

M3 - Maxwell'sches Fallrad

Julia Mariella Wiest

Gruppe A06

08.01.2025

Mit der Abgabe dieses Protokolls wird bestätigt, dass es kein Plagiat ist. Falls es dennoch eindeutig als Plagiat erkannt werden sollte, ist bekannt, dass das einen Punktabzug von 20 Punkten zur Folge, ohne Möglichkeit der Nachbearbeitung, hat. Diese Bewertung wird ausnahmslos zur Gesamtnote im Anfängerpraktikum beitragen.

1 Physikalische Grundlagen

Der nachstehende Versuch wurde mit dem Ziel durchgeführt, das Trägheitsmoment J eines Fallrades experimentell zu bestimmen.

Mit dem Maxwellschen Fallrad lässt sich die Energieerhaltung eines mechanischen Systems untersuchen. Von Energieerhaltung kann gesprochen werden, wenn sich die potentielle und kinetische Energie in Summe zeitlich konstant verhalten. Durch das Hochrollen des Fallrades auf eine bestimmte Anfangshöhe z_0 besitzt dieses zu diesem Zeitpunkt potentielle Energie. Wird nun das Rad losgelassen, wandelt sich die vorhandene potentielle Energie in kinetische Energie um, wobei sich diese in Translation und Rotation aufteilt. Mathematisch ausgedrückt ergibt sich damit für die Gesamtenergie des Systems:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}^{\text{trans}} + E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = m \cdot g \cdot z_0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{z}(t)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{R_0^2} \cdot \dot{z}(t)^2 = \text{const.}$$

Dabei ist m die Masse des Fallrades, g die Erdbeschleunigung, z_0 die Anfangshöhe, \dot{z} die Fallgeschwindigkeit des Rades, J das Trägheitsmoment des Rades und R_0 der Radius der Drehachse (Universität Augsburg [WiSe 2024](#)), (Meschede [2010](#), S. 30).

Der Fallweg des Maxwellschen Rades, abhängig von der Fallzeit, kann mit der Gleichung

$$z(t) = z_0 - \frac{m \cdot g}{2 \left(m + \frac{J}{R_0^2} \right)} \cdot t^2$$

beschrieben werden.

Die Fallgeschwindigkeit des Rades wird über den Zusammenhang

$$\dot{z}(t_0) = \frac{-m \cdot g}{m + \frac{J}{R_0^2}} \cdot t_0$$

beschrieben.

Hierbei ist die Kreisfrequenz des rotierenden Rades folgendermaßen gegeben:

$$\dot{z} = \frac{2\pi R_0}{T} = \omega \cdot R_0,$$

wobei sich das Rad innerhalb der Zeit T einmal um sich selbst beziehungsweise um seine Achse gedreht hat.

1 Physikalische Grundlagen

Da sich nun das Rad nicht starr um seine Hauptträgheitsachse dreht, sondern währenddessen nach unten fällt, dreht sich diese um eine parallel dazu verschobene Achse, wodurch sich das Trägheitsmoment J erhöht. Mithilfe des Steinerschen Satzes

$$J_R = J_0 + mR^2$$

kann das Trägheitsmoment J_R bei einer Rotation um eine um den Abstand R verschobenen Achse bestimmt werden (Universität Augsburg [WiSe 2024](#)), (Weber [2007](#), S. 74).

2 Maxwell'sches Fallrad

2.1 Versuchsaufbau- und durchführung

Zur Realisation des Aufbaus des Maxwell'schen Fallrades wird ein Rad der Masse $m = 437 \text{ g}$ an einer starren Drehachse mit Radius $R_0 = 3 \text{ mm}$ angebracht. An den äußereren Enden der Drehachse wird das Rad mit Hilfe von zwei gleich langen Fäden an einem Gestell frei beweglich aufgehängt. Parallel zur Fallrichtung des Rades wird ein langes Holzlineal befestigt, sodass die Fallhöhe des Rades leicht abgelesen werden kann. Wie in Abbildung 2.1 zu sehen, ist zudem eine Lichtschranke so verbaut, dass das Fallrad mit einer seiner Drehachsen diese passiert.

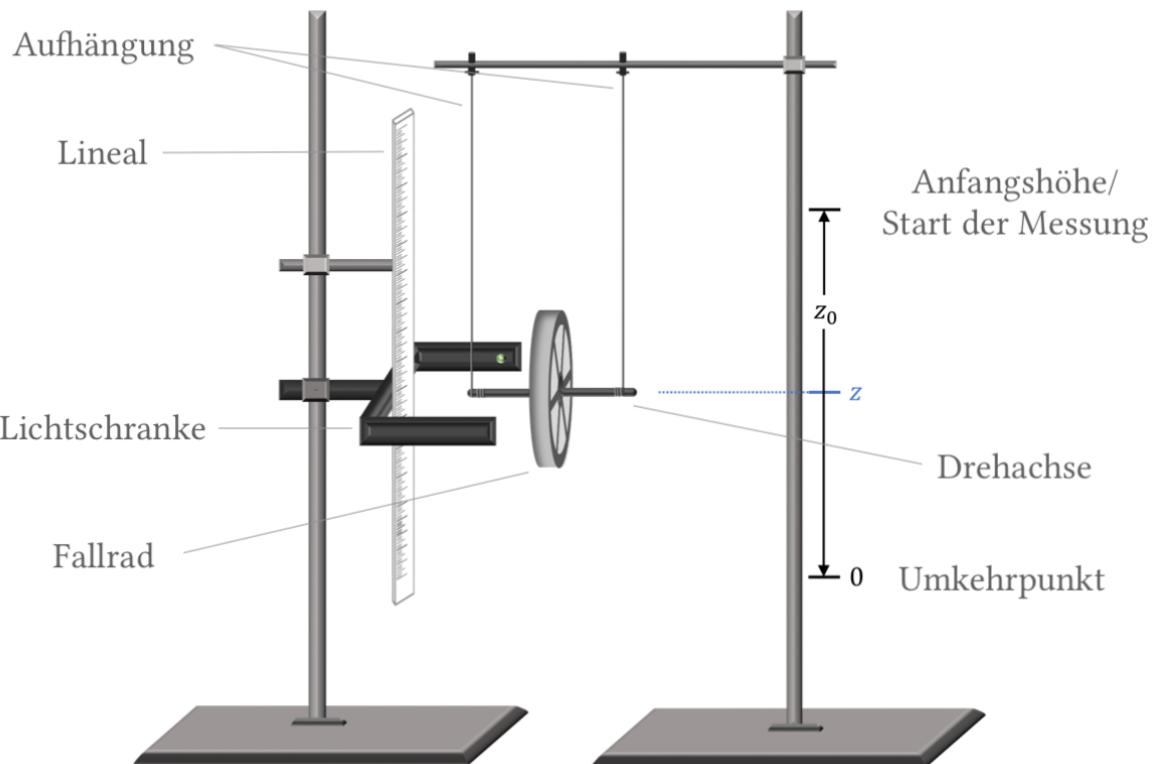


Abb. 2.1: Versuchsaufbau des Maxwell'schen Fallrades (Universität Augsburg WiSe 2024).

Zur Durchführung des ersten Versuchsteils wurde das Fallrad zehnmal auf die Anfangsfallhöhe $z_0 = 27,0 \text{ cm}$ gebracht, indem die Fäden der Aufhängung vorsichtig um die Drehachse gerollt werden. Dabei sollten die Fäden nicht übereinander, sondern nebeneinander aufgerollt werden, um beim Loslassen des Rades ein gleichmäßiges Abwickeln zu garantieren. Mit dem Loslassen des Rades wird die Handystoppuhr gestartet und die Fallzeit bis zum Umkehrpunkt gemessen,

wobei das Lineal beim Aufbau so eingestellt wurde, dass sich der Umkehrpunkt bei 0 cm befindet. Als Umkehrpunkt wird die Stelle bezeichnet, sobald sich das Fallrad einmal komplett abgewickelt hat, die Fäden also nicht mehr um die Drehachse geschlungen sind. Nach dem passieren des Umkehrpunktes beginnt das Fallrad nun, sich wieder von selbst hochzurollen. Dieser Vorgang wird jedoch nicht mehr beachtet, da nach der Messung der Fallzeit vom Startpunkt z_0 bis zum Endpunkt z das Fallrad erneut händisch auf die Starthöhe $z_0 = 27$ cm gebracht wird, um unter selben Startbedingungen die Messung zu wiederholen.

Für den zweiten und dritten Versuchsteil wird nun der Nullpunkt des Lineals auf die Lichtschranke eingestellt. Damit bestimmt nicht mehr der Umkehrpunkt das Ende der Messung, sondern der Moment, in dem das Fallrad die Lichtschranke erreicht. Dieses Vorgehen ist deswegen von Nöten, da das Rad nach dem Passieren der Lichtschranke gestoppt werden muss, bevor es erneut die Lichtschranke passiert, da ansonsten die Verdunklungszeit der Rückkehr des Rades aufgenommen werden würde. Mit diesem Aufbau werden nun jeweils zehn Messungen für zehn unterschiedliche Fallhöhen aufgenommen. Im ersten Durchgang wird das Rad auf die Anfangshöhe $z_0 = z_{\max} = 19,5$ cm gerollt. Mit dem Loslassen wird wieder die Stoppuhr gestartet und die Fallzeit des Rades so lange gemessen, bis die Höhe $z = 0$ cm auf dem Lineal erreicht wird. Gleichzeitig nimmt die Lichtschranke, sobald die Drehachse des Rades durch die Lichtschranke hindurch fällt, die Verdunklungszeit auf. Nach dem Anhalten des Fallrades, bevor es erneut von unten nach oben die Lichtschranke passieren kann, wird die Fallzeit t und die Verdunklungszeit t_D in zwei unterschiedlichen Tabellen im Messprotokoll festgehalten. Dieses Vorgehen wird nun zehn Mal für die Starthöhe $z_0 = 19,5$ cm wiederholt. Danach wird die Starthöhe nach und nach immer weiter verringert, wobei für jede gewählte Höhe abermals zehn Messungen nach demselben Muster wie oben beschrieben durchgeführt werden. Sicherheitsshalber wurde die Anzeige der Lichtschranke nach jeder Messung manuell zurückgesetzt, damit es zu keinem Ablesefehler kommt, falls die Lichtschranke fehlerhafterweise doch noch den alten Wert der vorherigen Messung anzeigen sollte, obwohl bereits eine neue Verdunklungszeit hätte aufgenommen werden sollen.

2.2 Auswertung der Messergebnisse

Auf Grundlage der im vorherigen Kapitel beschriebenen Versuchsdurchführung werden die damit erlangten Messergebnisse nun ausgewertet.

Bestimmung des Trägheitsmomentes J aus den Fallzeiten

Zuerst wird das Trägheitsmoment J des Fallrades aus den Fallzeiten t_i bei konstanter Anfangshöhe $z_0 = 27,0 \text{ cm} = 0,27 \text{ m}$ bestimmt.

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes J wird die Formel

$$z(t) = z_0 - \frac{m \cdot g}{2 \left(m + \frac{J}{R_0^2} \right)} \cdot t^2 \Leftrightarrow J = R_0^2 \cdot m \left(\frac{g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0} - 1 \right),$$

wobei $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung ist, herangezogen.

Die Masse des Rades beträgt $m = 0,437 \text{ kg}$ und der Radius der Drehachse ist $R_0 = 0,003 \text{ m}$.

Messung i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	\bar{t}
t in s	3,76	3,56	3,55	3,48	3,56	3,46	3,31	3,58	3,68	3,48	3,5420

Tabelle 2.1: Messergebnisse der Fallzeit t in s bei gleichen Anfangshöhen z_0 .

Über die zehn vorgenommenen Messungen, zu finden in Tabelle 2.1, wird der Mittelwert über die Zeiten

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = 3,542 \text{ s}$$

gebildet.

Der Fehler wird über die jeweiligen partiellen Ableitungen des Trägheitsmoments J über die Zeit t , die Masse m , und die Fallstrecke z_0 gebildet:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \frac{\partial J}{\partial t} \cdot \Delta t + \frac{\partial J}{\partial m} \cdot \Delta m + \frac{\partial J}{\partial z_0} \cdot \Delta z_0 \\ &= \left| \frac{R_0^2 \cdot m \cdot g \cdot \bar{t}}{z_0} \right| \cdot \Delta t + \left| R_0^2 \cdot \left(\frac{g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0} - 1 \right) \right| \cdot \Delta m + \left| \frac{R_0^2 \cdot m \cdot g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0^2} \right| \cdot \Delta z_0, \end{aligned}$$

wobei für $\Delta t = 0,1 \text{ s}$, $\Delta m = 0,001 \text{ kg}$ und $\Delta z_0 = 0,005 \text{ mm}$ angenommen wird.

Durch das Einsetzen der Werte in die Formel

$$J = R_0^2 \cdot m \left(\frac{g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0} - 1 \right) \pm \left| \frac{R_0^2 \cdot m \cdot g \cdot \bar{t}}{z_0} \right| \cdot \Delta t + \left| R_0^2 \cdot \left(\frac{g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0} - 1 \right) \right| \cdot \Delta m + \left| \frac{R_0^2 \cdot m \cdot g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0^2} \right| \cdot \Delta z_0$$

ergibt sich insgesamt für das Trägheitsmoment J des Fallrades ein Wert von

$$J = (8,9246 \pm 0,6926) \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2.$$

Dies ist allerdings noch nicht das Trägheitsmoment J des Schwerpunkts, da die Fäden der Aufhängung um die Achse gewickelt sind und sich dadurch die Drehachse um 3 mm verschiebt. Durch das Anwenden des Satzes von Steiner

$$J = J_S + R_0^2 \cdot m \Leftrightarrow J_S = J - R_0^2 \cdot m = 8,8853 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2,$$

lässt sich das Trägheitsmoment J des Schwerpunktes bestimmen. Diese Abweichung ist so vernachlässigbar klein ($0,0393 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$), dass auf eine weitere Korrektur in den nachfolgenden Berechnungen verzichtet wird. Alle genauen Berechnungen sind dem Anhang 3 zu entnehmen.

Die gesamte Fehlerdiskussion erfolgt als Abschluss dieses Kapitels.

Bestimmung des Trägheitsmomentes J bei verschiedenen Anfangshöhen

Für den zweiten Teil des Versuches wurden nun die Fallzeiten t_0 für verschiedene Fallhöhen z_0 ermittelt. Durch die Auftragung der unterschiedlichen Anfangshöhen z_0 gegen die Fallzeit t_0^2 entsteht eine Gerade über deren Steigung sich das gesuchte Trägheitsmoment J berechnen lässt.

z_0 in m Messung i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	\bar{t}	\bar{t}^2
0,195	3,09	3,20	3,13	3,26	3,11	3,58	3,24	3,20	3,31	3,28	3,2400	10,4976
0,190	3,50	3,05	2,96	2,96	3,16	3,01	3,13	3,15	3,03	2,99	3,0940	9,5728
0,180	2,80	3,53	3,01	3,58	3,11	2,80	3,08	2,85	2,98	2,98	3,0720	9,4372
0,170	2,73	2,83	2,83	2,80	3,01	2,81	2,98	2,76	2,89	3,10	2,8740	8,2599
0,160	2,86	2,91	2,70	2,76	2,70	2,76	2,63	2,53	2,60	2,70	2,7150	7,3712
0,150	2,81	2,70	2,83	2,81	2,81	2,93	2,73	2,75	2,75	2,31	2,7430	7,5240
0,140	2,66	2,61	2,50	2,51	2,78	2,58	2,44	2,58	2,80	2,36	2,5820	6,6667
0,130	2,73	2,40	2,41	2,48	2,15	2,60	2,55	2,53	2,46	2,51	2,4820	6,1603
0,120	2,36	2,36	2,36	2,05	2,30	2,41	2,38	2,41	2,46	2,25	2,3340	5,4476
0,110	2,35	2,33	2,33	2,23	2,25	2,08	2,36	1,88	2,26	2,33	2,2400	5,0176

Tabelle 2.2: Messergebnisse der Fallzeit bei unterschiedlichen Anfangshöhen z_0 .

Anhand der Messergebnisse in Tabelle 2.2 entsteht der in Abbildung 2.2 zu sehende Zusammenhang.

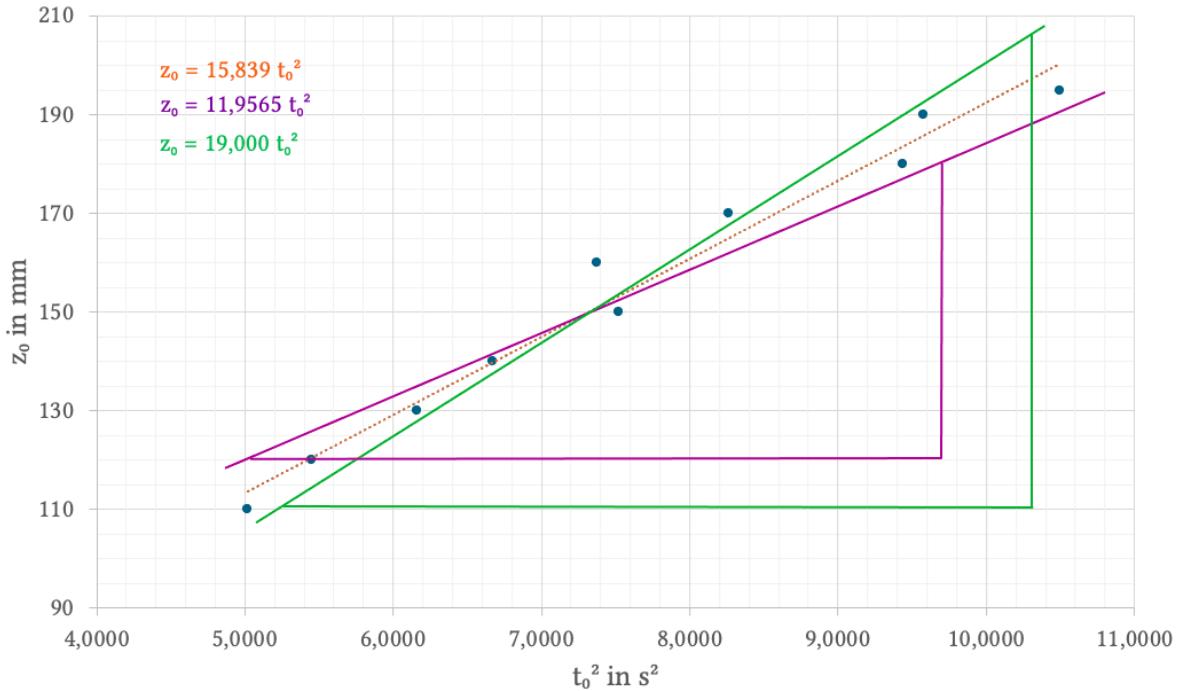


Abb. 2.2: Auftragung der potenzierten Fallzeit t_0^2 gegen die Anfangshöhe z_0 .

Dabei lässt sich der Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment J mit der Steigung der Geraden, welche im Diagramm orange eingefärbt ist, folgendermaßen herstellen:
Die Beschleunigung des Fallrades ist über die Gleichung

$$\ddot{z}(t_0) = \frac{-m \cdot g}{m + \frac{J}{R_0^2}} = \underbrace{\frac{-m}{m + \frac{J}{R_0^2}}}_{\xi} \cdot g = \xi \cdot g$$

gegeben. Einmaliges Integrieren ergibt die Fallgeschwindigkeit

$$\dot{z}(t_0) = \frac{-m \cdot g}{m + \frac{J}{R_0^2}} \cdot t_0 = \xi \cdot g \cdot t_0$$

des Fallrades. Aus einem erneuten Integrieren resultiert die bereits angewandte Formel des Fallweges

$$z(t_0) = z_0 - \frac{m \cdot g}{2 \cdot \left(m + \frac{J}{R_0^2}\right)} \cdot t_0^2 = z_0 - \frac{g}{2} \cdot \frac{m}{m + \frac{J}{R_0^2}} \cdot t_0^2 = z_0 - \frac{g}{2} \cdot \xi \cdot t_0^2.$$

Durch das Einsetzen der Anfangsbedingungen

$$\dot{z}(t = 0) = z_0 = 0 \quad z(t = 0) = z_0,$$

d.h. zum Startzeitpunkt wird auf der Stoppuhr $t = 0$ s angezeigt, wobei sich das Fallrad zu diesem Zeitpunkt genau auf der Anfangshöhe z_0 befindet, in die Gleichung des Fallweges $z(t_0)$ folgt der Zusammenhang

$$z(t_0) = -\frac{g}{2} \cdot \xi \cdot t_0^2.$$

Insgesamt ergibt sich daraus die Steigung ξ in Abhängigkeit von t_0^2 :

$$\xi = -\frac{g}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{2 \left(m + \frac{J}{R_0^2} \right)},$$

woraus sich wiederum das Trägheitsmoment

$$J = m \cdot R_0^2 \cdot \left(\frac{g}{2\xi} - 1 \right)$$

mit $m = 0,437$ kg, $R_0 = 0,003$ m und $\xi = 15,839 \cdot 10^{-3}$ m/s², wie in Abbildung 2.2 zu sehen, berechnen lässt.

Der Fehler des Trägheitsmomentes J wird mithilfe des Größtfehlers bestimmt:

$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial m} \cdot \Delta m + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \Delta \xi = \left| R_0^2 \cdot \left(\frac{g}{2\xi} - 1 \right) \right| \cdot \Delta m + \left| m \cdot R_0^2 \cdot \frac{g}{2\xi^2} \right| \cdot \Delta \xi,$$

mit $\Delta m = 0,001$ kg und $\Delta \xi = 3,52 \cdot 10^{-3}$ m/s².

Dabei ergibt sich der Fehler $\Delta \xi$ aus den Steigungen der beiden Fehlergeraden in lila und grün aus dem Diagramm 2.2. Durch das Einzeichnen und Auswerten der Steigungsdreiecke für die Fehlergeraden ergeben sich folgende Werte:

$$\text{Steigung lila} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \xi_{\min} = 11,9565 \text{ m/s}^2, \quad \text{Steigung grün} = \xi_{\max} = 19,0000 \text{ m/s}^2.$$

Der Gesamtfehler $\Delta \xi$ lässt sich als Mittelwert der beiden Fehlergeraden angeben:

$$\Delta \xi = \frac{\xi_{\max} - \xi_{\min}}{2} = 3,52 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Insgesamt ergibt sich, durch Einsetzen der oben genannten Werten in die Formel

$$\begin{aligned} J &= m \cdot R_0^2 \cdot \left(\frac{g}{2\xi} - 1 \right) \pm \left| R_0^2 \cdot \left(\frac{g}{2\xi} - 1 \right) \right| \cdot \Delta m + \left| m \cdot R_0^2 \cdot \frac{g}{2\xi^2} \right| \cdot \Delta \xi \\ &= (12,140 \pm 2,735) \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

für das Trägheitsmoment. Alle genauen Berechnungen sind wiederum dem Anhang 3 zu entnehmen.

Bestimmung der Gesamtenergie aus der potentiellen, translativen und rotativen Energie

Durch das Hochheben des Fallrades auf die Anfangshöhe z_0 besitzt dieses dort die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot z_0.$$

Nach dem Loslassen des Rades wird diese in kinetische Translations- und Rotationsenergie umgewandelt.

Gemäß der Energieerhaltung lässt sich so die Gesamtenergie des Systems über die Formel

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}^{\text{trans}} + E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = m \cdot g \cdot z_0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{z}(t_D)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{R_0^2} \cdot \dot{z}(t_D)^2 = \text{const}$$

bestimmen.

Dabei lässt sich die Geschwindigkeit $\dot{z}(t_D)$ über folgenden Zusammenhang bestimmen:

$$\dot{z}(t_D) = \frac{2 \cdot R_0}{t_D}$$

beziehungsweise

$$\dot{z} = \omega R_0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\dot{z}_0}{R_0}.$$

Die Lichtschranke befand sich für alle Messungen auf der Höhe $z = 0$ cm, wobei bei der Versuchsdurchführung die Anfangshöhe z_0 des Fallrades variiert wurde. Zur weiteren Auswertung wird dies nun so umskaliert, dass es den Anschein erweckt, als würde für jede neue Messreihe die Lichtschranke verschoben worden sein, sodass letztendlich das Fallrad immer aus derselben Anfangshöhe z_0 losgelassen wurde und der Fallweg zur Lichtschranke durch das Verschieben jener verkürzt wurde. Dieses Vorgehen wird zur Vereinfachung der Berechnungen angewendet.

Die maximale Anfangshöhe z_{\max} befand sich auf der Höhe $z_{0,\max} = 0,195$ m. Von diesem Wert wird nun die jeweilige Anfangshöhe $z_{0,i}$ der Versuchsreihen abgezogen, um die Lichtschrankenhöhe z_{norm} bei Verschieben zu erhalten. Mathematisch ausgedrückt ergibt sich die Umskalierung von z über

$$z_{\max} - z_0 = 0,195 \text{ m} - \text{Anfangshöhe } z_0 = z_{\text{norm}}.$$

Damit lassen sich die verschiedenen Energieformen folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= (z_{\max} - z_0) \cdot m \cdot g = z_{\text{norm}} \cdot m \cdot g, \\ E_{\text{trans}} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{z}^2, \\ E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{R_0^2} \cdot \dot{z}^2, \end{aligned}$$

mit $\dot{z}(t_D)$ und $J = 12,14 \cdot 10^{-3}$ kgm² aus dem vorherigen Teilkapitel.

2 Maxwellsches Fallrad

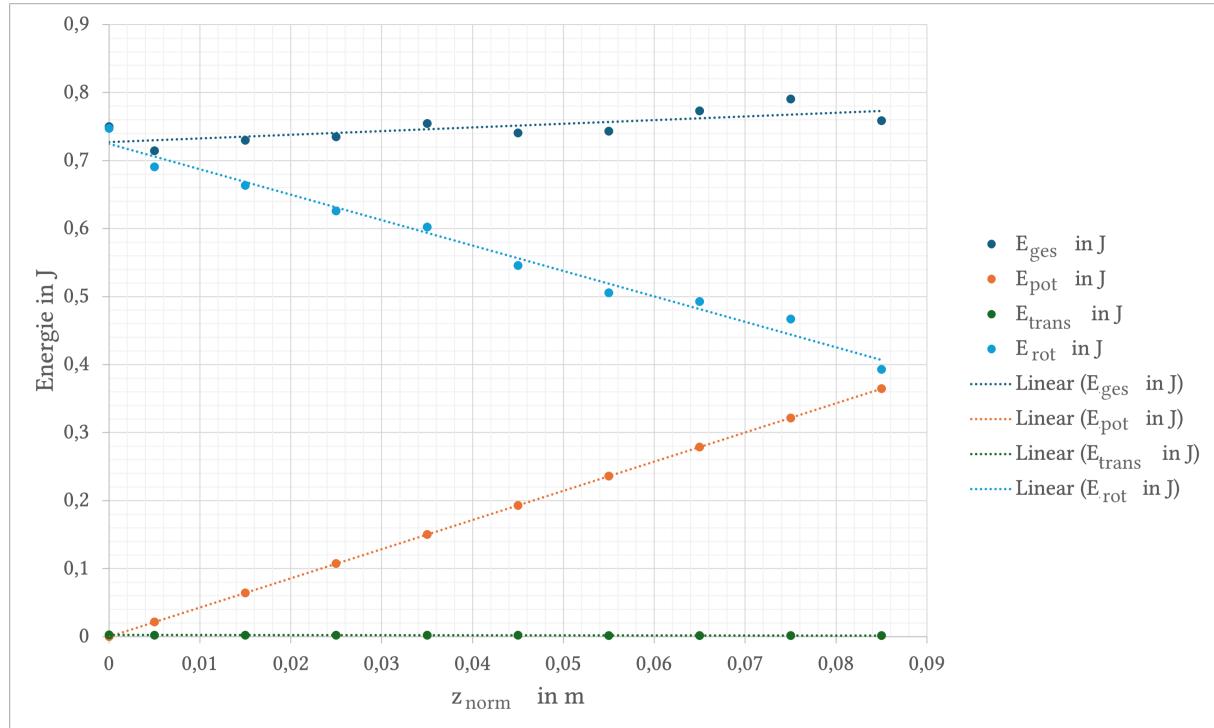


Abb. 2.3: Gegenüberstellung der verschiedenen Energien gegen die Höhe z .

Für die Fehlerrechnung werden folgende Formeln angewandt:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{\text{pot}} &= \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial m} \cdot \Delta m + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z_0} \cdot \Delta z_0 = |(z_{\max} - z_0) \cdot g| \cdot \Delta m + |m \cdot g| \cdot \Delta z_0 \\
 &= |z_{\text{norm}} \cdot g| \cdot \Delta m + |m \cdot g| \cdot \Delta z_0 \\
 \Delta E_{\text{trans}} &= \frac{\partial E_{\text{trans}}}{\partial m} \cdot \Delta m + \frac{\partial E_{\text{trans}}}{\partial t_D} \cdot \Delta t_D = \left| \frac{1}{2} \cdot \dot{z}^2 \right| \cdot m + \left| \frac{m \cdot \dot{z}^2}{t_D} \right| \cdot \Delta t_D \\
 \Delta E_{\text{rot}} &= \frac{\partial E_{\text{rot}}}{\partial J} \cdot \Delta J + \frac{\partial E_{\text{rot}}}{\partial t_D} \cdot \Delta t_D = \left| \frac{1}{2} \cdot \dot{z}^2 \right| \cdot \Delta J + \left| \frac{J \dot{z}^2}{R_0^2 \cdot t_D} \right| \Delta t_D \\
 \Delta E_{\text{ges}} &= \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{trans}} + \Delta E_{\text{rot}}
 \end{aligned}$$

mit $\Delta m = 0,001 \text{ kg}$, $\Delta z_0 = 0,005 \text{ m}$, $\Delta t_D = 0,001 \text{ s}$ und $\Delta J = 0,2735 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$.

Die Messungen aus dem Versuch sind den Tabelle 2.3 zu entnehmen. Jegliche Berechnungen wurden anhand der oben stehenden Formeln mittels Excel vorgenommen, wobei die daraus resultierenden Ergebnisse vollständig in Tabelle 2.4 aufgetragen sind.

Bei der Fehlerrechnung fällt auf, dass der Fehler der einzelnen Energien mit abnehmender Fallhöhe z_0 abnimmt.

Die Ergebnisse der gesamten, potentiellen, translativen und rotativen Energie lässt sich in Abbildung 2.3 in einem Diagramm gegen z auftragen.

Bei der Betrachtung des Diagramms lässt sich zunächst annehmen, dass die Translationsenergie E_{trans} in grün konstant den Wert 0 annimmt. Diese Annahme lässt sich mit einem Blick in Tabelle 2.4 verwerfen, da die Translationsenergie zwar vorhanden ist, allerdings so klein ist, dass diese visuell nicht mehr wahrnehmbar scheint. Daraus lässt sich folgern, dass nur ein sehr geringer Anteil der potentiellen Energie (orange) in Translationsenergie umgewandelt wird. Demnach wird fast die gesamte potentielle Energie in Rotationsenergie (hellblau) umgesetzt. Bereits während der Durchführung des Versuches war zu erkennen, dass sich das Fallrad an sich sehr schnell dreht, jedoch dazu verhältnismäßig langsam fällt. Dies zeigt sich auch im Diagramm, indem sich die Ausgleichsgerade der Rotationsenergie in Hellblau nahezu an der Ausgleichsgeraden der potentiellen Energie in Orange spiegelt. Ebenso erkennt man gut, dass die Rotationsenergie linear mit der zurückzulegenden Strecke ansteigt. Die Ausgleichsgerade der Gesamtenergie in Dunkelblau, sollte gemäß der Energieerhaltung eigentlich konstant denselben Wert annehmen. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die Gesamtenergie bei fallender zurückgelegter Strecke leicht anzusteigen scheint. Trotz allem ist die Energieerhaltung beim Versuch des Maxwellschen Fallrades erfüllt, denn der nicht in kinetische Energie umgewandelte Teil der potentiellen Energie geht mit Reibungsverlusten einher. Zwischen dem Rad, den Fäden und der Drehachse herrschende Reibung beziehungsweise entsteht beim Fallen des Rades zusätzlich ein Luftwiderstand. Somit geht ein Teil der Energie nicht in kinetische Energie über, sondern wird in Wärme umgewandelt. Das heißt, insgesamt müsste in der Berechnung zusätzlich der Übergang in Wärmeenergie betrachtet werden. Zugleich könnte man ebenfalls weitere vorherrschende Schwingungen des Rades miteinbeziehen, da das Fallrad an der nicht starren Aufhängung auch leicht nach vorne und hinten schwingen konnte. Experimentell konnte der Reibungsverlust auch daran festgemacht werden, dass, wenn man das Rad nach dem Umkehrpunkt wieder von selbst hat hochrollen lassen, dieses nicht mehr auf die ursprüngliche Starthöhe zurückkehrte.

Bestimmung des Trägheitsmomentes J aus der ersten Ableitung des Weges nach der Zeit $\dot{z}(t)$

Als Letztes wird nun nochmals das Trägheitsmoment J des Fallrades bestimmt, indem die Fallgeschwindigkeit \dot{z} über die Fallzeit t aufgetragen wird.

Für die Fallzeit gilt:

$$\frac{dz}{dt_D} = \dot{z}(t_D) = - \underbrace{\frac{m \cdot g}{m + \frac{J}{R_0^2}}}_\tau t = \tau \cdot t,$$

wobei $\tau = 0,0264$ die Steigung der Geraden im Diagramm 2.4 darstellt.

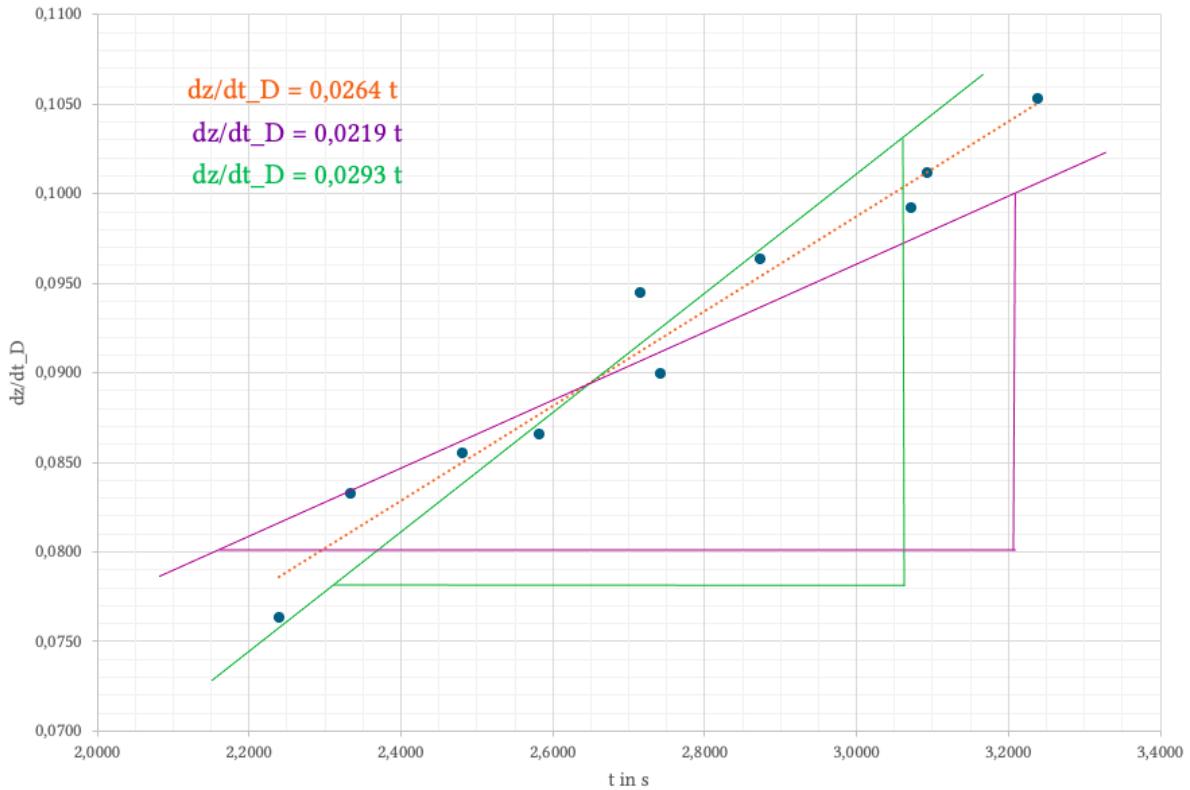


Abb. 2.4: Gegenüberstellung der Fallgeschwindigkeit z gegen die Fallzeit t .

Für das Trägheitsmoment J ergibt sich damit

$$J = \left(\frac{g}{\tau} - 1 \right) \cdot m \cdot R_0^2$$

mit der Fehlerrechnung

$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial \tau} \cdot \Delta \tau + \frac{\partial J}{\partial m} \cdot \Delta m = \left| \frac{g}{\tau^2} \cdot m \cdot R_0^2 \right| \cdot \Delta \tau + \left| \left(\frac{g}{\tau} - 1 \right) \cdot R_0^2 \right| \cdot \Delta m.$$

Der Fehler der Steigung $\Delta \tau$ ergibt sich aus den Fehlergeraden in lila und grün aus Abbildung 2.4. Durch das Einzeichnen und Auswerten der Steigungsdiagramme für die Fehlergeraden ergeben sich die Werte

$$\text{Steigung lila} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tau_{\min} = 0,0219 \text{ m/s}^2, \quad \text{Steigung grün} = \tau_{\max} = 0,0293 \text{ m/s}^2.$$

Der Gesamtfehler $\Delta \tau$ lässt sich als Mittelwert der beiden Fehlergeraden angeben:

$$\Delta \tau = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = 3,70 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Insgesamt ergibt sich durch das Einsetzen der Werte für das Trägheitsmoment

$$J = (14,575 \pm 2,0832) \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2.$$

Alle genauen Berechnungen sind im Anhang 3 zu finden.

Der Vergleich aller über verschiedene Arten berechnete Trägheitsmomente J

$$\text{bei gleicher Fallhöhe: } J = (8,9246 \pm 0,6926) \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2$$

$$\text{bei unterschiedlicher Fallhöhe: } J = (12,1400 \pm 2,735) \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2$$

$$\text{über die Fallgeschwindigkeit: } J = (14,5750 \pm 2,0832) \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2$$

ergibt, dass diese relativ nah beieinander liegen. Die beiden letzten Werte stimmen bei Berücksichtigung der Fehlerwerte fast überein. Der erste Wert liegt etwas daneben, weicht allerdings auch nicht übermäßig von den anderen beiden ab. Die Ursachen für die möglichen Abweichungen erfolgt nun in der folgenden Fehlerdiskussion.

Fehlerdiskussion

Während des Versuches wurden unterschiedliche Fehlerquellen offensichtlich. Auf diese soll nun zum Schluss eingegangen werden.

- Die Aufhängung des Fallrades durch die zwei angebrachten Fäden an den äußeren Rändern der Drehachse erfolgte nicht parallel, sodass die Fäden an der Befestigung am Metallgestell nach oben verjüngend verliefen und dadurch nicht mehr parallel waren.
- Vor allem beim Stoppen der Zeit mit der Handstoppuhr kommt es zu Verzögerungen durch die Reaktionszeit. Zuerst ist das Abstimmen zwischen wirklichem Loslassen des Fallrades und dem gleichzeitigen Starten der Stoppuhr nie exakt gleich. Ebenfalls ist die visuelle Aufnahme, wann das Fallrad am Nullpunkt des Lineal angekommen ist, beziehungsweise wann der Umkehrpunkt erreicht wird und des unverzüglichen Stoppens der Stoppuhr schwer genuestens umzusetzen. Beim ersten Teil des Versuches den Umkehrpunkt abzupassen erschien leichter zu realisieren, als bei dem Nullpunkt an der Lichtschranke, da hierbei auch der Blickwinkel auf das Lineal entscheidend zum Stoppzeitpunkt beträgt.
- Trotz vorsichtigem Loslassen des Fallrades rollt sich dieses nicht exakt gerade nach unten ab, sondern schwingt teilweise leicht wie eine Schaukel vor und zurück, was zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen kann.
- Gleichermassen darf das Rad nur in der Anfangsposition losgelassen werden und keinesfalls „angeschubst“ werden, da ansonsten eine zusätzliche Beschleunigung beim Fallvorgang berücksichtigt werden müsste.
- Das im Versuchsaufbau parallel zum Fallrad angebrachte Lineal war leicht schief in die Halterung eingeschraubt, was beim Ablesen der Höhenwerte zu Fehlern führen kann.
- Zugleich ergeben sich Ungenauigkeiten beim Einstellen der Starthöhe z_0 des Rades von Hand, sodass das Fallrad für die jeweilige Versuchsreihe nicht immer exakt aus derselben Höhe fallen gelassen wurde.
- Durch das Zurücksetzen des vorherigen Messwertes auf der Lichtschranke durch einen Knopf wurde diese teilweise minimal verschoben, sodass diese sich nicht mehr exakt

im Wasser befand. Dies konnte zwar durch eine auf der Lichtschranke angebrachte Wasserwaage behoben werden, jedoch entsprach der Ausrichtungswinkel der Lichtschranke danach nicht mehr dem zuvorigen. Das leichte Verschieben der Lichtschranke, beziehungsweise auch das bereits genannte minimale hin und her Schwingen des Rades führt zu einer Vergrößerung des Querschnitts der Achse und beeinflusst dadurch die Verdunklungszeit. Ansonsten lassen sich die Messergebnisse der Lichtschranke aufgrund der Technik als sehr exakt annehmen.

Literatur

- Meschede, Dieter (2010). *Gerthsen Physik*. 24. Aufl. Heidelberg: Springer.
Universität Augsburg (WiSe 2024). *Versuchsanleitung M3 - Maxwellsches Fallrad*.
Weber, Reinhart (2007). *Klassische Physik*. 1. Aufl. Bd. Teil I. Wiesbaden: B.G. Teubner.

3 Anhang

Bestimmung des Trägheitsmoments J aus den Fallzeiten

$$\begin{aligned}
 J &= R_0^2 \cdot m \left(\frac{g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0} - 1 \right) \pm \left| \frac{R_0^2 \cdot m \cdot g \cdot \bar{t}}{z_0} \right| \cdot \Delta t + \left| R_0^2 \cdot \left(\frac{g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0} - 1 \right) \right| \cdot \Delta m + \left| \frac{R_0^2 \cdot m \cdot g \cdot \bar{t}^2}{2 \cdot z_0^2} \right| \cdot \Delta z_0 \\
 &= (0,003 \text{ m})^2 \cdot 0,437 \text{ kg} \cdot \left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (3,542 \text{ s})^2}{2 \cdot 0,27 \text{ m}} - 1 \right) \\
 &\quad \pm \left| \frac{(0,003 \text{ m})^2 \cdot 0,437 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 3,542 \text{ s}}{0,27 \text{ m}} \right| \cdot 0,1 \text{ s} \\
 &\quad + \left| (0,003 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (3,542 \text{ s})^2}{2 \cdot 0,27 \text{ m}} - 1 \right) \right| \cdot 0,001 \text{ m} \\
 &\quad + \left| \frac{(0,003 \text{ m})^2 \cdot 0,437 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (3,542 \text{ s})^2}{2 \cdot (0,27 \text{ m})^2} \right| \cdot 0,005 \text{ m} \\
 &= (8,9246 \pm 0,6926) \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2
 \end{aligned}$$

Anwendung des Steinerschen Satzes:

$$J_S = J - R_0^2 \cdot m = 8,9246 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2 - (0,003 \text{ m})^2 \cdot 0,437 \text{ kg} = 8,8853 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

Bestimmung des Trägheitsmomentes J bei verschiedenen Anfangshöhen

$$\begin{aligned}
 J &= m \cdot R_0^2 \cdot \left(\frac{g}{2\xi} - 1 \right) \pm \left| R_0^2 \cdot \left(\frac{g}{2\xi} - 1 \right) \right| \cdot \Delta m + \left| m \cdot R_0^2 \cdot \frac{g}{2\xi^2} \right| \cdot \Delta \xi \\
 &= 0,437 \text{ kg} \cdot (0,003 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 15,839 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2} - 1 \right) \\
 &\quad \pm \left| (0,003 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 15,839 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2} - 1 \right) \right| \cdot 0,001 \text{ m} \\
 &\quad + \left| 0,437 \text{ kg} \cdot (0,003 \text{ m})^2 \cdot \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{2 \cdot (15,839 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2)^2} \right| \cdot 3,52 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 \\
 &= (12,140 \pm 2,735) \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2
 \end{aligned}$$

Steigung lila:

$$\xi_{\min} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{175 - 120}{9,6 - 5,0} = \frac{55}{4,6} = 11,9565$$

Steigung grün:

$$\xi_{\max} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{205 - 110}{10,2 - 5,2} = \frac{95}{5,0} = 19,0000$$

Steigung insgesamt:

$$\Delta\xi = \frac{\xi_{\max} - \xi_{\min}}{2} = \frac{19,00 - 11,96}{2} = 3,52 \text{ mm/s}^2 = 3,52 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Bestimmung des Trägheitsmomentes J aus der ersten Ableitung des Weges nach der Zeit $\dot{z}(t)$

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{g}{\tau} - 1 \right) \cdot m \cdot R_0^2 \pm \left| \frac{g}{\tau^2} \cdot m \cdot R_0^2 \right| \cdot \Delta\tau + \left| \left(\frac{g}{\tau} - 1 \right) \cdot R_0^2 \right| \cdot \Delta m \\ &= \left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{0,0264 \text{ m/s}^2} - 1 \right) \cdot 0,437 \text{ kg} \cdot 0,003 \text{ m}^2 \\ &\quad \pm \left| \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{(0,0264 \text{ m/s}^2)^2} \cdot 0,437 \text{ kg} \cdot (0,003 \text{ m})^2 \right| \cdot 3,70 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 \\ &\quad + \left| \left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{0,0264 \text{ m/s}^2} - 1 \right) \cdot 0,003 \text{ m}^2 \right| \cdot 0,001 \text{ m} \\ &= (14,575 \pm 2,0832) \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Steigung lila:

$$\tau_{\min} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,103 - 0,080}{3,20 - 2,15} = \frac{0,023}{1,05} = 0,0219$$

Steigung grün:

$$\tau_{\max} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,100 - 0,078}{3,05 - 2,30} = \frac{0,022}{0,750} = 0,0293$$

Steigung ingsgesamt:

$$\Delta\tau = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{0,0293 - 0,0219}{2} = 3,70 \text{ mm/s}^2 = 3,70 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

$$z_0 = 29,0 \text{ cm}$$

$$\Delta z_0 = 0,5 \text{ cm}$$

$$\Delta t = 0,1 \text{ s}$$

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t in s	3,76	3,56	3,55	3,48	3,56	3,46	3,31	3,58	3,68	3,48

Hessfehler:

- Reaktionszeit

↳ loslassen + Stoppuhr starten gleichzeitig abstimmen

↳ visuelles Aufnehmen wann Fallrad am Nullpunkt
→ rollt sich sofort wieder hoch

- Fallrad schwingt an Fäden leicht hin und her

- Auslenkung auf z_0 nicht exakt von Hand möglich

z_0

Versuch 1

Gruppe A06

08.01.2025

Lineal = 0,0 cm

Lineal auf Lichtschranke genutzt

Hessung z_0 in mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 195	3,09	3,20	3,13	3,26	3,11	3,58	3,24	3,20	3,31	3,28
2 190	3,50	3,05	2,96	2,96	3,16	3,01	3,13	3,15	3,03	2,99
3 180	2,80	3,53	3,01	3,58	3,11	2,80	3,08	2,85	2,98	2,98
4 170	2,73	2,83	2,83	2,80	3,01	2,81	2,98	2,76	2,89	3,10
5 160	2,86	2,91	2,70	2,76	2,70	2,76	2,63	2,53	2,60	2,70
6 150	2,81	2,70	2,83	2,81	2,81	2,93	2,73	2,75	2,75	2,31
7 140	2,66	2,61	2,50	2,51	2,78	2,58	2,44	2,58	2,80	2,36
8 130	2,73	2,40	2,41	2,48	2,15	2,60	2,55	2,53	2,46	2,51
9 120	2,36	2,36	2,18	2,05	2,30	2,41	2,38	2,41	2,46	2,25
10 110	2,35	2,33	2,13	2,23	2,25	2,08	2,36	1,88	2,26	2,33

Messergebnisse t in s Fallzeit

Hessfehler:

- Lineal etwas schief eingeschraubt

- wie oben

- Blickperspektive wann Fallrad bei O nicht exakt immer gleich

↳ jetzt O auf Lineal nicht mehr wenn Fäden ganz abgesollt?

Versuch 2 + Versuch 3

8.1.24
PC

Versuch 3		z ₀ in mm	Messung									10
Gruppe A06	08.01.2025		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	195	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057	0,057
2	190	0,060	0,058	0,060	0,060	0,060	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,060
3	180	0,060	0,060	0,060	0,062	0,060	0,061	0,060	0,060	0,062	0,062	0,062
4	170	0,063	0,062	0,062	0,061	0,063	0,061	0,063	0,062	0,064	0,064	0,064
5	160	0,064	0,063	0,064	0,063	0,066	0,063	0,064	0,064	0,064	0,067	0,067
6	150	0,067	0,067	0,067	0,066	0,065	0,067	0,067	0,067	0,067	0,067	0,070
7	140	0,068	0,071	0,068	0,071	0,068	0,070	0,068	0,070	0,069	0,070	0,070
8	130	0,069	0,072	0,069	0,072	0,070	0,070	0,070	0,069	0,070	0,072	0,072
9	120	0,073	0,072	0,073	0,071	0,073	0,071	0,072	0,072	0,072	0,080	0,077
10	110	0,077	0,078	0,077	0,078	0,078	0,079	0,080	0,080	0,082	0,080	0,077

Messergebnisse Verdunklungszeit t_D in $\frac{1}{s}$

$\Delta t_D = 0,001$

Messfehler : - Lichtschranke durch drücken des Zurücksetzen Knopfes evtl. nicht immer exakt im Wasser
- Fallrad schwingt teilw. leicht hin- und her,
sodass Verdunklungszeit dadurch verfälscht wird

8.1.24 R