Chapitre 5

Applications mesurables

Dans ce chapitre et dans la suite la notation $(E, \mathscr{A})$ signifie un ensemble E muni d'une tribu $\mathscr{A}$. De même pour $(E_i, \mathscr{A}_i), i = 1, 2, ...$

5.1 Définitions

Notation 5.1 *Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ et $B \subseteq E_2$. On utilise très fréquemment la notation $\{f \in B\}$ à la place de $f^{-1}(B)$, ce qui peut se voir comme une écriture condensée de $\{x : f(x) \in B\}$. Par exemple, dans le cas où $E_2 = \mathbb{R}$ et $B = [a, +\infty[$, on pourra écrire $f^{-1}(B)$ sous la forme $\{f \geq a\}$.*

Définition 5.2 *Une fonction $f : (E_1, \mathscr{A}_1) \longrightarrow (E_2, \mathscr{A}_2)$ est dite mesurable*[1] *si $f^{-1}(\mathscr{A}_2) \subseteq \mathscr{A}_1$, c'est-a-dire si $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}_1$ pour tout $B \in \mathscr{A}_2$.*

On note $\mathscr{F}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ l'ensemble des fonctions mesurables : $(E_1, \mathscr{A}_1) \to (E_2, \mathscr{A}_2)$.

Remarque 5.3 *Si on ne se donne que la tribu $\mathscr{A}_1$, alors la tribu image de $\mathscr{A}_1$ par f est la plus grande tribu sur E_2 qui rende f mesurable.*

Si on ne se donne que $\mathscr{A}_2$, alors la tribu image réciproque de $\mathscr{A}_2$ par f est la plus petite tribu sur E_1 qui rende f mesurable. On note aussi cette tribu $\sigma(f)$.

Remarque 5.4 *Soit $A \subseteq E$. Une fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : (E, \mathscr{A}) \longrightarrow (\{0, 1\}, \mathscr{P}(\{0, 1\}))$ est mesurable ssi $A \in \mathscr{A}$. On dit alors que « A est mesurable »*[2].

Remarque 5.5 *Si E_1 et E_2 sont $\mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ muni de la tribu borélienne, on dit « fonction borélienne » pour « fonction mesurable ».*

5.2 Exemples et opérations stables pour la mesurabilité

Proposition 5.6 *Soit $\mathscr{C}$ une classe de parties de F et $\mathscr{B} := \sigma(\mathscr{C})$. Alors $f : (E, \mathscr{A}) \to (F, \mathscr{B})$ est mesurable ssi $f^{-1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}$.*

1. sous-entendu par rapport aux deux tribus $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$
2. toujours en référence sous-entendue à la tribu $\mathscr{A}$

Dém. L'application f est mesurable ssi $f^{-1}(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$, mais d'une part $f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ par le lemme de transport, et d'autre part $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subseteq \mathscr{A}$ ssi $f^{-1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{A}$. □

Application. Soit S une partie dense de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $f : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable ssi $\{f \geq a\} \in \mathscr{A}$ pour tout $a \in S$. On peut remplacer $\{f \geq a\}$ par $\{f > a\}$, $\{f \leq a\}$ ou $\{f < a\}$.

Remarque 5.7 *Toute fonction monotone est borélienne. En effet pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f \geq a\}$ est une demi-droite, en effet : si $m(a) := \inf\{x : f(x) \geq a\}$, alors dans le cas où f est croissante par exemple, $\{f \geq a\}$ coïncide soit avec $[m(a), +\infty[$, soit avec $]m(a), +\infty[$.*

Proposition 5.8 *Soient $f_1 : (E_1, \mathscr{A}_1) \to (E_2, \mathscr{A}_2)$ et $f_2 : (E_2, \mathscr{A}_2) \to (E_3, \mathscr{A}_3)$. Si f_1 et f_2 sont mesurables, alors $f_2 \circ f_1 : (E_1, \mathscr{A}_1) \to (E_3, \mathscr{A}_3)$ est aussi mesurable.*

Dém. Pour tout $A_3 \subseteq \mathscr{A}_3$, on vérifie que $(f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3))$. Comme f_2 est mesurable, $f_2^{-1}(A_3) \in \mathscr{A}_2$. De plus, comme f_1 est mesurable $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3)) \in \mathscr{A}_1$. □

Proposition 5.9 *Soit une suite (f_n) de $\mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}or(\bar{\mathbb{R}}))$. Alors*

a) $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables ;

b) $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont mesurables ;

c) si (f_n) converge simplement *vers une fonction f* [3] *(dans $\bar{\mathbb{R}}$), alors f est mesurable.*

Dém. a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{\sup_n f_n \leq a\} = \cap_n \{f_n \leq a\} \in \mathscr{A}$ et $\{\inf_n f_n \geq a\} = \cap_n \{f_n \geq a\} \in \mathscr{A}$.

b) D'après a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sup_{k \geq n} f_k$ est mesurable, donc la fonction $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$ est mesurable. De même pour $\liminf_n f_n$.

c) Si $f_n \to f$, alors $f = \limsup_n f_n$, qui est mesurable d'après b). □

5.3 Applications boréliennes entre espaces topologiques

Définition 5.10 (terminologie) *Soit E_1 et E_2 des espaces topologiques, $\mathscr{A}_i := \mathscr{B}or(E_i), i = 1, 2$. Les éléments de $\mathscr{F}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ sont appelés* fonctions boréliennes.

Proposition 5.11 *Soit $f : (E_1, \mathscr{A}_1) \to (E_2, \mathscr{A}_2)$. Si E_2 est topologique et $\mathscr{A}_2 = \mathscr{B}or(E_2)$, alors f est mesurable ssi pour tout ouvert O de E_2, $f^{-1}(O) \in \mathscr{A}_1$.*

3. autrement dit : $\forall x \in E, f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$

Dém. Par le lemme de transport : $f^{-1}(\sigma(\mathscr{O}(E_2))) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{O}(E_2)))$. Or f est mesurable ssi $f^{-1}(\mathscr{B}(E_2)) \subseteq \mathscr{A}_1$, donc ssi $\sigma(f^{-1}(\mathscr{O}(E_2))) \subseteq \mathscr{A}_1$, c'est-à-dire ssi $f^{-1}(\mathscr{O}(E_2)) \subseteq \mathscr{A}_1$. □

Corollaire 5.12 *Si E_1 et E_2 sont topologiques, alors toute fonction continue est borélienne.*

Proposition 5.13 *Soit*

$$\begin{aligned} f : (E, \mathscr{A}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)) \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

Alors f est mesurable ssi $f_i \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $i = 1, 2$.

Remarque 5.14 *Si $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$, une fonction complexe f est mesurable ssi $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.*

Dém. Sens $\Rightarrow$: pour tout $i = 1, 2$, la projection canonique $\pi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue par définition de la topologie produit, donc borélienne, ainsi $f_i = \pi_i \circ f$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.

Sens $\Leftarrow$: on sait que $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^2)$ est engendrée (par exemple) par les rectangles ouverts. Donc par le lemme de transport, f est mesurable ssi pour tous intervalles ouverts U et V, $f^{-1}(U \times V) \in \mathscr{A}$. Or $f^{-1}(U \times V) = \{f_1 \in U\} \cap \{f_2 \in V\}$. Mais par hypothèse $\{f_1 \in U\} \in \mathscr{A}$ et $\{f_2 \in V\} \in \mathscr{A}$, donc leur intersection est aussi dans $\mathscr{A}$. □

Applications. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + g$, fg, $f \wedge g$, $f \vee g$, f^+, f^-, $|f|$, $|f|^p$, etc sont mesurables. Il suffit pour le voir d'utiliser la continuité des applications qui à (x, y) associent $\lambda x + y$, xy, $x \wedge y$, etc ainsi que le fait que la composée de deux applications mesurables est mesurable.

5.4 Fonctions étagées, en escalier

Définition 5.15 *Une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}or(\mathbb{R}))$ est dite* étagée *si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Autrement dit il existe une partition* finie *$(A_i, i \in I)$ de E, $\mathscr{A}$-mesurable*[4]*, et des nombres réels $(\alpha_i, i \in I)$ tels que $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$.*

Notation 5.16 *On note $\mathscr{E}(\mathscr{A})$ l'ensemble des fonctions étagées :* $(E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Remarque 5.17 *Il existe une représentation canonique de f sous la forme $\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les α_i sont deux à deux distincts et $A_i = \{f = \alpha_i\}$. On notera qu'une fonction indicatrice est bien sûr étagée car $\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{^cA}$.*

Proposition 5.18 *Pour toutes fonctions étagées f, g et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + g$, fg, $f \wedge g$ et $f \vee g$*[5] *sont étagées.*

4. au sens où $A_i \in \mathscr{A}$ pour tout $i \in I$
5. $a \wedge b$ est une notation alternative pour $\min(a, b)$, et $a \vee b$ pour $\max(a, b)$

Dém. On écrit f et g sous la forme $f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j\in J} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$. Alors $(A_i \cap B_j; (i,j) \in I \times J)$ est une partition finie de E et on peut écrire $\lambda f + g = \sum_{(i,j)\in I\times J} (\lambda\alpha_i + \beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$, $fg = \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_i\beta_j \mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$, etc. □

Théorème 5.19 (lemme fondamental d'approximation) *Pour toute $f \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, il existe une suite (f_n) de fonctions étagées convergeant simplement vers f. De plus,*

a) si f est positive*, on peut choisir la suite (f_n) positive et croissante*[6] *;*

b) si f est bornée*, on peut choisir (f_n) de sorte que la convergence soit* uniforme[7].

Dém. Commençons par le cas où f est positive. On définit alors

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\{(k-1)2^{-n} < f \le k2^{-n}\}} + n\mathbb{1}_{\{f>n\}}.$$

Alors pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est bien (positive et) croissante et converge vers $f(x)$, en effet : si $f(x) = +\infty$, alors $f_n(x) = n \to \infty$; sinon il existe n_0 tel que $f(x) < n_0$, ce qui implique que pour tout $n \ge n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \le 2^{-n} \to 0$.

Si f est bornée et positive, alors il existe n_0 tel que pour tout $x \in E$, $f(x) < n_0$, donc pour tout $x \in E$, pour tout $n \ge n_0$, $|f_n(x) - f(x)| \le 2^{-n} \to 0$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers f.

Si f est de signe quelconque, on écrit f sous la forme $f = f^+ - f^-$, où

$$f^+ := f\mathbb{1}_{\{f>0\}} \qquad \text{et} \qquad f^- := -f\mathbb{1}_{\{f<0\}}.$$

La somme $f^+ - f^-$ n'est jamais indéterminée, car pour tout $x \in E$, au moins un des deux termes $f^+(x)$ ou $f^-(x)$ est nul. On notera également que f^+ (et f^-, par un même raisonnement) est mesurable car pour tout $a \ge 0$, $\{f^+ \ge a\} = \{f \ge a\}$ et pour tout $a < 0$, $\{f^+ \ge a\} = E$. À présent, comme f^+ et f^- sont positives, il existe deux suites croissantes (u_n) et (v_n) de fonctions étagées positives convergeant resp. vers f^+ et f^-. De plus, si l'on utilise la construction de ces suites proposée plus haut, on a $u_n v_n = 0$, de sorte que l'on peut toujours définir $f_n := u_n - v_n$, qui définit une suite de fonctions étagées convergeant vers $f^+ - f^- = f$.

Si f est de signe quelconque mais bornée, f^+ et f^- sont bornées, donc on peut choisir les suites (u_n) et (v_n) pour que les convergences vers f^+ et f^- soient toutes deux uniformes. Alors la suite $(u_n - v_n)$ converge uniformément vers f. □

Définition 5.20 *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une* subdivision finie *$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.*

Remarque 5.21 *Les valeurs prises exactement en chaque point $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont sans importance.*

---

6. autrement dit : $\forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ – rien à voir avec des fonctions croissantes, ce qui n'aurait d'ailleurs pas de sens ici.

7. autrement dit : $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$

Remarque 5.22 *Une fonction en escalier a toujours pour espace de départ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, ce qui en fait un objet beaucoup moins général qu'une fonction étagée. D'ailleurs, une fonction en escalier est toujours un cas particulier de fonction étagée, au sens où elle est un élément de $\mathscr{E}(\mathscr{B}or([a,b]))$, car elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs et elle est mesurable, en effet : les parties de $[a,b]$ sur lesquelles f est constante sont des intervalles (les singletons sont bien sûr des intervalles) ou des réunions d'intervalles, donc des boréliens, donc l'image réciproque de toute partie de $\mathbb{R}$ est toujours un borélien de $[a,b]$.*

Le contre-exemple classique de la réciproque est $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, qui est étagée mais n'est en escalier sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point).

Remarque 5.23 *L'intégrale de Riemann est définie par approximation à partir de l'intégrale des fonctions en escalier, tandis que celle que nous étudions dans ce cours (parfois dite de Lebesgue) est construite à partir des fonctions étagées. Dans le premier cas, on approche l'intégrale d'une fonction quelconque par celle d'une fonction en escalier, c'est-à-dire en découpant l'espace de départ (un intervalle) en petits morceaux (les subdivisions), tandis que dans le second cas, c'est l'espace d'arrivée (qui est toujours $\mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$) qui est découpé. Cette différence est fondamentale car la première approche ne peut se généraliser facilement à des fonctions ayant un autre espace de départ que $\mathbb{R}$. Mais surtout les espaces de fonctions mesurables (celles qui admettront une intégrale au sens de Lebesgue) sont beaucoup plus grands que celui des fonctions Riemann-intégrables et ils sont stables sous l'action de multiples opérations comme le passage à la limite. Enfin, nous allons définir dans ce cours l'intégrale par rapport à une mesure quelconque, et pas seulement l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue (celle qui a ceci de commun avec l'intégrale de Riemann qu'elle donne un sens mathématique à la notion physique de volume).*