Matte R2

Mats Bjønnes

Skoleåret 2022/2023

Innhold

Kapittel 1

Følger og rekker

1.1 Rekursive Sammenhenger

Følger

Regel 1.1: Tallfølge:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ er en *endelig* følge med n ledd.
$a_1, a_2, a_3, \ldots$ er en *uendelig* følge.

Eksempel 1.1: Mønster i følger:

Mønster for fibonacci:
- Hvert ledd er summen av de to foregående

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad a_1 = a_2 = 1$$

Mønster i partallsfølgen:
2, 4, 6, 8, ...

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad , \quad a_1 = 2$$

Oppgave 1.1

Finn en rekursiv sammenheng for følgen.

a) $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$

b) $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$

c) $5, 11, 20, 32, 47, \ldots$

Besvarelse 1.1

a) $a_{n+1} = -2a_n \quad , \quad a_1 = 1$

b)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 = a_1 + 2 = a_1 + 2^1 \\ a_3 &= 4 = a_2 + 4 = a_2 + 2^2 \\ a_4 &= 8 = a_3 + 8 = a_3 + 2^3 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = a_n + 2^n \quad , \quad a_1 = 1$$

c)

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 11 = a_1 + 6 = a_1 + 2 \cdot 3 \\ a_3 &= 20 = a_2 + 9 = a_2 + 3 \cdot 3 \\ a_4 &= 32 = a_3 + 12 = a_3 + 4 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = a_n + 3(n+1) \quad , \quad a_1 = 5$$

Regel 1.2: Eksplisitt formel

Et ledd i følgen uttrykkes ved nummeret i følgen.
Eks:
Partallene: $a_n = 2n$
Kvadrattallene: $a_n = n^2$

Rekker

NB: Tallrekker vs. tallfølger

$1, 2, 3, \ldots$ tallfølgen med naturlige tall
$1 + 2 + 3 + \ldots$ tallrekken med naturlige tall

Tallrekken til de naturlige tallene:

$$\begin{aligned} a_n &= n \\ S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + 2 = 3 \\ S_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\ S_n &= Trekanttall_n \\ S_n &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ S_n &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &\sum_{n=1}^{7} n \end{aligned}$$

Eksempel 1.2: Rekker

En rekker er gitt ved $a_n = 2n + 3$
Hva er ledd nr.20?

$$a_{20} = 2 \cdot 20 + 3 = 43$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i + 3)$$

$$S_{20} = \sum_{n=1}^{20} (2n + 3) = 480$$

Oppgave 1.13

Ledda i ei rekkje er gitte ved formelen $a_n = 3n - 1$.

a) Skriv opp dei seks første ledda i rekkja.

b) Finn S_2 og S_6

Besvarelse 1.13

a)

$$a_{1,6} = 2, 5, 8, 11, 14, 17$$

b)

$$\sum_{n=1}^{2}(3n-1) = 7$$

$$\sum_{n=1}^{6}(3n-1) = 57$$

Oppgave 1.14

Ta for deg rekkja $1 + 7 + 19 + 37 + 61 + \ldots$.

Besvarelse 1.14

a)

$$S_{1,5} = 1, 8, 27, 64, 125$$

b)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Oppgave 1.15

Skriv opp ledda og rekn ut summan utan hjelpemiddel. Kontroller med CAS.

Besvarelse 1.15

a)

$$\begin{aligned} S_5 &= (1+3) + (2+3) + (3+3) \\ &\quad + (4+3) + (5+3) \\ \\ &= 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \\ S_5 &= 30 \end{aligned}$$

b)

$$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}$$

$$\begin{aligned} &= 0.25 + 0.5 + 0.75 + 1 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \frac{4}{1} + \frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4} \\
&= 4 + 2 + 1.33 + 1 \\
&= \frac{25}{3} \approx 8.33
\end{aligned}
$$

```python
from manim import *


class SquareToCircle(Scene):
    def construct(self):
        circle = Circle()
        square = Square()
        square.flip(RIGHT)
        square.rotate(-3 * TAU / 8)
        circle.set_fill(PINK, opacity=0.5)

        self.play(Create(square))
        self.play(Transform(square, circle))
        self.play(FadeOut(square))
```

1.2 Bevis

Direkte Bevis

Regel 1.3: Direkte bevis

Vi har to påstander p og q, og beviser at hvis p er sann, så er også q sann

$$p \Rightarrow q$$

Eksempel 1.3: Bevis av partallene

Bevis at hvis n er et partall, så er også n^2 et partall.

$p : n$ er et partall
$q : n^2$ er et partall

Alle partallene kan skrives på formen

$$n = 2k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 = 2s \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Oppgave 1.28

Eit helt tal n kallar vi eit *oddetal* dersom det finst $k \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2k + 1$. Bruk definisjonen til å bevise at dersom n er eit oddetal, så er n^2 eit oddetal. Kva er den berande ideen i beviset ditt?

Besvarelse 1.28

$$n = 2k + 1 \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$
$$n^2 = 2S - 1 \quad , \quad \in \mathbb{Z}$$

Induksjonsbevis

Induksjonsgrunnlag: Viser at påstanden $P(n)$ gjelder for én bestemt verdi av n, f.eks at $P(1)$ gjelder.

Induksjonstrinn: Viser $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ Vi ser at hvis påstanden gjelder for en verdi av n, så gjelder den også for den neste.

Eksempel 1.4: Bevis ved induksjon

Bevis ved induksjon at summen av de n første oddetallenen er det n'te kvadrattallet.

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = k^2$$

Induksjonsgrunnlaget:

$$P(1) : 1 = 1^2$$

Induksjonstrinnet: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$P(k) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = k^2$$

$$P(k+1) : \sum_{k=1}^{n}(2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

$$\begin{aligned} P(k) : \sum_{k=1}^{n}((2k-1) + (2(k+1)-1)) &= k^2 + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

$Q.E.D.$

Eksempel 1.5: Bevis ved induksjon 2

Bevis ved induksjon at:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Induksjonsgrunnlaget:

$$P(1) : 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$
$$1 = 1$$

Induksjonstrinnet: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$P(k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$P(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} P(k) : \sum_{k=1}^{n}((k^3) + (k+1)^3) \quad &= \quad \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \quad \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ &= \quad \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} \\ &= \quad \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \quad \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \Rightarrow P(k+1) \end{aligned}$$

$$Q.E.D.$$

Oppgave 1.29

Bruk induksjon til å bevise at utsegna

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} 2n = n(n+1)$$

er sann for alle naturlege tal n.

Besvarelse 1.29

Induksjonsgrunnlaget:

$$P(1) : 2 \cdot 1 = 1(1+1)$$

$$2 = 2$$

Induksjonstrinnet: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$P(k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$P(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
P(k) : \sum_{k=1}^{n}((k^3) + (k+1)^3) &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \Rightarrow P(k+1) \\
&Q.E.D.
\end{aligned}$$

Eksempel 1.6: Induksjonsbevis for rekker

Antakelse:

$$P(k) : a_k = k(k-4)$$

Vil vise:

$$P(k+1) : a_{k+1} = (k+1)(k-3)$$

Induksjonsgrunnlaget:

$$P(1) : a_1 = 1(1-4)$$

$$-3 = -3$$

Induksjonstrinnet:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + 2k - 3 \\
&= k(k-4) + 2k - 3 \\
&= k^2 - 4k + 2k - 3 \\
&= (k+1)(k-3) \\
&Q.E.D.
\end{aligned}$$

Oppgave 1.30

Ei følje $\{a_n\}$ er gitt ved at $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = 2a_n + 1$ for $n \geq 1$.

Besvarelse 1.30

Antakelse:

$$P(k) : a_k = \frac{3}{2} \cdot 2^k - 1$$

$$P(k+1) : a_{k+1} = \frac{3}{2} \cdot 2^{k+1} - 1$$

Bevis:

$$P(1) : a_1 = \frac{3}{2} \cdot 2^1 - 1 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$P(1) : 2 = 2$$

$$\begin{aligned} P(k+1) : a_{k+1} &= 2a_n + 1 \\ &= 2(\frac{3}{2} \cdot 2^k - 1) + 1 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2^k \cdot 2 - 1 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2^{k+1} - 1 \\ Q.E.D. \end{aligned}$$

Oppgave 1.34

Bruk induksjon til å bevise at utsegna er sann for alle naturlege tal n.

Besvarelse 1.34

Påstand:

$$P(k) = \sum_{k=1}^{n} (4k - 1) = k(2k + 1)$$

Induksjonsgrunnlaget:

$$P(1) : 4 - 1 = 1(2 + 1)$$

$$3 = 3$$

Induksjonstrinnet: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$P(k) = \sum_{k=1}^{n} (4k - 1) = k(2k + 1)$$

$$P(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (4k + 3) = (k + 1) \cdot (2(k + 1) + 1)$$

$$P(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (4k + 3) = (k + 1) \cdot (2k + 3)$$

$$P(k) = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) + (4k+3) = k(2k+1) + (4k+3)$$

$$\begin{aligned}
P(k) : \sum_{k=1}^{n}(4k-1) + (4k+3) &= k(2k+1) + (4k+3) \\
&= (k+1)\cdot(2k+3) \\
&= 2k^2 + 2k + 3k + 3 \\
&= 2k(k+1) + 3(k+1) \\
&= (k+1)\cdot 2k + 3(k+1) \\
&= (k+1)\cdot(2k+3) \Rightarrow P(k+1) \\
&Q.E.D.
\end{aligned}$$

Oppgave 1.35

Bevis at

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

for alle $k \in \mathbb{N}$.

Besvarelse 1.35

Induksjonsgrunnlaget:

$$P(1) : 1^2 = \frac{1(1+1)(3+1)}{6}$$

$$P(1) : 1^2 = \frac{6}{6}$$

$$1 = 1$$

Induksjonstrinnet: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$P(k) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$P(k+1) : \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$P(k) : \sum_{k=1}^{n} k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$
\begin{aligned}
P(k) : \sum_{k=1}^{n} k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + (6(k+1)^2)}{6} \\
&= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \Rightarrow P(k+1) \\
& Q.E.D.
\end{aligned}
$$

NB: Kryssmultiplikasjon

Situasjon 1:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Situasjon 2:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Oppgave 1.36

Bevis at

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

for alle naturlige tall k.

Besvarelse 1.36

Induksjonsgrunnlaget:

$$P(1) : \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

$$P(1) : \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$$

$$P(1) : \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Induksjonstrinnet: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$P(k) : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

$$P(k+1) : \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$$

$$P(k) : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$\begin{aligned}
P(k) : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2 \cdot (k+2)}{2 \cdot (2^k)} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2(k+2)}{2^{k+1}} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2 - \left(\frac{2(k+2)}{2^{k+1}} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \right) \\
&= 2 - \frac{2(k+2) - (k+1)}{2^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2k+4-k-1}{2^{k+1}} \\
&= \frac{k+3}{2^{k+1}} \Rightarrow P(k+1) \\
&Q.E.D.
\end{aligned}$$

Oppgave 1.37

En følge $\{a_n\}$ er gitt ved at $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = 2a_n + 1$ for $n \geq 1$

Besvarelse 1.37

Antakelse:

$$P(k) : a_k = 2^n - 1$$

Vil vise:

$$P(k+1) : a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

Induksjonsgrunnlaget:

$$P(1) : a_1 = 2^1 - 1$$
$$1 = 1$$

Induksjonstrinnet:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_k + 1 \\
&= 2(2^k - 1) + 1 \\
&= 2^{k+1} - 1 \Rightarrow P(k+1) \\
&Q.E.D.
\end{aligned}$$

1.3 Endelige aritmetiske og geometriske rekker

1.4 Flere rekker

1.5 Praktiske anvendelser av rekker

Kapittel 2

Integrasjon

Kapittel 3

Trigonometri

Kapittel 4

Modeller

Kapittel 5

Romgeometri