

基于非稳态导热方程的炉温曲线模型

摘 要

本文主要研究了回焊工艺流程中炉温变化的定量模型与组合优化方法,并通过差分方法及追赶法,实现模型求解,并给出制程限制下最优参数组合。

在整体工艺流程的炉温变化模型建立中,本文基于 $Fourier$ 定律,得出了焊接区域中心在给定温度下的柱面非稳态热传导方程,并经过分析,将整个工艺流程中的各个区域按温度分布规律分为大温区与大温区间隙两类,通过假定间隙温度变化为线性,得出了两种区域内初始输入参数与输出炉温变化的定量模型;在此基础上,我们通过隐式向后差分与初始值迭代和对两种模型的叠加,得出了整个工艺流程的炉温曲线,并参照实验数据进行多次参数调整迭代,最终获得近似最优的模型系数,且通过模型得出的在实验设定条件下的炉温变化数据与此时,整个工艺流程的小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度分别为 **$130.8\text{ }^{\circ}\text{C}$ $169.2\text{ }^{\circ}\text{C}$ $191.1\text{ }^{\circ}\text{C}$ $225.3\text{ }^{\circ}\text{C}$** 。

在炉温曲线的组合优化模型建立中,我们首先研究了传输速率对制程界限中所要求的量的影响,并通过迭代法求解出制程约束下最大传输速率为 **77.4 cm/min** ,最小传输速率为 **69.6 cm/min** ;之后,我们考虑在制程限制下各大温区设定温度以及设定传输速率的组合对峰温面积的影响,得出最优炉温曲线下的峰温面积为 **$S_{min} = 952.8$** 以及对应的最优设定温度为第一到五个小温区温度 **$T_{1-5} = 174\text{ }^{\circ}\text{C}$** ,第六、七个小温区温度 **$T_6 = 185\text{ }^{\circ}\text{C}$ $T_7 = 225\text{ }^{\circ}\text{C}$** ,第八到九个小温区温度为 **$T_{8-9} = 265\text{ }^{\circ}\text{C}$** ;最优传输速率 **$v = 84\text{ cm/min}$** 。

在此基础上,我们引入对炉温曲线相应位置的对称性的优化,通过迭代搜索,得出最优组合为 **$T_{1-5} = 175^{\circ}\text{C}$, $T_{8-9} = 265^{\circ}\text{C}$, $T_6 = 185^{\circ}\text{C}$, $T_7 = 225^{\circ}\text{C}$, $v = 84\text{ cm/min}$** ,且此时曲线对应的对称度较高。

关键词 热传导方程 差分法 多约束组合优化 追赶法

一 问题重述

在生产集成电路板等电子产品时,需要使用回焊炉将电子元件自动焊接到电路板上。此过程中,需要使回焊炉各个部分保持设定的温度。而通过实验测定的方法研究较为复杂,所以需要建立一种较为合适的数学模型对回焊炉内部相应参数的关系进行约束。

问题 1 给定各大温区温度,求解焊接区域中心的温度变化情况,并列出小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度,画出相应的炉温曲线,并将每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度存放在提供的 result.csv 中。

问题 2 给定优化目标与设定温度,确定允许的最大传送带过炉速度。

问题 3 要求理想的炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小。请确定在此要求下的最优炉温曲线,以及各温区的设定温度和传送带的过炉速度,并给出相应的面积。

问题 4 在焊接过程中,除满足制程界限外,还希望以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称。此时,在问题三给出的约束下,进一步给出最优炉温曲线,以及各温区设定的温度及传送带过炉速度,并给出相应的指标值。

二 模型基本假设及其依据

1. 不考虑炉中的空气对流,因为这仅仅会影响热传导的系数,而不影响微分方程的结构,且在求数值解的时候,其影响会包含到空气导热系数中。

2. 假设空气导热系数为某一定值,忽略其随温度的变化,且在数值求解中,因为温度变化的跨度对其的影响不是很大(约 $0.015 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}$),故在实际求解中我们以一合适的恒定值给出。

3. 在间隙中,温度随路径分布为一线性函数。事实上,这是基于假设 1 的。

4. 假设在仅仅考虑电子板移动过程的情况下,电子板可以看作一质点,因为仪器仅仅测出某位置焊接中心温度,而这温度在各个位置上实际属于对外界温度的同规律延迟响应,

5. 假设仪器灵敏,即可通过附件数据提取某些系数,且可以通过其验证模型的可靠性。

6. 自然地,我们假设炉前区域最左端为计时零点,而炉前区域被看成一个长为 25 cm 的温区间隙。

(*) 注: 其余程序性,简化性的细节假设将在相应部分给出。

三 符号说明

符号	说明
v	回焊炉传输速度
K_c	焊接区域中心温度
$A(T_i)$	由材料表面温度所确定的材料内部热传导方程系数
r	圆柱体焊接材料的半径
T_a	区域空气温度
$K(T_a)$	由区域温度所确定的热传导系数
$\delta(T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}, T_{a4}, v)$	各可控大温区温度与传输速度构成的组合状态
$S(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$	各个状态组成的解空间

(*) 注：其他符号在出现时说明。

四 名词解释

1. 炉温：即测定位置上焊接区域中心的温度。
2. 元区域：温度在从左到右的水平方向上的分布符合相同结构的函数的区域，如某个大温区即为一个元区域。
3. 始点：即计时零点，对应炉前区域最左端的位置。
4. 峰温面积：炉温曲线中超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积。
5. 峰温曲线：炉温曲线中以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的部分。
6. 圆柱锡：即被视作焊接材料的，几何形状设定为圆柱的锡。

五 问题分析

5.1 炉温变化的定量方法分析

要研究定量模型，首先要先确定焊点部分的中心温度与外界温度的关联，然后找出其与位置的变化关系，因为是恒速的过程，所以最终可以转换成该模型下的炉温曲线的表达式。

题目中, 电路板将经过两类区域——恒温区域与线性变温区, 而且在同一大温区中, 恒温区域温度均相同, 故只有大温区之间的间隙区为真正的线性变温区, 且各种相同温度分布的区域内, 炉温的变化模型仅与电路板进入该区域的初始值以及该区域固有的温度分布有关, 所以我们可以将大温区的炉温变化和其间隔的区域的炉温变化分开建模, 并在求解时依照题图中从左到右的先后顺序分别确定各个元区域的初始值, 代入距离和时间的关系, 得出整个工艺流程的炉温模型。

5.2 各温区的一般炉温模型建立方法分析

工艺流程中的温区可以被分为两类元区域: 恒温元区域与变温元区域。故若要求各个温区的炉温变化模型, 即只需求两类元区域在初值下的区域内炉温响应模型即可。那么我们就只需确定各初值的实际物理指意, 各响应的实际物理指意以及它们之间的转化方程即可。在这之后, 我们可以根据距离始点的距离, 不断迭代模型与初始值, 得出整个工艺流程中的炉温变化总模型。

5.3 总过程的组合优化模型建立方法分析

对总模型而言, 其任一点的响应与初始时刻设定的各个恒温元区域温度以及传输速率有关, 我们称这些可以设定的量为初始输入状态。题目中所给的制程限制则可以看作是对模型的约束, 这些约束均着眼于炉温曲线的性质, 而由前面的分析, 炉温曲线的性质与初始输入状态之间存在关联, 且关联即是前面讨论的全过程炉温模型, 所以通过模型可以把对炉温曲线性质的约束转化为对初始输入状态的约束。同样的, 体现在炉温曲线上的优化目标也同样可以转化为初始各参量组合方式的优化, 由此, 我们可以通过建立总过程的组合优化模型, 利用全过程炉温模型将初始输入状态转化为定量的待优化目标的函数, 通过制程界限筛选获得解空间, 并使用解空间数据迭代搜索, 最终得出最优初始输入状态以及相应目标的最优值。

六 全工艺流程下炉温模型的建立与求解

(*)引入 本部分将按从简到繁, 从规律到实际的逻辑将论述分为: 均匀介质的热传导模型建立, 两类温度分布区域中热传导模型建立, 模型的向后差分法求解与结果评估以及基于实际数据的模型系数确定四个部分。

6.1 均匀介质的热传导模型建立

在电路板回焊过程中, 元件的管脚采用锡回流来固定, 且固态下锡的形状近似于圆柱体^[3], 故我们可以将实际的焊接材料简化为厚度为 0.15 mm, 半径为 r 的圆柱体锡, 如图 1 所示:

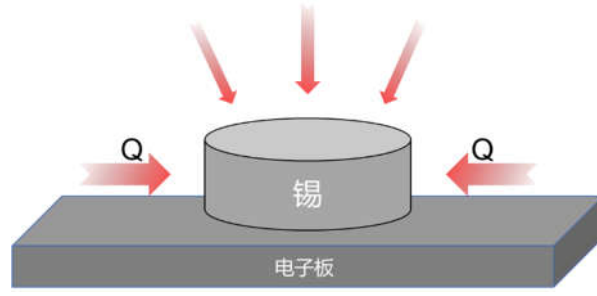


图 1

这时，经分析可得，锡的受热可分解为来自四周，纵向的热，其中纵向的热有来自空气——电子板的双层介质导热，也有来自空气的直接导热，而我们为了模型的简化考虑，只考虑来自四周的传热，此时，因为圆柱体四周可均匀受热，所以根据 $Fourier$ 定律，我们得出柱面系下的锡内部的热传导微分方程^[1]：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} A(T_i) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad (1)$$

以及锡表面的热传导方程：

$$\frac{\partial T_{\square}}{\partial T} = K(T_k)(T_k - T_i) \quad (2)$$

上式中，未考虑的传热我们可将其记作 β ，视作环境所造成的模型噪声，其影响可在积累到一定程度后等效为一个特殊小温区的传热，而这一点会在下文讨论。 $A(T_{\square})$ ， $K(T_{\square})$ 为模型系数，其中，

$$A(T_{\square}) = \frac{\lambda(T_i)}{\rho C(T_i)}$$

而 K 则由实验测定。实际求解中，因为这些量在设定温度的尺度下变化极为微小，所以我们将它们视为待定的模型系数，并根据实验数据不断拟合求解一系列确定的系数，则此时这些系数反映了它们的变化对实验结果的平均影响，考虑到温区温度不同的影响，我们使用分段拟合求解，得到分段的模型最优系数。

6.2 两类温度分布区域中热传导模型建立

题目中，将回焊炉分成了四个大温区，然而，根据我们的假设，因为炉前区域和间隙均不做特殊的温度控制，所以等效时可以将其等效为间隙，且此段对应炉温曲线可以按照实验数据拟合，并不会对曲线整体造成太大影响，于是我们按照其中的温度分布，将回焊炉分为两个梯队的元区域，第一队元区域为恒温区域，以始点作为水平方向的原点，把同一大温区内的相邻小温区间隙与之包含在一起，根据题目要求，我们给出它们的命名与属性值如下表：

表 1

符号	温区	温度设定范围	起始坐标位置
D_0	车间温区	25 °C	/
D_{\square}	预热区	175 ± 10 °C	$x_1 = 25 \text{ cm}$
D_{\square}	恒温区 1	195 ± 10 °C	$x_2 = 202.5 \text{ cm}$
D_{\square}	恒温区 2	235 ± 10 °C	$x_3 = 238 \text{ cm}$
D_{\square}	回流区	255 ± 10 °C	$x_4 = 273.5 \text{ cm}$
D_{\square}	冷却区+炉后区	25 °C	$x_5 = 344.5 \text{ cm}$

其中，第 i 个恒温元区域 D_{\square} 的相应参数值设定为 $T_{\square i}$ ， x_i 分别代表其中空气的

温度与元区域的起始坐标位置。

第二队元区域可假设为线性变温区域，那么此时我们只需给出其相邻温区温度即可确定其中温度的分布，所以此时给出起始坐标位置即可。故我们给出下表：

表 2

符号	区域	起始坐标位置
L	炉前区域	$l_0 = 0 \text{ cm}$
L	D_1D_2 之间的间隙	$l_1 = 197.5 \text{ cm}$
L	D_2D_3 之间的间隙	$l_2 = 233 \text{ cm}$
L	D_3D_4 之间的间隙	$l_3 = 268.5 \text{ cm}$
L	D_4D_5 之间的间隙	$l_4 = 339.5 \text{ cm}$

其中，线性变温元区域 L_{i+1} 的起始坐标位置为 $l = x_{i+1} - 5 \text{ cm}$ ，其中某点空气温度与该点距起始坐标距离 d 的关系为：

$$T(d) = \frac{(T_{a i+1} - T_{a i})}{x_{i+1} - l_i} d + T_{a i} \quad (3)$$

因为我们仅考虑焊接所用圆柱体锡的中心温度，且我们已经给出中心温度与空气温度的关系式，故此时若我们给出进入某个元区域时的锡表面温度 K_{s0} 与距中心距离 r ，温度 K_{c0} 连同元区域的参量作为对模型的输入，我们就可以将圆柱锡视作质点，并同时给出同类型元区域中任一点的炉温响应通用模型。

首先，我们考虑恒温元区域 D ，焊材初始状态 $t = \{K_{c0}, K_{s0}\}$ ，则此时可给出距元区域初始点距离为 d 的质点温度模型如下：

$$\frac{\partial K(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} A(T_i) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \partial K_c(r, t)}{\partial r} \right) \right] \quad (4)$$

$$K(d) = K(T_k)(K_s(d) - T_i) \quad (5)$$

因为速率恒定。所以可以将距离用时间表示，这时就得到了元区域内的炉温模型，并可以相应的绘制出在设定元区域参量以及焊材初始状态下的炉温曲线模型。

同样的，我们给定温度线性变化的元区域 L_{i+1} ，以及焊材初始状态 t ，即可得出此类元区域中距其初始点为 d 的质点温度模型如下：

$$\frac{\partial K(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} A(T_i) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \partial K_c(r, t)}{\partial r} \right) \right] \quad (6)$$

$$K(d) = K(T_k)(K_s(d) - T_i(d)) \quad (7)$$

由题意及我们的假设可知，我们选定的两类元区域是间次线性排列的，如下图所示：



图 2

故在实际求解中,由于各个线性元区域的温度分布由其相邻的恒温区域的温度唯一决定,且任意一个元区域的焊材初始状态仅由前一个元区域中焊材的末状态决定,我们只需给出最开始进入第一个间隙时的初始温度以及各个恒温元区域的设定温度,即可根据公式(4)~(7)按顺序迭代使用相应模型给出回焊炉中各个区域内的炉温与质点坐标的关系曲线,将这些曲线顺次拼接,即可得出整个工艺流程中炉温随质点位置的变化曲线,此时做坐标变换 $x = vt$,即可得到炉温与加工时间的对应关系,也即是题中所述的炉温曲线。

6.3 模型的向后差分法求解与结果评估

因为整体炉温模型中所给出的方程求出解析解的难度较大,所以在实际求解中,我们考虑使用 MATLAB2018 对模型进行有限差分近似。考虑到一类扩散方程的向后差分格式具有稳定性和收敛性^[2],本文采用向后差分格式进行求解。

6.3.1 向后差分法求解原理

我们考虑这样的求解区域 $\rho = \{0 \leq x \leq r, 0 \leq t \leq \frac{435.5\text{cm}}{v}\}$ (435.5 cm 为整个工艺中电子板经历的空间距离)。

在此区域中,我们首先将 r 进行 M 等分,这样得到:

$$\Delta r = \frac{r}{M}$$

这里我们将步长设定为 30 μm 。

类似的,我们对 t 进行 N 等分,得到:

$$\Delta t = \frac{t}{N}$$

我们称 Δt 为时间步长,在求解中我们考虑到模型的精准性会受到差分近似的影响,所以选择比实验数据更为精细的步长 0.01s。这样我们可以用多条水平相距 Δr 的相邻平行直线以及多条垂直相距 Δt 的平行直线将 ρ 分解为矩形网格。

我们选取 ρ 中的一部分网格来论述差分方法:

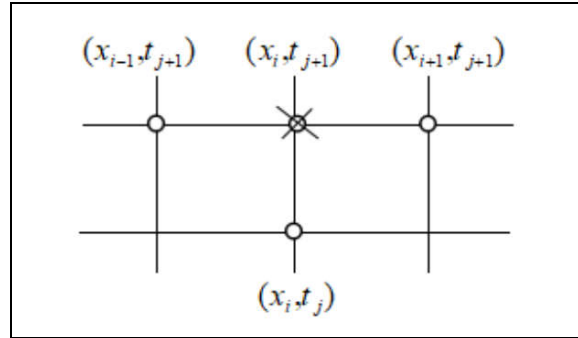


图 3

如图 3 所示,我们选取 $j + 1$ 时间层的三个相邻节点来对 $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ 进行近似,选取

$j + 1$ 层与 j 层相邻的两个节点来对 $\frac{\partial T}{\partial r}$ 进行近似,这样,我们就将方程(1)(2)

进行离散化处理得到:

$$\frac{1}{\Delta t} [T(r_{i+1}, t_{j+1}) - T(r_i, t_j)] = \frac{a_1}{r} \left[\frac{T(r_{i+1}, t_{j+1}) - T(r_{i+1}, t_j)}{\Delta r} + r \frac{T(r_{i+1}, t_{j+1}) - 2T(r_i, t_{j+1}) + T(r_{i-1}, t_{j+1}))}{(\Delta r)^2} \right] \quad (8)$$

$$\frac{1}{\Delta t} [T_{(r_{end}, t_{j+1})} - T_{(r_{end}, t_j)}] = K(T_a) [T_{(r_{end}, r_{j+1})} - T_a(d)] \quad (9)$$

上式中， $T_{\square}(d)$ 即为元区域内的温度随距离的分布。

建立隐式后向差分方程，并经过整理，将其写成相应代数方程。

式（8）可写成：

$$T_j^i = -\left(\frac{a_1}{r} + a_2\right) T_{j+1}^{i+1} + \left(\frac{a_1}{r} + 2a_2 + 1\right) T_{j+1}^i - a_2 T_{j+1}^{i-1} \quad (10)$$

式（9）可写成：

$$T_j^{end} = (1 - K(T_a)\Delta t) T_{j+1}^{end} + K(T_a)\Delta t T_a(d) \quad (11)$$

我们可将时刻为 $j\Delta t$ 时向后差分的状态转化方程组写为矩阵形式：

$$Ax = b \quad (12)$$

其中，

$$A = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{r} + 2a_2 + 1 & -\left(\frac{a_1}{r} + a_2\right) & & & \\ -a_2 & \frac{a_1}{r} + 2a_2 + 1 & -\left(\frac{a_1}{r} + a_2\right) & & \\ & -a_2 & \frac{a_1}{r} + 2a_2 + 1 & -\left(\frac{a_1}{r} + a_2\right) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -a_2 & \frac{a_1}{r} + 2a_2 + 1 & -\left(\frac{a_1}{r} + a_2\right) \\ & & & & 0 & 1 - K(T_a)\Delta t \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$x = [T_{j+1}^1 \quad T_{j+1}^2 \quad \dots \quad T_{j+1}^{end-1} \quad T_{j+1}^{end}]^T \quad (14)$$

$$b = [T_{\square}^1 + a_2 T_{j+1}^1 + 1 \quad T_j^2 \quad \dots \quad T_j^{end-1} \quad K(T_a)\Delta t + T_j^{end}]^T \quad (15)$$

由于该方程中的系数矩阵为特殊的稀疏矩阵——三对角矩阵，若直接求其逆，将会大大影响求解效率，故我们选择使用追赶法求解，这样可以撇开对每行中多余的零元素的计算，使得效率大大提升。我们首先给出算法的流程图如下：

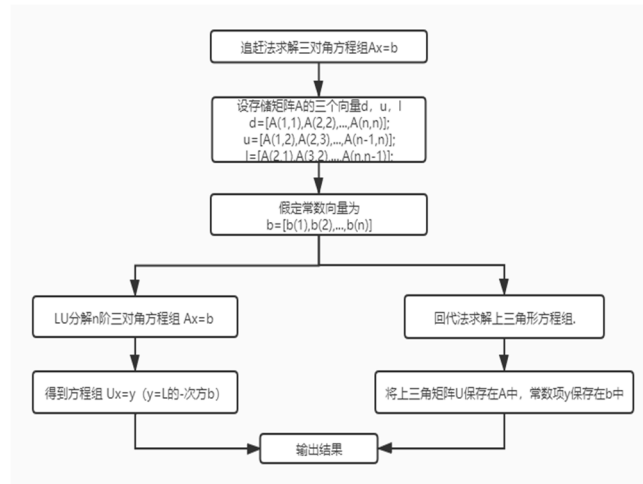


图 4

如图四，我们首先设此矩阵 A 为非奇异的，则它可以被分解为一个下三角矩

阵 L 和一个上三角矩阵 U 的积:

$$A = LU$$

则我们的求解方程可被表示为:

$$\begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$$

则此时我们可以利用上三角矩阵和下三角矩阵的优秀性质,依次解出 y 与 x 。这样做的意义在于,在相同大温区中,只需将同一系数矩阵分解一次即可求解整个过程中的状态转换,从而提升了求解效率(代码见附录五)。

6.3.2 基于实验数据的模型参数拟合研究

在模型建立中,我们在模型中引入了空气导热系数与内部导热系数,我们将整体模型中各个元区域对应的模型称为分段模型,则要根据模型描绘给定温度下的炉温曲线,则必须先确定分段模型中的导热系数。题目中已经给出在设定的温度下的炉温曲线数据,则我们只需要设置系数取值区间,并根据拟合所得曲线炉温数据与实验所得数据的方差即可体现拟合程度,我们每段设定拟合次数为 21 次,拟合总次数为 147 次。

我们设定让方差更小的数据被保存,通过多次拟合迭代,分别求解每个分段模型的参数值,得到多个拟合曲线。

以第二个元区域为例,来说明我们的拟合方法。

首先,我们给出拟合第二元区域导热系数时的炉温曲线总图以及图中各个曲线所对应的热传导系数和曲线拟合数据与实验数据的标准差图如下所示:

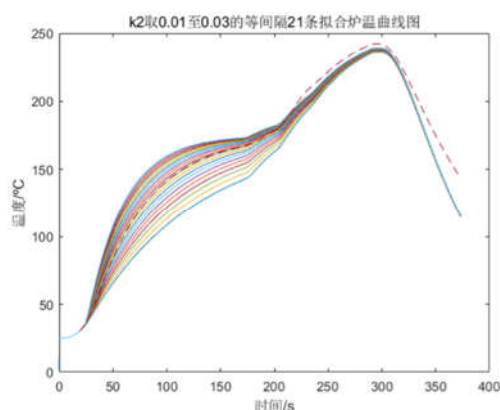


图 5

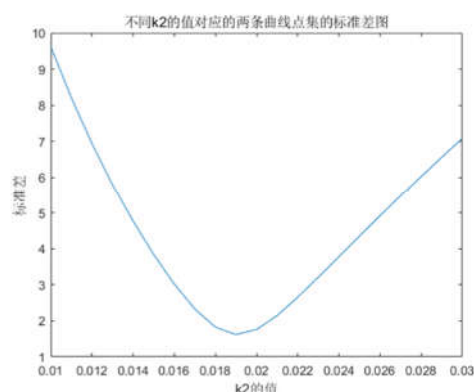
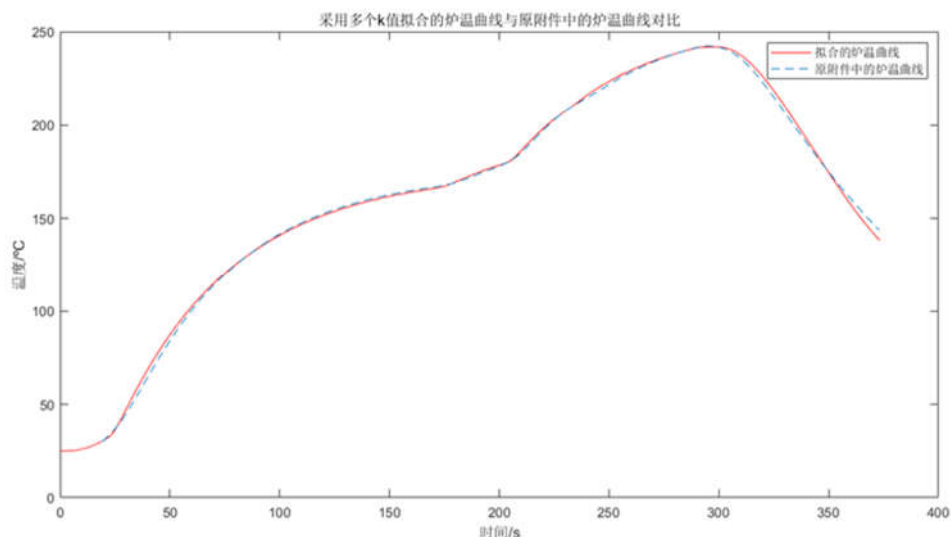


图 6

可以看出,标准差存在一谷值点,由拟合过程中生成的数据文件得出,对应位置的 K 值为 0.019,即作为最终第二段恒温元区域对应导热系数值。使用这样的方法,我们最终得出最优拟合曲线如下图:



可以看出拟合曲线和原实验数据曲线符合得很好，只是原炉温曲线从温度达到30℃才开始记温，而本文模型拟合出的曲线无需由热传感器测量，所以开始部分即可生成数据，这一部分，可以看作是对原实验所得炉温曲线的解析延拓，在我们的曲线拟合过程中，延拓部分是被视作间隙的炉前部分，而确定的是被视作恒温元区域的各个大温区的导热系数，这一部分确定了，间隙部分的模型可随之确定，故不会对实验结果造成影响。

我们最终得到的近似最优的拟合参数值为如下表所示：

表 3

内导热系数值	对应区域位置
0.0065	96cm 内
0.019	180cm 内
0.022	211cm 内
0.029	242cm 内
0.021	304cm 内
0.015	410.5cm 内
0.008	435.5cm 内

在拟合过程中，另一待定系数(T_0)受到温度影响极小，在拟合过程中，我们测得的锡升温扩散率系数约为 $A_{\text{锡升温}}=1e^{-8}$ ；锡降温扩散率系数约为 $A_{\text{锡降温}}=1e^{-9}$ ，数量级与 K 相差过大，故我们将之设为定值。

6.3.3 整体炉温模型的应用

我们已经建立了整体炉温模型并通过拟合确定了其系数，又由假设可得在题中所给的温度变化区间内，模型系数可以视作不会改变，所以，我们设定各个元区域温度，将之代入模型，并利用差分所得公式求解即可。这样求解所获得的曲

线如下图所示（本模型代码均见附录一）：

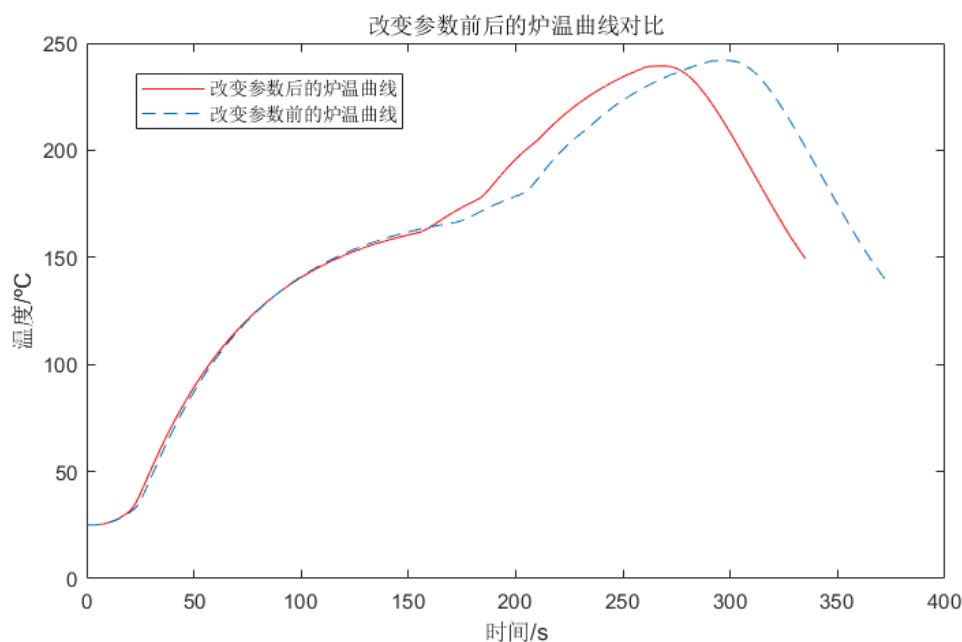


图 7

问题一中所给出的传输速率增高，表现在图中，即为峰值点向左下方移动。其数据我们已附在支撑材料中，由输出的拟合数据可以得到问题一的答案如下：

- 小温区 3 中点炉温为：130.8 °C
- 小温区 6 中点炉温为：169.2 °C
- 小温区 7 中点炉温为：191.1 °C
- 小温区 8 结束处炉温为：225.3 °C

七 多目标多约束下的工艺参量组合优化模型建立

对整体工艺流程中的炉温变化模型而言，模型的输入为元区域 $D_1 \sim D_4$ 的设定温度及传输速度 v ，我们将它们的组合视作模型的输入状态，即：

$$\delta_{\square} = \{T_{a1}^{(i)}, T_{a2}^{(i)}, T_{a3}^{(i)}, T_{a4}^{(i)}, v^{(i)}\} \quad (16)$$

这些输入状态均为可能的最优状态，它们组成关于某个与回焊工艺流程相关的优化目标的解空间，若我们设该优化对应目标函数为 $f_{\square}(\delta)$ ，则解空间可表示为：

$$S^{f_{\square}} = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n\} \quad (17)$$

我们注意到，并非任何输入组合都可被计入解空间，因为要使加工有效，潜在解必须满足制程界限的约束，如下表所示：

表 4 制程界限

界限名称	最低值	最高值	单位
温度上升斜率	0	3	°C/s
温度下降斜率	-3	0	°C/s
温度上升过程中在 150°C~190°C 的时间	60	120	s
温度大于 217°C 的时间	40	90	s

峰值温度	240	250	°C
------	-----	-----	----

将之转化为数学表达形式，为：

$$s. t. \forall i, j \leq end, \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{\Delta t} [T(r_{i,t_{j+1}}) - T(r_{i,t_j})] \right| \leq 3 \\ 60 \leq t(T_{150 \sim 190}) \leq 120 \\ 40 \leq t(T \geq 217^\circ \text{C}) \leq 90 \\ 240 \leq \max\{T_j^i\} \leq 250 \\ T_j^i = -\left(\frac{a_1}{r} + a_2\right) T_{j+1}^{i+1} + \left(\frac{a_1}{r} + 2a_2 + 1\right) T_{j+1}^i - a_2 T_{j+1}^{i-1} \\ T_j^{end} = (1 - K(T_a)\Delta t) T_{j+1}^{end} + K(T_a)\Delta t T_a(d) \\ d = vj\Delta t \end{array} \right. \quad (18)$$

在这类组合优化问题中，较多采用的是搜索法，即在给定范围内，从模型获取优化目标以及约束因子的值，并将这些值存入内存进行比较，找出适合条件的最优值以及它所对应的近似最优解。

若考虑将所有设定的状态均代入模型检验是否满足制程约束，则势必增加问题求解的难度，并且降低模型的实际使用价值，所以我们考虑在特定的制程限制量中简化所需考虑的输入成分或找出模型的输入参量所主要影响的界限种类。

7.1 对确定温度参数下最优传输速率问题的研究求解

我们首先可以确定，在各个恒温元区域温度参数确定情况下，回焊炉中空气温度随距离的分布是确定的。此时速率自身即为模型优化目标，所以解空间可写成：

$$S^{f_1(v)} = \{\delta_1(v_1), \dots, \delta_n(v_n)\} \quad (19)$$

此时各个解空间中的状态满足的约束为：

而目标函数为：

$$f_1(v) = v \quad (20)$$

故最优解满足的条件为：

$$f_1(\delta^*) \geq f_1(\delta_i), \delta_i \in S^{f_1(v)} \quad (21)$$

我们首先给出求解的程序框图：

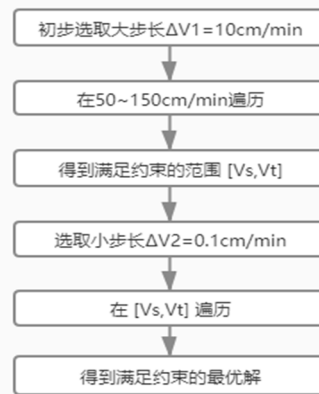


图 8

在求解时，我们设置迭代初始值为 50 cm/min,先设置搜索步长为 10 cm/min,利用整体工艺炉温模型的差分求解法筛选满足约束的输入状态，搜索结果如下表

(不符合约束项用红色标出):

表 5

传送带传输速度与制程界限相关参数的关系表					
传送带速度(cm/min)	T ₁₅₀₋₁₉₀	T _{>217}	T _{max}	k ≤3?	符合制程界限?
40	63.5	167.5	250.8738	是	否
50	63	132	248.4372	是	否
60	64	108	245.5921	是	否
70	64	90	242.4558	是	是
80	61.5	75.5	239.0896	是	否
90	46	63	235.5467	是	否
100	34	52	231.864	是	否
110	28.5	41.5	228.0772	是	否

经分析得：只有传送带速度在 70cm/min 时符合制程界限，而 $t(T>217^{\circ}\text{C})$ 和 T_{\max} 都是单调递减的。传送带速度加大时，限制速度增长的因子是 T_{\max} 。传送带速度减小时，限制速度减小的因子是 $t(T>217^{\circ}\text{C})$ 。

之后我们考虑以 0.1cm/min 为步长增大传输速率，绘制得最高温度与传送带速率关系如下图所示：

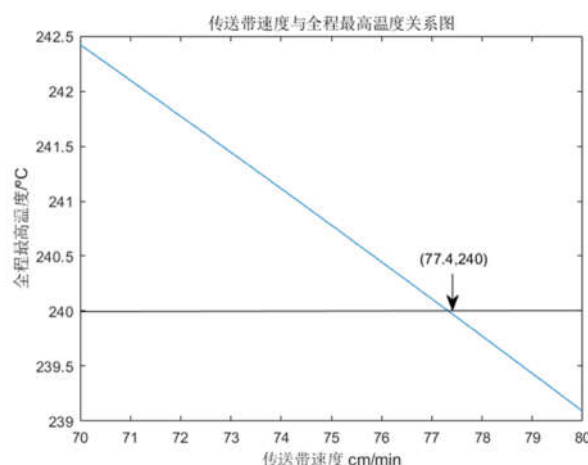


图 9

从图中可以得出：最大传输速率为 **77.4 cm/min**

同理，以 0.1cm/min 为小步长减小传送带速度，其约束条件为 $t(T \geq 217^{\circ}\text{C}) \leq 90\text{s}$

可解出最小传输速率为： **69.6 cm/min**

7.2 对求最小峰温面积下最优组合问题的研究求解

为简化问题，我们考虑剔除输入状态中某些参量对制程限定量的影响，以使解空间的生成更为简便高效。我们考虑题目中给出了参考的炉温曲线如下图：

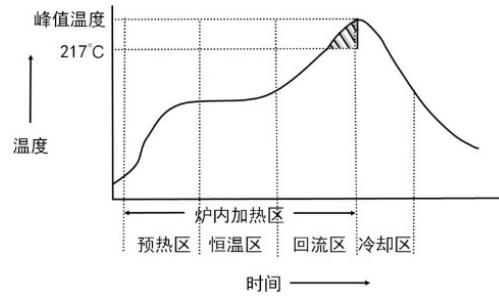


图 10

依据图中所示，我们可以看出，炉温变化主要集中于预热区，回流区与冷却区，而可能是出于对工艺质量的考虑，恒温区炉温几乎不变化，且从本文模型给出的拟合炉温曲线看，恒温区中，可设置不同温度的两小温区的温度差异为较小量，这样拟合出的曲线往往在恒温段斜率十分平稳，且从最后输出的数据来看，质点炉温在经历恒温区的加热后温度并不会达到任一恒温区中小温区的设定温度，故我们推测恒温区的温度可做相同量，且在考虑制程界限约束时，其影响可以略去，下面我们设计模拟实验来验证我们的猜想。

7.2.1 验证恒温区温度影响力的实验设计与实现

依据我们的猜测，恒温区温度变化与最终输入状态能否使模型符合制程约束无关，故我们反推，在其他温区条件可使模型满足制程界限时，恒温区温度在题设范围内可任取。

那么，出于实验准确度的考虑，由于我们的模型参数为通过实验数据拟合得到，故我们可取其它各大温区温度为题给实验设定温度，在此基础上，设置步长为 5°C 的双重循环，求解每次输入状态下的相应值，代入式(14)，得出其是否符合约束，并将不符合的状态输出（代码详见附录二）。

我们在代码中还求解了相应输入状态下的峰温面积，可以看出，在恒温区的温度改变时，峰温面积变化十分微小，统计得：

最大峰温面积 $S = 1430$ ，最小峰温面积 $S = 1086$

故峰温面积变化的极差为：344

故通过此实验，我们得出结论：改变恒温区温度，对模型能否满足制程界限，以及模型确定的峰温面积的影响不大，故在单次搜索过程中，我们可将其设为最小值，以方便筛选符合制程界限的输入状态。

不过为了搜索方法的严格性，我们加入对其他参量的影响力的测试。

7.2.2 验证其它参数影响力的实验设计与实现

显然，速度直接影响炉温曲线的 t 坐标，从而影响曲线的斜率变化与峰温面积，故一定是需要着重考虑的参量。

我们考虑验证元区域 D_1D_4 的温度的影响力，我们设定 D_3D_4 的温度为最小值，速率同题给实验速率，设置搜索步长为 5°C 的双重循环搜索，因为这里仅考虑模型的特性与炉温曲线的特性，而忽略其实际意义，故我们不考虑制程界限。这样得出峰温面积的极差（代码见附录三）。

可以从程序运行结果看出，峰温面积极差为 $1610-615=995$ ，有较大差距，故我们需要着重考虑 D_1D_4 的温度对模型的影响。

7.2.3 优选搜索法解约束下单目标问题的实现

由前两部分的探讨，我们设计如下算法来求解制程约束下使得峰温面积最小的最优模型输入。我们首先给出算法的流程图：

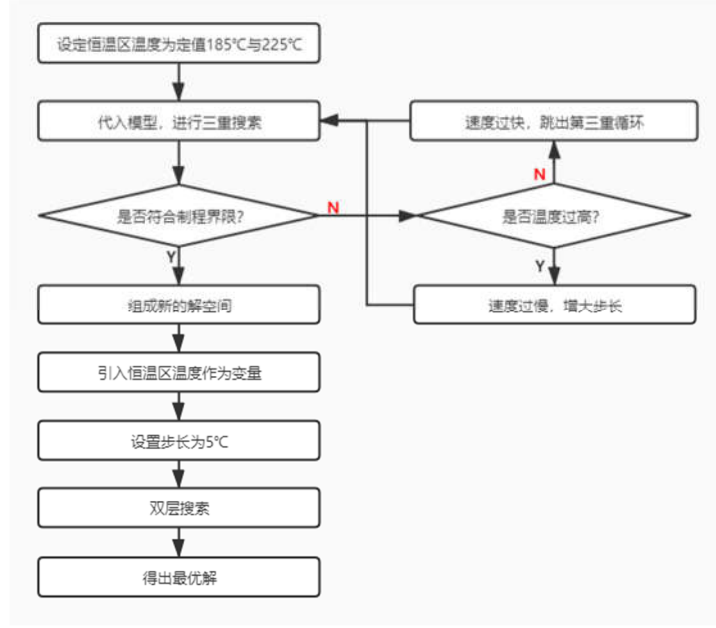


图 11

我们首先将次要重要影响量即恒温区温度设为定值185℃与225℃，即允许范围内的最小值，使状态 δ 中另外的参量 $\{T_{a1}, T_{a4}, v\}$ 作为新的优选状态 γ ，进行三重搜索，代入模型，依据约束式（14），判定是否符合制程界限，不符合直接删去，对于符合的参量组合，使它们组成一个新的解空间：

$$S_2^{fs} = \{\gamma_1 \dots \gamma_n\}$$

为使求解足够精细，我们在这时引入恒温区温度作为每个输入状态下的变量，将输入状态改写为：

$$v_i(\Delta D_2^i, \Delta D_3^i)$$

并将其作为搜索对象，同样的，我们设置步长为5℃，这时再次进行双层搜索。此时由于我们可根据整体工艺模型唯一确定峰温面积，故此时最优解为：

$$\gamma_{\square}^*(\Delta D_2^i, \Delta D_3^i), s.t. f_s(\gamma_i^*) \leq f_s(\gamma), \gamma \in S_2$$

即为一个确定的，由式（12）定义的输入状态。

程序中，我们首先设定 T_{1-5} 步长为 5℃， T_{8-9} 步长为 5℃，传输速率 v 步长为 10cm/min，范围为 50-90cm/min 搜索，最终得到的可行解为：

$$T_{1-5} = 170^\circ\text{C}, T_{8-9} = 265^\circ\text{C}, T_6 = 185^\circ\text{C}, T_7 = 225^\circ\text{C}, v = 80\text{cm/min}$$

接下来，我们在 $T_{1-5} = 170^\circ\text{C}$ 、 $v = 80\text{cm/min}$ 附近进行小步长搜索，得到的结果为

$$T_{1-5} = 174^\circ\text{C}, T_{8-9} = 265^\circ\text{C}, T_6 = 185^\circ\text{C}, T_7 = 225^\circ\text{C}, v = 84\text{cm/min}$$

得到的最小峰温面积为：

$$S_{\square\square\square} = 952.8$$

解出其制程界限约束为：

$$t(T_{150 \sim 190}) = 61.5s \quad t(T \geq 217) = 64s \quad T_{\square\square\square} = 240.08^\circ\text{C}$$

可以看出，使用优选法求解此类复杂组合优化问题可以有效加快收敛速度，且确保近似最优解具有一定可靠性。

7.2.4 对最小化面积的两种方法的比较研究

从上述实现过程可以看出，温度面积的最小值取决于速度和加热区域的温度，这我们的认知相同：若要在符合制程界限的条件下使得峰面积尽量小，我们应当提高加热区域温度，同时提高传送带速率，使电路板迅速通过加热区域的同时也能获得较高温，从而满足制程界限。又或者我们降低加热热源温度，同时降低传送带速率，使得电路板缓慢的通过热源缓缓加温。从编程数据上我们看到，选择前一种情况才能使得波峰面积更小。

为了更加直观体现两种最小化峰温面积的方式，我们选取了上述解出的最小峰温面积对应的炉温曲线和加热温度较小、速度较慢的炉温曲线绘制在同一张图内进行对比：

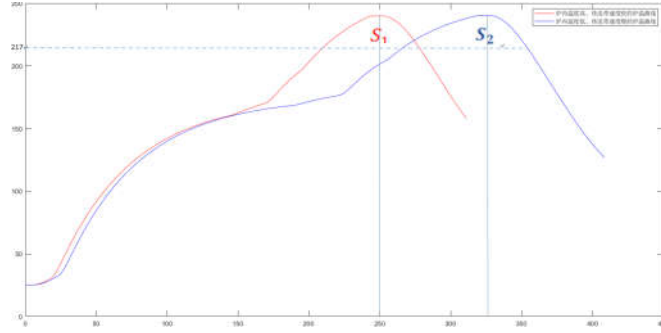


图 12

如图，红色曲线为同时提高传送带速率与热源温度时的炉温曲线，这样既使得 $t(T \geq 217)$ 缩小，又同时减小了峰值温度，故面积会比同时减小传送速率与热源温度所得到的面积更小。

7.3 对双目标多约束复杂组合问题的研究与求解

这类优化目标不唯一的问题，往往要与评价方法结合才能求解，然而，若我们假设两个优化目标，即曲线对称性和峰温面积为受同一潜在因子影响的变量，则我们就可以通过这里，将其转化为单一目标的约束组合优化问题，则这样问题的求解就得以简化。

我们首先考虑能如此简化的双目标优化问题所具有的性质，并以此作为验证我们猜想的依据。

对于双目标组合优化，每个目标对应于一个解空间，如下：

$$S_1^{f_1} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$$

$$S_2^{f_2} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$$

由于解空间的生成遵循相同的约束，即式 (14)，故两个优化目标具有相同的解空间，则最优解实质上是由 f_1, f_2 的结构所决定，它们的结构具有这样的性质：

对于 δ_i, δ_j , 若 $f_1(\delta_i) \geq f_1(\delta_j)$, 则有 $f_2(\delta_i) \geq f_2(\delta_j)$

由该性质可得，必存在一个 δ^* ，使得 f_1, f_2 同时取得最小值。

至此，我们的问题转化为，如何定义一个函数 $\varphi(\delta)$ ，使得它可以定量地描述峰温曲线的对称度。

由于状态确定，峰温曲线可唯一确定，而若峰温曲线为理想对称曲线，则其对称轴必过峰值点，所以我们取实际峰温曲线的最大值点作为搜索起点，按照在

向后差分部分设定的步长 Δx 向两端搜索，我们记搜索起点为原点，则第 k 次搜索的坐标位置为：

$$(-k\Delta x, T) \text{ 与 } (k\Delta x, T_{rk})$$

我们记：

$$\Delta T = |T_{li} - T_{ri}| \quad (22)$$

则它反映了对称位置的温度差，理想情况下应为零，而搜索的边界取决于曲线上两侧临界点距搜索起点的距离，即：

$$k = \frac{1}{\Delta x} \min\{d_{lmax}, d_{rmax}\}$$

我们将整个曲线上所有搜索到的点的求平方和，并取平均，定义此为峰温曲线的对称度函数，即：

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\Delta T_i)^2 \quad (23)$$

下面，我们在对单目标多约束问题代码的基础上，加入求解峰温曲线的对称度函数 $\varphi(\delta)$ ，之所以这样，是因为基于假设，它们必然有相同的解空间，若此时我们同时对两个目标求近似最优解，则若它们的近似最优解同时取得，即可在一定程度上说明假设的正确性，若解空间中输入状态足够多，则可近似看作假设成立，从而可以将使峰温面积最小时的设定参数组合当作使得峰温曲线对称度最高时的最优解，也就是该双目标多约束优化问题的最优解。

基于上述原理，我们编程实现对该双目标多约束优化问题的假设验证与求解。

使用和小化峰温面积相同的方法，我们对各区域温度和传送带速度等变量进行多重搜索。我们发现，峰温曲线对称度最高时，得到的最优解为：

$$T_{1-5} = 175^\circ\text{C}, T_{8-9} = 265^\circ\text{C}, T_6 = 185^\circ\text{C}, T_7 = 225^\circ\text{C}, v = 84\text{cm/min}$$

此时的最佳对称峰温曲线为：

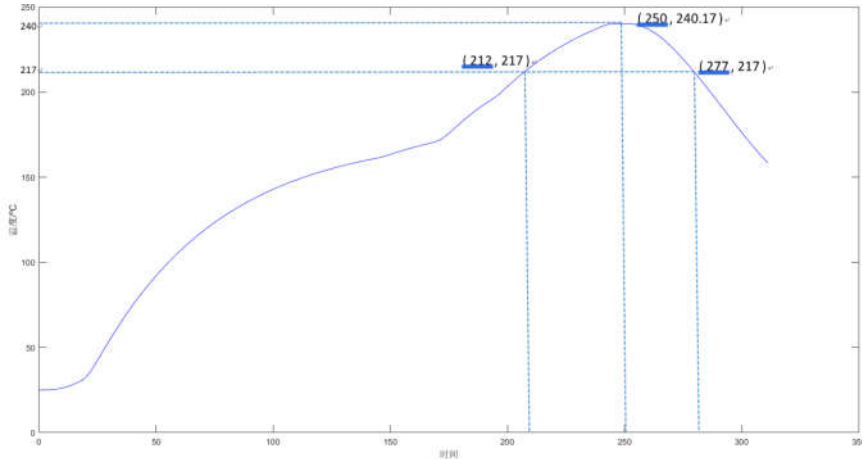


图 13

曲线的对称度为 $\varphi(\delta) = 6.3$

我们可以看到，此时达到 217°C 的时刻与取得最小峰温面积时的炉温曲线达到 217°C 的时刻几乎相同，进一步验证了我们的假设。

八 模型评价与推广

8.1 模型评价

1. 整体炉温模型中，我们将温区按温度分布分为恒温元区域，简化了模型表达，并分别对每段模型拟合，使得结果精确度较高，同时，此模型也同样适用于有更多小温区的情况，故具有较强的实用意义。

2. 整体炉温模型采用向后差分以及追赶法求解，较为精确且更为高效

3. 在多目标多约束组合优化模型中，我们讨论并排除一些初始量对模型是否符合制程限制的影响，简化了求解过程，并确保了解的准确程度不会受到较大影响。同时，通过猜测找得出了双目标所受的为同种因子的影响，从而将情况简化，高效求解。

8.2 模型推广

1. 在假设中，我们将模型各个分段模型的导热系数设为常值，这样将影响模型的适用区域，我们可以将导热系数考虑成圆柱锡表面温度与空气温度的函数，使用更为复杂的模型对其进行描述求解。

2. 我们可以加入对竖直方向上导热的考虑，列写二维导热方程如下：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = A(T_{\text{气}}) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + L$$

式中， L 为焊材内部的热源作用因子。

3. 对于多目标多约束组合优化问题，我们可以考虑采用智能算法求解，这样可以提高效率，但是应适当做相应改进，以规避智能算法稳定性差的缺点。

参考文献

- [1]. 任玉鸿.圆柱坐标系下非稳态导热问题改进数值求解方法[J].当代化工,2015,44(07):1634-1637.
- [2]. 潘艳,杨晓君,冯建军.一类扩散方程差分格式的稳定性分析[J].中国科技信息,2011(07):266-267.
- [3]. 回流焊工作原理.[OL].
<https://www.bilibili.com/video/BV1vZ4y1N7Sz?t=107>,2020/9/12

附录

(一) 数据拟合代码

```
clear;%清除工作区变量
clc;%清屏
close all;%关闭所有图形窗口
count=0;
%定义炉内相关参数
gap=5;%间隙宽度
zone=30.5;%小温区长度
furnace=25;%炉前区域
T15=175;T6=195;T7=235;T89=255;T1011=25;%各个小温区温度;
appendix=xlsread("附件.xlsx");

%定义加热过程相关参数
v=70/60;%传送带速度
h=0.15/1000;%锡厚度
allt=435.5/v;%运行总时间

r=0.3/1000;%圆柱半径
n=ceil(allt*100);%把时间分成n份
dt=allt/n;%时间步长分割,一份为1/100.
m=100;%把半径分成n份
dr=r/m;%半径步长分割
TR=zeros(m,n);
n0=0;
aup=1e-8;%锡升温扩散率系数
adown=1e-9;%锡降温扩散率系数
k1=0.0065;%96cm内导热系数
k2=0.019;%180cm内导热系数
k3=0.022;%211cm内导热系数
k4=0.029;%242cm内导热系数
k5=0.021;%304cm内导热系数
k6=0.015;%410.5cm内降温的导热系数
k7=0.008;%435.5cm内降温的导热系数
for k0=0:dt:allt %稳定温度分布计算
    i=k0*v;
    n0=n0+1;M(n0)=i;
    if(i<furnace)
        T(n0)=(T15-25)*i/furnace+25;
    elseif(i<furnace+zone*5+gap*4)
        T(n0)=T15;
    elseif(i<furnace+zone*5+gap*5)
        T(n0)=T15+(i-(furnace+zone*5+gap*4))*(T6-T15)/gap;
```

```

elseif(i<furnace+zone*6+gap*5)
T(n0)=T6;
elseif(i<furnace+zone*6+gap*6)
T(n0)=T6+(i-(furnace+zone*6+gap*5))*(T7-T6)/gap;
elseif(i<furnace+zone*7+gap*6)
T(n0)=T7;
elseif(i<furnace+zone*7+gap*7)
T(n0)=T7+(i-(furnace+zone*7+gap*6))*(T89-T7)/gap;
elseif(i<furnace+zone*9+gap*8)
T(n0)=T89;
elseif(i<furnace+zone*9+gap*9)
T(n0)=T89+(i-(furnace+zone*9+gap*8))*(T1011-T89)/(gap);
else
T(n0)=T1011;
end
end
% plot(M,T);
%循环确定系数
% for a=1e-9:1e-9:1e-8
% for k7=0.008:0.001:0.008 %空气导热系数
% %初值设定
for i=1:m
TR(i,1)=25;
end
TR(1,2)=25;

%构造右端项
b=zeros(m,1);
for j=1:n
if(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
a=aup;
else
a=adown;
end
a1=a*dt/dr;
a2=a*dt/(dr*dr);
b(1,1)=TR(1,j)+a2*TR(1,j);
for i=2:m-1
b(i,1)=TR(i,j);
end
if(j*v*allt/n<furnace)
k=k1;
elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*5+gap*5)
k=k2;

```

```

elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*6+gap*6)
    k=k3;
elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*7+gap*7)
    k=k4;
elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
    k=k5;
elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*11+gap*10)
    k=k6;
else
    k=k7;
end

b(m,1)=TR(m,j)+k*dt*T(j);

A(1,1)=a1/r+2*a2+1;
A(1,2)=-(a1/r+a2);
for i=2:m-1
    A(i,i-1)=-a2;
    A(i,i)=a1/r+2*a2+1;
    A(i,i+1)=-(a1/r+a2);
end
A(m,m)=(1+k*dt);
diaga=diag(A,-1);
diagb=diag(A,0);
diagc=diag(A,1);
TR(:,j+1)=tridiagsolver(diaga,diagb,diagc,b);

end
for j=1:n+1
    TIME(j)=j*dt;
end
Result=[];
for g=1:n
    if(mod(g,50)==0)
        Result(g/50,1)=TR(1,g);
    end
end

%计算曲线拟合最小相关系数
count=count+1;
range=ceil(339.5/v*2-37);
Variance(count)=std(appendix(1:range,2)-Result(1+37:range+37));
% if(count==1)
%     MinCount=Variance(count);

```

```

% end
%     if(Variance(count)<MinCount)
%         MinCount=count;
%         Mina=a;
%         Mink=k;
%
%     end
% subplot(2,1,1);
plot(TIME, TR(1,:), 'r')
hold on;
plot(appendix(:,1), appendix(:,2), 'b');
%     end
% subplot(2,1,2);
% plot(TIME, TR(end,:))
% x=tridiagsolver(a,b,c,d);
%     plot(linspace(0.01,0.03,21),Variance);

```

(二) 追赶法求解三对角矩阵方程代码

```

function xte=tridiagsolver(a,b,c,d)
    n=length(b);
    l(1)=b(1);
    y(1)=d(1)/l(1);
    u(1)=c(1)/l(1);
    for i=2:n-1
        l(i)=b(i)-a(i-1)*u(i-1);
        y(i)=(d(i)-a(i-1)*y(i-1))/l(i);
        u(i)=c(i)/l(i);
    end
    l(n)=b(n)-a(n-1)*u(n-1);
    y(n)=(d(n)-a(n-1)*y(n-1))/l(n);
    xte(n)=y(n);
    for j=n-1:-1:1
        xte(j)=y(j)-u(j)*xte(j+1);
    end
end

```

(三) 整体炉温模型仿真拟合代码

```

clear;%清除工作区变量
clc;%清屏
close all;%关闭所有图形窗口
count=0;
%定义炉内相关参数
gap=5;%间隙宽度

```

```

zone=30.5;%小温区长度
furnace=25;%炉前区域
T15=173;T6=198;T7=230;T89=257;T1011=25;%各个小温区温度;
appendix=xlsread("附件.xlsx");

%定义加热过程相关参数
v=78/60;%传送带速度
h=0.15/1000;%锡厚度
allt=435.5/v;%运行总时间

r=0.3/1000;%圆柱半径
n=ceil(allt*100); %把时间分成n份
dt=allt/n;%时间步长分割,一份为1/100.
m=100;%把半径分成n份
dr=r/m;%半径步长分割
TR=zeros(m,n);
n0=0;
aup=1e-8;%锡升温扩散率系数
adown=1e-9;%锡降温扩散率系数
k1=0.0065;%96cm内导热系数
k2=0.019;%180cm内导热系数
k3=0.022;%211cm内导热系数
k4=0.029;%242cm内导热系数
k5=0.021;%304cm内导热系数
k6=0.015;%410.5cm内降温的导热系数
k7=0.008;%435.5cm内降温的导热系数
for k0=0:dt:allt %稳定温度分布计算
    i=k0*v;
    n0=n0+1;M(n0)=i;
    if(i<furnace)
        T(n0)=(T15-25)*i/furnace+25;
    elseif(i<furnace+zone*5+gap*4)
        T(n0)=T15;
    elseif (i<furnace+zone*5+gap*5)
        T(n0)=T15+(i-(furnace+zone*5+gap*4))*(T6-T15)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*6+gap*5)
        T(n0)=T6;
    elseif(i<furnace+zone*6+gap*6)
        T(n0)=T6+(i-(furnace+zone*6+gap*5))*(T7-T6)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*7+gap*6)
        T(n0)=T7;
    elseif(i<furnace+zone*7+gap*7)
        T(n0)=T7+(i-(furnace+zone*7+gap*6))*(T89-T7)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*9+gap*8)

```



```

T(n0)=T89;
elseif(i<furnace+zone*9+gap*9)
T(n0)=T89+(i-(furnace+zone*9+gap*8))*(T1011-T89)/(gap);
else
T(n0)=T1011;
end
end
% plot(M,T);
%循环确定系数
% for a=1e-9:1e-9:1e-8
%     for k7=0.008:0.001:0.008 %空气导热系数
% %初值设定
for i=1:m
    TR(i,1)=25;
end
TR(1,2)=25;

%构造右端项
b=zeros(m,1);
for j=1:n
    if(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
        a=aup;
    else
        a=adown;
    end
    a1=a*dt/dr;
    a2=a*dt/(dr*dr);
    b(1,1)=TR(1,j)+a2*TR(1,j);
    for i=2:m-1
        b(i,1)=TR(i,j);
    end
    if(j*v*allt/n<furnace)
        k=k1;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*5+gap*5)
        k=k2;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*6+gap*6)
        k=k3;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*7+gap*7)
        k=k4;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
        k=k5;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*11+gap*10)
        k=k6;
    else

```

```

        k=k7;
end

        b(m,1)=TR(m,j)+k*dt*T(j);

A(1,1)=a1/r+2*a2+1;
A(1,2)=-(a1/r+a2);
for i=2:m-1
    A(i,i-1)=-a2;
    A(i,i)=a1/r+2*a2+1;
    A(i,i+1)=-(a1/r+a2);
end
A(m,m)=(1+k*dt);
diaga=diag(A,-1);
diagb=diag(A,0);
diagc=diag(A,1);
TR(:,j+1)=tridiagsolver(diaga,diagb,diagc,b);

end
for j=1:n+1
    TIME(j)=j*dt;
end
Result=[];
for g=1:n
    if(mod(g,50)==0)
        Result(g/50,1)=TR(1,g);
    end
end

plot(TIME,TR(1,:),'-r')
hold on;

```

(四) 制程限定下最优传输速率求解代码

```

clear;%清除工作区变量
clc;%清屏
close all;%关闭所有图形窗口
count=0;
%定义炉内相关参数
gap=5;%间隙宽度
zone=30.5;%小温区长度
furnace=25;%炉前区域
T15=182;T6=203;T7=237;T89=254;T1011=25;%各个小温区温度;
appendix=xlsread("附件.xlsx");

```

```

for vcount=1:10 %传送带速度
%           v=30/60+10/60*vcount; %大步长
%           v=70/60+1/60*vcount; %中步长
%           v=70/60-0.1/60*vcount; %小步长 %75.9
%定义加热过程相关参数
TR=[];TIME=[];
h=0.15/1000; %锡厚度
allt=435.5/v; %运行总时间
r=0.3/1000; %圆柱半径
n=ceil(allt*100); %把时间分成n份
dt=allt/n; %时间步长分割，一份为1/100.
m=100; %把半径分成n份
dr=r/m; %半径步长分割
TR=zeros(m,n);
n0=0;
aup=1e-8;%锡升温扩散率系数
adown=1e-9; %锡降温扩散率系数
k1=0.0065; %96cm内导热系数
k2=0.019; %180cm内导热系数
k3=0.022; %211cm内导热系数
k4=0.029; %242cm内导热系数
k5=0.021; %304cm内导热系数
k6=0.015; %410.5cm内降温的导热系数
k7=0.008; %435.5cm内降温的导热系数

for k0=0:dt:allt %稳定温度分布计算
    i=k0*v;
    n0=n0+1;M(n0)=i;
    if(i<furnace)
        T(n0)=(T15-25)*i/furnace+25;
    elseif(i<furnace+zone*5+gap*4)
        T(n0)=T15;
    elseif (i<furnace+zone*5+gap*5)
        T(n0)=T15+(i-(furnace+zone*5+gap*4))*(T6-T15)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*6+gap*5)
        T(n0)=T6;
    elseif(i<furnace+zone*6+gap*6)
        T(n0)=T6+(i-(furnace+zone*6+gap*5))*(T7-T6)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*7+gap*6)
        T(n0)=T7;
    elseif(i<furnace+zone*7+gap*7)
        T(n0)=T7+(i-(furnace+zone*7+gap*6))*(T89-T7)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*9+gap*8)
        T(n0)=T89;

```

```

elseif (i<furnace+zone*9+gap*9)
T(n0)=T89+(i-(furnace+zone*9+gap*8))*(T1011-T89)/(gap);
else
T(n0)=T1011;
end
end

for i=1:m
    TR(i,1)=25;
end
TR(1,2)=25;

%构造右端项
b=zeros(m,1);
for j=1:n
    if(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
        a=aup;
    else
        a=adown;
    end
    a1=a*dt/dr;
    a2=a*dt/(dr*dr);
    b(1,1)=TR(1,j)+a2*TR(1,j);
    for i=2:m-1
        b(i,1)=TR(i,j);
    end
    if(j*v*allt/n<furnace)
        k=k1;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*5+gap*5)
        k=k2;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*6+gap*6)
        k=k3;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*7+gap*7)
        k=k4;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
        k=k5;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*11+gap*10)
        k=k6;
    else
        k=k7;
    end

    b(m,1)=TR(m,j)+k*dt*T(j);

```

```

A(1,1)=a1/r+2*a2+1;
A(1,2)=-(a1/r+a2);
for i=2:m-1
    A(i,i-1)=-a2;
    A(i,i)=a1/r+2*a2+1;
    A(i,i+1)=-(a1/r+a2);
end
A(m,m)=(1+k*dt);
diaga=diag(A,-1);
diagb=diag(A,0);
diagc=diag(A,1);
TR(:,j+1)=tridiagsolver(diaga,diagb,diagc,b);

end
Result=[]; dT=[];
for g=1:n
    if(mod(g,50)==0)
        Result(g/50,1)=TR(1,g);
    end
end
for ct=1:length(Result)-1
    dT(ct)=(Result(ct+1)-Result(ct))*2; %斜率
end
timedT(vcount)=sum(sum(dT>3&dT<-3));
time150(vcount)=sum(sum(Result>150&Result<170))/2;
time217(vcount)=sum(sum(Result>217))/2;
timemax(vcount)=max(Result);
end
% plot(linspace(70,80,100),timemax);

```

(五) 制程限定下最小峰温面积求解代码

```

clear;%清除工作区变量
clc;%清屏
close all;%关闭所有图形窗口
count=0;
%定义炉内相关参数
gap=5;%间隙宽度
zone=30.5;%小温区长度
furnace=25;%炉前区域
appendix=xlsread("附件.xlsx");
T1011=25;%各个小温区温度
s=zeros(1,100);
vcount=1;

```

```

for T15=175:1:175
    for T89=245:1:255
        % for T6=185:2:185
        % for T7=225:2:225
            for v=50/60:1/60:65/60
                T6=185; T7=225;
            % v=70/60;
            % T15=175;
            % T15=174;T89=265;

%定义加热过程相关参数
TR=[];TIME=[];
h=0.15/1000;%锡厚度
allt=435.5/v;%运行总时间
r=0.3/1000;%圆柱半径
n=ceil(allt*100); %把时间分成n份
dt=allt/n;%时间步长分割，一份为1/100.
m=100;%把半径分成n份
dr=r/m;%半径步长分割
TR=zeros(m,n);
n0=0;
aup=1e-8;%锡升温扩散率系数
adown=1e-9;%锡降温扩散率系数
k1=0.0065;%96cm内导热系数
k2=0.019;%180cm内导热系数
k3=0.022;%211cm内导热系数
k4=0.029;%242cm内导热系数
k5=0.021;%304cm内导热系数
k6=0.015;%410.5cm内降温的导热系数
k7=0.008;%435.5cm内降温的导热系数

for k0=0:dt:allt %稳定温度分布计算
    i=k0*v;
    n0=n0+1;M(n0)=i;
    if(i<furnace)
        T(n0)=(T15-25)*i/furnace+25;
    elseif(i<furnace+zone*5+gap*4)
        T(n0)=T15;
    elseif (i<furnace+zone*5+gap*5)
        T(n0)=T15+(i-(furnace+zone*5+gap*4))*(T6-T15)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*6+gap*5)
        T(n0)=T6;
    elseif(i<furnace+zone*6+gap*6)
        T(n0)=T6+(i-(furnace+zone*6+gap*5))*(T7-T6)/gap;

```

```

elseif(i<furnace+zone*7+gap*6)
T(n0)=T7;
elseif(i<furnace+zone*7+gap*7)
T(n0)=T7+(i-(furnace+zone*7+gap*6))*(T89-T7)/gap;
elseif(i<furnace+zone*9+gap*8)
T(n0)=T89;
elseif(i<furnace+zone*9+gap*9)
T(n0)=T89+(i-(furnace+zone*9+gap*8))*(T1011-T89)/(gap);
else
T(n0)=T1011;
end
end

%初值设定
for i=1:m
    TR(i,1)=25;
end
TR(1,2)=25;

%构造右端项
b=zeros(m,1);
for j=1:n
    if(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
        a=aup;
    else
        a=adown;
    end
    a1=a*dt/dr;
    a2=a*dt/(dr*dr);
    b(1,1)=TR(1,j)+a2*TR(1,j);
    for i=2:m-1
        b(i,1)=TR(i,j);
    end
    if(j*v*allt/n<furnace)
        k=k1;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*5+gap*5)
        k=k2;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*6+gap*6)
        k=k3;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*7+gap*7)
        k=k4;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
        k=k5;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*11+gap*10)

```

```

        k=k6;
else
    k=k7;
end

    b(m,1)=TR(m,j)+k*dt*T(j);
A(1,1)=a1/r+2*a2+1;
A(1,2)=-(a1/r+a2);
for i=2:m-1
    A(i,i-1)=-a2;
    A(i,i)=a1/r+2*a2+1;
    A(i,i+1)=-(a1/r+a2);
end
A(m,m)=(1+k*dt);
diaga=diag(A,-1);
diagb=diag(A,0);
diagc=diag(A,1);
TR(:,j+1)=tridiagsolver(diaga,diagb,diagc,b);
end

Result=[]; dT=[];
for g=1:n
    if(mod(g,50)==0)
        Result(g/50,1)=TR(1,g);
    end
end
for ct=1:length(Result)-1
    dT(ct)=(Result(ct+1)-Result(ct))*2; %斜率
end
timedT(vcount)=sum(sum(dT>3&dT<-3));
time150(vcount)=sum(sum(Result>150&Result<170))/2;
time217(vcount)=sum(sum(Result>217))/2;
timemax(vcount)=max(Result);

if(time150(vcount)<60|time217(vcount)<40|timemax(vcount)<240)
    break; %速度太快 终止循环
end
if(time150(vcount)>120|time217(vcount)>90|timemax(vcount)>250)
    v=v+5/60; %速度太慢 加大步长
    continue;
end

for g=1:length(Result) %计算面积

```



```

        if(Result(g)>217)
            s(vcount)=s(vcount)+0.5*((Result(g)+Result(g+1))/2-217);
        end
    end

    if(vcount==1)
        mins=s(1);
    elseif(s(vcount)<mins)        %记录最小值对应数据
        mins=s(vcount);
        minT15=T15;minT89=T89;minv=v*60;
    end
    vcount=vcount+1;
    end
end
end
% end
plot(TIME,TR(1,:), 'r')

```

(六) 制程限定下双目标组合优化代码

```

clear;%清除工作区变量
clc;%清屏
close all;%关闭所有图形窗口
count=0;
%定义炉内相关参数
gap=5;%间隙宽度
zone=30.5;%小温区长度
furnace=25;%炉前区域
appendix=xlsread("附件.xlsx");
T1011=25;%各个小温区温度
s=zeros(1,100);
vcount=1;
for T15=165:5:185
    for T89=245:5:265
        % for T6=185:2:205
        %     for T7=225:2:245
            for v=60/60:3/60:90/60
                T6=185; T7=225;
                %     v=70/60;
                %     T15=175;
                %     T15=174;T89=265;

%定义加热过程相关参数
TR=[];TIME=[];
h=0.15/1000;%锡厚度

```

```

allt=435.5/v; %运行总时间
r=0.3/1000; %圆柱半径
n=ceil(allt*100); %把时间分成n份
dt=allt/n; %时间步长分割，一份为1/100.
m=100; %把半径分成n份
dr=r/m; %半径步长分割
TR=zeros(m,n);
n0=0;
aup=1e-8;%锡升温扩散率系数
adown=1e-9; %锡降温扩散率系数
k1=0.0065; %96cm内导热系数
k2=0.019; %180cm内导热系数
k3=0.022; %211cm内导热系数
k4=0.029; %242cm内导热系数
k5=0.021; %304cm内导热系数
k6=0.015; %410.5cm内降温的导热系数
k7=0.008; %435.5cm内降温的导热系数

for k0=0:dt:allt %稳定温度分布计算
    i=k0*v;
    n0=n0+1;M(n0)=i;
    if(i<furnace)
        T(n0)=(T15-25)*i/furnace+25;
    elseif(i<furnace+zone*5+gap*4)
        T(n0)=T15;
    elseif (i<furnace+zone*5+gap*5)
        T(n0)=T15+(i-(furnace+zone*5+gap*4))*(T6-T15)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*6+gap*5)
        T(n0)=T6;
    elseif(i<furnace+zone*6+gap*6)
        T(n0)=T6+(i-(furnace+zone*6+gap*5))*(T7-T6)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*7+gap*6)
        T(n0)=T7;
    elseif(i<furnace+zone*7+gap*7)
        T(n0)=T7+(i-(furnace+zone*7+gap*6))*(T89-T7)/gap;
    elseif(i<furnace+zone*9+gap*8)
        T(n0)=T89;
    elseif(i<furnace+zone*9+gap*9)
        T(n0)=T89+(i-(furnace+zone*9+gap*8))*(T1011-T89)/(gap);
    else
        T(n0)=T1011;
    end
end
end

```

```

%初值设定
for i=1:m
    TR(i,1)=25;
end
TR(1,2)=25;

%构造右端项
b=zeros(m,1);
for j=1:n
    if(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
        a=aup;
    else
        a=adown;
    end
    a1=a*dt/dr;
    a2=a*dt/(dr*dr);
    b(1,1)=TR(1,j)+a2*TR(1,j);
    for i=2:m-1
        b(i,1)=TR(i,j);
    end
    if(j*v*allt/n<furnace)
        k=k1;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*5+gap*5)
        k=k2;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*6+gap*6)
        k=k3;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*7+gap*7)
        k=k4;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*9+gap*8)
        k=k5;
    elseif(j*v*allt/n<furnace+zone*11+gap*10)
        k=k6;
    else
        k=k7;
    end

    b(m,1)=TR(m,j)+k*dt*T(j);
    A(1,1)=a1/r+2*a2+1;
    A(1,2)=-(a1/r+a2);
    for i=2:m-1
        A(i,i-1)=-a2;
        A(i,i)=a1/r+2*a2+1;
        A(i,i+1)=-(a1/r+a2);
    end
end

```

```

A(m, m)=(1+k*dt);
diaga=diag(A, -1);
diagb=diag(A, 0);
diagc=diag(A, 1);
TR(:, j+1)=tridiagsolver(diaga, diagb, diagc, b);
end

Result=[]; dT=[];
for g=1:n
    if(mod(g, 50)==0)
        Result(g/50, 1)=TR(1, g);
    end
end
for ct=1:length(Result)-1
    dT(ct)=(Result(ct+1)-Result(ct))*2; %斜率
end
timedT(vcount)=sum(sum(dT>3&dT<-3));
time150(vcount)=sum(sum(Result>150&Result<170))/2;
time217(vcount)=sum(sum(Result>217))/2;
timemax(vcount)=max(Result);

if(time150(vcount)<60|time217(vcount)<40|timemax(vcount)<240)
    break; %速度太快 终止循环
end
if(time150(vcount)>120|time217(vcount)>90|timemax(vcount)>250)
    v=v+5/60; %速度太慢 加大步长
    continue;
end

for g=1:length(Result) %计算面积
    if(Result(g)>217)
        s(vcount)=s(vcount)+0.5*((Result(g)+Result(g+1))/2-217);
    end
end

maxcount=find(Result==timemax(vcount));
g=1; dif=[];
while(1)
    if(Result(maxcount-g)>217|Result(maxcount+g)>217)
        dif(g)=Result(maxcount-g)-Result(maxcount+g);
        g=g+1;
    else
        break;
    end
end

```

```

        end
    end

    stddif(vcount)=std(dif); %求矩阵均方差衡量“对称”指标
    if(vcount==1)
        mindif=stddif(1);
    elseif(stddif(vcount)<mindif) %记录最小值对应数据
        mindif=stddif(vcount);
        minT15=T15;minT89=T89;minv=v*60;
    end

    vcount=vcount+1;
    end
% end
end
end
% plot(TIME, TR(1,:), 'r')

```