Vollständige Induktion

Tim Nätebus

November 2024

1 Vollständige Induktion

1.1 Ablauf

- **Induktionsanfang**: Aufzeigen, dass die Aussage für einen Startwert gilt meistens $n \in \mathbb{N}$: $n = 1$.
- **Induktionsschritt**:
  - **Induktionsvoraussetzung / Induktionsannahme**:
    Davon ausgehen, dass die Aussage für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt.
  - **Induktionsbehauptung**:
    Aussagen, dass die Aussage für $n + 1$ gelten muss.
  - **Induktionsschluss**:
    Mithilfe der Induktionsvoraussetzung zeigen, dass die Aussage tatsächlich für $n + 1$ gilt.

1.2 Beispiel 1

Vollständige Induktion am Beispiel: Gaußsche Summenformel
Die Gaußsche Summenformel lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.2.1 Induktionsanfang

Wir beginnen mit dem Startwert $n = 1$

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 * 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Also gilt die Formel für $n = 1$.

1.2.2 Induktionsschritt

Angenommen, die Formel gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir Müssen zeigen, dass die Formel auch für $n+1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

Nach Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Fassen wir zusammen:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Also gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

1.3 Schlussfolgerung

Damit haben wir gezeigt, dass die Formel für $n+1$ gilt, wenn sie für n gilt. Somit gilt die Gaußsche Summenformel für alle $n \in \mathbb{N}$.