485.16	3485.26	3485.30	3485.31
旋转参数(°)	Rx	24.58654	24.58559	24.58549	24.58515
	Ry	7.82212	7.82212	7.82196	7.82220
焦距(F)		2000.03	2000.04	2000.06	2000.05
焦点坐标(mm)	X	4237.56	4237.58	4237.60	4237.57
	Y	4911.23	4911.14	4911.16	4911.11
	Z	5098.59	65098.68	5098.74	5098.73
法向偏差(mm)	Max	0.18	0.19	0.18	0.20
	Min	-0.12	-0.12	-0.13	-0.12
	RMS	0.09	0.09	0.09	0.09

从表 1 中计算结果可以看出, 采用不同的最小量进行拟合计算, 所得到的抛物面参数存在较大差异, 因此采用不同的最小法则拟合计算出的抛物面的位置、姿态及形状会有一定差异。从拟合计算出的法向偏差看出, 不同最小量所计算出的法向偏差均方根基本相同, 说明用不同法则拟合计算抛物面, 对其面型状况的评价是一致的。

但从拟合计算实践表明, 算法 2、3、4 对拟合计算初值要求非常严格, 式(9)和式(11)中均含有 \sqrt{Fz} , 如果初值给定不准确时, 当对那些靠近抛物面顶点的测量点坐标列误差方程时, 极易出现 $Fz < 0$ 的情况, 从而导致迭代计算失败。采用算法 3 拟合计算时, 由于对每一个测量点列误差方程, 都会产生两个条件, 增加了计算量, 尤其对于测量点比较多的情况计算速度很慢, 但采用该算法拟合计算出抛物面参数后, 可以直接利用每个点增加的参数 z 和 θ 计算法向偏差。采用算法 4

(下转第 43 页)

③调制方式为 BPSK;

④收、发端采用 $\alpha = 0.5$ 的根(平方根)号 Nyquist 滤波器;

⑤扩频体制(数据频率为 1K;扩频码长为 11;过采样率为 8);

⑥所有结果都由 10^4 个样本点的 Monte - Carlo 法统计出来。

环路参数分别为①、②对应的仿真图如图 3 所示。

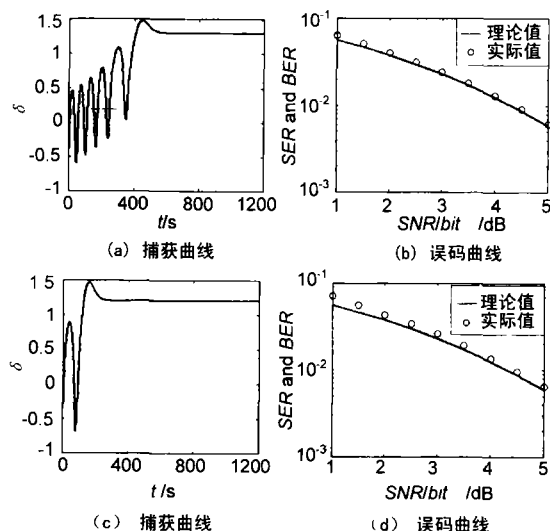


图 3 捕获曲线对比和误码率

其中图 3(a)和(b)中得参数为 $G_1 = 1/16$ 、 $G_2 = 1/2048$ 、 $K' = 1$;图 3(c)和(d)中参数为 $G_1 =$

$1/32$ 、 $G_2 = 1/2048$ 、 $K' = 1$ 。研究和仿真表明:捕获带宽越小捕获时间越长,抗噪声性能越好;增加增益可减少捕获时间;增大 G_2 或减少 τ_1 可减少捕获时间,增大 G_1 或改变 τ_2/τ_1 可减少捕获时间,但滤波性能会下降。在实际系统中,可根据计算初步确定参数,然后再根据仿真和参数之间的关系进行优化,最后得到满足实际要求的环路参数。

4 结束语

本文讨论了 COSTAS 的工作原理和具体的数字 COSTAS 环路设计,并根据其参数给出了仿真结果。仿真结果说明,该设计比较好地解决了扩频系统中同步的精确问题,其性能能够满足同步系统的要求。

参考文献

- [1] 张厥盛,郑继禹,万心平.锁相技术.西安:西安电子科技大学出版社,1996.
- [2] 王家培,李情与,胡效敏.锁相技术.长沙:国防科技大学出版社,1984.
- [3] 曾涛,龙腾,毛二可.一种新的中频采样滤波器的设计与实现.电子学报,2000,28(6):51~54.
- [4] 张永慧,高西全,卢朝阳.中频数字化处理的关键技术.计算机工程,2003,29(13):1~3.
- [5] 程伟,左继章,许悦雷,赖远东.扩频通信系统的中频数字化处理技术.电讯技术,2003,43(2):34~37.

作者简介

李小蓓 女,在读硕士生,专业:通信与信息系统。研究方向:卫星与移动通信。

(上接第 34 页)

拟合计算时,由于 z 坐标误差对常数项和误差方程系数影响很大,尤其是当测量点位于大焦距抛物面顶点附近时影响最大,在拟合计算中常常出现迭代收敛速度慢或迭代不收敛的情况。相比之下,算法 1 对参数初值要求不严格,且计算速度快,建议在进行抛物面计算时采用该方法。

5 结束语

本文对离散抛物面拟合的最优最小量选择进行了研究,在实验数据及模拟解算的基础上进行分析及比较,推荐了一种较理想的最小量。根据实际解算表明,所推荐的解算方法具有计算速度

快、数值收敛性好等优点。

参考文献

- [1] 李广云,徐忠阳,倪涵.工业测量系统.北京:解放军出版社,1994.
- [2] 颜庆津.数值分析.北京:北京航空航天大学出版社,1999.
- [3] 于来法,付子微.大型抛物面天线精确校准测量自动化和精度.北京:测绘学报,1992,21(4):284~290.
- [4] 李宗春,李广云,金超.面天线检测数据处理方法的探讨.北京:宇航计测技术,2003,23(2):12~19.

作者简介

陈继华 男,(1972~),硕士,大地测量与测量工程。主要从事大型工业产品尺寸检测方法及相关计算理论、视觉测量技术研究。

李广云 男,(1965~),教授,大地测量与测量工程。主要从事大型工业产品尺寸检测方法及相关理论、视觉测量技术、工程信息系统、测绘及计量仪器等研究和工程化工作。