

高精度光学抛物面面形参数计算新方法

徐广州,阮 萍

(中国科学院西安光学精密机械研究所,陕西 西安 710119)

摘 要: 鉴于当前光学抛物面面形参数计算模型的复杂性,为解决直接基于抛物面的有限元分析数据,获取高精度抛物面面形参数的计算问题,提出了一种新的光学抛物面面形参数计算方法。首先,提出了光学抛物面有限元离散误差的概念,并对其消除技术进行了研究,这也是高精度算法的关键数据处理环节;其次,采用刚体位移数据处理算法分离了抛物面面形的刚体位移与面形畸变位移;最后,采用最优化设计算法获取了抛物面面形均方根等参数计算所需的基础数据。在对抛物面面形参数计算方法研究的基础上,讨论了其算法实现,并对算法程序的正确性进行了校验。校验结果表明:高精度抛物面面形参数计算方法计算精度高,算法校验误差在 6% 左右,该算法精度能够满足工程需求;为外部热力载荷作用下,光学面形参数的高精度计算提供了新的技术参考。

关键词: 抛物面; 面形参数; 离散误差; 刚体位移; 有限元分析

中图分类号: TH74 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201948.0617001

New algorithm of surface parameter for optical parabolic surface with high-precision

Xu Guangzhou, Ruan Ping

(Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710119, China)

Abstract: Due to the complexity of calculating model for the current optical parabolic surface and to acquire the high-precision surface based on the data of finite element analysis for parabolic surface, a new high-precision algorithm of surface parameter for optical parabolic surface was proposed. Firstly, the discrete error of the optical parabolic surface was proposed, and elimination technique of discrete error was researched, which was also the crucial step for the data preprocessing of the surface parameter calculation. Secondly, the rigid body displacement and surface distortion displacement were distinguished with the data processing algorithm based on rigid body displacement. Lastly, the basic data to obtain parameter, just as the root mean square, was got using the optimal design algorithm. The algorithm realization of the high-precision parabolic surface parameter was discussed and the validity check of the algorithm was performed as well. The result of validity check demonstrated: the high-precision algorithm of parabolic surface parameter is higher, and the check error is about 6%. The precision of new algorithm can satisfy the engineering requirement, and it also provides a new technical reference for the high precision calculation of optical surface parameter under the external thermal load.

Key words: parabolic surface; surface parameter; discrete error; rigid body displacement; finite element analysis

收稿日期:2019-01-10; 修订日期:2019-02-20

基金项目:中国科学院“西部之光”人才培养引进计划(XAB2017A10)

作者简介:徐广州(1980-),男,副研究员,博士,主要从事光学有效载荷光机集成仿真技术方面的研究。Email: xgz@opt.ac.cn

0 引言

光学抛物面被广泛应用于空间相机等光学遥感载荷的光学设计中。在外部热力载荷作用下,抛物面面形将产生变化,从而对抛物面自身及整个光学系统性能产生影响,抛物面面形参数的高精度计算在光学遥感载荷设计及性能评估中占有重要作用;同时,在光学面形的点云数据重构等领域也有重要应用^[1]。

热力载荷作用下,抛物面面形变化分析通常基于有限元方法进行,而抛物面在进行有限元网格离散时,会引入有限元离散误差,导致抛物面面形参数计算精度不高,甚至错误的面形参数计算结果,此时需要对抛物面有限元离散误差及其消除方法进行研究,以提高抛物面面形参数计算精度。此外,目前主要存在三种典型的抛物面面形参数计算方法:一种为马增祥等提出的基于刚体位移的计算方法^[2];第二种为成效军等提出的基于二次曲面方程和抛物面限制条件的计算方法^[3];第三种为程景全等提出的基于法向偏差计算方法^[4]。上述算法在求解抛物面的位移及焦距参数时,均基于同一数学模型求解抛物面参数变化,而导致计算模型求解算法的复杂度提高。尽管采用流行的光机集成仿真技术方法也可评估抛物面面形变化,但有时此过程不高效且繁琐^[5-6]。

直接基于抛物面的有限元分析数据,高效地获取高精度抛物面面形变化参数数据,仍然是非常有吸引力的研究课题,且抛物面面形变化表征参数的选择也是有意义的讨论内容。为了精确评估外载荷对抛物面面形参数的影响,解决抛物面面形参数的高效与高精度计算问题,提出了一种新的高精度光学抛物面面形参数计算方法。

1 高精度光学抛物面面形参数计算方法

对高精度光学抛物面面形参数计算方法研究,首先给出了抛物面面形参数的离散误差的概念,对离散误差的消除技术进行了研究,这也是高精度抛物面面形参数计算的关键数据处理环节。其次,从面形刚体位移与面形畸变位移角度出发,解析抛物面有限元位移数据,得到抛物面面形的畸变位移;基于

数据拟合算法,从仅含抛物面畸变位移中,拟合得到面形焦距变化参数。最后,基于拟合得到的抛物面方程,采用最优化方法得到的面形的法向偏差,并计算面形的 PV 与 RMS 值。抛物面面形表征参数的求解并不是孤立的数学过程,其算法过程也是相互联系的。

对于抛物面面形变化参数的选择,除传统的抛物面面形 PV、RMS 及刚体位移表征参数外,抛物面焦距也是其重要参数,尤其是直接基于抛物面方程描述抛物面时,焦距参数是唯一需要被求解的参数;文中选择了上述参数作为抛物面面形变化的表征参数。

1.1 光学抛物面面形离散误差及消除方法

对于高精度的有限元分析,离散节点与理想几何体的吻合度是一个关键的问题。在实际进行光学抛物面面形参数的数据处理过程中,发现了抛物面的离散误差存在,并给出了抛物面离散误差的概念。光学抛物面面形离散误差可定义为:光学抛物面经有限元离散后,离散节点偏离原理论抛物面而引入的节点位置误差。

基于离散误差的定义,光学抛物面有限元离散误差的消除思想为:迫使面形离散节点重新回到理论抛物面上,即将代表离散节点的“□”使用理论抛物面上的“△”替代,如图 1 所示。

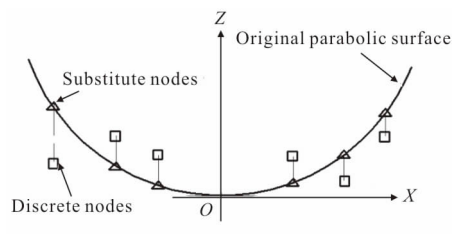


图 1 光学抛物面面形离散误差消除图

Fig.1 Elimination of discrete error for optical parabolic surface

在光学抛物面离散误差的消除方法中,有两种描述光学抛物面的数学方程可以选择:一种为基于离散节点数据的面形拟合方程;其二为光学面形的矢高方程。实践证明:后者可以快速、高效、准确的消除离散误差;所以,选择了抛物面的矢高方程来消除光学抛物面的离散误差。光学抛物面离散误差消除方法原理如下。

光学抛物面矢高方程为:

$$Z = \frac{cR^2}{1 + \sqrt{1 - (1+K)c^2 R^2}} \quad (1)$$

式中: c 为曲率半径; R 为面形上任一点到光轴的距离; K 为 Conic 常数, 对于抛物面 $K=-1$ 。

光学抛物面经有限元离散后为节点组成的点集, 记为 $P = \{p_i(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}) | i=1, 2, \dots, n\}$, n 为离散节点数目。

假设抛物面面形顶点坐标为 $p_v(x_v, y_v, z_v)$, 则转换到与矢高方程相同的顶点坐标系下节点点集记为:

$$P_T = \{p_i'(x_{i0} - x_v, y_{i0} - y_v, z_{i0} - z_v) | i=1, 2, \dots, n\}$$

若 Z 轴为抛物面光轴, 点集 P_T 中任意节点的半径 R_i 可以通过 x 与 y 分量计算得到:

$$R_i = \sqrt{(x_{i0} - x_v)^2 + (y_{i0} - y_v)^2}$$

把 R_i 代入抛物面矢高方程得到面形矢高 z_n , 并得到消除离散误差后的新的点集:

$$P_T^e = \{p_i^e(x_{i0} - x_v, y_{i0} - y_v, z_n) | i=1, 2, \dots, n\}$$

使用点集 P_T^e 替代点集 P_T 进行后续光学面形参数的计算, 便可消除抛物面面形的有限元离散误差。此外, 由于节点 p_i^e 与其对应离散误差消除前节点 p_i' 的距离足够小, 根据有限元节点位置特性, 上述替换过程不会在面形参数计算时导入新的计算误差。

1.2 抛物面面形刚体与畸变位移

抛物面面形有限元分析得到的面形位移数据包括了刚体位移与面形畸变。只有面形的刚体位移消除后, 才能够得到仅包括面形畸变引起的面形变化计算参数。需要注意的是: 此处的面形刚体位移不同于直接基于有限元数值计算得到的节点位移。

对于面形的刚体位移与畸变位移的计算, 可以采用基于齐次坐标变换的算法进行^[7-9]。通过齐次坐标变换矩阵建立变形前、后光学面形节点坐标间的关系。

刚体位移的求解过程为: 设 $(x_i, y_i, z_i)^T$ 为光学面形原始节点坐标, $(x_i', y_i', z_i')^T$ 为光学面形变形后坐标, $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ 为仅由面形畸变引起的光学面形上各节点的位移。刚体位移的平移与旋转参量记为 $(a, b, c, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$, 即光学面形由坐标系 $O-XYZ$ 变换到新的坐标位置 $O'-X'Y'Z'$, 但光学面形未有变化。其中, (a, b, c) 为光学面形沿各轴的平移参量,

$(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ 为光学面形绕坐标轴的旋转参量, 如图 2 所示。

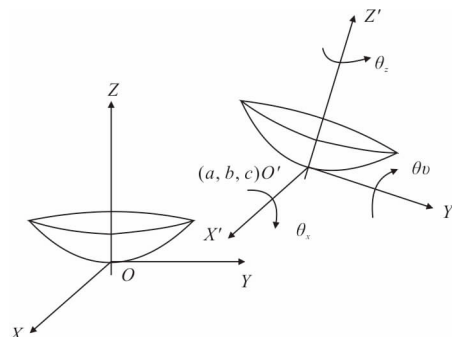


图 2 刚体位移的坐标变换图

Fig.2 Coordinates transformation of rigid body displacement

齐次坐标系下, 变形前、后光学面形平移变换矩阵为:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

光学面形绕坐标轴的旋转变换矩阵为:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

由平移矩阵与旋转矩阵组成光学面形的齐次坐标变换矩阵:

$$A = T \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z$$

由于转动量为小量, 去掉 A 中旋转角度参量相乘的高阶项, 齐次坐标变换矩阵可简化为:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y & a \\ \theta_z & 1 & -\theta_x & b \\ -\theta_y & \theta_x & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

变形前和变形后光学面形各节点齐次坐标有如下关系:

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \\ 1 \end{bmatrix} = A' \times \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

此时亦可以推出节点面形畸变位移:

$$\begin{cases} \Delta x_i = x_i' - x_i + \theta_x y_i - \theta_y z_i - a \\ \Delta y_i = y_i' - y_i + \theta_x z_i - \theta_z x_i - b \\ \Delta z_i = z_i' - z_i + \theta_y x_i - \theta_x y_i - c \end{cases} \quad (8)$$

由公式(8)可以清楚的看到,节点面形畸变位移不等于有限元计算时面形节点位移,而是与面形刚体位移相关的数据;若仅仅使用面形节点位移求解面形参数时,将引入刚体位移误差。

为求解刚体位移参数,构造目标函数:

$$Q(a, b, c, \theta_x, \theta_y, \theta_z) = \sum_{i=1}^n (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2) \quad (9)$$

使得经过刚体位移后的光学面形与实际变形后的光学面形最为接近,即 Q 最小。

根据极值条件有:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial \theta_y} = 0, \frac{\partial Q}{\partial \theta_z} = 0, \frac{\partial Q}{\partial a} = 0, \frac{\partial Q}{\partial b} = 0, \frac{\partial Q}{\partial c} = 0 \quad (10)$$

一个好的特点是转换完成后对应的方程组为线性方程组,这一点非常有利于刚体位移的计算。刚体位移消除后,得到每个抛物面节点仅包含面形畸变位移点集:

$$Pd_T^e = \{pd_i(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i) | i=1, 2, \dots, n\}$$

1.3 抛物面焦距参数拟合

利用抛物面矢高方程可以精确的描述抛物面,但是由于光学矢高方程表达形式的复杂性,基于离散数据,拟合得到新的矢高方程将是复杂的数学过程,而且矢高方程中也不包含有抛物面焦距参数。经过深入思考与直觉灵感,想到为什么不采用标准的抛物面方程来表达抛物面呢,并且其表达形式也比较简洁。基于这一想法,尝试使用标准的抛物面方程形式来描述拟合后的抛物面。标准的抛物面方程形式为:

$$x^2 + y^2 = 4f \cdot z \quad (11)$$

采用抛物面标准方程的优点在于其仅包含一个焦距参数,该参数也便于使用离散数据拟合得到。结合点集 P_T^e 与 Pd_T^e 中数据,通过函数 G 拟合得到面形的焦距参数。

$$G = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_i^2 + y_i^2)}{4f - z_i} \right]^2 \quad (12)$$

利用公式(12)拟合求得焦距 f 后,也得到了新抛物面的拟合标准方程。

1.4 抛物面面形均方根参数

面形均方根参数可以基于离散点到拟合抛物面的距离集合参数获取,尽管抛物面不同于球面与平面,但其面形均方根参数求解方法确是一致的。如图3所示,面形的均方根参数记为 δd ,法向距离点集记为:

$$\delta d = \{\delta d_i | i=1, 2, \dots, n\}$$

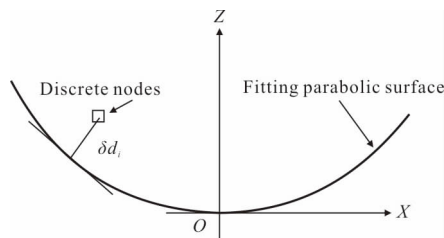


图 3 离散节点与拟合抛物面距离

Fig.3 Distance between discrete nodes and fitting parabolic surface

参考文献 [2-3] 中也提出了抛物面法向距离的计算方法,但上述文献中的法向距离计算数学模型都较为复杂。实际上法向距离 δd_i 的计算可以归结为抛物面与其外部节点的距离计算问题,而该距离 δd_i 的求解可以归结为带约束条件的优化设计问题,优化设计数学模型如下所示:

$$\begin{cases} F_{\text{opt}} = \sqrt{(x_i - m)^2 + (y_i - n)^2 + (z_i - p)^2} \\ m^2 + n^2 + f_c \cdot z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中: $f_c = -4f$, $N(x_i, y_i, z_i)$ 为已知的抛物面外部离散节点; $N'(m, n, p)$ 为 N 在抛物面上的最小距离点。

根据带约束条件的优化设计问题的计算方法,法向距离优化设计数学模型可以转换为拉格朗日函数 L 的极值问题:

$$L=F_{\text{opt}}-\lambda \cdot\left(m^2+n^2+f_c \cdot z\right) \quad (14)$$

公式(14)的极值条件为:

$$\frac{\partial L}{\partial m}=0, \frac{\partial L}{\partial n}=0, \frac{\partial L}{\partial p}=0, \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \quad (15)$$

通过求解上述方程, 就可以得到离散点 N 对应的最小距离点 N' 的坐标, 然后面形的抛物面面形 PV 与 RMS 便可由公式(16)计算得到。

$$\left\{\begin{array}{l} \text{PV}=\max (\delta d)-\min (\delta d) \\ \text{RMS}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n\left(\delta d_i-\overline{\delta d}\right)^2}{n}} \end{array}\right. \quad (16)$$

2 算法流程图

在对高精度光学抛物面面形参数计算方法研究的基础上, 开发了通用高精度光学抛物面面形参数计算程序。程序算法流程图如图 4 所示。

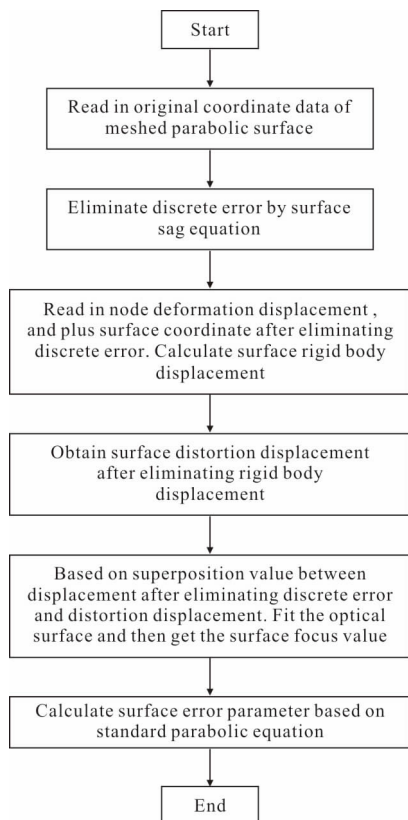


图 4 高精度抛物面面形参数算法流程图

Fig.4 Flow chart of high-precision parabolic surface algorithm

与传统的抛物面光学面形参数处理程序相比, 离散误差消除算法模块为新增计算模块, 以消除抛物面面形离散误差, 提高光学抛物面面形参数计算

精度。另外, 抛物面面形参数计算是基于离散误差消除后的基础数据进行, 通过计算流程图可以清楚的看出: 面形刚体位移、焦距等面形参数的计算是相互关联的, 这也体现了抛物面数学模型中各模块相互独立性和关联性。

3 算法正确性校验

高精度抛物面面形参数计算方法, 从数学模型提出, 到相应计算方法, 然后是算法的实现都是新的数学过程。在算法程序实现后, 需要对数学模型与算法的正确性进行评估与测试, 才能应用于实际工程问题的解决中, 并确保程序计算精度能够满足工程需求。

将通过以下两种技术方法对同一抛物面面形参数进行计算, 并分析计算结果, 来验证高精度抛物面面形参数计算方法正确性。

(1) 采用高精度抛物面面形参数计算方法获取面形 PV 与 RMS 值;

(2) 基于光机集成仿真技术, 获取面形的 Zernike 多项式描述后, 并获取的面形波前 PV 与 RMS 值。

图 5 为某光学抛物面主镜面形的有限元分析结果。

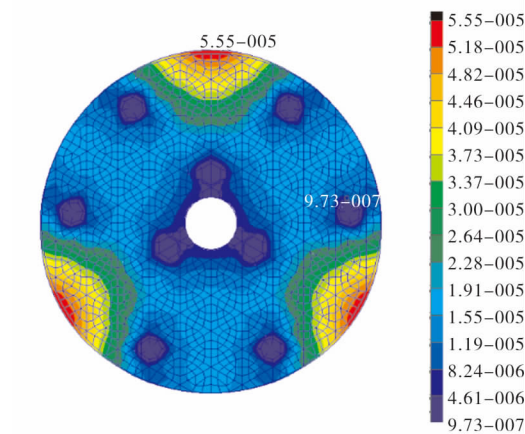


图 5 测试光学抛物面有限元计算结果

Fig.5 Finite element calculation results of test optical parabolic surface

采用光学抛物面面形参数高精度算法, 获得的面形焦距 f , PV 值: PV_Para, RMS 值: RMS_Para, 如图 6 所示。

其中, PV_Para=4.593 727e-5 mm, RMS_Para=1.011 87e-5 mm。



图 6 高精度算法面形参数计算结果

Fig.6 Calculation results of high-precision algorithm for surface parameter

基于光机集成仿真技术方法,获取面形 Zernike 多项式描述,通过 ZEMAX 软件得到的抛物面波前变化如图 7 所示。

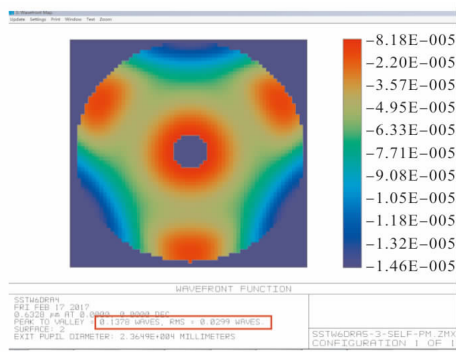


图 7 光机集成仿真方法面形波前计算结果

Fig.7 Calculation results of surface wavefront by opto-mechanical integrated simulation method

此时,测试抛物面面形参数 PV 值与 RMS 值计算结果为:PV=0.5×0.137 8 WAVES=4.36e-5 mm; RMS=0.5×0.029 9 WAVES=0.946e-5 mm。WAVES 表示波长,其值为 632.8 nm。

采用两种分析方法对同一抛物面模型面形进行处理得到的 PV 与 RMS 值的相对误差 $\Delta PV\%=5\%$; $\Delta RMS\%=6.5\%$ 。

通过数据分析,可以看出两种技术方法得到的面形 PV 及 RMS 值的相对误差约在 6%左右,相对误差较小,精度能够满足工程需求,也验证了高精度抛物面计算程序的正确性。

对于测试模型,若不消除抛物面有限元离散误差,基于高精度面形参数计算程序得到的抛物面面形参数计算结果如图 8 所示。

显然,离散误差消除前的面形参数计算结果与离散误差消除后面形参数计算结果差异较大,若不消除离散误差,本测试模型中,得到了错误的面形参

数计算结果;也进一步说明了基于离散误差消除技术的抛物面面形参数计算方法正确性。目前,此高精度算法已在多个项目的仿真分析中进行了应用,并取得了良好的结果。



图 8 不消除离散误差得到的面形参数结果

Fig.8 Surface parameter calculation results without eliminating discrete error

图中,PV_Para=1.384 557e-3 mm,RMS_Para=2.983 51e-4 mm。

4 结 论

文中直接基于抛物面面形变化有限元计算数据,提出了一种新的高精度抛物面面形参数计算方法,获取了高精度的抛物面面形变化参数。算法中首次提出了抛物面有限元离散误差的概念,且对离散误差的消除方法进行了研究,提高了抛物面面形参数的计算精度。新的抛物面面形参数计算方法,简化了抛物面面形参数计算数学模型,将多个参数融合的单一数学模型,转换为多个独立的数学过程,降低了抛物面参数数学模型的复杂度。算法思想同样适用于诸如球面、双曲面等其他光学面形参数的计算,为外部载荷作用下,光学面形参数的计算提供了新的算法参考。算法的正确性校验结果也表明新的抛物面面形参数计算方法精度高,能够满足实际工程计算精度需求。

参考文献:

- [1] Xu Guangzhou, Ruan Ping. Point cloud boundary detection in preprocessor of optical-mechanical integrated simulation[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2016, 45 (4): 0428001. (in Chinese)
- [2] Ma Zengxiang, Yang Dehua, Wang Shuqing, et al. Antenna reflector surface fitting algorithm based on rigid body displacement principle [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(18): 29-34. (in Chinese)
- [3] Cheng Xiaojun, Zhou Shi. To fit paraboloid antenna

- equation with general quadratic surface equation and paraboloid restrictions [J]. *Railway Investigation and Surveying*, 2008, 34(1): 4–8.
- [4] Cheng Jingquan. Principles of Astronomical Telescope Design[M]. US: Springer Press, 2009.
- [5] Xu Guangzhou, Ruan Ping, Li Ting, et al. Surface simulation of tilt mirror based on contact and integrated simulation method[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(5): 1316–1322. (in Chinese)
- [6] Banyal R K, Ravindra B, Chatterjee S. Opto-thermal analysis of a lightweighted mirror for solar telescope[J]. *Optics Express*, 2013, 21(6): 7065–7081.
- [7] Zhang Ying, Ding Zhenmin, Zhao Huijie, et al. Rigid-body displacement separation of optics in optical-structural-thermal integrated analysis [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(10): 2763–2767. (in Chinese)
- [8] Zhang Junqiang, Dong Deyi, Wu Qingwen, et al. Treatment of surface figure error and rigid body motion for mirror/lens in optical remote sensor [J]. *Chinese Journal of Science Instrument*, 2011, 32(6): 242–247. (in Chinese)