ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

М.Х.Дулати атындағы Тараз Мемлекеттік университеті

БЕКІТЕМІН
«Қолданбалы информатика және бағдарламалау» кафедрасының меңгерушісі ______________
___________ ______________
/қолы/ /аты-жөні/
«_____»________________20___ж.

«ҚОЛДАНБАЛЫ ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСТЕРІ»
пәні бойынша

Факультет «Ақпараттық технологиялар, автоматика және телекоммуникациялар»

Мамандық 6В06113 – -«Бағдарламалау және бағдарламалық қамтамасыздандыруды әзірлеу», 6В06114 – «Информатика және ақпараттық-коммуникациялық технологиялар»

Кредит саны 5

ТАРАЗ 2021

Дәріс 1. Тиімдеу әдістері және операцияларды зерттеу пәні
Тиімдеу теориясының негізгі ұғымы-локалды және глобалды оптимум, шектеулі тиімдеу, шектеулер. Модель классификациясы және тиімдеу әдістері. Математикалық модельдердің операцияларын зерттеу. Операциялардың зерттеу әдістемелігі.

Модель классификациясы және тиімдеу әдістері. Математикалық моделдердің операцияларын зерттеу. Операциялардың зерттеу әдістемелігі.

«Операцияларды зерттеу» соңғы жылдары жас ғылыми пән бола отыра көптеген жоғары оқу орындарының бағдарламаларына енуде. Шындығында адам өмір сүріп отырған қоғамда барлық игіліктерді толық пайдалану және игеру үшін көптеген есептердің шешімін табу қажет болады. Атап айтқанда-өндірісті қамтамасыз етуді ұйымдастыру, көлікті пайдалану, кадрларды орналастыру, өндіріс қорларын тиімді бөлу, тұрмыстық қызмет көрсету, денсаулық сақтау, байланыс, есептеу техникалары салаларында қызмет көрсетуде жалпы белгілері ұқсас зерттеу есептерді жүргізілуі мүмкін. Мұндай есептерді шешу ортақ атпен «Операцияларды зерттеу есептері» деп біріктіріледі, олардың ұқсас бір мақсатқа бағытталған шаралары (әрекет жүйесі) бірдей әдістермен шешу мүмкіндігіне ие болады. Есептерді шешудің көптеген варианттары болуы мүмкін, сол вариант шешімдерін өзара салыстыра отырып ең тиімдісін таңдау үшін математикалық есептеулер жүргізуді ұйымдастыра білу қажет. Қандай жағдайда да шешім қабылдайтын адамдарға көмек беру, талдау жасай отырып, бір вариантты қабылдау. Сондықтан бұл оқу құралы жоғары оқу орындарында оқитын студенттерге «операцияларды зерттеу» пәнінен көмекші құрал ретінде ұсынылады. Қазіргі заман ғылыми-техникалық дамудың шарықтаған кезеңі, шын мәнінде компьютер ғасыры болғалы отыр. Оның себептері өте көп. Күрделі техникалардың жылдам дамуы және өндіріске енуі, дербес компьютерлер мен есептеу техникаларының мүмкіндіктерінің артуы, басқарудың автоматтандырылған жүйелерінің енуі өмірдегі барлық облысты қамтып отыр. Мұндай жағдайда ғылымнан осы процестерді оптималды басқару ұсыныстары талап етіледі. Сондықтан тәжрибедегі қажеттілік өмірге арнайы ғылыми әдістердің жиынтығын «Операцияларды зерттеу» деген атпен алып келді. Бұл терминнің мағынасын адам қызыметінің мақсатқа бағытталған облыстарда тиімді шешімін табу үшін арнайы сандық математиалық әдістерді табу деп түсінеміз.

«Шешім» дегеніміз не? Белгілі бір мақсатқа жету үшін әр түрлі шаралар қабылданады. Оны ұйымдастырушы адамның әр түрлі мүмкіндіктері бар делік, және оны жүзеге асыру үшінр әр түрлі техниканы қолданып немесе қорларды т.с.с., яғни «шешім» дегеніміз мүмкіндіктер қатарынан қандай да бір таңдау.

Шешім әр түрлі болуы мүмкін: жақсы немесе жаман, тиімді немесе тиімсіз, еркін немесе негізделген.

Шешім қабылдау қажеттілігі адам қоғамы пайда болудан басталды. Мысалы алғашқы қауымдық құрылыста аңды қалай аулау керек, қай жерден аулау керек, аңшыларды қалай орналастыру керек, немесе қарулану керек? Күнделікті өмірде де бір әр қадам басқан сайын шешім қабылдаймыз.

Ал сонда шешім қабылдаудың барлығы операцияны зерттеу ме? Мүлде олай емес. Операцияны зерттеу шешім қабылдауға математикалық аппараттарды қолданған кезде басталады. Тәжрибеде кейбір шешімдер арнайы математикалық аппаратсыз да шығарылады, олар көбінесе өмір сүру процесінде болып жатады.

Бірақ шешім қабылдауда жауапкершілікті қажет ететін жағдайлар көп болады. Мысалы бір жаңа қалада кәсіпорындар желісінің орналасуына және тұрғындар тұратын массивтерге сәйкес қоғамдық көлік жүргізілуін ұйымдастырсын. Оған келесі шешімдер қабылдансын: қандай көлік құралын, қай бағытта жүргізу қажет? Қайсы пункттерге аялдама жасау керек? Тәулік мезгілдеріне сәйкес көлік жиілігін қалай өзгерту керек?

Бұл шешімдерден көптеген нәрселер тәуелді. Оның кейбірі қате таңдалатын болса, онда қаланың іскерлік өміріне әсер етуді мүмкін. Оған бұрынғы тәжрибеге сүйеніп дұрыс шешім қабылдауға болады. Ең дұрысы сол шешімдердің арнайы математикалық есептеулермен бекітілуі.

Тағы бір айқын мысал қарастырайық. Жоғары масштабты шаралардың ішінде солтүстік өзендердің бір бөлігін құрғақ аймақтарға бұру керек болсын. Мұндай жағдайда «еркін» шешім қабылдауға бола ма, немесе арнайы математикалық есептеулерден кейін, шешім қабылдау керек пе?

Міне осындай кездері операцияны зерттеудің қажеттілігі туады, яғни күрделі қатерлерден сақтандырып, уақыт, күш және материал қорларын үнемдеуге мүмкіндік береді.

Дегенмен алғаш рет «Операцияны зерттеу» термині екінші дүниежүзілік соғыс жылдарында кейбір елдерде (Америка, Англия) арнайы ғылыми топтар құру арқылы соғыс әрекеттерін жүргізу үшін жобалар жасау кезінде енгізді. Бұл шешімдер әр түрлі объектілерге күштер мен қаруларды бөлу үшін қолданылды.

Сондай-ақ соңғы жылдары операцияны зерттеу облысы кеңейді: өнеркәсіп, ауыл шаруашылығы, құрылыс, сауда, тұрмыстық қызымет көрсету, көлік, байланыс, денсаулық сақтау, табиғатты қорғау т.б. Қазіргі кезде математикалық моделдер мен операцияны зерттеу әдістерінқолданбайтын облысты табу қиын.

Осы пәннің ерекшелігін көрсету үшін кейбір есептерді қарастырайық.

1. **Кәсіпорынды қормен жабдықтау жоспары**. Белгілі бір шикізат түрлері орналасқан базалар мен оларды қолданатын кәсіпорындар белгілі болсын. Базалардан шикізаттар әр түрлі жолдармен (темір жол, су, автомабиль, әуе), тарифтері әр түрлі жеткізілсін. Сонда шикізатты тасымалдау шығындары минимал болатындай кәсіпорынды шикізатпен қамтамасыз ету жоспарын құру керек.
2. **Темір жол магистралінің бөлігін жүргізу**. Темір жол магистралінің белгілі бір бөлігін салу керек делік. Оған қажетті: құрылыс машиналары, жөндеу шеберханалары, жүк автомабильдері, адамдар т.б. бар. Жұмысты ең аз мерзімде бітіру үшін құрылысты жоспарлау қажет (жұмыстарды кезекке қойып, адам және машиналарды үлестіру қажет).
3. **Мерзімдік тауарларды сату**. Мерзімдік тауарларды сатып арнайы сауда желілері бар болсын. Сату нәтижесінде максималды экономиканың тиімділік болатындай етіп тауар қорлары мен сатушыларды орналастыру қажет.
4. **Медициналық қызмет көрсету**. Белгілі бір аймақта қатерлі ауру шықты делік. Ауырғандарды анықтау үшін аймақ тұрғындарын медициналық зерттеуден өткізу керек. Оған материал қорлары, құрал-жабдық, медицина қызметкерлері бөлінсін. Бұл кезде ауырғандардың максимал санын анықтайтындай етіп медпункттерді орналастыру жоспарын табу қажет.
5. **Кітапханада қызмет көрсету**. Бір үлкен кітапханада абоненттерден сураулар түссін. Кітапхана қорында жие қолданылатын, сирек қлданылатын және қолданылмайтын кітаптар болсын.

Кітаптарды сөреге қою мүмкіндіктері сұрауын максимал түрде қанағаттандыратын қызмет көрсету жүйесін анықтау керек.

Осы мысалдарды қарастыратын болсақ, қолданылу облысы әр түрлі және белгілі мақсатқа бағытталған. Кейбір шарттар берілген. Сонда берілген шарттарға сәйкес қабылданған шешімдер тиімді болатындай іс-шаралары жүргізу қажет.

Ондай іс-шараларды жүргізу үшін операцияны зерттеуге негізделіп, алдын-ала есептеулер жүргізілуі тиіс.

Операцияны зерттеудің негізгі ұғымдары мен принциптері.

Операция дегеніміз бір мақсатты жүзеге асыру үшін бағытталған іс-шаралар (әрекеттер жүйесі).

Операция қандай болмасын басқарылады, яғни оның ұйымдастыру параметрін табу өзімізге байланысты.

Кейбір жағдайларда зертеу нәтижесінде қатаң түрде бір ғана оптимал табылатын облыс ерекшеленді, және соның ішінде таңдалады.

Шешімге енетін параметрлер жиыны шешім элементтері деп аталады. Шешім элементтері әр түрлі сандар, векторлар, функциялар болуы мүмкін.

Егер A_1, A_2, ..., A_m жабдықтаушылардан B_1, B_2, ..., B_n тұтынушыларға біртектес жүкті тасымалдау жоспары құрылатын болса, онда X_{ij} шешім элементтері болып табылады және A_i жабдықтаушыдан B_j – тұтынушыға жөнелтілген жүк мөлшерін көрсетеді.

X_{11}, X_{12},...,X_{1n}, X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n} ,…, X_{m1}, X_{m2}, …, X_{mn} сандарының жиыны шешімді құрайды.

Зерттеудің қарапайым есептерінде элементтер саны аса көп болмайды. Бірақ тәжрибелік мәні бар көптеген есептерде элементтер саны өте үлкен екенін көруге болады. Қысқаша түрде элементтер жиынын Х деп белгілейміз және Х шешімі деп атаймыз.

Операцияны зерттеуде шешім элементтерінен басқа берілген шарттар болады: Мысалы материалдар, құралдар, еңбек ресурстары, шикізат т.б. және шешімге қойылатын шектеулер. Олардың барлығы біріктіріліп «мүмкін шешімдер жиынын» құрайды. Бұл жиынды Х деп белгілеген, оған енетін Х шешімдерді Х $\in$ Х деп жазамыз (Х элементі Х жиынына енеді). Жалпы, мұнда мүмкін шешімдер арасынан ең тиімдісі ізделінеді. әр түрлі шешімдерді тиімділігі бойынша салыстыру үшін сандық критерий алынуы тиіс, ол тиімділік көрсеткіші немесе «мақсат функция» деп аталады. Ол операция мақсатына бағытталды. Сондықтан W тиімділік көрсеткішін таңдау үшін өзіміз не іздейтінімізді нақты білуіміз керек. Мысалы операция нәтижесінде табыс мөлшері алынатын болса, онда ол максимум, ал тиімділік көрсеткіші шығындар болса, онда минимум табылуы тиіс және олар W $\rightarrow$ max, W $\rightarrow$ min деп жазылады.

Көптеген жағдайларда операция нәтижесіне кездейсоқ факторлар әсер етеді (ауа райы, ұсыныс пен сұраныс т.б.) Мұндай кезде тиімділік критериіне максималданатын шаманың өзі емес, ал оның орташа мәні (математикалық күтілуі) алынады.

Кейбір жағдайларда операция кездейсоқ факторларға сүйене отырып А мақсатына ұмтылады, ол кезде аралық нәтижелер қызықтырмайды. Мұндай кезде тиімділік критериіне мақсатқа жету ықтималдығы Р(А) алынады. Мысалы бір объектті жою үшін оқ атылатын болса, онда тиімділік көрсеткішіне объектті жою ықтималдығы алынады. Тиімділік көрсеткішін қате таңдау өте қауіпті, оның нәтижесінде көптеген шығындар болуы ықтимал.

Тиімділік критерин таңдау принципін көрсету үшін келесі мысалдарды қарастырайық.

1. Кәсіпорынды жабдықтау жоспары. Операция есебінің мақсаты – тасымалдауға минимал шығын жұмсай отырып шикізатпен қамтамасыз ету. Тиімділік көрсеткішін R десек, ол уақыт бірлігіндегі шикізат тасымалының жиынтық шығыны (R $\rightarrow$ min).
2. Магистрал учаскісін салу. Мұнда құрылысты неғұрлым тезірек бітіру қажет. Бұл кезде тиімділік көрсеткішіне уақытты алатын болсақ, оған кездейсоқ факторлар әсер етуі мүмкін (техниканың сынып қалуы, т.б.) Сондықтан тиімділік көрсеткішіне орташа күту уақыты алынады. $T\left(T \rightarrow \min\right)$.
3. Мерзімдік тауарларды сату. Мұндағы тиімділік көрсеткішіне П-орташа күтілетін пайданы алуға болады (П $\rightarrow$ max).
4. Жолдарды қардан тазарту. Жолдарды қардан тазартқанда экономикалық жағынан тиімді көрсеткіш уақыт бірлігінде жолға жұмсалатын шығындар R, оған жолды қорғау құрылғылары да енеді, мұнда R $\rightarrow$ min.
5. Медициналық тексеру жүргізу. Бұл кезде тиімділік көрсеткішіне инфекция жұққан Q ауру адамдардың ішінен табылған орташа пайызын алуға болады. (Q $\rightarrow$ max).
6. Кітапханада қызмет көрсету. Кітапханада абоненттерге жоғары деңгейде қызмет көрсету ережесі жазылған. Егер қызмет көрсету сапасы уақыт бойынша есептелетін болса, онда тиімділік критериіне оқырманның күтетін Т орташа уақытын алуға болады. (Т $\rightarrow$ min). Сондай-ақ тиімділік көрсеткішіне уақыт бірлігінде берілген М кітап санын да алуға болады (М $\rightarrow$ max).

Қарастырылған мысалдарда тиімділік критерин табу оңай секілді көрінеді, бірақ тәжрибе жүзінде ол әлдеқайда күрделі.

Операцияның математикалық моделі.

Зерттеудің кез-келген облысында сандық әдістерді қолдану үшін математикалық моделдер қажет. Модель құру процесінде нақты құбылыстар (біздің жағдайда - операция) міндетті түрде жеңілдетіледі, схема түріне келтіріледі және бұл схема математикалық аппарат көмегімен сипатталады. Математикалық модель зерттелген құбылыстық сипатын дәлірек көрсететін болса, онда оның нәтижесінде зерттеу пайдалы және табысты болады.

Математикалық модель құрудың жалпы тәсілі жоқ. Әрбір қарастырылатын операция жағдайына сәйкес және мақсатына бағытталып зерттеу есебіндегі анықталатын параметрлер мен факторларды сипаттайды.

Математикалық модель құру-зерттеудің ең жауапты бөлімі, оған тек математиканы білу ғана емес, модельденетін құбылыстың мәнін білу аса маңызды. Негізі «таза» математиктер модельді зерттелетін облыс мамандарымен бірігіп құрса, онда ойдағыдай сәтті модельдер алынады. Мысалы инженерлер, биологтар, медиктер математиктерден консультация алатын болса, онда ол көп пайда келтіреді.

Операцияны зерттеуде классикалық математикалық талдау бөлімдерімен қатар математиканың қазіргі заманғы жаңа білімдері: сызықтық, сызықтық емес, динамикалық программалау, ойын теориясы және статистикалық шешімдер, көпшілікке қызмет көрсету теориясы жиі қолданылады. Сонымен қатар ықтималдықтар теориясын білу де аса қажетті. Өкінішке орай инженерлер, биологтар, медиктер, химиктер арасында ықтималдықтар теориясын жақсы білетіндер кемде-кем, оған олар жоқ нәрседен ақпарат алатын «сиқырлы таяқ» ретінде қарайды.

Математикалық модель құруда қолданатын математикалық аппараттың күрделігі әр түрлі болады. Ең қарапайым түрін алгебралық теңдеулер түрінде алуға болады. Одан күрделілерін динамикалық құбылыстарды дифференциалдық теңдеулер түрінде қарастырады. Егер құбылыс кездейсоқ факторлардан тәуелді болса, онда статистикалық модельдеу (Монте-Карло) қолданылады.

Операцияны зерттеуде аналитикалық модельдермен қатар статистикалық модельдер де кеңінен қолданылады. Бұл модельдердің жетістіктері де кемшіліктері де бар. Аналитикалық модельдер көбінесе оптимал шешімдер табуда қолданылады.

Статистикалық модельдер дәлірек және факторлар саны өте көп, сондықтан оптимал шешімдерді табу қиынырақ.

Операция негіздерін зерттеу облысында аналитикалық және статистикалық моделдерді бірге қолданғанда жақсы нәтижелер береді.

Операцияны зерттеуде имитациялық моделдер де қолданады. Имитациялық моделдер міндетті түрде адамның қатысуымен жүретін процестерге қатысты, мысалы шахмат ойындарында жүрісті таңдаған соң ғана әрекет етеді, яғни белгілі бір уақыт өткенде математикалық модель іске қосылады. Келесі «шешім» тағы да жүріске байланысты. Осындай процестердің көп рет қайталану нәтижесінде адамдар дұрыс шешім қабылдауға үйренеді, ол оптимал немесе оптималға жуық болуы мүмкін. «соңғы жылдары басқару кадрларын дайындауға іскерлік ойындары» деп аталып кеңінен қолданылады.

Тақырып 1. Сызықтық бағдарламалау әдістері.

Дәріс 2. Сызықты программалау теориясы. СП есептер қойылуы. СП есептердің түрлері. СП моделдерін құрастырылуы шарттары. СП есептердің канондық және стандартты формалары, бір формадан өткел басқа. СП есеп шешімдерінің график түрінде әдісі. ЛП есептердің тән сызықтары.

Операцияны зерттеу есептері екі категорияға бөлінеді: а) тура және б) кері. Тура есептер келесі сұрақтарға жауап береді: егер берілген шартқа сәйкес x $\in$ x шешімін алатын болсақ, онда w тиімділік көрсеткіші неге тең болады?

Мұндай есептерді шығару үшін бір немесе бірнеше тиімділік көрсеткішін өрнектейтін математикалық модель құрылады.

Кері есептер келесі сұрақтарға жауап береді: w тиімділік көрсеткіші максимум мәнге айналу үшін x шешімін қалай таңдау қажет?

Шындығында, тура есептер кері есептерге қарағанда әлдеқайда оңай. Кері есептерді шығару үшін тура есептерді шығара білу шарт.

Операцияны зерттеудің кері есептерін оптималдау үшін есептің қойылуын жалпы түрде қарастырайық. Мысалы: x шешімдерін таңдай отырып, біз әсер ете алатын бір а операциясы бар делік (x – параметрлер тобы болсын). Операция тиімділігі бір көрсеткішпен сипатталсын w – max.

Операция шарты түгелдей белгілі болған «анықталған» деп аталатын ең қарапайым жағдайды алайық. Ол кезде операция табысы тәуелді болатын барлық факторлар екі топқа бөлінеді:

1) алдын – ала берілген белгілі факторлар, оны қысқаша α деп белгілейік;
2) x – шешімдер жиынын құрайтын, бізден тәуелді шешім элементтері.

Егер дұрыстап қарасақ, бірінші топтағы факторларға шектеулер енетіндігін көреміз, яғни x шешімінің мүмкін облысын анықтайды.

W – тиімділік көрсеткіші екі топ факторларынан тәуелді. Оны келесі формула түрінде көрсетуге болады:

$$W = w(\alpha, x) \qquad (4.1).$$

Мұндағы x және α жалпы жағдайда сан ғана емес, ал сандар жиыны. Берілген α шартына шешім элементіне әсер ететін шектеулер қойылады, олар теңдеу немесе теңсіздік түрінде болады.

(4.1) тәуелділігі тура және оның шешімі алынсын делік. Онда кері тәуелділік келесі түрде формулаланады.

Берілген α шарттарының нәтижесінде w тиімділік көрсеткішін максимумға айналдыратын $X=X^*$ шешімін табу қажет.

Ол максимум келесі түрде өрнектеледі:

$W^*=\max \{W(\alpha,x)\}$ (4.2)

$X \in X$

(4.2) формула былай оқылады: W*- X-тің мүмкін шешімдер жиынына енетін W(α ,x) мәндерінің максимал мәні

Сонымен, функцияның немесе функционалдың максимум мәнін табатын математикалық есеп алдық. Мұндай есептер математикада жақсы өңделген «вариациялық» есептер класына жатады. Мұндай қарапайым есептер көпшілікке мәлім.

Көп аргументті функцияның максимум немесе минимум мәнін табу үшін, әрбір аргумент бойынша дифференциалдаймыз және туындыларын нөлге теңеу арқылы теңдеулер жүйелерінің шешімін аламыз. Былайша қарағанда оңай сияқты. Бірақ мұндай классикалық әдіс операцияны зерттеуде аз қолданылады. Біріншіден аргумент көп болған кезде теңдеулер жүйесі күрделенеді, экстремум іздеу қиындайды.

Екіншіден, шешім элементтеріне шектеулер қойылғанда экстремум туындының нөльге тең нүктесінде емес, X облысының шекарасында табылады.

Кейбір есптерде W функцияның туындысы табылмауы мүмкін. Соның бәрі экстремум іздеу есептерін қиындата түседі.

X* оптимал шешімін табатын экстремум іздеу есептері, W функциясының ерекшеліктеріне және шешімге қойылатын шектеулер түрлеріне тәуелді. Мысалы, егер W функциясы $X_1 X_2$,..., шешім элементтерінен сызықты тәуелді болса, және X_1 ,X_2 ,..., қойылатын шектеулер сызықтық теңдеулер немесе теңсіздіктер түрінде берілсе, онда стандартты әдістермен шешілетін классикалық сызықтық программалау есебі алынады.

Егер W функциясы дөңес болса, онда арнайы әдістер «квадраттық программалау» әдістерімен шығарылады. Операцияның көп этапты басқаруын оптималдау үшін динамикалық программалау әдістері қолданылады. Сонымен қатар экстремум табатын сандық әдістер де бар, олар ЭЕМ арнайы бағдарламалары арқылы жүзеге асады. Сонымен қатар оптимал табу есептері классикалық вариациялық (шектеулері бар немесе жоқ) таза математикалық есептерге келтіріледі, оларды есептеу техникаларында шығару аса қиындық туғызбайды. Ал элементтер анықталмаған жағдайда есептер мүлдем өзгеше.

Анықталмағандық жағдайында шешімдерді таңдау мәселелері.

Алдыңғы параграфта операцияны зерттеудің анықталғандық жағдайындағы кері есебін қарастырдық, онда тиімділік көрсеткіші W екі топ факторларынан ғана тәуелді болды: берілген, алдын-ала берілген α мен шешім элементтері X. Операцияны зерттеудің нақты есептеріне бұл топтан басқа-белгісіз факторлар жиыны енеді оны ξ деп белгілейік. Сонымен W тиімділік көрсеткіші үш топ факторларынан тәуелді W=W(α ,x, ς). (5.1)

W шамасы белгісіз ξ факторларынан тәуелді болған соң, α және x шамасы белгілі болған күннің өзінде анықталмай қалады. Оптимал шешімін іздеу есебі де анықталмағандық жағдайға ұшырайды. W белгісіз шамасын максималдау мүмкін емес қой! Қандай жағдай болса да белгісіз шаманы максималдауға тура келеді. Осы айтылғандарды математика тіліне аударсақ, келесі есепті аламыз.

Берілген α шарты бойынша белгісіз ξ шартын есепке ала отырып, W тиімділік көрсеткішіне максимал мән әперетін $X \in X$ шешімдерін табу қажет.

Анықталмаған ξ факторларының енуін есептің шешімін анықталмағандық жағдайда табу болып табылады.

Бірақ қандай жағдайда болса да жақсы ма, нашар ма, әйтеуір шешім қабылдануы керек. Сондықтан әйгілі шетелдік операцияны зерттеу маманы

Т.Л. Саати өз пәні туралы былай деген:

«Операцияны зерттеу тәжрибелік сұрақтарға нашар жауап беру өнері, ал басқа әдістермен одан да нашар жауап алынуы мүмкін».

Анықталмағандық жағдайында шешім қабылдау өмірде жиі кездеседі. Мысалы біз саяхатқа шығу үшін чемоданға заттарымызды жинақтайық. Чемодан салмағы, заттар жиыны (α шарты) белгілі, ол баратын жердегі ауа райы белгісіз (ξ шарты). Қандай киімдер (x) алу қажет? Бұл есеп ешбір математикасыз шешілгенімен, сыртқы түрі операцияны зерттеу есептеріне ұқсас. Сонымен қатар жас адамды алатын болсақ, ол көрген қызықтарын максималдағысы келеді, ол қарт кісілер ауыру ықтималдығын минималдағысы келеді.

Келесі есепті қарастырайық. Жәрмеңкеде сату үшін тауар ассортименті жоспарлансын. Пайданы максималдау керек. Бірақ сатып алушылар мен тұтыным мөлшері белгісіз. Бәрі анықталмағандық, қалай шешім қабылдау керек? Тағы бір есеп берілсін: бірнеше жылға қарулану жоспары жасалынады делік. Бірақ қарсы жақ та, оның қаруы да белгісіз. Қандай шешім қабылдануы керек?

Мұндай есептерге шешім қабылдаудың әртүрлі тәсілдері бар. Яғни ξ белгісіз факторлары ықтималдық теориясындағы кездейоқ шамалар болатын болса, онда олар стохастикалық есептер деп аталып, анықталмағандық-стохастикалық анықталмағандық деп аталады. Стохастикалық операцияны зерттеу есебіне мысал келтірейік. Асханаға келушілерді көбірек қабылдау үшін жұмысын қайта ұйымдастыру қаралып отыр. Күнделікті асханаға келетін жұмысшы саны белгісіз, және олар келгенде қандай тамақ түрін дайындау керек және қанша уақыт қызмет көрсетілуі қажет. Бұл кездейсоқ шамалардың мәні белгісіз болса, онда стохастикалық жолмен табылуы ықтимал. Осы анықталамағандықты нақты түсіндірейік. Белгісіз ξ факторлары кездейсоқ шамалар, олардың ықтималдық сипаттамалары-үлестіру заңы, математикалық күтілу, дисперсия т.б. анықталсын. Онда W тиімділік көрсеткіші осы факторлардан тәуелді болатын кездейсоқ шама болады. Кездейсоқ шаманы максималдау мүмкін емес: Х-тің кез келген шешімінде ол да кездейсоқ болса не істеу керек?

Егер кездейсоқ шамаларды олардың орта мәндерімен ауыстырсақ есеп анықталғандық түр алады және оны кәдімгі әдістермен шығаруға болады.

Тәжрибе жүзінде көптеген физиканың, механиканың, техниканың есептері олардың орта мәндерімен алмастырылып шығарылады.

Сонымен Q операциясын қарастырайық, оған ξ «кездейсоқ факторлары» әсер ететін болса, онда W тиімділік көрсеткіші де кездейсоқ болады.

Келесідей ой туады: тиімділік көрсеткішіне орта мән алынатын болса, онда ол математикалық күтілу

$\overline{W}$ =M[W] інде жазылады және $\overline{W}$ =M[W(α ,x, ς)] $\rightarrow$ max

мәнге айналдыратын х шешімін іздеу қажет.

Көптеген жағдайларда мұндай тәсіл есеп шартын қанағаттандырады. Сол кезде анықталмағандық элементін не істеу керек? Әрбір жеке операцияның тиімділігі ξ кездейсоқ факторларының мәндерінен тәуелді. Ал бұл жерде біз «орташа » мәндерді оптималдай отырып, көп рет қайталаған соң дұрыс шешімін табуымыз мүмкін. «Орта мәндер бойынша оптималдау» операцияны зерттеудің стохастикалық есептерінде кеңінен қолданылады.

Келесі есепті қарастырайық. Үлкен қалада жедел жәрдем көмегін көресту үшін автоматтандырылған басқару жүйесі (АБЖ) ұйымдастырылсын. Қаланың әртүрлі аудандарында түскен тапсырмалар орталық басқару пунктіне жіберіледі.

АБЖ диспетчер қызметін тиімді болатындай етіп алгоритм (ереже) құру қажет. Тиімділік көрсетікішін W деп алсақ, дәрігерді күту уақыты Т болсын. Т-кездейсоқ шама. Егер «орташа оптималдауды» алатын болсақ, онда күту уақыты минимал болатын алгоритмді таңдау қажет сияқты. Бірақ жеке аурулардың дәрігерді күту уақыты өзара қосылмайды. Бір ауруға дәрігер тез барып, екіншісі өте ұзақ уақыт күтуі мүмкін. Ондай келеңсіз жағдайды болдырмас үшін Т күту уақытына бір to шектеу қою шарт. Яғни Т-кездейсоқ шама болғандықтан Т $¿$ to шартын қанағаттандырсын делік және ең үлкен ықтималдықпен орындалсын.

Оған β мәнін берейік, ол 1-ге жақын болсын (0,99 немесе 0,995), ондай оқиға тәжрибе жүзінде шындыққа жанасады, Х шешімдерінің арасында бұл шартты қанағаттандырмайтын шешім жоқ деген сөз. Мұндай шектеулер стохастикалық шекетеулер деп аталады және ондай шектеулердің болуы оптималдау есебін өте күрделендіреді.

Алдыңғы тарауларда операцияны зерттеу есептерімен және олардың жіктелуі, шешімі қалай табылатындығы туралы танысып өттік. Ары қарай операцияны зерттеуде жиі қолданылатын математикалық әдістерді қарастырамыз. Жоғарыда келтірілген ең қарапайым есептерде тиімділік көрсеткіші (мақсат функция) екі топ параметрлерінен тәуелді болады, берілген шарт α_+ және шешім элементтері х, яғни

W=W(α ,x). (6.1)

α -шартында есеп шешіміне шектеулер бар. Х шешімі $x_1,x_2,\ldots,x_n$ n-шешім элементінен тұрсын

$X(x_1,x_2,\ldots x_n)$

Осы табылған $x_1,x_2,\ldots x_n$ мәндері W шамасын максимум немесе минимум мәндеріне айналдыратын болсын. (экстремум).

Мұндай есептер-шектеулері берілген жағдайда функцияның экстремум мәнін қамтамасыз ететін параметрлерді анықтау математикалық программалау есептері деп аталады. Математикалық программалау есептерін шешуде туатын қиындықтар келесілерден тәуелді:

а) шешім элементтерімен байланыстыратын W функционалының түрінен;

б) есеп «өлшемінен», яғни $x_1,x_2,\ldots x_n$

в) шешім элементтеріне қойылған шектеулер түрі мен санынан.

Математикалық программалау есептерінің ішінде ең кең тараған сызықтық программалау есептері.

Оларды сипаттайтындар: а) W тиімділік көрсеткіші (мақсат функция) $x_1,x_2,\ldots x_n$ шешім элементтерінен сызықты тәуелді; б) шешім элементтеріне қойылатын шектеулер $x_1, x_2, \ldots x_n$-ге сызықтық теңдеулер немесе теңсіздіктер түрінде беріледі.

Мұндай есептер өмірде жиі кездеседі, мысалы қорлады үлестіру, өндірісті жоспарлау, көлік жұмысын ұйымдастыру т.б. Шындығында тәжрибе жүзінде көптеген есептерде "шығындар" мен "табыстар" сатып алынған қорлар санына сызықты тәуелді. Бұдан тәжрибеде кездесетін тәуелділіктің бәрі сызықты болады деген ой тумауы керек.

Дәріс 3. Көлік есебі

Қойылуы, жазулар формасы,көлік есебінін қасиеттері. Потенциалдардың әдісі. Тағайындаулар туралы есеп.

Сызықтық программалаудың әр типті есептерін алдыңғы параграфтарда қарастырдық, солардың арасында жиі кездесетін есебінің бірі «көлік есебі».

Көлік есебінің қойылуы: $A_1, A_2, \ldots, A_m$ m- жабдықтау пунктінде мөлшерлері сәйкес $a_1, a_2, \ldots, a_m$ болатын біркекі жүк жинақталған. Сол жүректерге тапсырыс беретін $B_1, B_2, \ldots, B_n$ n-тұтынушыларға $в_1, в_2, \ldots, в_n$ мөлшерінде жүк алу қажет. Тапсырыстардың жалпы қосындысы қордың жалпы қосындысына тең болуы шарт:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} bj \qquad (1)$$

A_i жабдықтаушы пунктінен B_i-тұтынушы пунктіне жүктің бір бірлігін тасымалдауға жұмсалатын шығын Cij (i=1,m, j=1,n) белгілі делік. Cij келесі тік бұрышты кесте (матрицамен) берілген жол ол тариф матрицасы деп аталады, қысқаша (Cij) деп белгілейміз.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}, \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \ldots & C_{2n} \\ C_{m1} & C_{m2} \ldots & C_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Барлық тапсырмалар немесе тұтыным мөлшерлері қанағаттанатын, ал тасымалдық жалпы құны минимал болатындай тасымал жоспарын табу қажет. Бұл есепті сызықтық программалау есебіне келтіреміз. Ai жабдықтаушыдан Bj тұтынушыға жеткізілетін жүк мөлшерін xij-деп белгілейміз. Барлық xij айнымалыларын келесі матрица түрінде жазуға болады:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12}, \ldots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} \ldots & X_{2n} \\ X_{m1} & X_{m2} \ldots & X_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

қысқаша (xij). (xij) сандарының жиынын тасымал жоспары деп, ал xij-тасымалдау деп атаймыз. Бұл теріс емес айнымалылар келесі шарттарды қанағаттандаруы тиіс.

1) Әрбір жабдықтаушыдан әрбір тұтынушыға жіберілетін жүк мөлшерін қосындысы сол пункттегі жүк қорының санына тең болуы керек, ол шарт келесі m-теңдікпен беріледі.

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2 \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m \end{array}\right\} \qquad (4)$$

2. Әрбір тұтынушы өз тұтыным мөлшерлерін қанағаттандыруы қажет. Ол шарт келесі n-теңдеулерімен беріледі:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=в_1 \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=в_2 \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=в_m \end{array}\right\} \qquad (5)$$

3. Барлық тасымал бағасының қосындысы , яғни xij- лер мен Cij көбейтіндісінің қосындысы

$$Z = \sum_{i=1}^{m} = \sum_{j=1}^{n} CijXij \to \min \qquad (6)$$

Сонымен біз (4) және (5) теңдіктерін қанағаттандыратын және (6) сызықтық функциясын минималдайтын сызықтық программалау есебін алдық.Бұл есептің ерекшелігі (4), (5) шарттарындағы және ол есепті оңай тәсілмен шығаруға мүмкіндік береді.

Соларды қарастырайық.

(4), (5) шарттары сызықтық тәуелсіз болмайды, себебі олар (1) шартымен байланысқан. (4), (5) теңдеулерінің арасында сызықтық тәуелсіз теңдеулер саны m+n емес (теңдеулер саны) ал m+n-1. Біздің есепте xij айнымалыларының жалпы саны m*n, сондықтан (4), (5) теңдеулерін қалай шешкенде де базистік айнымалылар саны m+n-1-ге тең болады да, бос айнымалылар саны

R=m*n-(m+n-1)=(m-1)(n-1)

Алдыңғы параграфта сызықтық программалау есебінің шешімі мүмкін шешімдер облысының бір төбесінде табылатындығы белгілі болды және ол таяныш нүктеде кем дегенде R айнымалы нольге тең. Яғни бұл қарастырылатын отырған есепте кем дегенде (m-1)(n-1) тасымал саны 0-ге тең болуы тиіс. (4) және (5) шарттарын қанағаттандыратын жоспарда мүмкін жоспар деп атаймыз (барлық тұтыным қанағаттанады және барлық қор үлестіреді).

Егер мүмкін жоспарда m+n-1 базистік айнымалы 0-ден өзгеше болып, қалғандары 0-ге тең болатын болса, онда ол таяныш жоспар деп аталады. Мүмкін жоспарлардың ішіндегі тасымалдың жиынтық құнын минимал мәнге айналдыратын (xij) жоспары оптимал деп аталады. Көлік есебінің құрылымының ерекшелігіне байланысты теңдеулер жүйелерін шешу аса қиынға түспейді. Сондықтан көлік есебінің шарты арнайы кестеге жазылады ол m жолдан және n бағанадан тұрады. Жоғарғы оң жақ бұрышына жүк бірлігін тасымалдау құны жазылады, көлік есебінің матрицасын төмендегі кестеде келтіріледі.

Жабдықтаушылар	Тұтынушылар				Жабдықтаушылар
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	a_2
…	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	a_m
Тұтыным Мөлшері	B_1	B_2	...	B_n	

Сонымен көлік есебінің айнымаған алғашқы таяныш жоспары табылса, онда $(xij)_{mxn}$ матрицасының тек m+n-1 оң компоненттері болып, қалған компоненттері нолге тең болады.

Егер көлік есебінің берілгендері мен оның алғашқы таяныш жоспары үлестіру кестесіне жазылған болса, онда осы жоспардың оң элементтеріне сәйкес келетін клеткалар «жабық» клеткалар деп, ал қалған клеткаларын «бос» клеткалар деп атайды.

Көлік есебінің алғашқы таяныш жоспарын табудың бірнеше қарапайым әдістері бар:

1.Солтүстік-батыс бұрыш әдісі
2. Жол бойынша минимал элемент әдісі.
3. Бағана бойынша минимал элемент әдісі
4. Қос есе жоғары бағалау әдісі

Осы әдістердің кейбірін нақты мысалдарда көрсетейік. Келесі көлік есебі берілсін.

Bj / Ai	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор мөлшері
A_1	5 0^7	4	8	9	6	50
A_2	5 5	60 3	35^{11}	7	12	100
A_3	6	9	40^2	40^8	13	80
A_4	1 5	7	8	50^1 0	20^9	70
Тұтыным мөлшері	5 5	60	75	90	20	300

I Солтүстік –батыс бұрыш әдісімен таяныш жоспарын анықтайық.

(Бұл геометриялық картадағы солтүстік – батыс бұрышына сйәкес келеді).

A_1 жабдықтаушыда 50 жүк бірлігі бар, ал B_1 тұтынушыға 55 жүк бірлігі қажет.

X_{11}=min {a_1,b_1}=min{50,55}=50.

B_1- тұтынушыға 55 жүк бірлігі қажет, сондықтан 55-50=5 жүк бірлігін A_2- жабдықтаушыдан алады. A_2 жабдықтаушыда 100-5=95 жүк бірлігі қалды B_1-тұтынушысы өз тұтынушымен жөнелтеміз.

X_{22}=min {95,60}=60. B_2-тұтыным қанағаттанды. A_2-жабдықтаушыда 100-65=35 жүк бірлігі қалды 35 жүк бірлігі B_3-тұтынушыға жіберіледі, ал B_3-ға 75-35=40 жүк бірлігі қажет болғандықтан, оны A_3 тұтынушыдан алады да B_3 өз тұтынымын қанағаттандырады.

A_3 тұтынушыда 80-40=40 жүк бірлігі B_4-тұтынушыға жіберіледі, ал B_4-тұтынушыға 90-40=50 жүк бірлігі қажет, ал жүкті A_4 жабдықтаушыдан алады да өз тұтынымын қанағаттандырады. A_4 жабдықтаушыда 70-50=20 жүк бірлігі қалады да, ол B_5- тұтынушыға жіберіледі. Сонымен жабдықтаушылардың жиынтық қоры мен тұтынушылардың тұтыным мөлшерінің жиынтық қосындысы тең болғанда, яғни көлік есебінің жабық моделінде барлық жүк үлестіріп, барлық тұтыным қанағаттанады.

«Жабық» клеткалардың санын санаймыз ол m+n-1=4+5-1=8-ге тең, яғни айнымаған таяныш жоспар алынды. Алынған таяныш жоспардағы шығынды есептейміз:

Z_0=50*7+5*5+60*3+35*11+40*2+40*8+50*10+20*9=350+25+180+385+80+320+
500+180=2020баға бар.

II. Берілген көлік есебінің таяныш жоспарын қос есе жоғары бағалау әдісіне жол және бағана бойынша минимал элемент әдістері енеді. Бұл әдісті көлік матрицасының көлемі үлкен болған кезде қолдану тиімді.

Bj / Ai	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор мөлшері
A_1	30^{7}	^{4}	^{8}	^{9}	20^{6}	50
A_2	25^{5}	60^{3}	^{11}	15^{7}	^{12}	100
A_3	^{6}	^{9}	75^{2}	5^{8}	^{13}	80
A_4	^{15}	^{7}	^{8}	70^{10}	^{9}	70
Тұтыным мөлшері	55	60	75	90	20	300

Мұнда бірінші жол бойынша минимал элемент белгіленіп, оған V таңбасы қойылады A_1 жолында C_{12}=4 клеткасы A_2 жолында C_{22}=3 клеткасы A_3 жолында C_{33}=2 клеткасы A_4 жолында C_{42}=7 клеткасы. Содан соң бағана бойынша минимал элементтерді белгілеп V таңбасын қоямыз. Нәтижесінде кейбір клеткаларда екі VV таңба пайда болады. Жүк мөлшерлерінен үлестіруді сол клеткалардан бастаймыз. Үлестірілген жоспарда толтырылған, яғни «жабық» клеткалардың саны m+n-1=4+5-1=8-ге тең, яғни айнымаған таяныш жоспар алынды. Тасымал шығынын есептейміз:

Z_1=30*7+20*6+25*5+60*3+15*7+75*2+5*8+70*10=210+180+125+180+105+150+
40+700=1690баға бірлігі.

Көлік есебінің екі әдісі бойынша табылған мәндерін салыстыра отырып, соңғы әдіс бойынша анықталған таяныш жоспарында көлік шығыны ұтымды екендігін көреміз.

Көлік есебінің оптимал шешімін табу.

Потенциалдар әдісі.

Көлік есебінің алғашқы таяныш жоспарлары табылған соң оптимал шешімін симплекс әдәсәмен табуға болады. Бірақ көлік есебінің ерекшеліктеріне туатын қиындықтарға байланысты симплекс әдісін пайдалану қолайсыз.

Сондықтан көлік есебін шешуге арнайы әдістер қолданылады. Оның бірі 1949ж. совет ғалымдары Л.В. Канторович пен М.К. Гавурин ойлап тапқан потенциялдар әдісі.

Потенциялдар әдісімен саны шектеулі интерация жасай отырып көлік есебінің оптимал шешімі алынады.Потенциалдар әдісінің негізгі теоремасын дәлелдеусіз келтірейік.

Теорема 9.1 Егер $x^*=(xij^*)$ жоспары көлік есебінің оптимал шешімі болса, онда оған оң ($xij^*>0$) элементтері үшін Ui+Vj=Cij, ал қалған ($Xij^*=0$) элементтері үшін Ui+Vj ¿ Cij шартын қанағаттандыратын саны m+n-ге тең Ui және Vj потенциалдары сәйкес келеді.

Ui-жабдықтаушылар, Vj-тұтынушылар потенциалдары деп аталады.

Потенциалдар әдісінің алгоритмі өте қарапайым және келесі қадамдардан тұрады:

1. Жоғарыда келтіріген әдістердің бірін пайдаланып, алғашқы таяныш жоспарды анықтаймыз.
2. Табылған жоспардың оптимал екендігін тексеру үшін потенциалдар жүйесін құрамыз. Ол үшін әрбір жабық клеткаға сәйкес Ui+Vj=Cij теңдеуі құрылады. Нәтижесінде m+n белгісіздері бар m+n-1 теңдеулерінен тұратын жүйе аламыз. Бұл жүйенің белгісіздерінің саны теңдеулерінің санынан көп болғандықтан, оның көп шешімі болады. Сондықтан, осы жүйенің кез-келген бір шешімін алу үшін Ui-дің біреуін нольге тең деп алып, қалған потенциалдар мәндерін анықтаймыз.

Мысалы Ui-дің мәні белгілі десек, онда Vj=Cij-Ui теңдеуінен Vi-дің мәні анықталады. Егер Vj-дің мәні белгілі болса, онда Ui-дің мәні табылады Ui=Cij-Vj

Барлық потенциалдар анықталып болған соң, әрбір бос клетка үшін

$$\Delta ij = Ui + Vj - Cij$$

Мәндері анықталады. Егер барлық i-мен j-лер үшін $\Delta ij \le 0\left(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}\right)$

Теңсіздігі орындалатын болса, онда табылған таяныш жоспар оптимал жоспар болғаны.

3. Егер кемінде бір бос клетка үшін $\Delta ij > 0$ болса, онда табылған жоспар жаңа жоспармен алмастырылады. Ол үшін $\Delta ij > 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын клеткалар ішінен max Δij = ΔLk i,j шартын қанағаттандыратын (l,k) клеткасы табылады, сол клетка үлестірілуі тиіс жүктің мөлшері $|\lambda|$ жазылады. Немесе Xlk= λ деп жорамалданады.

4. Үлестірілуі тиіс жүктің мөлшерін анықтау үшін және оны кестеге дұрыс орналастыру үшін контур (цикл) құрамыз. Ол үшін жоғарыда анықталған (l,k) клеткасына (+) таңба жазып, сол клеткадан бастап, төбелері жабық клеткаларда жататындай етіп, тік бұрышты тұйық контур саламыз. Осы контурдың қалған төбелеріне (-) және (+) таңбаларын алмастыра отырып, жазып шығамыз.

5. Үлестіруі тиіс жүктің мөлшерін немесе λ -ны таңбалары (-) клеткаларда орналасқан Xij-дің ең кішісіне тең деп аламыз.

Жаңа жоспарды анықтау үшін λ -ның табылған мәнін (+) таңбасы жазылған клеткаларға қосамыз да, ал (-) таңбасы жазылған клеткалардан алып тастаймыз. Егер контурдың (+) таңбаларымен белгіленген төбелерін k^+ деп, ал (-)-пен белгіленген төбелерін k^- деп белгілесек, онда айтылғандарды келесі өрнек түрінде жазуға болады:

$$\lambda = \min\{Xij\} = Xpq$$
$$Xij \in k^-$$

онда жаңа жоспар, былай анықталады:

$$X'_{lk} = \lambda \;;\quad X'pq = 0$$
$$X'ij = Xij;\; Xij \in k^- U K^+$$
$$Xij = Xij + \lambda \;,\; Xij \in k^+$$
$$Xij = Xij - \lambda \;,\; Xij \in k^-$$

Егер λ -ға Xij $\in$ k^- бірнеше мәні сәйкес келетін болса, онда жаңа жоспарды анықтау кезінде бірнеше клетка 0-ге айналады. Осы жағдайда көлік есебінің жабық клеткаларының саны m+n-1-ден кем болады да, жоспар алынады.Бұл жағдайда, айнымаған жоспар алу үшін нөлге айналған клеткалардың кейбіреуін жабық клеткалар деп аламыз. Жабық клеткалар саны m+n-1-ден аспауы қажет.

Табылған жаңа жосапар қайтадан тексерілуі тиіс.Ол үшін потенциалдар алгоритмін 2-5-ші қадамдары қайталанады және оптимал жоспар алынғанша жүргізіледі. Қос есе жоғары бағалау әдісімен алынған таяныш жоспарды оптималдаймыз.

Bj / Ai	55	60	75	90	20	U_i
50	30^7	^{4}	^{8}	^{9}	20^6	$U_1=0$
100	25^5	60^3	^{11}	15^7	^{12}	$U_2==-2$
80	^{6}	^{9}	75^2	5^8	^{13}	$U_3=-1$
70	^{15}	^{7}	^{8}	70^{10}	^{9}	$U_4=1$
Vj	$V_1=7$	$V_2=5$	$V_3=3$	$V_4=9$	$V_5=9$	

1.Бұл айнымаған таяныш жоспар, яғни m+n-1=4+5-1=8 жабық клеткасы бар.

2. Жабық клеткаларда пайдалана отырып 9 белгісі бар 8 теңдеуден тұратын жүйе құруға болады.

Осы жүйенің кез-келген бар шешімін алу үшін U_1=0деп жорамалдаймыз. Сонда потенциалдар мәні төмендегідей анықталады:

1.$U_1+V_1=7$. $V_1=7-U_1=7-0=7$.
2.$U_1+V_5=6$. $V_5=6-U_1=6-0=6$.
3.$U_2+V_1=5$ $U_2=5-V_1=5-7=-2$
4.$U_2+V_2=3$ $V_2=3-U_2=3-(-2)=5$.

5.$U_2+V_4=7$ $V_4=7-U_2=7-(-2)=9$
6.$U_3+V_4=8$ $U_3=8-V_4=8-9=-1$
7.$U_3+V_3=2$ $V_3=2-U_3=2-(-1)=3$
8.$U_4+V_4=10$ $U_4=10-V_4=10-9=1$

Сонымен $\overline{U}$ =(0,-2,-1,1), $\overline{V}$ =(7,5,3,9,6) потенциалдар жүйесі құрылады.Ары қарай барлық бос клеткалар үшін $\Delta ij=Ui+Vj-Cij$ мәндерін анықтаймыз.

1. $\Delta_{12}=U_1+V_2-C_{12}=0+5-4=1$. 2. $\Delta_{13}=U_1+V_3-C_{13}=0+3-8=-5$.
3. $\Delta_{14}=U_1+V_4-C_{12}=0+9-9=0$ 4. $\Delta_{23}=U_2+V_3-C_{23}=-2+3-11=-10$.
5. $\Delta_{25}=U_2+V_5-C_{25}=-2+6-12=-8$. 6. $\Delta_{31}=U_3+V_1-C_{23}=-1+7-6=0$.
7. $\Delta_{32}=U_3+V_2-C_{32}=-1+5-9=-5$. 8. $\Delta_{35}=U_3+V_5-C_{35}=-1+6-13=-8$.
9. $\Delta_{41}=U_4+V_1-C_{41}=1+7-15=7$. 10. $\Delta_{42}=U_4+V_2-C_{42}=1+5-7=-1$.
11. $\Delta_{43}=U_4+V_3-C_{43}=1+3-8=-4$. 12. $\Delta_{45}=U_4+V_5-C_{45}=1+6-9=-2$.

Табылған барлық Δ ij-лердің мәндерін қарастыра келіп, оның A_1B_2 клеткасындағы мәні оң екендігін көреміз. Демек табылған жоспар оптимал емес

3. A_1B_2 клеткасында Δ_{12}-нің мәні оң болғандықтан осы клетканы жабық клеткаға айналдырамыз, ол үшін осы клеткадан төбелері жабық контур тұрғызамыз, ол контурдың басқа төбелері жабық клеткаларда тік бұрыш жасап орналасуы тиіс. Бздің есепте A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2 клеткаларында контурдың A_1B_2 клеткасындағы төбесіне (+) таңбасын қойып, қалған төбелеріне (-) және (+) таңбаларын алмастырып жазып шығамыз.

4. Үлестірілуі тиіс жүктің мөлшерлері λ ны мына λ =min{Xij}=min{30,60}=30

Xij $\in$ k^- шартынан анықтаймыз.

5. Жаңа жоспарды анықтау үшін контурдың (+)таңбалы төбелеріне λ =30-ды қосып, ал (-)таңбалы төбелеріне алып тастаймыз. Кестенің қалған мәндері өзгермейді, нәтижесінде келесі жаңа таяныш жоспар аламыз. Мұнда

m+n-1=4+5-1=8 клетка толтырылған.

Bj / Ai	55	60	75	90	20	U_i
50	30^7	^{4}	^{8}	^{9}	20^6	$U_1=0$
100	25^5	60^3	^{11}	15^7	^{12}	$U_2==-1$
80	^{6}	^{9}	75^2	5^8	^{13}	$U_3=0$
70	^{15}	^{7}	^{8}	70^{10}	^{9}	$U_4=2$
Vj	$V_1=6$	$V_2=4$	$V_3=2$	$V_4=8$	$V_5=6$	

Осы жоспардың шығынын есептейміз. Z_1=30*4+20*6+55*5+30*3+15*7+75*2+5*8+70*10=120+120+275+90+105+150+40+700=1600 баға бар. Алынған жаңа таяныш жоспарды оптималдылыққа тексереміз. Потенциалдарды анықтаймыз. $U_1=0$ деп аламыз.

1.$U_1+V_2=4$. $V_1=4-U_1=4-0=4$.
2.$U_1+V_5=6$. $V_5=6-U_1=6-0=6$.
3.$U_2+V_2=3$ $U_2=3-V_2=3-4=-1$
4.$U_2+V_1=5$ $V_2=5-U_2=5-(-1)=6$.
5.$U_2+V_4=7$ $V_4=7-U_2=7-(-1)=8$
6.$U_3+V_4=8$ $U_3=8-V_4=8-8=0$
7.$U_3+V_3=2$ $V_3=2-U_3=2-0=2$
8.$U_4+V_4=10$ $U_4=10-V_4=10-8=2$

Сонымен $\overline{U}_1$=(0;-1;0;2); $\overline{V}_1$=(6;4;2;8;6) потенциалдар жүйесі құрылды. Бос клеткалар үшін оптималдылықтың шартының орындалуын тексереміз. $\Delta ij = Ui + Vj - Cij$ мәндерін анықтаймыз.

1. $\Delta_{12}=U_1+V_1-C_{11}=0+6-7=-1$. 2. $\Delta_{13}=U_1+V_3-C_{13}=0+2-8=-6$.

3. $\Delta_{14}=U_1+V_4-C_{14}=0+8-9=-1$ 4. $\Delta_{23}=U_2+V_3-C_{23}=-1+2-11=-10$.

5. $\Delta_{25}=U_2+V_5-C_{25}=-1+6-12=-7$. 6. $\Delta_{31}=U_3+V_1-C_{31}=0+6-6=0$.

7. $\Delta_{32}=U_3+V_2-C_{32}=-1+4-9=-5$. 8. $\Delta_{35}=U_3+V_5-C_{35}=0+6-13=-7$.

9. $\Delta_{41}=U_4+V_1-C_{41}=2+6-15=-7$. 10. $\Delta_{42}=U_4+V_2-C_{42}=2+4-7=-1$.

11. $\Delta_{43}=U_4+V_3-C_{43}=2+2-8=-4$. 12. $\Delta_{45}=U_4+V_5-C_{45}=2+6-9=-1$.

Барлық бос клеткалар үшін $\Delta ij \leq 0$ шарты орындалғандықтан, соңғы табылған жоспарымыз оптимал жоспар болады. Оптимал жоспарды келесі түрде жазамыз.

$$X^{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 & 20 \\ 55 & 30 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 75 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}$$

Осы жоспарға сәйкес ең аз көлік шығыны Zmin=1600 баға бірлігі.

Көлік есебінің ашық моделі жоғарыда келтірілген есептерде

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

шарты орындалған жағдайда көлік есебінің моделі жабық деп аталады. Егер бұл шарт орындалмаса көлік есебінің ашық моделі деп аталады және ашық көлік моделі үшін келесідей екі жағдай кездесуі мүмкін

а) Жүктің қоры тұтынушылардың қажетінен артық, яғни $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

б) Жүктің қоры тұтынушылардың қажетінен кем $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

Бірінші а) жағдайы үшін ашық көлік есебінің математикалық моделі мына түрде жазылады:

Берілген Z($\bar{X}$)= $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} CijXij$ сызықтық функциясына минимал мән әперетін және

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Xij \leq a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} Xij = b_j, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$Xij \geq 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$$

Шарттарын қанағаттандыратын X=(Xij) жоспарын тап. Екінші б) жағдайында ашық көлік есебінің математикалық моделі келесі түрде жазылады:

Берілген Z($\bar{X}$)= $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} CijXij$ сызықтық функционалына минимал мән әперетін және

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Xij = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} Xij \le b_j, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$Xij \ge 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$$

шарттарын қанағаттандыратын X=(Xij) жоспарын тап.

Кез-келген ашық көлік-есебін шығару үшін, алдымен көлік есебінің жабық түріне келтіру керек. Ол үшін а) жағдайында моделге жасанды Bn+1 тұтынушысы енгізіліп, оның тұтыным мөлшері $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j -$ ге тең болады. Екінші жағдайда моделге жасанды A_{m+1} ші жабдықтаушысы енгізіліп, ондағы жүктің қоры $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i -$ ге тең болады. Енгізілген жасанды B_{n+1} тұтынушы мен A_{m+1} жабдықтаушының жүк тасу тарифтерін нольге тең деп аламыз. Соның нәтижесінде көлік есебінің анық моделін жабық модельге келтіріледі.

Дәріс 4.Сызықты программалау есептердің шешу симплекс – әдістері.
СП есептер базистік шешуі, базистік шешулердін қасиеттері. СП есептердің шешімдердің симплекс - әдістің ортақ схемасы. Бастапқы базистік шешімдер

Симплекс-әдісі сонымен қатар жоспардың тізбектелуін жақсарту әдісі болып біледі, бірінші Г. Данциг 1947 жылы жасады. Бұл әдіс бір мүмкін базистік шешімнен екінші шешімге өтуге мүмкіндік береді, сол сәтте мақсатты функциянын мәні үздіксіз өсіп тұрады. Нәтижесінде қадамнын соңғы сан бойынша оптималдық шешім табылады. Симплекс әдістін алгоритмі сонымен қатар СП есептерін шешілетіндігін анықтайды.

Әдіс әмбебап болып табылады, себебі ол кез келген СП есептерін шешуді мүмкіндік береді. Есептін математикалық моделі канондық (стандартному) түріне келтіріледі. Мақсатты функциянын коэффициенттері және шектеу жүйесін қолдануымен тірек симплекс-кестесі толтырылады. Есеп алгоритм бойынша шешіледі.

Кейбір бастапқы тірек шешімнен бастап бағыттаған орын ауыстыру ұтымды мүмкін шешімдерге іске асып жатады, сол Симплекс әдіс идеясы болып саналады. Максимум есептері үшін нысаналы функциялар мәні азаймайды. Өйткені мүмкін есептердің саны шектеулі, қадамның шектілік саны арқылы тиімді шешімді аламыз.

4.2 Симплекс –әдістін алгоритмы

Симплекс –әдістін алгоритмы СП есептері шешу үшін канондық түрінде берілген симплек –кесте ретінде жүзеге асады Осы кестедегі бірінші бағанда базиске кіретін векторлардын белгілері орналасқан.

Екінші баған f базиске кіретін, векторларға сәйкес келетін нысаналы функциянын c_i коэффициенттері.

Үшінші баған f тірек жоспардың компоненттері. Осы бағанда қосымша жолда шама (величина) жазылады:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

Оны есептеуге онай екінші және үшінші бағандағы сандарды көбейту және қосу керек.

Бұдан әрі барлық $\vec{A}_j$ векторларына сәйкес келетін бағандар жүреді, және бұл бағандарда базисте қарастырылатын сол векторлардың координаталары жазылады. Базиске кіретін векторлар үшін координаталардын көрінісі (0,0, ... ,0,1,0, ..., 0), бұл жағдайда *қай жолда* базистік вектор тұр *сол жолда бірлік* орналасқанын байқау керек.

Қосымша жолда осы векторларына сәйкес келетін c_i коэффициенттері негізінде жазылады

Қосымша жолда төменгі жағында $z_j - c_j$ шамалары (величины) жазылады, келесі формуламен есептеледі:

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j .$$

Базиске кіретін векторлар үшін бұл айырмалар әрқашан нөлге тең.
Симплекс –әдістін алгоритмның қадамдары:

1 қадам	Айырмалар жазылған төменгі қосымша жол қарастырылады. Егер барлық айырмалар $z_j - c_j \le 0$, онда жоба тиімді деп саналады.
2 қадам	Егер $z_j - c_j > 0$ бар баған болса, онда сол айырманың мәні максималды баған тандаймыз. Индекс *j* базиске еңгізілетін векторды анықтайды. $\max(z_j - c_j) = z_l - c_l$ делік ,онда базиске вектор $\vec{A}_l$ еңгізу керек. Осы векторға сәйкес **бағыттаушы баған** деп атаймыз. Ары қарай **бағыттаушы баған** $\Rightarrow$ таңбасымен белгіленеді.
3 қадам	Сол векторға лайық баған қарастырылады. Егер барлығы $x_{il} < 0$, онда нысаналы функциянын мәні төменде шектеулі. Егер $x_{il} > 0$ бар болса, онда $\theta_0 = \min\limits_i \frac{x_i}{x_{il}}$ орналасқан , Ол жерде бөлшек сан көрінеді x_i / x_{il}, $x_{il} > 0$ үшін Бұл минимум вектор $\vec{A}_k$ үшін жетеді. Сол кезде тек қана вектор $\vec{A}_k$ базистен шығаруға келеді. Сол векторға лайық жол, **бағыттаушы жол** деп аталады. Ары қарай **бағыттаушы жол** $\Uparrow$ таңбасымен белгіленеді.
4 қадам	Бағыттаушы баған мен жол анықталғаннан кейін, жана симплекс –кестесі толтыру басталады, сол жерде бағыттаушы жолдын орнында вектор $\vec{A}_l$ тұрады. Әдетте бұл жана кестені толтыру дәл бағыттаушы жолдан басталады. Тірек жоспардын компоненттер ретінде осындай шама жазылады т.е,. θ_0 , яғни $$x'_l = \theta_0 = \frac{x_k}{x_{kl}}$$ Осы жолдын қалған элементтері келесі шамамен толтырылады $$x'_{lj} = \frac{x_{kj}}{x_{kl}}$$ **Бағыттаушы жол** және **бағыттаушы баған** қиылысқан жерде тұрған x_{kl} элементтің ерекше рөл алатына назар аудару қажет. **Бағыттаушы жолдың** барлық элементтері дәл соған бөлінеді. Бұрынғы элементтін x_{kl} орнына автоматты түрде бірлік пайда болады. **Бағыттаушы жол**дын элементтерін қайта есептеу үшін жоғарыда жазылған формулаларды келесі ереже түрінде жазуға болады: $\begin{pmatrix} \text{новый элемент} \\ \text{направляющей} \\ \text{строки} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \text{старый элемент} \\ \text{направляющей} \\ \text{строки} \end{pmatrix}}{x_{kl}}$
5 қадам	Ары қарай кестенің барлық қалған жолдарын қайта есептеу басталады, және қосымша төменгі жолды формула бойынша: жоба компоненттері үшін $$x'_i = x_i - \theta_0 x_{il}$$ базис бойынша бөлу координаталары үшін:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{kj}}{x_{kl}} \cdot x_{il}$$

қосымша жол үшін

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) - \frac{x_{kj}}{x_{kl}} \cdot (z_l - c_l)$$

Осы барлық формулалар бір ереже бойынша қойылады:

$$(\text{новый элемент}) = (\text{старый элемент}) - \\ - \begin{pmatrix} \text{элемент новой} \\ \text{направляющей} \\ \text{строки, стоящий} \\ \text{в этом же столбце} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{элемент старого} \\ \text{направляющего} \\ \text{столбца, стоящий} \\ \text{в этой же строке} \end{pmatrix}.$$

Бұл ереже жоба компоненттеріне, x_{ij} шамаларына, $z_j - c_j$ айырмаларына қолданылады. Оны тіпті өзіннің бағыттаушы бағаннын элементтерін қайта есептеуде қолдануға болады, бірақ x_{kl} бұрынғы элементтін орнына 1 қалдырып оны нөлмен толтыру қайда онайрек.

Ары қарай итерациялар жалғасады

Мысал: Сызықты программалау есептерін шешу

$$x_2 - 3x_3 + 2x_5 \Rightarrow \min$$

$$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & & +2x_5 & & =7 \\ & -2x_2 & +4x_3 & +x_4 & & & =12 \\ & -4x_2 & +3x_3 & & +8x_5 & +x_6 & =10 \end{array}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}$$

Бұл жағдайда вектор $\vec{c}$ (0,1,-3,0,2,0) координаттарына тең, ал векторлық формада шектеулер келесі түрде жазылады

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Бастапқы симплекс –кестесін толтырамыз, вектордың бастапқы базис ретінде $\vec{A}_1, \vec{A}_4, \vec{A}_6$ аламыз

Бастапқы симплекс –кестесі

	Ба зис	c_i	Ж оспар		0	1 3	- 0	2	0
							$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$
	$\vec{A}_1$	0	7		1	3 1	- 0	2	0
$\Rightarrow$	$\vec{A}_4$	0	12		0 2	-	4 1	0	0
	$\vec{A}_6$	0	10		0 4	-	3 0	8	1
			0		0 1	-	3 0	-2	0

Вектордың арнайы түрінен $\vec{A}_1, \vec{A}_4$ и $\vec{A}_6$ «жоспар» бағанасына $\vec{b}$ векторі көшіріп жазылады, ал вектордың координаттары түрінде біздің базисте вектордың өздері тұрады. z_0 и $z_j - c_j$ шамаларының көрінісі:

$$z_0 = 0\cdot 7 + 0\cdot 12 + 0\cdot 10 = 0;$$

$$z_2 - c_2 = 0\cdot 3 + 0\cdot(-2) + 0\cdot(-4) - 1 = -1;$$

$$z_3 - c_3 = 0\cdot(-1) + 0\cdot 4 + 0\cdot 3 - (-3) = 3;$$

$$z_5 - c_5 = 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 8 - 2 = -2.$$

Бірінші итерация

Қосымша жолды қарағанда сол жолда тек қана бір оң элементті көреміз – $\vec{A}_3$ векторына сәйкес келетін бағанда. Сол себепті бұл векторді базиске еңгізу керек және осы баған бағыттаушы баған болып саналады.

Бұл бағыттаушы бағанда екі оң сан бар -4 және 3. Сондықтан екі жеке (частных) санды қарастыру қажет.

$$\frac{12}{4} \quad \text{и} \quad \frac{10}{3}$$

Және ең кішісін тандау қажет. Өйткені

$$\min\left(\frac{12}{4}, \frac{10}{3}\right) = 3$$

Және ол $\vec{A}_4$ векторда жетіп жатыр, онда бұл вектор базистегі келесі нәтижелерге жатқызуға болады және осыған сәйкес келетің жол бағыттаушы жол болып саналады

	Базис	c_i	Жоспар	0	1	-3	0	2	0
				$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$
$\Rightarrow$	$\vec{A}_1$	0	10	1	$\mathbf{\frac{5}{2}}$	0	$\frac{1}{4}$	2	0
	$\vec{A}_3$	-3	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
	$\vec{A}_6$	0	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1
			-9	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	-2	0
					$\Uparrow$				

Қойылған жоғарыда ережелерге сәйкес жаңа симплекс – кестесің толтырылады.
Толтыру екінші жолдан басталады (өйткені ол бағыттаушы), сосын қалған жолдар қайта саналады.

Екінші итерация

Қосымша жолды қарағанда сол жолда тек қана бір оң элементті көреміз – $\vec{A}_2$ векторының бағанында тұрған ½. Сол себепті бұл векторді базиске еңгізу керек және осы баған бағыттаушы баған болып саналады.

$\vec{A}_2$ векторына сәйкес келетін бағанда бірінші жолда тұрған тек қана бір оң элементі бар- ол 5/2. Сондықтан бірінші жол бағыттаушы жол болады және $\vec{A}_1$ векторы базистен шығуы керек.

	Базис	c_i	Жоспар	0	1	-3	0	2	0
				$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$

	$\vec{A}_2$	1	4	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0
	$\vec{A}_3$	-3	5	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0
	$\vec{A}_6$	0		1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1
			-11	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0

Қойылған жоғарыда ережелерге сәйкес жаңа симплекс – кестесің толтырылады.

Толтырылған кестеде қосымша жолда тек қана теріс сандар және нөлдер тұрады. Сондықтан жасалған жоспар тиімді болады.

Тиімді жоспар келесі түрде жазылады

немесе $x_2 = 4,\ x_3 = 5,\ x_6 = 11$, ал қалғаны нөлге тең.

Мақсатты функцияның мәні 11-ге тең.

4.3 Жасанды базис әдісі

Егер СП есептердің арнайы түрінде симплекс әдісімен шешу үшін дайындықтардан кейін шектеулер жүйесінде әр жолда базистік айнымалылар болмаса (осы жолға 1 коэффициентімен кіреді, ал қалған жолдарға 0 коэффициентімен), онда осы СП есептерін шешу үшін жасанды базис әдісін қолдану керек.

Әдістің мағынасы:

1. Базистік айнымалы болмаған жолдарға бір жасанды базистік айнымалыдан қосылады. Жана есеп Симплекс –әдісімен шешеді, сол сәтте барлық жасанды базистік айнымалылар еркін болуы керек (базистен шығу) және олардың қосындысы нөлге тең болуы керек, немесе кері жағдайда бұл жүйеде мүмкін базисті ерекшелеуге мүмкін емес.

Бақылау сұрақтар:

1. Симплекс –әдістін мағынасы.
2. Смплекс –әдістін толтыру ережелері.
3. Смплекс –әдістін алгоритм қадамдары.
4. Жасанды базис әдістін мағынасы.

Дәріс. №5 Сызықты программалауда екі жақты теориясы

Екі жақты есептер түсінігі. Екі жақты есептердің түрлері. Екі жақтылықтар Негізгі теоремалар : екі жақтын негізгі теңсіздік, Колмогоров критерийлер, қажетті және жеткілікті шарты негізгі теңсіздік СП есептердің оптималды шешуін болуы, төтесінен және екі жақты есептің шешімдердің болуы бір уақыттағы туралы теорема

Екі жақты теорисынын негізгі идеясы: әрбір СП есептер үшін кейбір СП есептері болады, шешілуі түзумен тығыз байланысты. Түзу шешімдер мен екі жақты есептердің арасында маңызды қарым-қатынас бар, СП есептердін оптималдық шешуді жалпы қасиеттерін зерттеуде пайдалы және мүмкін шешімдердін тиімділігін тексеру

Кейбір СП есебі берілген –бастапқы есеп. Пусть дана некоторая задача линейного программирования – *исходная* задача. Шектеулер тенсіздіктер түрінде берілген:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{13}x_3 \leq b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{23}x_3 \leq b_2;$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{33}x_3 \leq b_3.$$

Қажет:

$$\text{максимизировать } c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

Форманы максималдайтын сондай шектеу жүйесінің барлық шешімдерден таңдау керек.

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3$$

Бұл есеппен басқа есеп байланысады – *Екі жақты* бастапқы теңдеуге қарағанда
і жақты

Қажет:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + . + a_{13}y_3 \geq c_1;$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + . + a_{23}y_3 \geq c_2;$$
$$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + . + a_{33}y_3 \geq c_3.$$
$$\text{минимизировать } g(y_1, y_2, y_3) = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

Түзу есеп және екі жақты есептер жалпы түрде

Түзу есеп	Екі жақты есеп
$\text{максимизировать } \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ Шектеулер $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1, 2, ., m,$ $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ., n.$	$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{m} b_iy_i$ Шектеулер $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j,\ j = 1, 2, ., n,$ $y_i \geq 0,\ i = 1, 2, ., m.$
Бастапқы есептегі Матрица	Екі жақты есептегі Матрица
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$	$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .. & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & .. & a_{m2} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{1n} & a_{2n} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$

Тура жазудын формасы және екі жақты есептерді салыстыру барысында араларында келесі байланыстарды орнату болады.

1. *Егер тура есеп максималдау есебі болса, онда екі жақті есеп минимизациялау есебі болып табылады және керісінше.*
2. *Тура есептін нысаналы функциянын коэффициенттері $c_1,...,c_n$ шектеулі екі жақты есептін еркін мүшелері болады*
3. *Шектеулі тура есептін еркін мүшелері $b_1,...,b_m$ екі жақты есептін нысаналы функциянын коэффициенттері болып өзгереді.*
4. *$b_1,...,b_m$ екі жақты есептін матрицасы, тура есептін шектеулер матрицасы транспорттау жолымен пайда болады.*
5. *Тенсіздіктердің таңбалары шектеулерде кері бағытта өзгереді*
6. *Тура есеп шектеуінін саны екі жақты айнымалылардын санына тең және керісінше*

5.2 Екі жақты теоремасы.

Келесі екі жақты теориясынын теоремасын талдай отырып, тура және екі жақты тиімді шешім араларында байланыс орнатады.

<u>ТЕОРЕМА 1</u>. Егер екі жақты есепте біреунде тиімді шешім болса, онда басқа есепте тиімді болып табылады, сол сәтте кез келген тиімді шешім үшін теңдік орындалады.

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min}.$$

Егер екі жақты есептін біреу шешілмесе

L($\bar{x}$)Max → ∞ (или S($\bar{y}$)Min → -∞),

Онда басқа есепте мүмкін шешімдер болмайды.

ТЕОРЕМА 2. Тиімді мүмкін шешім үшін $\bar{X}$ және $\bar{Y}$ қос екі жақты есеп қажетті және жеткілікті, себебі олар тендеу жүйесіне қанағаттандыру керек.

$$\begin{cases} x_{\text{опт}j}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_{\text{опт}i} - c_j\right) = 0, \\ y_{\text{опт}i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_{\text{опт}j} - b_i\right) = 0. \end{cases}$$

5.3 Екі жақ есептін түрлері және олардың математикалық моделін құру.

Симметриялық, симметриялық емес және аралас екі жақті есептер болып бөлінеді

5.3.1 Симметриялық екі жақты есептер

Бастапқы есеп берілген

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max$$

Шектеулері:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 & | \ y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 & | \ y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant b_m & | \ y_m, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Есеп канондық емес түрде берілген. Екі жақты есептің математикалық моделін құру керек, ол үшін:

- Шектеулі бастапқы есептін әрбір тенсіздікке лайық айнымалы *Yi* келтіреміз*;*
- *Коэффициенттері бастапқы есептің шектеулер жүйесінің еркін* мүшелері болатың, *Нысаналы функция құрылады*;
- *Шектеулер жүйесі құрылады. Шектеулер жүйесінің коэффициенттері бастапқы есептің шектеулер жүйесінің тасымалдаған матрица коэффициенттерінен құрайды.* . Теңсіздіктердің таңбалары қарама-қарсы өзгеріп жатады.
- *Шектеулер жүйесінің еркін* мүшелері бастапқы есептін *нысаналы функцияның коэффициенттері болып саналады. Екі жақты есептің барлық айнымалылары теріс болады.*

Екі жақты есептің математикалық модель келесі түрде жазылады

$$S(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to \min$$

Шектеулер:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geqslant c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geqslant c_n, \end{cases}$$
$$y_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Симметриялық есептердің шешімі

Екі жақты теоремасын қолдануымен есептердің шешімін қарап шығамыз

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 2 & | \ y_1 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 & | \ y_2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 & | \ y_3 \end{cases}$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 1 & | \ x_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \geqslant -1 & | \ x_2 \end{cases}$$
$$y_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

5.3.3 Аралас екі жақты есептер

Бастапқы есептің математикалық моделінде симметриялық және симметриялық емес есептердің шарттары бар. Екі жақты есепті құрғанда симметриялық және симметриялық емес есептердің шарттарын орындау қажет.

Есептерді екі жақты теоремасын қолданумен шешуды қарастырамыз

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = x_1 - 6x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 & \mid y_1 \\ 2x_1 + 3x_3 \leqslant 4 & \mid y_2 \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 3y_1 + 4y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geqslant 1 & \mid x_1 \\ 3y_1 \geqslant -6 & \mid x_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \geqslant -1 & \mid x_3 \end{cases}$$

y_1 — произвольная по знаку,
$y_2 \geqslant 0$.

Екі жақты есепті тиімді шешімін табамыз:

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (1, 0, 2/3), \text{ при этом } L(\bar{x})_{\max} = 1/3.$$

Бірінші екі жақты теоремасы бойынша

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 1/3.$$

Себебі $X1 > 0$, $X3 > 0$, онда екінші екі жақты теоремасы бойынша бірінші және үшінші Екі жақты есептің шектеулері келесі теңдіктер ретінде жазылады:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 1, \\ 3y_1 + 3y_2 = -1, \end{cases}$$

откуда $y_1 = -5/3$, $y_2 = 4/3$, т.е. $\bar{Y}_{\text{опт}} = (-5/3, 4/3)$.

Бақылау сұрақтар:

1. екі жақты теорияның негізгі ойы.
2. Тік және екі жақты есептердің жазылу формасы.
3. Тік және екі жақты есептердің өз-ара байланыстары
4. Екі жақты теоремасы.
5. Екі жақты есептердің түрлері.
6. Симметриялық екі жақты есептің математикалық моделін құру алгоритмы.
7. Симметриялық екі жақты есептің математикалық моделі.
8. Симметриялық емес екі жақты есептің математикалық моделін құру алгоритмы.
9. Симметриялық емес екі жақты есептің математикалық моделі
10. Бастапқы аралас екі жақты есептің матматикалық моделдің шарттары.

Тақырып 2. Сызықты емес программалау әдістері

Дәріс №6. Сызықты емес программалауға кіріспе.Дөңес функциялардың және дөңес жиындардың теория элементтері. Лагранж функциясы. Куна–Таккера теоремасы. Куна–Таккераның дифференциалды шарттар және олардың геометриялық интерпретациясы

Сызықты емес программалау есебі класы сызықты программалау есебі класынан ауқымдырақ. Сызықтық деп есептелінетін практикалық есептерді толық зерттеу нәтижесі олардың шын мәнінде сызықтық емес екендігін көрсетеді. Сызықты программалау есептері шешімдерінің тиімдісін табу мәселесі туындайды. Тіпті шешім алынған облыс дөңес облыс болса, онда есептер қатарында мақсаттық функция бірнеше локалді экстремумға ғана ие болуы мүмкін. Көптеген есептеу әдістерінің көмегімен локалді оптимум нүктесін табуға болады, бірақ, ол глобалдік (абсолюттік) оптимум нүктесі болатын, болмайтынын анықтау мүмкін емес. Егер сызықтық программалау есептерінде шешімнің экстремум нүктесі көпжақтың төбесі болса, онда сызықты емес программалау есептерінде көпжақтың төбесінде, қабырғасында немесе облыстың ішінде жатуы мүмкін. Егер есеп сызықты емес шектеулі болса, онда шешім алынған облыс дөңес болмайды, сондай-ақ глобалдік оптимумнан басқа локалдік оптимум нүктесі табылуы да мүмкін.

Нақты объектілерді немесе технологиялық процесстерді жобалау есептерінде математикалық моделдер нақты ішінде болатын физикалық яғни сызықты емес процесстерді көрсету қажет. Сол объекттердің немесе процесстердің айнымалылары физикалық сызықты емес зандармен өз – ара байланысады, ол массаны немесе энергияны сақтау зандары. Олар осы объектті немесе процессті физикалық өткізілімділігін қамтамасыз ететін шекті диапазондармен шектелген. Нәтижесінде ғылыми-зерттеу жобада және жобалау есептерінде кездесетін көп математикалық программалау есептері-ол сызықты емес программалау есептері (СЕП).

Сызықты емес программалау бөлімдері

Дөңес программалау	Дөңес программалау есептері – ол дөнес функциянын минимумін (немесе қайқы максимумы), тұйықталған дөңес жиында берілген, анықтайтын есеп.
Квадраттық программалау	Квадраттық программалау есептерінде нысаналы функция – квадратты, ал шектеулер –сызықты.
Бүтін санды программалау	Бүтін санды программалау есептерінде белгісіз параметрлер тек қана бүтін санды мән болады.
Стохастикалық программалау	Стохастикалық программалау есептерінде нысаналы функцияда немесе шектеулер функциясында ықтималдық теориясынын зандарына бағынатың кездейсоқ шамалар болады.
Динамикалық программалау	Динамикалық программалау есептерінде шектеулер уақыт параметрі сияқты болады сол сәтте дифференциалдық теңдеулермен жазылады.Динамикалық программалау есептерінін шешуін табу процессі көпқадамды болып саналады.

Сызықты емес программалау әдістерінін классификациясы*:*

1. Жергілікті критерийдің саны бойынша нысаналы функцияда әдістер бөлінеді:	• бiркритерийлiк, • көпкритерийлiк.
2. $\overline{X}$ вектор ұзындығы бойынша әдістер бөлінеді:	• бір параметрлі немесе бір өлшемді (n = 1), Көп параметрлік немесе (n1) көп өлшемді
3. Шектеулер бар болу бойынша сызықты емес программалау әдістері бөлінеді:	• шектеусіз (шартсыз тиімдеу), • шектеулермен (шартты тиімдеу).
4. Экстремум іздестіру әдістер алгоритмінде қолданатын информацияның типы бойынша бөлінеді:	• Тура іздестірудің әдістері яғни ол нысаналы функцияның экстремумын іздестіру барысында тек қана өзінін мәндері қолданылатың әдістер; • Бірінші ретті градиенттік әдістері яғни функцияның экстремумын іздестіру барысында тек қана оның бірінші туындысының мәні қолданылады; • Екінші ретті градиенттік әдістері яғни функцияның экстремумын іздестіру барысында оның бірінші туындысы мен бірге екінші туындысы да қолданылады

Ескерту. Сызықты емес программалау әдістердің ешқайсы әмбебап болып саналмайды. Әрбір нақты жағдайда қолданатын әдістін шешілетің есептің ерекшеліктеріне бейімделу қажет.

6.2 Есептің қойылымы.

Сызықты емес программалау есебінін жалпы түрі:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \rightarrow \max(\min)$$
$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \leq b_i, i = 1,2,\ldots,m$$
,

Нысаналы функцияға және айнымалылардың шектеулеріне сызықтық талаптары жоқ.

Классикалық тиімдеу әдістеріне жататың сызықты емес есептер класстары болады. Оларға орындалатың шарттар:

- Шектеулер арасында теңсіздіктер жоқ;
- Айнымалылар терістіктер шарттары міндетті емес;
- Дискреттік айнымалылар жоқ;
- m, φ_i, f үздіксіз және екінші реттік дербес туынды болады

Сызықты емес және математикалық программалау есебі келесі түрде беріледі:

Айнымалыларды табу $x_1, x_2, \ldots x_n$,

шарттарға қанағаттандырылады $\phi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = b_i, i = 1,2,\ldots,m$

және функцияны максимумға (минимум) айналдырады

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

6.3 Дөңес функциялардың және дөңес жиындардың теориялар элементтері

n - қалыпты R^n кеңістікті қарастырайық және $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сол кеңістікте нүкте.

Екі нүктені $\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ және $\vec{x}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ қарастырайық R^n -ге жататың.

Нүктелердің жиындысы $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, келесі түрде жазылады

$$\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

(координаталар түрінде келесі түрде жазылады:

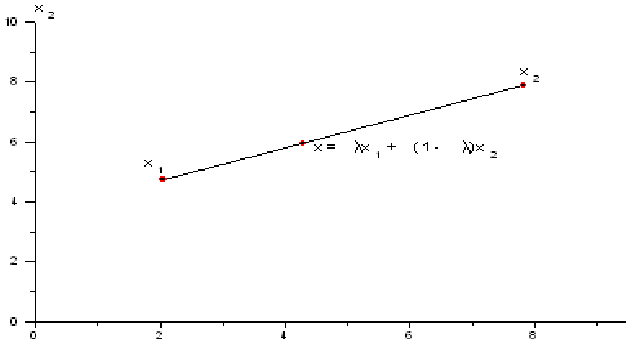
$$x_i = \lambda x_i^{(1)} + (1-\lambda)x_i^{(2)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad 0 \le \lambda \le 1 \ ),$$

Дөнес нүкте $\vec{x}_1$ және $\vec{x}_2$ **комбинациясы** деп аталады немесе $\vec{x}_1$ және $\vec{x}_2$ қосатың **кесінді**.

$\vec{x}_1$ және $\vec{x}_2$ нүктелері **кесіндінің соңғы нүктелері** деп аталады. *n* =2 и *n* =3 жағдайда- ол кесінді тұрғыда немесе кеңістікте (сур. 1).

=0 болса, онда $\vec{x} = \vec{x}_2$,

ал =1 болса, онда $\vec{x} = \vec{x}_1$, яғни =0 және =1 кесіндінің соңғы нүктелері болады



Сурет 1

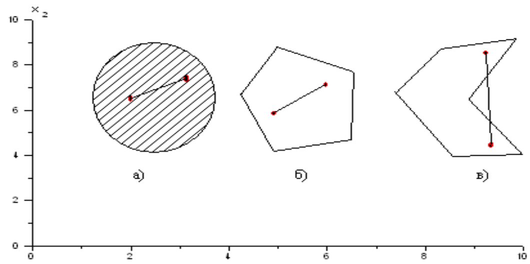
Егер R^n -да $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ нүктелерінің *k* берілсе.

Нүкте $\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i$ сонда барлық $\alpha_i \ge 0$ және $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ нүктелердің дөнес **комбинациясы** деп аталады

Егер $G \subset R^n$ кеңістікте кейбір облыс бар R^n (басқа сөзбен, *G* R^n *нүктелерден жиынды бар*)

Множество (область) $G \subset R^n$ жиын дөнес деп аталады, егер $\vec{x}_1 \in G$ және $\vec{x}_2 \in G$, $\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \in G$ шығады l Î [0,1].

2(а, б) – суретте дөнес жиындар, ал 2 (в) суретте жиын дөнес емес, өйткені оның ішінде сондай қос нүкте бар кескіндерді қосатың сол жиындарға кіреді.



Сурет 2

В пространстве R^n кеңістікте теңдеу

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

Жоғарғы жазықтықты анықтайды және дөңес жиын болып саналады, ол жерде $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$

кейбір константалар

Дөңес жиындар қиылысу туралы теорема.

Теорема**.** Кез келген түпкі сандар қиылысі дөңес жиынды болып келеді.

Алдыңғы тарауларда операцияны зерттеу есептерімен және олардың жіктелуі, шешімі қалай табылатындығы туралы танысып өттік. Ары қарай операцияны зерттеуде жиі қолданылатын математикалық әдістерді қарастырамыз. Жоғарыда келтірілген ең қарапайым есептерде тиімділік көрсеткіші (мақсат функция) екі топ параметрлерінен тәуелді болады, берілген шарт α_+ және шешім элементтері x, яғни

W=W(α ,x). (6.1)

α -шартында есеп шешіміне шектеулер бар. Х шешімі $x_1,x_2,\dots,x_n$ n-шешім элементінен тұрсын $X(x_1,x_2,\dots x_n)$

Осы табылған $x_1,x_2,\dots x_n$ мәндері W шамасын максимум немесе минимум мәндеріне айналдыратын болсын. (экстремум).

Мұндай есептер-шектеулері берілген жағдайда функцияның экстремум мәнін қамтамасыз ететін параметрлерді анықтау математикалық программалау есептері деп аталады. Математикалық программалау есептерін шешуде туатын қиындықтар келесілерден тәуелді:

а) шешім элементтерімен байланыстыратын W функционалының түрінен;

б) есеп «өлшемінен», яғни $x_1,x_2,\dots x_n$

в) шешім элементтеріне қойылған шектеулер түрі мен санынан.

Математикалық программалау есептерінің ішінде ең кең тараған сызықтық программалау есептері.

Оларды сипаттайтындар: а) W тиімділік көрсеткіші (мақсат функция) $x_1,x_2,\dots x_n$ шешім элементтерінен сызықты тәуелді; б) шешім элементтеріне қойылатын шектеулер $x_1,x_2,\dots x_n$-ге сызықтық теңдеулер немесе теңсіздіктер түрінде беріледі.

Мұндай есептер өмірде жиі кездеседі, мысалы қорлады үлестіру, өндірісті жоспарлау, көлік жұмысын ұйымдастыру т.б. Шындығында тәжрибе жүзінде көптеген есептерде "шығындар" мен "табыстар" сатып алынған қорлар санына сызықты тәуелді. Бұдан тәжрибеде кездесетін тәуелділіктің бәрі сызықты болады деген ой тумауы керек.

Сызықтық программалау есептеріне мысалдар келтірейік.

1. Тамақ рационы жайлы есеп. Ферма коммерциялық мақсатта ірі қараларды бордақылауға қойды. Есепті оңайлату үшін төрт түрлі жем-шөп қолданылады делік: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$; Әрбір өнім бағасы сәйкес C_1, C_2, C_3, C_4; Осы өнімдерді пайдалана отырып, малдың күнделікті салмағын белгілі бір шамаға өсіру үшін қажет нәрлі заттардың мөлшері, күнделікті рационға кіретін жем-шөптің бағасы мен олардың құрамындағы нәрлі заттардың мөлшері келесі кестеде көрсетілген:

Жем-шөп	Нәрлі заттар			
	Белок	Кальций	Көмірсу	Витамин
1. $П_1$ $П_2$ $П_3$ $П_4$	A_{11} A_{21} A_{31} A_{41}	A_{12} A_{22} A_{32} A_{42}	A_{13} A_{23} A_{33} A_{43}	A_{14} A_{24} A_{34} A_{44}
2. Нәрлі зат мөлшері	$в_1$	$в_2$	$в_3$	$в_4$

Есептің мақсаты әрі арзан, әрі құнарлы рацион құру.

Есептің математикалық моделін құру үшін рационға енетін $П_1$, $П_2$,$П_3$,$П_4$ жем-шөптің күнделікті берілетін санын X_1, X_2, X_3, X_4 деп белгілейміз.

Тиімділік критериі рацион бағасын минималдау, ол есеп шешімінен сызықты тәуелді болғандықтан.

$$\alpha(\bar{x})=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+C_4X_4\rightarrow\min \qquad (6.2)$$

немесе қысқаша

$$\alpha(\bar{x})=\sum_{j=1}^{4} CiXi\,;$$

Есептің шектеулерін нәрлі заттар бойынша жазамыз.

$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+a_{41}\,x_4$ ¿ $в_1$

$a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3+a_{42}\ x_4$ ¿ $в_2$

$a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3+a_{43}\ x_4$ ¿ $в_3$ (6.3)

$a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}\ x_4$ ¿ $в_4$

Бұл сызықтық теңсіздіктер X_1, X_2, X_3, X_4 шешім элементтеріне қойылатын шектеулер.

Сонымен, қойылған есепті келесі түрде формулалауға болады: Берілген (6.3) шектеулерін қанағаттандыратын (6.2) сызықтың функционалға минимал мән әперетін X_1, X_2, X_3, X_4 белгісіздерінің оң мәндерін табу.

2. Өндірісті жоспарлау есебі. Кәсіпорын үш түрлі A_1, A_2, A_3 өнім өндіреді делік. Өнімнің әрбір түрін өндіруге жоспар берілген, яғни A_1 өнімі $в_1$ бірліктен кем емес, A_2 өнімі $в_2$ бірліктен кем емес, A_3 өнімі $в_3$ бірліктен кем емес. Жоспарды артығымен орындауға болады, егер шектеулер сұраныс шартын қанағаттандыратын болса, ал сұраныс өнім үшін $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Өнімдерді өндіру үшін төрт түрлі шикізат қолданылады делік: S_1, S_2, S_3, S_4 және олардың қорлары $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ сандарымен шектелген болсын.

Әрбір өнім өндіруге жұмсалатын шикізат мөлшерін a_{ij} деп белгілеп, келесі кестеге орналастырайық

Шикізат	Өнімдер		
	A_1	A_2	A_3
3. S_1	A_{11}	A_{21}	A_{31}
S_2	A_{12}	A_{22}	A_{32}
S_3	A_{13}	A_{23}	A_{33}
S_4	A_{14}	A_{24}	A_{34}

Сондай-ақ A_1 өнімін өткізгенде алынатын пайда C_1, A_2-пайда C_2, A_3-пайда C_3-ке тең болсын. Өндірістің жоспары орындалатын және жалпы пайда максимал болатындай өндіріс жоспарын құру қажет.

Есептің шартын сызықтық программалау түрінде жазу үшін, A_1, A_2, A_3 өнімдерінің санын X_1, X_2,X_3 деп белгілейміз.

Жоспарлы тапсырманың орындалуы келесі теңсіздіктер түрінде

x_1 ¿ $в_1$, x_2 ¿ $в_2$, x_3 ¿ $в_3$ (6.4)

өнімнің артық мөлшерінің болмауы

x_1 ¿ β_1

x_2 ¿ β_2

x_3 ¿ β_3 (6.5)

теңсіздіктері түрінде.

Шикізат қорлары бойынша шектеулер

$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3$ ¿ γ_1

$a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3$ ¿ γ_2

$a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3$ ¿ γ_3 (6.6)

$a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3$ ¿ γ_4

Жоспар бойынша алынатын пайда

$$\alpha(\bar{x}) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \rightarrow \max \quad (6.7)$$

Сонымен біз шектеулері теңсіздіктер түрінде берілген сызықтық функцияны максимумға шығарылатын сызықтық программалау есебін алдық.

Келесі есептің шектеулері өзгешелеу.

3. Құрал-жабдықтарды жүктеу туралы есеп. Тоқыма фирмасында екі түрлі станок бар және бірінші түрінің саны-N_1, екінші түрінің саны- N_2 болсын. Станоктардың өнімділігі әр түрлі және M_1, M_2, M_3 үш түрлі мата өндірілсін. Станок өнімділігі a_{ij} келесі кестеде келтірілген

Станок түрі	Мата түрі		
	M_1	M_2	M_3
1	A_{11}	A_{12}	A_{13}
2	A_{21}	A_{22}	A_{23}

Әр мата түрінен фирма M_1-C_1, M_2-C_2, M_3-C_3 пайда табады.

Фирманың айлық жоспары M_1 матасынан $в_1$-ден кем емес, M_2 матасынан $в_2$-ден кем емес, M_3-матасынан $в_3$ кем емес және матаның әр түрінен $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ метрден артық емес өндіру қажет. Сондай-ақ барлық станоктар жұмыс істеуі тиіс. Сонымен барлық станоктарды бірдей жүктей отыра M_1, M_2, M_3 маталарын өндіргендегі айлық жиынтық табыс максимал болатындай жоспар құру қажет.

Бұл есептің мазмұны алдыңғы есеп мазмұнына ұқсас болғанымен өз ерекшелігі бар.

Сондықтан ізделінетін айнымалылар екі индекспен өрнектеледі, біріншісі-станок типі, екіншісі-мата түрі яғни

$$X_{11} \quad X_{12} \quad X_{13}$$
$$X_{21} \quad X_{22} \quad X_{23} \qquad (6.8)$$

X_{11} –M_1 матасын өндіруге арналған 1 типті станок саны

X_{12} –M_2 матасын өндіруге арналған 1 типті станок саны т.с.с. Есептің экономикалық-математикалық моделін құру үшін алғашқы шектеулерді X_{ij} шешім элементтеріне сәйкес аламыз.

$$a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21} \;¿\; в_1$$
$$a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22} \;¿\; в_2 \qquad (6.9)$$
$$a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23} \;¿\; в_3$$

Жоспардың артығымен орындалудың шектеулері келесі түрде алынады:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21} \;¿\; \beta_1 \\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22} \;¿\beta_2 \\ a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23} \;¿\beta_3 \end{cases} \qquad (6.10)$$

Станоктардың толық жүктелуін шегін келесі теңдеулер түрінде көрсетеміз.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=N_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=N_2 \end{cases} \qquad (6.11)$$

Есептің мақсат функциясы , яғни матаның әр түрінен алынатын пайда келесі түрде жазылады:

$$\alpha = C_1\left(a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}\right)+C_2\left(a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}\right)$$
$$+C_3\left(a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}\right) \qquad (6.12)$$

немесе қысқаша

$$\alpha = \sum_{j=1}^{3} Cj \sum_{i=1}^{2} aijxij \qquad (6.13)$$

Алты аргументтен тұратын бұл функцияның максимум мәнін табуымыз қажет:

$$\alpha \rightarrow \max$$

Сонымен тағы да сызықтық программалау есебін алдық: (6.9), (6.10) шектеулер теңсіздігін, (6.11) шектеулер-теңдігін қанағаттандырып, (6.13) мақсат функцияға максимал мән әперетін x_{11}, x_{12}, ..., x_{23} айнымалыларының оң мәндерін табу. Бұл есепте алты шектеу теңсіздікпен және екі шектеу теңдікпен берілген.

4. Шикізатпен қамтамасыз ету есебі.

Белгілі шикізатпен қамтамасыз етілетін үш кәсіпорын K_1, K_2, K_3 болсын. Әр кәсіпорынның шикізатпен тұтыным мөлшерлері a_1, a_2, a_3 бірлік делік. Осы кәсіпорындардан әртүрлі қашықтықта орналасқан бес шикізат базасы белгілі. $П_i$ кәсіпорынның $Б_j$ базадан алынатын шикізат бірлігінің бағасы Сij теңге болсын (бірінші индекс-кәсіпорын нөмері, екінші индекс-база нөмері)

Кәсіпорын	База				
	Б1	Б2	Б3	Б4	Б5
4. 5. **K_1** K_2 K_3	C_{11} C_{21} C_{31}	C_{12} C_{22} C_{32}	C_{13} C_{23} C_{33}	C_{14} C_{24} C_{34}	C_{15} C_{25} C_{35}

Әр базадағы шикізат қоры шектеулі және оның өндірістік қуаты: сәйкес Б1, Б2, Б3, Б4, Б5 базаларда в1, в2, в3, в4, в5 бірлікке тең делік.

Кәсіпорындардың тұтыным мөлшерін қанағаттандыра отырып шикізатпен қамтамасыз етудің шығындары минимал болатындай жоспар құру қажет.

Мұнда да есептің шарты сызықтық программалау есебіне келтіріледі. Есептің математикалық моделін құру үшін белгісіздер енгізейік:

i – ші кәсіпорынның j – ші базадан алынатын шикізат мөлшерін X_{ij} – деп белгілейік. Сол кезде жоспар келесі 15 шешім элементтерінен тұрады.

6.
$$\left.\begin{matrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} \end{matrix}\right\} \quad (6.14)$$

Тұтыным мөлшері бойынша шектеулер енгіземіз

7.
$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} &= a_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} &= a_2 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} &= a_3 \end{aligned}\right\} \quad (6.15)$$

Базалардың өндірістік қуаты бойынша шектеулер енгіземіз:

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + X_{31} &\le в_1 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &\le в_2 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &\le в_3 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} &\le в_4 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} &\le в_5 \end{aligned}\right\} \quad (6.16)$$

Мақсат функциясын шикізатқа жұмсалатын шығындарды минималдайтын қос қосынды (сумма) түрінде аламыз.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} CijXij \rightarrow \min \quad (6.17)$$

Сонымен (6.15) шектеулер – теңдіктер, (6.16) шектеулер теңсіздіктері қанағаттандыратын, (6.17) сызықтық функцияны қанағаттандыратын белгісіздердің оң мәндерін табу.

Сонымен, біз сызықтық программалаудың бірнеше есебін қарастырдық. Олар өзара ұқсас, айырмашылықтары мақсат функцияларының мәндері мен шектеулерінде, себебі кейбір шектеулер теңдікпен, кейбірі теңсіздікпен берілген. Бірақ олардың бір түрінен екінші түріне өту өте оңай.

Сызықтық программалаудың негізгі есебі.

Сызықтық программалаудың кез-келген есебін «сызықтық программалаудың негізгі есебі» деп аталатын стандартты түрге келтіруге болады, ол есеп төмендегідей формулаланады: x_1, x_2 ,..., x_n айнымалыларының келесі теңдеулерді қанағаттандыратын

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=в_1 \quad (7.1)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=в_2$$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=в_m$

және келесі сызықтық функцияға максимум мән әперетін

$$\alpha=C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_nX_n\rightarrow \max \qquad (7.2)$$

оң мәндерін табу.

Бұл тұжырымның дұрыс екендігіне көз жеткізу оңай. Біріншіден α максимум емес, минимумға айналу керек болса, онда α таңбасын өзгеруге болады. (α максималдау емес, а Z`=-Z). Сондай-ақ кез-келген теңсізіктен «қосымша» айнымалылар енгізе отырып теңдеулер алуға болады. Оны нақты мысалды көрсетейік.

Келесі теңсіздік-шектеулерді қанағаттандыратын

$5x_1+3x_2-x_3$ ¿ 8
$2x_1-2x_2+3x_3\leq 12$ (7.3)

және $Z=4x_1+x_2+2x_3 \rightarrow \max$ (7.4)

x_1, x_2, x_3 айнымалыларының оң мәндерін табу қажет. (7.3) шектеулерінің теңсіздіктерінен стандартты түрге келтіретін

$5x_1+3x_2-x_3$ ¿ 8 (7.5)
$-2x_1+2x_2+3x_3$ ¿ -12

Теңсіздіктердің сол жағын y_1 және y_2 арқылы белгілейін:

$y_1= 5x_1+3x_2-x_3-8$ (7.6)
$y_2= -2x_1+2x_2-3x_3+12$

(7.5) және (7.6) шарттарынан y_1, y_2 жаңа айнымалыларының теріс еместігі көрінеді.

Қандай есепті шешуге тиіспіз?

Мұнда x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 айнымалыларының оң мәндерін табуымыз қажет және олар (7.6) шарттарын қанағаттандырып, сызықтық функцияны максимум мәнге айналдыруы қажет (y_1, y_2 айнымалылары сызықтық функцияға 0-коэффициенттерімен енеді). Сонымен сызықтық программалаудың негізгі есебін алдық. Сызықтық программалаудың негізі есебін алу үшін оған екі айнымалы енгіздік. Жалпы сызықтық программалаудың негізі есебінен шектеулері-теңсіздіктер болатын түріне де өтуге болады.

Бақылау сұрақтар:

1. Сызықты емес программалау бөлімдері.
2. Сызықты емес программалау әдістердің классификациясы.
3. Сызықты емес программалау есептің қойылымы.
4. Нүктелердің дөнес комбинациясы деген не?
5. Дөнес жиын деген не?
6. Қандай жиын дөнес емес?
7. Дөнес жиынның мысалдары.

Дәріс №7. Шартты тиімдеудің әдістері.Ықтимал бағыттардың әдісі. Шартты градиенттің әдісі. Айыптық функциялардың әдісі

Сызықты емес программалау есептерін шешу тура және тура емес сандық әдістеріне бөлуге болады.

Тура әдістер тиімдеу бастапқы есептерде қолданылады және нүктелердің тізбектері шығарып жатады {x [k]}, сонда f (x [k +1] < f (x [k]болады.

Сондықтан осындай әдістерді жиі *түсірудің әдістері* деп атайды. Математикалық ауысу *k*—қадамында *(k.* = 0, 1, 2, ...) $x[k]$ *нүктеден* $x[k+1]$ нүктеге дейін келесі түрде жакға болады:

$$x[k+l] = x[k] + a_k p[k],$$

$p[k]$ —*түсу бағытың* анықтайтын вектор;

a_k — сол бағыт қадамының ұзындығы.

Операция шарты түгелдей белгілі болған «анықталған» деп аталатын ең қарапайым жағдайды алайық. Ол кезде операция табысы тәуелді болатын барлық факторлар екі топқа бөлінеді:

3) алдын – ала берілген белгілі факторлар, оны қысқаша α деп белгілейік;
4) x – шешімдер жиынын құрайтын, бізден тәуелді шешім элементтері.

Егер дұрыстап қарасақ, бірінші топтағы факторларға шектеулер енетіндігін көреміз, яғни x шешімінің мүмкін облысын анықтайды.

W – тиімділік көрсеткіші екі топ факторларынан тәуелді. Оны келесі формула түрінде көрсетуге болады:

$$W = w(\alpha, x) \quad (4.1).$$

Мұндағы x және α жалпы жағдайда сан ғана емес, ал сандар жиыны. Берілген α шартына шешім элементіне әсер ететін шектеулер қойылады, олар теңдеу немесе теңсіздік түрінде болады.

(4.1) тәуелділігі тура және оның шешімі алынсын делік. Онда кері тәуелділік келесі түрде формулаланады.

Берілген α шарттарының нәтижесінде w тиімділік көрсеткішін максимумға айналдыратын $X=X^*$ шешімін табу қажет.

Ол максимум келесі түрде өрнектеледі:

$W^*=\max \{W(\alpha ,x)\}$ (4.2)

$X \in X$

(4.2) формула былай оқылады: W*- X-тің мүмкін шешімдер жиынына енетін $W(\alpha ,x)$ мәндерінің максимал мәні

Сонымен, функцияның немесе функционалдың максимум мәнін табатын математикалық есеп алдық. Мұндай есептер математикада жақсы өңделген «вариациялық» есептер класына жатады. Мұндай қарапайым есептер көпшілікке мәлім.

Көп аргументті функцияның максимум немесе минимум мәнін табу үшін, әрбір аргумент бойынша дифференциалдаймыз және туындыларын нөлге теңеу арқылы теңдеулер жүйелерінің шешімін аламыз. Былайша қарағанда оңай сияқты. Бірақ мұндай классикалық әдіс операцияны зерттеуде аз қолданылады. Біріншіден аргумент көп болған кезде теңдеулер жүйесі күрделенеді, экстремум іздеу қиындайды.

Екіншіден, шешім элементтеріне шектеулер қойылғанда экстремум туындының нөльге тең нүктесінде емес, X облысының шекарасында табылады.

Кейбір есптерде W функцияның туындысы табылмауы мүмкін. Соның бәрі экстремум іздеу есептерін қиындата түседі.

X* оптимал шешімін табатын экстремум іздеу есептері, W функциясының ерекшеліктеріне және шешімге қойылатын шектеулер түрлеріне тәуелді. Мысалы, егер W функциясы X_1 X_2 ,..., шешім элементтерінен сызықты тәуелді болса, және X_1 , X_2 ,..., қойылатын шектеулер сызықтық теңдеулер немесе теңсіздіктер түрінде берілсе, онда стандартты әдістермен шешілетін классикалық сызықтық программалау есебі алынады.

Егер W функциясы дөңес болса, онда арнайы әдістер «квадраттық программалау» әдістерімен шығарылады. Операцияның көп этапты басқаруын оптималдау үшін динамикалық программалау әдістері қолданылады. Сонымен қатар экстремум табатын сандық әдістер де бар, олар ЭЕМ арнайы бағдарламалары арқылы жүзеге асады. Сонымен қатар оптимал табу есептері классикалық вариациялық (шектеулері бар немесе жоқ) таза математикалық есептерге келтіріледі, оларды есептеу техникаларында шығару аса қиындық туғызбайды. Ал элементтер анықталмаған жағдайда есептер мүлдем өзгеше.

Анықталмағандық жағдайында шешімдерді таңдау мәселелері.

Алдыңғы дәрісте операцияны зерттеудің анықталғандық жағдайындағы кері есебін қарастырдық, онда тиімділік көрсеткіші W екі топ факторларынан ғана тәуелді болды: берілген, алдын-ала берілген α мен шешім элементтері X. Операцияны зерттеудің нақты есептеріне бұл топтан басқа-белгісіз факторлар жиыны енеді оны ξ деп белгілейік. Сонымен W тиімділік көрсеткіші үш топ факторларынан тәуелді $W=W(\alpha ,x, \varsigma)$. (5.1)

W шамасы белгісіз ξ факторларынан тәуелді болған соң, α және x шамасы белгілі болған күннің өзінде анықталмай қалады. Оптимал шешімін іздеу есебі де анықталмағандық жағдайға ұшырайды. W белгісіз шамасын максималдау мүмкін емес қой! Қандай жағдай болса да белгісіз шаманы максималдауға тура келеді. Осы айтылғандарды математика тіліне аударсақ, келесі есепті аламыз.

Берілген α шарты бойынша белгісіз ξ шартын есепке ала отырып, W тиімділік көрсеткішіне максимал мән әперетін $X \in X$ шешімдерін табу қажет.

Анықталмаған ξ факторларының енуін есептің шешімін анықталмағандық жағдайда табу болып табылады.

Бірақ қандай жағдайда болса да жақсы ма, нашар ма, әйтеуір шешім қабылдануы керек. Сондықтан әйгілі шетелдік операцияны зерттеу маманы

Т.Л. Саати өз пәні туралы былай деген:

«Операцияны зерттеу тәжрибелік сұрақтарға нашар жауап беру өнері, ал басқа әдістермен одан да нашар жауап алынуы мүмкін».

Анықталмағандық жағдайында шешім қабылдау өмірде жиі кездеседі. Мысалы біз саяхатқа шығу үшін чемоданға заттарымызды жинақтайық. Чемодан салмағы, заттар жиыны (α шарты) белгілі, ол баратын жердегі ауа райы белгісіз (ξ шарты). Қандай киімдер (x) алу қажет? Бұл есеп ешбір математикасыз шешілгенімен, сыртқы түрі операцияны зерттеу есептеріне ұқсас. Сонымен қатар жас адамды алатын болсақ, ол көрген қызықтарын максималдағысы келеді, ол қарт кісілер ауыру ықтималдығын минималдағысы келеді.

Келесі есепті қарастырайық. Жәрмеңкеде сату үшін тауар ассортименті жоспарлансын. Пайданы максималдау керек. Бірақ сатып алушылар мен тұтыным мөлшері белгісіз. Бәрі анықталмағандық, қалай шешім қабылдау керек? Тағы бір есеп берілсін: бірнеше жылға қарулану жоспары жасалынады делік. Бірақ қарсы жақ та, оның қаруы да белгісіз. Қандай шешім қабылдануы керек?

Мұндай есептерге шешім қабылдаудың әртүрлі тәсілдері бар. Яғни ξ белгісіз факторлары ықтималдық теориясындағы кездейоқ шамалар болатын болса, онда олар стохастикалық есептер деп аталып, анықталмағандық-стохастикалық анықталмағандық деп аталады. Стохастикалық операцияны зерттеу есебіне мысал келтірейік. Асханаға келушілерді көбірек қабылдау үшін жұмысын қайта ұйымдастыру қаралып отыр. Күнделікті асханаға келетін жұмысшы саны белгісіз, және олар келгенде қандай тамақ түрін дайындау керек және қанша уақыт қызмет көрсетілуі қажет. Бұл кездейсоқ шамалардың мәні белгісіз болса, онда стохастикалық жолмен табылуы ықтимал. Осы анықталамағандықты нақты түсіндірейік. Белгісіз ξ факторлары кездейсоқ шамалар, олардың ықтималдық сипаттамалары-үлестіру заңы, математикалық күтілу, дисперсия т.б. анықталсын. Онда W тиімділік көрсеткіші осы факторлардан тәуелді болатын кездейсоқ шама болады. Кездейсоқ шаманы максималдау мүмкін емес: Х-тің кез келген шешімінде ол да кездейсоқ болса не істеу керек?

Егер кездейсоқ шамаларды олардың орта мәндерімен ауыстырсақ есеп анықталғандық түр алады және оны кәдімгі әдістермен шығаруға болады.

Тәжрибе жүзінде көптеген физиканың, механиканың, техниканың есептері олардың орта мәндерімен алмастырылып шығарылады.

Сонымен Q операциясын қарастырайық, оған ξ «кездейсоқ факторлары» әсер ететін болса, онда W тиімділік көрсеткіші де кездейсоқ болады.

Келесідей ой туады: тиімділік көрсеткішіне орта мән алынатын болса, онда ол математикалық күтілу $\overline{W}$ =M[W] інде жазылады және $\overline{W}$ =M[W(α ,x, ς)] $\rightarrow$ max
мәнге айналдыратын х шешімін іздеу қажет.

Көптеген жағдайларда мұндай тәсіл есеп шартын қанағаттандырады. Сол кезде анықталмағандық элементін не істеу керек? Әрбір жеке операцияның тиімділігі ξ кездейсоқ факторларының мәндерінен тәуелді. Ал бұл жерде біз «орташа » мәндерді оптималдай отырып, көп рет қайталаған соң дұрыс шешімін табуымыз мүмкін. «Орта мәндер бойынша оптималдау» операцияны зерттеудің стохастикалық есептерінде кеңінен қолданылады.

Келесі есепті қарастырайық. Үлкен қалада жедел жәрдем көмегін көресту үшін автоматтандырылған басқару жүйесі (АБЖ) ұйымдастырылсын. Қаланың әртүрлі аудандарында түскен тапсырмалар орталық басқару пунктіне жіберіледі.

АБЖ диспетчер қызметін тиімді болатындай етіп алгоритм (ереже) құру қажет. Тиімділік көрсетікішін W деп алсақ, дәрігерді күту уақыты Т болсын. Т-кездейсоқ шама. Егер «орташа оптималдауды» алатын болсақ, онда күту уақыты минимал болатын алгоритмді таңдау қажет сияқты. Бірақ жеке аурулардың дәрігерді күту уақыты өзара қосылмайды. Бір ауруға дәрігер тез барып, екіншісі өте ұзақ уақыт күтуі мүмкін. Ондай келеңсіз жағдайды болдырмас үшін Т күту уақытына бір to шектеу қою шарт. Яғни Т-кездейсоқ шама болғандықтан Т ¿ to шартын қанағаттандырсын делік және ең үлкен ықтималдықпен орындалсын.

Оған β мәнін берейік, ол 1-ге жақын болсын (0,99 немесе 0,995), ондай оқиға тәжрибе жүзінде шындыққа жанасады, Х шешімдерінің арасында бұл шартты қанағаттандырмайтын шешім жоқ деген сөз. Мұндай шектеулер стохастикалық шекетеулер деп аталады және ондай шектеулердің болуы оптималдау есебін өте күрделендіреді.

Тақырып 3. Динамикалық программалау элементтері

Дәріс №8. Динамикалық программалау моделдері.

Қорлардың оптималды бөлу моделі, динамикалық объектпен оптималды басқару моделі

Модельді уақыт факторына байланысты ***динамикалық*** және ***статистикалық*** деп екі топқа жіктеуге болады.

Статистикалық модель деп *объект жөнінде алынған ақпараттың белгілі бір уақыт бөлігіндегі үзіндісін айтуға болады.* Мысалы тіс емханасында дәл сол уақыт мезетіндегі оқушылардың тістерінің жағдайы туралы мәлімет береді:бастауыш сыныптағылардың сүт тісі, орта және жоғарғы буындағы оқушылардың емделген, емделуге тиісті тістерінің саны т.б.

Динамикалық модель *– уақыт барысындағы объектінің қасиеттерінөзгерісін көрсету мүмкіндігін береді.* Мысалы, жеке оқушының емханадағы түбіртек кітапшасын динамикалық модель деп айтуға болады. Өйткені осы кітапша бойынша жыл сайын олардың денсаулығындағы болып жатқан өзгерістерді анықтау мүмкіндігі бар.

Үй салу кезінде оның іргетасының қабырғалары мен тіреулерінің үнемі түсіп тұратын күшке шыдамдылығын тексеру керек. Бұл – үйдің статистикалық моделі. Сондай – ақ дауылға, жер сілкінісіне т.б. уақыт факторларына байланысты болатын өзгерістерді де ескеру қажет. Бұл мәселелерді динамикалық модельге сүйене отырып анықтауға болады.

Динамикалық программалау әдісі – бұл басқарудың жіберуші дискретті жиынымен берілген математикалық программалау есептерінің тиімді шешімін жылдам табуға мүмкіндік беретін құрал, яғни әртүрлі шешімдерді алып келетін, бет алыстың әртүрлі варианттарының кейбір көрсеткіштерінің арасынан ең жақсысын таңдап алу керек.

Осытәріздескезкелгенесептіңшешімінмүмкінболатынбарлықварианттардытеружолыменжәнеолардыңарасынанеңжақсысынтаңдауарқылыалуға болады. Бірақмұндайтеруқиындықтуғызуымүмкін. Мұндайжағдайдатиімдішешімдіқабылдаупроцесіқадамдарғабөлініп, динамикалықпрограммалауәдісімензерттелуіне

мүмкіндікалады. Динамикалықпрограммалауәдісінпайдаланыпжалпытүрдеесептіңшешімінқарастырайық .

Айталық, тиімдеупроцесі*n* қадамғабөлінсінделік. Әрбірқадамдаекітиптіайнымалылардыанықтауқажет - *s* жағдайайнымалысынжәне*x* басқаруайнымалысын.*s*айнымалысыжиынныңберілген*k*қадамдақандайжағдайлардаболатынмүмкіндігінанықтайды.айнымалысынабайланыстыосықадамдакейбір*kx*айнымалысыменсипатталатынбасқарудыпайдалануғаболады. *X*басқаруын*k*-қадамдапайдалану (,) *k k w s x* кейбірнәтижесінбередіжәнежүйенікейбіржаңа (,) *k s*=*s x* жағдайынаауыстырады. Сонымен, жүйеауысқан (,) *k s*=*s x* жағдайыберілген*s* жағдайыментаңдалынған*k x* басқаруынабайланыстыдепжәнежүйе*s*жағдайынақандайжолменауысқанынабайланыстыемесдепболжаймыз. *k*-шықадамдаәрбірмүмкінболатынжағдайүшінмүмкінболатынбарлықбасқаруларішінен **kx*тиімдібасқаруытаңдалынады,оның*k*шымен*n*шіқадамдарараралығындаалынатыннәтижесітиімдіболукерек.

Арықарай*k*қадамдыжүзегеасырунәтижесіндебелгілібіркіріснемесеұтысқамтамасызетіледідепсанаймыз, ол*s* жүйесініңалғашқыжағдайыментаңдалынған*k x* басқаруынабайланыстыжәне

1. $$F=\sum_{k=1}^{n} F_k\left(S_{k-1}, x_k\right) \Rightarrow \text{extremum};$$

теңболады. Сонымен,біз екі шартты тұжырымдадық, олшарттардықарастырылатындинамикалықпрограммалауесебіқанағаттандыруқажет. Әдетте бірінші шартты— салдары жоқ шарт, алекіншісін—есептің мақсаттық функциясының аддитивті шарты деп атайды.

Бірінші шарттың динамикалық программалау есебі үшін орындалуы Беллманның тиімді принципін тұжырымдауға мүмкіндік береді. Мұны орындамай тұрып, басқарудың тиімді стратегиясына анықтама берейік. *Басқарудың* тиімді стратегиясы деп $X = (x1 , x2 ,..., xn)$ басқарулар жиынтығын түсінуге болады.

Ысыту және суыту процестерін модельдеу.

Ішкі энергия. Ішкі энергия *(U)* системаның жалпы энергия қорын сипаттайды. Оның құрамына системаны құрайтын электрондардын, ядролардың, атомдардың, молекулалардың, бөлшектердің өзара әрекеті мен қозғалыстарындағы энергияның барлық түрлері енеді. Әйтсе де ішкі энергияға сыртқы күш өрісіндегі потенциалдык, энергия мен системадағы кинетикалық энергия[4] енбейді. Оның абсолюттік мәнін ең қарапайым система үшін де анықтау мүмкін емес және термодинамика мақсаты үшін ол керек емес. Система бір күйден екіншіге ауысқан кездегі оның ішкі энергия өзгерісінің мәнін табу маңызды:

U=U2-U1

Қарастырылып отырған процестегі системаның ішкі энергиясы көбейсе (артса), онда U оң, азайса теріс болады.Система өзін қоршаған ортамен әрекеттескенде пайда болатын құбылысты жұмыс дейді. Осындай жұмыс нәтижесінде системаның тепе-теңдігін бұзған сыртқы күш жойылады. Сонымен жұмыс - дегеніміз энергияны берудің макроскопиялық түрі екен. Олай болса, жұмыс жүргізілуі үшін сыртқы күштің болуы шарт. Енді осы ойды түсіндіру мақсатымен, газ көлемінің ұлғаюы кезіндегі жұмысты қарастырайық . *p* бастапқы қысым — және V_2 көлемі басым. Цилиндрдің *1*және *2* нүктесінде поршеньді ұстап тұратын шектеуіштер орнатылған делік. Поршеньге сырттан қысым түсірілсін, ол поршень астындағы, яғни цилиндр ішіндегі әуелгі қысымнан *p1* аз болсын: *p2<p1*. Егер 1-шектеуішті босатсақ, онда газдың көлемі ұлғайып, қысымның көлем өзгерісіне көбейтіндісіне тең шамадағы жұмыс атқарылады: А = p_2- *(V2^ — V1) = p2=0* . Поршеньнің сыртқы қысымы ра азайған сайын, газ көлемінің ұлғаюы кезінде атқарылатын жұмыс шамасы да азаяды және p_2 = 0 болса, А = 0. Ал, сыртқы қысым ішкі қысымнан шексіз аз мелшердегі қысымға ғана артық болса, онда ең көп жұмыс атқарылады, оны максималды жұмыс дейді.

Жылу - дегеніміз бір-біріне түйіскен денелердегі молекулаларың өзара соқтығысу (қақтығысу) арқылы, яғни система ішінде жылу алмасу жолымен энергияны беру, жеткізу түрі. Ал жылу алмасу — макроскопиялық не ретсіз қозғалыстағы бөлшектердің энергияны беру түрі. Жылудын, бағытын және өзара берілуін, қозғалысын температура көрсетеді.

Жұмыс (А) пен жылу (Q) ішкі энергия *(V)* сияқты системалардын қасиетін көрсетпейді, олар тек энергияны бір системадан екіншіге жеткізеді. Жылуды беру немесе жұмысты атқару үшін система өзін қоршаған ортамен не басқа системалармен әрекеттесуі кажет. Қөбіне, система өзін қоршаған ортамен не басқа системалармен әрекеттесуі кажет. Әдетте, система өзін қоршаған ортадан не басқа системадан жылу алса, жылуды және осы кездегі система атқарған жұмысты оң, ал кері жағдайда теріс дейді.

Энтальпия. Көптеген процестерді термодинамикалық тұрғыдан қарастырғанда ішкі энергиямен қатарфункциясы да жиі кездеседі. Мұндағы *р* — система қысымы; 1/— система көлемі. Осы теңдеудің оң жағындағы көбейтіндіні *(рY)* системадағы потенциалды энергиямен тедестіруге болады. Энтальпияны "системадағы кеңейтілген энергия" немесе "жылу ұстағыш-тық" деп те айтады. Энтальпия да ішкі энергия сияқты система күйінің функциясы және оның процестер кезіндегі өзгеруі. Ол процестердің қалай, қандай жолмен өткеніне тәуелді емес, тек систе-маның бастапқы және соңғы күйіне байланысты. Энтальпияның абсолюттік мәнін анықтау мумкін емес. Өйткені оны өрнектейтін термодинамикалық теңдеу белгісіз және табуға мүмкіндік жок. Сондықтан да көптеген процестерде энтальпия мәнінің өзгеруі ға-на ескеріледі:

Энтальпия терминін 1909 жылы Оннес енгізген, ол гректід "эн"— ішкі және "тальпэ"— жылу деген сөздерінен алынған.

Термодинамиканың бірінші заңы. Термодинамиканың бірінші заңы (кейде оны термодинамиканың бірінші бастамасы дейді) негізінен энергияның сақталу және оның жылу процестеріне түрлену (айналу) заңы болып есептеледі. Демек, ол жылу мен жұмыстың өзгеруіне байланысты. Ал, энергияның сақталу заңы ғылымға көптен белгілі. Өйткені табиғаттың осы заңдылығы макросистемалардағы процестерге де, молекула саны аз қатынасатын өте кішкене системаларға да қолданылады. Ол, әуелі механи-кадағы жылу мен жұмыс арасындағы қатынастарды зерттеп, анықтау кезінде қалыптасып, бертін магниттік және электрлік энергиялардың байланысын түсіндіру үшін электрлік теорияда қолданылды. Осы айтылған екі жағдайда да жылу алмасу қарас-тырылмай, тек энергияның бір формадан екінші формаға ауысуы ғана алынған.

Макроскопиялық системалардағы энергияның өзгеруі тәжірибе көрсетіп отырғандай жылу алмасу формасында байқалады және сан түрлі жұмыс түрінде кездеседі. Көптеген әдістер арқылы бір күйден екінші күйге ауысқан жылу мен жұмыстың алгебралық. қосындысы өздерінің, тұрақты мәнін сактайды, ал процестерде ол нөлге тең. Жүргізілетін тәжірибелер нәтижесінен, термодинамика-ның бірінші заңы сипаттауды, дәлелдеуді керек етпейтін жорамал (постулат) екенін көреміз. Осыған сүйеніп системадағы ішкі энергияның қосындысы тек система күйіне ғана тәуелді функция екенін аламыз. Мысалы, жабық системаға белгілі мелшердегі жылу (Q) жібеірілді делік. Бүл жылу жалпы жағдайдағы системаның ішкі энергиясын *(U)* көбейтуге және сол системанын, істеген жұмысына кетеді. Демек, термодинамиканың бірінші занын былай тұжырымдауга болады. Кез еелген процестердігі системаның ішқі энергия өсімшесі, осы системаға берілген жылу мөлшерінен система аткарған жұмысты азайтканға тен:

U=Q-A (11)

Бұдан ішкі энергияның өзгеруі процестерді қалай, қандай жолмен жүргізгенге байланысты емес, системаның бастапқы және соңғы күйіне тәуелді екенін көреміз. Бұл, ішкі энергияның система күйінің функциясы екенін дәлелдейді. Егер функцияның мәні күй параметріне ғана байланысты болып, процестің бұрынғы күйімен анықталмаса, онда ол функцияны күй параметріне функциялы деп те айтады. Жылу мен жұмыс мұндай қасиет көрсетпейді, олар система күйінің функциясы емес және процестердщ қалай, қандай жолмен жүргізілгеніне тәуелді. Осы айтылғандарды нақтылай түсу үшін, термодинамиканьщ бірінші заңының дифференциалдық түрін математикалық өрнекпен көрсетейік:

dU=bQ-bA (12)

(10) және (11) теңдеулер— термодинамиканың бірінші заңының аналитикалық мәні. Оларды өткен ғасырдың ортасында, бір-бірінен тәуелсіз әуелі Р. Майер, сосын Д. Джоуль ашқан. Алғашында бұл теңдеулер тек механикалық жұмыстарды сипаттауға ғана қолданылған. Бертін келе Г. Гельмгольц оларды жалпы түрге ауыстырды. Бұл теңдеулердегі *А* кез келген жұмыс түрін көрсетеді. Ал, жалпы жұмыс мөлшері системаға әсер еткен күштердің қосындысының жүргізілген жұмыс жолына көбейтіндісіне тең. Газ өз көлемінің ұлғаюы кезіндегі жұмыстар жиірек қарастырылады.

МұндайдаbA=pdY және *A=S*pdv Осы жағдайда термодинамиканың бірінші заңын былайша өрнектеуге болады: (dU=Q-S= (2 —| немесе dU=dQ-pdY. Енді осы өрнекті басқа жұмыс түрлеріне қолданайық:

а) *р* жүгін dh биіктігіне көтергенде:

bA=pdh-mgdh

мұндағы m-масса, g-еркін түсу үдеуі.

Іен жүргізгенге байланысты емес, системаның бастапқы жән< оңғы күйіне тәуелді екенін көреміз. Бұл, ішкі энергияның сис ема күйінің функциясы екенін дәлелдейді. Егер функцияның мән үй параметріне ғана байланысты болып, процестің бұрынғы күйі Іен анықталмаса, онда ол функцияны күй параметріне функцияль ,еп те айтады. Жылу мен жұмыс мұндай қасиет көрсетпейді, ола{ истема күйінің функциясы емес және процестердщ қалай, қандаі шлмен жүргізілгеніне тәуелді. Осы айтылғандарды нақтылаі үсу үшін, термодинамиканьщ бірінші заңының дифференциалдьп үрін математикалық өрнекпен көрсетейік:

dU (12;

(10) және (11) теңдеулер— термодинамиканың бірінші заңы Іың аналитикалық мәні. Оларды өткен ғасырдың ортасында, бір іірінен тәуелсіз әуелі Р. Майер, сосын Д. Джоуль ашқан. Алға ыында бұл теңдеулер тек механикалық жұмыстарды сипаттауғ; •ана қолданылған. Бертін келе Г. Гельмгольц оларды жалпы түрг Іуыстырды. Бұл теңдеулердегі *А* кез келген жұмыс түрін көрсете ;і. Ал, жалпы жұмыс мөлшері системаға әсер

еткен күштердіі ;осындысының жүргізілген жұмыс жолына көбейтіндісіне тең. Га Із көлемінің ұлғаюы кезіндегі жұмыстар жиірек қарастырылады.

Дәріс №9. Ең қысқа жол туралы есептер мысалында динамикалық программалау негізгі қағидалар. Беллмана функциясы және Беллман теңдеуі.

Динамикалық программалау есебі бірнеше кезеңді болып табылады. Сондықтан динамикалық программалау термины есептің ерекше түрін анықтаумен қатар, сызықтық программалау есебіне жататын математикалық программалау есебінің жеке кластарының шешімін табу әдістерін сипаттайды.

1 Динамикалық бағдарламау әдісі туралы ортақ мәліметтер

Динамикалық бағдарламау әдісі американдық математик Беллман және оның мектебімен жасалған. ДБӘ вариациялық есептерді сандық есептегіш машиналарды қолдануымен шығару процестерінде дамыған. Динамикалық бағдарламау есептерінің қойылымы Понтрягин максимум принципі сияқты. ДБӘ Беллман тиімділік принципінде құрылған «кез келген тиімді траекторияның кесіндісі тиімді траектория болып келеді», процестің болашақ тәртібі оның бұрынғы тарихынан тәуелсіз, басқаша айтқанда жүйенің болашақ тәртібі қазіргі уақыт мезетіндегі нысанның күйімен анықталады.

τ аралық нүктені алайық. Беллман тиімділік принципіне сәйкес біз x_τ -ден x_T -ға дейінгі (2) екінші бөлікті аламыз, ол тиімді траектория болып келеді..

Осылайша Беллман тиімділік принципіне сәйкес екінші траектория болады.

Үзіліссіз жүйелерге арналған басқару есептерін ДБӘ негізінде шығару

$$x(t)=f(x,U)\ ;$$
$$x(0)=x_0\ ;\qquad\qquad (1)$$
$$U(0)=U_0\ ;$$

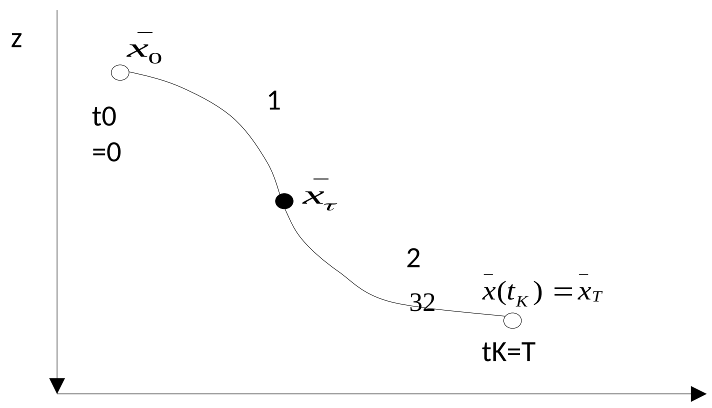
Тиімділік критерисі келесі түрде берілген.

$$I=\int_0^\infty F(x,U)\,dt\ .\qquad\qquad (2)$$

Басқару векторы (2) функционалына минимальді мән береді. I функционал минималь мәнін $s(x_0)=\min I$ арқылы белгілейік I функционал минимумы бастапқы шарттарға және басқару түріне тәуелді. (2) интегралының минимум мәнін беретін $x(t)$ бар деп ойлап, (2) түріндегі интегралды 2 интегралға бөлейік.

$$s(x_0)=\min\left[\int_0^\tau F(x,U)\,dt+\int_\tau^\infty F(x,U)\,dt\right]\ .\qquad\qquad (3)$$

Беллман тиімділік принципіне сәйкес егер $U(t)$ басқаруы $\int_0^\infty F(x,U)\,dt$ минимум интеграл берсе, ендеше осы басқару $\int_\tau^\infty F(x,U)\,dt$ минимум интеграл жеткізеді, сондықтан (3) өрнегін есептей отырып, жазайық



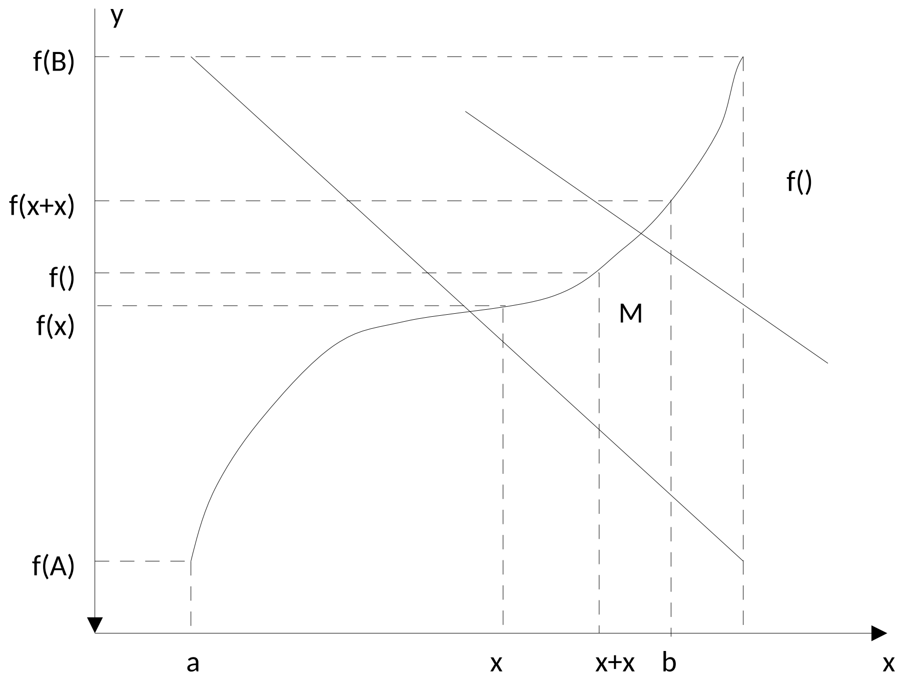
$$s(\vec{x}_0)=\min\left[\int_0^{\tau} F(\vec{x},\vec{U})\,dt+s[\vec{x}(\tau)]\right], \qquad (4)$$

ондағы $s\left[\vec{x}(\tau)\right]$ бұл функция $\vec{x}(\tau)$ бастапқы күйінен τ уақыт мезетіне тең, ендеше τ кішкентай шама деп есептейміз. τ уақыт кез келген траектория нүктесінде алуға болады.

$$s\left[\vec{x}(\tau)\right]=s\left[\vec{x}_0+\Delta\vec{x}\right]=s\left[\vec{x}_0+\vec{f}(\vec{x},\vec{U})\cdot\tau\right], \qquad (5)$$

$$\vec{f}(\vec{x},\vec{U})=\dot{\vec{x}},$$

$$\boxed{\Delta x=f(\vec{x},\vec{U})\cdot\tau}$$



(5) өрнегіне соңғы өсімше формуласын қолданайық

$$\boxed{f(x+\Delta x)-f(x)=f^{I}(\varepsilon)\cdot\Delta x}$$

$$s\left[\vec{x}_0+\vec{f}(\vec{x},\vec{U})\cdot\tau\right]=s(\vec{x}_0)+\frac{\partial s}{\partial x}\vec{f}(\vec{x},\vec{U})\cdot\tau; \qquad (6)$$

$f^{I}(\varepsilon)$ ролін $\frac{ds}{dx}$ ойнайды. (6) есептей (4) өрнегінен жазамыз.

$$s(\vec{x}_0)=\min\left[F(\vec{x}_0,\vec{U}_0)\cdot\tau+s(\vec{x}_0)+f(\vec{x}_0,\vec{U}_0)\frac{\partial s}{\partial\vec{x}}\cdot\tau\right]; \qquad (7)$$

$$\min\left[F(\vec{x}_0,\vec{U}_0)+f(\vec{x}_0,\vec{U}_0)\frac{\partial s}{\partial \vec{x}}\right]=0$$; (8)

U басқару вектор бойынша минимумды алу үшін (8) өрнегін дифференциалдайық

$$\frac{\partial F(\vec{x}_0,\vec{U}_0)}{\partial \vec{U}_0}+\frac{\partial f(\vec{x}_0,\vec{U}_0)}{\partial \vec{U}_0}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=0$$. (9)

(8) және (9) өрнектірінде $\vec{x}_0$ және $\vec{U}_0$ жүреді. Беллман тиімділік принципіне сәйкес бұл векторларды $\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}$, $\vec{U}_0 \rightarrow \vec{U}$ ауыстыруға болады жеке туындыларда.

$$\begin{cases} F(\vec{x},\vec{U})+f(\vec{x},\vec{U})\dfrac{\partial s}{\partial \vec{x}}=0;¿¿¿¿ \end{cases}$$ (10)

(10) жүйесінде теңдеу сызықты емес дифференциалды теңдеу болып келеді, сондықтан бұл тәсілді қолдану кейбір жағдайларда күрделі есептеуді қажет етеді және осы түрде шығару кейде мүмкін емес, (10) теңдеулер қатарында бір теңдеуге келеді, ол үшін жүйеден жеке туындыны шығару керек:

$$\frac{\partial s}{\partial \vec{x}}=-\frac{\dfrac{\partial F(\vec{x},\vec{U})}{\partial \vec{U}}}{\dfrac{\partial f(\vec{x},\vec{U})}{\partial \vec{U}}}$$; (11)

$\dfrac{\partial s}{\partial \vec{x}}$ үшін алынған өрнекті бірінші теңдеуге қойсақ, Беллман теңдеуін аламыз.

$$f(\vec{x},\vec{U})\frac{\partial F(\vec{x},\vec{U})}{\partial \vec{U}}=F(\vec{x},\vec{U})\frac{\partial f(\vec{x},\vec{U})}{\partial \vec{U}}$$. (12)

Алынған (12) түріндегі теңдеуді динамикалық бағдарламау әдісімен шығарылған тиімді есептерге қолдануға болады.

<u>Мысал:</u>

Тиімділік критерийсіне арналған Беллман теңдеуін құрастырайық

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=K_1U;¿¿¿¿ \end{cases}$$ (1)

τ минимальді уақыт кезінде t=0 болғанда жүйені $x_1=0$, $x_2=x_{2n}$ күйінен $x_1=0$, $x_2=0$ күйіне ауыстыратын тиімді басқарудың алгоритмін табу қажет.Мына шектеулер болғанда

$$I=\int_0^{\tau} K_2U^2dt \le I_0$$; (2)

<u>Шешімі:</u>

Тиімділік критерисі үшін Беллман теңдеуін құрайық.

$$I=\int_0^t F(\overset{¿}{x},U,t)\,dt \quad , \qquad (3)$$

ондағы интеграл ішіндегі функция өрнегін анықталады

$$F(\overset{¿}{x},U,t)=K_2U^2(t) \quad . \qquad (4)$$

Беллман теңдеулер жүйесін жазайық.

$$F(\overset{¿}{x},U,t)+\sum_{i=1}^{n} f_i(\overset{¿}{x},U,t)\frac{\partial s}{\partial x_i}=0 \quad ; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial F(\overset{¿}{x},U,t)}{\partial \overset{¿}{U}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(\overset{¿}{x},U,t)}{\partial \overset{¿}{U}}\frac{\partial s}{\partial x_i}=0 \quad ; \qquad (6)$$

Функционал түрін белгілейік

$$x_3=\int_0^{\tau} K_2U^2dt \qquad (7)$$

Жаңа координатаны есептеп, (1) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазайық:

$$\left\{\frac{dx_1}{dt}=K_1U=f_1;¿\left\{\frac{dx_2}{dt}=-x_1=f_2;¿¿¿¿\right.\right. \qquad (8,9,10)$$

(8), (9) және (10) теңдеулер жүйесін есептесек, Беллман теңдеуі мына түрде болады

$$\left\{K_1U\frac{\partial s}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}+K_2U^2\frac{\partial s}{\partial x_3}=0;¿¿¿¿\right. \qquad (11,12)$$

U скаляр бойынша (11) теңдеуінің жеке туындысын алған соң, (12) өрнегі шықты, (12) өрнегінен U басқаруын білдіруге болады.

$$U^O=\frac{K_1}{2K_2}\left[\frac{\frac{\partial s}{\partial x_1}}{\frac{\partial s}{\partial x_3}}\right] \quad . \qquad (13)$$

U тиімді басқару үшін шыққан (13) өрнегі (8) жүйесінің бірінші өрнегіне қойылады.

$$\frac{\partial s}{\partial x_3}-x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial s}{\partial x_3}=\frac{K_1^2}{4K_2}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}\right)^2 \quad . \qquad (14)$$

Динамикалық бағдарламау әдісінің қиындығы – жеке туындыларды іздеу. Бұл қиындықты болдырмау үшін, бірнеше тәсілдер қолданылады. (14) теңдеуінің шешімін ортақ түрде жазуға болады.

$$s=(1+a_1x_1)^{3/2}+a_2x_2+a_3x_3 \quad . \qquad (15)$$

x_1, x_2, x_3 бойынша (15) жеке туындыларын іздейік.

$$\frac{\partial s}{\partial x_1}=\frac{3}{2}a_1\sqrt{1+a_1x_1} \quad ; \qquad (16)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2}=a_2 \quad ; \qquad (17)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_3}=a_3 \quad ; \qquad (18)$$

Шыққан жеке туындыларды (14) қоямыз

$$a_3-x_1a_2a_3=\frac{9K_1^2}{16K_2}a_1^2+\frac{9K_1^2}{16K_2}a_1^3x_1 \quad ; \qquad (19)$$

(19) өрнегінен a_1, a_2, a_3 анықтайық

$$-a_2a_3=\frac{9K_1^2}{16K_2}\cdot a_1^3 \quad ; \qquad (20)$$

a_3=1 коэффициентімен берейік

$$a_1=\frac{3}{4K_1}\sqrt{K_2} \quad ; \qquad a_2=-\frac{4}{3K_1}\sqrt{K_2} \qquad (21)$$

Табылған жеке туындылардың мәндерін (13) қойсақ, келесі тиімді басқарудың алгоритмін аламыз

$$U^O(t)=-\frac{1}{\sqrt{K_2}}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{3K_1}\cdot\sqrt{K_2}\cdot x_1}=-c_1\cdot\sqrt{1-c_2x_1} \quad . \qquad (22)$$

ондағы c_1 және c_2 коэффициенттері келесі түрде болады:

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{K_2}} \quad ; \qquad c_2=-\frac{4}{3K_1}\sqrt{K_2} \quad .$$

<u>ДБӘ дискретті басқару жүйелері үшін.</u>

Дискретті формада Беллман теңдеуін алу үшін нысан қозғалысын келесі түрде жазайық:

$$\bar{x}'=\bar{f}(\bar{x},\bar{u}) \qquad (1)$$

ондағы x(t)– n өлшемді вектор күйі

U(t)- m өлшемді басқару векторы

$$I=\int_0^T F_1(\bar{x},\bar{u})\,dt+\phi_1[\bar{x}(T)] \qquad (2)$$

Т-жоғарғы интеграл шегі, соңғы уақыт мезетін тұрақтайды

$\phi_1[\bar{x}(T)]$ - Т соңғы уақыт мезетінде жүйенің күйін сипаттайтын функция

Беллман теңдеуін дискретті түрде жазу үшін Т –ны N интервалдарға бөлейік $\Delta=\frac{T}{N}$

(1) түріндегі дифференциалды теңдеудің N соңғы айнымалары түрінде жазайық.

$$\frac{\bar{x}(k+1)-\bar{x}(k)}{\Delta}=\bar{f}_1[\bar{x}(k),\bar{u}(k)] \qquad (3)$$

Шыққан (3) өрнегін басқа түрде көрсетуге болады.

$$\bar{x}(k+1)=\bar{f}_1[\bar{x}(k),\bar{u}(k)]\cdot\Delta+\bar{x}(k) \quad (3^*)$$

$$\bar{x}(k+1)=\bar{f}[\bar{x}(k),\bar{u}(k)]+\bar{x}(k) \quad (4)$$

ондағы

$$\bar{f}[\bar{x}(k),u(k)]=\bar{f}_1[\bar{x}(k),\bar{u}(k)]\cdot\Delta \quad (4^*)$$

2 түріндегі функционалды дискретті формада көрсетейік:

$$I=\sum_{K=0}^{N-1}F_1[\bar{x}(k),\bar{u}(k)]\cdot\Delta+\phi[\bar{x}(N)]=\sum_{K=0}^{N-1}F[\bar{x}(k),\bar{u}(k)]+\phi[\bar{x}(N)] \quad (5)$$

$$F[\bar{x}(k),\bar{u}(k)]=F_1[\bar{x}(k),\bar{u}(k)]\cdot\Delta \quad (5^*)$$

$$I_{N-1}=F[\bar{x}(N-1),\bar{u}(N-1)]+\phi[\bar{x}(N)]$$

(6)

(4) өрнегімен сәйкес (6) өрнегінің соңғы жіктеуін мына түрде көрсетуге болады:

$$\phi[\bar{x}(N)]=\phi[\bar{x}(N-1)]+\bar{f}[\bar{x}(N-1),\bar{u}(N-1)] \quad (6^*)$$

(6*) -ны (6)-ға қоякық

$$I_{N-1}=F[\bar{x}(N-1),\bar{u}(N-1)]+\phi[\bar{x}(N-1)]+f[\bar{x}(N-1),\bar{u}(N-1)]=I_{N-1}[\bar{x}(N-1)]$$

(6**)

Соңғы бөлшектегі функционал N-1 бөлшегіндегі вектор күй функциясы сияқты

I_{N-1} функционалы N-1 қадамындағы жүйе күйіне және соңғы қадамдағы U басқаруына тәуелді.

$\bar{u}(N-1)$ функционалына min беретіндей, I_{N-1} басқаруын таңдайық

$$\bar{u}(N-1)\to I_{N-1}=\min$$

Келесіні жазуға болады

$I^{¿}_{N-1}$ - функционалдың минимум мәні

$$I^{¿}_{N-1}[\bar{x}(N-1)]=F[\bar{x}(N-1),\bar{u}^{¿}(N-1)]+\phi[\bar{x}(N-1)]+\bar{f}[\bar{x}(N-1),\bar{u}^{¿}(N-1)] \quad (7)$$

(7) өрнегі $U^*(N-1)$ тиімді басқаруы бар соңғы бөлшектегі жүйенің элементарлы тиімді қозғалысын сипаттайды

I^*_{N-1} функционалына min жеткізеді

Соңғы қадамның алдындағы қадамға көшейік, соңғы және соңғының алдындағы қадамдардың қосылмасын айырайық.

$$I_{N-2}=F[\bar{x}(N-2),\bar{u}(N-2)]+F[\bar{x}(N-1),\bar{u}(N-1)]+\phi[\bar{x}(N)]=F[\bar{x}(N-2),\bar{u}(N-2)]+I^{¿}_{N-1}[\bar{x}(N-1)]$$

(8)

I^*_{N-1} функционалы – бұрында минирленген.

I^*_{N-2} функционалын минирлегенде I_{N-2} функционалына min беретіндей етіп, $\bar{u}_{N-2}$ басқаруын таңдаймыз.

$$\bar{u}_{N-2}\to I_{N-2}=\min$$

$U^{¿}_{n-2}$ тиімді басқару min I_{N-2} жеткізу керек

$$I^{¿N-2}[\bar{x}(N-2)]=F[\bar{x}(N-2),\overline{u^{¿}}(N-2)]+I_{N-k}[\bar{x}(N-2)+f[\bar{x}(N-2),\bar{u}^{¿}(N-2)]] \quad (9)$$

I^*_{N-2} min мәнін және U^*_{N-2} тиімді басқаруын зердеде сақтап, ал I^*_{N-1} мәнін машинаның зердесінен жоюға болады.

Үшінші қадамға өтейік

$$I_{N-3}=F\left[\bar{x}(N-3),\bar{u}(N-3)\right]+I^{*}_{N-2}\left[\bar{x}(N-2)\right]=F\left[\bar{x}(N-3),\bar{u}(N-3)\right]+$$
$$+I_{N-2}\left\{\bar{x}(N-3)+\bar{f}\left[\bar{x}(N-3),\bar{u}(N-3)\right]\right\} \qquad (10)$$

U^{*}_{N-3} тиімді басқаруды таңдау жолымен I_{N-3} минирлейік

$$I_{N-3}\rightarrow U^{*}_{N-3}$$

Келесі өрнекті аламыз:

$$I^{*}_{N-3}\left[\bar{x}(N-3)\right]=f\left[\bar{x}(N-3)\right]+I_{N-2}\left\{\bar{x}(N-3)+\bar{f}\left[\bar{x}(N-3),\bar{u}(N-3)\right]\right\} \qquad (11)$$

I^{*}_{N-3} және U^{*}_{N-3} сақтап, ал I^{*}_{N-2} зерделен жоымыз, өйткені ол (11) кіреді, ұқсас пайымдауларды жалғастырып, келесі түрде рекуррентті формуланы алуға болады.

$$I^{*}_{N-i}\left[\bar{x}(N-i)\right]=F\left[\bar{x}(N-i),\bar{u}^{*}(N-i)\right]+$$
$$+I_{N-i+1}\left\{\bar{x}(N-i)+\bar{f}\left[\bar{x}(N-i),u^{*}(N-i)\right]\right\} \qquad (12)$$

Беллман теңдеуінің рекурренті формуласы дискретті формада көрсетілген.

Рекуррентті динамикалық процесстерді жалғастырсақ, есептеулерді бастапқы нүктеге $\bar{x}(0)$ дейін жеткізе аламыз, нәтижесінде динамикалық жүйенің тиімді траектория қозғалысын және тиімді басқаруды аламыз.

Сондықтан осы әдіс ДБӘ атауын алған.

ДБӘ кемшіліктері дискретті формада көрсетілген: «қарғыс өлшемділігі»

«Қарғыс өлшемдіктері» – динамикалық жүйелердің өлшемділіктерінің артуымен геометриялық прогресс бойынша есетеулердің қиындықтары өседі.

Тиімді басқарудың синтез есептерін шығарғанға, аса жоғары емес ретті (5-10) жүйелері үшін де, зердесі үлкен ЭЕМ қажет.

Бұл қатынаста үзіліссіз жүйеге арналған ДБӘ-нің үлкен артықшылығы бар.

2. Р.Беллман принципі бойынша динамикалық программалау есебінің алгоритмі

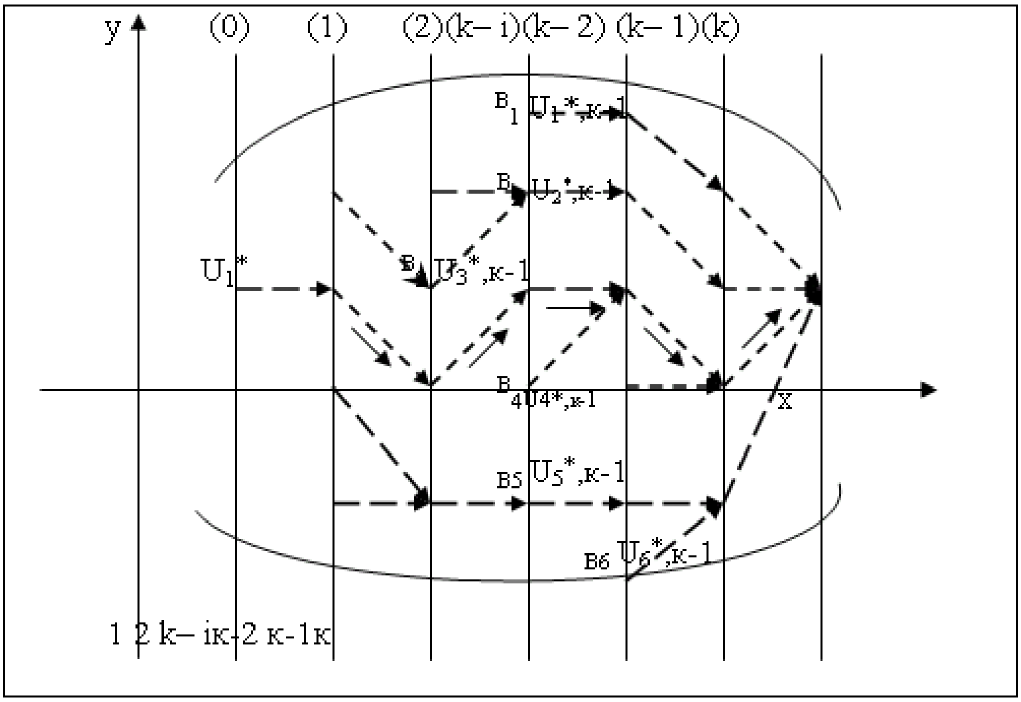
Кейбір белгілеулер енеземіз және арық қарай болжауға көшеміз. S жүйесінің k-шы қадамдағы (k = 1,и) жағдайын S жүйесін бастапқыдан соңғысына өтуді қамтамасыз ететін u_k басқаруын жүргізу нәтижесінде алынған $x^{(k)}$ сандар жиынтығымен анықталады деп есептейік. S жүйесі өткен жағдай берілген жағдайдан және таңдалынған басқарудан тәуелді және S жүйесі бұл жағдайға қалай өткенінен тәуелсіз деп есептейміз.

Егер k-шы қадамды жүзеге асыруда жүйенің бастапқы жағдайынан және таңдалған басқарудан тәуелді белгілі бір пайда қамтамасыз етілсе, онда n қадамдағы жалпы пайда пайдлардың қосындысымен анықтлады. Осылайша динамикалық программалаудың қарастырлып отырған есебін қанағатандыратын екі шарт құрылған. Бірінші шартты кейінгі қозғалыстың болмау шарты, ал екіншісін есептің мақсат функциясының аддитивтілігі шарты деп атайды.

Есеп басқарудың тиімді стратегиясын, яғни жүзеге асыру нәтижесінде S жүйесі n қадамда бастапқы жағдайдан кейінгісіне өтетін W(u) пайда функциясының ең үлкен жиынтығы.

Беллмана тиімділік принципі. ***Кезекті қадам алдында жүйенің жағдайы қандай болмасын, басқаруды бұл қадамдағы пайдаға барлық қадамдағы оңтайлы пайданы қосқанда ең үлкен болатындай етіп таңдау қажет.***

20 суретте Р.Беллманның оптималдық принципі көрсетілген.



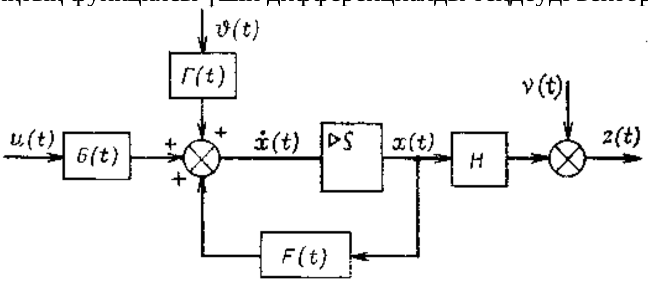
20 сурет- Біртіндеп оңтайлы басқату принципі.

ІІІ.Тиімді басқару және вариоционды санау

Динамикалық жүйелердің сызықтық моделдері

Қозғалыс теңдеуіне кіретін айнымалылар көпөлшемді, яғни векторлық шама болғандықтан, онда теңдеу векторлық болып табылады, демек жеткілікті күрделі. Жағдай тереңдей түседі, егер g — сызықтық емес функция болса. Осында векторлық дифференциалды теңдеулерді шешу әдістері тек сызықтық жүйелер үшін жақсы өңделгендіктен, тек ОУ сызықтық динамикалық моделін қарастырумен шектелеміз, g функциясы сызықтық емес болса, онда сызықтандыруға болады деп аламыз.

g сызықтық функциясы үшін дифференциалды теңдеуді векторлық түрде беруге болады (21 сурет)



21 сурет- Сызықтық динамикалық жүйенің құрылымы

Суретте *z(t)*—өлшеу векторы; Н — жағдай векторын өлшеу векторымен байланыстыратын матрица; *v(t)* — көбіне кедергі деп аталатын бақылау қателігінің векторы.

Ракета ұшуын басқарудың динамика проблемасы ұзақ уақыт ішінде жөндеу теориясынанн тыс дамыған. Бұл бағыттың жөндеу теориясымен бірігуі елуінші жылдары басқару теориясына алып келді.

Жөндеу теориясында программалық басқару қозғалысын іздеу туралы сұрақ көтерілген жоқ. Бұл қозғалыс алдын ала белгілі болған (мысалы, трубинаның секунд ішінде айналу саны берілген), немесе анықтамасы қарапайым болған (мысалы, берілген биіктікте ұшақтың ұшу параметрлерін есептеу). Жөндеу теориясында басқаша есеп – берілген режимді (берілген программалық қозғалысты) қамтамасыз ететін кері байланыс операторын құру есебі шешілген. Әрине, осы есептің екеуі де — программалық қозғалысты анықтау және осы қозғалысты басқару — өзара тығыз байланысқан. Бірақ біршама уақыт бойы екі есептің де теориялық негізделуі бір-бірінен тәуелсіз өрбіді. Программалық траекторияны есептеу басқару теорисына біріккен үлкен және дамыған бағытқа айналды. Мұндай есептер вариационды сипатқа ие. Д. Е. Охоцимскийдің айтылып кеткен жұмысы бұл бағытты ашты. Біршама кешіре СССР-де, содан кейін АҚШ-та осы проблемаларға арналған іргелі зерттеулер пайда бола бастады. СССР-де Т. М. Энеев, Л. И. Шатровскийдің, АҚШ-та Блекуэл, Брайсон, Лейтманның жұмыстары жаңа бағыттың негізін салды.

Қырқыншы жылдардың соңы және елуінші жылдардың басында жөңдеудің классикалық теориясында есептің вариациондық қойылымы пайда бола бастады. Ол ең алдымен жылдам қозғалыс есебі болып табылды. Жөндеу теориясында жаңа бағытың пайда болуы әдетте А. А. Фельдбаумның есімімен байланысты. Тиімді басқару және динамикалық программалау есебін шешуге қолданылатын әдістер арасындағы тығыз байланыс туралы ескерту қосу қажет.

Тақырып 4. Желілік моделдер

Дәріс №10. Негізгі анықтаулар. Ең төменгі негізгі ағаштың құру алгоритмі. Ең қысқа жолдын іздестірудің тәжірибелік мысалдары. Ең қысқа жолдың анықтау алгоритмі

XX ғасырда модель түсінігі нақты және идеалдық модельдерді қатар қамтитындай болып жалпыланды. Сондықтан, абстрактылы модель түсінігі математикалық модельдер шеңберінен шығып, әлем туралы білімдер мен танымдардың барлығына қатысты болды. Модель түсінігінің айналасындағы кең талқылаудың қазіргі кезде де жалғасып отырғандығын естен шығармау қажет.Бастапқыда ақпараттық, кибернетикалық бағыттардағы ғылыми пәндер аясында, содан соң ғалымның басқа да салаларында түрлі тәсілдермен іске асырылатын модель ретінде танылды. Негізінде модель білімнің мәнін нақтылау тәсілі ретінде қарастырылады.

Модель - 1) қасиеттері белгілі бір мағынадағы жүйенің немесе процестің қасиеттеріне ұқсас объектілер немесе процестер жүйесі; 2) сериялы бұйымдарды жаппай өндіруге арналған үлгі, эталон; кез-келген бір объекті жұмысы, мыс, процессордың жұмыс істеуін модельдейтін программа немесе құрылғы. Ол материалдық объект түрінде, математикалық байланыстар жүйесі ретінде немесе құрылымды имитациялайтын программа күйінде құрастырылады да, қарастырылатын объектінің жұмыс істеуін зерттеу үшін қолданылады. Модельге қойылатын негізгі талап - оның қасиеттерінің негізгі объектіге сәйкес келуі, яғни барабарлығы.

Модельдеу кез-келген құбылыстардың, процестердің немесе объект жүйелерінің қасиеттері мен сипаттамаларын зерттеу үшін олардыщ үлгісін құру (жасау) және талдау; бар немесе жаңадан құрастырылған объектілердің сипатын анықтау немесе айқындау үшін олардың аналогтарында (моделінде) объектілердің әр түрлі табиғатын зерттеу әдісі, Модель төрт деңгейде түпнұсқаның гносеологиялық орынбасары бола алады: элементтер деңгейінде, 2-құрылым дейгейінде, 3- қалып-күй немесе қызметтік деңгейін, 4-нәтижелер дейгейінде. Сипаты бойынша модельдеу материалдық және идеалдық болып ' бөлінеді. Материалдық модельдеу объектінің геометриялық, физиқалық, динамикалық және қызметтік сипатын нақты дәл береді. Идеалдық модельдеуге объектінің ойдағы бейнесі жатады. Ойша модельдеу тіл көмегімен іске асырылады.

Жалпы түрдегі "модель" түсінігі төмендегідей негізде анықталады.

Модель - модельдеу мақсаты тұрғысынан оқып үйренетін объектінің құбылыстың кейбір жақтарын ұқсастырып бейнелейтін жаңа объект.

Моделъ - объектінің нақты жұмыс істеуіне сәйкестенетін анықталған параметрлер бойынша жұмыс істейтін физикалық ақпараттық алмастырушысы.

Модельдеудегі ең бастысы модельдеуші объекті мен оның моделі арасындағы өзара ұқсас қатысы болып табылады.

Барлық модельдердің көп бейнелілігі негізінен үш топқа бөлінеді:

- материалдың (табиғи) модельдеуші объектінің сыртқы түрін,құрыльшын (кристал торлардың модельдері, глобус), жағдайын (самолеттің радио басқарылымды моделі) бейнелейтін кішірейтілген ұлғайтылған көшірмелері;
- бейнеленуші моделъдер (геометриялық нүктелер, математикалық маятник, идеал газ, шексіздік);
- ақпараттық модельдер - модельденуші объектінің ақпаратты кодтау тілдерінің бірінде жазылған сипаттамасы (сөздік сипаттау, схемалар, сызбалар, картиналар, суреттер, ғылыми формулалар, бағдарламалар).

Информатика курсында негізінен ақпараттық модельдер қарастырылады.

Ақпараттық моделъ (Информационная моделъ;) — 1) басқару жүйесінде - автоматтандырылған өңцеуге жататын ақпарат айналымының процесін параметрлік ұсыну; 2)мәліметтер базасында -тұтастық шектеулер жиынтығы; мәліметтер құрылымын тудыратын ережелердің, олармен жүргізілетін операциялардың, сондай-ақ рұқсат етілетін байланыстар мен мәліметтердің мәнін, олардың өзгерістерінің тізбегін анықтайды; мәліметтер мен олардың арасындағы қатынастарды математикалық және программалық тәсілдермен ұсыну; ақпараттық құрылымдар мен олармен жүргізілетін операцияларды формалдық баяндау.

Ақпараттық модельдердің басқа да ақпарат түрлері сияқты өзіндік тасымалдаушысы болуы керек. Олар қағаз, сынып тақтасы, қабырға -яғни, бірнәрсе жазуға, бейнелеуге болатындай кез-келген бет болуы мүмкін. Бұл тасымалдаушыларда модельдер түрлі "физикалық" тәсілдермен: қалам, бор, бояу, диапроекторлық жарық бейнесі көмегімен жазылады. Біздер жалпы жағдайда ақпараттық модель түсінігінің аясында берілетін мазмұнда түсінеміз. Мысалы, квадраттың тендеу формуласы қалай және қайда жазылғандығына қарамастан квадраттық тендеу формуласы болып қала береді.

Модель (француз тілінде - өлшем, үлгі) - бұл:

- нақты объектінің қарапайымдандырылған ұқсасы;
- заттың кішірейтілген ұлғайтылған түрдегі макеті;

- табиғат пен қоғамдағы қандай да бір процесстің құбылыстың бейнесі, сипаттамасы және схемасы;

- жұмыс істеуі анықталған параметрлер бойынша нақты объектінің жұмыс істеуіне ұқсас физикалық ақпараттық аналогы;

- анықталған шарттарда түпнұсқа объектінің бізді қызықтыратын қасиеттері мен сипаттамасын алмастыра алатын алмастырушы-объектісі;

модельдеу мақсаты тұрғысынан оқып үйренетін объектінің құбылыстың кейбір нақты жақтарын бейнелейтін жаңа объект.

Ақпараттық моделъ - модельденуші объектінің ақпаратты кодтау тілдерінің бірінде сипатталуы.

Моделъдеу - бұл:

- нақты бар объектілердің (заттар, құбылыстар, процестер) модельдерін құру;

- нақты объектіні қолайлы көшірмемен алмастыру;
- таным объектілерін модельдері арқылы зерттеу.

Модельдеу кез-келген мақсатқа бағытталған қызметтің ажырамас бөлігі.

Модельдеу танымның негізгі әдістерінің бірі.

Нақты қызметтердегі объект модельдері төмендегі жағдайларға пайдаланылады:

- материалдық заттарды бейнелеу;
- белгілі фактілерді түсіндіру;
- болжамдар құру;
- зерттелінетін объект туралы жаңа білімдер алу;
- болжау;
- басқару және т.с.с.

1.2. Желілік жобалау мен басқару туралы тусінік

Экономика, технология салаларының ғылыми зерттеулерін жобалауда негізгі аурлық жобалауға және жаңа жүйе құруға түседі.

Құрылыс объектісінің белгіленген мерзімге бітіру немесе өнімді құруды аяқктау үшін сонда жобалау мүмкіндішінше жеңілдейді. Баска да техникалық-экономикалық көрсеткіштерге және ресурстарға, уақыт, құн бойнша барлық орындаушылармен атқаратын жұмысты ұштастыру қажет. Бұймның жобалау немесе дайндалуынан тундайтын модель құруға процестер көрініс табуы керек. Бірінші модельге осы салада қолданудағы таспалы модель түрі жатады (таспалы графиктер – Гант графигі, циклограммалар) жеңіл машинаның шанағы (кузов) өндірісін дайндауды, таспалық графиканың мысалы беріледі.

Өндірістің қазіргі ұйымдастыру жағдайнда таспалы графикті қолдану тиімсіз, өйткені оның көрнектілігі мен қарапаймдылығына қарамастан, олар орындаушылар және жекеленген жұмыстар арасындағы өзара байланысты сипаттай алмайды. Мұндай графикалармен жекеленген орындау жұмыс мерзімін бұзушылықты талдау және соңғы нәтижеде әрбір орындаушының ықпал дәрежесін білу мүмкін емес. Таспалық графиктер жеткіліксіз иілгіш, жағдай өзгерген сәтте оларды көрнектілеу қиын, олар жұмыс барысында келешек болжаудан және басқкада кемшіліктерді шектеу мүмкіндігі болады.

Техника мен ғылымның соңғы жетістіктері негізінде басқару мен жобалау жаңа әдістерінің зерттемесіне өндірісті ұйымдастырудың қазіргі деңгейі модельдің таспалы моделінің сәйкессыздігінен әкеп соғады. Мұндай әдіс түрінде жобалау мен басқару (ЖЖБ) жатады, бұл 50-жылдардың аяғында АҚШ-та дамыған (СРМ – қиын-қыстыру жол әдісі, PERT – бағдарлама бағасы және техника шолуы, т.б.).

ЖЖБ жүйесі іштей графикалық және есептік әдістердің кешені бола отырып, дайндалатын кейбір бұйым немесе жобалау бойнша жұмыс жоспарын тиімдеу және жалдау, модельдеу мақсатымен ұйымдастырушылық ісшараларды өоткізу.

ЖЖБ жүйесінде негізгі жоспарлы құжат болып желілік график саналады (желілік модель немесе жай модель), бұлар жоспарланған процесте графикалық масштабсыз кескіндеу көрсетілуі және бейнелі өзара байланыс пен олардың жұмысында біріздiлік енеді.

Оқытудың интерактивті режимі — оқушының жүйемен белсенді түрде өзара әрекеттесуі арқылы орындалатын, әр түрлі оқыту, бақылау, навигация (бірінен біріне ауысу) құралдары арқылы педагог жұмысын атқара алатын білім беру процесі субьектілерінің диалогтық жұмыс режимі.

Оқытудың компьютерлік технологиялары — ақпаратты бейнелеу, тасымалдау және жинақтау, оқушынның танымдық әрекетін бақылау және басқару сияқты педагогтың кейбір функцияларын модельейтін компьютерлік техника, телекоммуникациялық байланыс құралдары және интерактивті программалық өнім негізінде жұмыстың педагогикалық шарттарын жасау тәсілдері, әдістері,құралдары жиыны.

"Ақпарат" түсінігімен байланысты казіргі ұғымдар.

Біздің зерттеулерімізбен — ақпарат, ақпараттандыру және соңғы ұғымнан туындайтын басқа да түсінікгермен — тығыз байланысты терминдерді қарастырып шығайық.

Ақпарат (латын тілінде — таныстыру, түсіңдіру, көрсету,түсінік)—бұл:

1) адамдар арқылы таратылатын нақты жағдай туралы хабар, түсініктеме;

2) хабарлама алу арқылы азайатын, төмендейтін белгісіздік; 3) басқарумен тығыз байланыстағы хабарлама, синтаксистік, семантикалық және прагматикалық сипаттамалардың біртұтас сигналдары; 4) кез келген объектілер мен процестердегі (өлі және тірі табиғаттағы) көп түрлілікті бейнелеу, жеткізу.

Ақпаратты материя және энергия тәрізді философиялық категориялармен бір деңгейде карастырады.Бұл түсініктің көптеген анықтамалары бар. Төменде көрсетілген мақалада осы көп мағыналы түсініктің белгілі ғалымдар берген анықтамалары жинақгалған, олар:

- ақпарат — сыртқы әлемге бейімделу арқылы одан алынатын мазмұнды бейнелеу (Винер);
- ақпарат — энтропияны терістеу (Бриллюэн);
- ақпарат — коммуникация мен байланыс,бұларды пайдалану процесінде белгісіздік жойылады(Шеннон);
- ақпарат — әр түрлілікті жеткізу (Эшби);
- акпарат — құрылымдар күрделілігінің өлшемі (Моль);
- ақпарат — таңдау ықтималдығы (Яглом).

ДәрісNo11. Желілік жоспарлаудың және басқарудың әдістері
Желілер көмегімен жобалардың ұсынуы. Уақыттың кризистік жолы және резервтері. Қорлардың бөлу есебі. Жобаның құнын тиімдеу

Желілік жоспарлау және басқару элементтері мен тарау желілік модельдер түрлерін желілік жоспарлау және басқару мәнін тұжырымдамасы мен мәні Кесте. Желілік жоспарлау және басқару Network диаграмма Қорытынды желілік жоспарлау және басқару әдістерін үлгілерін практикалық қолдану қазіргі заманғы жағдайында Кіріспе

Сілтемелер әлеуметтік-экономикалық жүйелер аса күрделі болып отыр. Сондықтан, олардың даму мен толықтырулар енгізу туралы қабылданған шешімдер математикалық және экономикалық модельдеу негізінде қатаң ғылыми негіз алуға тиіс. Ғылыми талдау әдістерінің бірі желілік жоспарлау болып табылады. Ресейде, желілік жоспарлау 1961-1962 жылдардағы екіжылдық кезеңде басталды. және тез тараған болды. Кеңінен танымал жұмыстар Antonavichusa K.A., B.A. Афанасьев, А. Русаков, Leibman Л.Я., Майкельсон В.С. Панкратов YP, Rybalsky В.И., Смирнова Т.И. желі жоспарлау және басқару жеке аспектілері көптеген зерттеулер Чой TN және drugih.1,2, жоспарлаудың жаңа әдістемесін пайдалана отырып, жүйеге көшу болды. Әдебиет және іс жүзінде барған сайын талдау әдісі ретінде, сондай-ақ проблемаларды өте кең ауқымды бейімделген жоспарлау және басқару дамыған жүйесі, сондай-ақ ғана емес, желілік жоспарлау байланысты қатайтылған отыр. Ресей тәжірибелік пайдалану жыл және шетелде желі жоспарлау барысында экономикалық және ұйымдастырушылық талдау түрлі салаларындағы тиімділігін көрсетті. басқару жүйелерін зерттеу желілік жоспарлау әдістерін пайдалану қажеттігі көптеген жоспарлау диаграммалар мен кестелер, дене модельдерді, логикалық және математикалық өрнектерді, компьютерлік модельдер, модельдеу модельдер түрлі түсіндіріледі. Ерекше қызығушылық кешенді басқару тапсырмаларын шешу үшін желілік моделін салуға азайтатын желілік басқару жүйелерін қалыпталған өкілдігінің әдісі болып табылады. желілік жоспарлау негізі бүкіл кешені, олардың орындалуын қатаң технологиялық ретпен орналасқан жеке, сондай-ақ анықталған операциялар (жұмыс) бөлінеді, онда динамикалық ақпараттық желі моделі болып табылады. Сандық желі моделін талдау, уақытша және бағалау жұмыстары орындалды. параметрлер орындаушы нормативтік деректер немесе олардың жұмыс тәжірибесі негізінде желілік ... жұмысының әрбір мүшесі үшін орнатылады. Модельдеу динамикалық модельдеу салынды кезде, тиісті түрде модельдеу жүйесінің ішкі құрылымын көрсетеді; содан кейін үлгінің мінез-келуге еркін ұзақ компьютер тексеріледі. Бұл тұтастай алғанда және оның құрамдас бөліктері жүйесінің мінез-құлық тергеу мүмкіндік береді. Модельдеу динамикалық модельдер элементтерін және әрбір элементтің өзгерістер динамикасы арасындағы себеп-салдарлық байланыстарды көрсететін мүмкіндік беретін, белгілі бір құрылғыны пайдаланыңыз. Нақты жүйелердің модельдері әдетте сондықтан компьютерлік модельдеу жүзеге асырылады айнымалы айтарлықтай санын қамтиды. Осылайша, желілік жоспарлау әдістерін тақырыбы, өйткені өзекті болып табылады графикалық бейнелер күрделі процесс түсінуімізге көмектеседі, сонымен қатар жан-жақты ғылыми-зерттеу жобасын басқару жүйесі үшін мүмкіндік береді ғана емес. Әлеуметтік-экономикалық және саяси үдерістерді зерттеу желілік жоспарлау және басқару әдістерін жарықтандыру - жоғарыда дәлелдер және жұмыс тақырыптың өзектілігі негізделіп, бұл жұмыстың мақсатын тұжырымдауға болады. Қол жеткізу үшін мақсат орнату және мынадай міндеттер шешілді: желі жоспарлау және басқару талдау. оларды қолдану аймағын зерттеуге желілік жоспарлау және басқару әдістерін желілік жоспарлау және басқару түрлері мәні. желілік жоспарлау және басқару практикалық қолдану негіздері. менің зерттеу әдістемесі курстық жұмыстың тақырыбы желілік жоспарлау және басқару болып табылады. Объект менің әрине жұмыс желісі жоспарлау және басқару әдістемесін ауқымы болып табылады /> тарау желілік жоспарлау әдістері Желілік жоспарлау желілік жоспарлау және басқару мәнін ұғымы мен мәні

-. модельдеу, талдау және динамикалық қайта құрылымдауды қамтамасыз ету үшін ұйымдастыру шараларын графикалық және есептеу әдістерін жиынтығы сияқты күрделі жобалар мен әзірлемелерді жүзеге асыру жоспары: кез-келген объектілерді салу және реконструкциялау; ғылыми-зерттеу және тәжірибелік-конструкторлық жұмыстарды жүргізу; алдын-ала дайындалған өндірістік тиіс; қайта жарақтандыру. Осындай жобалардың ерекшелігі, олар жеке бастауыш операциялар санынан тұрады болып табылады. Жұмыстың кейбір... асыру кейбір аяқталғанға дейін басталған, бұл мүмкін емес, сондықтан олар бір-біріне жауапты болып табылады. желілік жоспарлау және басқарудың негізгі мақсаты - жобаның ұзақтығын азайту. желілік жоспарлау және басқару міндеті графикалық түпкі мақсаттарына уақтылы және ұйымдасқан қол жеткізуді қамтамасыз ету мақсатында және өзара жұмыстар, іс-әрекеттерін немесе шараларды оңтайландыру үшін анық және жүйелі көрсету болып табылады. Желілік диаграммалар - белгілі бір іс-әрекеттерді немесе жағдайларды көрсету және Алгоритмдеу үшін желілік модельдері деп аталады экономикалық-математикалық модельдер, олардың қарапайым пайдаланылады. Желілік моделін басшысының көмегімен жұмыс істейді немесе операция жүйелі және кең ауқымды олардың жүзеге асырылу барысын басқару жұмыс немесе жедел қызметінің барлық бағытын білдіретін, сондай-ақ ресурстар маневр мүмкіндігі бар. Барлық жүйелер, желілік жоспарлау негізгі нысан модельдеу жүйелері сияқты әлеуметтік-экономикалық зерттеулер, жобалау, дамыту, жаңа өнімдер мен басқа да іс-шаралар жоспарлы өндіру сияқты, болашақ жұмыс әр түрлі қызмет көрсетеді. СПУ жүйесі мүмкіндік береді: жұмыстың жиынтығын жүзеге асыру кестесін қалыптастыру; уақыт, еңбек, материалдық және қаржы ресурстарын қорларын анықтау және жұмылдыру; жұмыс барысында мүмкін іркілістерге болжау және алдын алу «қозғаушы мүшесі» қағидаты бойынша кешенді жұмыстар басқару; әр түрлі деңгейдегі және мердігерлермен басшыларының жауапкершілігін айқын бөле отырып, жалпы басқару тиімділігін арттыру; анық проблемасын шешу бір күрделі процесс қалыптастыру, егжей-тегжейлі жұмыс қалаған кез келген деңгейіне анықтау, проблема көлемі мен құрылымы көрсету; , қажетті мақсаттарға қол жеткізу үшін қажетті болып табылатын іс-шаралар орындауды анықтау; желілік модель объектінің жай-күйіне байланысты барлық тәуелділіктер және сыртқы және ішкі ортаның жағдайында дәл көрініс салынған құрылыс өте әдісі ретінде анықтауға және жан-жақты жұмыстар арасындағы қарым-қатынасты талдау; компьютерлік технологияларды кеңінен пайдалану; тез деректер есеп ірі сомаларды өңдеуге және уақтылы басшылық пен бағдарламасын іске асыру нақты жағдайы туралы жан-жақты ақпаратты ұ... сыну; Есеп беру құжаттарын оңайлату және стандарттау. Өте кең қолдану СЗМ диапазоны: жеке тұлғалардың қызметіне қатысты проблемаларды, ұйымдар жүздеген қатысуымен жобалар мен ондаған мың people.3 желілік моделін жұмыс жиынтығы (жобаның кешенді операциялар) сипаттамасы болып табылады. Бұл әрбір мәселеге жатады және ол үшін әр түрлі іс-шаралар жеткілікті үлкен санын жүзеге асыру қажет. Бұл кез келген күрделі объект, оның жобасын әзірлеу және жоба жоспарларын құру процесін құру болуы мүмкін. желілік жоспарлау пайдалану, 15-20% -ға, адам ресурстары мен технологияларды ұтымды пайдалану, жаңа нысандарын жасау үшін уақытты қысқартуға мүмкіндік береді. желілік жоспарлау және басқару ең тиімді қолдану аймақтары ірі мақсатты бағдарламалар, ғылыми және ғылыми-техникалық әзірлемелер мен инвестициялық жобаларды басқару, сондай-ақ федералдық және өңірлік деңгейде әлеуметтік, экономикалық, ұйымдастырушылық және техникалық іс-шаралар кешені болып табылады. нәтижесі болып табылады белгілі бір алуға жасалуы тиіс процесс (берілген) - жұмыс (немесе тапсырма) Оқиға (кезеңдері) Байланыс (тәуелділік) жұмыс (қызмет): Желілік модельдер келесі үш элементтен тұрады желілік модельдерде

элементтері мен түрлері әдетте ынуды бастауға мүмкіндік береді. терминдер проблема (Тапсырма) және жұмыс бірдей болуы мүмкін, бірақ кейбір жағдайларда проблема, мысалы ұзартқыш үшін, тікелей өндіріс тыс іс-шараларды орындау үшін шақырылады; жобалық құжаттаманы ұзартқыш сараптамасы; немесе е тапсырыс берушінің және ұзартқыш келіссөздер;. Кейде бұл термин проблема Иерархияның ең төменгі деңгейінің жұмыстарын көрсету үшін пайдаланылады. термин «жұмыс» кең мағынада пайдаланылады, және келесі мәндер бар болуы мүмкін: уақыт пен ресурстарды талап етеді нақты жұмыс, яғни еңбек үдерісі; күту - уақыт алады процесс, бірақ ресурстарды тұтынады емес; тәуелділік немесе «бос жұмыс» - уақыт пен ресурстарды талап етпейді жұмыс, бірақ жұмысты бастап мүмкіндігі басқа қорытындысы бойынша тікелей тәуелді екенін көрсетеді. Оқиға (Node) - кез келген операция басталғаннан немесе аяғында уақыт жүйесі мемлекеттік өзгерістер, өзінің мәні бойынша іс-шара болып табылады, және әрбір тапсырма бастапқы және соңғы .ара болуы қажет. Бос - қорытынды іс-шара бастапқы көшу үшін орын алуы керек акт немесе процесс. Кейбір оқиғалар бұл жағдайда, іс-шаралар абаттандыру дереу іс-шараны алдындағы соңғы жұмыс соңына дейін тиісті уақыт, бірнеше жұмыстар үшін ортақ болып табылады. Milestone (Milestone) - маңызды аралық нәтижелері (жобаның жеке кезеңдері) қол жеткізуді сипаттайтын іс-шаралар түрлі. Link (Link) - жеке жұмыстар мен іс-шаралар мерзімі орындау арасындағы логикалық қатынастар. Басқа жұмысты аяқтау кез келген жұмыстың басталуы қажет болса, онда олар (байланысты) бұл жұмыстар облигациялар бойынша қосылған айтады. Байланыс ажырамас технология жұмыстары, немесе олардың ұйым анықталуы мүмкін. Тиісінше, сілтемелер, технологиялық және ұйымдастырушылық түрлері бар. Сілтемелер Сондай-ақ, тәуелділіктер (қарым-қатынастар), немесе жалған жұмыстары (жалған қызметі) деп аталатын болады. Қатынастар орындаушылар мен уақыты тікелей шығындарды қажет емес, алайда, олар (оң, теріс немесе нөлдік) созылу ұзақтығы сипаттауға болады. Желілік модель көріктендіру іс-шаралар ТП 1. ерте кезең (0)=0 ерекшеліктері elementov.4 оның іс-шаралардың келесі сипаттамаларын анықтайды, ТР (J)=есептеу {ТР tahi (i) + Т (и)} жылы, J=1--N ол тыс барлық жолдарын аяқтау үшін ең ерте күнді сипаттайды. Бұл көрсеткіш бастапқы желілік іс-шаралар бастап, графтар моделі арқылы «тікелей жол» арқылы анықталады. 2. Кеш мерзімді жетістіктері оқиғалар TS (N) ТП (N), TS (i)={Minj (TS (J) -t (и)}=I=1 - (N-1), ең соңғы кезеңін білдіреді Бұл оқиға мынадай барлық тректерді аяқтау үшін қажетті дәл сонша уақыт болып қалады, содан кейін. Бұл көрсеткіш желісінің соңғы оқиғаларға бастап, графтар моделін «қайтарым» арқылы анықталады. 3. Резервтік уақыт оқиғалар R (T)=TS (i)- ТР (i) ағымдағы ең ұзақ мерзімі операциялардың толық спектрін кеңейту туындатпай, іс-шараның басталуы кейінге қалдыруға болады көрсетеді R (i) жұмыс 0. сипаттамаларын=сын жолында іс-шаралар уақыт ережелер нөлге тең (i. J) ерте бастау жұмыс ерте мерзімі жұмыс кеш резервтер жұмыс мерзімде жұмысты бастау: Толық қорығы - аямай ең көп уақыты, бастағанынан кідіріс немесе сыни жолдары ұзақтығын арттыру жоқ жұмыс ұзақтығын арттыруға болады сыни жолында жұмыс емес. күндізгі резервтік; Жеке Резерв - оның бастапқы шараның соңында күн...

ді өзгертпей, жұмыс ұзақтығын арттыруға болады толық қорық бөлігі; еркін айналымдағы - уақыт максималды маржа (бұл ерте кезеңде басталған жағдайда) жұмыс бастау немесе кейінге қалдыруға болады кейінгі ерте жұмыстар мерзімін өзгертпей, оның ұзақтығын артады; тәуелсіз резерв - барлық алдыңғы жұмыс кеш кезеңдерде аяқталады, онда резервтік уақытта, барлық мынадай - ерте кезеңдерінде басталады. Бұл ереженің пайдалану уақыты басқа да жұмыстарды қорларын әсер етпейді. Notes сын жолында жатып жұмыс істейді, резервтер уақыт жоқ. Сыни жолы бастапқы оқиға LCR операция (I, J), содан кейін Rp (I, J)=RL (I, J), онда. LCR J содан кейін жұмыс қорытынды іс-шарасы (I, J), Rp (I, J)=Ск (I, J), онда. Егер LCR Ли оқиға i, J және оқиға жұмысы (I, J), және жұмыс өзі сын жолына тиесілі емес, Rp (I, J)=Ск (I, J)=Rp (I, J) Ұзақтығы сипаттамасы жолы оның жұмыстарының ұзақтығы сомасы болып табылады. Резервтік уақыт жолы сын жолы мен қарастырылып отырған жол ұзындығы арасындағы айырма болып табылады. Резервтік уақыт жолы барлық жұмысты істеп уақыт ұзақтығын өзгертпей, бұл жолды құрайды жұмыстарды ұзақтығын арттыруға мүмкін жолын көрсетеді. Желілік моделін деп аталатын сын жолын ажырата алады. LCR сын жолы кімнің күндізгі резервтік нөлдік Rp (I, J) болып табылады, сонымен қатар,=0 жұмыстарды (I, J), тұрады, уақыт R (i) сыни I барлық іс-шаралар резерві сыни жолдары 0. ұзындығы мөлшерін анықтайды желісі мен тең қорытынды іс-шаралар бастапқы бастап ең ұзын жол. Ақпарат Айтпақшы желілік модельдер мен графиктер түрлері, желілік модельдер екі түбегейлі әр түрлі түрлері (диаграммалар) бар: 5 1. Quot желісі түрі; шыңы - оқиға (белсенділігі бойынша көрсеткіні ұзартқыш;): шыңдары іс-шараларға сәйкес, және доғалық оларды байланыстыратын - жұмыс. Қосылымдар жұмыс бірдей үзік жебенің, баған доғаның бағытталған ұсынылған. Түрінде ұзартқыш Кейбір көздері желілік диаграммалар; vershinafsobytie Quot деп аталатын АҚШ . 2. Quot желісі түрі; шыңы - жұмыс және ұзартқыш; (белсенділігі бойынша Түйін ұзартқыш;): - қатынастар шыңдары жұмыстар мен доғаның сәйкес келеді. Үшбұрыш - факультативті кез келген нысандары арқылы көрсетіледі Оқиғалар (негізінен кезеңдері). Осы түріне желісі диаграммалар кейде аталады Quot көрсетіледі; француз . Соңғы жылдары түрінде ұзартқыш, желілік модел... i; vershinafrabota әлдеқайда жиі Quot желілік түріне қарағанда пайдаланылады; . vershinafsobytie Желілік модель және желілік кестесі ауқымы мен уақыты шкала бойынша орналасқан көрсетілуі мүмкін. Жұмыс параметрлерін есептеу үшін жоспарлау сатысында әзірленген Желілік модельдер, әдетте, ол уақыт көрсету қиын. Керісінше, жұмыстарды алынған кестесін визуализацияланған мен оны жүзеге асыруды бақылау үшін үлгі (графика), анық, бір мерзімде байланған. Уақыт кестесі параметрлері есептелген түзетілген және бекітілген болса, онда біз жоспарлау кезеңінің соңы мен жобаны бағыттауға көшу туралы айтуға болады./> тарау II

1-мысал Мысал Гант диаграммасының Гант диаграммасының бірінші диаграмма пішімін 1910 жылы Генри Л Ганта (Генри Л Гант, 1861-1919) әзірлеген болатын 2. Гант сегменттерін (графикалық Die білдіредіжәне т.б.) көлденең мерзімде орналастырылған. Әрбір сегмент бір тапсырма немесе подзадаче сәйкес келеді. Жоспарын құрайды міндеттері мен Қосалқы тігінен орналастырылған. Бастау, Аяқтау және мерзімде бойынша сегментінің ұзындығы басы, соңы мен тапсырманы ұзақтығы сәйкес келеді. Кейбір Гант диаграммасының туралы, сондай-ақ міндеттерді арасындағы қатынасты көрсетеді. диаграмма жұмыстарының ағымдағы жағдайын көрсету үшін пайдаланылатын болады: тіктөртбұрыш мәселеге тиісті айтып келемін, тапсырманы пайызын атап; «Бүгін» уақытқа сәйкес келетін тік сызық көрсетеді. Жиі Гант диаграмма жолдар диаграммада көрсетілетін бір тапсырмаға сәйкес жұмыстардың кестеге іргелес болып, ба андар мен тапсырма туралы қосымша ақпаратты қамтиды. Сындарлы жол әдісі - жоспарлау кестесіне және Жоба Time басқару тиімді құрал. әдісі, олардың өзара қарым-қатынас тұрғысынан жобаның басынан аяғына дейін ең ұзын-іске тапсырма ретпен анықтамасын негізделген. Сын жолында (сын тапсырма) тапсырмалар нөлдік резервтік Run-уақыт бар және өзгерген жағдайда жобаның олардың ұзақтығы шарттарын өзгерту. Осы орайда, жоба сын міндеттері оларды орындау мерзімдері қозғайтын проблемалар мен тәуекелдер, атап айтқанда, дер кезінде анықтау және, тұтастай алғанда жобаның сондықтан, мерзімі неғұрлым мұқият мониторинг талап енгізу. Тапсырмаларды ұзақтығын өзгерту кезінде, олардың кейбіреулері сыни жолында болуы ... мүмкін, себебі жобаның сын жолында барысында әр түрлі болуы мүмкін. Нөлге тең, жобаның бастапқы кезден Егер сыни жолдары есептеу, содан кейін жұмыс бірінші іс-шаралар шығу желілік кестесіне алғашқы жұмыстарды аяқтау мерзімі, олардың ұзақтығына болады. Кез келген жағдайда мерзімдері тікелей осы іс-шараға тартылған кейінірек аяқтау уақытына тең орнату керек жұмыс істейді: ол желіде жұмыс оған барлық алдыңғы жұмыс дейін бастау мүмкін емес деп саналады. «Эстафетасы» әдісі - - желілік кестесіне барлық доғаның көру үшін шешім процесінде. Егер басқа доғалық түйіндерді і және J қосылады коріп делік. Мен оның жетістіктері уақыт және осы уақыт плюс болжамды көбірек уақыт оқиға J ұзақтығын ұсынуға шыңы болса, онда J басталған жаңа сметалық уақыт жоғарғы орнатылады, пайда тең бағаланған уақыт і плюс қаралатын доғаның ұзақтығы. Жұмыс/іс-шаралар бастауы/аяғынан бастап кез келген түзету болжамды мәні тудыруы мүмкін емес болған кезде келесі көрініс доғалар шешім аяқталады. нәтижесі ең соңғы оқиға анықталуы мүмкін пайда болу уақыты болып табылады, және осы мақсатта бастапқы шыңы бастап жолы сын болып саналады және жобаның ұзақтығын анықтау еді. Жобаның жалпы ұзақтығы қатар, сыни жолы уақыты мен әзірлеу шығындарын азайту, инновацияларды іске асыру жоспарлауда маңызды рөл атқарады желілік кестесін басқа да сипаттамаларын анықтайды. желілік кестесін қысқарту мәселесін шешу мәні жұмысын қатар, сыни жолында өтірік емес, жұмыстарды алып тастау, сыни жолында жұмысты орындау үшін қосымша ресурстарды тарту азаяды. Оның ықтималдық сипаттамалары проблема шешіледі тиісті мәндеріне сәйкес келеді, осылайша қалыптасады стохастикалық (кездейсоқ) үдерісінің іске асыру үлкен санын алу негізінде сандық әдістерін жалпы атауы топтары - Монте-Карло әдісі (Монте-Карло әдісі, ХМИ). Физика, математика, экономика, оңтайландыру, басқару теориясы және т.б. түрлі салалардағы мәселелерді шешу үшін қолданылады. Функциялары детерминирленген әдісін /> Интеграциялық Монте-Карло

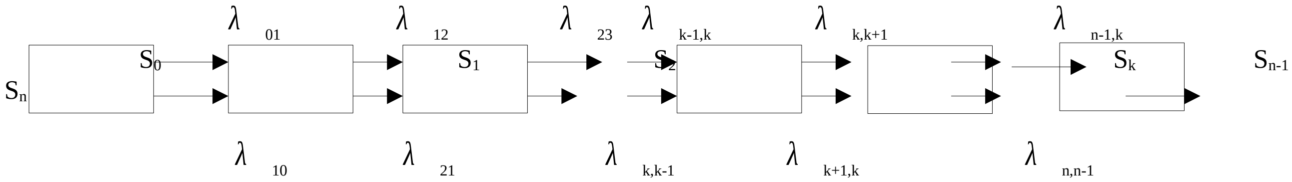
Тақырып 5. Шешімдердің теория негіздері

Дәріс №12. Шешім қабылдаудын есептер классификациясы : айқындықта, тәуекелде, екіұштылықта, қарсы әрекетте. Тиімдеу критерийлері. Статистикалық шешімдердің теориялар мәселелері

1. Егер бізге белгіленген граф жағдайы белгілі болса, онда ықтималдық жағдайлар үшін Колмогоров теңдеуін оңай жазуға болады және финалдық ықтималдықтар үшін алгебралық теңдеулерді жазып және шешуге болады.

Егер жүйелердің граф жағдайы «жойылу және көбею схемасы» түрінде көрсетілетін болса оның теңдеуін әріп түрінде алдын-ала жазып шешуге болады.

Гарф жағдайының жойылу және көбею схемасы келесі суреттегідей көрсетіледі:



сурет.

Бұл гафтың ерекшелігі сол, ондағы барлық жағдайларды бір тізбек бойымен жалғастырып, тура және кері байланыстарын стрелкалар арқылы әрбір көрші жағдаймен оң және сол жағымен өзара байланыстырады, тек (S_0, S_n)- соңғы жағдайлар ғана бір көрші жағдаймен байланысады.

«Жойылу және көбею схемасы» термині беологиялық есептерден бастау алған.

Жойылу және көбею схемасы тәжрибе жүзінде әр түрлі есептерде көптеген кездеседі, нақты алғанда көпшілікке қызмет көрсету теориясында, сондықтан олар үшін финалдық ықтималдықтар жағдайын табу аса маңызды.

Айталық, жүйені граф стрелкалары бойынша аламастыратын оқиғалар ағыны-қарапайым болсын. Жоғары (11.1) суретте көрсетілген графты пайдалана отырып финалдық ықтималдықтар жағдайы үшін алгебралық теңдеулер құрып шешімін алайық.

Бірінші S_0 жағдайы үшін

$$\lambda_{01}P_0 = \lambda_{10}P_1 \qquad (11.1).$$

Екінші S_1 жағдайы үшін

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10})\, P_1 = \lambda_{01}P_0 + \lambda_{21}P_2$$

(11.1) теңдеуін пайдалана отырып, екінші теңдеуді келесі түрге келтіруге болады:

$$\lambda_{12}P_1 = \lambda_{21}P_2$$

және осығаң орай

$$\lambda_{23}P_2 = \lambda_{32}P_3$$

жалпы түрде

$\lambda_{к-1,\,к}P_{к-1} = \lambda_{к,\,к-1}P_к$

мұндағы к 0-ден n-ге дейінгі барлық мәндерлерді қабылдайды.

Сонымен $P_0, P_1, \ldots, P_n$ финалдық ықтимaлдылықтар келесі теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{01}P_0=\lambda_{10}P_1, \\ \lambda_{12}P_1=\lambda_{21}P_2 \\ ---------- \\ \lambda_{k-1,}P_{k-1}=\lambda_{k,k-1},p_k \\ ---------- \\ \lambda_{n-1,n}P_{n-1}=\lambda_{n,n-1},P_n \end{array}\right\} \quad (11.2)$$

Сонымен қатар нормалау шартын есепке алу қажет

$$P_0+P_1+P_2+....+P_n=1 \quad (11.3)$$

Осы теңдеулер жүйелерін шешеміз. Бірінші теңдеудегі P_1-ді P_0 арқылы өрнектейміз.

$$P_1=\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}P_0 \quad (11.4)$$

(11.4) шартына сәйкес екінші теңдейден

$$P_2=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}P_1=\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0 \quad (11.5)$$

(11.5) есепке ала отырып үшінші теңдеуден

$$P_3=\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0 \quad (11.6)$$

жалпы кез келген К үшін (1 ден к-ге дейін)

$$P_k=\frac{\lambda_{k-1,k}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0 \quad (11.7)$$

(11.7) формуланы қарастыратын болсақ, оның алымында солдан оңға қарай бағытталған стрелкаға жазылған барлық интенсивтіліктердің көбейтіндісі, ал бөліміңде-оңнан солға қарай бағытталған стрелкада жазылған интенсивтіліктердің көбейтіндісі келтірілген.

Сонымен барлық $P_0, P_1, \ldots, P_n$ жағдайларының ықтималдылығы тек бір ғана P_0 арқылы белгіленді. Бұл өрнектерді (11.3) нормаланған шартқа қоямыз. P_0 жақша сыртына шығара келе, келесі өрнектерді аламыз:

$$P_0\left(1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}+\ldots+\frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)=1$$

бұдан

$$P_0\left(1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}+\ldots+\frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)=-1$$

Алынған формулалар көпшілікке қызымет көрсету теориясының қарапайым есептерін шығаруда қолданылады.

1. Жүйелік талдау және операцияларды зерттеудің даму жолдары. Оптималдау моделдері

мен операцияларды зерттеудің компьютерлік жүргізілуі.

z=2x1+3x2 функциясына максимал мән әперетін және

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2 \le 15 \\ 5x_1+2x_2 \le 10 \end{cases}$$

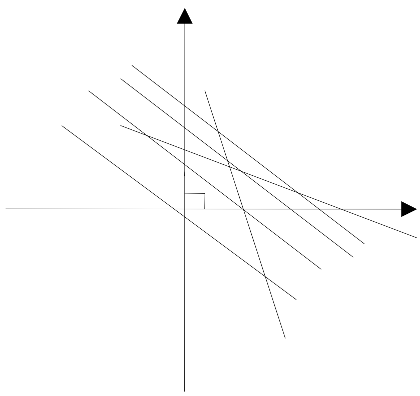
x_1=0, x_2=0

теңсіздіктерін қанағаттандыратын x=(x_1,x_2) жоспарын тап.

Шешуі: Есептің анықталу облысын табу үшін теңсіздіктерді эквивалент теңдеулерге түрлендіріп, x_1ox_2 жазықтығында

$$\begin{cases} ¿\,3x_1+5x_2=15 \\ 5x_1+2x_2=10 \end{cases}$$

сәйкес шекара түзулерін жүргіземіз. Содан соң алынған түзулердің кез келген жағынан бір нүкте алып, оның координаттарын теңсіздіктерге қойып нәтижесінде жартылай жазықтықтарды анықтаймыз (4 суретті қара)



Осы жартылай жазықтардың қиылысу нүктелері ABC көпбұрышын береді, ол берілген теңсіздіктердің анықталу облысын құрайды. Содан соң $Z_0=2x_1+3x_2=0$ түзуін жүргіземіз. Ол түзу N=(2,3) векторына перпендикуляр және оң жағы нөлге тең болғандықтан координат системасының бас нүктесінен өтеді де, алғашқы түзу деп аталады. Мақсат функциясының өсу бағыты N=(2,3) векторының бағытымен анықталғандықтан Z_0 түзуін параллель жылжыта отырып B нүктесіндегі түзу ең жоғары деңгейде жатқандығын көреміз, сондықтан ол таяныш түзу болады. Енді B нүктесінің координаттарының табамыз. Ол үшін екі түзудің теңдеуін біріктіріп шешіңіз: $\begin{cases} ¿\,3x_1+5x_2=15 \\ 5x_1+2x_2=10 \end{cases}$ $x_1=\frac{20}{19}$; $x_2=\frac{45}{19}$

Яғни, B($\frac{20}{19}$, $\frac{45}{19}$) нүктесінің координаттарын мақсат функциясына қойып, оның ең үлкен мәні max Z($\bar{x}$)=Z(B)=2*$\frac{20}{19}$ + $\frac{3*45}{19}$=$\frac{175}{19}$=9,2

Сонымен, оптимал жоспарды $x^{опт}$-деп белгілесек, онда:

$X^{опт}$=($\frac{20}{19}$; $\frac{45}{19}$), Z($X^{опт}$)=9,2

13. Сызықтық программалау есептерінің оптимал жоспарын графиктік әдіспен табыңдар

1) $Z_{min}=-2x_1+5x_2$

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2 \ge 14 \\ 5x_1+6x_2 \le 30 \\ 3x_1+8x_2 \ge 24 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

2) $Z_{max}=3x_1-2x_2$

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2 \ge 14 \\ -x_1+2x_2 \ge 2 \\ 7x_1+7x_2 \ge 49 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

3) $Z_{min}=2x_1-3x_2$

4) $Z_{min}=x_1-4x_2$

¿ ¿

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ $\qquad$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

5) $Z\max = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19 \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ (i=1,2,.......5)$

6) $Z\min = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25 \end{cases}$$

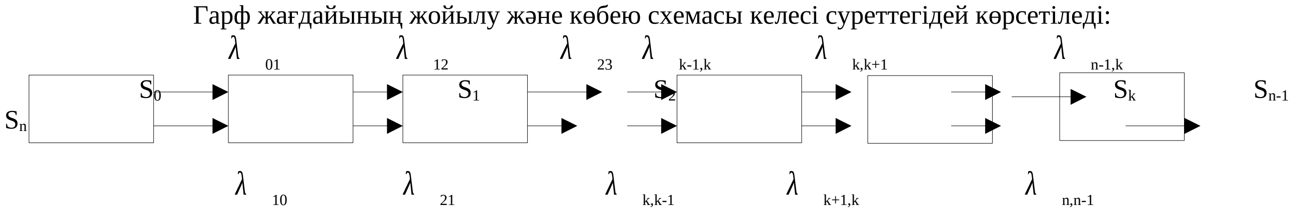
Тақырып 6. Көпшілікке қызмет көрсету теориясының негіздері

Дәріс №13.Көпшілікке қызмет көрсету теориясының есептері. Көпшілікке қызмет көрсету жүйелердің классификацияы. Көпшілікке қызмет көрсетудің негізгі компонент тері. Қарапайым көпшілікке қызмет көрсету жүйелері және олардың мінездемелері.

Егер бізге белгіленген граф жағдайы белгілі болса, онда ықтималдық жағдайлар үшін Колмогоров теңдеуін оңай жазуға болады және финалдық ықтималдықтар үшін алгебралық теңдеулерді жазып және шешуге болады.

Егер жүйелердің граф жағдайы «жойылу және көбею схемасы» түрінде көрсетілетін болса оның теңдеуін әріп түрінде алдын-ала жазып шешуге болады.

Гарф жағдайының жойылу және көбею схемасы келесі суреттегідей көрсетіледі:



сурет.

Бұл гафтың ерекшелігі сол, ондағы барлық жағдайларды бір тізбек бойымен жалғастырып, тура және кері байланыстарын стрелкалар арқылы әрбір көрші жағдаймен оң және сол жағымен өзара байланыстырады, тек (S_0, S_n)- соңғы жағдайлар ғана бір көрші жағдаймен байланысады.

«Жойылу және көбею схемасы» термині беологиялық есептерден бастау алған.

Жойылу және көбею схемасы тәжрибе жүзінде әр түрлі есептерде көптеген кездеседі, нақты алғанда көпшілікке қызымет көрсету теориясында, сондықтан олар үшін финалдық ықтималдықтар жағдайын табу аса маңызды.

Айталық, жүйені граф стрелкалары бойынша аламастыратын оқиғалар ағыны-қарапайым болсын. Жоғары (11.1) суретте көрсетілген графты пайдалана отырып финалдық ықтималдықтар жағдайы үшін алгебралық теңдеулер құрып шешімін алайық.

Бірінші S_0 жағдайы үшін

$$\lambda_{01} P_0 = \lambda_{10} P_1 \qquad (11.1).$$

Екінші S_1 жағдайы үшін

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10})\, P_1 = \lambda_{01} P_0 + \lambda_{21} P_2$$

(11.1) теңдеуін пайдалана отырып, екінші теңдеуді келесі түрге келтіруге болады:

$$\lambda_{12} P_1 = \lambda_{21} P_2$$

және осыған орай

$\lambda_{23} P_2 = \lambda_{32} P_3$

жалпы түрде

$\lambda_{к-1,к} P_{к-1} = \lambda_{к,к-1} P_к$

мұндағы к 0-ден n-ге дейінгі барлық мәндерлерді қабылдайды.
Сонымен $P_0, P_1, \ldots, P_n$ финалдық ықтималдылықтар келесі теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{01} P_0 = \lambda_{10} P_1, \\ &\lambda_{12} P_1 = \lambda_{21} P_2 \\ &---------- \\ &\lambda_{k-1,} P_{k-1} = \lambda_{k,k-1}, p_k \\ &---------- \\ &\lambda_{n-1,n} P_{n-1} = \lambda_{n,n-1}, P_n \end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

Сонымен қатар нормалау шартын есепке алу қажет

$P_0+P_1+P_2+....+P_n=1$ (11.3)

Осы теңдеулер жүйелерін шешеміз. Бірінші теңдеудегі P_1-ді P_0 арқылы өрнектейміз.

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} P_0 \qquad (11.4)$$

(11.4) шартына сәйкес екінші теңдейден

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} P_1 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0 \qquad (11.5)$$

(11.5) есепке ала отырып үшінші теңдеуден

$$P_3 = \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0 \qquad (11.6)$$

жалпы кез келген К үшін (1 ден к-ге дейін)

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0 \qquad (11.7)$$

(11.7) формуланы қарастыратын болсақ, оның алымында солдан оңға қарай бағытталған стрелкаға жазылған барлық интенсивтіліктердің көбейтіндісі, ал бөлімінде-оңнан солға қарай бағытталған стрелкада жазылған интенсивтіліктердің көбейтіндісі келтірілген.

Сонымен барлық $P_0, P_1, \ldots, P_n$ жағдайларының ықтималдылығы тек бір ғана P_0 арқылы белгіленді. Бұл өрнектерді (11.3) нормаланған шартқа қоямыз. P_0 жақша сыртына шығара келе, келесі өрнектерді аламыз:

$$P_0\left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right) = 1$$

бұдан

$$P_0\left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right) = -1$$

Алынған формулалар көпшілікке қызымет көрсету теориясының қарапайым есептерін шығаруда қолданылады.

Тақырып 7. Ойындардың теориялар элементтері

Дәріс №14 Ойындардың негізгі түсініктері, классификацияы және сипаттамасы. Нөлдік сомамен екі қатысушы ойындар

Берілген сызықтық функционалға максимал мән әперетін

$Z(\overline{x})=2x_1+3x_2+5x_3+3x_4$ max

Және мына

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3+5x_4 \le 20 \\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4 \le 30 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \le 18 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad j=1,2,3,4$$

шарттарын қанағаттандыратын оптимал шешімін табайық.

Шешуі: Есептің шектеулері кіші немесе тең теңсіздіктерімен берілген, алғашқы таяныш жоспарын табу үшін $x_5 \ge 0$,$x_6 \ge 0$, $x_7 \ge 0$ қосымша белгісіздерін енгізу арқылы, симплекс теңдеулерін аламыз,

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3+5x_4+x_5=20 \\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4+x_6=30 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_7=18 \end{cases}$$

$Z(\overline{x})=2x_1+3x_2+5x_3+3x_4+0x_5+0x_6+0x_7$ max

Осы теңдеулер системасын векторлар арқылы келесі түрде жазуға болады $X_1A_1+X_2A_2+X_3A_3+X_4A_4+X_5A_5+X_6A_6+X_7A_7=A_0$

Мұндағы $A_1=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$,

$A_4=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$, $A_5=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $A_6=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $A_7=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}20\\30\\18\end{pmatrix}$

A_5, A_6, A_7 бірлік векторларын базис етіп алып, қалған x_1,x_2,x_3,x_4 белгісіздерін нөлге теңестірсек, онда алғашқы таяныш жоспарын аламыз. Ол X_0=(0,0,0,0,20,30,18)-ге тең.

Бұл жоспардағы сызықтық функционалдың мәні $Z_0=Z(X_0)$=0-ге тең.

Есептің алғашқы таяныш жоспары табылғаннан соң, симплекс кестесін құрып оптимал шешім алынғанша жалғастырамыз.

I-итерация

i	Б.В	С	A_0	2	3	5	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	20	2	4	3	5	1	0	0
2	A_6	0	30	6	5	4	3	0	1	0
3	A_7	0	18	1	2	3	4	0	0	1
m+1	Z_j-C_j		0	-2	-3	-5	-3	0	0	0

Симплекс кестесін толтыру барысында Б.В-бағанына базис құрайтын векторлар, С-бағанына сол базиске сәйкес келетін сызықтық функционалдың коэфиценттерін жазамыз. A_0-алғашқы таяныш жоспарды жазамыз. Есепті шығару барысында осы бағанда оптимал жоспар алынады. Ал A (j=1,2,....,n) ибағандарына j векторының базисте жіктелу коэфиценттері жазылады. Симплекс кестесінің (m+1)-ші қатарының A_0 бағанымен қиылысқан клеткасына, сызықтық функционалдың алғашқы таяныш жоспардағы мәнін $Z_0=Z(X_0)$-ді жазамыз. Қалған клеткаларға Z_j-C_j өрнектерінің мәні жазылады.

Берілген есепте сызықтық функционалдың максимал мәнін табу керек дейік, ол кезде Z_j-C_j >0 болуы тиіс. Ол үшін

$$\max|Z\,j-C\,j|=|Z\,к-C\,к|=\Delta_к$$

$$Z\,j-C\,j<0$$

шартын қанағаттандыратын $A_к$ векторын базиске енгізіп, базистен

$$\min_{x_{iл}} ¿ \frac{x_i}{x_{iк}}=\frac{x_l}{x_{lк}}=\Theta_{lк}$$

шартын қанағаттандыратын A_l векторын шығару керек. l қатары мен к бағанның қиылысында тұрған $x_{lк}$элементін шешуші элемент деп, ал сол баған мен жолды шешуші жол және шешуші баған деп атайды.

Симплекс әдісінің алгоритмі бойынша A_3 бағана шешуші баған болады. Шешуші жолды мына қатынастардан анықтаймыз

$$\min_{x_{i3>0}} ¿ \frac{A_0}{x_{13}}=\min\left\{\frac{20}{3},\frac{30}{14},\frac{18}{3}\right\}=6$$

яғни симплекс кестесінің 3-ші жолы шешуші жолы болады, ал A_7 векторын базистен шығарамыз.

a_{33} =3 элементі шешуші элемент болады. Осы элементтерді анықтап алған соң жаңа симплекс кестесін аламыз, оның элементтері Жордан-Гаусс әдісіндегідей есептелінеді:

II-итерация

i	Б.В	С	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1 2 3	A_5 A_6 A_3	0 0 5	2 6 6	1 1 4/3 1 /3	2 7 /3 2 /3	3 4 3	1 - 7/3 4 /3	1 0 0	0 1 0	- 1 - 4/3 1 /3
m+1	Z_j-C_j		3 0	- 1/3	1 /3	0	1 1/3	0	0	5 /3

Алынған кестеде соңғы қатарда теріс элементі бар бағанды A_1-шешуші етіп аламыз,

$$\min_{x_{i1>0}} \frac{A_0}{x_{13}}=¿\min\left\{\frac{2}{1},\frac{18}{14},\frac{18}{1}\right\}¿=\frac{18}{14}$$

шартын қанағаттандыратын A_6-векторы базистен шығарылады. a_{21}=14/3 шешуші элемент болады. Жаңа кесте құрамыз

III-итерация

i	Б.В	С	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1 2 3	A_5 A_1 A_3	0 0 5	5/7 9/7 39/7	0 1 0	3/2 1/2	0 0 1	3/2 -1/2	1 0 0	-3/14 3/14 -1/14	- 5/7 - 2/7 3 /7
m+1	Z_j-C_j		213/7	0	1/2	0	10/3	0	1/14	1 1/7

3-ші кестенің соңғы қатарында теріс элементтер жоқ болғандықтан, табылған шешім оптимал. Сонымен, оптимал жоспар

$$X^{ОПТ}=\left(\frac{9}{7},0,\frac{39}{7},0\right).$$

Алынған оптимал жоспарға сәйкес сызықтық функционалдың мәні

$Z(X^{опт})=\dfrac{213}{7}$-ге тең.

23. Сызықтық программалаудың келесі есептерін симплекс әдісімен шығарыңдар

1. $Z(\bar{x})=10x_1+8x_2+12x_3+15x_4$ max

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+2x_4\le 90 \\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4\le 120 \\ 4x_1+5x_2+6x_3+3x_4\le 150 \end{cases}$$

$x_i\ge 0$, j=1,2,3,4

2. $Z(\bar{x})=25x_1+30x_2+32x_3+36x_4$ max

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4\le 200 \\ 5x_1+6x_2+7x_3+4x_4\le 260 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+3x_4\le 180 \end{cases}$$

$x_i\ge 0$, j=1,2,3,4

24. 1) $Z(\bar{x})=x_1+5x_2+4x_3+6x_4$ max

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4\le 150 \\ 5x_1+6x_2+2x_3+3x_4\le 210 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4\le 190 \end{cases}$$

$x_i\ge 0$, j=1,2,3,4

2) $Z(\bar{x})=-x_1+3x_2+2x_3$ min

$$\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3\le 5 \\ 2x_1-3x_2+x_3\le 3 \\ 3x_1+5x_2+6x_3\le 5 \end{cases}$$

$x_i\ge 0$, j=1,2,3

3) $Z(\bar{x})=x_1+x_2+x_3$ min

$$\begin{cases} x_1-x_4-2x_6=5 \\ x_2+2x_4-3x_5+x_6=3 \\ x_3+2x_4-5x_5+6x_6=5 \end{cases}$$

$x_i\ge 0$, j=1,2,3,4

Берілген сызықтық функционалға максимал мән әперетін

$Z(\bar{x})=2x_1+3x_2+5x_3+3x_4$ max

Және мына

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3+5x_4\le 20 \\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4\le 30 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4\le 18 \end{cases}$$

$x_i\ge 0$, j=1,2,3,4

шарттарын қанағаттандыратын оптимал шешімін табайық.

Шешуі: Есептің шектеулері кіші немесе тең теңсіздіктерімен берілген, алғашқы таяныш жоспарын табу үшін $x_5\ge 0$, $x_6\ge 0$, $x_7\ge 0$ қосымша белгісіздерін енгізу арқылы, симплекс теңдеулерін аламыз,

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3+5x_4+x_5=20 \\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4+x_6=30 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_7=18 \end{cases}$$

$Z(\bar{x})=2x_1+3x_2+5x_3+3x_4+0x_5+0x_6+0x_7$ max

Осы теңдеулер системасын векторлар арқылы келесі түрде жазуға болады $X_1A_1+X_2A_2+X_3A_3+X_4A_4+X_5A_5+X_6A_6+X_7A_7=A_0$

Мұндағы $A_1=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$,

$A_4=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$, $A_5=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $A_6=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $A_7=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}20\\30\\18\end{pmatrix}$

A_5, A_6, A_7 бірлік векторларын базис етіп алып, қалған x_1, x_2, x_3, x_4 белгісіздерін нөлге теңестірсек, онда алғашқы таяныш жоспарын аламыз. Ол X_0=(0,0,0,0,20,30,18)-ге тең.

Бұл жоспардағы сызықтық функционалдың мәні Z_0=Z(X_0)=0-ге тең.

Есептің алғашқы таяныш жоспары табылғаннан соң, симплекс кестесін құрып оптимал шешім алынғанша жалғастырамыз.

I-итерация

i	Б.В	C	A_0	2	3	5	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1 2 3	A_5 A_6 A_7	0 0 0	20 30 18	2 6 1	4 5 2	3 4 3	5 3 4	1 0 0	0 1 0	0 0 1
m+1	Z_j-C_j		0	-2	-3	-5	-3	0	0	0

Симплекс кестесін толтыру барысында Б.В-бағанына базис құрайтын векторлар, С-бағанына сол базиске сәйкес келетін сызықтық функционалдың коэфиценттерін жазамыз. A_0-алғашқы таяныш жоспарды жазамыз. Есепті шығару барысында осы бағанда оптимал жоспар алынады. Ал А (j=1,2,....,n) ибағандарына j векторының базисте жіктелу коэфиценттері жазылады. Симплекс кестесінің (m+1)-ші қатарының A_0 бағанымен қиылысқан клеткасына, сызықтық функционалдың алғашқы таяныш жоспардағы мәнін Z_0=Z(X_0)-ді жазамыз. Қалған клеткаларға Z_j-C_j өрнектерінің мәні жазылады.

Берілген есепте сызықтық функционалдың максимал мәнін табу керек дейік, ол кезде Z_j-C_j>0 болуы тиіс. Ол үшін

max$|Z\,j-C\,j|=|Z\,\kappa-C\,\kappa|$=$\Delta_\kappa$

$$Z\,j-C\,j<0$$

шартын қанағаттандыратын A_κ векторын базиске енгізіп, базистен

$$\min_{x_{i\kappa}}¿\frac{x_i}{x_{i\kappa}}=\frac{x_l}{x_{l\kappa}}=\Theta_{l\kappa}$$

шартын қанағаттандыратын A_l векторын шығару керек. l қатары мен к бағанның қиылысында тұрған $x_{l\kappa}$элементін шешуші элемент деп, ал сол баған мен жолды шешуші жол және шешуші баған деп атайды.

Симплекс әдісінің алгоритмі бойынша A_3 бағана шешуші баған болады. Шешуші жолды мына қатынастардан анықтаймыз

$$\min_{x_{i3}>0}¿\frac{A_0}{x_{13}}=\min\left\{\frac{20}{3},\frac{30}{14},\frac{18}{3}\right\}=6$$

яғни симплекс кестесінің 3-ші жолы шешуші жолы болады, ал A_7 векторын базистен шығарамыз.

a_{33} =3 элементі шешуші элемент болады. Осы элементтерді анықтап алған соң жаңа симплекс кестесін аламыз, оның элементтері Жордан-Гаусс әдісіндегідей есептелінеді:

II-итерация

i	Б.В	C	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1 2 3	A_5 A_6 A_3	0 0 5	2 6 6	1 14/3 1/3	2 7/3 2/3	3 4 3	1 -7/3 4/3	1 0 0	0 1 0	- 1 -

										4/3 1/3
m+1	Z_j-C_j		30	-1/3	1/3	0	11/3	0	0	5/3

Алынған кестеде соңғы қатарда теріс элементі бар бағанды A_1-шешуші етіп аламыз,

$$\min_{x_{i1}>0}\frac{A_0}{x_{13}} = ¿\min\left\{\frac{2}{1},\frac{18}{14},\frac{18}{1}\right\}¿=\frac{18}{14}$$

шартын қанағаттандыратын A_6-векторы базистен шығарылады. a_{21}=14/3 шешуші элемент болады. Жаңа кесте құрамыз

III-итерация

i	Б.В	C	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1 2 3	A_5 A_1 A_3	0 0 5	5/7 9/7 39/7	0 1 0	3/2 1/2	0 0 1	3/2 -1/2	1 0 0	-3/14 3/14 -1/14	-5/7 -2/7 3/7
m+1	Z_j-C_j		213/7	0	1/2	0	10/3	0	1/14	11/7

3-ші кестенің соңғы қатарында теріс элементтер жоқ болғандықтан, табылған шешім оптимал. Сонымен, оптимал жоспар

$X^{опт}=(\frac{9}{7},0,\frac{39}{7},0)$.

Алынған оптимал жоспарға сәйкес сызықтық функционалдың мәні

$Z(X^{опт})=\frac{213}{7}$-ге тең.

23. Сызықтық программалаудың келесі есептерін симплекс әдісімен шығарыңдар

1. $Z(\overline{x})=10x_1+8x_2+12x_3+15x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+2x_4\le 90 \\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4\le 120 \\ 4x_1+5x_2+6x_3+3x_4\le 150 \end{cases}$$

Тақырып 8. Имитациялық модельдеуге кіріспе

Дәріс №15. Имитациялық модельдеудің негізгі ұғымдары және кезеңдер. Кездейсоқ аумақтың және кездейсоқ оқиғалардың модельдері. Имитациялық модельдеу есептеуішін эксперимент ретінде қарастыру

Имитациялық үлгілеу - бұл үлкен және кіші жүйелерді зерттеу үшін ең қуатты және әмбебап әдіс қабылдау зерттелген жүйе нақты жүйесін сипаттайды және модель деп аталады қарапайым объектісі ауыстырылады, оларды пайдалану және зерттеу бағалау әдісі,.

Нақты жүйесінде эксперименттер жүргізу салдарынан нақты уақыт сынғыш және макеттеуді немесе, өйткені эксперимент ұзақтығы құнының жоғары, мысалы, мүмкін емес немесе орынсыз болса,модельдеу қолданылады.

Имитациялық модельдеу деп әртүрлі объекттер мен жүйелердегі процестерді, олардың ықтималдылық қасиеттерін ескере отырып, компьютердің көмегімен бейнелейтін және керекті көрсеткіштерін анықтайтын әдісті атайды.

Сонымен, имитациялық модельдеу - күрделі және бірімен бірі тығыз байланысты бірнеше объекттерден тұратын жүйелерді зерттеуге бейімделген әдіс.

Қазіргі кезде осы әдіс көп салаларда әртүрлі ғылыми және қолданбалы зерттеулерде пайдаланылып жүр. Солардьщ ішінде мына салаларды атауға болады:

- кәсіпорындардың жұмыс барысының бағдарламасын жасау;
- автоматты телефон станцияларының қызмет көрсету жүйелерін жобалау;
- көше жүрісін реттеу;

- қойма қорын реттеу;
- кару-жарактың қолдану сапасын бағалау;
- көпшілікке қызмет көрсету жүйелерін жобалау және тағы басқалар.

Имитациялық модельдеудің мағынасы мен мүмкіншілігі

Имитациялық модельдеуге тағы бір анықтама келтірейік - бүл әртүрлі күрделі жүйелердің математикалық модельдерімен компьютерді пайдалану арқылы эксперимент жүргізуге бейімделген сандық әдіс.Бұл әдісті қолданудың негізі ретінде компьютер арқылы іске асырылатын арнайы модельдеуші алгоритм пайдаланылады. Осы алгоритм, қарастырылып отырған күрделі жүйенің элементтерінің күйін, олардьщ бір-бірімен байланыстарын және әртүрлі кездейсоқ ауытқулардың әсерін ескере отырып, модельдеуге тиіс. Ал осы әртүрлі ауытқу факторларын бейнелеу үшін кездейсоқ сандар қолданылады.

Осы кездейсоқ сандардың көмегімен неше түрлі ықтималдық заңдылықтарына бағынышты кездейсоқ шамалар, кездейсоқ процестер немесе кездейсоқ ағындарды компьотермен модельдеуге болады.

Айта кететін тағы бір жәй, осы модельдеуші алгоритм, зерттеліп отырған жүйелерде өтіп жатқан процестерді сипаттаған кезде, олардың әрбір қарапайым қадамын оның логикалық сұлбасына және уақыт тізбегіне сәйкес бейнелеуі қажет.

Сонымен, модельдеуші алгоритм, алғашқы берілген деректерді пайдаланьш зерттеліп отырған процестердің, уақыттың әртүрлі мезгілдеріндегі, жағдайын болжауға мүмкіншілік береді.

Осы келтірілген мәліметтерден имитациялық модельдеудің күрделі жүйелерді зерттеуге бейімделгенін және басқа модельдеу әдістеріне қарағанда біраз артықшылықтары бар екенін байқауға болады.

Имитациялық модельдеудің негізгі артықшылықтарының бірі, онымен зерттелетін күрделі жүйелер әр тәнді элементтерден тұра алатындығы. Мысалы, олардың бірі үздіксіз әрекетті болса, екіншісі дискретті бола алады. Екіншіден. бұл элементтер көптеген күрделі мәнді ауытқулардың әсеріне ұшырауы, немесе оларда өтіп жатқан процестер өте күрделі және шиеленіскен өрнектермен бейнеленуі де мүмкін. Мұндай модельдеу ешқандай арнайы құралдар мен қондырғылар жасауды да қажет етпейді. Сонымен қатар, имитациялық модельдеу кезінде зерттеліп отырған жүйелердің бастапқы шарттары мен әртүрлі параметрлерінің мәндерін оңай өзгертуге болады.

Имитациялық модельдеу басқару жүйелерін автоматтандыру барысында да өте кең қолданылатынын атап өтпеуге болмайды. Осындай модельдеудің арқасында қаралып отырған процестердің басқаруға ыңғайлы параметрлері мен айнымаларының мәндерін, немесе нұсқау ақпараттары ағынының ең тиімді бағыттарын анықтап, осы деректерді оптимальды басқару алгоритмдерін жасауға қолдануға болады.

Имитациялық модельдеу арқылы әртүрлі басқару принциптерін бағалауға да, бірнеше басқару жүйелерінің ішінен ең тиімдісін таңдауға да, осы жүйелердің болашақтағы жұмыс істеу қабілетінболжауға да болады.Атап өтілген артықшылықтарымен қатар имитациялық модельдеудің, басқа да сандық әдістерге тән, елеулі кемшілігі де бар. Ол осы әдіспен алынған нәтижелердің бастапқы берілген шарттар мен параметрлердің мәніне тікелей байланыстылығы, яғни әр алынған нәтиже зерттеліп отырған процестердің алдын-ала белгіленген бір ғана күйіне сәйкес келетіндігі.

Алайда, осы елеулі кемшілігіне қарамастан, имитациялық модельдеу қазіргі кезде күрделі жүйелерді зерттейтін ең нәтижелі әдіс екені мәлім. Ал біраз жаңа жүйелерді жобалау кезінде имитациялық модельдеуден басқа ешқандай тәсіл осы жүйелердің болашақ уақытгағы жәй-күйін болжай алмайды.

Мысал:

Имитациялық модельдеудің негізін дұрыс түсіну үшін мына қарапайым мысалды талқылайық. Көшенің бұрышында аяқ киім тазалаушы жұмыс істеп отырсын. Оның бір сағат ішінде, мысалы 9.00 дан 10.00-ға дейінгі, жұмысын имитациялық модельдеу арқылы бейнелейік. Осы тазалаушыға аяқ киімін тазартпақ ниеті бар адамдар келетін уақыт мезгілдерінің аралығын бірқалыпты үлестірімді кездейсоқ шама деп есептейік және осы аралық ретінде нольден он минутқа дейінгі уақыт мөлшерін тағайындайық. Яғни $\tau_{кр} \in [0,10]$ болсын.

Тазалаушының әрбір клиентке кызмет көрсету уақытын да кездейсоқ шама деп есептеп, оның шекті мәндерін бір мен алты минутка теңейік - $\tau_{тз} \in [1,6]$

Имитациялық модельдеудің нәтижесі ретінде клиенттердің аяқ киімін тазартуға жұмсаған уақытының орта шамасын (күту мен тазарту уақыттарын қоса) және тазалаушының бос отыратын уақыт мелшерін қарастырайық.

Енді осы жүйенің жұмысын модельдеуге кірісейік. Ол үшін, клиенттердің келу мезгілдерінің тізбегін модельдеу әдісін таңдау керек. Әзірше, осы мезгілдерді бейнелеу үшін бірінші класс оқушысының оқу құралдары ішіндегі 1 мен 10 дейінгі сандар жазылған кішкентай тақташаларды алайық. Егер оларды қораптың ішінен таңдамай бір-бірден алып отырса, сол тақташаларда жазылған сандарды клиенттердің аралығын бейнелейтін уақыт деп есептеуге болады. Ал әрбір оқушы баланың қалтасынан табылатын кубикті жерге лақтырып, жоғарғы бетінде жазылған санды қарасақ бірден алтыға дейінгі цифрдің кездейсоқ бір мәнін көреміз. Осы цифр тазалаушыньщ кезектегі клиентіне жұмсаған уақытын бейнелесін. Осы екі операцияны бірнеше рет қайталап, клиенттердің келетін мезгілінің аралығын және сол кісілерге жұмсалған уақыт мөлшерін сипаттайтын екі уақыт тізбегін анықтауға болады.

К.1-кестеде осы жүйенің бір сағат ішіндегі жұмыс барысын имитациялық модельдеу нәтижесі келтірілген. Осы деректерден бір клиенттің аяқ киімін тазалауға жұмсайтын уақытының орташа мөлшері

$$\tau = \frac{44 + 13}{12} = 4{,}83\,мин$$

тең екені, ал тазалаушыяьщ бос отырған мерзімі бүкіл жұмыс мерзімінің 27%-ын алатыны көрініп тұр.

Клиенттер	Клиенттердің аралығының мөлшері $\tau_{ар}$	Тазалауға жұмсалған уақыт мөлшері τ_{m}	Клиенттің келген мезгілі	Клиентке қызмет көрсете бастау мезгілі	Клиенттің кезекті күту уақыты	Клиентке қызмет көрсетіп болған уақыт	Тазалаушының бос отырған уақыты
			9.00 9.08 9.09 9.15 9.18 9.27 9.35 9.37 9.38 9.45 9.48 9.54	9.00 9.08 9.11 9.17 9.21 9.27 9.35 9.38 9.43 9.45 9.49 9.54		9.02 9.11 9.17 9.21 9.27 9.28 9.38 9.43 9.45 9.49 9.51 10.00	
Барлығы							

Осы қарапайым мысалдың өзінен әртүрлі кездейсоқ заңдылыктардың имитациялық модельдеуде орыны ерекше зор екені айқындальш отыр. Сондықтан осы оқулықтың бірінші бөлімі әртүрлі кездейсоқ заңдылықтарды компьютермен модельдеу әдістерімен танысуға арналады.

Жалған кездейсоқ сандар және оларды модельдеу принципі

Күрделі жүйелерді имитациялық модельдеу әдісімен зерттегенде, кездейсоқ окиғалар, кездейсоқ шамалар және басқа әртүрлі кездейсоқ процестер кең қолданылады. Осы кездейсоқ заңдылықтарды компьютермен имитациялаудың әдістері [0;1] кесінді аралығында бірқалыпты үлестірім заңдылығы бар кездейсоқ сандардың тізбегін модельдеуге және осы тізбекті функционалдық турлендіруге негізделген. Бастапқы, немесе базалық кездейсоқ сандардың тізбегі ретінде, [0;1] кесінді аралығында бірқалыпты үлестірілген, ζ кездейсоқ шамасының *(z_j)* нақтыламаларының тізбегін таңдап алу, келесі екі факторға негізделеді:

1). Бірқалыпты үлестірімді кездейсоқ сандарды модельдеу проблемасы ғалымдардың, компьютер дамуының алғашқы күндерінен бастап, назарын аударды да, олар кездейсоқ сандарды имитациялаудың көптеген тиімді әдістерін жасады.

2). Бірқалыпты үлестірім кездейсоқ заңдылықтардың ең қарапайымы болғандықтан оны оңай математикалық түрлендіруге болады.

Кездейсоқ £, шамасы *[а,ь]* аралығында бірқалыпты үлестірім заңына бағынады деп есептеу үшін, оның үлестірім тығыздық функциясы *[а,ь]*аралығында тұрақты оң мөлшерге, ал одан тысқары жерде нөлге тең үздіксіз функциямен сипатталуы керек:

$$f(z) = \begin{cases} 1/(b-a), егер z \in [a,b] \\ 0, егер z \notin [a,b] \end{cases}$$

Сонда £, кездейсоқ шамасының тағы бір сипаттамасы болатын үлестірім функциясының түрі төмендегідей болады:

$$F(z) = \begin{cases} 0, егер z \prec a; \\ (z-a)/(b-a), егер a \le z \le b; \\ 1, егер z \succ b. \end{cases}$$

Математикалық үміті, дисперсиясы және орта шаршы ауытқуы сәйкесінше, мынаған тең:

$$m_z = \int_a^b z f(z)dz = (a+b)/2$$

$$\sigma_z^2 = \int_a^b (z-m_z)^2 f(z)dz = (b-a)^2/12;$$

$$\sigma_z = (b-a)/2\sqrt{3}.$$

£ шамасы [0;1] аралығында бірқалыпты үлестірімді жекеленген жағдайда, жоғарыда келтірілген сипаттамалар мынадай болады:

$$f(z) = \begin{cases} 1, егер z \in [0,1], \\ 0, егер z \notin [0,1] \end{cases}$$

$$F(z) = \begin{cases} 0, егер z < 0; \\ z, егер 0 \le z \le 1; \\ 1, егер z > 1. \end{cases}$$

$$m_z = 1/2; \quad \sigma_z^2 = 1/12; \quad \sigma_z = 1/2\sqrt{3}.$$

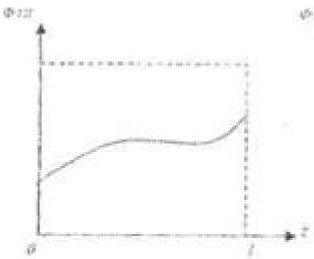
[0;1] аралығында бірқалыпты үлестірімді £ шамасының әртүрлі кездейсоқ заңдылықтарды модельдеудегі маңызды ролін ескере отырыш, оны компыотермен имитациялау әдістерінің бірнешеуін қарастырайық. Бүл әдістердің барлығы рекурренттi қатынастарға негізделген және тек қана жалған кездейсоқ сандарды тудырады.

Анықтама. Жалган кездейсоқ сандар деп, кездейсоқ шаманың математикалық өрнектерінің көмегімен, дәлірек айтқанда рекурренттік қатынастар арқылы алынган z нақтыламаларын айтады.

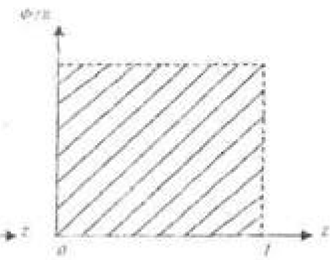
Жалған кездейсоқ сандардың ықтималдық қасиеттерінің нағыз кездейсоқ сандардың қасиеттерінен айырмашылығы болатыны айқын. Сондықтан, бұл сандарды модельдеу әдістерін жасағанда оларға қатаң талаптар койылады. Жақсы әдістердің көмегімен алынған кездейсоқ сандар тізбегі бірқалыпты үлестірімді, статистикалық тәуелсіз және қайталанбайтын сандардан тұруы тиіс. Сонымен қатар, бұл әдістер тез жұмыс істеуі және компьютер зердесінің аз көлемін пайдалануы керек. Көрсетілген талаптар орындалған жағдайда ғана жалған кездейсоқ сандардың нағыз кездейсоқ сандардан ерекшелігін ескермеуге болады.

Жалған кездейсоқ сандарды моделдеудің іс жүзінде қодданылатш әдістерінің көбі, 1-ретті рекурренттік қатынастарға негізделген мына формуламен байланысты:

Мүндағы z_0 - берілген шама. Бірақ бұл формулаға біраз талаптар қойылады. Шынымен, (1.1) рекурренттік катынасы арқылы есептелген *{z, Ф(z)}*координатты нүктелер (1,1. сур.) тіктөртбұрыш жазықтығында бірқалыпты жатпай, тек қана Ф(z) қисығының үстіне орналасады. Сондықтан, кез-келген функцияны (1.1) формуласына қоя салып, жақсы нәтижеге жете алмаймыз. Демек, жалған кездейсоқ сандарының "жақсы" тізбегін, графигі шаршы жазықтығын тығыз толтыратын функция ғана тудыра алады. Мысал ретінде мына функцияны келтіруге болады. (1.2. сурет):



1.1. - сурет



1.2. - сурет

$$Z_{k+1} = D(gz_k)$$

Мұндағы *D* – бөлшектің ажыратылу операциясы, ал *g* үлкен сап [2]. Көрсетілген шарт "жақсы" жалған кездейсоқ сандар тізбегін тудыру үшін (1.1) формула қажетті, бірақ жеткіліксіз. Шынында, алғашқы кезде Ф(г) функциясының түрі күрделі және қиын түсіндірілетіндей етіп тандалған, мысалы:

$$\Phi(z) = 10^{-2k} Ц\left[10^{-2k} D(10^k z^2)\right]$$

Мүндағы *Ц* - бүтін бөлігін табу операциясы.

Бірақ (1.1) формуласындағы функцияның түрін таңдаудың нақтылы теориясы болмағандықтан бұл формула көбінесе қолайсыз кездейсоқ сандардың тізбегін туғызып жүрді. Мысалы, мұндай функцияның көмегімен алынған кезекті сан, ойламаған жерден, кейде нольге тең болуы мүмкін. Ал, бұлай болған жағдайда, келесі сандардың бәрі де нольге теңесетіні ақиқат. Осы принциппен туғызылған тізбектердің қайталану периоды да көбінесе кішігірім санмен сипатталатын еді. Сондыктан жиырмасьншы ғасырдың қырқыншы жылдарының аяғынан бастап ғалымдар Ф(z) функциясының түрін таңдауда сандар теориясы аппаратын қолдана бастады. Бұл аппарат жалған кездейсоқ тізбектерінің қайталану периодының ұзындығын алдын-ала білу мүмкіндігін берді және жаңаша алынған кездейсоқ сандардың қажетті сапаға ие болуын қамтамасыз етті.

Жалған кездейсоқ сандарды модельдеудің кең таралған белгілі бірнеше әдістерін қарастырайық. Және алдағы уақытта "жалған кездейсоқ сандар" деудің орнына "кездейсоқ сандар" терминін қолданамыз, себебі, төменде келтірілетін қолданбалы алгоритмдер жеткілікті статистикалық қасиеттері бар тізбектерді модельдейді.