Projet : Etude de deux modèles de trafic routier

Consignes :
— Le projet se composera d'un programme et d'un rapport tapé (en LaTeX idéalement) limité à 20 pages.
— Les différents fichiers nécessaires à l'exécution du programme devront être déposés sur Madoc sous forme d'une archive .zip.
— Le rapport (qui ne contiendra pas de code mais pourra y faire référence) devra également être déposé sur Madoc.
— Le tout est à rendre au plus tard le vendredi 22 décembre 2023 à 23h59.

La notation tiendra compte
— du respect des consignes,
— de la qualité de la rédaction,
— du choix des problèmes étudiés par l'étudiant (quelques cas qui conduisent à des solutions qualitativement différentes valent mieux qu'un inventaire de problèmes peu différents),
— des résultats numériques (ceux obtenus avec une méthode d'ordre élevée seront valorisés, mais uniquement s'ils sont corrects),
— de la capacité de l'étudiant à interpréter les résultats, à pointer les difficultés, à prendre du recul sur son travail.

On s'intéresse dans ce projet à deux modèles de trafic routier, l'un s'écrit sous forme scalaire, l'autre sous la forme d'un système hyperbolique.

1 Modèle scalaire

On considère tout d'abord le modèle de trafic routier scalaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) + \partial_x \left(f(\rho(t,x)) \right) = 0, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), \end{cases}$$

avec $\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la densité de voitures, $f(\rho) = \rho(1-\rho)$ et ρ_0 une condition initiale. On considère des conditions aux bords de Neumann homogènes.

1. Proposer différentes conditions initiales constantes par morceaux qui conduisent à des solutions qualitativement différentes (par exemple un choc, ou une détente, ou deux chocs, ou deux détentes, ou un choc et une détente, *etc.*). Etudier théoriquement les solutions exactes associées.
2. Programmer différents schémas de type volumes finis pour ce modèle. Discuter des solutions approchées et des propriétés numériquement illustrées de ces schémas.

2 Système hyperbolique

On considère ensuite un modèle de trafic routier plus riche, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u + \rho p(\rho)) + \partial_x(\rho u(u + p(\rho))) = 0, \end{cases}$$

avec $\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la densité de voitures, $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leur vitesse moyenne et $p(\rho)$ une fonction donnée qui vérifie $p'(\rho) > 0$ et $p''(\rho) \geq 0$ et qui représente le comportement des automobilistes (notamment leur anticipation).

1. On pose $W = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$. Ecrire le système sous forme quasi-linéaire $\partial_t W + A(W)\partial_x W = 0$ avec A une matrice à expliciter.
2. Faire l'étude théorique du nouveau système (montrer qu'il est strictement hyperbolique, étudier les champs). Vérifier que $I_1 = u + p(\rho)$, $I_2 = u$ sont des invariants de Riemann associés respectivement aux champs 1 et 2. Résoudre le problème de Riemann.
3. Programmer un schéma volumes finis pour ce système hyperbolique.
   Par exemple, pour un système du type $\partial_t W + \partial_x F(W) = 0$ avec $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on pourra utiliser le schéma de Rusanov donné par

   $$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left(G(W_i^n, W_{i+1}^n) - G(W_{i-1}^n, W_i^n) \right),$$

   avec le flux numérique

   $$G(W_L, W_R) = \frac{F(W_L) + F(W_R)}{2} - \max_{k=1,2}(|\lambda_k(W_L)|, |\lambda_k(W_R)|) \frac{W_R - W_L}{2},$$

   où les λ_k sont les valeurs propres associées au problème quasi-linéaire correspondant. La condition de stabilité s'écrit $\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{2 \max_i \left(|\lambda_1(W_i^n)|, |\lambda_2(W_i^n)| \right)}$.
   Mais il n'est pas obligatoire d'utiliser ce schéma.
4. Proposer différentes simulations pour expliquer et illustrer le comportement des méthodes numériques choisies. L'objectif est de reproduire l'expérience présentée sur *YouTube* : https ://www.youtube.com/watch ?v=wHz6S2dbYb4 (Le meilleur du Monde de Jamy - Comment se forment les bouchons ?).