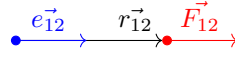


1 AULA 1

1.1 Lei de Coulomb



A força entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 é dada por

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}}$$

onde

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$K_e = 9 * 10^9 NC^{-2}m^{-2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi * 9 * 10^9} = 8.85 * 10^{-12} N^{-1}C^2m^{-2}$$

ϵ_0 é conhecida como a permissividade do vácuo

1.2 Força Elétrica vs Força Gravítica

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

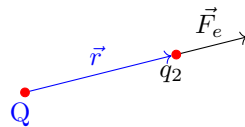
A força entre dois prótons afastados por uma distância d

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{9 * 10^9 \frac{(1.6 * 10^{-19})^2}{d^2}}{6.7 * 10^{-11} \frac{(1.7 * 10^{-27})^2}{d^2}} = 10^{36}$$

Isto é, a interação elétrica entre os dois prótons é 10^{36} vezes maior que a interação gravítica entre eles, logo para partículas carregadas a interação gravítica é desprezável

1.3 Campo Elétrico

O campo elétrico (\vec{E}) é a força por unidade de carga através do efeito de uma carga q sobre o espaço à sua volta. Este é dado pela divisão da lei de coulomb por q_2 .

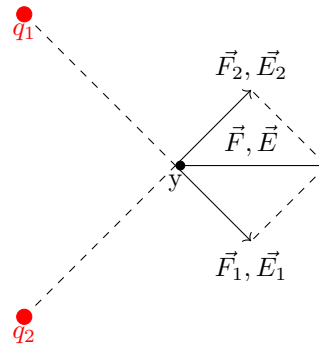


$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

1.4 Princípio de Sobreposição

A força total das forças aplicadas numa carga é igual a soma vetorial de todas as forças que lhe são aplicadas por outras partículas



$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{r_i}$$

1.5 Distribuição Contínua de Carga

As cargas são discretas, mas num corpo carregado as suas distâncias são tão pequenas que não as conseguimos distinguir umas das outras. É então útil passar a tratar essas cargas como uma distribuição contínua

1.5.1 Ao Longo de uma linha (1D)

A distribuição da carga é representada por λ [C/m] medido em coulombs por metro

$$dq = \lambda dl$$

1.5.2 Numa Superfície (2D)

A distribuição da carga é representada por G [C/m²] medido em coulombs por metro quadrado

$$dq = G ds$$

1.5.3 Num Volume (3D)

A distribuição da carga é representada por ρ [C/m³] medido em coulombs por metro cúbico

$$dq = \rho dv$$

O campo elétrico criado por cada dq, sendo dq pontual é dado por:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r$$

e aplicando o princípio da sobreposição,

$$\vec{E} = \int_{objeto} d\vec{E}$$

concretizando-se para cada um dos casos

$$1D : \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda dl}{r^2}$$

$$2D : \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{G dl}{r^2}$$

$$3D : \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho dl}{r^2}$$

1.6 Trabalho Do Campo Magnético

Carga Pontual

$$\begin{aligned} dw &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ w &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi) = \\ &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dr = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dr = \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_a}^{r_b} = \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \end{aligned}$$

Que não depende do caminho!!!!

1.6.1 Para um caminho fechado

$$w = \int_1 dw = \int_2 dw \implies \oint dw = 0$$

Se fizermos por unidade de carga:

$$\frac{dw}{q} = \vec{E}_Q \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \implies \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Pelo Teorema de Stokes

$$\oint_{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} ds = 0 \implies \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{\text{Rotacional}} = 0$$

Relembrar

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

1.6.2 Campo de Múltiplas Cargas

$$\oint \left(\sum \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{l} = \oint \sum \left(\vec{E}_i \cdot d\vec{l} \right) = \sum \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$
$$\sum 0 = 0$$

Agora que já sabemos que a força elétrica é conservativa, o trabalho realizado para mover uma carga de um ponto A para um ponto B é igual à energia ganha pelo sistema quando a partícula vai de A para B.

2 AULA 2

2.1 Potencial Criado Por Uma Carga

Podemos então definir um potencial elétrico como o trabalho do campo por unidade de carga (para uma carga pontual)

$$V_p \equiv \frac{U_e}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R} [V]$$

O potencial pode ser generalizado trocando o ∞ por outro ponto de referência, ref:

$$V_p = \int_p^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{ref}} \right]$$

Note-se que

$$\int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_p^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_{ref}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\text{constante para } ref}$$

portante, num caso geral, o potencial é definido por uma parte constante

2.2 Potencial Criado Por Varias Cargas

$$V_p = \int_p^{ref} \left(\sum \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{l} = \int_p^{ref} \left(\sum \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \right)$$
$$\sum \int_p^{ref} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum V_{pi}$$

O princípio da sobreposição aplica-se ao potencial!!

2.3 Para uma Distribuição de Carga

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} +$$
$$V_p = \int dV$$

2.4 Relação Entre V e \vec{E}

Já sabemos como obter V a partir de \vec{E} :

$$V_p = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como podemos obter \vec{E} a partir de V?

$$V_p = V_p - 0 = V_p - V_{ref} = \int_{ref}^p dv, v = v(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} dv(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (dx, dy, dz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_p &= \int_{ref}^p \vec{\nabla} v \cdot d\vec{l} = - \int_p^{ref} \vec{\nabla} v \cdot d\vec{l} = \int_p^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} v \end{aligned}$$

2.5 Diferença de potencial

Não confundir diferença de potencial com variação de potencial

$$\Delta V_{+-} = V_- - V_+ < 0$$

$$V_{+-} = V_+ - V_- = -\Delta V_{+-} > 0$$

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_a - V_b = \int_a^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_b^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_a^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{ref}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Note-se que a diferença de potencial é o trabalho por unidade de carga realizado pelo campo elétrico:

$$w = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q \vec{E} \cdot d\vec{l} = q V_{ab}$$

sendo um trabalho realizado por um campo conservativo, podemos escrever também que:

$$\Delta V_{ab} = -q V_{ab}$$

2.6 Superfícies equipotenciais

Por definição, numa superfície equipotencial

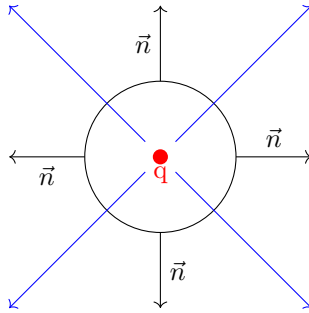
$$V = c^{te}$$

Então:

$$V_{ab}(numasuperficie) = 0 = \int_a^b q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \implies \vec{E} \perp d\vec{l}$$

2.7 Lei de Gauss

Para derivarmos a lei de Gauss começaremos por calcular o fluxo de uma carga pontual e depois usaremos o princípio da sobreposição:



$$\vec{E} = K_e \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{n} ds$$

$$\phi = \oint K_e \frac{q}{r^2} \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_1 ds =$$

$$= K_e \underbrace{\frac{q}{r^2}}_{r \text{ constante}} \oint ds =$$

$$K_e \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

2.7.1 Se tivermos múltiplas cargas:

$$\begin{aligned} \phi &= \oint \left(\sum \vec{E}_i \right) \cdot \vec{n} ds = \oint \sum \left(\vec{E}_i \cdot \vec{n} \right) ds = \\ &= \sum \oint \vec{E}_i \cdot \vec{n} ds = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

2.7.2 Lei De Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Nota: Em geral, $Q_{int} = \int_{col} \rho dv$ sendo vol o volume cuja fronteira é a nossa superfície fechada

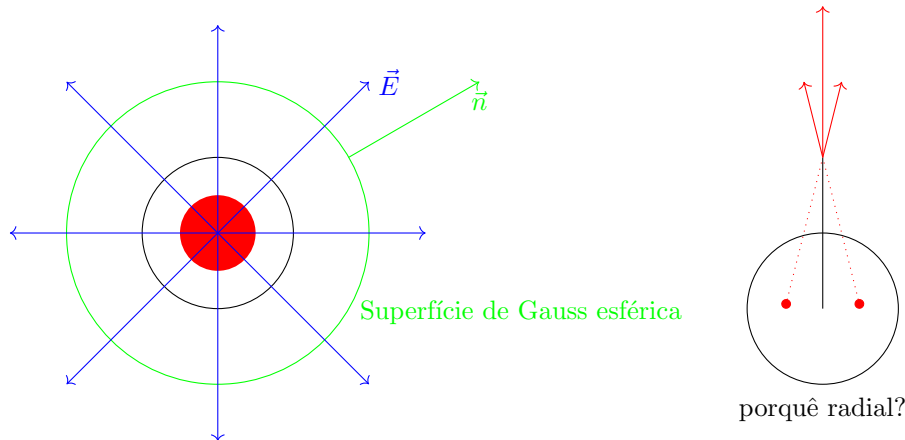
Utilizando o teorema da divergência podemos escrever a lei de gauss na forma diferencial:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot \vec{n} ds &= \oint_{vol} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x, E_y, E_z) \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Esta lei, derivada da lei experimental de coulomb, pode tornar o calculo dos campos elétricos bastante mais simples para um conjunto muito específico de geometrias nos restantes casos as contas seriam até mais complexas.

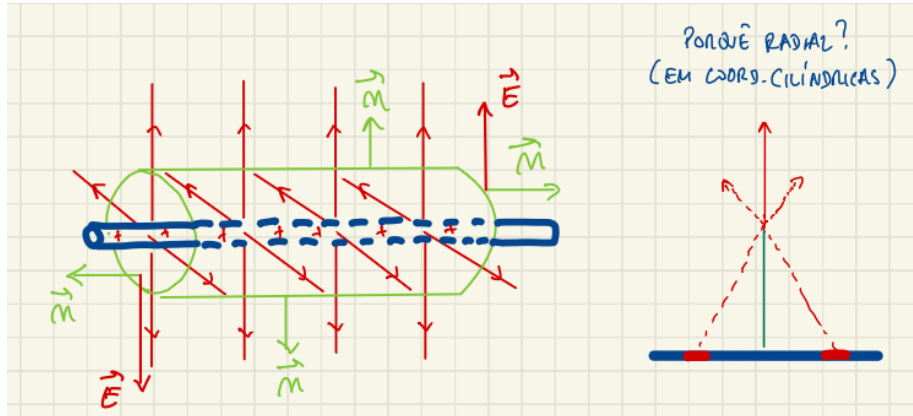
Note-se que esta lei vai permitir calcular não \vec{E} , mas $|\vec{E}|$ para fazer o produto interno do fluxo temos de saber à partida a direção do campo. O resultado das contas será o seu módulo.

2.8 As 3 Geometrias em que se aplica a Lei de Gauss



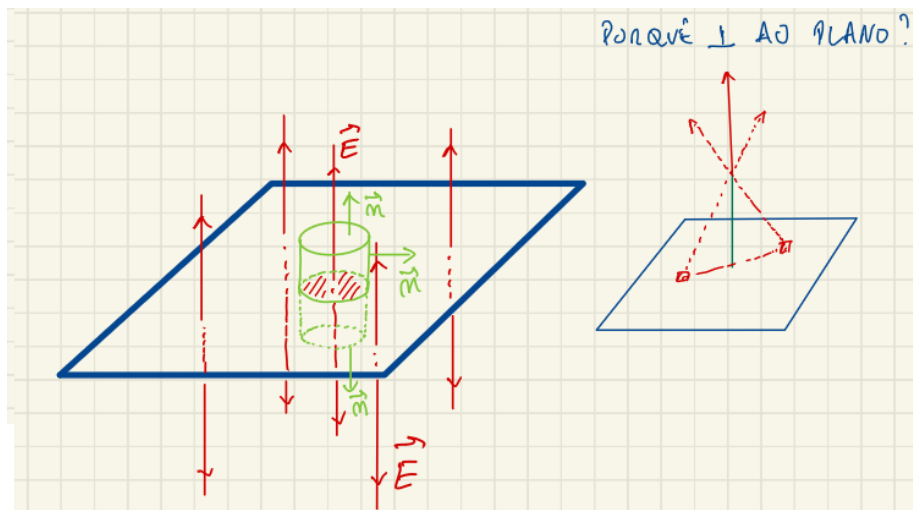
\vec{E} é sempre paralelo a \vec{n} e $|\vec{E}|$ é constante em toda a superfície de Gauss

2.9 Simetria Cilíndrica



Na superfície lateral do cilindro de Gauss \vec{E} é sempre paralelo a \vec{n} e $|\vec{E}|$ é constante. Nas “tampas” do cilindro de Gauss \vec{E} é perpendicular a \vec{n} , pelo que $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$

2.10 Plano ∞



Nas “tampas” do cilindro de Gauss \vec{E} é paralelo a \vec{n} e $|\vec{E}|$ é constante. Na superfície lateral do cilindro de Gauss \vec{E} é perpendicular a \vec{n} pelo que $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$

3 Aula 3

3.1 Equilíbrio eletrostático

Por definição as cargas estão paradas, porque estamos a falar de eletrostática

3.2 Condutores em equilíbrio eletrostático

Os condutores têm cargas livres, se existe F_e (fluxo elétrico) então existe movimento

$$F_e = 0, E = 0$$

Dentro dos condutores em equilíbrio eletrostático não pode haver carga, se existir, estará na superfície.

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

3.3 Condições de fronteira

A carga está na superfície

O campo é \perp à superfície

São equipotenciais

3.4 Efeito de blindagem

Quando um condutor tem-lhe imposto campo eletromagnético as suas cargas internas movem-se de tal forma que o campo total no seu interior seja nulo.

3.5 e se o condutor for nulo?

Na zona oca dentro do condutor é blindado, esta blindagem faz com que no interior da cavidade oca seja nulo.

3.6 será que o exterior está blindado de uma carga no interior oco do condutor

Não

3.7 Isolantes

3.8 polarização elétrica