

# トポロジー最適化の流体問題への展開\*

Application of Topology Optimization to Fluid Problems

矢地謙太郎\*\*

Kentaro YAJI

**Key words** topology optimization, fluid flows, pressure drop minimization, heat sink, multifidelity design

## 1. はじめに

水や空気といった、いわゆる「流体」は、基本的に無色透明でその様子はよく分からぬが、常にわれわれの身の回りに存在し、ある時は整然と流れ、またある時は無秩序にうごめいている<sup>1)</sup>。人類の叡智ともいえる飛行機や車を想像すれば瞭然であるが、流体の振る舞いを的確に捉え、それを自在に操ることは工学において極めて重要な意味をもつ。このような背景の下、非線形性を有する流体の振る舞いを人の頭だけで予測するのはほぼ不可能であることから、現代ではコンピュータによる数値シミュレーション、さらには最適化の技術が広く工学設計において駆使されている。

本稿では革新的な最適設計を実現する方法論として注目を集めるとトポロジー最適化を、流体問題へ展開する際に必要となる基礎理論や代表的な数値計算例を紹介する。既報(『精密工学会誌』2019年11月号「はじめての精密工学」)<sup>2)</sup>にて紹介した内容と一部重複するところもあるが、本稿ではまず2章において流体問題を対象としたトポロジー最適化(以下、流体トポロジー最適化と称す)の数理的な側面に焦点を当てた上で、3章において具体的かつ代表的な最適化問題と数値計算例について解説する。なお、流体トポロジー最適化は20年弱の歴史があるものの、筆者の知る限り、ごく一部の試作検討を除いて実際の工業製品へ展開された事例はほぼ皆無である。そこで4章において、流体トポロジー最適化を実際の工学設計へつなげるために克服すべき課題とその打開策について述べた上で、筆者らの研究グループで行っている最新の研究を紹介する。

## 2. 流体トポロジー最適化の基礎理論

流体トポロジー最適化は、2003年に出版されたBorrvallとPeterssonの論文<sup>3)</sup>に始まる。その後、幾つか

の方法も提唱されているが、流体トポロジー最適化に関するほとんどの先行研究では、彼らの方法を礎として流体関連分野を対象としたさまざまな最適化問題へ展開されている。本稿においてもこの基本形を基に話を進める。

### 2.1 支配方程式

最適化問題を定式化するに先立ち、流体の支配方程式を導入しておこう。本稿では、解析領域における位置  $\mathbf{x}$  の流速  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  よび圧力  $p(\mathbf{x})$  に対する以下の定常非圧縮性粘性流体の支配方程式について考える。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (2)$$

ここで、 $\rho$  は流体の密度、 $\mu$  は粘性係数、 $\mathbf{F}$  は体積力を表す。式(1)は流体の質量保存に対応する連続の式であり、式(2)は運動量保存に対応するナビエ-ストークス方程式である。式(2)の左辺がいわゆる移流項と呼ばれる非線形項であり、複雑な流体の振る舞いを表すための重要な項であるとともに、流体の数値シミュレーションを厄介にする根源ともいえる。なお、本稿では有限要素法を用いて流体の数値シミュレーションを実施するが、差分法や有限体積法といった他の方法を用いたとしても、以下の議論は同様に成り立つことを付記しておく。

### 2.2 流体問題におけるトポロジー最適化

解くべき支配方程式が決まったので、次に流体問題におけるトポロジー最適化について考える。通常、トポロジー最適化では構造力学の問題に代表されるように、固体と空洞の分布問題を考えることがほとんどである。一方、流体問題では、固体と流体の分布問題を一般に考えることになる。ここで、固体の領域を  $\Omega_S$ 、流体の領域を  $\Omega_F$  として、両者の分布問題を考えるための固定設計領域  $D = (\Omega_S \cup \Omega_F, \Omega_S \cap \Omega_F = \emptyset)$  を導入する。その上で、設計変数場  $0 \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq 1$  について考える。ここで、 $\gamma(\mathbf{x}) = 0$  を固体領域、 $\gamma(\mathbf{x}) = 1$  を流体領域として、 $D$  において  $\gamma(\mathbf{x})$  の分布を最適化するのが流体トポロジー最適化の基本である( $\gamma(\mathbf{x}) = 0$  を流体領域、 $\gamma(\mathbf{x}) = 1$  を固体領域としてもよい)。このとき、 $0 < \gamma(\mathbf{x}) < 1$  については固体でも流体でもない領域として、多孔質体領域を仮定する。本来、このような

\*原稿受付 令和2年3月13日

\*\*大阪大学(大阪府吹田市山田丘2-1)

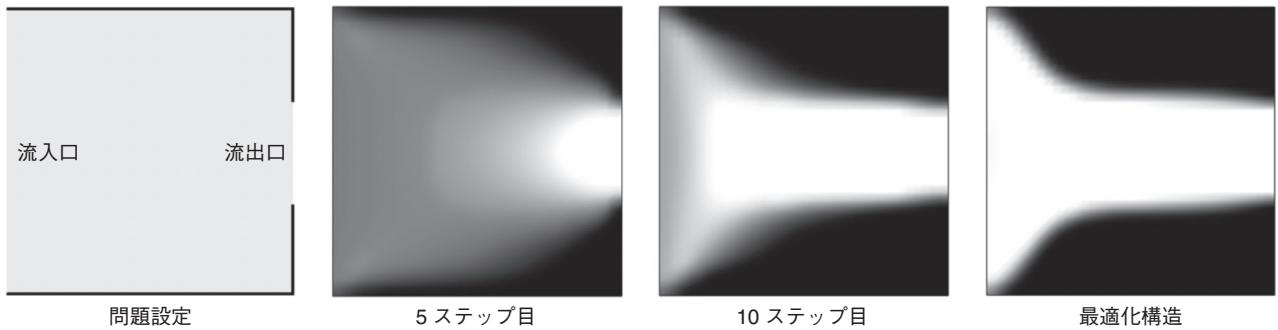


図1 圧力損失最小化問題（黒：固体領域 白：流体領域）

中間領域は製造性等の理由から工学上は許容すべきではないが、対象とする最適化問題を0-1の離散問題ではなく、勾配情報を活用することで効率的な解探索を可能とする連続問題として定式化する上で一般に必要となる。中間領域の除去方法については例えば文献4)を参照されたい。

統いて、上記で定義した $\gamma(\mathbf{x})$ を用いて、流体領域 $\Omega_F$ でのみ定義されている式(1)(2)を、トポロジー最適化の枠組みに乗せるために、固体領域 $\Omega_S$ を含む固定設計領域 $D$ で定義されたものへ拡張する。そこで先行研究<sup>3)</sup>に基づき、式(2)における体積力を次式のように定義する。

$$\mathbf{F} = -\alpha_\gamma \mathbf{u}, \quad \alpha_\gamma = \frac{q(1-\gamma)}{\gamma+q} \alpha \quad (3)$$

ここで、 $\alpha$ は逆透過抵抗係数と呼ばれ、 $q$ は $\alpha_\gamma$ の凸性を制御するためのパラメータである。式(3)で定義した体積力の役割は、固体領域( $\gamma(\mathbf{x})=0$ )において仮想的な体積力 $-\alpha\mathbf{u}$ を作成させることにより、流体をせき止める( $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ )ことにある。式(3)の形から分かるように、流体領域( $\gamma(\mathbf{x})=1$ )においてこの体積力は働くない。すなわち、流体トポロジー最適化では、固体領域を $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ の流体領域とみなすこと、固体と流体を識別している。なお、固体領域において理論的に $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ を実現するためには、 $\alpha \rightarrow \infty$ とする必要があるが、数値計算上は不安定化が生じない範囲で十分に大きな値に設定することになる。そのため、特に $0 < \gamma(\mathbf{x}) < 1$ の領域においては流体が微弱に流れるため、中間領域の除去や $\alpha$ と $q$ の設定値については注意を要する。なお、式(3)を組み込んだナビエ-ストークス方程式は、多孔質体内流れを計算するために用いられるプリンクマン方程式と関連が深い。したがって、流体トポロジー最適化は、 $D$ 全体を多孔質体と見なし、位置 $\mathbf{x}$ における局所的な空隙率 $\gamma(\mathbf{x})$ を最適化する、と解釈することもできる。

### 2.3 最適化問題の定式化

上で議論した $\gamma$ にひも付いた支配方程式を基に、目的関数や制約条件を定義することによって、最適化問題は一般に次のように定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{\gamma} J(\mathbf{U}(\gamma), \gamma) \\ & \text{subject to } G(\mathbf{U}(\gamma), \gamma) \leq G_{\max}, \quad 0 \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in D \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $J$ は目的関数、 $G$ は $G_{\max}$ を上限値とする制約関数、 $\mathbf{U}$ は流速 $\mathbf{u}$ や圧力 $p$ といった物理量をまとめたものであり、 $\gamma$ にひも付いた支配方程式を満足するものとする。流体問題に限らず、トポロジー最適化では一般に等式制約条件は扱わないので、ここでは不等式制約条件のみを記述している。

上記の最適化問題は有限要素法等により解析領域を離散化することで有限次元の非線形最適化問題に帰着させ、通常は勾配情報を $(dJ/d\gamma_i \forall i : \text{要素あるいは節点番号})$ を用いた逐次的な最適化アルゴリズムによって解く。なお、これについては特に流体問題に限った話ではなく、他の物理場を対象としたトポロジー最適化も同様である。最適化アルゴリズムに興味がある読者は文献5)を参照されたい。

### 3. 数値計算例

ここでは代表的な数値計算例として、内部流れの圧力損失最小化問題<sup>3)</sup>と熱交換量最大化問題<sup>6)</sup>を紹介する。

#### 3.1 圧力損失最小化問題

一般に流路の設計において圧力損失は重要な評価指標の一つであり、この問題は流体トポロジー最適化のベンチマークとして論文中で取り上げられることが多い。本最適化問題は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{\gamma} J = \int_D \{\mu \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \alpha_\gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\} d\Omega \\ & \text{subject to } \int_D \gamma d\Omega \leq V_{\max} \quad 0 \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in D \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、目的関数 $J$ は領域積分で定義される圧力損失エネルギーに相当する<sup>7)</sup>。また、流体の体積の上限値を $V_{\max}$ とする制約条件を与える。流速 $\mathbf{u}$ と圧力 $p$ は式(1)と式(3)の体積力を組み込んだ式(2)を適切な境界条件の下で満たすものとする。なお、本数値計算例では $V_{\max}$ を $D$ の体積の50%とし、 $\gamma$ の初期分布は $D$ の全域で0.5に設定した。

図1に解析領域の設定と初期構造から最適化構造が得られるまでのスナップ画像を示す。図から分かるように、最適化が進むにつれて固定設計領域の内部に流体と固体の界面を有する流路が形成される。図2に目的関数 $J$ の収束履歴を示す。本数値計算例では、20ステップ目で制約条件

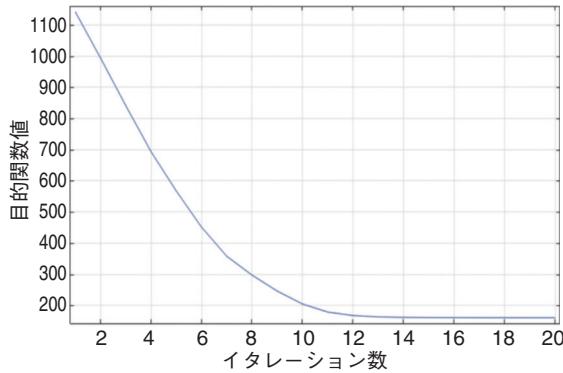


図2 目的関数の収束履歴

件を満たした上で目的関数が十分に収束し、最適化構造を得ることができた。なお、圧力損失最小化問題については、実際の工業製品として自動車の部品に展開した事例が幾つか報告されている<sup>8)</sup>。

### 3.2 热交換量最大化問題

近年の電子機器の熱流増加にともない、集積回路の適切な動作温度を維持するための新しい冷却技術が求められている。ここで、冷却デバイスに求められる本質的な要件は、「限られたスペースで最大限の熱交換を行うこと」であり、これはトポロジー最適化の応用先として相性が良いことも相まって近年注目を集めている。そこで本稿では、先行研究<sup>6)9)</sup>を基に具体的な熱交換量最大化問題の定式化と数値計算例をここで紹介する。

本最適化問題では、流速  $\mathbf{u}$  と圧力  $p$  に加え、温度  $T$  に関する以下のエネルギー方程式を解く必要がある。

$$\rho C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = k \nabla^2 T + Q \quad (6)$$

ここで、 $C_p$  は比熱、 $k$  は熱伝導率、 $Q$  は発熱項を表す。式 (6) を固定設計領域  $D$  に拡張するために、 $Q$  を次式に置き換える。

$$Q = \beta_r (T_{ref} - T), \quad \beta_r = (1 - \gamma) \beta \quad (7)$$

ここで、 $T_{ref}$  は参照温度、 $\beta$  は固体領域における体積熱伝達率に相当する。式 (3) の場合と同様に固体領域で  $\beta (T_{ref} - T)$  の発熱が生じ、流体領域では発熱は生じない。要するに、本最適化問題では発熱する固体領域と流体領域の分布問題を考えている。なお、本来は  $C_p$  や  $k$  についても固体領域と流体領域で異なる値になるように補間関数を導入する必要があるが、今回は簡単のためいずれも流体の物性値を用いる。また、式 (7) は式 (3) のように凸関数ではなく、先行研究<sup>6)</sup>に基づき線形の関数とする。これについていまだ議論の余地があり、例えば、式 (3) と同様の凸関数を用いても妥当な最適化構造が得られることが先行研究<sup>10)</sup>において確認されている。

流速  $\mathbf{u}$  と圧力  $p$  に加え、温度  $T$  が適切な境界条件の下で式 (7) を導入したエネルギー方程式を満たすとして、熱交換量最大化問題を次のように定式化する。

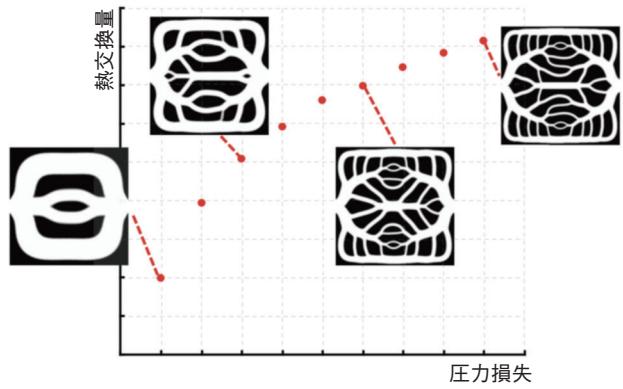


図3 热交換量最大化問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize}_{\gamma} J = \int_D \beta_r (T_{ref} - T) d\Omega \\ & \text{subject to } 0 \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq 1, \forall \mathbf{x} \in D \end{aligned} \quad (8)$$

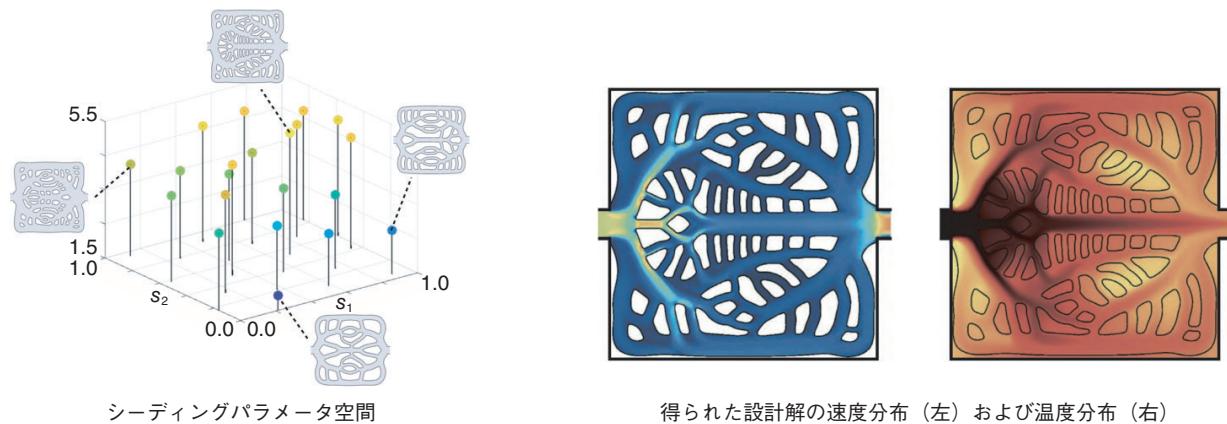
本最適化問題における目的関数  $J$  は、固体と流体の間における熱交換量に相当する。なお、本数値計算例では、 $\gamma$  の初期分布は  $D$  の全域で 0.99 に設定した。その他の問題設定は先行研究<sup>8)</sup>を参照されたい。

図3において、入口と出口の圧力差を境界条件として与えることで圧力損失をあらかじめ設定した上で、各圧力損失における熱交換量と、それぞれに対応する最適化構造を示す。図から分かるように、圧力損失と熱交換量は相反関係にあり、設定する圧力損失に応じて最適化構造における流路の分岐数や太さは異なる。これは、熱交換量の促進には固体と流体間の境界をなるべく増やす必要がある一方で、流路が複雑になるほど圧力損失が大きくなるためである。このように、流体トポロジー最適化を活用することで、さまざまな形態の流路パターンを生成することができる。

### 4. 実際の工学設計に向けて

前章までのところで、従来の流体トポロジー最適化の基礎理論と具体的な数値計算例を紹介した。図3に示したように、トポロジー最適化は実際の工学設計において設計者が思いつかないような革新的な設計案を生み出す可能性を秘めていることがうかがえる。しかしながら、実際の工学設計へ展開していくには、多くの場合において何らかのアドホックな手続きが必要となり、一筋縄ではいかないと筆者は考える。以下、まずはトポロジー最適化が抱える本質的な課題から述べる。

前章で述べたとおり、トポロジー最適化は連続の非線形最適化問題に帰着させることができるが、扱う設計変数は材料分布に対応することから、その数は一般に固定設計領域  $D$  の要素分割数あるいは節点数に等しい。すなわち、一般に膨大な数の設計変数を扱う非線形最適化問題となる。したがって、適切な定式化を見出せなければ、非常にたちの悪い多峰性を有する解空間上で最適解を探索するは

図4 乱流熱伝達問題を対象とした Multifidelity Topology Design<sup>12)</sup>

めになる。さらに、得られる最適解は無数に存在する局所最適解の一つであり、大域的最適解である保証は一切ない。したがって、たとえ理屈にかなった定式化と数値実装を行ったとしても、数学的には何らかの局所最適解は得られるものの、その解が設計者にとって満足のいくものかどうかはまったくの別問題である。この多峰性の問題は扱う物理場の非線形性が強い場合や、数値的な不安定性を引き起こすような厳しい制約条件を課す場合に顕著となる。このような状況は実際の工学設計においては往々にしてある。例えば、世の中の流体のはほとんどは乱流状態にあり、流体を扱う工業製品の設計において乱流の数値シミュレーションソフトウェアは必須のツールと言っても過言ではない。したがって、本来流体トポロジー最適化で解きたい問題は、多くの場合で乱流問題ということになる。しかしながら、乱流は一般に層流の場合と比較して非線形性が強い上に計算コストが高いことから、一度の最適化計算を回すだけでも容易ではない。さらに、前述のとおり多峰性の問題をはらむことから、満足のいく解を得るのは一筋縄でいかないことは容易に想像がつく。実際、乱流を対象とした一部の先駆的な取り組み<sup>11)</sup>を除いて、流体トポロジー最適化の研究のはほとんどは層流を対象としている。

複雑な最適化問題に対し、そこで扱う物理現象を忠実に再現したモデルを組み込み、直接的にトポロジー最適化を実行する、というアプローチに関する研究は当該研究分野において今後も主流であることは搖るぎないが、別の枠組み、言うならば「間接的に満足解を導き出すアプローチ」に関する研究も今後は重要になると見える。このような立ち位置の下、筆者らの研究グループでは、最近の研究<sup>12)</sup>によって Multifidelity Topology Design と称する枠組みを提唱している。この枠組みの基本コンセプトは、①擬似的なトポロジー最適化問題に人為的な設計パラメータ(Seeding Parameter)を埋め込むことで多様な形態の解候補を多数生成し、②各解候補を高精度の解析モデルで評価し、その結果を踏まえ先に定式化した擬似的なトポロジー最適化問題を逐次更新し、データ駆動的に満足解の獲得を

図る、というものである。詳細については文献 12)に譲るが、この枠組みでは最適化計算は擬似的なトポロジー最適化問題に任せておいて、実際に扱う高精度の解析モデルはあくまで順問題を解くためだけに用いることを前提とする。これは前述の多峰性に起因する問題を回避するためであり、間接的な解探索アプローチであるゆえんである。また、多様な解候補を用意することが本枠組みを有効に機能させるために重要となるため、擬似的な最適化問題において扱う物理場に Seeding Parameter を埋め込むことで、網羅的に解候補を生成することを前提としている。ここで、各最適化計算および高精度の解析モデルによる評価は完全に独立して実行可能であり並列処理が可能であるため、逐次的に解候補を集めめる必要性はない。

本枠組みの具体的な数値計算例として、図4に乱流熱伝達問題を対象とした場合の結果を示す。本数値例では、層流熱伝達問題を対象としたトポロジー最適化問題<sup>8)</sup>においてレイノルズ数と体積熱伝達率にひも付けた Seeding Parameter を埋め込むことで多様な解候補を生成し、それぞれに対し乱流熱伝達解析を行い、有望な設計解を導出した。本数値計算例で得られた結果とあらかじめ用意しておいた参照モデルとの性能を比較したところ、およそ 30% の性能向上を実現した。そのほか、本枠組みに基づき、熱交換器<sup>13)</sup>やフロー電池<sup>14)</sup>の最適設計についても検討を行っている。興味のある読者はこれらの文献も参照されたい。

本研究の今後の課題は、Multifidelity Topology Design を広く工学設計へ展開できるように数学的に整理した上で一般化することにある。特に、擬似的なトポロジー最適化問題の定式化方法および多様な解候補の生成方法は試行錯誤に依存する側面をもつため、これらの自動化の実現が望まれる。

## 5. おわりに

本稿では、流体トポロジー最適化の基礎理論と具体的な数値計算例を紹介した。また、トポロジー最適化が抱える

本質的な課題を述べた上で、実際の工学設計への展開を図るアプローチとして、筆者らの提唱する Multifidelity Topology Designについて概説した。今後、乱流等の複雑な物理場であっても系統的に有望な最適解を導き出すことができるようになれば、流体トポロジー最適化は広く工学設計において活用されることが期待される。

## 参考文献

- 1) 日野幹雄：流体力学，朝倉書店，(1992).
- 2) 矢地謙太郎：はじめてのトポロジー最適化，精密工学会誌，**85**, 11 (2019) 965.
- 3) T. Borrvall and J. Petersson : Topology Optimization of Fluid in Stokes Flow, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **41** (2003) 77.
- 4) F. Wang, B.S. Lazarov and O. Sigmund : On Projection Methods, Convergence and Robust Formulations in Topology Optimization, Struct. Multidisc. Optim., **43**, 6 (2011) 767.
- 5) P.W. Christensen and A. Klarbring : An Introduction to Structural Optimization, Springer, Berlin, (2009).
- 6) T. Matsumori, T. Kondoh, A. Kawamoto and T. Nomura : Topology Optimization for Fluid-Thermal Interaction Problems under Constant Input Power, Struct. Multidisc. Optim., **47**, 4 (2013) 571.
- 7) Y. Sato, K. Yaji, K. Izui, T. Yamada and S. Nishiwaki : An Optimum Design Method for a Thermal-Fluid Device Incorporating Multiobjective Topology Optimization with an Adaptive Weighting Scheme, J. Mech. Des., **140**, 3 (2018) 031402.
- 8) E.M. Papoutsis-Kiachagias and K.C. Giannakoglou : Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization : Industrial Applications, Arch. Computat. Methods Eng., **23** (2016) 255.
- 9) K. Yaji, T. Yamada, S. Kubo, K. Izui and S. Nishiwaki : A Topology Optimization Method for a Coupled Thermal-Fluid Problem Using Level Set Boundary Expressions, Int. J. Heat Mass Trans., **81** (2015) 878.
- 10) K. Yaji, T. Yamada, M. Yoshino, T. Matsumoto, K. Izui and S. Nishiwaki : Topology Optimization in Thermal-Fluid Flow Using the Lattice Boltzmann Method, J. Comput. Phys., **307** (2016) 355.
- 11) C.B. Dilgen, S.B. Dilgen, D.R. Fuhrman, O. Sigmund and B.S. Lazarov : Topology Optimization of Turbulent Flows, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **331** (2018) 363.
- 12) K. Yaji, S. Yamasaki and K. Fujita : Multifidelity Design Guided by Topology Optimization, Struct. Multidisc. Optim., **61**, 3 (2020) 1071.
- 13) H. Kobayashi, K. Yaji, S. Yamasaki and K. Fujita : Freeform Winglet Design of Fin-and-Tube Heat Exchangers Guided by Topology Optimization, Appl. Therm. Eng., **161** (2019) 114020.
- 14) K. Yaji, S. Yamasaki, S. Tsushima and K. Fujita : A Framework of Multi-Fidelity Topology Design and Its Application to Optimum Design of Flow Fields in Battery Systems, Proc. ASME 2019 IDETC/CIE, IDETC2019-97675 (2019).



矢地謙太郎

2016年京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻博士後期課程修了。博士（工学）。2016年より大阪大学大学院工学研究科機械工学専攻助教。流体関連分野を中心とした最適設計に関する研究に従事。