

# E9 - Äquipotential- und Feldlinien

Julia Mariella Wiest

Gruppe A06

04.06.2025

---

*Mit der Abgabe dieses Protokolls wird bestätigt, dass es kein Plagiat ist. Falls es dennoch eindeutig als Plagiat erkannt werden sollte, ist bekannt, dass das einen Punktabzug von 20 Punkten zur Folge, ohne Möglichkeit der Nachbearbeitung, hat. Diese Bewertung wird ausnahmslos zur Gesamtnote im Anfängerpraktikum beitragen.*



# 1 Physikalische Grundlagen

Der nachstehende Versuch wurde mit dem Ziel durchgeführt, die Äquipotential- und Feldlinien unterschiedlicher Kondensatormodelle experimentell zu untersuchen.

Wenn eine elektrische Ladung  $Q$  auf eine andere Ladung  $q$  eine Kraft  $\vec{F}$  ausübt, kann diese Kraft über das Coulombsche Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r$$

beschrieben werden, wobei  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante ist,  $r$  den Abstand der beiden Ladungen voneinander angibt und  $\vec{e}_r$  den Einheitsvektor für jeden Raumpunkt  $r$  darstellt (Universität Augsburg SoSe 2025).

Die elektrische Feldstärke beziehungsweise das Vektorfeld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

gibt an, welche Kraft aufgrund der Ladung  $Q$  auf eine beliebige platzierte Ladung  $q$  wirkt (Demtröder 2017, S. 5).

Zudem ist die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

ein Maß für die Kraft, welche pro Ladung  $q$  wirkt (Universität Augsburg SoSe 2025).

Wird die beliebige Ladung  $q$  in einem Feld bewegt, so nimmt die räumliche Veränderung keinerlei Einfluss auf die Änderung der potentiellen Energie. Daraus lässt sich folgern, dass die elektrische Kraft, welche auf eine Ladung wirkt, konservativ ist. Um nun die Änderung der potentiellen Energie unabhängig von  $q$  angeben zu können, wird das Potential von  $Q$  mit

$$d\Phi = \frac{dE_{\text{pot}}}{q} = -\vec{E} d\vec{r}$$

eingeführt (Universität Augsburg SoSe 2025).

Die Betrachtung einer Potentialdifferenz zwischen zwei unterschiedlichen Orten  $r_1$  und  $r_2$  wird als elektrische Spannung

$$U = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

bezeichnet (Demtröder 2017, S. 9).

Werden zwei entgegengesetzt geladene Leiterflächen, also beispielsweise zwei Elektroden, an welche eine Spannung  $U$  angelegt wird, so angeordnet, dass sich eine Potentialdifferenz zwischen den Elektroden bildet, so nennt man dies einen Kondensator. Ein Kondensator ist in der Lage, Ladung zu speichern. Dabei ist die Größe der aufgenommenen Ladung  $Q$  des Kondensators proportional zur angelegten Potentialdifferenz  $U$  und kann über die Gleichung

$$Q = CU$$

angegeben werden. Die in der Formel auftretende Proportionalitätskonstante  $C$ , auch Kapazität genannt, ist von der Bauart und Materialzusammensetzung des Kondensators abhängig (Meschede 2010, S. 328), (Demtröder 2017, S. 18).

Über die sogenannten Maxwellgleichungen lassen sich elektrische und magnetische Felder beziehungsweise deren Wechselwirkungen mathematisch beschreiben.

Die Maxwellgleichungen in integraler und differentieller Form lauten:

Der Gaußsche Satz des elektrischen Feldes

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

beschreibt das Integral längs einer geschlossenen Fläche  $A$ , welche dem  $\frac{1}{\epsilon_0}$ -fachen der von der Fläche umschlossenen Volumen resultierenden Ladung entspricht. Das heißt, die elektrischen Feldlinien gehen von einer positiven Ladung aus und treffen am Ort der negativen Ladung wieder zusammen.

Der Gaußsche Satz des magnetischen Feldes

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

sagt aus, dass der magnetische Fluss durch jede beliebige geschlossene Fläche gleich null ist.

### Der Farady-Henry-Satz

$$\oint_K \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

bedeutet, dass das Integral des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  um eine geschlossene Kurve  $K$ , welche der induzierten Spannung entspricht, gleich der negativen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch ein beliebige von  $K$  umschlossene Fläche  $A$  entspricht. Das heißt, die elektrischen Feldlinien umgeben eine Fläche, welche von einem zeitlich veränderlichen magnetischen Fluss durchsetzt wird.

### Der Ampère-Maxwell-Satz

$$\oint_K \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} d\vec{A} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

mit der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$ , dem Strom  $I$  und der elektrischen Stromdichte  $\vec{J}$ , besagt, dass die Magnetfeldlinien, welche die Fläche  $A$  umgeben, durch elektrische Ströme, einschließlich des Verschiebungsstroms, zu einem magnetischen Wirbelfeld führen (Tipler und Mosca 2024, S. 936), (Universität Augsburg SoSe 2025).

Die Mathematik der Maxwell-Gleichungen kann über die Anwendung zweier Integralsätze deutlich vereinfacht werden:

Mithilfe des Gaußschen Satzes

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$$

lässt sich anhand der Divergenz eines elektrischen Feldes  $\vec{E}$  in einem Volumen  $V$  angeben, wie sich das Feld auf der Oberfläche  $A$  des Volumens  $V$  verhält (Nolting 2013, S. 27), (Universität Augsburg SoSe 2025).

Mit dem Stokesschen Satz

$$\oint_K \vec{E} d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A}$$

lässt sich die Rotation eines elektrischen Feldes  $\vec{E}$  in einer Fläche  $A$  darüber beschreiben, wie sich das Feld längs der Kurve  $K$ , welche die Fläche  $A$  umrandet, verhält (Nolting 2013, S. 30), (Universität Augsburg SoSe 2025).



## 2 Äquipotential- und Feldlinien

### 2.1 Versuchsaufbau und -durchführung

In drei verschiedenen Teilversuchen werden unterschiedliche zweidimensionale Kondensatormodelle untersucht. Hierfür steht eine Platte zur Verfügung, auf welcher ein elektrisch leitendes hochohmiges Kohlepapier angebracht ist. Das Kohlepapier weist ein Raster aus Kreuzen mit jeweils einem Zentimeter Abstand auf. Auf das Kohlepapier sind Elektroden unterschiedlicher Form aufgesetzt. Wie in Abbildung 2.1 zu sehen, handelt es sich dabei um zwei längliche Elektroden, welche parallel zueinander montiert sind, eine kurze Elektrode, welche senkrecht zu einer der längeren Elektroden verschraubt wurde, und einen Ring, in dessen Mittelpunkt eine weitere punktförmige Elektrode angebracht wurde. Die Elektroden selbst sind allesamt einen Zentimeter breit. Die länglichen Elektroden sind 14 cm lang, die kleinere 5 cm. Der Ring weist einen Innenradius von 10 cm auf und die punktförmige Elektrode einen Außenradius von 1 cm. Mithilfe von Krokodilklemmen wird nun eine Gleichspannung von  $U_0 = 10\text{ V}$  so an zwei Leiterteilen angelegt, dass der gewünschte zu untersuchende Kondensator im zweidimensionalen entsteht. Am Netzteil selbst kann die Strombegrenzung etwas aus der Nulllage herausgedreht werden, sodass exakt 10 V an einer Elektrode anliegen.

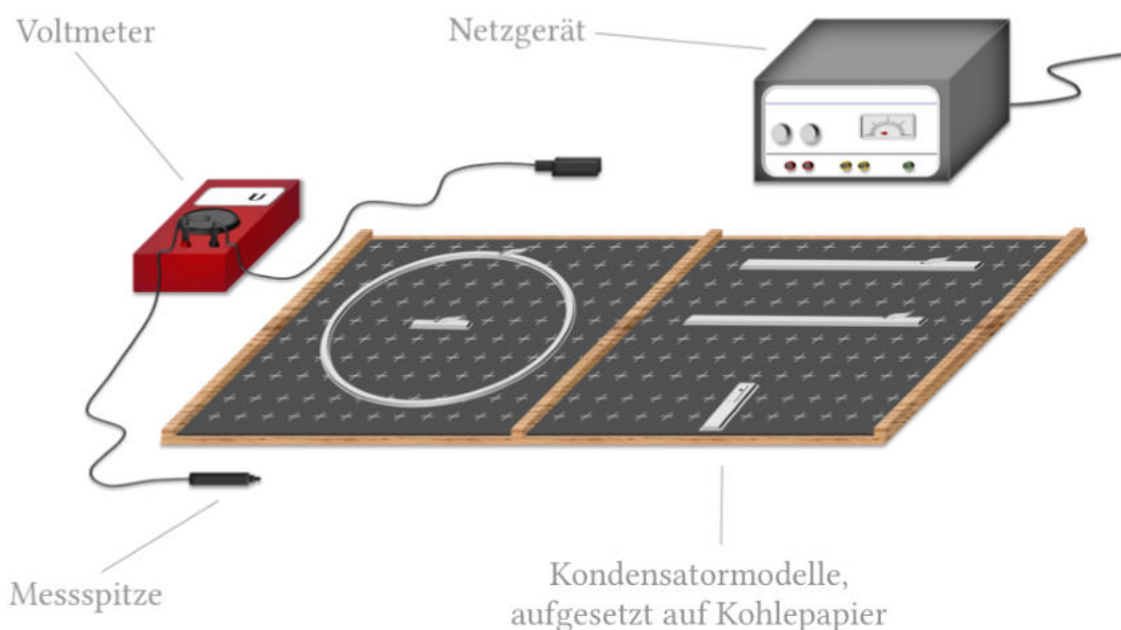


Abb. 2.1: Darstellung des Versuchsaufbaus (Universität Augsburg SoSe 2025).

Für den ersten Teilversuch werden die parallelen länglichen Elektroden so angeschlossen, dass an der oberen Elektrode eine Spannung von 0 V und an der unteren von 10 V vorherrscht. Mit der mit dem Multimeter verbundenen Messspitze kann nun das Raster des Kohlepapiers abgetastet werden, da der Taststift als Spannungsmessgerät dient und über das Multimeter parallel zum Stromkreis geschaltet ist. Somit entspricht die am Multimeter ausgegebene Spannung dem Potential des betrachteten Messpunktes in Bezug auf die mit Strom versorgte Elektrode. Ziel des Versuchs ist es, den Verlauf der Äquipotentiallinien des 2D-Modells des Plattenkondensators zu untersuchen. Dabei stellen Äquipotentiallinien den Pfad dar, an welchem die Spannung konstant ist. Hierfür wird mit dem Messstift rasterweise Zentimeter für Zentimeter die Spannung eines bestimmten Wertes gesucht. Für den Versuch werden die jeweiligen Äquipotentiallinien für 2 V, 4 V, 5 V, 6 V und 8 V aufgezeichnet. Anhand des abgedruckten Rasters auf dem Kohlpapier ergeben sich so pro Äquipotentiallinie 20 Punkte, welche auf das Milimeterpapier übernommen werden. Da das Raster auf dem Kohlestoffpapier nur Abstände von einem Zentimeter aufweist, werden die Markierungen beim Übertragen auf das Milimeterpapier so gut wie möglich abgeschätzt.

Im zweiten Teilversuch wird das 2D-Modell eines Zylinderkondensators betrachtet. Hierfür wird an die innere punktförmige Elektrode eine Spannung von 0 V und an den äußeren Kreisring eine Spannung von 10 V angelegt. Nun wird mithilfe des Messstiftes die radiale Potentialverteilung, aufgeteilt in 0° auf zwölf Uhr, 90° auf drei Uhr, 180° auf sechs Uhr und 270° auf neun Uhr des Kreises, bezogen auf die Innenelektrode, gemessen. Da der Zylinderkondensator radialsymmetrisch aufgebaut ist, ist zu erwarten, dass sich für jede Richtung dasselbe Feld ergibt. Zur Erhöhung der Messgenauigkeit werden allerdings vier Richtungen aufgenommen. Dabei wird jeweils die vorherrschende Spannung der zu untersuchenden Richtung für den Radius  $r$  von 0 cm bis 10 cm notiert.

Für den dritten Teilversuch werden abschließend die untere längliche Elektrode und die kurze Spitzelektrode an das Netzgerät angeschlossen. Dabei herrscht bei der länglichen Elektrode eine Spannung von 0 V und an der Spitzelektrode eine Spannung von 10 V vor. Wie bereits in Teilversuch 1 erläutert, werden auch hier gleichermaßen die Äquipotentiallinien für 2 V, 4 V, 5 V, 6 V und 8 V mit dem Messstift abgetastet und im Maßstab 1:1 auf das Milimeterpapier übertragen.

Bei jedem der drei Teilversuche ist es wichtig, dass Kohlepapier nur mit der Messspitze zu berühren, da das Berühren des Papiers mit (feuchten) Fingern das Messergebnis verzerren könnte beziehungsweise Feuchtigkeitstellen das Feld beeinflussen können. Während der Messung sollte die Messspitze zwischen den abzutastenden Punkten angehoben und neu aufgesetzt werden, um eine Beschädigung durch das über das Papier Fahren beziehungsweise Kratzen zu vermeiden. Gleichmaßen sollte die Spitze nicht zu fest auf das Papier aufgedrückt werden.

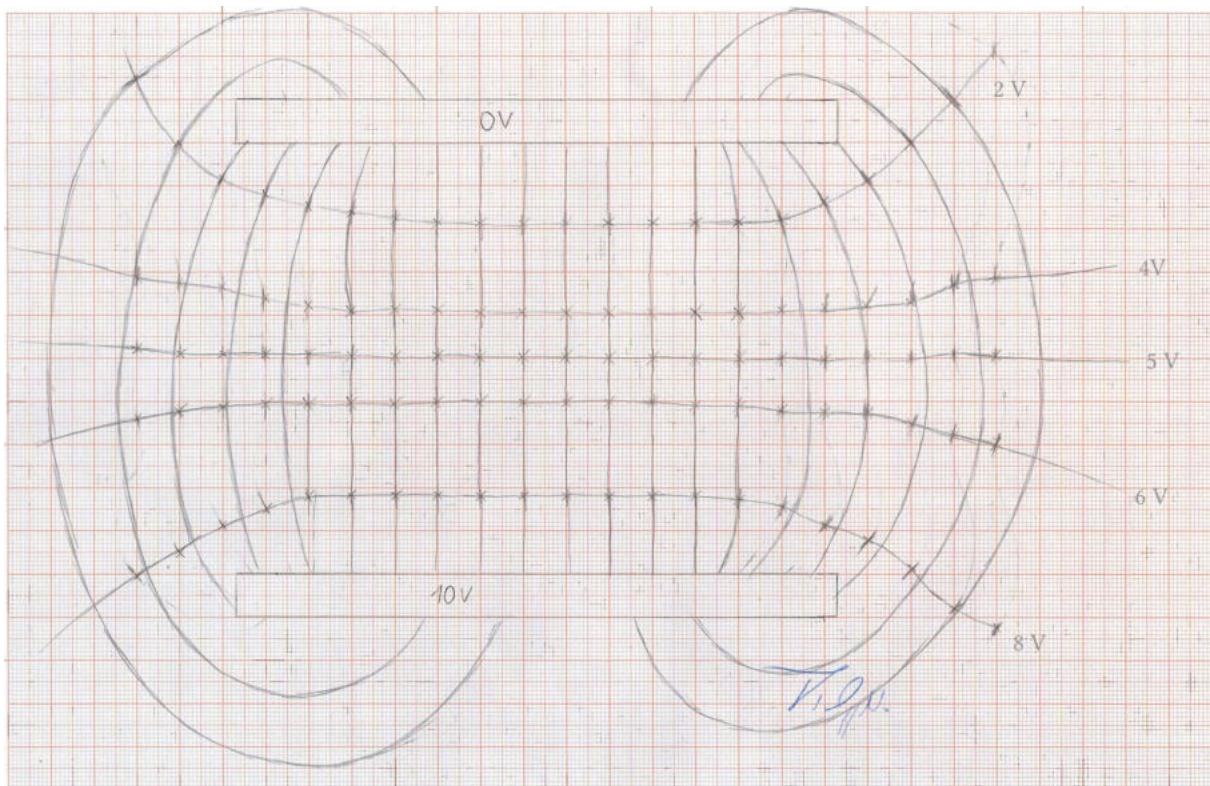


## 2.2 Auswertung der Messergebnisse

Auf Grundlage der im vorherigen Kapitel beschriebenen Versuchsdurchführung werden die damit erlangten Messergebnisse nun ausgewertet.

### Plattenkondensator

Die während des ersten Teilversuches angefertigte Skizze der abgetasteten Äquipotentiallinien wird nun durch das Vervollständigen der Äquipotentialpunkte zu einer Linie und durch das Einzeichnen der dazu senkrecht verlaufenden Feldlinien ergänzt. Die Äquipotentiallinien des Plattenkondensators verlaufen dabei horizontal zu den beiden Elektroden. Die Feldlinien hingegen verlaufen vertikal, wie in Abbildung 2.2 zu sehen.



**Abb. 2.2:** Experimentell bestimmte Äquipotential- und Feldlinien des Plattenkondensators.

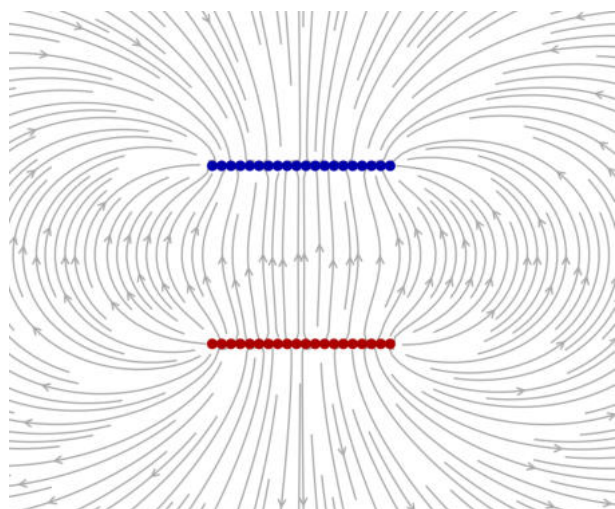
Anhand der Skizze lässt sich gut erkennen, dass die Feldlinien im Inneren des Plattenkondensators parallel zueinander verlaufen und den Erwartungen entsprechend ein homogenes Feld erzeugen. An den Rändern der beiden Platten verlaufen die Feldlinien zu den Elektroden hin gekrümmt, sodass im ersten und letzten Viertel beziehungsweise außerhalb des Plattenkondensators kein homogenes Feld mehr vorherrscht. In der Theorie wird zumeist ein unendlich ausgedehnter Plattenkondensator betrachtet, wodurch sich innerhalb des gesamten Kondensators ein homogenes Feld ausbreitet. Diese angenommene unendliche Ausdehnung lässt sich in der Realität nicht nachbilden, sodass die auftretenden Randeffekte dementsprechend in der Skizze zu erkennen sind.

Die Feldlinien wurden auf Grundlage der abgetasteten Äquipotentiallinien senkrecht dazu

ingezeichnet. Dabei fällt auf, dass die mittlere 5 V-Äquipotentiallinie, bis auf kleine Ausreißer an den Rändern, nahezu gerade verläuft. Dies entspricht auch den Erwartungen, da die mittige 5 V-Äquipotentiallinie der Hälfte der angelegten Spannung von  $U = 10\text{ V}$  an der unteren Platte entspricht und der Gesamtabstand der Platten voneinander 10 cm beträgt und sich demnach die 5 V-Äquipotentiallinie bei 5 cm ausprägt. Die 4 V- und die 6 V-Äquipotentiallinie liegen in der Mitte der Elektroden jeweils parallel einen Zentimeter über beziehungsweise unter der 5 V-Äquipotentiallinie. An den Rändern des Kondensators jedoch verlaufen die Äquipotentiallinien leicht gekrümmt zur jeweils näher liegenden Platte hin, sodass der Eindruck entsteht, als wäre beispielsweise die 4 V-Äquipotentiallinie an der 5 V-Äquipotentiallinie gespiegelt worden, um die 6 V-Äquipotentiallinie zu erhalten. Bei der Betrachtung der 2 V- und 8 V-Äquipotentiallinie fällt die Krümmung zur Elektrode hin deutlicher aus. Hierbei lassen sich an den Rändern auch deutliche größere Asymmetrien beobachten als bei den anderen Äquipotentiallinien. So liegen hier die gegenüberliegenden Messpunkte der Krümmung an den Rändern teilweise überhaupt nicht mehr im selben Kästchen oder weisen zunehmend Knicke auf.

Die eben genannten asymmetrischen Randeffekte und Knicke in der Skizze könnten dadurch zustande kommen, dass das bereitgestellte Versuchsobjekt in Labor bereits schon lange und viel von anderen Studierenden benutzt wurde. Dadurch weist das Kohlepapier bei genauerer Betrachtung bereits einige leichte Kratzer und Dellen auf, welche die Ergebnisse verfälschen könnten. Auch Verunreinigungen und Feuchtigkeit durch das eventuell versehentliche Anfassen des Kohlepapiers führen zu einer Verschiebung der Äquipotentiallinien, sodass systematische Fehler entstehen, da das Kohlepapier eigentlich an jeder Stelle denselben Widerstand besitzen sollte, dies durch die oben genannten Ursachen jedoch nur noch näherungsweise der Fall ist.

Weiterhin könnte beim Abtasten des Kohlepapiers die Messspitze nicht jedes Mal exakt orthogonal aufgesetzt worden sein, sodass eine Abweichung entsteht oder der aufgenommene Spannungswert nicht exakt übereinstimmt. Zudem sind die Rastermarkierungen nur in einem Abstand von einem Zentimeter angebracht, sodass beim Übertragen auf das Millimeterpapier abgeschätzt werden muss, wo genau sich der Äquipotentialpunkt befindet. Ebenfalls könnten die Elektroden der Kondensatormodelle nicht exakt hundertprozentig parallel ausgerichtet sein beziehungsweise führt die Befestigung der Elektroden durch Löcher und Schrauben zu Unstimmigkeiten im erzeugten elektrischen Feld.



**Abb. 2.3:** Computergenerierte optimale Feldlinien des Plattenkondensators (Hill 2021).

Ein Vergleich mit einem computergenerierten Bild, wie in Abbildung 2.3 zu sehen, ergibt, dass sich trotz der oben genannten Unstimmigkeiten das Verhalten des elektrischen Feldes für einen Plattenkondensator sachdienlich veranschaulichen lässt. Die Feldlinien ließen sich

gut senkrecht auf die Äquipotentiallinien aufdressieren, sodass die erwartete Krümmung zu den Platten hin zustande kommt. Gleichmaßen sind die Äquipotentiallinien innerhalb des Kondensators nahezu parallel und im zu erwarteten Abstand zueinander angeordnet.

Zur Darstellung des tatsächlichen Verlaufs der Feldlinien wurde eine Anleitung für ein Python-Skript aus dem Internetblog von Hill [2021](#) verwendet. Der auf der Webseite befindliche Code wurde so angepasst, dass die im Versuch untersuchten Kondensatoren mit den zugehörigen Feldlinien generiert werden konnten. Der verwendete Code ist im Detail dem Anhang 3 zu entnehmen.

## Zylinderkondensator

Im Folgenden soll die Potentialverteilung  $U(r)$  des im zweiten Teilversuch untersuchten Modell des Zylinderkondensators ermittelt werden. Die Äquipotentiallinien eines Zylinderkondensators verlaufen kreisförmig und parallel zu den Zylinderwänden. Zwischen dem inneren und äußeren Kreisring befinden sich zehn Zentimeter Abstand, sodass insgesamt pro aufgenommener Richtung jeweils zehn Werte aufgenommen wurden. Um ein genaueres Ergebnis zu erhalten, wurden vier Messungen in die Richtungen  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$  vorgenommen. Über die gemessenen Spannungen wird anschließend für jeden einzelnen Ring der Mittelwert

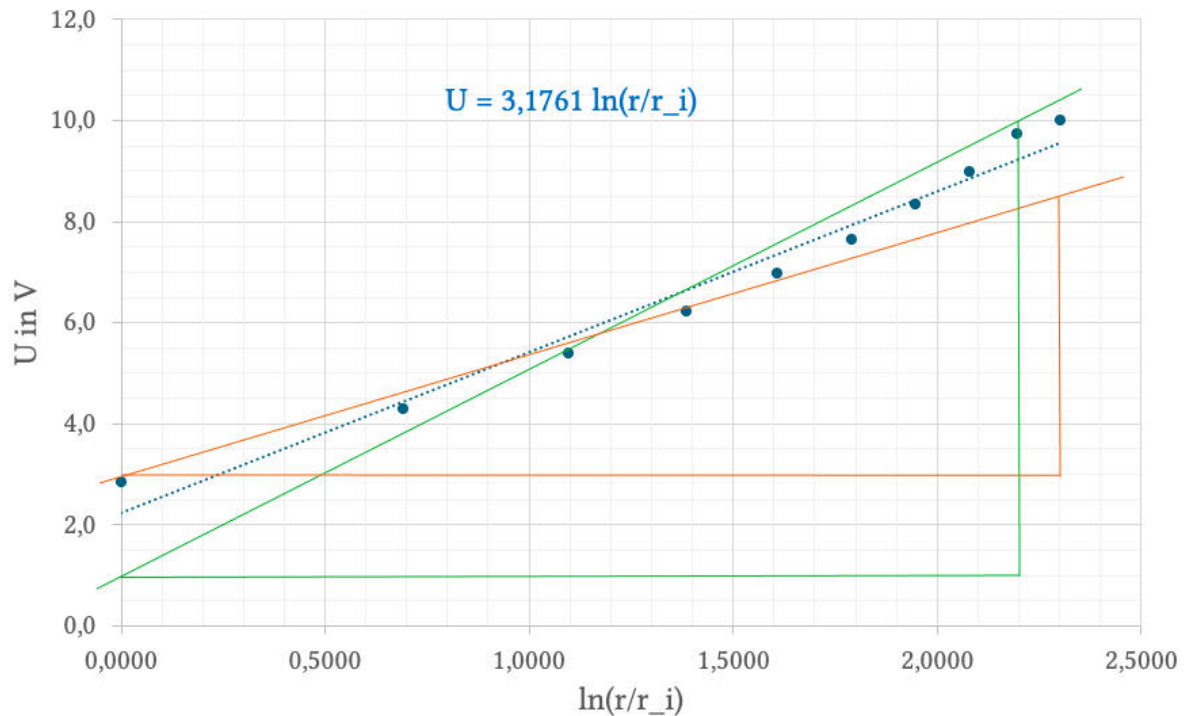
$$\bar{r} = \sum_{n=1}^4 U_n$$

gebildet. Die Messwerte und deren Mittelwert für den jeweiligen Radius sind in Tabelle 2.1 zu finden.

$r$ in cm	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$\bar{r}$	$\frac{\bar{r}}{r_i}$	$\ln\left(\frac{\bar{r}}{r_i}\right)$
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0000
1	2,8	3,0	2,6	3,0	2,9	1,0	0,0000
2	4,2	4,5	4,1	4,4	4,3	2,0	0,6931
3	5,4	5,6	5,1	5,5	5,4	3,0	1,0986
4	6,2	6,4	6,0	6,3	6,2	4,0	1,3863
5	7,0	7,1	6,8	7,0	7,0	5,0	1,6094
6	7,7	7,7	7,5	7,7	7,7	6,0	1,7918
7	8,5	8,3	8,2	8,3	8,3	7,0	1,9459
8	9,1	9,0	8,9	8,9	9,0	8,0	2,0794
9	9,9	9,7	9,6	9,7	9,7	9,0	2,1972
10	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	2,3026

**Tabelle 2.1:** Auswertung der Potentialwerte des Zylinderkondensators. Alle Tabellenwerte bis auf  $r$  sind in der Einheit V gegeben.

An der inneren Elektrode mit dem Radius  $r_i = 1 \text{ cm}$  liegt eine Spannung von  $U = 0 \text{ V}$  und an der äußeren Elektrode mit dem Radius  $r_a = 10 \text{ cm}$  eine Spannung von  $U_0 = 10 \text{ V}$  an. Die gemittelten Werte  $\bar{r}$  in V entsprechen dem aktuell betrachteten Radius. Werden nun die gemittelten Potentialwerte halblogarithmisch gegen das Verhältnis  $\frac{r}{r_i}$  aufgetragen, so lässt sich der Verlauf des Potentials  $U(r)$  in Abhängigkeit des Radius anhand der Steigung der Geraden ablesen. Die graphische Darstellung der Messwerte ist in Abbildung 2.4 zu finden.



**Abb. 2.4:** Auftragung der gemittelten Potentialwerte des Zylinderkondensators in halblogarithmischer Darstellung über  $\frac{r}{r_i}$ .

Die Geradengleichung  $y = mx + t$  lässt sich dabei folgendermaßen im physikalischen Sachzusammenhang umformen: Der y-Achsenabschnitt  $t$  kann über die an der punktförmigen inneren Elektrode anliegenden Spannung  $U = 0 \text{ V}$  ermittelt werden. Es gilt

$$0 \text{ V} = U(r_i) = m \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + t = m \cdot \ln(1) + t = t.$$

Daraus lässt sich folgern, dass  $t = 0$  gilt.

An der äußeren Elektrode liegt eine Spannung von  $U = 10 \text{ V}$  an, sodass sich folgende Gleichung aufstellen lässt:

$$U_0 = U(r_a) = m \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \Rightarrow m = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}.$$

Somit lässt sich insgesamt der Potentialverlauf  $U(r)$  des Zylinderkondensators mithilfe der Gleichung

$$U(r) = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

beschreiben.

Die Steigung der Ausgleichsgeraden aus der graphischen Auswertung in Abbildung 2.4 wurde von Excel ausgegeben und entspricht einem Potential von

$$m = 3,1761 \text{ V.}$$

Der Fehlerwert wird mithilfe von Grenzgeraden in Orange und Grün ermittelt. Die Steigung beider Grenzgeraden wird folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} \text{Orange: } m_{\min} &= \frac{y}{x} = \frac{8,5 \text{ V}}{2,3} = 3,7 \text{ V,} \\ \text{Grün: } m_{\max} &= \frac{y}{x} = \frac{10,0 \text{ V}}{2,2} = 4,6 \text{ V.} \end{aligned}$$

Das Verknüpfen beider Steigungen ergibt einen Fehlerwert von

$$\Delta m = \frac{m_{\max} - m_{\min}}{2} = 0,45 \text{ V.}$$

Insgesamt ergibt sich für den Potentialverlauf des Zylinders aus der graphischen Auswertung von

$$m = (3,18 \pm 0,45) \text{ V.}$$

Durch das Einsetzen der bekannten Werte des Zylinderkondensatormodells lässt sich mathematisch der exakte Wert für den Potentialverlauf mithilfe der obigen hergeleiteten Formel für

$$m = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = \frac{10 \text{ V}}{\ln\left(\frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}\right)} = 4,34 \text{ V}$$

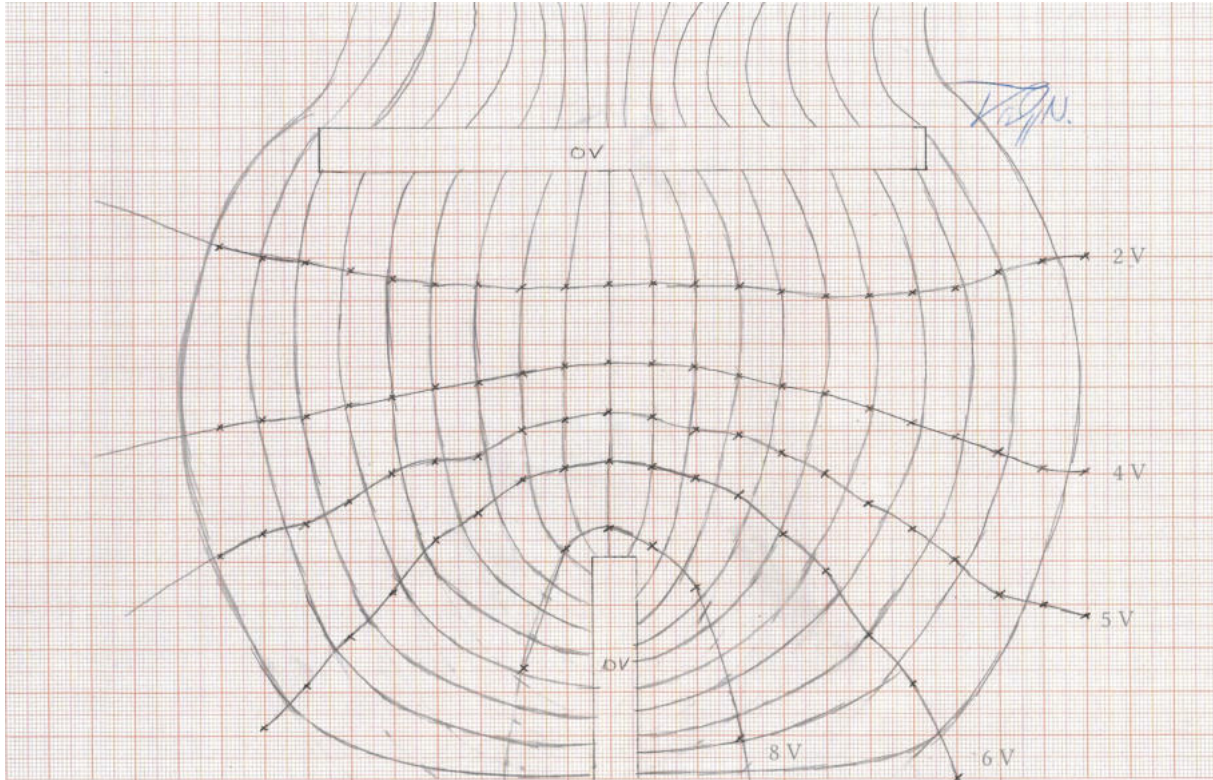
berechnen.

Das Ergebnis der graphischen Auswertung stimmt auch nach der Berücksichtigung des Fehlerwertes nicht mit dem mathematischen überein, sodass davon ausgegangen werden muss, dass bei den Messungen etwaige Fehler, wie sie bereits im ersten Teilkapitel diskutiert wurden, aufgetreten sind.



## Platte-Spitze-Kondensator

Die Auswertung des Platte-Spitze-Kondensators erfolgt analog wie die des Plattenkondensators im ersten Teilkapitel. Die ergänzten Äquipotential- und Feldlinien sind in Abbildung 2.6 zu sehen.



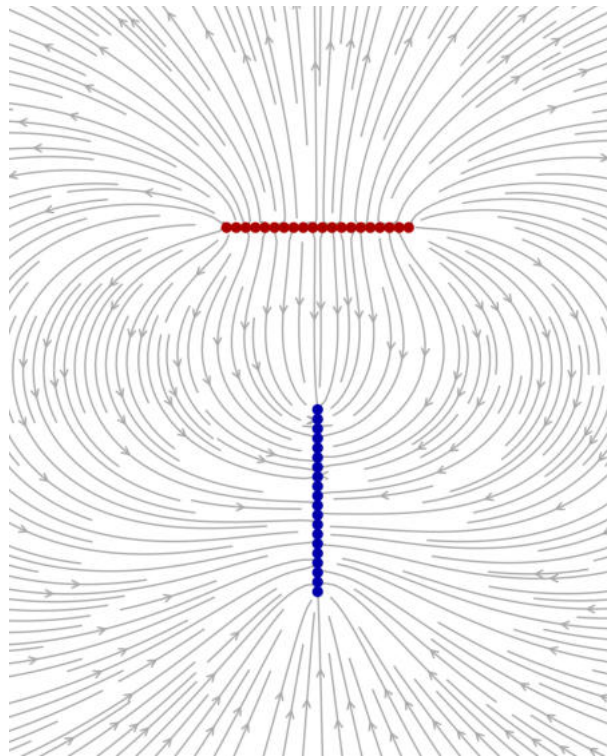
**Abb. 2.5:** Experimentell bestimmte Äquipotential- und Feldlinien des Platte-Spitze-Kondensators.

Auch hier verlaufen die Feldlinien parallel zueinander und stehen senkrecht zu den Äquipotentiallinien. Die ganz in der Mitte befindliche Feldlinie ist fast exakt gerade und verläuft senkrecht zwischen den beiden Elektroden. Bei der Betrachtung der Feldlinien nahe der Kondensatorplatten bildet sich auch hier ein homogenes Feld aus, wobei sich die bereits angesprochenen Randeffekte an der endlich ausgedehnten Kondensatorplatte ebenfalls bemerkbar machen. Alle ausgehenden Feldlinien stehen orthogonal auf der langen Elektrode und treffen an der spitzen Elektrode gleichermaßen senkrecht wieder ein. Damit dieser Effekt eintritt, sind die Potentiallinien zur Spitzenelektrode hin stark gekrümmt.

Die 2 V-Äquipotentiallinie befindet sich näher an der langen Elektrode, sodass sich diese an den Rändern in Richtung dieser krümmt. Bereits die 4 V-Äquipotentiallinie krümmt sich leicht in die Richtung der Spitzelektrode. Dieser Effekt wird mit jeder weiteren Äquipotentiallinie stärker, sodass sich die 8 V-Äquipotentiallinie bereits fast an die Spitzelektrode anzuschmiegen scheint. Wie auch beim Plattenkondensator beobachtet, weisen hier die Äquipotentiallinien an den Rändern ebenfalls Asymmetrien auf. So sind in der 5 V-Äquipotentiallinie einige Knicke zu erkennen. Für die 8 V-Äquipotentiallinie wurden zudem deutlich weniger Messpunkte gefunden als für die anderen Linien, wobei die untersten beiden Messpunkte ersichtlich asymmetrisch auf unterschiedlichen Höhen zu finden sind.

Mögliche systematische Messfehler, welche die Asymmetrien erklären, wurden bereits im ersten Teilkapitel bei der Auswertung des Plattenkondensators ausführlich diskutiert.

Im Vergleich zur experimentell angefertigten Skizze mit einem computergenerierten Bild, wie in Abbildung 2.6 zu sehen, ergibt, dass die generierten Feldlinien nahezu exakt an der in der Mitte befindlichen senkrechten Feldlinie gespiegelt werden. Auch wirkt die Krümmung nach außen etwas breiter als in der Skizze. Jedoch kann das Verhalten des elektrischen Feldes anhand der angefertigten Zeichnung durch das generierte Modell anschaulich bestätigt werden.



**Abb. 2.6:** Computergenerierte optimale Feldlinien des Platte-Spitze-Kondensators (Hill 2021).

## Herleitung der Gleichung für den Potentialverlauf $U(r)$ des Zylinderkondensators

Zuletzt soll nun die für den Zylinderkondensator verwendete Formel zur Berechnung des Potentialverlaufs

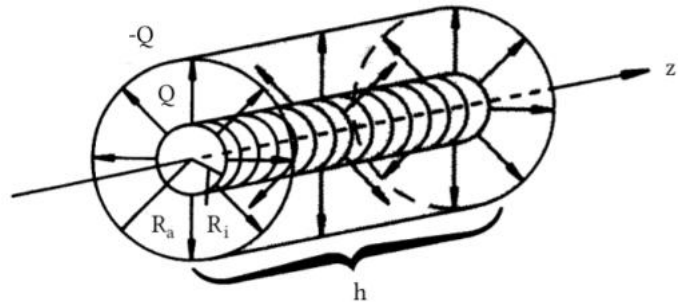
$$U(r) = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

mithilfe des Gaußschen Satzes

$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \, dV$$

hergeleitet und die Kapazität des Zylinderkondensators bestimmt werden.

Betrachte hierfür zunächst den Querschnitt aus zwei coaxialen Zylindern der Höhe  $h$  mit dem Innenradius  $r_i$  und dem Außenradius  $r_a$ , wie in Abbildung 2.7 dargestellt. Dies entspricht genau dem Versuchsaufbau des Zylinderkondensatormodells. Zwischen der inneren Elektrode mit Radius  $r_i$  wird durch die anliegende Spannung des äußeren Zylinderrings mit Radius  $r_a$  ein elektrisches Feld aufgebaut. Das elektrische Feld des Zylinderkondensators lässt sich als radialsymmetrisch annehmen, sodass sich bei der Anwendung von Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  der Ansatz



**Abb. 2.7:** Schematischer Aufbau eines Zylinderkondensators (Nolting 2013, S. 83).

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\vec{e}_\rho$$

verfolgen lässt. Zur Berechnung des Flusses des  $\vec{E}$ -Feldes durch die Oberfläche des Zylinders können die Stirnflächen vernachlässigt werden, da diese aufgrunddessen, dass  $\vec{E}$  und  $d\vec{A}$  orthogonal zueinander sind, keinen Beitrag liefern. Für den Mantel gilt

$$d\vec{A} = (\rho \, d\varphi \, dz)\vec{e}_\rho.$$

Die Mantelfläche des Zylinders ist durch

$$A_{\text{Zyl}} = 2\pi r h$$

mit dem Zylinderradius  $r$  und einer Höhe  $h$ , wobei angenommen werden kann, dass  $r \ll h$  gilt, gegeben.

Damit ergibt sich für das erste Integral

$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \rho \cdot E(\rho) \cdot 2\pi h.$$



Für das zweite Integral ergibt sich mithilfe der ersten Maxwellgleichung

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

das Ergebnis

$$\begin{aligned} \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(r) dV \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \begin{cases} 0 & \text{für } r < r_i \\ Q & \text{für } r_i < r < r_a \\ 0 & \text{für } r > r_a \end{cases} \end{aligned}$$

Mit dem Gaußschen Satz lässt sich damit der Zusammenhang

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

herstellen, sodass letztendlich

$$\begin{aligned} \vec{E}(r) \cdot 2\pi r h &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E}(r) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \end{aligned}$$

gefolgert werden kann.

Durch das Einsetzen des obigen Ausdruckes für  $\vec{E}(r)$  in das Integral  $\oint_A \vec{E} d\vec{A}$  ergibt sich für den Potentialverlauf

$$\begin{aligned} U(r_a) &= \int_{r_i}^r \vec{E}(r') dr' \\ &= \int_{r_i}^r \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} dr' \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{r_i}^r \frac{1}{r'} dr' \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} [\ln(r) - \ln(r_i)] \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right). \end{aligned}$$

Dabei liegt am Mantel des Zylinders die gesamte Spannung  $U_0$  an, sodass die obige Gleichung folgendermaßen umgestellt werden kann:

$$\begin{aligned}U(r_a) = U_0 &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) \\ \Rightarrow \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} &= \frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \\ \Rightarrow U(r) &= \frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right).\end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem Potentialverlauf  $U(r)$ , welcher bei der Auswertung für den Zylinderkondensator verwendet wurde (Nolting [2013](#), S. 83).

Die Kapazität des Kondensators lässt sich über die Formel

$$Q = C \cdot U_0 \Rightarrow C = \frac{Q}{U_0}$$

berechnen, wobei der Ausdruck für

$$U_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

der obigen Herleitung entnommen werden kann (Universität Augsburg [SoSe 2025](#)).

Eingesetzt in die Formel für die Kapazität des Zylinderkondensators ergibt sich damit

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}.$$

Es ist klar erkennbar, dass die Kapazität des Kondensators im Wesentlichen von dessen Höhe  $h$  und dem Verhältnis der beiden Radien  $r_i$  und  $r_a$  abhängt.

# Literatur

Demtröder, Wolfgang (2017). *Experimentalphysik 2*. 7. Aufl. Kaiserslautern: Springer Spektrum.

Hill, Christian (6. Jan. 2021). *The Electric Field of a Capacitor*. URL: <https://scipython.com/blog/the-electric-field-of-a-capacitor/> (besucht am 07. 06. 2025).

Meschede, Dieter (2010). *Gerthsen Physik*. 24. Aufl. Heidelberg: Springer.

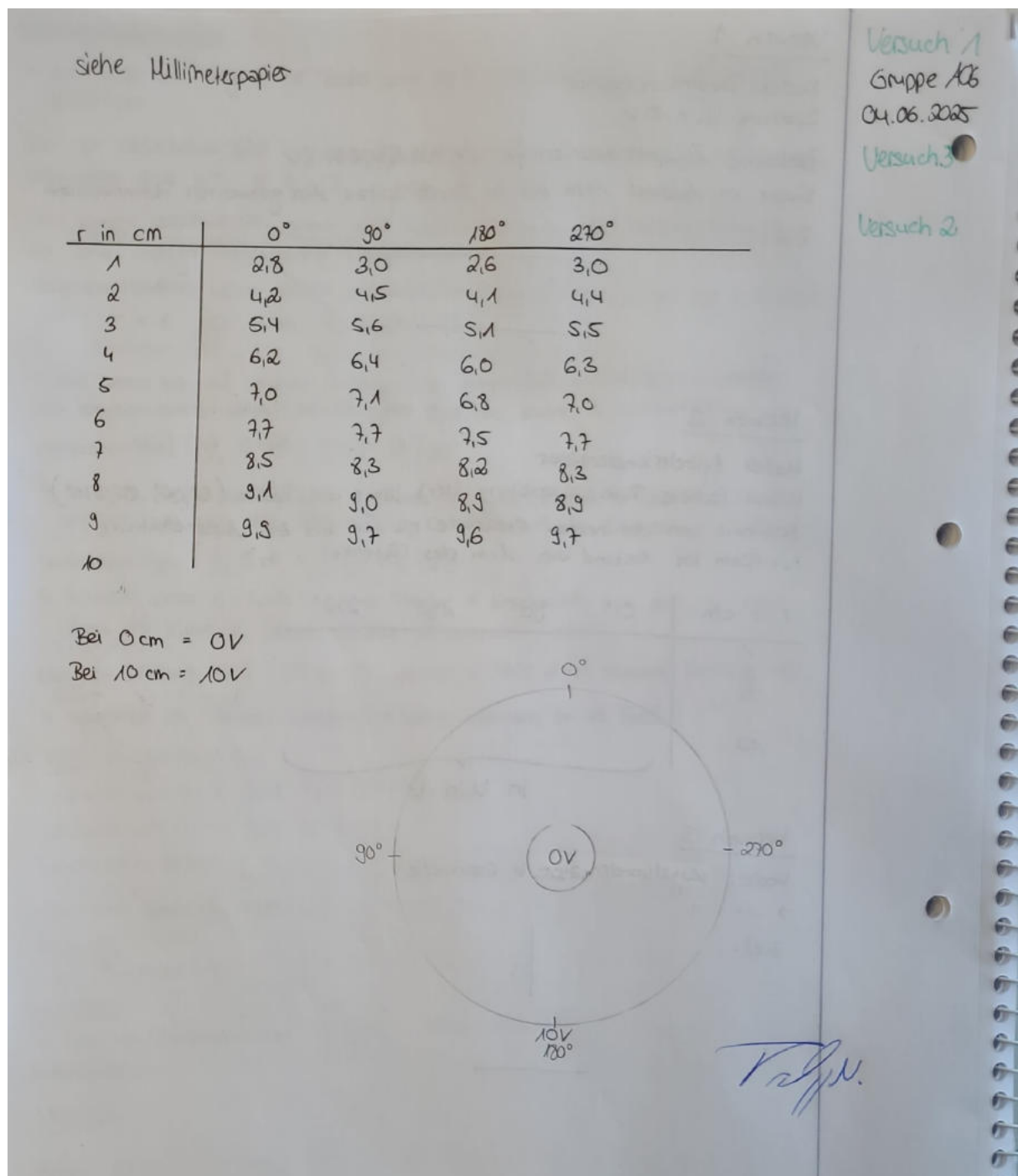
Nolting, Wolfgang (2013). *Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik*. 10. Aufl. Bd. 3. Berlin: Springer Spektrum.

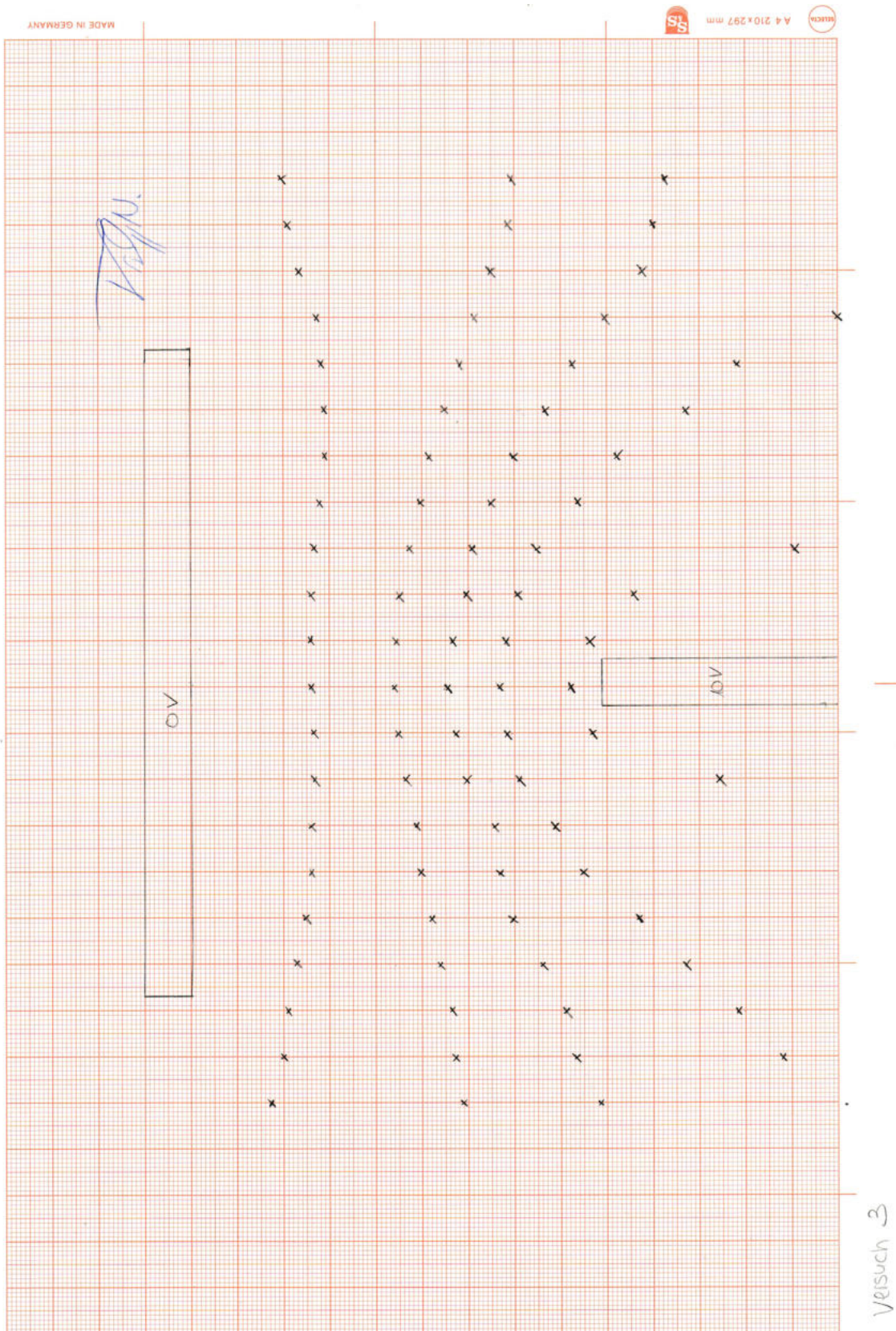
Tipler, Paul und Gene Mosca (2024). *Tipler Physik*. 9. Aufl. Berlin: Springer Spektrum.

Universität Augsburg (SoSe 2025). *Versuchsanleitung E9 - Äquipotential- Und Feldlinien*.

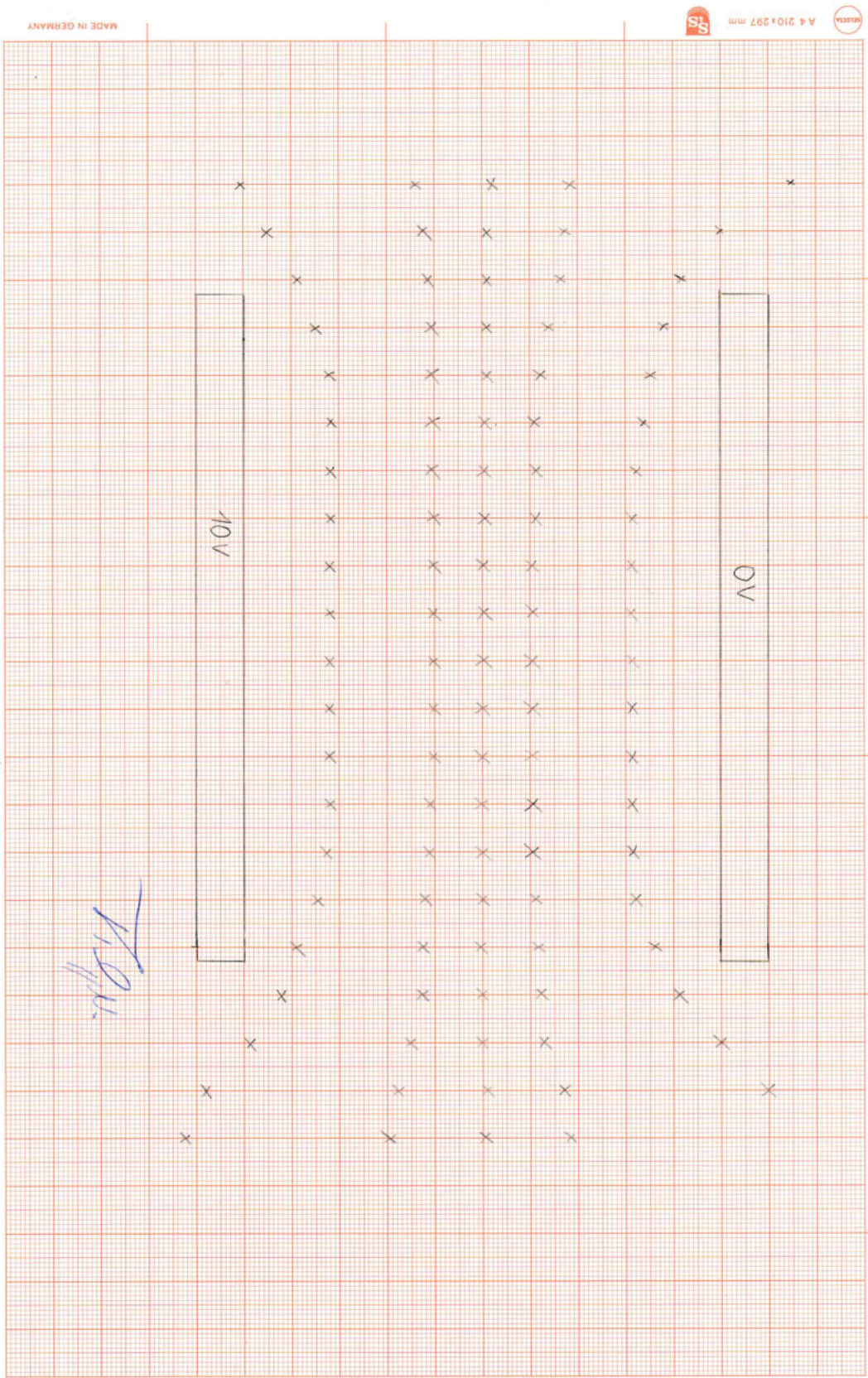


### 3 Anhang









Versuch 1

## plot2.py

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.patches import Circle
4 WIDTH, HEIGHT, DPI = 700, 700, 100
5
6 def E(q, r0, x, y):
7     """Return the electric field vector E=(Ex,Ey) due to charge q at r0."""
8     den = ((x-r0[0])**2 + (y-r0[1])**2)**1.5
9     return q * (x - r0[0]) / den, q * (y - r0[1]) / den
10
11 # Grid of x, y points
12 nx, ny = 128, 128
13 x = np.linspace(-5, 5, nx)
14 y = np.linspace(-5, 5, ny)
15 X, Y = np.meshgrid(x, y)
16
17 # Create a capacitor, represented by two rows of nq opposite charges separated
18 nq, d = 20, 2
19 charges = []
20 for i in range(nq):
21     charges.append((1, (i/(nq-1))*2-1, -d/2))
22     charges.append((-1, (i/(nq-1))*2-1, d/2))
23
24 # Electric field vector, E=(Ex, Ey), as separate components
25 Ex, Ey = np.zeros((ny, nx)), np.zeros((ny, nx))
26 for charge in charges:
27     ex, ey = E(*charge, x=X, y=Y)
28     Ex += ex
29     Ey += ey
30
31 fig = plt.figure(figsize=(WIDTH/DPI, HEIGHT/DPI), facecolor='#ffffff')
32 ax = fig.add_subplot(facecolor='#ffffff')
33 fig.subplots_adjust(left=0, right=1, bottom=0, top=1)
34
35 # Plot the streamlines with an appropriate colormap and arrow style
36 ax.streamplot(x, y, Ex, Ey, color='#AAAAAA', linewidth=1, cmap=plt.cm.plasma,
37              density=3, arrowstyle='->')
38
39 # Add filled circles for the charges themselves
40 charge_colors = {True: '#aa0000', False: '#0000aa'}
41 for q, pos in charges:
42     ax.add_artist(Circle(pos, 0.05, color=charge_colors[q>0], zorder=10))
43
44 ax.set_xlabel('$x$')
45 ax.set_ylabel('$y$')
46 ax.set_xlim(-5,5)
47 ax.set_ylim(-5,5)
48 ax.set_aspect('equal')
49 plt.savefig('capacitor2.png', dpi=300)

```



## plot.py

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.patches import Circle
4 WIDTH, HEIGHT, DPI = 700, 700, 100
5
6 def E(q, r0, x, y):
7     """Return the electric field vector E=(Ex,Ey) due to charge q at r0."""
8     den = ((x-r0[0])**2 + (y-r0[1])**2)**1.5
9     return q * (x - r0[0]) / den, q * (y - r0[1]) / den
10
11 # Grid of x, y points
12 nx, ny = 128, 128
13 x = np.linspace(-5, 5, nx)
14 y = np.linspace(-5, 5, ny)
15 X, Y = np.meshgrid(x, y)
16
17 # Create a capacitor, represented by two rows of nq opposite charges separated
18 nq, d = 20, 2
19 charges = []
20 for i in range(nq):
21     charges.append((1, (i/(nq-1)*2-1, -d/2)))
22     charges.append((-1, (d/2-1, i/(nq-1)*2+1)))
23
24 # Electric field vector, E=(Ex, Ey), as separate components
25 Ex, Ey = np.zeros((ny, nx)), np.zeros((ny, nx))
26 for charge in charges:
27     ex, ey = E(*charge, x=X, y=Y)
28     Ex += ex
29     Ey += ey
30
31 fig = plt.figure(figsize=(WIDTH/DPI, HEIGHT/DPI), facecolor='#ffffff')
32 ax = fig.add_subplot(facecolor='#ffffff')
33 fig.subplots_adjust(left=0, right=1, bottom=0, top=1)
34
35 # Plot the streamlines with an appropriate colormap and arrow style
36 ax.streamplot(x, y, Ex, Ey, color='#AAAAAA', linewidth=1, cmap=plt.cm.plasma,
37              density=3, arrowstyle='->')
38
39 # Add filled circles for the charges themselves
40 charge_colors = {True: '#aa0000', False: '#0000aa'}
41 for q, pos in charges:
42     ax.add_artist(Circle(pos, 0.05, color=charge_colors[q>0], zorder=10))
43
44 ax.set_xlabel('$x$')
45 ax.set_ylabel('$y$')
46 ax.set_xlim(-5,5)
47 ax.set_ylim(-5,5)
48 ax.set_aspect('equal')
49 plt.savefig('capacitor.png', dpi=300)
```