

# O1 - Brennweiten von Linsen und Linsensystemen

Julia Mariella Wiest

Gruppe A06

15.01.2025

---

*Mit der Abgabe dieses Protokolls wird bestätigt, dass es kein Plagiat ist. Falls es dennoch eindeutig als Plagiat erkannt werden sollte, ist bekannt, dass das einen Punkt abzugreifen von 20 Punkten zur Folge, ohne Möglichkeit der Nachbearbeitung, hat. Diese Bewertung wird ausnahmslos zur Gesamtnote im Anfängerpraktikum beitragen.*



# 1 Physikalische Grundlagen

Der nachstehende Versuch wurde mit dem Ziel durchgeführt, die Brennweiten von verschiedenen Linsen beziehungsweise Linsensystemen zu bestimmen.

Sammellinsen, auch Konvexlinsen genannt, bündeln achsenparallel einfallende Strahlen in einem Brennpunkt, das heißt, die Strahlen werden konvergent. Bei einer Zerstreuungslinse, auch Konkavlinse genannt, werden achsenparallel einfallende Strahlen nach der Linse divergent, sodass die Strahlen zerstreut werden (Eichler, Kronfeldt und Sahm 2016, S. 279), (Universität Augsburg WiSe 2024).

Zur Auswertung der aufgenommenen Messwerte der Versuche werden unterschiedliche Verfahren zur Bestimmung der Brennweite von Linsen und Linsensystemen angewandt.

Zur Brennweitenbestimmung einer einzelnen Linse kann das graphische Verfahren benutzt werden. Hierbei wird im Koordinatensystem die Gegenstandsweite  $g$  gegen die Bildweite  $b$  aufgetragen. Durch das Verbinden der Wertepaare  $(g_i, b_i)$  ergibt sich ein Schnittpunkt  $X$  aller Geraden, wobei für den Schnittpunkt  $X$  der Zusammenhang

$$f = \text{Abstand zur } g\text{-Achse} = \text{Abstand zur } b\text{-Achse}$$

gilt (Eichler, Kronfeldt und Sahm 2016, S. 284), (Universität Augsburg WiSe 2024). Dies ist in Abbildung 2.5 und 2.6 zu sehen.

Das Bessel-Verfahren kann sowohl zur Brennweitenbestimmung für einzelne Linsen als auch für sehr nah beieinander liegende Linsen in Linsensystemen verwendet werden (Eichler, Kronfeldt und Sahm 2016, S. 284). Dabei wird für einen festen Abstand zwischen dem Gegenstand  $G$  und dem Schirm  $S$  die Linse so eingestellt, dass auf Linsenposition 1 ein vergrößertes Bild und auf Linsenposition 2 ein verkleinertes Bild auf dem Schirm entsteht. Über die Verschiebung  $e$  und den Gesamtabstand  $s$ , wie in Abbildung 2.2 zu sehen ist, kann letztendlich die Brennweite  $f$  über die Formel

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s}$$

bestimmt werden (Universität Augsburg WiSe 2024).

Das Abbé-Verfahren wiederrum eignet sich zur Bestimmung der Brennweite einer Linsenkombination, welche aufgrund des Abstandes  $D$  der beiden Linsen zwei Hauptebenen  $H$  und  $H'$  besitzt. Zur Bestimmung der Lage der Hauptebenen und der Brennweite wird der Abbildungsmaßstab

$$\beta = \frac{B}{G}$$

# 1 Physikalische Grundlagen

(Tipler und Mosca 2024, S. 1006) in die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

eingesetzt (Demtröder 2017, S. 261).

Durch Umformen ergibt sich folgender Zusammenhang für den Abstand

$$\begin{aligned} g' &= g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + h \text{ und} \\ b' &= b + h' = f \cdot (1 + \beta) + h', \end{aligned}$$

welche einen linearen Zusammenhang darstellen. Durch Auftragen von  $\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$  gegen  $g'$  und  $(1 + \beta)$  gegen  $b'$  lässt sich die Brennweite  $f$  durch die Geradensteigung ermitteln, wobei der Abstand  $h$  und  $h'$  aus dem jeweiligen Achsenabschnitt abgelesen werden kann (Universität Augsburg WiSe 2024). Dies lässt sich zudem in den Abbildungen 2.4, 2.7 und 2.8 verifizieren. Für die Brennweite eines Linsensystems mit zwei Linsen, wobei  $D$  der Abstand zwischen den beiden Linsen ist, gilt der Zusammenhang

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{D}{f_1 f_2}$$

(Demtröder 2017, S. 263). Liegen, wie beim Bessel-Verfahren bereits beschrieben, die Linsen des Linsensystems nah beieinander, das heißt  $D$  ist hinreichend klein ( $D \ll f$ ), so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

(Meschede 2010, S. 506).

## 2 Brennweiten von Linsen und Linsensystemen

### 2.1 Versuchsaufbau und -durchführung

Zur Durchführung aller Teilversuche wurden die benötigten Instrumente über einen Schraubmechanismus auf einer optischen Bank in der erforderlichen Reihenfolge installiert. Die optische Bank selber weist ein integriertes Lineal auf, sodass ganz einfach abgelesen werden konnte, auf welcher Position sich die jeweiligen Instrumente befinden. Hierbei war zudem auf dem Fuß der Schraubmechanismen der Instrumente ein Ausrichtungsstrich aufgemalt, um das exakte Ablesen des genauen Zentimeterwertes zu ermöglichen. Die Lampe wurde für alle vier Teilversuche gleichermaßen am linken Ende der optischen Bank auf der Höhe von 12,0 cm montiert.

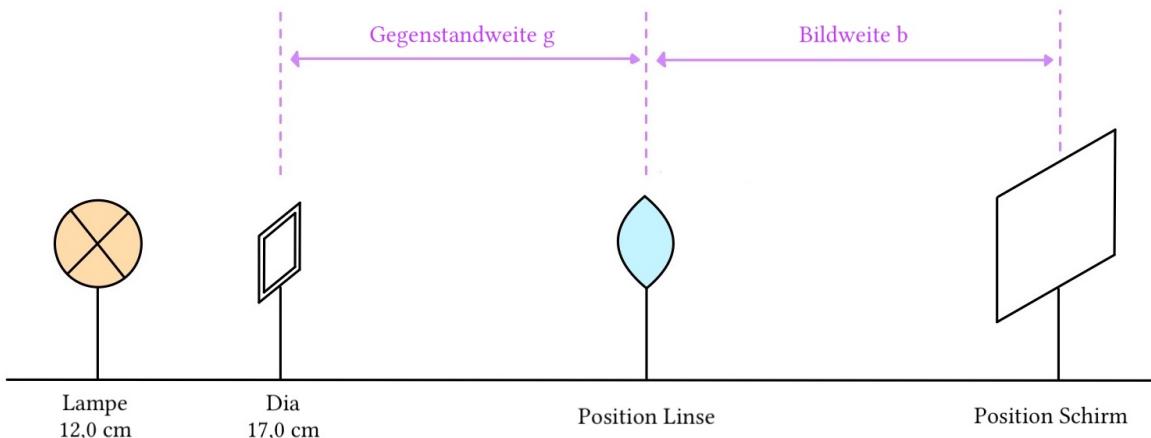


Abb. 2.1: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Brennweite  $f$  nach dem graphischen Verfahren.

Im ersten Teilversuch wird ein Dia im Abstand von 5,0 cm vor der Lampe, also auf Höhe von 17,0 cm auf der optischen Bank, angebracht. Diese Position des Dias wird im Laufe des Versuches nicht mehr verändert. Für die erste Messung wurde der Schirm am hintersten rechten Ende der optischen Bank auf der Höhe 95,0 cm montiert. Nun wird durch das Verschieben der Linse im Raum zwischen Dia und Schirm eine Linsenposition gesucht, sodass auf dem Schirm ein scharfes Bild entsteht. Diese Position der Linse wird für die erste Messung im Protokoll notiert. Für die folgenden vier Messungen wird nun die Linse jeweils um einen Zentimeter in Richtung des Schirms verschoben und festgeschraubt. Anschließend wird nun das Bild dadurch auf dem Schirm scharf gestellt, indem dieser variiert und dessen Position im Protokoll festgehalten wird. Dieses Vorgehen wurde für zwei Linsen unterschiedlicher Brennweite umgesetzt. Der Aufbau

wird zusätzlich in Abbildung 2.1 visualisiert.

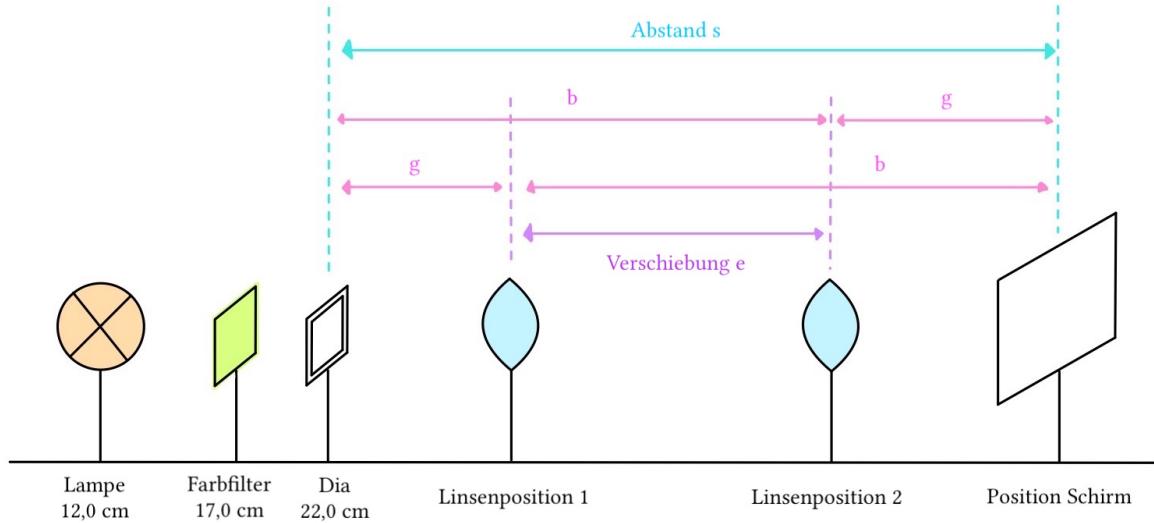
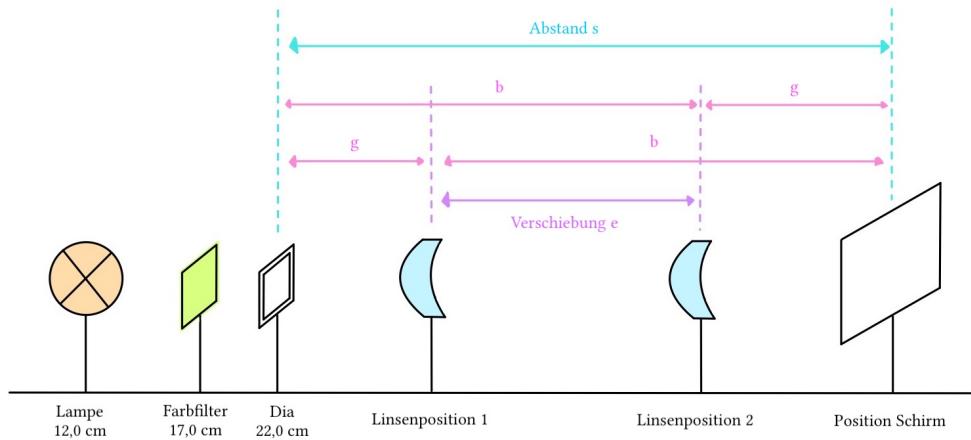


Abb. 2.2: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Brennweite  $f$  nach dem Bessel-Verfahren.

Für den zweiten Teilversuch wird nun zwischen dem Dia und der Lampe zusätzlich ein grüner Farbfilter installiert. Wie in Abbildung 2.2 zu sehen, befand sich demnach nun der Farbfilder bei 17,0 cm und das Dia bei 22,0 cm auf der optischen Bank. Für die erste Messung wurde der Schirm abermals auf die hinterste Position der optischen Bank auf 95,0 cm gesetzt. Die Linse wurde in der Nähe des Dias so lange verschoben, bis sich auf dem Schirm ein scharfes Bild abgezeichnet hat. Diese Position entspricht der Linsenposition 1. Dieses Vorgehen wurde gleichermaßen in der Nähe des Schirms wiederholt, um die für das Bessel-Verfahren benötigte Linsenposition 2 zu erhalten. Dabei ist das Bild auf dem Schirm bei Linsenposition 2 nur noch circa 1,0 mm bis 2,0 mm groß, weswegen, zur Schonung der Augen, auch der Farbfilter eingebaut werden musste. Für die nächsten vier Messungen wurde der Schirm jeweils um 5,0 cm in Richtung des Dias verschoben und abermals die Linsenposition 1 und 2 bestimmt. Dieses Vorgehen wurde wiederrum für zwei verschiedene Linsen unterschiedlicher Brennweite durchgeführt.

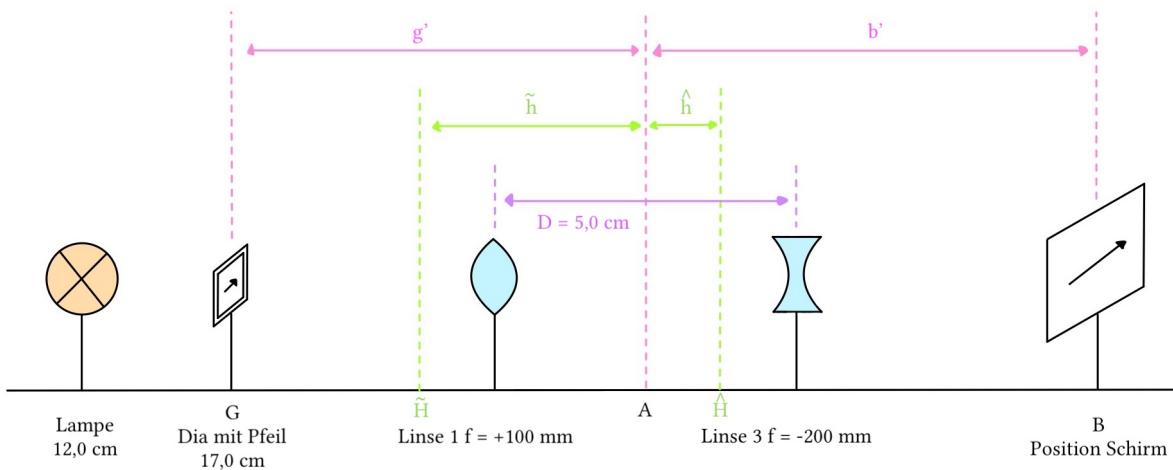
Im dritten Teilversuch (Abbildung 2.3) bleibt der Aufbau und das Vorgehen aus dem zweiten Teilversuch gleich. Allerdings wird statt einer einzelnen Linse nun eine Linsenkombination verwendet. Dafür wurde auf dem Träger für die Linsen eine Sammellinse, welche bereits in Teilversuch zwei getestet wurde, und eine Zerstreuungslinse gleichzeitig aufgesteckt.

Für den vierten und letzten Teilversuch, wurde die Farbblende wieder entfernt und das Dia durch eine Pfeilblende ersetzt. Auf der optischen Bank befand sich das Dia mit der Pfeilblende auf der Höhe 17,0 cm. Statt einer einzelnen Linse wurde eine Linsenkombination verwendet. Dafür wurde eine Sammellinse und eine Zerstreuungslinse jeweils auf einem eigenen Träger montiert, wobei beide Linsen in einem Abstand von  $D = 5,0$  cm auf der optischen Bank angebracht wurden. Die Standfüße beider Linsen haben sich bei diesem Linsenabstand von 5,0 cm nahtlos



**Abb. 2.3:** Versuchsaufbau zur Bestimmung der Brennweite  $f$  nach dem Bessel-Verfahren.

berührt, sodass das gesamte Konstrukt einfach in sich geschlossen gut verschoben werden konnte, ohne dass es zu einer signifikanten Abstandsänderung zwischen den beiden Linsen kam. Zudem konnte die Schnittstelle der beiden Trägerfüße zum Ablesen der mittigen Linsenposition A verwendet werden. Der Schirm wurde für die erste Messung wieder am hinteren Ende der optischen Bank auf der Höhe 95,0 cm montiert. Durch das Verschieben der Linsenkombination wurde das Bild auf dem Schirm scharf gestellt. Nun wird die Länge des Pfeils auf dem Schirm mit einem Lineal gemessen. Für die weiteren vier Messungen wurde der Schirm wieder jeweils um 5,0 cm in Richtung des Dias geschoben und die Linsenkombination zum Scharfstellen des Bildes verstellt. Im Messprotokoll wurden jeweils die mittige Linsenposition, die Position des Schirms und die Pfeillänge auf dem Schirm festgehalten. Der Aufbau ist in Abbildung 2.4 zu sehen.



**Abb. 2.4:** Versuchsaufbau zur Bestimmung der Brennweite  $f$  nach dem Abbé-Verfahren.

## 2.2 Auswertung der Messergebnisse

Auf Grundlage der im vorherigen Kapitel beschriebenen Versuchsdurchführung werden die damit erlangten Messergebnisse nun ausgewertet.

### Ermittlung der Brennweiten von Linsen mittels graphischen Verfahrens

Aus den Messergebnissen von Teilversuch 1 soll nun die Brennweite der Linsen experimentell mit Hilfe des graphischen Verfahrens bestimmt werden. Zur Unterscheidung wird für die Herstellerangabe der Brennweite der Linse der Ausdruck  $f_{\text{tats}}$  für den tatsächlichen Wert und für die experimentell ermittelte Brennweite  $f_{\text{exp}}$  verwendet.

Während des Versuches befand sich das Dia für jede Messung fest an der Position 17,0 cm. Über die gemessene Position der Linse und des Schirms lässt sich nun die Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$  berechnen:

$$\begin{array}{ll} \text{Gegenstandsweite} & g = \text{Position Linse} - \text{Position Dia} \\ \text{Bildweite} & b = \text{Position Schirm} - \text{Position Linse}. \end{array}$$

Durch das Auftragen der Messwerte  $g_i$  gegen  $b_i$  in einem Diagramm, lässt sich über das graphische Verfahren anschließend die Brennweite der verwendeten Linse experimentell bestimmen.

Die Messergebnisse für **Linse 1** mit der tatsächlichen Brennweite  $f_{1,\text{tats}} = 100 \text{ mm}$  sind in Tabelle 2.1 zu finden.

Messung $i$	Position Linse in cm	Position Schirm in cm	$g$ in cm	$b$ in cm
1	29,0	95,0	12,0	66,0
2	30,0	77,8	13,0	47,8
3	31,0	68,2	14,0	37,2
4	32,0	62,6	15,0	30,6
5	33,0	60,0	16,0	27,0

**Tabelle 2.1:** Messergebnisse von Linse 1 mit Brennweite  $f_{1,\text{exp}} = 100 \text{ mm}$ .

Die Anwendung des graphischen Verfahrens, durch das Auftragen der ermittelten  $g_i$  gegen  $b_i$  ist in Abbildung 2.5 zu sehen.

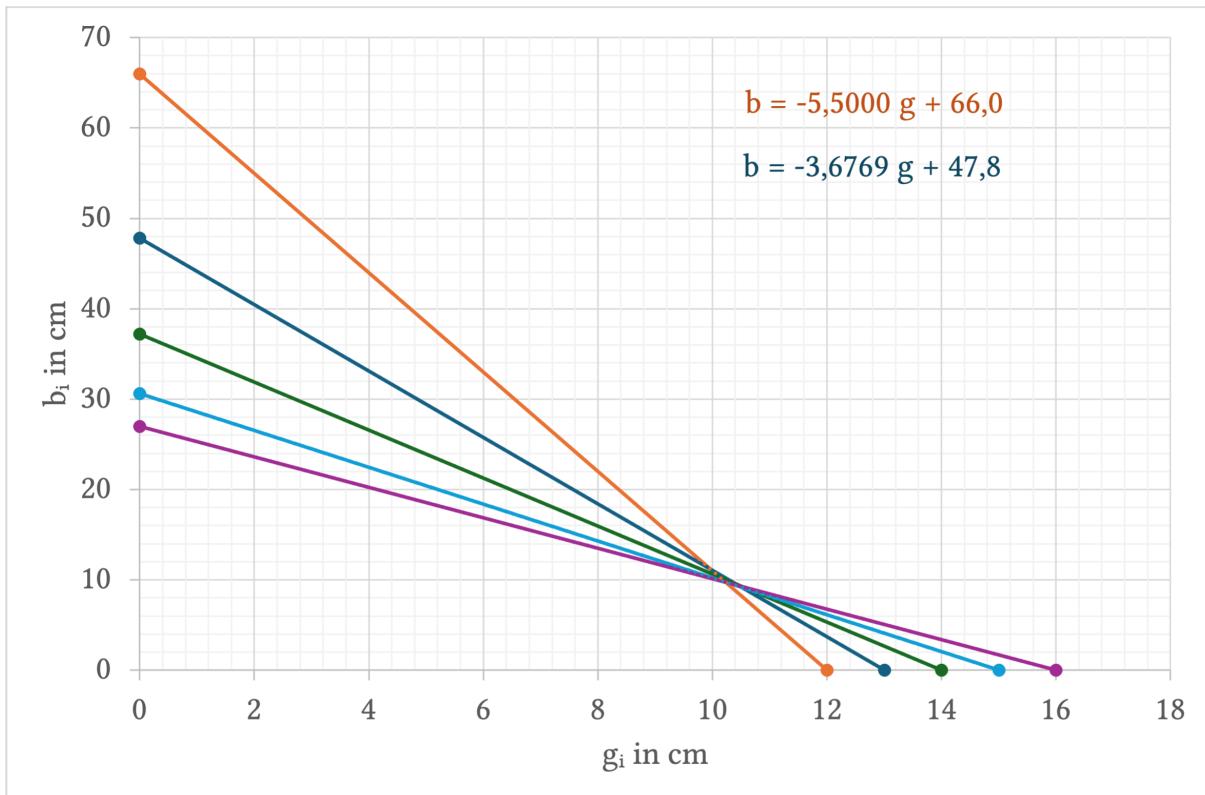


Abb. 2.5: Bestimmung der Brennweite  $f_1$  durch das graphische Verfahren durch Auftragung von  $g_i$  über  $b_i$ .

Alle Geraden treffen sich in einem Punkt, sodass die Brennweite  $f_{1,\text{exp}}$  über das Gleichsetzen zweier beliebiger Geraden berechnet werden kann. Hier wurden die beiden oberen Geraden in Dunkelblau und Orange gewählt. Die Geradengleichungen dieser beiden Geraden

Dunkelblau:	$b = -3,677g + 47,8$
Orange:	$b = -5,500g + 66,0$

lassen sich aus dem Diagramm 2.5 ablesen. Der Schnittpunkt beider Geraden durch Gleichsetzen ergibt

$$-3,677g + 47,8 = -5,500g + 66,0 \Rightarrow g = 9,983,$$

was nach dem graphischen Verfahren der Brennweite  $f$  der Linse entspricht. Die tatsächliche Brennweite  $f_{1,\text{ tats}} = 10,0 \text{ cm}$  stimmt damit fast mit dem experimentell bestimmten Wert  $f_{1,\text{exp}} = 9,98 \text{ cm}$  überein.

Für die Fehlerbetrachtung wurde während des Versuches ein Mess- beziehungsweise Ablesefehler von  $\Delta x = 0,3 \text{ cm}$  gewählt. Mit diesem Wert wird nun die positive beziehungsweise negative Abweichung der dunkelblauen und orangenen Geraden berechnet, um die jeweils maximale Abweichung nach oben und unten zu erhalten. Dabei ergibt sich die Steigung  $\alpha$  der Geraden über die Formel

$$\alpha = \frac{b}{g}.$$

Für die dunkelblaue Gerade werden die Messwerte  $g = (13,0 \pm 0,3)$  und  $b = (47,8 \pm 0,3)$  herangezogen. Daraus ergibt sich eine positive Abweichung von

$$g = 13,3 \text{ und } b = 48,1 \Rightarrow b = -3,6165g + 48,1$$

und eine negative Abweichung von

$$g = 12,7 \text{ und } b = 47,5 \Rightarrow b = -3,7402g + 47,5$$

Für die orangene Gerade ergaben sich die Messwerte  $g = (12,0 \pm 0,3)$  und  $b = (66,0 \pm 0,3)$  und damit eine positive Abweichung von

$$g = 12,3 \text{ und } b = 66,3 \Rightarrow b = -5,39g + 66,3$$

und eine negative Abweichung von

$$g = 11,7 \text{ und } b = 65,7 \Rightarrow b = -5,620g + 65,7.$$

Durch das Gleichsetzen der beiden positiven Abweichungen der dunkelblauen und der orangenen Geraden ergibt sich deren Schnittpunkt mit  $g = 10,2535$ . Gleichermaßen wird der Schnittpunkt der beiden negativen Geraden  $g = 9,6819$  ermittelt. Aus beiden Werten ergibt sich ein Fehlerbereich von

$$10,2535 - 9,6819 = 0,5716 = \Delta f_1 = 0,57 \text{ cm.}$$

Insgesamt ergibt sich so eine Brennweite von

$$f_{1,\text{exp}} = (9,98 \pm 0,57) \text{ cm}$$

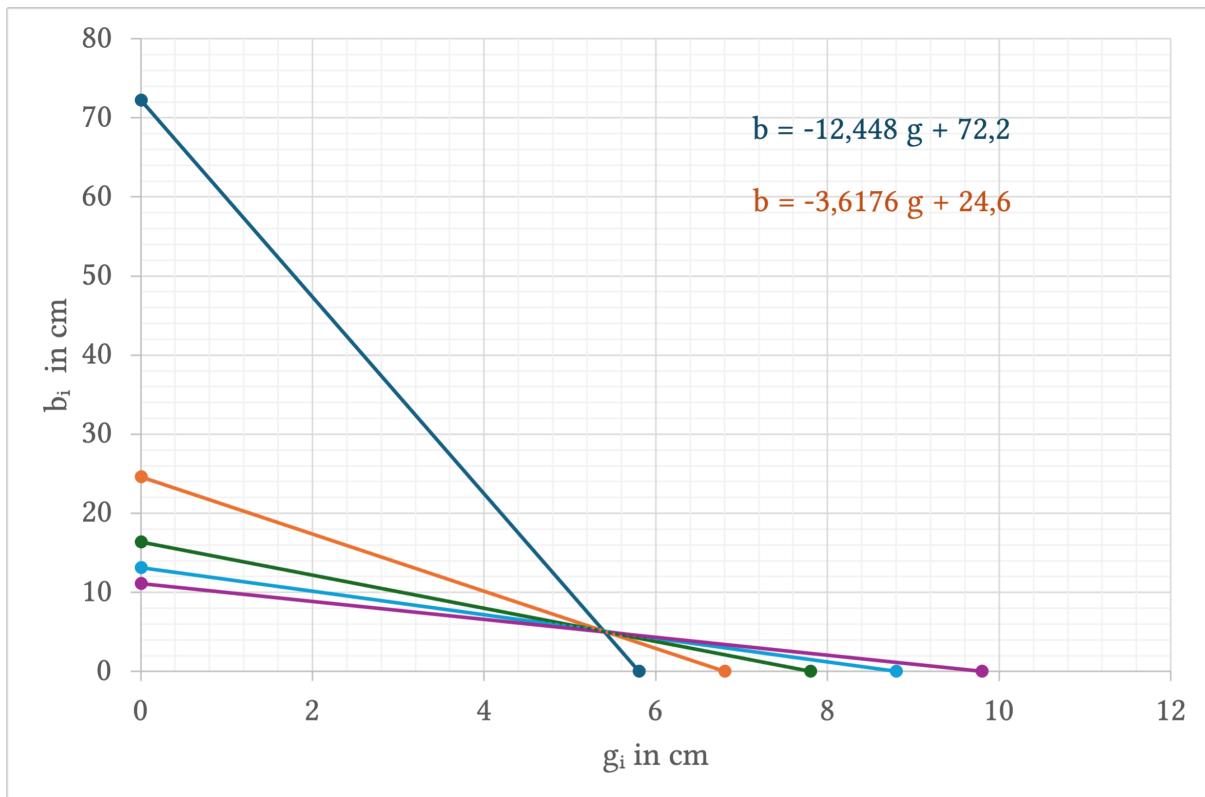
für Linse 1.

Die Messergebnisse für **Linse 2** mit der Brennweite  $f_{2,\text{ tats}} = 50 \text{ mm}$  sind in Tabelle 2.2 zu finden.

Messung $i$	Position Linse in cm	Position Schirm in cm	$g$ in cm	$b$ in cm
1	22,8	95,0	5,8	72,2
2	23,8	48,4	6,8	24,6
3	24,8	41,2	7,8	16,4
4	25,8	38,9	8,8	13,1
5	26,8	37,9	9,8	11,1

**Tabelle 2.2:** Messergebnisse von Linse 2 mit Brennweite  $f_{2,\text{exp}} = 50 \text{ mm}$ .

Durch das Auftragen der ermittelten  $g_i$  gegen  $b_i$  ergibt sich die Abbildung 2.6 nach dem graphischen Verfahren.



**Abb. 2.6:** Bestimmung der Brennweite  $f_2$  durch das graphische Verfahren durch Auftragung von  $g_i$  über  $b_i$ .

Auch hier treffen sich alle Geraden wieder in einem Punkt, sodass die Brennweite  $f_{2,\text{exp}}$  wiederum über das Gleichsetzen zweier beliebiger Geraden berechnet werden kann. Es wurden abermals die beiden oben Geraden in Orange und Dunkelblau gewählt. Deren Geradengleichungen

$$\text{Dunkelblau: } b = -12,448g + 72,2$$

$$\text{Orange: } b = -3,628g + 24,6$$

lassen sich aus dem Diagramm 2.6 ablesen. Der Schnittpunkt ergibt sich durch das Gleichsetzen beider Geradengleichungen:

$$-12,448g + 72,2 = -3,628g + 24,6 \Rightarrow g = 5,3905,$$

was der Brennweite  $f$  der Linse entspricht. Die tatsächliche Brennweite  $f_{2,\text{ tats}} = 5,0 \text{ cm}$  entspricht damit ungefähr dem experimentell bestimmten Wert von  $f_{2,\text{exp}} = 5,39 \text{ cm}$ .

Mit dem Mess- beziehungsweise Ablesefehler  $\Delta x = 0,3 \text{ cm}$  wird nun wieder die positive und negative Abweichung der dunkelblauen und orangenen Geraden ermittelt. Dadurch ergeben

sich für die dunkelblaue Gerade mit den Messwerten  $g = (5,8 \pm 0,3)$  und  $b = (72,2 \pm 0,3)$  folgende Abweichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Positiv:} & g = 6,1, b = 72,5 \Rightarrow b = -11,885g + 72,5 \\ \text{Negativ:} & g = 5,5, b = 69,9 \Rightarrow b = -12,709g + 69,9 \end{array}$$

und für die orangene Gerade mit den Messwerten  $g = (6,8 \pm 0,3)$  und  $b = (24,6 \pm 0,3)$  die Abweichungen

$$\begin{array}{ll} \text{Positiv:} & g = 7,1, b = 24,9 \Rightarrow b = -3,507g + 24,9 \\ \text{Negativ:} & g = 6,5, b = 24,3 \Rightarrow b = -3,738g + 24,3. \end{array}$$

Durch das Gleichsetzen der beiden positiven Abweichungen der dunkelblauen und der orangenen Geraden ergibt sich deren Schnittpunkt mit  $g = 5,6815$  und der Schnittpunkt der negativen Abweichungen mit  $g = 5,0830$ . Daraus ergibt sich aus beiden Abweichungen ein Fehlerbereich von

$$5,6815 - 5,083 = 0,5985 = \Delta f_2 = 0,60 \text{ cm}$$

Insgesamt ergibt sich so eine Brennweite von

$$f_{2,\text{exp}} = (5,39 \pm 0,60) \text{ cm}$$

für Linse 2.

Die experimentell bestimmte Brennweite von Linse 1 stimmt nahezu exakt mit der Herstellerangabe der Linse überein. Bei Linse 2 liegt die experimentell bestimmte Brennweite im berechneten Fehlerbereich, sodass auch hier die tatsächliche Brennweite gut mit der experimentell Bestimmten übereinstimmt. Die Fehlerbereiche sind ungefähr doppelt so groß, wie der angenommene Messfehler, da sich die Abweichung der Geraden aus dem positiven und negativen Größtfehler zusammensetzt.

## Ermittlung der Brennweiten von Linsen mittels Bessel-Verfahren

Im Folgenden sollen die Brennweiten zweier Linsen mittels des Bessel-Verfahrens bestimmt werden. Hierzu wird die Tatsache ausgenutzt, dass der Gegenstand und das Bild, in diesem Fall das Dia und der Schirm, vertauschbar sind. Das heißt, wie im Aufbau in Abbildung 2.2 zu sehen, gibt es genau zwei verschiedene Linsenpositionen, unter welchen ein scharfes Bild auf dem Schirm erkennbar wird.

Beim Bessel-Verfahren ergibt sich der Abstand  $s$  über die Summe der Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$  und die Verschiebung  $e$  über die Subtraktion der Gegenstandsweite  $g$  von der Bildweite  $b$ . Durch das Zusammensetzen beider Gleichungen ergibt sich folgender Zusammenhang für die Brennweite  $f$ :

$$\begin{aligned} s &= g + b & e &= b - g \\ \Rightarrow g &= \frac{s - e}{2} & \Rightarrow b &= \frac{s + e}{2} \\ && \Rightarrow f &= \frac{s^2 - e^2}{4s} \end{aligned}$$

Im Falle des durchgeführten Versuches lässt sich die Verschiebung  $e$  und der Abstand  $s$  folgendermaßen berechnen:

$$e = \text{Linsenposition 2} - \text{Linsenposition 1}, \quad s = \text{Position Schirm} - \text{Position Dia}.$$

Dabei befand sich das Dia für alle Messungen auf der Position 22,0 cm.

Für den Messfehler wird von  $\Delta e = \Delta s = 0,3$  cm ausgegangen. Mit diesen Werten ergibt sich der Gesamtfehler

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial e} \cdot \Delta e + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \Delta s = \left| \frac{e}{2s} \right| \cdot \Delta e + \left| \frac{s^2 + e^2}{4s^2} \right| \cdot \Delta s.$$

Für die für **Linse 1** aufgenommenen Messwerte in Tabelle 2.3 ergeben sich die in derselben Tabelle aufgetragenen Ergebnisse durch das Anwenden der oben stehenden Formeln.

Messung $i$	Linsenpos. 1 in cm	Linsenpos. 2 in cm	Position Schirm in cm	$e$ in cm	$s$ in cm	$f$ in cm	$\Delta f$ in cm
1	33,2	82,5	95,0	49,3	73,0	9,9264	0,2105
2	33,5	77,4	90,0	43,9	68,0	9,9147	0,2031
3	33,7	72,0	85,0	38,3	63,0	9,9290	0,1939
4	34,3	66,9	80,0	32,6	58,0	9,9191	0,1830
5	35,0	61,3	75,0	26,3	53,0	9,9873	0,1679
Mittelwert						9,9353	0,1917

Tabelle 2.3: Messergebnisse von Linse 1 mit Brennweite  $f_{1,\text{exp}} = 100$  mm.

## 2 Brennweiten von Linsen und Linsensystemen

Nachdem für jede Messung  $i$  die Brennweite  $f$  beziehungsweise der Fehler  $\Delta f$  berechnet wurde, wird über diese Werte der Mittelwert

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i, \quad \Delta \bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta f_i$$

gebildet.

Wie in Tabelle 2.3 zu sehen, ergibt sich so ein Brennwert

$$f_{1,\text{exp}} = (9,9353 \pm 0,1917) \text{ cm}$$

für Linse 1 mit dem tatsächlichen Brennwert  $f_{1,\text{ tats}} = 10,0 \text{ cm}$ .

Analog wird für **Linse 2** die Brennweite mit den Messergebnissen aus Tabelle 2.4 vorgegangen.

Messung $i$	Linsenpos. 1 in cm	Linsenpos. 2 in cm	Position Schirm in cm	$e$ in cm	$s$ in cm	$f$ in cm	$\Delta f$ in cm
1	26,9	88,9	95,0	62,0	73,0	5,0856	0,2565
2	27,0	84,4	90,0	57,4	68,0	4,8869	0,2551
3	27,1	78,8	85,0	51,7	63,0	5,1433	0,2486
4	27,2	73,7	80,0	46,5	58,0	5,1800	0,2435
5	27,3	68,5	75,0	41,2	53,0	5,2432	0,2369
Mittelwert						5,1078	0,2481

**Tabelle 2.4:** Messergebnisse von Linse 2 mit Brennweite  $f_{2,\text{exp}} = 50 \text{ mm}$ .

Somit ergibt sich ein Brennwert

$$f_{2,\text{exp}} = (5,1078 \pm 0,2481) \text{ cm}$$

für Linse 2 mit dem tatsächlichen Brennwert  $f_{2,\text{ tats}} = 5,0 \text{ cm}$ .

Beim Bessel-Verfahren wurden Werte für zwei verschiedene Linsenpositionen aufgenommen. Während bei Linsenposition 1 das Bild, subjektiv gesehen, einfach scharf zu stellen war, erschien das Bild auf dem Schirm bei Linsenposition 2 so klein, dass das Abschätzen, wann das Bild bei circa 1,0 mm Größe scharf war, schwerer fiel. Der Vergleich der berechneten Ergebnisse mit den Herstellerangaben von Linse 1 und 2 zeigt allerdings, dass die Abschätzung trotz der subjektiven Beurteilung der Bildäschärfe gut gelungen ist.

## Ermittlung der Brennweiten einer Linsenkombination mittels Bessel-Verfahren

Nun wird gleichermaßen mit dem Bessel-Verfahren die Brennweite einer unbekannten dritten Linse bestimmt, welche als Linsenkombination direkt auf Linse 2 mit der bereits zuvor berechneten Brennweite  $f_{2,\text{exp}} = (5,1078 \pm 0,2481)$  cm gesteckt wird. Durch das direkte Aufeinanderstecken der Linsen auf dem Träger ist der Abstand zwischen Linse 2 und 3 in den Berechnungen zu vernachlässigen. Für die Berechnungen werden dieselben Formeln wie im obigen Teilkapitel verwendet.

Die Messergebnisse und die Auswertung für die Linsenkombination sind in Tabelle 2.5 aufgetragen.

Messung $i$	Linsenpos. 1 in cm	Linsenpos. 2 in cm	Position Schirm in cm	$e$ in cm	$s$ in cm	$f$ in cm	$\Delta f$ in cm
1	28,2	86,7	95,0	58,5	78,0	8,5313	0,2297
2	28,3	81,4	90,0	53,1	73,0	8,5938	0,2238
3	28,5	76,5	85,0	48,0	68,0	8,5294	0,2183
4	28,7	71,4	80,0	42,7	63,0	8,5147	0,2111
5	28,4	66,1	75,0	37,7	58,0	8,3738	0,2042
Mittelwert						8,5086	0,2174

Tabelle 2.5: Messergebnisse der Linsenkombination zur Ermittlung der Brennweite  $f_{23,\text{exp}}$ .

Es ergibt sich eine Gesamtbrennweite von

$$f_{23,\text{exp}} = (8,5086 \pm 0,2174) \text{ cm}$$

für die Linsenkombination aus Linse 2 und 3.

Um hieraus nun die Brennweite  $f_3$  von Linse 2 zu erhalten, wird folgender Zusammenhang aus der Linsengleichung genutzt:

$$\frac{1}{f_{23}} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \Rightarrow f_3 = \frac{f_2 \cdot f_{23}}{f_2 - f_{23}}.$$

Mit der bereits bekannten Brennweite von  $f_{2,\text{exp}} = (5,1078 \pm 0,2481)$  cm und der soeben berechneten Brennweite der Linsenkombination  $f_{23,\text{exp}} = (8,5086 \pm 0,2174)$  cm ergibt sich durch das Einsetzen in die obige Formel die Brennweite

$$f_{3,\text{exp}} = -12,779 \text{ cm}$$

Für die Fehlerbetrachtung wird die Formel

$$\Delta f_3 = \frac{\partial f_3}{\partial f_{23}} \cdot \Delta f_{23} + \frac{\partial f_3}{\partial f_2} \cdot \Delta f_2 = \left| \frac{f_2^2}{(f_2 - f_{23})^2} \right| \cdot \Delta f_{23} + \left| \frac{-f_{23}^2}{(f_2 - f_{23})^2} \right| \cdot \Delta f_2 = 0,3512$$

verwendet. Damit ergibt sich insgesamt für die experimentell bestimmte Brennweite

$$f_{3,\text{exp}} = (-12,779 \pm 0,3512) \text{ cm.}$$

Setzt man die tatsächlichen Brennweiten der Linsen  $f_{2,\text{tats}} = 5,0 \text{ cm}$  und  $f_{3,\text{tats}} = -20,0 \text{ cm}$  laut Herstellerangabe in die Formel für die Ermittlung der Brennweite  $f_3$  ein, so ergibt sich

$$f_{3,\text{tats}} = \frac{f_2 \cdot f_{23}}{f_2 - f_{23}} = -20,0 \text{ cm.}$$

Während im oberen Teilkapitel die Brennweite  $f_2$  von Linse 2 über das Bessel-Verfahren innerhalb des Fehlerbereiches bestimmt werden konnte, so ist dies für die Brennweite  $f_3$  von Linse 3 über die Linsenkombination von Linse 2 und 3 nicht gelungen. Die experimentell bestimmte Brennweite  $f_{3,\text{exp}} = (-12,779 \pm 0,3512) \text{ cm}$  weicht stark von der tatsächlichen Brennweite  $f_{3,\text{tats}} = -20,0 \text{ cm}$  ab. Dies lässt sich vermutlich auf einen Ablesefehler zurückführen. Bei der Linsenkombination trat bereits bei Linsenposition 1 das Problem auf, dass durch mehrmaliges vor- und Zurückschieben des Linsenträgers die (subjektive) Entscheidung schwer fiel, wann genau das Bild nun wirklich scharf war. Für die Linsenposition 2 war auf dem Schirm nur noch ein kleiner Punkt zu sehen, sodass das Scharfstellen des Bildes rein willkürlich vonstatten ging.

## Ermittlung der Brennweiten einer Linsenkombination mittels Abbé-Verfahren

Zuletzt wird die Brennweite einer Linsenkombination aus Linse 1 und Linse 3 mittels des Abbé-Verfahrens bestimmt. Im Gegensatz zum vorangegangenen Teilkapitel werden die Linsen nun nicht mehr aufeinander gesteckt, sondern in einem Abstand von  $D = 5,0 \text{ cm}$  zueinander montiert. Dadurch lässt sich der Abstand zwischen den Linsen in den Berechnungen nicht mehr vernachlässigen. Zusätzlich zur Brennweite  $f_{13}$  der Linsenkombination soll auch die Lage der Hauptebenen  $\tilde{H}$  und  $\hat{H}$  über die Bestimmung der Verschiebung  $\tilde{h}$  und  $\hat{h}$  zum beliebig gewählten Punkt A (siehe Abbildung 2.4) bestimmt werden. Im Versuch wurde für den Punkt A die Schnittstelle der Fußbefestigungen der beiden Linsen 1 und 3 gewählt. Der ausgestanzte Pfeil des Pfeildias besitzt die tatsächliche Länge  $G = (3,2 \pm 0,1) \text{ cm}$ . Das Pfeildia befand sich auf der Position 17,0 cm. Der Abbildungsmaßstab

$$\beta = \frac{B}{G}$$

setzt sich im Versuch aus dem Quotienten der gemessenen Pfeillänge  $B$  auf dem Schirm und der tatsächlichen Länge des Pfeils auf dem Dia  $G$  zusammen. Die Gegenstandsweite  $g'$  und die Bildweite  $b'$  weisen für den Versuch folgende Zusammenhänge auf:

$$\begin{aligned} g' &= \text{Linsenposition } A - \text{Position Pfeildia} \\ b' &= \text{Position Schirm} - \text{Linsenposition } A. \end{aligned}$$

Die daraus resultierenden Ergebnisse sind Tabelle 2.6 zu entnehmen.

Messung $i$	Linsenpos. $A$ in cm	Position Schirm in cm	$g'$ in cm	$b'$ in cm	$B$ in cm	$\beta$	$1 + \beta$	$1 + \frac{1}{\beta}$
1	40,2	90,0	23,2	49,8	10,2	3,1875	4,1875	1,3137
2	40,7	85,0	23,7	44,3	9,1	2,8438	3,8438	1,3516
3	42,0	80,0	25,0	38,0	7,3	2,2813	3,2813	1,4384
4	44,5	75,0	27,5	30,5	5,5	1,7188	2,7188	1,5818
5	47,2	70,0	30,2	22,8	3,7	1,1563	2,1563	1,8649

Tabelle 2.6: Messergebnisse der Linsenkombination zur Ermittlung der Brennweite  $f_{23,\text{exp}}$ .

Durch das Auftragen der Werte von  $g'_i$  gegen  $(1 + \frac{1}{\beta})$  und von  $b'_i$  gegen  $(1 + \beta)$  kann nun durch das Bilden einer Ausgleichsgeraden die Brennweite  $f_{13}$  und die Abstände  $\tilde{h}$  und  $\hat{h}$  bestimmt werden.

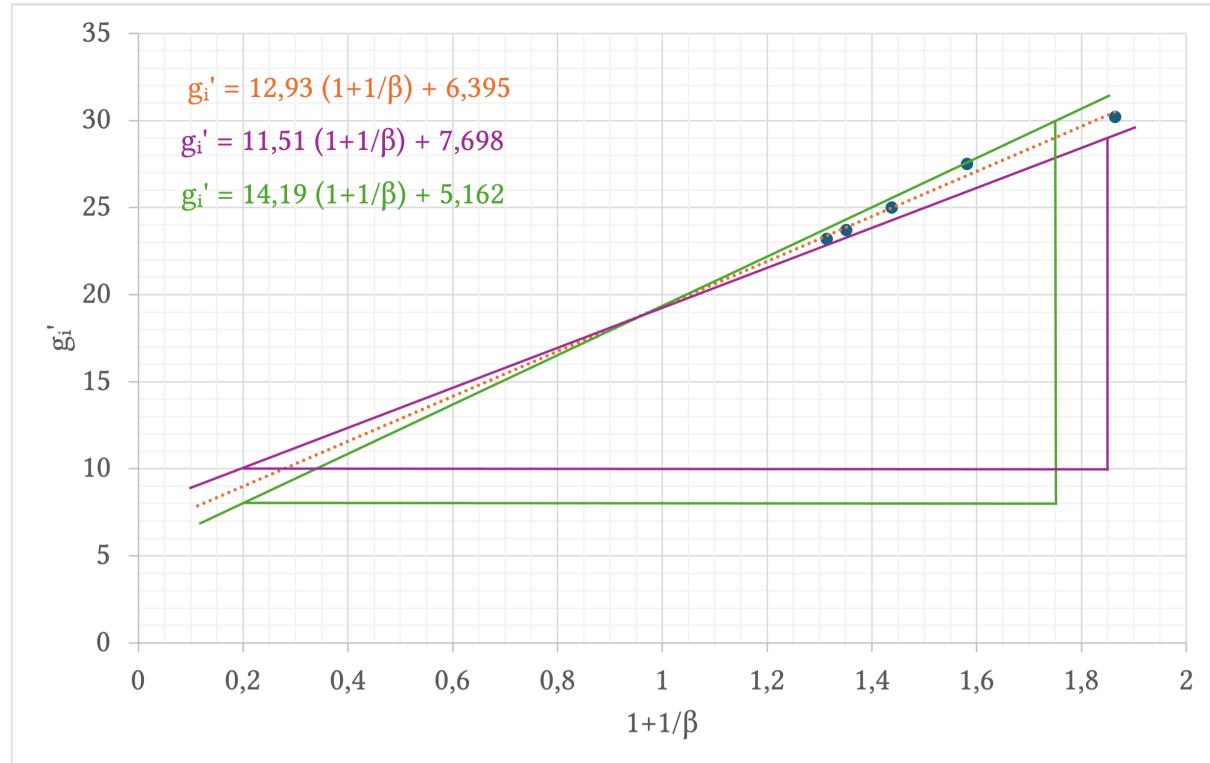


Abb. 2.7: Bestimmung der Brennweite  $\tilde{f}_{13}$  durch die Auftragung von  $g'_i$  über  $1 + \frac{1}{\beta}$ .

Betrachte zuerst die resultierende Grafik 2.7 für die Gegenstandsweite  $g'$ . Für die Geradengleichung der Ausgleichsgerade ergibt sich

$$g' = 12,93 \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + 6,395,$$

## 2 Brennweiten von Linsen und Linsensystemen

woraus sich die Brennweite  $\tilde{f}_{13}$  und der Abstand  $\tilde{h}$  von

$$\tilde{f}_{13} = 12,94 \text{ cm} \quad \text{und} \quad \tilde{h} = 6,396 \text{ cm}$$

ablesen lässt.

Der mögliche Fehler lässt sich über die Fehlergeraden in Lila und Grün bestimmen. Dabei ergibt sich die Funktionsgleichung der lilaen Ausgleichsgeraden über

$$\alpha_{\min} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29 - 10}{1,85 - 0,20} = \frac{19}{1,65} = 11,51.$$

Wähle  $x = 0,2, y = 10$ , und  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 11,51$

$$\Rightarrow \tilde{h}_{\max} = 10 - 11,51 \cdot 0,2 = 7,698$$

und der grünen Ausgleichsgeraden über

$$\alpha_{\max} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 - 8}{1,75 - 0,20} = \frac{22}{1,55} = 14,19$$

Wähle  $x = 0,2, y = 8$ , und  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 14,19$

$$\Rightarrow \tilde{h}_{\min} = 8 - 14,19 \cdot 0,2 = 5,162.$$

Somit ergibt sich für den Gesamtfehler

$$\Delta \tilde{h} = \frac{\tilde{h}_{\max} - \tilde{h}_{\min}}{2} = \frac{14,19 - 11,51}{2} = 1,34.$$

Insgesamt gilt für die Brennweite  $\tilde{f}_{13}$  und den Abstand  $\tilde{h}$  für die Gegenstandsweite  $g'$  :

$$\tilde{f} = (12,93 \pm 1,34) \text{ cm}, \quad \text{und} \quad \tilde{h} = (6,39 \pm 1,27) \text{ cm}.$$

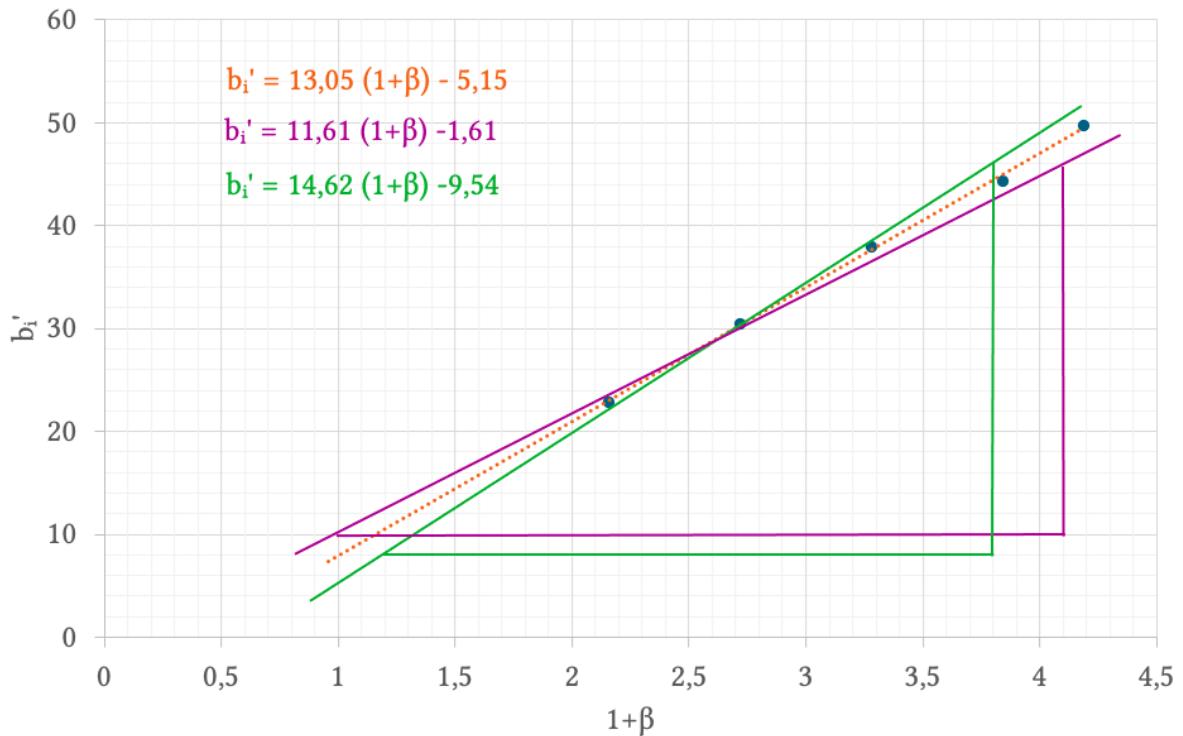
Gleichermaßen wird nun die Grafik 2.8 für die Bildweite  $b'$  ausgewertet. Für die Geradengleichung der orangenen Ausgleichsgeraden ergibt sich

$$b' = 13,045 \cdot (1 + \beta) - 5,1544,$$

woraus sich die Brennweite  $\hat{f}_{13}$  und der Abstand  $\hat{h}$

$$\hat{f} = 13,045 \text{ cm}, \quad \text{und} \quad |\hat{h}| = |-5,1544 \text{ cm}| = 5,1544 \text{ cm}$$

ergibt.



**Abb. 2.8:** Bestimmung der Brennweite  $\hat{f}_{13}$  durch die Auftragung von  $b_i$  über  $1 + \beta$ .

Der Fehlerwert wird über die Fehlergeraden in Lila und Grün bestimmt. Die Funktionsgleichung der lilaen Ausgleichsgeraden ergibt sich über

$$\gamma_{\min} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{46 - 10}{4,1 - 1} = \frac{36}{3,1} = 11,61.$$

Wähle  $x = 1, y = 10$ , und  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 11,61$

$$\Rightarrow \hat{h}_{\max} = 10 - 11,61 \cdot 1 = -1,61$$

und der grünen Ausgleichsgeraden über

$$\gamma_{\max} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{46 - 8}{3,8 - 1,2} = \frac{38}{2,6} = 14,62.$$

Wähle  $x = 1,2, y = 8$ , und  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 14,62$

$$\Rightarrow \hat{h}_{\min} = 8 - 14,62 \cdot 1,2 = -9,54.$$

Somit ergibt sich für den Gesamtfehler

$$\hat{\Delta h} = \frac{\hat{h}_{\max} - \hat{h}_{\min}}{2} = \frac{-1,61 - (-9,54)}{2} = 3,965.$$

Insgesamt gilt für die Brennweite  $\hat{f}_{13}$  und den Abstand  $\hat{h}$  :

$$\hat{f} = (13,05 \pm 1,51) \text{ cm}, \quad \text{und} \quad \hat{h} = (5,15 \pm 3,97) \text{ cm}.$$

Damit liegt die Hauptebene  $\hat{H}$  links des gewählten Punktes A mit dem Abstand  $\hat{h} = (-) 5,1544 \text{ cm}$ , aufgrund des negativen Vorzeichens. Die Hauptebene  $\tilde{H}$  liegt rechts des Punktes A mit dem Abstand  $\tilde{h} = 6,396 \text{ cm}$ .

Die gesuchte Brennweite  $f_{13}$  ergibt sich durch das Bilden des Mittwertes der berechneten Brennweiten  $\tilde{f}$  aus der Gegenstandsweite  $g'$  und  $\hat{f}$  aus der Bildweite  $b'$  mit

$$f_{13,\text{ges}} = \frac{\tilde{f}_{13} + \hat{f}_{13}}{2} = \left( \frac{12,93 + 13,50}{2} \pm \frac{1,34 + 1,51}{2} \right) = (12,99 \pm 1,43) \text{ cm}.$$

Abschließend lassen sich für diesen Versuch für die entstandenen Messfehler als Ursache noch ungenau eingestellte Komponenten auf der optischen Bank festhalten. Beispielsweise wenn die Lichtquelle leicht verdreht ist, also schräg steht, fällt kein paralleles Licht mehr durch die Linsen. Gleichermaßen wird das Ergebnis dadurch verfälscht, indem die verwendeten Linsen durch das Verschieben auf der optischen Bank leicht verdreht sind. Dadurch fällt das Licht nicht mehr senkrecht auf die Linsenoberfläche, sodass das Bild auf dem Schirm geringfügig verzerrt erscheint.

# Literatur

- Demtröder, Wolfgang (2017). *Experimentalphysik* 2. 7. Aufl. Kaiserslautern: Springer Spektrum.
- Eichler, Hans Joachim, Heinz-Detlef Kronfeldt und Jürgen Sahm (2016). *Das Neue Physikalische Grundpraktikum*. 3. Aufl. Berlin: Springer Spektrum.
- Meschede, Dieter (2010). *Gerthsen Physik*. 24. Aufl. Heidelberg: Springer.
- Tipler, Paul und Gene Mosca (2024). *Tipler Physik*. 9. Aufl. Berlin: Springer Spektrum.
- Universität Augsburg (WiSe 2024). *Versuchsanleitung O1 - Brennweiten von Linsen Und Linsensystemen*.



## 3 Anhang

### Ermittlung der Brennweiten von Linsen mittels graphischen Verfahrens

Exemplarisches Rechenbeispiel für Messung 1 für Linse 1 mit Brennweite  $f_{1,\text{ tats}} = 100 \text{ mm}$ :  
Position Dia: 17,0 cm, Position Linse: 29,0 cm, Position Schirm: 95,0 cm.  
Aus diesen Werten ergibt sich für die Gegenstandsweite  $g$  und Bildweite  $b$  :

$$g = \text{Position Linse} - \text{Position Dia} = 29,0 \text{ cm} - 17,0 \text{ cm} = 12,0 \text{ cm},$$
$$b = \text{Position Schirm} - \text{Position Linse} = 95,0 \text{ cm} - 29,0 \text{ cm} = 66,0 \text{ cm}.$$

Dieses Vorgehen wird für alle Messungen wiederholt. Der Rest der Auswertung erfolgt über die graphische Auswertung der Wertepaare  $(g_i, b_i)$  im Hauptteil der Arbeit.

### Ermittlung der Brennweiten von Linsen mittels Bessel-Verfahren

Exemplarisches Rechenbeispiel für Messung 1 für Linse 1 mit Brennweite  $f_{1,\text{ tats}} = 100 \text{ mm}$ :  
Position Dia: 22,0 cm, Linsenposition 1: 33,2 cm,  
Linsenposition 2: 82,5 cm, Position Schirm: 95,0 cm.

Aus diesen Werten ergibt sich für die Verschiebung  $e$ , den Abstand  $s$  und die Brennweite  $f$  :

$$e = \text{Linsenposition 2} - \text{Linsenposition 1} = 82,5 \text{ cm} - 33,2 \text{ cm} = 49,3 \text{ cm},$$
$$s = \text{Position Schirm} - \text{Position Dia} = 95,0 \text{ cm} - 22,0 \text{ cm} = 73,0 \text{ cm},$$
$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s} = \frac{(73,0 \text{ cm})^2 - (49,3 \text{ cm})^2}{4 \cdot 73,0 \text{ cm}} = 9,9264 \text{ cm}.$$

Der Mittelwert über alle so ermittelten Brennweiten  $f$  aus Tabelle 2.3 ergibt sich über die Formel

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i = 9,9264 + 9,9147 + 9,9290 + 9,9191 + 9,9873 = 9,9353$$

Der Fehler für den Messfehler  $\Delta f$  für Messung 1 ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left| \frac{e}{2s} \right| \cdot \Delta e + \left| \frac{s^2 + e^2}{4s^2} \right| \cdot \Delta s \\ &= \left| \frac{49,3 \text{ cm}}{2 \cdot 73,0 \text{ cm}} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} + \left| \frac{(73,0 \text{ cm})^2 + (49,3 \text{ cm})^2}{4 \cdot (73,0 \text{ cm})^2} \right| \cdot 0,3 \text{ cm} = 0,1917 \text{ cm}.\end{aligned}$$

## Ermittlung der Brennweiten von Linsen mittels Abbé-Verfahren

Exemplarisches Rechenbeispiel für Messung 1:

Position Pfeildia: 17,0 cm, Linsenposition A : 40,2 cm,

Position Schirm: 90,0 cm, Pfeilgröße B : 10,2 cm, Pfeilgröße G : 3,2 cm.

Aus diesen Werten ergibt sich für die Gegenstandsweite  $g'$ , die Bildweite  $b'$  und die Abbildungsgröße  $\beta$  :

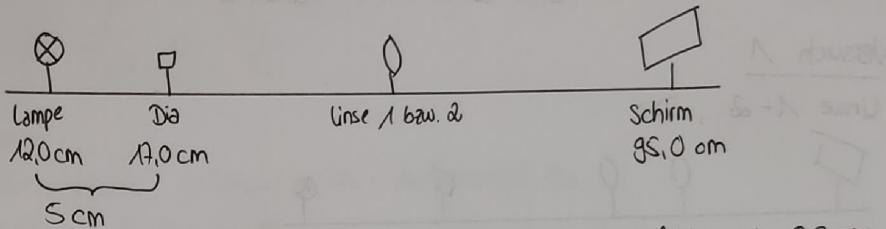
$$g' = \text{Linsenposition } A - \text{Position Pfeildia} = 40,2 \text{ cm} - 17,0 \text{ cm} = 23,2 \text{ cm},$$

$$b' = \text{Position Schirm} - \text{Linsenposition } A = 90,0 \text{ cm} - 40,2 \text{ cm} = 49,8 \text{ cm},$$

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{10,2 \text{ cm}}{3,2 \text{ cm}} = 3,1875 \text{ cm}.$$

Dieses Vorgehen wird für alle Messungen wiederholt. Der Rest der Auswertung erfolgt über die graphische Auswertung über das Auftragen der  $g_i$  gegen  $1 + \frac{1}{\beta}$  und  $b_i$  gegen  $(1 + \beta)$ .

Linse 1:  $f = +100 \text{ mm}$  Linse 2:  $f = +50 \text{ mm}$  Linse 3:  $f = -200 \text{ mm}$

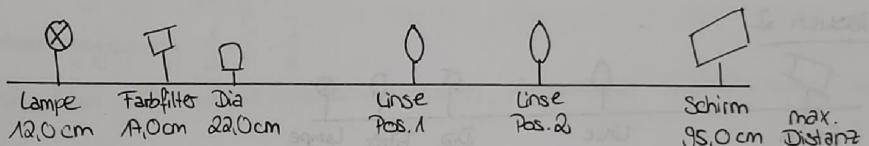


① Linse 2 mit  $f = +50 \text{ mm}$  jew. 5 Messungen Ablesefehler  $\Delta x = 0,3 \text{ cm}$

Position Linse in cm	22,8	23,8	24,8	25,8	26,8
Position Schirm in cm	95,0	48,4	44,2	38,9	37,9

② Linse 1 mit  $f = +100 \text{ mm}$

Position Linse in cm	23,0	30,0	31,0	32,0	33,0
Position Schirm in cm	95,0	77,8	68,2	62,6	60,0



① Linse 1 mit  $f = +100 \text{ mm}$

Position 1 Linse in cm	33,0	33,5	33,7	34,3	35,0
Position 2 Linse in cm	82,5	77,4	72,0	66,9	61,3
Position Schirm in cm	95,0	90,0	85,0	80,0	75,0

② Linse 2 mit  $f = +50 \text{ mm}$

Position 1 Linse in cm	26,9	27,0	27,1	27,2	27,3
Position 2 Linse in cm	88,9	84,4	78,8	73,7	68,5
Position Schirm in cm	95,0	90,0	85,0	80,0	75,0

## Versuch 1

Gruppe A06

15.01.2025

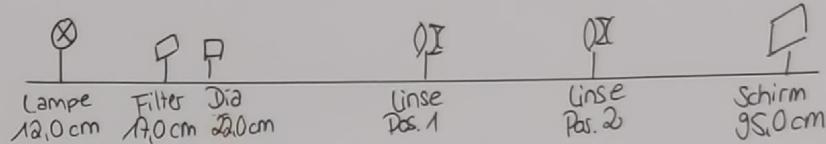
F.2

## Versuch 2

Versuch 3  
Gruppe A06  
15.01.2005

Linse 2:  $f = +50\text{ mm}$  Linse 3  $f = -200\text{ mm}$   
 ↳ Linsenkombination auf einem Träger

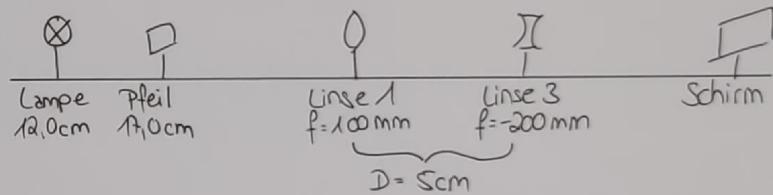
8.-)



Linsenkombination 2+3:

Position 1 Linse in cm	28,2	28,3	28,5	28,7	28,4
Position 2 Linse in cm	86,7	81,4	76,5	71,4	66,1
Position Schirm in cm	95,0	90,0	85,0	80,0	75,0

Versuch 4



Länge Pfeil, tatsächlich: 3,2 cm → Messfehler: 0,1 cm

Position Schirm in cm	90,0	85,0	80,0	75,0	70,0
Länge des Pfeils am Schirm in cm	10,2	9,1	7,3	5,5	3,7
Position Linsenkombination in cm	40,2	40,7	42,0	44,5	47,2

→ Die Position der Linsen wurde in der Mitte der Linsen abgelesen,  
 d.h. die „Füße“ der Linsenbefestigungen waren bei  $D = 5\text{ cm}$  nahtlos  
 anschließend, sodass der Zusammentreffpunkt der Füße als  
 Ablesepunkt gewählt wurde.