

Matte R2

Mats Bjønnes

Skoleåret 2022/2023

Innhold

1	Følger og rekker	2
1.1	Rekursive Sammenhenger	2
1.2	Bevis	6
1.3	Endelige aritmetiske og geometriske rekker	6
1.4	Flere rekker	6
1.5	Praktiske anvendelser av rekker	6
2	Integrasjon	7
3	Trigonometri	8
4	Modeller	9
5	Romgeometri	10

Kapittel 1

Følger og rekker

1.1 Rekursive Sammenhenger

Følger

Regel 1.1: Tallfølge:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ er en *endelig* følge med n ledd.
 a_1, a_2, a_3, \dots er en *uendelig* følge.

Eksempel 1.1: Mønster i følger:

Mønster for fibonacci:

- Hvert ledd er summen av de to foregående

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad a_1 = a_2 = 1$$

Mønster i partallsfølgen:

2, 4, 6, 8, ...

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad , \quad a_1 = 2$$

Oppgave 1.1

Finn en rekursiv sammenheng for følgen.

- a) 1, -2, 4, -8, 16, ...
- b) 1, 3, 7, 15, 31, ...
- c) 5, 11, 20, 32, 47, ...

Besvarelse 1.1

a) $a_{n+1} = -2a_n$, $a_1 = 1$

b)

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 = a_1 + 2 = a_1 + 2^1$$

$$a_3 = 4 = a_2 + 4 = a_2 + 2^2$$

$$a_4 = 8 = a_3 + 8 = a_3 + 2^3$$

$$a_{n+1} = a_n + 2^n \quad , \quad a_1 = 1$$

c)

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 11 = a_1 + 6 = a_1 + 2 \cdot 3$$

$$a_3 = 20 = a_2 + 9 = a_2 + 3 \cdot 3$$

$$a_4 = 32 = a_3 + 12 = a_3 + 4 \cdot 3$$

$$a_{n+1} = a_n + 3(n+1) \quad , \quad a_1 = 5$$

Regel 1.2: Eksplisitt formel

Et ledd i følgen uttrykkes ved nummeret i følgen.

Eks:

Partallene: $a_n = 2n$

Kvadrattallene: $a_n = n^2$

Rekker

NB: Tallrekker vs. tallfølger

1, 2, 3, ... tallfølgen med naturlige tall

1 + 2 + 3 + ... tallrekken med naturlige tall

Tallrekken til de naturlige tallene:

$$\begin{aligned} a_n &= n \\ S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + 2 = 3 \\ S_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\ S_n &= \text{Trekanttall}_n \\ S_n &= \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \\ S_n &= \frac{n^2 + n}{2} \\ \sum_{n=1}^7 n \end{aligned}$$

Eksempel 1.2: Rekker

En rekke er gitt ved $a_n = 2n + 3$
Hva er ledd nr.20?

$$a_{20} = 2 \cdot 20 + 3 = 43$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n (2i + 3)$$

$$S_{20} = \sum_{n=1}^{20} (2n + 3) = 480$$

Oppgave 1.13

Ledda i ei rekkje er gitte ved formelen $a_n = 3n - 1$.

- a) Skriv opp dei seks første ledda i rekkja. b) Finn S_2 og S_6

Besvarelse 1.13

a)

$$a_{1,6} = 2, 5, 8, 11, 14, 17$$

b)

$$\sum_{n=1}^2 (3n - 1) = 7$$

$$\sum_{n=1}^6 (3n - 1) = 57$$

Oppgave 1.14

Ta for deg rekkja $1 + 7 + 19 + 37 + 61 + \dots$

Besvarelse 1.14

a)

$$S_{1,5} = 1, 8, 27, 64, 125$$

b)

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^3$$

Oppgave 1.15

Skriv opp ledda og rekn ut summan utan hjelpemiddel. Kontroller med CAS.

Besvarelse 1.15

a)

$$\begin{aligned} S_5 &= (1 + 3) + (2 + 3) + (3 + 3) \\ &\quad + (4 + 3) + (5 + 3) \\ &= 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \\ S_5 &= 30 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} \\ &= 0.25 + 0.5 + 0.75 + 1 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{4}{1} + \frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4} \\ &= 4 + 2 + 1.33 + 1 \\ &= \frac{25}{3} \approx 8.33 \end{aligned}$$

```
1 from manim import *
2
3
4 class SquareToCircle(Scene):
5     def construct(self):
6         circle = Circle()
7         square = Square()
8         square.flip(RIGHT)
9         square.rotate(-3 * TAU / 8)
10        circle.set_fill(PINK, opacity=0.5)
11
12        self.play(Create(square))
13        self.play(Transform(square, circle))
14        self.play(FadeOut(square))
```

1.2 Bevis

1.3 Endelige aritmetiske og geometriske rekker

1.4 Flere rekker

1.5 Praktiske anvendelser av rekker

Kapittel 2

Integrasjon

Kapittel 3

Trigonometri

Kapittel 4

Modeller

Kapittel 5

Romgeometri