

# 材料コストを考慮したヒートシンクの熱流動トポロジー最適化

## Cost-aware Thermo-Fluid Dynamic Topology Optimization of a Heat Sink

○ 平野智大, 東北大工学研究科流体研, 仙台市青葉区片平 2-1-1,

E-mail : [tomohiro.hirano.t2@dc.tohoku.ac.jp](mailto:tomohiro.hirano.t2@dc.tohoku.ac.jp)

下山幸治, 東北大流体研, 仙台市青葉区片平 2-1-1, E-mail : [shimoyama@tohoku.ac.jp](mailto:shimoyama@tohoku.ac.jp)

小宮敦樹, 東北大流体研, 仙台市青葉区片平 2-1-1, E-mail : [komiya@tohoku.ac.jp](mailto:komiya@tohoku.ac.jp)

Tomohiro HIRANO, Institute of Fluid Science, School of Engineering, Tohoku University,  
2-1-1 Katahira, Aoba-ku, Sendai

Koji SHIMOYAMA, Institute of Fluid Science, Tohoku University, 2-1-1 Katahira, Aoba-ku, Sendai

Atsuki KOMIYA, Institute of Fluid Science, Tohoku University, 2-1-1 Katahira, Aoba-ku, Sendai

This study proposes a topology optimization approach to design the fin of a heat sink. The fin is expressed by the mathematical formalism known as Lindenmayer systems (L-systems), in which the phenotypes are the branching structures resulting from the derivation and graphic interpretation of the genotypes. The total heat transfer rate is evaluated as the first objective function by a commercial Computational Fluid Dynamics (CFD) solver. The total length of the fin (i.e., the material cost) is also evaluated as the second objective function analytically. The optimization is conducted by the Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) assisted by the Kriging surrogate model. The present optimization finds Pareto optimal solutions to improve the heat transfer performance and cut the material cost at the same time. The distribution of the Pareto optimal solutions indicates that, compared to the current product of the heat sink, an optimal design with 18 % lower heat transfer performance but 30 % reduced cost is available.

### 1. 序論

コンピュータの演算能力の向上に伴い、数値流体力学(Computational Fluid Dynamics: CFD)などの数値計算技術が工学製品の設計と最適化に利用されるようになってきた。図 1 に示すように、設計最適化は寸法最適化、形状最適化、トポロジー最適化の 3 つに大別される。寸法最適化は、例えば梁の長さや厚みなどの代表的寸法を設計変数とするため、形状の大幅な変更には対応できない。形状最適化は、構造物の外縁・内縁の形状を設計変数とする現在最も一般的な方法であるが、穴の有無や領域の連結性などの形態(トポロジー)の変化には対応できない。特に、流路(1)や熱交換器(2)などの流体機械においては、トポロジーの変化が性能に及ぼす影響は大きいため、物体形状だけではなくそのトポロジーを含めて考慮した、形状表現自由度の高い最適化(トポロジー最適化)が望まれる。

本研究では、コンピュータなどの電子機器の放熱に用いられるヒートシンクをトポロジー最適化により設計する。ヒートシンクの性能向上に着目した先行研究は数多くなされているが(3-8)、本研究ではそれに加えて材料コストにも着目して多目的最適化を取り組む。本稿では、ヒートシンクのフィンの 2 次元分岐形態について、CFD による性能評価と多目的最適化を実施する。

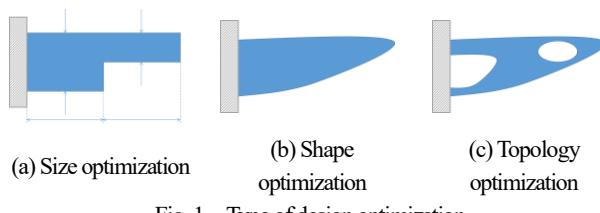


Fig. 1 Type of design optimization.

### 2. 最適化問題の定義

ヒートシンクや流路の設計最適化問題において、最適構造は、木の枝、植物の葉脈、気管支などの自然物に似た構造をとること

が知られている(9)。このような構造を、代表的なトポロジー表現手法である密度法によって表現しようとすると、表現パラメータの数が膨大となる(4)。そこで本研究では、少数のパラメータで多様な自然物の構造を表現できる Lindenmayer systems (L-systems)(10) を用いて、ヒートシンクのフィンを表現する。L-systems は初期の文字列と文字置き換え規則による文法であり、自然物によく見られる周期的な自己相似構造(フラクタル)を表現できる。文法は  $G = \{V, S, \omega, P\}$  の形式で表される。 $V$  は置換規則により順次置き換えられてゆく文字であり、 $F$  または  $X$  をとる。 $S$  は定数の集合であり、 $+, -, [ , ]$  で構成される。 $\omega$  は初期状態を示す  $V$  の要素からなる集合である。 $P$  は  $V$  を変化させる置換規則の集合である。ここで、 $P$  の反復回数は、分岐形態が設計領域内に収まるよう 4 回とした。上記の各記号の意味は表 1 の通りであり、図 2 に例を示す(ただし、ベース面は非表示)。

本研究では、閉空間内に置かれたヒートシンクを想定する(図 3)。ヒートシンクの性能を示すものの 1 つとして、ヒートシンク放熱面での総伝熱量  $Q$  [W] が挙げられる。

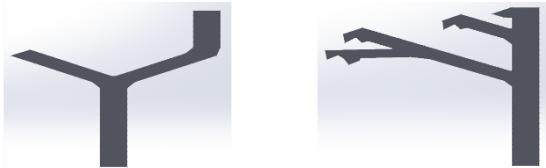
それに加えて材料コスト(フィン体積)にも着目し、できるだけコストを抑えながらヒートシンクの放熱量が最大となる形状を探索する。ここでは、フィン体積の代わりに、2 次元断面上でのフィンの枝の全長  $L$  [mm] を評価する。設計変数は計 11 個であり、 $dv_1$  は枝の折れ曲がり回転角として、 $dv_2 \sim dv_{11}$  は表 2 に示すように 0 から 1 の範囲で離散値として与えられる。したがって、本研究における最適化問題は表 3 のように定義される。

比較対象のリファレンスマルチモードとして LSI\_F シリーズ 21F50(図 4)を挙げ、フィンの設計領域をこのリファレンスマルチモードと揃えて設定する。図 5 のように、ベースの形状は固定(横幅 50 mm、高さ 6 mm)し、L-system によりベース中心から伸びる 1 枚のフィンが設計領域(横幅 50 mm、高さ 15 mm)からはみ出ないように制約をかける。この断面形状を奥行き方向に 50 mm 押し出すことで 3 次元形を作成し、表 3 に従ってフィンを最適化する。なお、最適化過程で、 $+ -, + -, [ , + ], -$  といった文法的に正し

くても形状に対して意味をなさない文法を持つ個体や、最後の文字が $+, -, [$  である個体や、 $X$ なし、 $[ , ]$ なし、 $+, -$ なしといった分岐形態を持たない個体には、枝の全長に 10000 mm を与えることによって無効な個体とみなす。最適化における個体については次節を参照されたい。

Tab. 1 Symbols and their meanings used in an L-system.

$V$	$F$	Move forward a step of length $d$
	$X$	Variable
$S$	$+$	Turn right by angle $\delta$
	$-$	Turn left by angle $\delta$
	$[$	Make a new branch in the lower level with $[$
	$]$	Make a new branch in the lower level with $]$
$\omega$		$X$
$P$		$F \rightarrow FF$ $X \rightarrow ?$ (Optimized)



$$FF[+F-FX]-F \quad FF+[-X]-X$$

Fig. 2 Examples of Tab. 1.

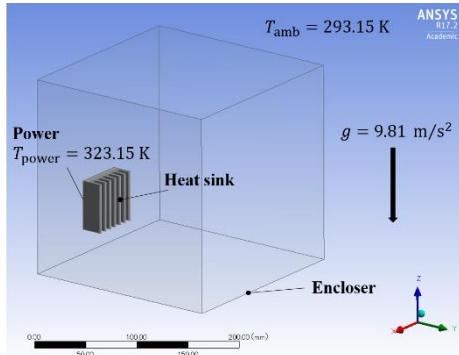


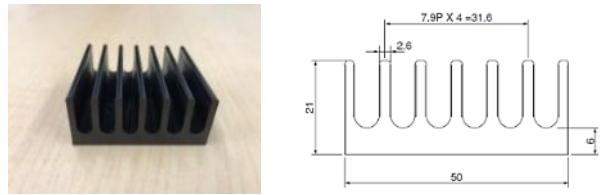
Fig. 3 Schematic views of the CFD model.

Tab. 2 Design variables converted to symbols ( $n = 2, 3, \dots, 11$ ).

$0 \leq dv_n < 1/6$	then	$F$
$1/6 \leq dv_n < 2/6$	then	$X$
$2/6 \leq dv_n < 3/6$	then	$+$
$3/6 \leq dv_n < 4/6$	then	$-$
$4/6 \leq dv_n < 5/6$	then	$[$
$5/6 \leq dv_n \leq 1$	then	$]$

Tab. 3 Optimization problem.

Objective functions	<b>Maximize</b>	Total heat transfer rate $Q$ [W]
	<b>Minimize</b>	Total length of the branch $L$ [mm]
Design variables	$dv_1$ : Based on experience knowledge $0 \leq dv_n \leq 1$ ( $n = 2, 3, \dots, 11$ )	



(a) Overall view  
(b) Cross-sectional view  
Fig. 4 Reference model (LSI\_F series 21F50).

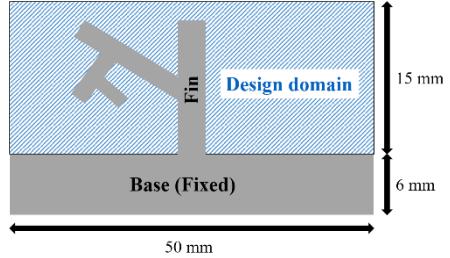


Fig. 5 Design domain.

### 3. 数値計算手法

#### 3. 1 最適化

本研究では、生物の進化をモデル化したアルゴリズムである遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA) (11) を用いる。GA は現在の世代から親として個体を選択し、交叉と突然変異を行うことにより子として新しい個体を生成し、次の世代に優れた個体を残す。先行研究で用いられた勾配法に比べて、GA はいくつか利点をもつ。1 つ目に、GA は勾配法のように目的関数の勾配を求める必要がなく、目的関数値そのものを評価して最適化を実現できるため、目的関数の微分可能性や凹凸性に関係なくあらゆる設計最適化問題にも適用できる。このことは、適用先に関する数学的背景や理論に対する深い知識や経験を必要としないため、GA の優れた汎用性に通じる。2 つ目に、勾配法のように 1 つの点から逐次的に解探索を進めるのではなく、GA は集団ベースの多点同時探索を行うため、局所最適解に陥ることなく大域的最適解の発見が期待されることが挙げられる。これらの特徴から、流体問題のトポロジー最適化のように、目的関数が強い非線形性と多峰性を有する最適化問題に対して、GA は有力な解法となる。

本研究では、多目的最適化のための有名な GA である Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II) (12) を採用する。前段落で述べたように、NSGA-II は集団ベースの多点同時探索で大域的最適解の発見能力に優れる。さらに NSGA-II は、多目的最適化問題における Pareto 最適解の集合を探索するために、解集団の多様性を維持できる点にも優れている。その一方で、集団中のそれぞれの解について目的関数の評価が必要であるため、結果として計算コストが膨大となる。特に本研究のように、CFD 等の大規模数値計算によって目的関数を評価する場合には、計算コストの面から NSGA-II を単独利用することは現実的ではない。

そこで本研究では、計算コストを削減するために応答曲面法を併用する。応答曲面法とは、入力 (設計変数) の異なるいくつかのケースで出力 (目的関数値) を評価 (サンプル) した後、これらのサンプル点を補間する代数式を構築する。この代数式を最適化に用いることで、サンプル点が与えられていない任意の入力に対する出力を瞬時に推定できるため、目的関数評価そして最適化全体に要する計算時間を大幅に削減できる。ただし、応答曲面は目的関数の近似に過ぎず、そこで生じる誤差は最終的に得られる最適解の品質に影響するため、解探索の過程で近似誤差を慎重に取り扱う必要がある。

一般的によく用いられる応答曲面法として、多項式近似が挙げられる。この手法の大きな利点としてモデル構築の容易さが挙げられる。その反面、多項式によって表現できる関数の自由度に限度がある（関数上に存在する極値の数が多項式の次数によって決まる）。目的関数の真の形は分からぬため、事前情報もなく多項式の次数を適切に設定することは現実的ではない。特に、流体問題のように非線形性・多峰性の強い目的関数の近似には適さない。

そこで本研究では、非線形かつ多峰性関数の近似に適している応答曲面法である Kriging モデル(13)を用いる。設計変数  $\mathbf{x}$  の目的関数を  $f(\mathbf{x})$  としたとき、他の応答曲面法は目的関数の推定値  $\hat{f}(\mathbf{x})$  だけをモデル化するのに対し、Kriging モデルは  $\hat{f}(\mathbf{x})$  と推定値の不確かさ  $\hat{s}^2(\mathbf{x})$  を併せてモデル化できる。この不確かさの情報に基づいて、モデルを改善するために次に追加すべきサンプル点の位置を特定するための指標を算出できる。本研究では、最大化すべき目的関数  $f(\mathbf{x})$  について次式で定義される、現在の最適値  $f_{\max}$  からの改善量  $I(\mathbf{x})$  の期待値 (Expected Improvement: EI)  $E[I(\mathbf{x})]$  を算出する。

$$I(\mathbf{x}) = \max[F - f_{\max}, 0] \quad (1)$$

$$E[I(\mathbf{x})] = \int_{f_{\max}}^{\infty} (F - f_{\max}) \phi(F) dF \quad (2)$$

ここで、 $F$  は正規分布  $I[\hat{f}(\mathbf{x}), \hat{s}^2(\mathbf{x})]$  に従う確率変数、 $\phi(F)$  は変数  $F$  の確率密度関数である。元の目的関数  $f(\mathbf{x})$  を最大化する代わりに、Kriging モデル上で目的関数の EI 値  $E[I(\mathbf{x})]$  を最大化する設計変数  $\mathbf{x}$  を探索する。この  $\mathbf{x}$  において真の目的関数値  $f(\mathbf{x})$  を評価した後、サンプル点を追加し、Kriging モデルを更新する。以上の作業を繰り返すことで、大域的最適解の探索と応答曲面の精度向上を同時に実現できる。

本研究における最適化の手順を図 6 に示す。ここで、1 つ目の目的関数である総伝熱量  $Q$  は Kriging モデルで近似し、2 つ目の目的関数である枝の全長  $L$  は Kriging モデルで近似せずに解析的に評価することとする。最初に、Latin Hypercube Sampling (LHS) (14) を用いて設計空間内に一様に初期サンプル点（計 42 点）を作成し、各点について CFD を実施した後、 $Q$  を近似する Kriging モデルを構築する。次に、Kriging モデル上で  $Q$  の EI 値が最大かつ  $L$  の解析値が最小となる Pareto 最適解を NSGA-II (集団サイズ 512, 世代数 100) で探索する。ここで得られる無数の Pareto 最適解のうち、Pareto 面の両端 2 点と中央 1 点の計 3 点について CFD を実施し、これらを現在のサンプル点に追加して Kriging モデルを更新する。このように、必要最小限の回数の CFD で効率的に Pareto 最適解を探索する。

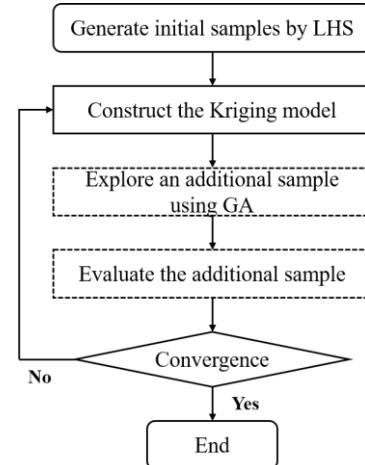
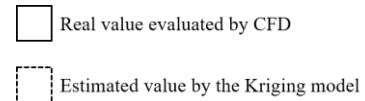


Fig. 6 Flow chart of the optimization process.

### 3. 2 热流体解析

本研究では、市販の CFD ソフトウェア ANSYS FLUENT 17.2 の圧力ベースソルバーを用いて、ヒートシンクの総伝熱量を評価する。支配方程式は、連続の式、定常非圧縮性ナビエ・ストークス方程式、定常エネルギー方程式である。また、Pseudo transient 法を用いて圧力ベース連成型ソルバーの疑似非定常アルゴリズムを有効にする。その結果、解析方程式に非定常項が効率的に追加され、安定性と収束性が向上される。表 4 に、本研究で用いた計算スキームを示す。作動流体は空気である。ヒートシンク底面を熱源とし、第一種温度境界条件として一定温度 323.15 K を与える。領域壁は周囲 (293.15 K) へ熱を充分に逃がすように第三種境界条件を設定する。ここでは、自然対流をモデル化するためにブシネスク近似を用いる。

CFD 格子はカットセル法によって生成する。一般的な物体適合格子法に比べて、カットセル法はトポロジー最適化の過程で探索される複雑なフィン形状に対しても、格子を自動生成できる。また、物体表面を単純な階段状のセルで表現する直交格子法に対して、物体表面と交差するセルを切断して物体に沿った格子を抽出するカットセル法は、壁面の隣でも検査体積が定義されるため、保存則が満たされるという特徴を持つ。図 7 はリファレンスマodelについて物体適合格子を用いた場合とカットセル法を用いた場合の各位置での局所熱伝達率を算出したものである。この図から、カットセル法を用いることで計算時間を大幅に削減しながら物体適合格子と同じ傾向を捉えられることが分かる。

Tab. 4 CFD schemes.

Pressure-velocity coupling method	Spatial discretization scheme			
	Gradient	Pressure	Momentum	Energy
Coupled	Least squares cell based	Body force weighted	Second order upwind	Second order upwind

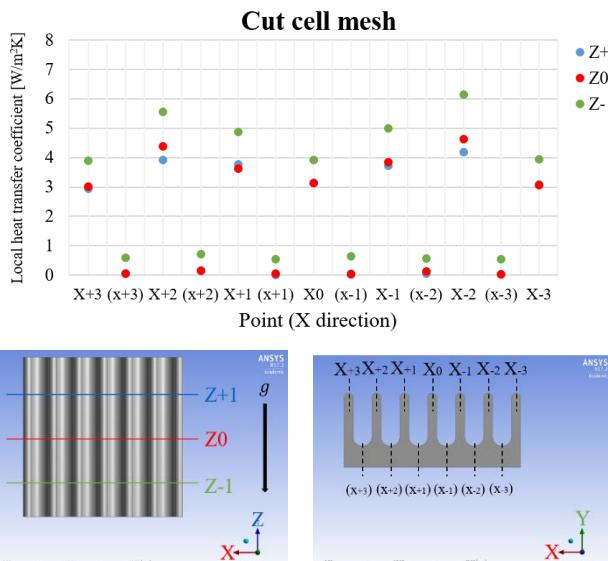
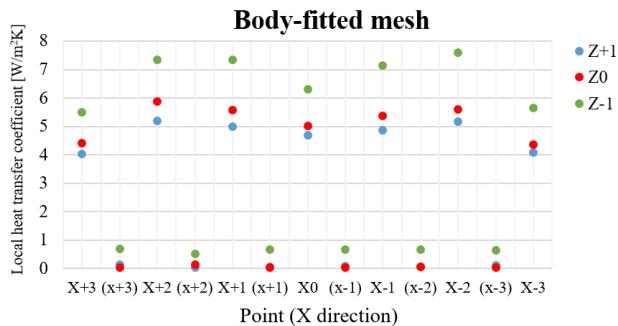


Fig. 7 Comparison of CFD results by the body-fitted mesh and the cut cell mesh.

#### 4. 結果と考察

図 6 に示される最適化の手順に従って、Kriging モデルを 4 回更新して追加サンプル点を 12 点追加した。図 8 は縦軸を 1 つの目的関数である総伝熱量、横軸を 2 つ目の目的関数である枝の全長として、初期および追加サンプルとリファレンスマodel の評価値をプロットしたグラフである。また、Pareto 最適解となるサンプル点のうちの 4 点について、2 次元断面形状 (ただし、ベース面は非表示) を併せて示してある。リファレンスマodel と比較して、性能は 18 % 劣るもののコストを 30 % 削減した設計を探索できた。言い換えると、リファレンスマodel は性能重視であるがコストについて充分に考慮された設計ではないといふことが判明した。また、これら 4 点のうちの中央 2 点を境にして総伝熱量が枝の全長に対して相対的に大きく変化していることが分かる。つまり、多目的最適化を実施したことで性能とコストのトレードオフを考える際に重要なポイントを見つけられたといえる。これらの Pareto 最適解は、枝を左右に広く伸ばして対流が滞らないような形状の特徴を持つ。

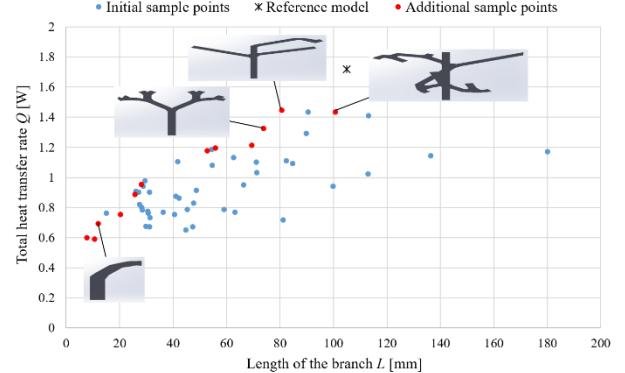


Fig. 8 Results of the multi-objective optimization.

#### 5. 結論

本研究では、ヒートシンクの 2 次元分岐形態の多目的最適化を実施し、材料コストを考慮したうえでの機能向上の可能性を検討した。GA と Kriging モデルを併用した探索手法を用いることにより、Pareto 最適解の探索を効率的に実現した。最適化の結果から、リファレンスマodel と比べて、性能は 18 % 劣るもののコストを 30 % 削減した設計を探索できた。

#### 参考文献

- (1) Yoshimura, M., Shimoyama, K., Misaka, T. and Obayashi S., “Topology optimization of fluid problems using genetic algorithm assisted by the Kriging model,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 109, 1 (2017), pp. 514-532.
- (2) Hirano, T., Yoshimura, M., Shimoyama, K. and Komiya, A., “Thermo-Fluid Dynamic Design Exploration of a Double Pipe Heat Exchanger,” Proceedings of the ASME-JSME-KSME 2019 8th Joint Fluids Engineering Conference, 7 (2019), pp. 4998-1-4998-9.
- (3) Dede, E. M., Joshi, S. N. and Zhou, F., “Topology Optimization Additive Layer Manufacturing, and Experimental Testing of an Air-Cooled Heat Sink,” Journal of Mechanical Design, Vol. 137, 11 (2015), pp. 111403-1-111403-9.
- (4) Andersen, J., Sigmund, O. and Aage, N., “Large scale three-dimensional topology optimization of heat sinks cooled by natural convection,” International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 100, 9 (2016), pp. 876-891.
- (5) Lohan, D. J., Dede, E. M. and Allison J. T., “Topology optimization for heat conduction using generative design algorithms,” Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 55, 3 (2017), pp. 1063-1077.
- (6) Joo, Y., Lee, I., Kim, S. J., “Topology optimization of heat sinks in natural convection considering the effect of shape-dependent heat transfer coefficient,” International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 109, 6 (2017), pp. 123-133.
- (7) Haertel, J. H. K., Engelbrecht, K., Lazarov, B. S. and Sigmund, O., “Topology optimization of a pseudo 3D thermofluid heat sink model,” International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 121, 6 (2018), pp. 1073-1088.
- (8) Martínez-Maradiaga, D., Damonte, A., Manzo, A., Haertel, J. H. K. and Engelbrecht, K., “Design and testing of topology optimized heat sinks for a tablet,” International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 142, 10 (2019), pp. 118429-1-118429-12.
- (9) Bejan, A. and Lorente, S., “Constructal theory of generation of configuration in nature and engineering,” Journal of Applied Physics, Transactions of the ASME, Vol. 100, 8 (2006), pp. 041301-1-

041301-27.

- (10) Lindenmayer, A., "Mathematical models for cellular interactions in development I. Filaments with one-sided inputs," *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 18, 3 (1968), pp. 280-299.
- (11) Holland, J. H., "Adaption in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence," *Adaption in Natural and Artificial Systems*, (1992).
- (12) Deb, K., Pratap, A., Agarwal S. and Meyarival, T., "A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II," *IEEE transactions on evolutionary computation*, Vol. 6, 4 (2002), pp. 182-197.
- (13) Jones, D. R., Schonlau, M. and Welch, W. J., "Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions," *Journal of Global Optimization*, Vol. 13, 12 (1998), pp. 455-492.
- (14) Mackay, M. D., Beckman, R. J. and Conover, W. J., "A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output From a Computer Code," *Technometrics*, Vol. 42, 2 (2000), pp. 55-61.