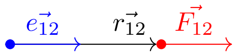
1 AULA 1

1.1 Lei de Coulomb



A força entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 é dada por

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e_{r_{12}}}$$

onde

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$K_e = 9 * 10^9 NC^{-2}m^{-2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi * 9 * 10^9} = 8.85 * 10^{-12} N^{-1}C^2m^{-2}$$

ϵ_0 é conhecida como a permitividade do vácuo

1.2 Forca Elétrica vs Força Gravítica

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

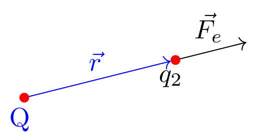
A força entre dois protões afastados por uma distância d

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{9 * 10^9 \frac{(1.6*10^{-19})^2}{d^2}}{6.7 * 10^{-11} \frac{(1.7*10^{-27})^2}{d^2}} = 10^{36}$$

Isto é, a interação elétrica entre os dois protões é 10^{36} vezes maior que a interação gravítica entre eles ,logo para partículas carregadas a interação gravítica é desprezável

1.3 Campo Elétrico

O campo elétrico ($\vec{E}$) é a força por unidade de carga através do efeito de uma carga q sobre o espaço á sua volta. Este é dado pela divisão da lei de coulomb por q_2.

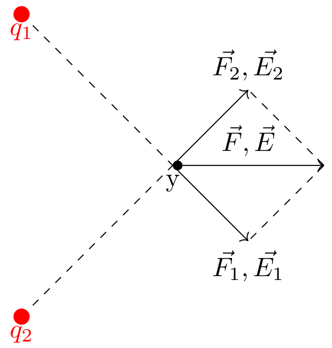


$$\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e_r}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

1.4 Principio de Sobreposição

A força total das forças aplicadas numa carga é igual a soma vetorial de todas as forças que lhe são aplicadas por outras partículas



$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e_{r_i}}$$

1.5 Distribuição Contínua de Carga

As cargas são discretas, mas num corpo carregado as suas distâncias são tão pequenas que não as conseguimos distinguir umas das outras. É então util passar a tratar essas cargas como uma distribuição contínua

1.5.1 Ao Longo de uma linha (1D)

A distribuição da carga é representada por λ[C/m] medido em coulombs por metro

$$dq = \lambda dl$$

1.5.2 Numa Superfície (2D)

A distribuição da carga é representada por G[C/m²] medido em coulombs por metro quadrado

$$dq = Gds$$

1.5.3 Num Volume (3D)

A distribuição da carga é representada por ρ [C/m³] medido em coulombs por metro cúbico

$$dq = \rho dv$$

O campo elétrico criado por cada dq, sendo dq pontual é dado por:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{e_r}$$

e aplicando o principio da sobreposição,

$$\vec{E} = \int_{objeto} d\vec{E}$$

concretizando-se para cada um dos casos

$$1D : \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\Gamma \frac{\lambda dl}{r^2}$$

$$2D : \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{Gdl}{r^2}$$

$$3D : \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_v \frac{\rho dl}{r^2}$$

1.6 Trabalho Do Campo Magnético

Carga Pontual

$$dw = \vec{F}.\vec{dl}$$

$$w = \int_a^b \vec{F}.\vec{dl} =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{e_r}.(dr\vec{e_r} + rd\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta d\phi\vec{e_\phi}) =$$

$$= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}dr =$$

$$= frac14\pi\epsilon_0 Qq\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_a}^{r_b} =$$

$$= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Que não depende do caminho!!!!!

1.6.1 Para um caminho fechado

$$w = \int_1 dw = \int_2 dw \implies \oint dw = 0$$

Se fizermos por unidade de carga:

$$\frac{dw}{q} = \vec{E_Q}.\vec{dl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \implies \oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$$

Pelo Teorema de Stokes

$$\oint_\rho \vec{E}.\vec{dl} = \int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right).\vec{n}ds = 0 \implies \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}_{Rotacional}$$

Relembrar

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_y \end{vmatrix}$$

1.6.2 Campo de Múltiplas Cargas

$$\oint \left(\sum \vec{E}_i\right).\vec{dl} = \oint \sum \left(\vec{E}_i.\vec{dl}\right) = \sum \oint \vec{E}_i.\vec{dl}$$

$$\sum 0 = 0$$

Agora que já sabemos que a força elétrica é conservativa, o trabalho realizado para mover uma carga de um ponto A para um ponto B é igual á energia ganha pelo sistema quando a partícula vai de A para B.

2 AULA 2

2.1 Potencial Criado Por Uma Carga

Podemos então definir um potencial elétrico como o trabalho do campo por unidade de carga (para uma carga pontual)

$$V_p \equiv \frac{U_e}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R}\,[V]$$

O potencial pode ser generalizado trocando o ∞ por outro ponto de referência, ref:

$$V_p = \int_p^{ref} \vec{E}.\vec{dl} = fracq4\pi\epsilon_0 \left[\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{ref}}\right]$$

Note-se que

$$\int_p^{\infty} \vec{E}.\vec{dl} = \int_p^{ref} \vec{E}.\vec{dl} + \underbrace{\int_{ref}^{\infty} \vec{E}.\vec{dl}}_{constantepara名ref}$$

portante, num caso geral, o potencial é definido por uma parte constante

2.2 Potencial Criado Por Varias Cargas

$$V_p = \int_p^{ref} \left(\sum \vec{E}_i\right).\vec{dl} = \int_p^{ref} \left(\sum \vec{E}_i.\vec{dl}\right)$$

$$\sum \int_p^{ref} \vec{E}_i.\vec{dl} = \sum V_{pi}$$

O princípio da sobreposição aplica-se ao potencial!!

2.3 Para uma Distribuição de Carga

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} +$$

$$V_p = \int dV$$

2.4 Relação Entre V e $\vec{E}$

Já sabemos como obter V a partir de $\vec{E}$:

$$V_p = \int_p^{\infty} \vec{E}.\vec{dl}$$

Como podemos obter $\vec{E}$ a partir de V?

$$V_p = V_p - 0 = V_p - V_{ref} = \int_{ref}^{p} dv, v = v\left(x, y, z\right)$$

$$dv\left(x, y, z\right) = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(dx, dy, dz\right)$$

$$V_p = \int_{ref}^{p} \vec{\nabla}v.\vec{dl} = -\int_p^{ref} \vec{\nabla}v.\vec{dl} = \int_p^{ref} \vec{E}.\vec{dl}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}v$$

2.5 Diferença de potencial

Não confundir diferença de potencial com variação de potencial

$$\Delta V_{+-} = V_{-} - V_{+} < 0$$

$$V_{+-} = V_{+} - V_{-} = -\Delta V_{+-} > 0$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^{ref} \vec{E}.\vec{dl} - \int_b^{ref} \vec{E}.\vec{dl} =$$

$$\int_a^{ref} \vec{E}.\vec{dl} + \int_{ref}^{b} \vec{E}.\vec{dl} =$$

$$\int_a^{b} \vec{E}.\vec{dl}$$

Note-se que oa diferença de potencial é o trabalho por unidade de carga realizado pelo campo elétrico:

$$w = \int_a^b \vec{F}.\vec{dl} = \int_a^b q\vec{E}.\vec{dl} = qV_{ab}$$

sendo um trabalho realizado pro um campo conservativo, podemos escrever também que:

$$\Delta V_{ab} = -qV_{ab}$$

2.6 Superficies equipotenciais

Por definição, numa superfície equipotencial

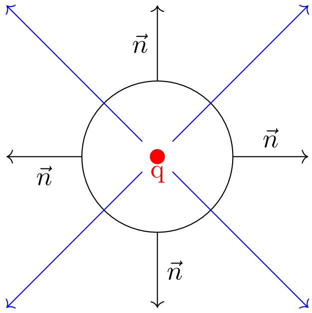
$$V = c^{te}$$

Então:

$$V_{ab}(numasuperficie) = 0 = \int_a^b q\vec{E}.\vec{dl} = 0 \implies \vec{E} \perp \vec{dl}$$

2.7 Lei de Gauss

Para derivarmos a lei de Gauss começaremos por calcular o fluxo de uma carga pontual e depois usaremos o principio da sobreposição:



$$\vec{E} = K_e \frac{q}{r^2} \vec{e_r}$$

$$\phi = \oint \vec{E}.\vec{n} ds$$

$$\phi = \oint K_e \frac{q}{r^2} \underbrace{\vec{e_r}.\vec{e_r}}_{1} ds =$$

$$= K_e \frac{q}{\underbrace{r^2}_{rconstante}} \oint ds =$$

$$K_e \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

2.7.1 Se tivermos múltiplas cargas:

$$\phi = \oint \left(\sum \vec{E_i} \right) .\vec{n} ds = \oint \sum \left(\vec{E_i}.\vec{n} \right) ds =$$

$$\sum \oint \vec{E_i} \vec{n} ds = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

2.7.2 Lei De Gauss

$$\oint \vec{E}.\vec{n}ds = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Nota: Em geral, $Q_{int} = \int_{col} \rho dv$ sendo vol o volume cuja fronteira é a nossa superficie fechada

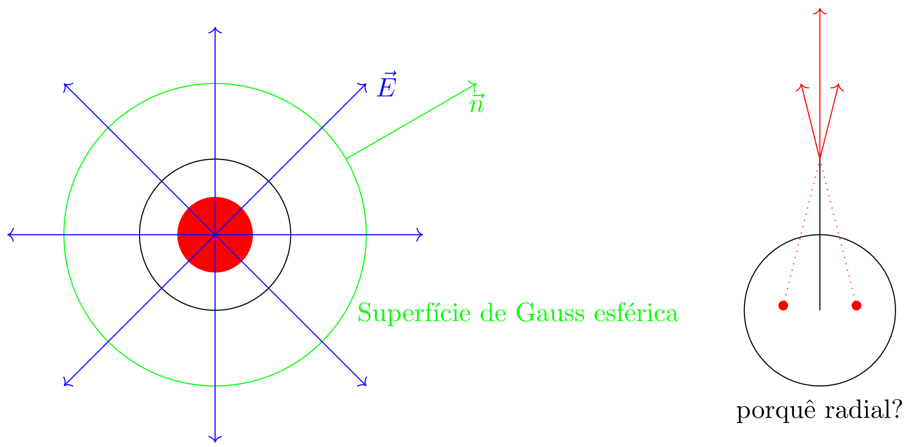
Utilizando o teorema da divergência podemos escrever a lei de gauss na forma diferencial:

$$\oint \vec{E}.\vec{n}ds = \oint_{vol} \vec{\nabla}.\vec{E}dv = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(E_x, E_y, E_z)$$
$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Esta lei, derivada da lei experimental de coulomb, pode tornar o calculo dos campos elétricos bastante mais simples para um conjunto muito especifico de geometrias nos restantes casos as contas seriam até mais complexas.

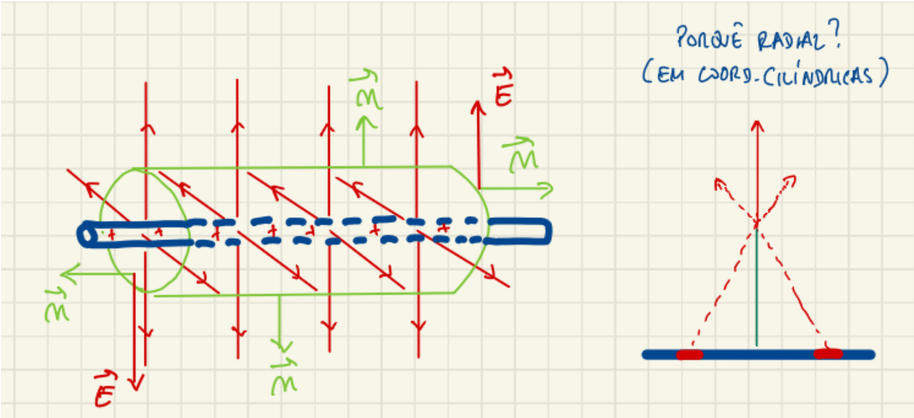
Note-se que esta lei vai permitir calcular não $\vec{E}$, mas $|\vec{E}|$ para fazer o produto interno do fluxo temos de saber à partida a direção do campo. O resultado das contas será o seu módulo.

2.8 As 3 Geometrias em que se aplica a Lei de Gauss



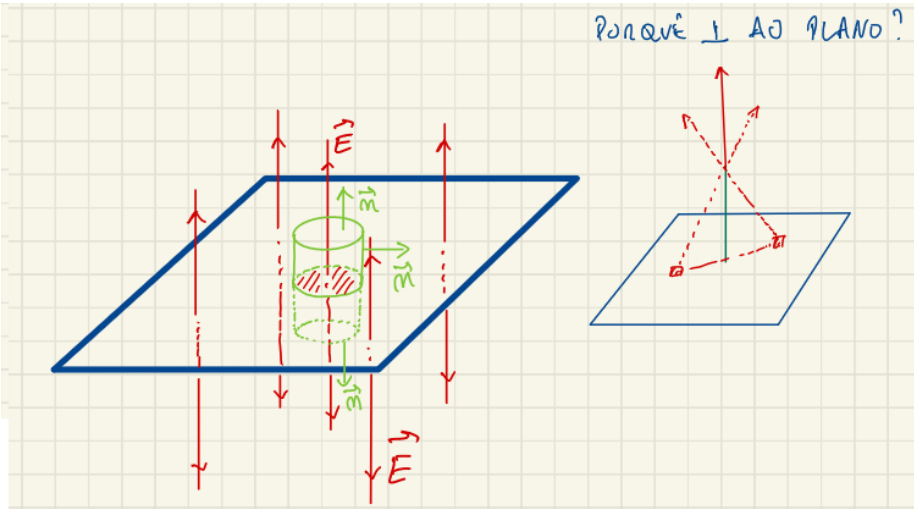
$\vec{E}$ é sempre paralelo a $\vec{n}$ e $|\vec{E}|$ é constante em toda a superfície de Gauss

2.9 Simetria Cilíndrica



Na superficie lateral do cilindro de Gauss $\vec{E}$ é sempre paralelo a $\vec{n}$ e $|\vec{E}$ é constante. Nas "tampas" do cilindro de Gauss $\vec{E}$ é perpendicular a $\vec{n}$, pelo que $\vec{E}.\vec{n} = 0$

2.10 Plano ∞



Nas "tampas" do cilindro de Gauss $\vec{E}$ é paralelo a $\vec{n}$ e $|\vec{E}|$ é constante. Na superfície lateral do cilindro de Gauss $\vec{E}$ é perpendicular a $\vec{n}$ pelo que $\vec{E}.\vec{n} = 0$