M5 - Gekoppelte Pendel

Julia Mariella Wiest

Gruppe A06

08.11.2024

Mit der Abgabe dieses Protokolls wird bestätigt, dass es kein Plagiat ist. Falls es dennoch eindeutig als Plagiat erkannt werden sollte, ist bekannt, dass das einen Punktabzug von 20 Punkten zur Folge, ohne Möglichkeit der Nachbearbeitung, hat. Diese Bewertung wird ausnahmslos zur Gesamtnote im Anfängerpraktikum beitragen.

1 Physikalische Grundlagen

Der nachstehende Versuch wurde mit dem Ziel durchgeführt, die Kreisfrequenzen von unterschiedlich gekoppelten Pendeln zu untersuchen.

Werden mindestens zwei Pendel, so miteinander verbunden, dass auf „die Schwingung eines Pendels eine periodisch wechselnde Kraft auf das benachbarte Pendel" (o.V. WiSe 24) wirkt, so sind diese miteinander gekoppelt. Das heißt, es wird Schwingungsenergie von einem Teilsystem auf das Andere übertragen. Die Kopplung kann dabei durch das Anbringen einer Feder oder eines Gewichtes zwischen den Pendeln realisiert werden.
Die Bewegungsgleichungen zweier gekoppelter Pendel lauten wie folgt:

$$
\begin{aligned}
I\ddot{\varphi}_1 + D_0\varphi_1 + D(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\
I\ddot{\varphi}_2 + D_0\varphi_2 + D(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Dabei ist I das Trägheitsmoment des Pendels, D_0 das aufgrund der Schwerkraft wirkende Rückstellmoment und $\varphi_i < 5°$ damit in anschließenden Berechnungen das Prinzip der Kleinwinkelnäherung angewendet werden kann (o.V. WiSe 24).
Insgesamt lauten die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen für gekoppelte Pendel:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 + \varphi_2 &= C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t), \\
\varphi_1 - \varphi_2 &= C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t).
\end{aligned}
$$

Die Kreisfrequenz ω des Pendels lautet

$$
\omega = \sqrt{\frac{D_0}{I}}.
$$

Bei gekoppelten Pendeln lassen sich zwei verschiedene spezielle Schwingungsformen unterscheiden: Normalschwingungen und Schwebungen. Eine Normalschwingung ist dann gegeben, wenn zwischen den Oszillatoren kein Energieaustausch stattfindet, sich also die Schwingungsamplituden der einzelnen Pendel zeitlich nicht ändern (o.V. WiSe 24). Werden beide Pendel gleichsinnig ausgelenkt, das heißt es gilt $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, so schwingen diese gleichphasig mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \omega_1$ und ergeben so die sogenannte 1. Normalschwingung, deren Lösung der Bewegungsgleichungen beider Pendel wie folgt aussieht:

$$
\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_1 t
$$

(Walcher 1994).

Lenkt man nun die beiden Pendel gegensinnig zueinander aus, es gilt also $\varphi_1 = \varphi_0$ und $\varphi_2 = -\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = -\varphi_0$ beziehungsweise $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, so schwingen diese gegenphasig. Dies wird als 2. Normalschwingung bezeichnet, wobei deren Lösung der Bewegungsgleichungen mit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cos(\omega_2 t), \\ \varphi_2 &= -\varphi_0 \cos(\omega_2 t), \end{aligned}$$

angegeben werden kann indes

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D_0 + 2D}{I}}$$

die Kreisfrequenz der 2. Normalschwingung ist (Walcher 1994, S. 96).
Kommt es nun bei der Schwingung zweier Pendel tatsächlich zu einer Energieübertragung zwischen den Teilsystemen, so kommt es zu einer Schwebung. Diese lässt sich dadurch herstellen, indem eines der Pendel um den Winkel φ_0 ausgelenkt, während das andere Pendel in seiner Ruhelage belassen wird. Somit lauten die Anfangsbedingungen: $\varphi_1 = \varphi_0, \varphi_2 = 0$ und $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$. Insgesamt lässt sich die Lösung der Bewegungsgleichungen wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right), \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right), \end{aligned}$$

mit $\omega_3 = (\omega_2 + \omega_1) \div 2$ der Kreisfrequenz eines Pendels während der Schwebung und $\omega_S = (\omega_2 - \omega_1) \div 2$ der Schwebungsfrequenz.

Der Kopplungsgrad K mit

$$K = \frac{D}{D_0 + D} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}$$

gibt zuletzt an, wie stark sich die gekoppeltenden Pendel tatsächlich gegenseitig beeinflussen (o.V. WiSe 24).

2 Gekoppelte Pendel

2.1 Versuchsaufbau- und durchführung

An einem Metallgestell sind zwei frei bewegliche Pendel an einer Querstange angebracht. Die Pendel selber bestehen aus einer langen dünnen Metallstange, an welcher die sogenannten Stellgewichte über einen Schraubmechanismus befestigt sind. Mithilfe dieser zylinderförmigen Gewichte wird so zuerst dieselbe Schwingungsdauer der beiden Pendel eingestellt. Anschließend wird die Pendellänge von der Querstange bis zur Unterkante der Stellgewichte gemessen. Die im nachfolgenden Kapitel auszuwertenden Messergebnisse wurden mit einem Pendel der Länge $l = 66\,\text{cm}$ gemessen. Der genaue Versuchsaufbau kann zur besseren Vorstellung Abbildung 2.1 entnommen werden. Damit bei der Auswertung der Ergebnisse das Prinzip der Kleinwinkelnäherung angewendet werden kann, sollte die Auslenkung der Pendel maximal 5° betragen. Um dies zu gewährleisten wird ein Maßstab benutzt welcher in Form eines langen Holzlineals unterhalb der Pendel angebracht ist. Die Auslenkung x wird dabei mit der Formel

$$\sin(\varphi) = \frac{x}{l} \Rightarrow x = l \cdot \sin(\varphi)$$

berechnet. Damit ergibt sich mit dem Winkel $\varphi = 5°$ und der Pendellänge $l = 66\,\text{cm}$ eine maximale Auslenkung von $x = 5{,}8\,\text{cm}$. Da beim händischen Auslenken der Pendel Ungenauigkeiten entstehen können und die Auslenkung um eine glatte Zentimeterangabe leichter fällt, wurden die Pendel in allen Versuchen um $x = 5{,}0\,\text{cm}$ ausgelenkt.

Im ersten Teil des Versuchs werden nun das linke und rechte Pendel einzeln voneinander gemessen. Dafür wurde zuerst nur das linke Pendel um fünf Zentimeter ausgelenkt und ab dem Loslassen die Stoppuhr gestartet und die Pendelzeit von acht Schwingungen ermittelt. Dieser Vorgang wurde acht Mal wiederholt. Anschließend wird dieser Prozess analog für das rechte Pendel erneut acht Mal durchgeführt. Damit ist die Messung der ungekoppelten Pendel abgeschlossen. Mit den soeben ermittelten Zeiten können anschließend in der Auswertung die jeweiligen Kreisfrequenzen der einzelnen Pendel ω_{links} und ω_{rechts} berechnet werden.

Für den weiteren Ablauf des Versuchs werden ab jetzt die beiden Pendel miteinander gekoppelt. Wie in Abbildung 2.1 zu sehen, ist an jedem Pendelstab ein Haken angebracht, sodass Kopplungsgewichte unterschiedlichen Gewichts einfach über eine Schnur an beide Pendel montieren kann. Für den Versuch standen zwei Gewichte zur Verfügung. Beide Kopplungsgewichte sind zylinderförmig, wobei das schwerere Gewicht m_{schwer} ($\gg 200\,\text{g}$) ein circa 14 cm langer Stab ist und das leichtere Gewicht m_{leicht} ($\approx 34\,\text{g}$) circa 5 cm misst. Es gilt dabei zu beachten, dass während der Versuchsdurchführung die Kopplungsgewichte frei und mittig zwischen den

Pendeln angebracht sind und sich zu Beginn des jeweiligen Versuchsdurchlaufs nicht bereits leicht bewegen.

Im Folgenden werden nun vier verschiedene Messungen mit den gekoppelten Pendeln durchgeführt. Jede der Messungen wird jeweils mit dem schweren Gewicht m_{schwer} und dem leichten Gewicht m_{leicht} getätigt.

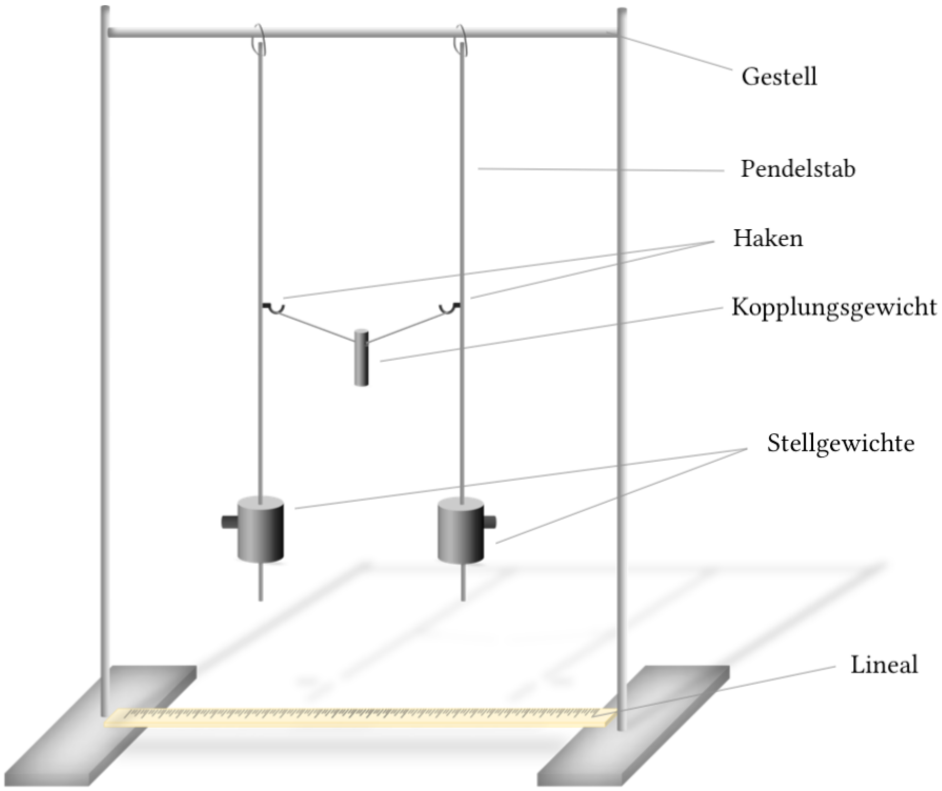

Abb. 2.1: Versuchsaufbau gekoppeltes Pendel (o.V. WiSe 24).

Als Erstes werden nun die Zeiten zur experimentellen Bestimmung der 1. Normalschwingung ω_1 der gekoppelten Pendel gestoppt. Hierfür werden das linke und rechte Pendel gleichsinnig um fünf Zentimeter nach rechts ausgelenkt, losgelassen und die Stoppuhr gestartet. Damit die Auslenkung beider Pendel möglichst exakt den fünf Zentimetern entspricht, wurden als Hilfestellung zwei kleine Lineale an den jeweiligen Punkt der Auslenkung platziert. Dies hat zudem den Vorteil, dass die Gefahr eines versehentlich zu weiten Auslenkens wegen eines Ablesefehlers auf dem großen Holzlineal minimiert wird. Wie bereits bei den Messungen der einzelnen ungekoppelten Pendel werden auch hier jeweils acht Schwingungen der beiden nun gekoppelten Pendel gestoppt. Dieser Vorgang wird jeweils für das schwere und leichte Kopplungsgewicht acht Mal wiederholt um zu einem späteren Zeitpunkt die Kreisfrequenzen $\omega_{1,\text{schwer}}$ und $\omega_{1,\text{leicht}}$ berechnen zu können.
Anschließend wird der oben beschriebene Ablauf für die 2. Normalschwingung ω_2 wiederholt. Hierbei werden nun jedoch die Pendel nicht gleichsinnig, sondern gegensinnig ausgelenkt. Das heißt, dass das linke Pendel nach links und das rechte Pendel nach rechts um fünf Zentimeter

ausgelenkt wird. Die hierbei gemessenen Zeiten werden später zur Berechnung der Kreisfrequenzen $\omega_{2,\text{schwer}}$ und $\omega_{2,\text{leicht}}$ herangezogen.

Im dritten Teil des Versuchs, wird nun die Zeit eines Pendels während der Schwebung gemessen. Um eine Schwebung zu erzeugen, wird nur noch das linke Pendel um fünf Zentimeter ausgelenkt, wobei das rechte Pendel in seiner Ruhelage, also unausgelenkt, verbleibt. Mit der Stoppuhr wird unterdessen die Zeit gemessen, wie lange das linke Pendel schwingt, bis sich dessen Energie auf das rechte Pendel übertragen hat, und deswegen für eine kurze Zeit zum stehen kommt (wobei dann das rechte Pendel zu schwingen beginnt). Die gemessenen Zeiten werden später wiederum für die Berechung der Kreisfrequenzen $\omega_{3,\text{schwer}}$ und $\omega_{3,\text{leicht}}$ verwendet.
Zuletzt wird in einer vierten Messung noch die Zeit gemessen, wie lange das linke Pendel tatsächlich still steht. An dieser Stelle wird also die Stoppuhr dann gestartet, wenn das linke Pendel zur Ruhe kommt und wird gestoppt, wenn das linke Pendel wieder beginnt sich schwingend zu bewegen. In der Auswertung kann so anschließend $\omega_{S,\text{schwer}}$ und $\omega_{S,\text{leicht}}$ ermittelt werden.

2.2 Auswertung der Messergebnisse

Auf Grundlage der im vorherigen Kapitel beschriebenen Versuchsdurchführung werden die damit erlangten Messeregebnisse nun ausgewertet.

Kreisfrequenz ω der ungekoppelten Pendel mit gleicher Schwingungsdauer

Zuerst wird die Kreisfrequenz ω der ungekoppelten Pendel bestimmt. Für beide Pendel wurden einzeln die Schwingungsdauern von jeweils acht Schwingungen bestimmt. Somit wurde die tatsächlich gemessene Zeit als Erstes durch acht geteilt, um die Zeit einer einzelnen Schwingung zu erhalten. Die Messergebnisse und weitere Berechnungen sind dabei Tabelle 3.1 zu entnehmen. Anschließend wird der Mittelwert $\overline{T_i}$ über alle auf eine Schwingung genormten Zeiten gebildet. Mit diesem Wert kann nun die gemittelte Kreisfrequenz $\overline{\omega_i}$ mit der Formel

$$\overline{\omega_i} = \frac{2\pi}{\overline{T_i}}$$

berechnet werden. Zur Fehlerberechnung wird die oben stehende Formel für $\overline{\omega}$ zunächst abgeleitet und mit dem Messfehler ΔT multipliziert:

$$\Delta\overline{\omega_i} = \frac{2\pi}{(\overline{T_i})^2} \cdot \Delta T.$$

$\Delta\overline{T_{i,\text{links}}}$ Statt der berechneten Standardabweichung $\Delta\overline{T_{i,\text{links}}} = 0,01$ beziehungsweise $\Delta\overline{T_{i,\text{rechts}}} = 0,02$ wird eine Abweichung von $\Delta T = 0{,}3\,\text{s}$ gewählt. Dies hat den Grund, dass bei der Messung

der Zeiten die Reaktionszeit beim Starten und Stoppen der Stoppuhr zu berücksichtigen ist. So entstehen Verfälschungen dadurch, dass die Zeit vermutlich nie exakt beim Loslassen des Pendels gestartet und auch nicht exakt nach der achten Schwingung gestoppt wurde. Daher erschien der Fehler der berechneten Standardabweichungen als zu gering, sodass der größere Wert von ΔT in den folgenden Rechungen verwendet wird.
Insgesamt ergeben sich für die ungekoppelten, unabhängig voneinander betrachteten Pendel folgende Kreisfrequenzen:

$$\omega_{i,\text{links}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T}}_{i,1,\text{links}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T}}_{i,1,\text{links}}^{\,2}} \cdot \Delta T \right) = (4,06 \pm 0,79)\frac{1}{\text{s}},$$
$$\omega_{i,\text{rechts}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T}}_{i,1,\text{rechts}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T}}_{i,1,\text{rechts}}^{\,2}} \cdot \Delta T \right) = (4,08 \pm 0,80)\frac{1}{\text{s}}.$$

Die exakten Berechnungen hierfür und aller folgenden Rechnungen sind in Einzelschritten dem Anhang 3 zu entnehmen.
Vergleicht man die Messzeiten aus Tabelle 3.1 und die Kreisfrequenzen ω, so kann angenommen werden, dass die Einstellung der Pendel auf dieselbe Schwingungdauer bis auf kleine Inkonsistenzen beim Bedienen der Stoppuhr und kleineren systematischen Fehlern geglückt ist.

Mögliche systematische Fehler bei der Durchführung des Versuches sind zum Beispiel:

- Die Pendel wurden vermutlich nicht immer ganz exakt um 5 cm ausgelenkt. Damit die Pendel nicht an der Tischplatte beziehungsweise am angelegten Holzlineal unter den Pendeln streifen, muss die Auslenkung „aus der Luft heraus“ abgelesen werden. Das heißt, der Abstand der Pendel zum Messstab kann das Ablesen der Auslenkung verfälschen. Zudem war der Messstab nicht fest am Metallgestell unter den Pendeln verankert, sodass dieser sehr leicht verrutschte und so auch leichte Abweichungen entstehen konnten.
- Beim Loslassen der Pendel entstanden keine präzisen Schwingungen von links nach rechts, sondern es ergab sich zusätzlich eine leichte Rotation um die Drehachse nach hinten und vorne.
- Die oben bereits erwähnte menschliche Reaktionszeit beim Bedienen der Stoppuhr führt zu Verzerrungen der Messung.
- Ebenso führt die visuelle Verzögerung bei der Wahrnehmung, wann die achte Schwingungszeit genau beendet ist, zu Mängeln.

Diese genannten Fehler sind gleichermaßen für alle weiteren auszuwertenden Ergebnisse anzunehmen.

Kreisfrequenz ω_1 und ω_2 der 1. und 2. Normalschwingung

In allen weiteren Betrachtungen werden nun das linke und rechte Pendel abwechselnd mit einem schweren und leichten Gewicht miteinander gekoppelt. Ähnlich wie bei den ungekoppelten Pendeln kann die Kreisfrequenz ω_1 und ω_2 der 1. und 2. Normalschwingung bei gekoppelten Pendeln ermittelt werden. Statt der einzelnen Betrachtung des linken und rechten Pendels, werden diese nun gemeinsam gemessen. Stattdessen wird nun zwischen einer schwachen Kopplung durch Verwendung eines leichten Gewichtes und einer starken Kopplung durch die Verwendung eines schweren Gewichtes unterschieden. Die Werte sind diesmal Tabelle 3.2 und 3.3 zu entnehmen.

Zur experimentellen Bestimmung der 1. Normalschwingung wurden die Pendel gleichsinnig um 5 cm nach rechts ausgelenkt und wie bereits bei den ungekoppelten Pendeln die Zeit von acht Schwingungen gemessen. Somit ergibt sich für die 1. Normalschwingung bei starker und schwacher Kopplung:

$$\begin{aligned}
\omega_{1,\text{schwer}} &= \frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{schwer}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{schwer}}^{2}} \cdot \Delta T \right) = (4,50 \pm 0,96)\frac{1}{\text{s}}, \\
\omega_{1,\text{leicht}} &= \frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{leicht}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{leicht}}^{2}} \cdot \Delta T \right) = (4,12 \pm 0,81)\frac{1}{\text{s}}.
\end{aligned}$$

Vergleicht man die Ergebnisse der 1. Normalschwingung mit den Ergebnissen der ungekoppelten Pendel, so weicht die Kreisfrequenz erst ab der ersten Nachkommastelle ab. So lässt sich festhalten, dass die Kopplung einer gleichsinnigen Schwingung sich eher gering auf die Schwingung auswirkt. Allerdings lässt sich hier bereits beobachten, dass die Abweichung bei der starken Kopplung stärker sichtbar ist, als bei der schwachen.

Für die Bestimmung der 2. Normalschwingung wurden die Pendel gegensinnig ausgelenkt. Das heißt das linke Pendel um 5 cm nach links und das rechte Pendel um 5 cm nach rechts ausgelenkt. Insgesamt ergibt sich für die 2. Normalschwingung bei Verwendung eines schweren und leichten Gewichts:

$$\begin{aligned}
\omega_{2,\text{schwer}} &= \frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{schwer}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{schwer}}^{2}} \cdot \Delta T \right) = (6,27 \pm 1,89)\frac{1}{\text{s}}, \\
\omega_{2,\text{leicht}} &= \frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{leicht}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{leicht}}^{2}} \cdot \Delta T \right) = (4,75 \pm 1,08)\frac{1}{\text{s}}.
\end{aligned}$$

Alle Berechnungen wurden analog wie bei den ungekoppelten Pendeln vorgenommen. Weiterhin können alle Daten und kleinteiligen Rechnungen dem Anhang 3 entnommen werden.

Hier wird im Vergleich zu den Messwerten der ungekoppelten Pendel deutlich, dass die Kopplung nun einen signifikanten Einfluss auf die Pendel hat, wobei der Unterschied bei der starken Kopplung markanter ausfällt, als bei der schwachen Kopplung, sodass $\omega_1 < \omega_2$ gilt.

Es fällt auf, dass der Messfehler der gekoppelten Pendel sowohl bei der Betrachtung der 1. und 2. Normalschwingung, als auch beim schweren und leichten Gewicht angestiegen ist. Vor allem der Messfehler $\Delta\omega_{2,\text{schwer}} = 1,89\frac{1}{\text{s}}$ fällt im Gegensatz zu den anderen Fehlertermen auf.

Dafür könnten folgende Fehlerquellen verantwortlich sein:

- Das schwere Kopplungsgewicht bestand aus einem relativ langen zylinderförmigen Stab. Durch das Loslassen der Pendel, begann dieser ebenfalls leicht mitzuschwingen, was zu einer Verfälschung führt. Das kleine Kopplungsgewicht, welches deutlich kürzer war, pendelte zwar auch leicht mit, hatte aber aufgrund des deutlich geringeren Gewichtes im Gegensatz zum starken Kopplungsgewicht weniger Einfluss auf die Schwingung.
- Zwischen den Messungen wurde vor allem versucht, das schwere Kopplungsgewicht händisch zum Stillstand zu bringen. Jedoch ist anzunehmen, dass das Kopplungsgewicht zu Beginn einer neuen Messung vermutlich nicht immer komplett in Ruhe war.

Kreisfrequenz ω_3 eines Pendels während der Schwebung

Für die Bestimmung der Kreisfrequenz ω_3 eines Pendels während der Schwebung, wird die Zeit gemessen, wie lange das linke Pendel schwingt bis es kurz zum Stehen kommt. Bei der stärkeren Kopplung fanden bis zu diesem Zeitpunkt zwei Schwingungen statt, sodass die tatsächliche Messzeit T_i zuerst durch zwei geteilt wird. Im Gegensatz dazu fanden bei der schwächeren Kopplung in dieser Zeit vier Schwingungen statt, sodass die tatsächliche Messzeit durch vier geteilt wird. Da das Stehenbleiben der Pendel schwerer auszumachen ist, wird aufgrund der verzögerten Reaktionszeit der Messfehler ΔT auf 0,5 s hochgesetzt. Die weitere Auswertung der Ergebnisse erfolgt analog und es gibt sich für die Kreisfrequenzen

$$\omega_{3,\text{schwer}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{schwer}}}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{schwer}}}}^{2}} \cdot \Delta T\right) = (5,74 \pm 2,55)\frac{1}{\text{s}},$$

$$\omega_{3,\text{leicht}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{leicht}}}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{leicht}}}}^{2}} \cdot \Delta T\right) = (2,56 \pm 0,52)\frac{1}{\text{s}}.$$

Die Messergebnisse sind hierbei Tabelle 3.4 beziehungsweise alle Berechnungen dem Anhang 3 zu entnehmen.

Es ist auffallend, dass sich trotz der Erhöhung des ΔT auf 0,5 s sich der Fehler beim leichten Gewicht im Vergleich zu allen bisherigen Auswertungen kaum verändert, der Messfehler beim starken Gewicht jedoch sehr hoch ausfällt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die mittlere Messzeit bei der starken Kopplung deutlich kürzer war, als bei der schwachen Kopplung.

Die Kreisfrequenz ω_3 lässt sich alternativ auch über folgende Formel bestimmen:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}.$$

Wendet man diese auf die starke und schwache Kopplung an so folgt:

$$\omega_{3,\text{schwer}} = \frac{\omega_{2,\text{schwer}} + \omega_{1,\text{schwer}}}{2} = (5,39 \pm 1,42)\frac{1}{\text{s}}$$
$$\omega_{3,\text{leicht}} = \frac{\omega_{2,\text{leicht}} + \omega_{1,\text{leicht}}}{2} = (4,44 \pm 0,95)\frac{1}{\text{s}}.$$

Vergleicht man die gemessenen Werte mit den berechneten aus der obigen Formel, so fällt auf, dass die Kreisfrequenz

$$\omega_{3,\text{schwer, gemessen}} = (5,74 \pm 2,55)\frac{1}{\text{s}}, \qquad \omega_{3,\text{schwer, berechnet}} = (5,39 \pm 1,42)\frac{1}{\text{s}}$$

bis auf wenige Zehntel fast übereinstimmt.
Bei der leichten Kopplung entsteht allerdings eine größere Abweichung von

$$\omega_{3,\text{leicht, gemessen}} = (2,56 \pm 0,52)\frac{1}{\text{s}} \qquad \omega_{3,\text{leicht, berechnet}} = (4,44 \pm 0,95)\frac{1}{\text{s}}.$$

Dies lässt sich dadurch erklären, dass das Ausmachen der vier Schwingungen bis zur Schwebung sich als deutlich schwerer erwies, als bei der Kopplung durch das schwere Gewicht. Eine weitere Fehlerquelle könnte sein, dass zwar vor jeder neuen Messung das in Ruhe gehaltende rechte Pendel gestoppt und auf seine Nullposition zurück geholt wurde, sich das rechte Pendel jedoch beim loslassen des ausgelenkten linken Pendels doch noch leicht in Bewegung befand.

Schwebefrequenz ω_S und Kopplungsgrad

Zur Bestimmung der Schwebefrequenz ω_S wurde die Zeit gemessen, wie lange das linke Pendel tatsächlich still stand. Dies entspricht einer Messung von $\frac{T}{4}$, sodass die Messzeiten für weitere Berechnungen zuerst mal vier genommen werden müssen wie in Tabelle 3.5 aufgeführt. Damit ergeben sich folgende Kreisfrequenzen:

$$\omega_{S,\text{schwer}} = \frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{schwer}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{schwer}}^{2}} \cdot \Delta T\right) = (1,45 \pm 0,14)\frac{1}{\text{s}},$$
$$\omega_{S,\text{leicht}} = \frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{leicht}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T}_{i,1,\text{leicht}}^{2}} \cdot \Delta T\right) = (0,56 \pm 0,02)\frac{1}{\text{s}}.$$

Wie bereits bei Kreisfrequenz ω_3 gibt es auch hier eine alternative Methode, um die Schwebefrequenz ω_S bestimmen zu können. Dies erfolgt über die Formel

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Angenwendet auf die Kopplung mit dem schweren und dem leichten Gewicht ergibt sich so die Kreisfrequenz

$$\begin{aligned}\omega_{S,\text{schwer}} &= \frac{\omega_{2,\text{schwer}} - \omega_{1,\text{schwer}}}{2} = (0,89 \pm 0,47)\frac{1}{\text{s}}\\ \omega_{S,\text{leicht}} &= \frac{\omega_{2,\text{leicht}} - \omega_{1,\text{leicht}}}{2} = (0,32 \pm 0,14)\frac{1}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Vergleicht man nun wieder die gemessenen Ergebnisse mit den berechneten, so ist festzustellen, dass die Ergebnisse kaum voneinander abweichen:

$$\begin{aligned}\omega_{S,\text{schwer, gemessen}} &= (1,45 \pm 0,14)\frac{1}{\text{s}}, & \omega_{S,\text{schwer, berechnet}} &= (0,89 \pm 0,47)\frac{1}{\text{s}},\\ \omega_{S,\text{leicht, gemessen}} &= (0,56 \pm 0,02)\frac{1}{\text{s}}, & \omega_{S,\text{leicht, berechnet}} &= (0,32 \pm 0,14)\frac{1}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Zuletzt wird nun noch der Kopplungsgrad der beiden Pendel mit der Formel

$$K = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \pm \left| -\frac{4\omega_2\omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \cdot \Delta\omega_2 + \frac{4\omega_2^2\omega_1}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \cdot \Delta\omega_1 \right|$$

ermittelt.

Insgesamt ergibt sich somit für die starke und schwache Kopplung:

$$\begin{aligned}K_{\text{schwer}} = \Bigg(&\frac{\omega_{2,\text{schwer}}^2 - \omega_{1,\text{schwer}}^2}{\omega_{2,\text{schwer}}^2 + \omega_{1,\text{schwer}}^2} \pm \Bigg| - \frac{4 \cdot \omega_{2,\text{schwer}} \cdot \omega_{1,\text{schwer}}^2}{\omega_{2,\text{schwer}}^2 + \omega_{1,\text{schwer}}^2} \cdot \Delta\overline{\omega_{2,\text{schwer}}}\\ &+ \frac{4 \cdot \omega_{2,\text{schwer}}^2 \cdot \omega_{1,\text{schwer}}}{\omega_{2,\text{schwer}}^2 + \omega_{1,\text{schwer}}^2} \cdot \Delta\overline{\omega_{1,\text{schwer}}}\Bigg|\Bigg)\frac{1}{\text{s}} = (0,32 \pm 1,15)\frac{1}{\text{s}}.\\ K_{\text{leicht}} = \Bigg(&\frac{\omega_{2,\text{leicht}}^2 - \omega_{1,\text{leicht}}^2}{\omega_{2,\text{leicht}}^2 + \omega_{1,\text{leicht}}^2} \pm \Bigg| - \frac{4 \cdot \omega_{2,\text{leicht}} \cdot \omega_{1,\text{leicht}}^2}{\omega_{2,\text{leicht}}^2 + \omega_{1,\text{leicht}}^2} \cdot \Delta\overline{\omega_{2,\text{leicht}}}\\ &+ \frac{4 \cdot \omega_{2,\text{leicht}}^2 \cdot \omega_{1,\text{leicht}}}{\omega_{2,\text{leicht}}^2 + \omega_{1,\text{leicht}}^2} \cdot \Delta\overline{\omega_{1,\text{leicht}}}\Bigg|\Bigg)\frac{1}{\text{s}} = (0,14 \pm 0,09)\frac{1}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Hierbei wurde für $\Delta\omega_1$ und $\Delta\omega_2$ die in Tabelle 3.2 und 3.3 berechnete Standardabweichung $\Delta\overline{\omega_1}$ und $\Delta\overline{\omega_2}$ verwendet.

Die Kopplung durch das schwere Gewicht ist, wie erwartet, größer, als die durch das leichte Gewicht.

Auffallend sind beim Kopplungsgrad die im Vergleich zum regulär berechneten Wert sehr hohen Fehlerwerte. Dies resultiert vor allem daraus, dass sich durch die Verwendung des Betrages, sich der negative Fehler mit dem positiven nicht ausgleicht und damit ein erhöhter Wert zustande kommt. Eventuell wurde auch innerhalb der Berechnung ein Fehler gemacht oder einer andere Art der Fehlerbestimmung wäre günstiger gewesen.

Graphische Darstellung der Kopplungsgrade

Auf Basis der oben ausgewerteten Ergebnisse kann nun der Kopplungsgrad für die Schwebung graphisch dargestellt werden. Für die Darstellung wird die schwache Schwebung auf Grundlage der berechneten Werte über die Alternativformeln verwendet, da bei den Messungen mehr Ungenauigkeiten enthalten waren.
Die Bewegungsgleichungen für die Pendel Φ_1 und Φ_2 lauten

$$\Phi_1 = \varphi_0 \cos(\omega_S t) \cos(\omega_3 t) \qquad \Phi_2 = \varphi_0 \cos(\omega_S t) \cos(\omega_3 t).$$

Die Auslenkung von 5 cm entspricht umgerechnet anhand der Formel

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{x}{l}\right) = \arcsin\left(\frac{5\,\mathrm{cm}}{66\,\mathrm{cm}}\right) = 4,35^\circ.$$

Für ω_3 und ω_S werden die Werte $2,56\frac{1}{\mathrm{s}}$ und $0,32\frac{1}{\mathrm{s}}$ eingesetzt.
Damit lauten die Bewegungsgleichungen für die schwache Kopplung:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 4,35^\circ \cos(0,32 \cdot t) \cos(2,56 \cdot t), \\ \Phi_2 &= 4,35^\circ \cos(0,32 \cdot t) \cos(2,56 \cdot t). \end{aligned}$$

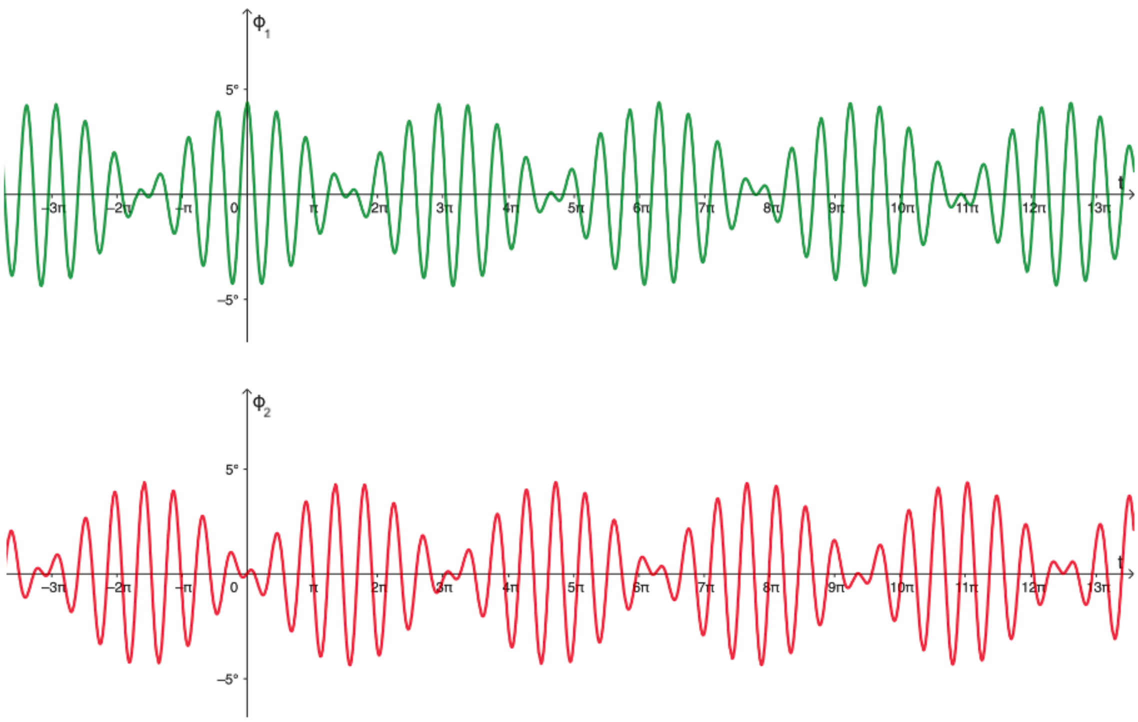

Abb. 2.2: Graphische Darstellung der schwachen Kopplung auf Basis der berechneten Werte.

Die oben in Abbildung 2.2 zu sehende graphische Darstellung der Schwebung der schwachen Kopplung wurde mit dem Programm Geogebra geplottet.

Die Schwebung lässt sich in Abbildung 2.2 gut erkennen. Im Vergleich mit der Abbildung in der Versuchsanleitung (o.V. WiSe 24) fallen allerdings Unterschiede im Bereich des Phasensprungs auf. In der Versuchsanleitung ist der Phasensprung symmetrisch und grundsätzlich identisch. In Abbildung 2.2 jedoch ist die Oszillationskurve während des Phasensprungens asymmetrisch und auch nicht bei jedem Sprung gleich. Am Punkt $x = 0$ lässt sich sehr gut erkennen, dass hier ein Minimum von Φ_2 fast auf ein Maximum von Φ_1 trifft, allerdings nicht exakt wie in der Grafik der Versuchsanleitung.

Literatur

o.V. (WiSe 24). *Versuchsanleitung M5 - Gekoppelte Pendel.*
Walcher, Wilhelm (1994). *Praktikum der Physik*. 7. Aufl. Stuttgart: B.G. Teubner.

3 Anhang

Kreisfrequenz ω der ungekoppelten Pendel mit gleicher Schwingungsdauer

Messung i	$T_{i,8,\text{links}}$ in s	$T_{i,1,\text{links}}$ in s	$\omega_{i,\text{links}}$ in $\frac{1}{s}$	$T_{i,8,\text{rechts}}$ in s	$T_{i,1,\text{rechts}}$ in s	$\omega_{i,\text{rechts}}$ in $\frac{1}{s}$
1	12,64	1,58	3,98	12,42	1,55	4,05
2	12,41	1,55	4,05	12,22	1,53	4,11
3	12,40	1,55	4,05	12,36	1,55	4,07
4	12,29	1,54	4,09	12,33	1,54	4,08
5	12,27	1,53	4,10	12,55	1,57	4,01
6	12,40	1,55	4,05	12,08	1,51	4,16
7	12,33	1,54	4,08	12,27	1,53	4,10
8	12,34	1,54	4,07	12,27	1,53	4,10
$\overline{T_i}$ bzw. $\overline{\omega_i}$		1,55	4,06		1,54	4,08
$\Delta\overline{T_i}$ bzw. $\Delta\overline{\omega_i}$		0,01	0,04		0,02	0,05

Tabelle 3.1: Messergebnisse der ungekoppelten Pendel mit gleicher Schwingungsdauer.

Bei den ungekoppelten Pendeln wurden jeweils acht Schwingungen für das linke und rechte Pendel gemessen. Um daraus die Zeit einer einzelnen Schwingung zu erhalten, wird das Messergebnis $T_{i,8}$ durch acht geteilt, sodass die Schwingzeit einer einzelnen Schwingung $T_{i,1}$ für weitere Berechnungen verwendet werden kann.

Der Mittelwert $\overline{T_i}$ der Messungen über die Zeit T_i beziehungsweise der Mittelwert der Kreisfrequenz $\overline{\omega_i}$ lassen sich über die Formeln

$$\overline{T_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \qquad \overline{\omega_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

berechnen.

Die Mittelwerte für die ungekoppelten Pendel lassen sich leicht aus Tabelle 3.1 ablesen und werden nun für die folgenden Berechnungen verwendet.

Die Standardabweichung $\Delta\overline{T_i}$ beziehungsweise $\Delta\overline{\omega_i}$ wird mit der Formel

$$\Delta\overline{T_i} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \overline{T_i})^2} \qquad \Delta\overline{\omega_i} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\omega_i - \overline{\omega_i})^2}$$

berechnet.

Die Kreisfrequenz ω eines Pendels wird mit der Formel

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$$

berechnet.

Somit ergibt sich beispielsweise für die erste Messung des linken Pendels

$$\omega = \frac{2\pi}{1{,}58\ \mathrm{s}} = 3{,}98\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Das wird nun für alle acht Messungen wiederholt und anschließend der Mittelwert über alle ω_i gebildet.

Insgesamt ergeben sich so die Kreisfrequenzen

$$\omega_{i,\mathrm{links}} = 4{,}06\ \frac{1}{\mathrm{s}} \qquad \omega_{i,\mathrm{links}} = 4{,}08\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

für die Unabhängig voneinander betrachteten Pendel.

Der Fehlerterm $\Delta\overline{\omega_i}$ setzt sich aus der ersten Ableitung von ω_i und dem Messfehler ΔT zusammen und lautet damit

$$\Delta\overline{\omega_i} = \frac{2\pi}{\overline{T_i}^2} \cdot \Delta T.$$

Statt der Standardabweichung $\Delta\overline{T_i}$ wird im Folgenden der Messfehler $\Delta T = 0{,}3\ \mathrm{s}$ gewählt, da die Standardabweichung beispielsweise im Vergleich zur Reaktionszeit eines Menschen beim Starten und Stoppen einer Stoppuhr als viel zu klein erscheint.

Somit lässt sich der Fehlerterm für das linke und das rechte Pendel folgendermaßen berechnen:

$$\Delta\overline{\omega_{i,\mathrm{links}}} = \frac{2\pi}{(1{,}55\ \mathrm{s})^2} \cdot 0{,}3\ \mathrm{s} = 0,79\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \Delta\overline{\omega_{i,\mathrm{rechts}}} = \frac{2\pi}{(1{,}54\ \mathrm{s})^2} \cdot 0{,}3\ \mathrm{s} = 0,80\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Insgesamt lässt sich die gesamte Berechnung der Kreisfrequenzen in einer Formel darstellen:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T_i}^2} \cdot \Delta T\right).$$

Resümierend ergeben sich folgende Kreisfrequenzen für das linke und das rechte Pendel

$$\omega_{i,\text{links}} = (4,06 \pm 0,79)\frac{1}{\text{s}}, \qquad \omega_{i,\text{rechts}} = (4,08 \pm 0,80)\frac{1}{\text{s}}.$$

Kreisfrequenz ω_1 der 1. Normalschwingung

Messung i	$T_{i,8,\text{schwer}}$ in s	$T_{i,1,\text{schwer}}$ in s	$\omega_{i,\text{schwer}}$ in $\frac{1}{\text{s}}$	$T_{i,8,\text{leicht}}$ in s	$T_{i,1,\text{leicht}}$ in s	$\omega_{i,\text{leicht}}$ in $\frac{1}{\text{s}}$
1	11,36	1,42	4,42	12,21	1,53	4,12
2	11,17	1,40	4,50	12,66	1,58	3,97
3	11,21	1,40	4,48	12,21	1,53	4,12
4	11,14	1,39	4,51	12,17	1,52	4,13
5	11,06	1,38	4,54	12,07	1,51	4,16
6	11,17	1,40	4,50	12,00	1,50	4,19
7	11,19	1,40	4,49	12,07	1,51	4,16
8	11,03	1,38	4,56	12,33	1,54	4,08
$\widetilde{\overline{T_i}}$ bzw. $\widetilde{\omega_i}$		1,40	4,50		1,53	4,12
$\Delta\widetilde{\overline{T_i}}$ bzw. $\Delta\widetilde{\omega_i}$		0,01	0,04		0,03	0,07

Tabelle 3.2: Messergebnisse der gekoppelten Pendel bei gleichsinniger Auslenkung.

Ähnlich wie bei den ungekoppelten Pendeln wird nun die Kreisfrequenz ω_1 der 1. Normalschwingung bei gekoppelten Pendeln ermittelt. Statt der einzelnen Betrachtung des linken und rechten Pendels, werden diese nun gemeinsam gemessen. Stattdessen wird nun zwischen einer schwachen Kopplung durch Verwendung eines leichten Gewichtes und einer starken Kopplung durch die Verwendung eines schweren Gewichtes unterschieden. Die Werte sind diesmal Tabelle 3.2 zu entnehmen.

$$\omega_{1,\text{schwer}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{schwer}}}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T_{i,1,\text{schwer}}}^{2}} \cdot \Delta T\right) = \frac{2\pi}{1{,}40\ \text{s}} \pm \left(\frac{2\pi}{(1{,}40\ \text{s})^2} \cdot 0{,}3\ \text{s}\right) = (4,50 \pm 0,96)\frac{1}{\text{s}},$$

$$\omega_{1,\text{leicht}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{leicht}}}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{T_{i,1,\text{leicht}}}^{2}} \cdot \Delta T\right) = \frac{2\pi}{1{,}53\ \text{s}} \pm \left(\frac{2\pi}{(1{,}53\ \text{s})^2} \cdot 0{,}3\ \text{s}\right) = (4,12 \pm 0,81)\frac{1}{\text{s}}.$$

Kreisfrequenz ω_2 der 2. Normalschwingung

Messung i	$T_{i,8,\text{schwer}}$ in s	$T_{i,1,\text{schwer}}$ in s	$\omega_{i,\text{schwer}}$ in $\frac{1}{\text{s}}$	$T_{i,8,\text{leicht}}$ in s	$T_{i,1,\text{leicht}}$ in s	$\omega_{i,\text{leicht}}$ in $\frac{1}{\text{s}}$
1	7,95	0,99	6,32	10,85	1,36	4,63
2	8,12	1,02	6,19	10,48	1,31	4,80
3	8,10	1,01	6,21	10,59	1,32	4,75
4	8,03	1,00	6,26	10,32	1,29	4,87
5	8,04	1,01	6,25	10,65	1,33	4,72
6	7,49	0,94	6,71	10,60	1,33	4,74
7	8,11	1,01	6,20	10,68	1,34	4,71
8	8,32	1,04	6,04	10,46	1,31	4,81
$\overline{\overline{T_i}}$ bzw. $\overline{\overline{\omega_i}}$		1,00	6,27		1,32	4,75
$\Delta\overline{\overline{T_i}}$ bzw. $\Delta\overline{\overline{\omega_i}}$		0,03	0,19		0,02	0,07

Tabelle 3.3: Messergebnisse der gekoppelten Pendel bei gegensinniger Auslenkung.

Analog wird die Kreisfrequenz ω_2 der 2. Normalschwingung anhand den Werten von Tabelle 3.3 berechnet:

$$\omega_{2,\text{schwer}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{schwer}}}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{schwer}}}}^2} \cdot \Delta T \right) = \frac{2\pi}{1{,}00\ \text{s}} \pm \left(\frac{2\pi}{(1{,}00\ \text{s})^2} \cdot 0{,}3\ \text{s} \right) = (6,27 \pm 1,89)\frac{1}{\text{s}},$$

$$\omega_{2,\text{leicht}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{leicht}}}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{leicht}}}}^2} \cdot \Delta T \right) = \frac{2\pi}{1{,}32\ \text{s}} \pm \left(\frac{2\pi}{(1{,}32\ \text{s})^2} \cdot 0{,}3\ \text{s} \right) = (4,75 \pm 1,08)\frac{1}{\text{s}}.$$

Kreisfrequenz ω_3 eines Pendels während der Schwebung

Messung i	$T_{i,2,\text{schwer}}$ in s	$T_{i,1,\text{schwer}}$ in s	$\omega_{i,\text{schwer}}$ in $\frac{1}{\text{s}}$	$T_{i,4,\text{leicht}}$ in s	$T_{i,1,\text{leicht}}$ in s	$\omega_{i,\text{leicht}}$ in $\frac{1}{\text{s}}$
1	2,30	1,15	5,46	9,73	2,43	2,58
2	1,66	0,83	7,57	9,08	2,27	2,77
3	2,23	1,12	5,64	10,31	2,58	2,44
4	2,23	1,12	5,64	9,60	2,40	2,62
5	2,29	1,15	5,49	10,25	2,56	2,45
6	2,29	1,15	5,49	10,07	2,52	2,50
7	2,56	1,28	4,91	9,93	2,48	2,53
$\widetilde{\overline{T_i}}$ bzw. $\widetilde{\overline{\omega_i}}$		1,11	5,74		2,46	2,56
$\Delta\widetilde{\overline{T_i}}$ bzw. $\Delta\widetilde{\overline{\omega_i}}$		0,14	0,84		0,11	0,11

Tabelle 3.4: Messergebnisse der gekoppelten Pendel während der Schwebung.

Damit die Kreisfrequenz ω_3 eines Pendels während der Schwebung bestimmt werden kann, wird die Zeit gemessen, wie lange das linke Pendel schwingt bis es kurz zum stehen kommt. Bei der stärkeren Kopplung fanden bis zu diesem Zeitpunkt zwei Schwingungen statt, sodass die tatsächliche Messzeit T_i zuerst durch zwei geteilt wird. Im Gegensatz dazu fanden bei der schwächeren Kopplung in dieser Zeit vier Schwingungen statt, sodass die tatsächliche Messzeit durch vier geteilt wird. Da das Stehenbleiben der Pendel schwerer auszumachen ist, wird aufgrund der verzögerten Reaktionszeit der Messfehler ΔT auf 0,5 s hochgesetzt. Die weitere Auswertung der Ergebnisse erfolgt analog.

$$\omega_{3,\text{schwer}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{schwer}}}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{schwer}}}}^{2}} \cdot \Delta T \right) = \frac{2\pi}{1{,}11\ \text{s}} \pm \left(\frac{2\pi}{(1{,}11\ \text{s})^2} \cdot 0{,}5\ \text{s} \right) = (5,74 \pm 2,55)\frac{1}{\text{s}},$$

$$\omega_{3,\text{leicht}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{leicht}}}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T_{i,1,\text{leicht}}}}^{2}} \cdot \Delta T \right) = \frac{2\pi}{2{,}46\ \text{s}} \pm \left(\frac{2\pi}{(2{,}46\ \text{s})^2} \cdot 0{,}5\ \text{s} \right) = (2,56 \pm 0,52)\frac{1}{\text{s}}.$$

Die Kreisfrequenz ω_3 lässt sich alternativ auch über folgende Formel bestimmen:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

Wendet man diese auf die starke und schwache Kopplung an erhält man:

$$\omega_{3,\text{schwer}} = \frac{(6,27 \pm 1,89)\frac{1}{\text{s}} + (4,50 \pm 0,96)\frac{1}{\text{s}}}{2} = \frac{(10,77 \pm 2,85)\frac{1}{\text{s}}}{2} = (5,39 \pm 1,42)\frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_{3,\text{leicht}} = \frac{(4,75 \pm 1,08)\frac{1}{\text{s}} + (4,12 \pm 0,81)\frac{1}{\text{s}}}{2}, = \frac{(8,87 \pm 1,89)\frac{1}{\text{s}}}{2} = (4,44 \pm 0,95)\frac{1}{\text{s}}.$$

Schwebefrequenz ω_S

Messung i	$T_{i,\text{schwer}}/4$ in s	$T_{i,1,\text{schwer}}$ in s	$\omega_{i,\text{schwer}}$ in $\frac{1}{\text{s}}$	$T_{i,\text{leicht}}/4$ in s	$T_{i,1,\text{leicht}}$ in s	$\omega_{i,\text{leicht}}$ in $\frac{1}{\text{s}}$
1	0,81	3,24	1,94	2,62	10,48	0,60
2	1,38	5,52	1,14	3,01	12,04	0,52
3	1,06	4,24	1,48	2,76	11,04	0,57
4	1,52	6,08	1,03	2,81	11,24	0,56
5	0,73	2,92	2,15	2,23	8,92	0,70
6	0,86	3,44	1,83	3,86	15,44	0,41
7	1,73	6,92	0,91	2,81	11,24	0,56
8	1,45	5,80	1,08	2,88	11,52	0,55
$\overline{\overline{T_i}}$ bzw. $\overline{\overline{\omega_i}}$		4,77	1,45		11,49	0,56
$\Delta\overline{\overline{T_i}}$ bzw. $\Delta\overline{\overline{\omega_i}}$		1,50	0,47		1,85	0,08

Tabelle 3.5: Messergebnisse der gekoppelten Pendel während der Stehzeit der Schwebung.

Zur Bestimmung der Schwebefrequenz ω_S wurde die Zeit gemessen, wie lange das linke Pendel tatsächlich still stand. Dies entspricht einer Messung von $\frac{T}{4}$, sodass die Messzeiten für weitere Berechnugnen zuerst $\cdot 4$ genommen werden müssen. Damit ergeben sich folgende Kreisfrequenzen:

$$\omega_{S,\text{schwer}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T}}_{i,1,\text{schwer}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T}}_{i,1,\text{schwer}}^{\,2}} \cdot \Delta T \right) = \frac{2\pi}{4{,}77\text{ s}} \pm \left(\frac{2\pi}{(4{,}77\text{ s})^2} \cdot 0{,}5\text{ s} \right) = (1,45 \pm 0,14)\frac{1}{\text{s}},$$

$$\omega_{S,\text{leicht}} = \frac{2\pi}{\overline{\overline{T}}_{i,1,\text{leicht}}} \pm \left(\frac{2\pi}{\overline{\overline{T}}_{i,1,\text{leicht}}^{\,2}} \cdot \Delta T \right) = \frac{2\pi}{11{,}49\text{ s}} \pm \left(\frac{2\pi}{(11{,}49\text{ s})^2} \cdot 0{,}5\text{ s} \right) = (0,56 \pm 0,02)\frac{1}{\text{s}}.$$

Wie bereits bei Kreisfrequenz ω_3 gibt es auch hier eine alternative Methode, um die Schwebefrequenz ω_S bestimmen zu können:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

Angenwendet auf die Kopplung mit dem schweren und dem leichten Gewicht ergibt sich so

$$\omega_{S,\text{schwer}} = \frac{(6,27 \pm 1,89)\frac{1}{\text{s}} - (4,50 \pm 0,96)\frac{1}{\text{s}}}{2} = \frac{(10,77 \pm 2,85)\frac{1}{\text{s}}}{2} = (0,89 \pm 0,47)\frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_{S,\text{leicht}} = \frac{(4,75 \pm 1,08)\frac{1}{\text{s}} - (4,12 \pm 0,81)\frac{1}{\text{s}}}{2}, = \frac{(8,87 \pm 1,89)\frac{1}{\text{s}}}{2} = (0,32 \pm 0,14)\frac{1}{\text{s}}.$$

Kopplungsgrad

Zuletzt kann nun noch der Kopplungsgrad der beiden Pendel ermittelt werden:

$$K = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \pm \left| -\frac{4\omega_2\omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \cdot \Delta\omega_2 + \frac{4\omega_2^2\omega_1}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \cdot \Delta\omega_1 \right|.$$

Insgesamt ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} K_{\text{schwer}} &= \left(\frac{6,27^2 - 4,50^2}{6,27^2 + 4,50^2} \pm \left| -\frac{4 \cdot 6,27 \cdot 4,50^2}{6,27^2 + 4,50^2} \cdot 0,19 + \frac{4 \cdot 6,27^2 \cdot 4,50}{6,27^2 + 4,50^2} \cdot 0,04 \right| \right) \frac{1}{\text{s}} = (0,32 \pm 1,15)\frac{1}{\text{s}}. \\ K_{\text{leicht}} &= \left(\frac{4,75^2 - 4,12^2}{4,75^2 + 4,12^2} \pm \left| -\frac{4 \cdot 4,75 \cdot 4,12^2}{4,75^2 + 4,12^2} \cdot 0,07 + \frac{4 \cdot 4,75^2 \cdot 4,12}{4,75^2 + 4,12^2} \cdot 0,07 \right| \right) \frac{1}{\text{s}} = (0,14 \pm 0,09)\frac{1}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde für $\Delta\omega_1$ und $\Delta\omega_2$ die in Tabelle 3.2 und 3.3 berechnete Standardabweichung $\Delta\overline{\omega_1}$ und $\Delta\overline{\omega_2}$ verwendet.

Gruppe A06 08.11.24

Versuch 1

Gewichte: m_1: schwer (>200g) m_2: leicht (33,99 g)

Messung mit Handystoppuhr

Auslenkung der Pendel um max. 5°

$l = 66cm$ $\sin\alpha = \frac{x}{l}$ → $x = l \sin\alpha = 0{,}058m = 5{,}8cm$

→ Auslenkung um 5cm

8 Messungen: ohne Kopplung, Auslenkung nach rechts

i	1	2	3	4	5	6	7	8
T in s (beide)	12,17	12,14	12,25	12,29	12,22	12,15	12,18	12,34
T_1 in s (links)	12,64	12,41	12,04	12,29	12,27	12,40	12,33	12,34
T_2 in s (rechts)	12,42	12,22	12,36	12,33	12,55	12,08	12,27	12,27

→ nicht ganz linear → durch von Hand anstoßen „eiert“ Pendel etwas nach vorne/hinten

→ Auslenkung nicht immer exakt 5cm

→ Blickwinkel

Versuch 2

Auslenkung 5cm, 8 Schwingungen

1. Normalschwingung ⇒ Gleichauslenkung nach rechts

i	1	2	3	4	5	6	7	8
T in s (m_1)	11,36	11,17	11,21	11,14	11,06	11,17	11,19	11,03
T in s (m_2)	12,21	12,66	12,21	12,17	12,07	12,20	12,07	12,33

→ schweres Gewicht pendelt teilweise mit; Unruhe führt zu Messfehlern

Auch beim ersten Messen, Gewicht nicht vollständig in Ruhe

→ leichtes Gewicht pendelt kaum mit

2. Normalschwingung ⇒ Gegensinnige Auslenkung nach außen

i	1	2	3	4	5	6	7	8
T in s (m_1)	7,95	8,12	8,10	8,03	8,04	7,49	8,11	8,32
T in s (m_2)	10,85	10,48	10,59	10,32	10,65	10,60	10,68	10,46

Während der Schwebung → linkes Pendel auslenken, rechts in Ruhe

- Messe Zeit bis ausgelenktes Pendel komplett steht → T/4

i	1	2	3	4	5	6	7
T/4 in s (m_1)	2,30	1,66	2,23	2,23	2,29	2,29	2,56
T/4 in s (m_2)	9,73	9,08	10,31	9,60	10,25	10,07	9,93

→ vor jedem neuen Messen Ruhependel in Ruhe zwingen

Schwebefrequenz

- Messe Zeit, wie lange linkes Pendel stillsteht

i	1	2	3	4	5	6	7	8
T in s (m_1)	0,81	1,38	1,06	1,52	0,73	0,86	1,73	1,45
T in s (m_2)	2,62	3,01	2,76	2,81	2,23	3,86	2,81	2,88

→ Reaktionszeit

Köller