

# Control Project

## Suspension of Car



Present by

6530116821 Nattakit Chaijaroenmaitree

6532017721 Kantanat Phochanasombut

6532122921 Pun nawich Pongsriasswin

2103304 Automatic Control

## ที่มาและความสำคัญ

ในปัจจุบันยานพาหนะจำนวนมากมีระบบกันสั่นสะเทือนเพื่อช่วยในการขับขี่ทั้งในด้านของความสะดวกสบายและในด้านความปลอดภัย เป้าหมายหลักของระบบกันสั่นสะเทือนมีสองข้อได้แก่ การควบคุมให้ยานพาหนะสามารถอยู่ภายใต้การควบคุมของคนขับตลอดเวลาเช่นในรถยนต์คือการทำให้ล้อติดถนน และการลดการสั่นสะเทือนของระบบทั้งหมดซึ่งก็คือการลดการกระจัดระหว่างส่วนประกอบต่างๆในระบบนี้ ซึ่งระบบกันสั่นสะเทือนมีสององค์ประกอบได้แก่ สปริงซึ่งมีหน้าที่ดูดซับแรงที่เกิดขึ้นต่อระบบและแดมป์เปอร์ที่มีหน้าที่ดูดซับพลังงานที่เกิดขึ้นต่อระบบ ในระบบการสั่นสะเทือนที่นำมาทำการจำลองนี้ประกอบด้วยระบบสปริงและแดมป์เปอร์สองระบบได้แก่ สปริงแดมป์เปอร์ที่ลดการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นจากพื้นถนนและเพิ่มการยึดเกาะระหว่างรถกับถนนซึ่งอยู่ระหว่างพื้นถนนกับแกนของระบบ กับสปริงแดมป์เปอร์ที่ช่วยลดการสั่นสะเทือนของห้องโดยสารซึ่งจะเชื่อมระหว่างแกนของระบบและห้องโดยสาร ในการจำลองการทำงานของระบบกันสั่นสะเทือนที่ประกอบไปด้วยสปริงแดมป์เปอร์นี้มีข้อมูลที่ป้อนเข้าระบบกันการสั่นสะเทือนคือ แรงที่เกิดขึ้นจากการขับขี่ และเป้าหมายในการออกแบบระบบกันการสั่นสะเทือนนี้คือกควบคุมการกระจัดของระบบและห้องโดยสารให้มีการเปลี่ยนแปลงตามที่ต้องการขณะที่เกิดการป้อนแรงเข้าสู่ระบบ

### Physical Model: Suspension

#### Define

$M_1 \rightarrow$  1/4 Mass of car (kg)

$M_2 \rightarrow$  Suspension Mass (kg)

$k_1 \rightarrow$  Spring constant of Suspension System (N/m)

$k_2 \rightarrow$  Spring constant of Wheel and tire (N/m)

$c_1 \rightarrow$  Damping constant of Suspension System (Ns/m)

$c_2 \rightarrow$  Damping constant of Wheel and tire (Ns/m)

$F \rightarrow$  Force Control Input

$W \rightarrow$  Disturbance from ground (m)

ให้ Input เป็น Force และ output เป็นระยะ  $x_1-x_2$

Equation of Motion

$$\sum F = ma$$

$$M_1 \ddot{x}_1 = -c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) + F$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) + c_2(\dot{W} - \dot{x}_2) - k_2(W - x_2) + F$$

Initial conditions are zero → Take Laplace

$$(M_1s^2 + c_1s + k_1)X_1(s) - (c_1s + k_1)X_2(s) = F(s)$$

$$-(b_1s + k_1)X_1(s) + (M_2s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2))X_2(s) = (c_2s + k_2)W(s) - F(s)$$

$$\begin{bmatrix} (M_1s^2 + c_1s + k_1) & -(c_1s + k_1) \\ -(c_1s + k_1) & (M_2s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ (c_2s + k_2)W(s) - F(s) \end{bmatrix}$$

From  $AX = B \rightarrow X = A^{-1}$  where  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  and simplify the left term to only F and W  
by  $\begin{bmatrix} F(s) \\ (c_2s + k_2)W(s) - F(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & (c_2s + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$

We get

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} M_2s^2 + c_2s + k_2 & c_1c_2s^2 + (c_1k_1 + c_2k_1)s + k_1k_2 \\ -M_1s^2 & M_1c_2s^3 + (M_1k_2 + c_1c_2)s^2 + (c_1k_2 + c_2k_1)s + k_1k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

$$\text{Where } \det(A) = (M_1s^2 + c_1s + k_1) \times (M_2s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)) - (c_1s + k_1) \times (c_1s + k_1)$$

Neglect Disturbance  $W = 0$  for Plant 1

$$P_1 = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{F(s)} = \frac{(M_1 + M_2)s^2 + c_2s + k_2}{(M_1s^2 + c_1s + k_1) \times (M_2s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)) - (c_1s + k_1) \times (c_1s + k_1)}$$

Neglect Disturbance  $F = 0$  for Plant 2

$$P_2 = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} = \frac{-M_1c_2s^3 - M_1k_2s^2}{(M_1s^2 + c_1s + k_1) \times (M_2s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)) - (c_1s + k_1) \times (c_1s + k_1)}$$

## Variables assignments

**Table 2** Model parameters

<i>Parameter</i>	<i>Vehicle #1</i>	<i>Vehicle #2</i>	<i>Vehicle #3</i>	<i>Unit</i>
Tyre stiffness	205,000	213,818	245,000	N/m
Tyre damping	100	100	100	N/m/s <sup>2</sup>
Unsprung mass	30	50	55	kg
Suspension stiffness	24,200	21,600	28,400	N/m
Suspension damping	See Figure 7	See Figure 7	See Figure 7	N s/m
Sprung mass	225	360	450	kg
Inertial momentum	780	1150	1440	Kg m <sup>4</sup>
Tread width	1.2	1.4	1.4	m
Length A	0.08	0.10	0.10	m
Length B	0.32	0.46	0.46	m
Length C	0.52	0.6	0.6	m

**Table 5** Factors and levels combination

<i>Factor</i>	<i>Model Parameter</i>	<i>Level</i>	<i>Value</i>	<i>Unit</i>
A	Sprung mass	1	250	kg
		2	500	kg
B	Suspension stiffness	1	18,000	N/m
		2	25,000	N/m
C	Tyre stiffness	1	120,000	N/m
		2	210,000	N/m
D	Unsprung mass	1	40	kg
		2	60	kg

จากข้อมูลกำหนดให้

$$M1 = 1300/4$$

$$M2 = 225$$

$$k1 = 24200$$

$$k2 = 205000$$

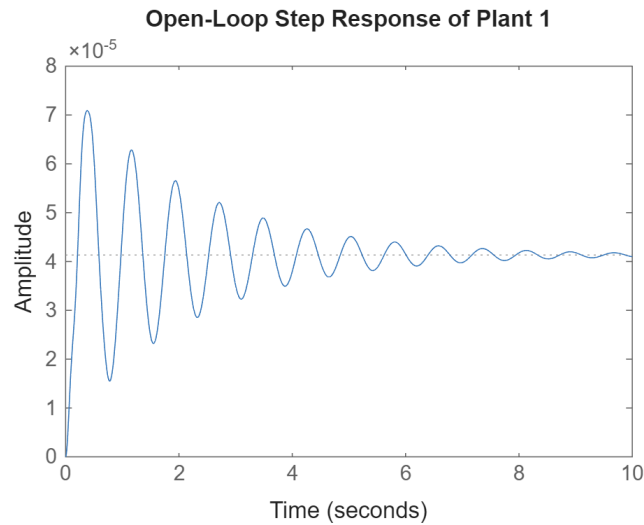
$$c1 = 350$$

$$c2 = 1500$$

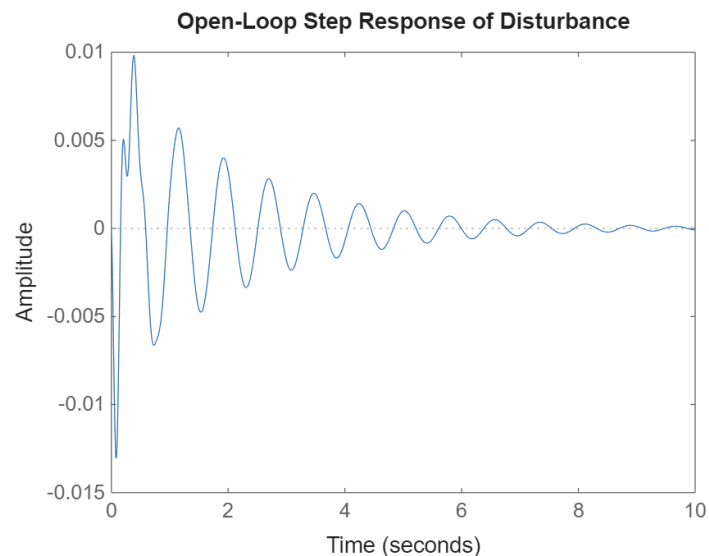
## Design requirements

ออกแบบ Controller ให้ Settling Time น้อยกว่า 5 วินาที และ %Overshoot น้อยกว่า 25% เช่นเมื่อรถเคลื่อนที่ผ่านพื้นที่ขรุขระต่างจากระดับปกติ 0.01 m หรือ 1 cm จะมีการสั่นต่ำกว่า 0.25 cm

เริ่มโดยแทนค่าตัวแปรลงในสมการ Open loop Transfer P1 และ P2 จะได้ว่า DC-gain ของ Plant 1 เท่ากับ  $4.1322 \times 10^{-5}$  และ Plant 2 เท่ากับ 0 โดยพบว่า P1 มี poles คือ  $-4.2003 \pm 31.7653i$  และ  $-0.4493 \pm 8.1165i$  กับ zero คือ  $-1.3636 \pm 19.2579i$



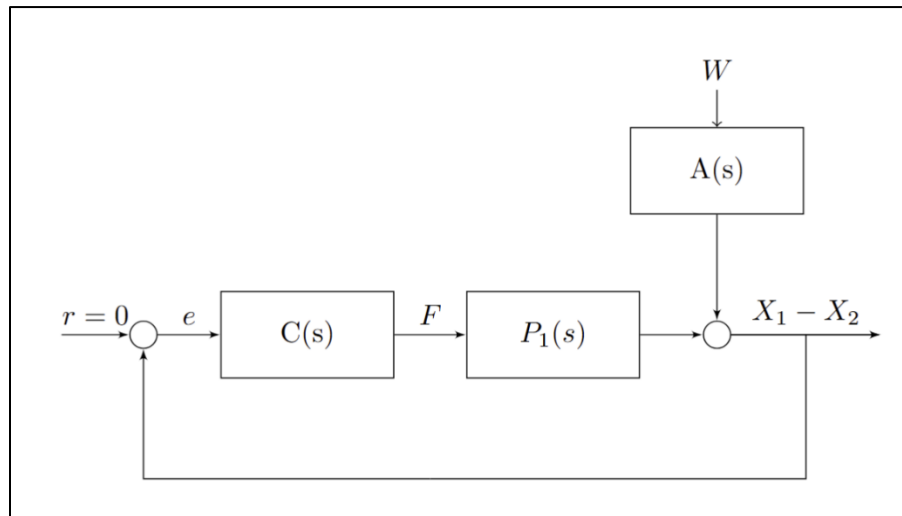
รูปที่ 1 Open Loop Step Response ของ P1 เมื่อให้ unit step 1(t)



รูปที่ 2 Open Loop Step Response ของ P2 เมื่อให้ unit step 0.01(t)

จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 สังเกตได้ว่าเมื่อรถเคลื่อนที่ผ่านรอยขรุขระต่างจากระดับพื้น 0.01 m หรือ 1 cm จะต้องใช้เวลาประมาณ 10 วินาที กว่าจะมีการสั่นที่น้อยลงและเข้าสู่ Steady State และมี Amplitude การสั่นสูงถึง 0.01 m เลย ดังนั้นจำเป็นต้องออกแบบ Controller เพื่อมาควบคุมระบบ

## Closed Loop Control Diagram

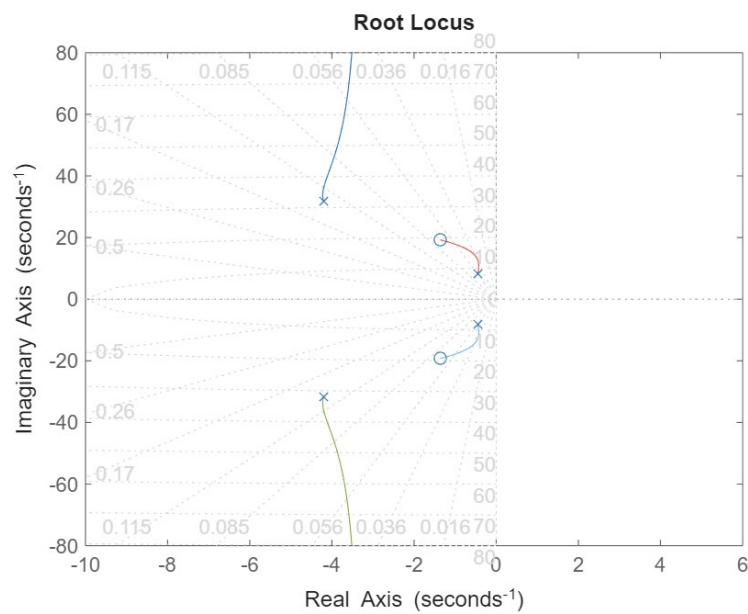


รูปที่ 3 ไดอะแกรมระบบปิด (Closed Loop Diagram)

เมื่อ  $P_2 = P_1 A$

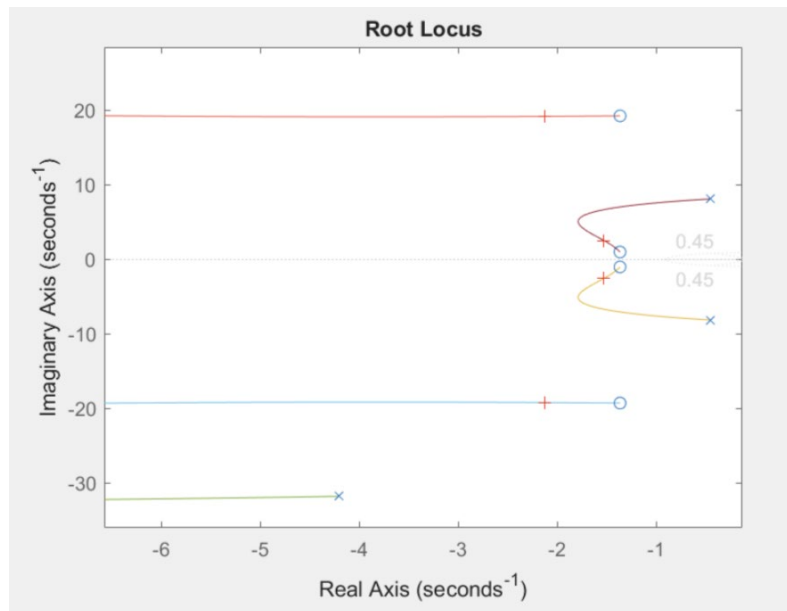
## Root Locus

วิธีแรกที่จะนำมาหา Controller คือ Root Locus โดยจะอาศัยการเพิ่มตำแหน่งของ pole และ zero เพื่อให้ Step Response เป็นไปตามที่เรากำหนด และดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 Root Locus ของ Plant 1

ออกแบบระบบ Plant 1 เพื่อหารายละเอียดของ Controller โดยสังเกตได้ว่า Dominated Pole ของ Open loop อยู่ใกล้กับ Imaginary axis มากเกินไปทำให้ระบบไม่เสถียร ดังนั้นจึงต้องเติม Complex Zero เข้าไปเพื่อ Cancel คู่ Pole ดังกล่าว จากนั้นเพื่อดึงให้ Locus ของระบบออกจาก Zero เดิมจึงเติม Pole ไปทางซ้ายเพื่อให้ผ่าน Time Specification โดย  $\%Mp \leq 1 - \frac{\zeta}{0.6}$  ;  $\zeta \leq 0.6$  ซึ่งจากการกำหนดให้ %Overshoot ต่ำกว่า 25 เปอร์เซนต์จะได้ว่า  $\zeta \geq 0.45$  ดังนั้นจึงเลือกให้  $C = \frac{0.59s^2 + 0.95s + 1}{(s-30)(s-20)}$  จากนั้นใช้ rlocfind(C\*P1) เพื่อหาค่า k ที่จุดนั้น แสดงได้ในรูปที่ 5 และ 6

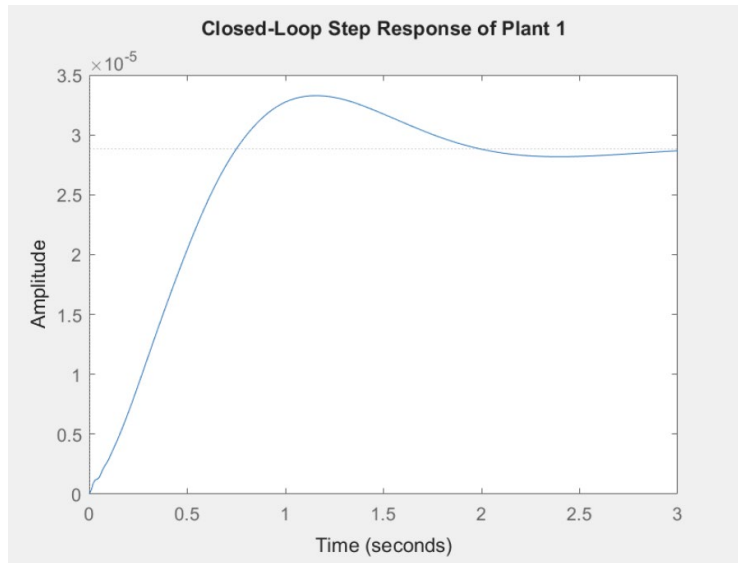


รูปที่ 5 Root Locus ของ Plant 1 หลังเปลี่ยนแปลงค่า

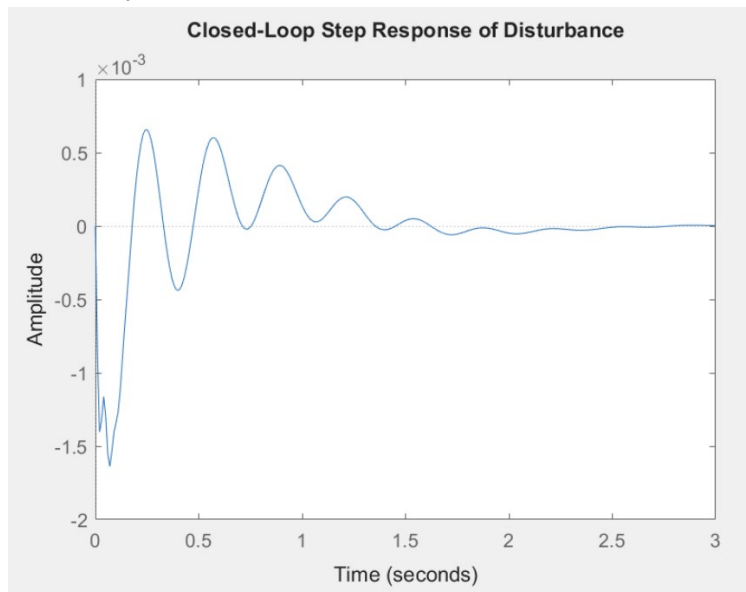
```
selected_point = -1.5010 + 2.5408i
k = 6.2814e+06
```

รูปที่ 6 ค่า k ที่หาจากการใช้ rlocfind(C\*P1)

พบว่าจุดที่เลือกมีค่า k คือ  $6.2814 \times 10^6$  นำค่า C และ k ไปพลอตเพื่อหา Closed-Loop Step Response ของ Plant 1 และ Disturbance โดยแสดงได้ในรูปที่ 7 และ 8 โดยเห็นได้ว่าทั้งคู่สามารถผ่าน Time Requirements ได้ โดยเฉพาะการจัดการกับ Disturbance ขนาด 1 cm มี Amplitude สูงสุดประมาณ 1.5 mm และสามารถเข้าสู่ Steady State ภายใน 3 วินาที



รูปที่ 7 Closed-Loop Step Response ของ Plant 1

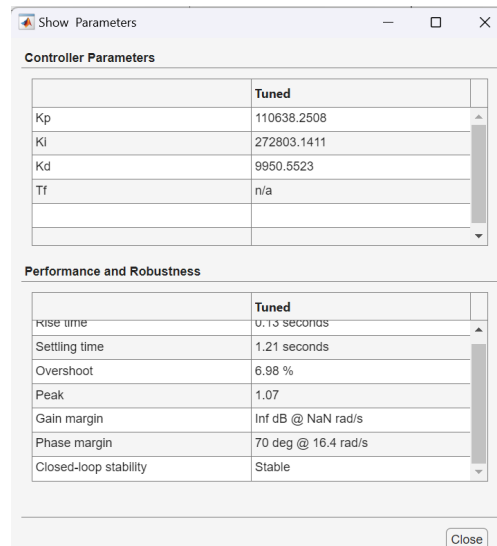


รูปที่ 8 Closed-Loop Step Response ของ Disturbance (W

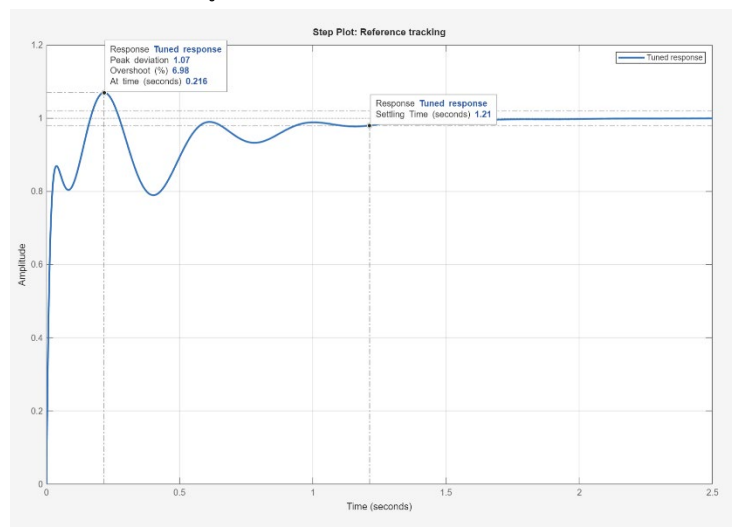


## PID Controller

วิธีสองที่นำมาหา Controller คือการใช้ PID โดยมีการใช้ pidtuner และทำการปรับให้ Plant 1 สามารถผ่านข้อกำหนดได้ โดยพบว่าได้ค่า  $K_p = 110638$ ,  $K_d = 9950$  และ  $K_i = 272803$  แสดงในรูปที่ 9 และ Closed-Loop Step Response ของ Plant 1 แสดงในรูปที่ 10

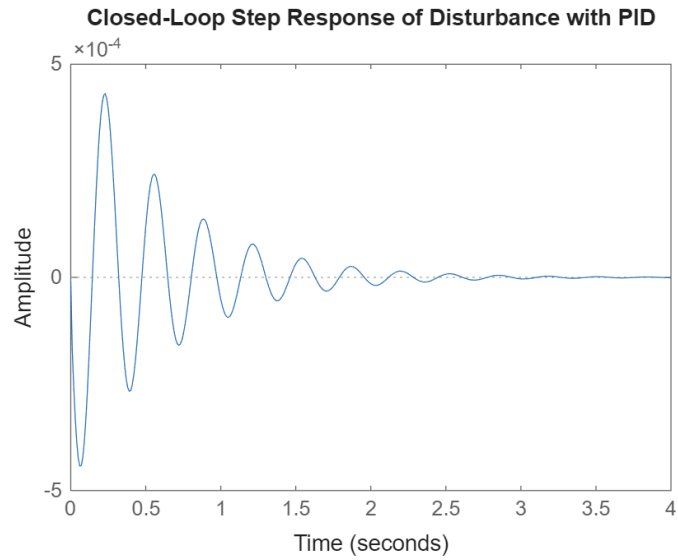


รูปที่ 9 ค่าคงที่ของ PID Controller



รูปที่ 10 Step Response ของ Plant 1

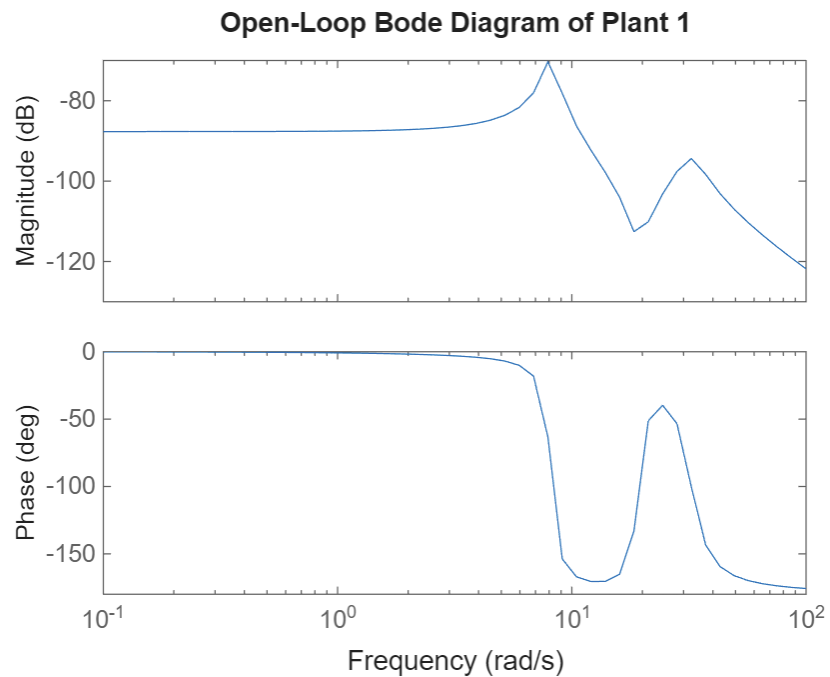
จากนั้นนำค่า  $K_p$ ,  $K_d$ , และ  $K_i$  ที่ได้มาใส่ใน Controller และ Feedback ของ Disturbance ซึ่งได้ผลว่าเมื่อมีการรบกวน 1 cm เข้ามาจะมีการสั่น Amplitude สูงสุดประมาณ 0.4 mm และเข้าสู่ Steady State ภายใน 4 วินาที แสดงในรูปที่



รูปที่ 11 Close Loop Step Response ของ Disturbance (W ด้วย PID

## Bode Plot

วิธีสามที่นำมาหา Controller คือการใช้ Bode Plot และ Lead Control วิธีนี้สามารถนำมาใช้ได้เพราะระบบมี Stability ตั้งแต่ Open Loop โดยเริ่มต้นด้วยการวาด Bode Plot ของ Open Loop เพื่อตรวจสอบหาตำแหน่งความถี่ ( $\omega$ ) ที่ทำให้ Phase เท่ากับ 180 แสดงในรูปที่ 12



รูปที่ 12 Open-Loop Bode Diagram ของ Plant 1

เห็นได้ว่าบริเวณที่มี การเปลี่ยน Phase ลงมาคือประมาณ 12 ดังนั้นจึงควรเพิ่มค่าบริเวณดังกล่าว และยังมี Phase Margin (PM) เยอะจะทำให้ค่า %Overshoot มีค่าน้อย ดังนั้นจึงเลือกเพิ่มไปอีก 120 องศา ผ่านการคำนวณค่า a ซึ่งเป็นค่าคงที่บอกถึงระยะห่างระหว่าง Pole และ Zero สำหรับการเพิ่ม Phase เข้าไป 120 องศา ตามสมการที่ 1

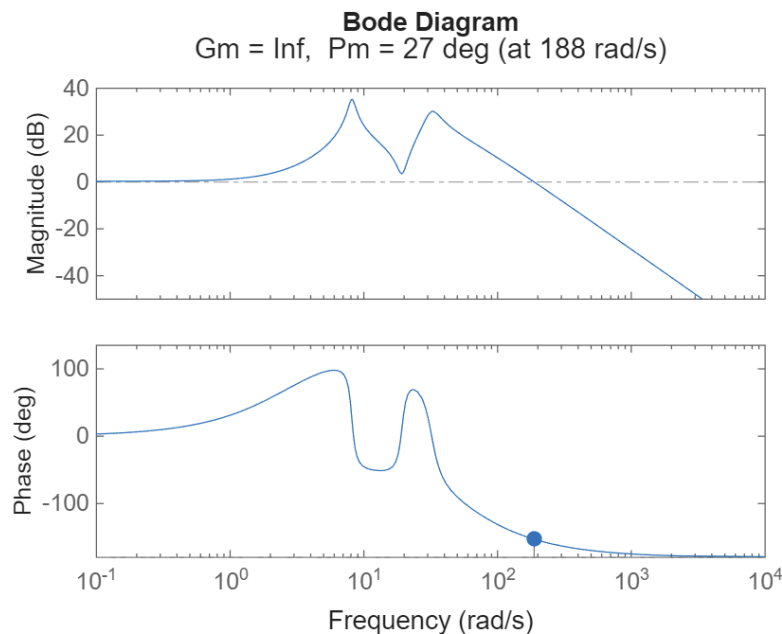
$$a = \frac{1 - \sin 60^\circ}{1 + \sin 60^\circ}$$

จากนั้นให้คำนวณ T และ aT ตามสมการที่ 2 และ 3 ในการหาตำแหน่งความถี่ตัด (Cut Off Frequency) เพื่อให้ Phase ที่เพิ่มอยู่ตรงตำแหน่งความถี่ที่ต้องการแทนด้วยตัวแปร W ในการคำนวณนี้เท่ากับ 12

$$T = \frac{1}{W\sqrt{a}}$$

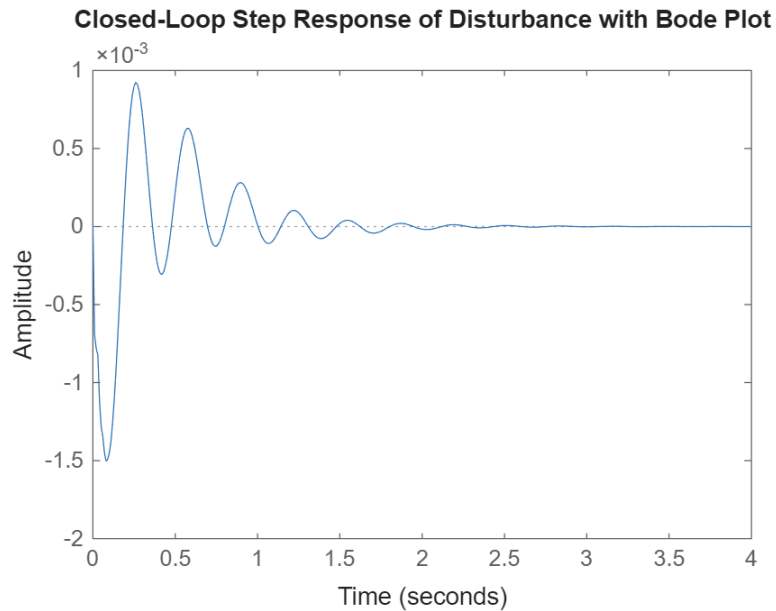
$$aT = \frac{\sqrt{a}}{W}$$

นำค่าตัวแปรทั้งหมดเข้าไปสร้าง Controller Transfer Function ตามสมการที่ 4 และเพิ่ม Gain เข้าไปในระบบโดยทำให้อัตราขยายเพิ่มจาก -80 dB เป็น 0 ด้วยการคูณ K เท่ากับ 25,000 เข้าไป ในหน่วย dB ด้วย  $20\log(K)$  และหา Bode Plot อีกครั้งแสดงในรูปที่ 13



รูปที่ 13 Bode Diagram ใหม่

Bode diagram ใหม่ันั้นได้แสดงให้เห็นว่ามี PM = 27 องศา ที่ความถี่ 188 rad/s และเมื่อหา Step Response จะได้ว่าระบบสามารถเข้าสู่สถานะ Steady ได้ในเวลา 3 วินาที และมี Amplitude Overshoot สูงสุดเท่ากับ 1.5 mm จาก Step Input 1 cm



รูปที่ 14 Closed Loop Step Response Response ของ Disturbance (W ด้วย Bode plot

## สรุปผล

จากการจำลองโมเดลระบบป้องกันการสั่นสะเทือนพบว่าการออกแบบ Controller ที่จะทำให้ระบบเป็นไปตาม Design requirements โดยใช้สามวิธีได้แก่ Root Locus, PID และ Bode Plot ให้ผลที่แตกต่างกัน ภายใต้ Time specification เดียวกันคือ Settling Time น้อยกว่า 5 วินาที และ %Overshoot น้อยกว่า 25% โดยสนใจไปที่ Step Response ของ W หรือ Disturbance เมื่อตัวรถเคลื่อนที่ผ่านผิวขรุขระต่างจากระดับปกติ 1 cm

วิธี Root Locus จะใช้การเพิ่มตำแหน่งของ Poles และ Complex Zero โดย  $C = \frac{0.59 s^2 + 0.95 s + 1}{(s-30)(s-20)}$  และอาศัย function rlocfind( ใน MATLAB ซึ่งได้ค่า k ของระบบเท่ากับ  $6.2814 \times 10^6$  และได้ผลลัพธ์ Amplitude สูงสุดประมาณ 1.5 mm และสามารถเข้าสู่ Steady State ภายใน 3 วินาที

วิธีที่ใช้ PID เพื่อหา Controller ที่เหมาะสมในการออกแบบระบบนี้จะนำค่า Kp, Ki และ Kd มาจากโปรแกรม pidtuner จาก MATLAB จะได้ค่า Kp = 110638, Ki = 272803 และ Kd = 9950 ซึ่งจะทำให้ระบบสามารถแสดงค่าตาม requirements โดย Amplitude สูงสุดประมาณ 0.4 mm และเข้าสู่ Steady State ภายใน 4 วินาที

วิธี Bode Plot สำหรับการจำลองระบบนี้ด้วยการเพิ่ม Phase Margin ที่บริเวณความถี่เท่ากับ  $12^\circ$  เพื่อนำไปหาความถี่ตัดแล้วนำตัวแปรไปสร้าง Controller Transfer Function ที่มีค่า K เท่ากับ 25,000 พบว่าได้ค่า Phase Margin ของระบบนี้เท่ากับ 27 deg โดย Amplitude สูงสุดประมาณ 1.5 mm และเข้าสู่ Steady State ภายใน 3 วินาที

## อ้างอิง

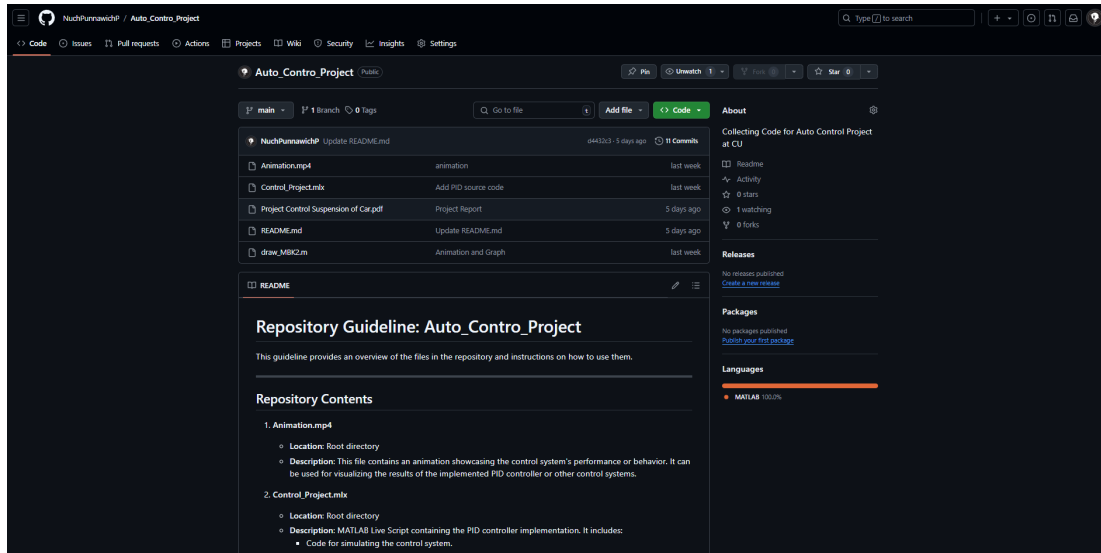
Calvo, J. A., Diaz, V., & Roman, J. L. (2005). Establishing inspection criteria to verify the dynamic behaviors of the vehicle suspension system by a platform vibrating test bench. *International Journal of Vehicle Design*, 38(4), 290. <https://doi.org/10.1504/ijvd.2005.007623>

Tilbury, Prof. D. (n.d.. Control Tutorial. Control tutorials for MATLAB and Simulink – Home. <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>

## ภาคผนวก

ลิ้งค์ GitHub พร้อมวิธีใช้งาน

[https://github.com/NuchPunnawichP/Auto\\_Contro\\_Project/tree/main](https://github.com/NuchPunnawichP/Auto_Contro_Project/tree/main)



## วิดีโอผลการ Simulation

[https://github.com/NuchPunnawichP/Auto\\_Contro\\_Project/blob/main/Animation.mp4](https://github.com/NuchPunnawichP/Auto_Contro_Project/blob/main/Animation.mp4)

