Matte R1

Mats Bjønnes

Skoleåret 2021/2022

Innhold

1 Potenser og Logaritmer **3**

1.1 n-terøtter og potenser 3

1.1.1 n-terøtter 3

1.2 Logaritmer 3

1.3 Logaritmesetningene 3

1.4 Logaritme- og eksponentiallikninger 3

1.5 Generelle logaritmer 3

2 Grenseverdier og Kontinuitet **4**

2.1 Funksjoner med delt forskrift 4

2.2 Grenseverdier 4

2.3 Kontinuitet 4

2.4 Asymptoter 4

3 Derivasjon **5**

3.1 Funksjonsuttrykket til den deriverte 5

3.2 Noen derivasjonsregler 5

3.3 Den algebraiske definisjonen av den deriverte 5

3.4 Deriverbarhet 5

3.5 Numerisk derivasjon 5

3.6 Kjerneregelen 5

3.7 Produktregelen og brøkregelen 5

4 Bruk av derivasjon **6**

4.1 Størst og minst verdi 6

4.2 Størst og minst vekst 6

4.3 Tangenter 6

4.4 Newtons metode 6

4.5 L´Hôpitals regel 6

5 Omvendte Funksjoner **7**

5.1 Hva er omvendte funksjoner? 7

5.2 Å finne den omvendte funksjonen 7

5.3 Den deriverte av omvendte funksjoner 7

6 Vektorer **8**
6.1 Hva er en vektor? 8
6.2 Sum og differanse 8
6.3 Parallelle vektorer 8
6.4 Skalarprodukt 8
6.4.1 Vinkler 8
6.5 Geometriske resultater 8

7 Anvendelser og Modeller **10**
7.1 Parameterframstilling for linjer 10
7.2 Parameterframstilling for kurver 10
7.3 Vekst og modeller 10
7.4 Reelle datasett 10
7.5 Oppgaver 10

Kapittel 1

Potenser og Logaritmer

1.1 n-terøtter og potenser

1.1.1 n-terøtter

1.2 Logaritmer

1.3 Logaritmesetningene

1.4 Logaritme- og eksponentiallikninger

1.5 Generelle logaritmer

Kapittel 2

Grenseverdier og Kontinuitet

2.1 Funksjoner med delt forskrift

2.2 Grenseverdier

2.3 Kontinuitet

2.4 Asymptoter

Kapittel 3

Derivasjon

3.1 Funksjonsuttrykket til den deriverte

3.2 Noen derivasjonsregler

3.3 Den algebraiske definisjonen av den deriverte

3.4 Deriverbarhet

3.5 Numerisk derivasjon

3.6 Kjerneregelen

3.7 Produktregelen og brøkregelen

Kapittel 4

Bruk av derivasjon

4.1 Størst og minst verdi

4.2 Størst og minst vekst

4.3 Tangenter

4.4 Newtons metode

4.5 L´Hôpitals regel

Kapittel 5

Omvendte Funksjoner

5.1 Hva er omvendte funksjoner?

5.2 Å finne den omvendte funksjonen

5.3 Den deriverte av omvendte funksjoner

Kapittel 6

Vektorer

6.1 Hva er en vektor?

6.2 Sum og differanse

6.3 Parallelle vektorer

6.4 Skalarprodukt

6.4.1 Vinkler

Skalarproduktet gir oss vinkler. Gitt to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er skalarproduktet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(\vec{u}, \vec{v}) \tag{Geometrisk Formel}$$

6.5 Geometriske resultater

Regel 6.1: Å finne senter på et linjestykke:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Regel 6.2: Likningen til en sirkel:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_2)^2 = r^2$$

Eksempel 6.1: Sirkel med kjent radius og kjent sentrum

$S(1, 2)$
$r = 5$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Se om punktet $(3, 4)$ ligger på sirkelperiferien:

$$2^2 + 2^2 = 25$$

Da 8 *ikke* er lik 25 kan vi fastslå at punktet ikke er en del av sirkelen.

Kapittel 7

Anvendelser og Modeller

7.1 Parameterframstilling for linjer

7.2 Parameterframstilling for kurver

7.3 Vekst og modeller

7.4 Reelle datasett

7.5 Oppgaver

Exercise 1

En linje n er gitt ved parameterframstillingen

$$n : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$$

a) Les ut av parameterframstillingen

   1. Koordinatene til et punkt som linja går gjennom
   2. En retningsvektor for linja

b) Skriv opp koordinatene til ytterlige to

   1. Punkter som linja går gjennom
   2. Retningsvektorer for linja

Solution 1

a)

   1. $(3, 1)$
   2. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Exercise 2

Finn fartsvektoren og aksellerasjonsvektoren når posisjonsvektoren er

a) $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4t + 3 \end{bmatrix}$

b) $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} -5t \\ 2t^2 + 3 \end{bmatrix}$

c) $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \ln t \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

Solution 2

a) $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} -5 \\ 4t \end{bmatrix}$ $\quad \vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$ $\quad \vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Exercise 3

En partikkel beveger seg langs en kurve gitt ved $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix}$

Solution 3

a) -

b) $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad |\vec{v}(2)| = \sqrt{5}$

c) -

d) Fartsvektoren er alltid parallell med y-akse

Exercise 4

En partikkel følger grafen til en funksjon $\vec{r} = \begin{bmatrix} 5te^t \\ t^2 - 2t \end{bmatrix}$.

a) Finn fartsvektoren og aksellerasjonsvektoren.

b) Er fartsvektoren eller aksellerasjonsvektoren parallell med x-aksen eller y-aksen for noen verdier av t?

Solution 4

a) $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{bmatrix} 5e^t(1+t) \\ 2t-2 \end{bmatrix} \quad \vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = \begin{bmatrix} 5e^t(2+t) \\ 2 \end{bmatrix}$

b) Fartsvektoren:
$\vec{v}(t)$ || x-aksen når $y'(t) = 0 \quad t = 1$.
Partikkelens posisjon er da gitt ved $\vec{r}(1)$.
Banefarten til partikkelen er gitt ved $|\vec{v}(1)|$.
$\vec{v}(t)$ || y-aksen når $x'(t) = 0 \quad t = -1$.

Aksellerasjonsvektoren:
$\vec{a}(t)$ kan ikke bli parallell med x-aksen.
$\vec{a}(t)$ || y-aksen når $x''(t) = 0 \quad t = -2$.

Exercise 5

Posisjonene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ (målt i meter) til to partikler ved et tidspunkt t (målt i sekund) er gitt ved

$$\vec{r}_1(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 2 \\ -2t \end{bmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$\vec{r}_1(t) = \begin{bmatrix} 2t - 1 \\ 4t - 4t^2 \end{bmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2$$

a) Tegn grafene til $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ i samme koordinatsystem.

b) Bestem banefarten til hver av partiklene når $t = -1$.

c) Ved hvilke tidspunkt har de to partiklene samme fartsretning?

d) Hva er den minste avstanden mellom partiklene i løpet av de fire sekundene?

Solution 5

a) -

b) $|\vec{r}\,'_1(-1)| = \sqrt{5}$ $\qquad |\vec{r}\,'_2(-1)| = 2\sqrt{37}$

c)