# Calcul scientifique numérique

## Approximation de l'équation de Fredholm de deuxième espèce et application à un problème de frontière libre

No Institute Given

## 1 Exposé du problème

Dans ce projet, un problème géométrique inverse où une partie inconnue de la frontière du domaine est construite à partir de la connaissance de conditions aux limites partiellement surdéterminées. Nous proposons une méthode de résolution de ce problème dont l'essence consiste à résoudre un problème de Cauchy pour les équations de Laplace suivi de la résolution d'une suite de problèmes non linéaires indépendants. Pour le problème de Cauchy, la série de Fourier est utilisée pour formuler une équation intégrale de Fredholm de premier type pour la fonction inconnue des données. Ensuite, une méthode de régularisation et la propriété de séparation de variable sont utilisés pour obtenir une solution régularisée. Les coordonnées de la partie inconnue de la frontière sont ensuite obtenues sous forme de racines d'équations non linéaires en utilisant une méthode de type Newton.

Considérons le problème inverse de la détermination de la forme d'une partie de la frontière d'un domaine borné à partir de données de Cauchy sur une autre partie accessible de la frontière. Ce problème défini sur le domaine $\Omega \subset R^2$ peut être décrit comme suit.

Trouver $T$ et $\Gamma \subset \partial\Omega$ tels que,

$$\begin{array}{rcrcr} \Delta T &=& 0 & \text{dans} & \Omega, \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} &=& 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ T &=& T_0 & \text{sur} & \Gamma, \\ -\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,0) &=& q_0(x) & \text{sur} & \Gamma_0, \\ T(x,0) &=& f_0(x) & \text{sur} & \Gamma_0, \end{array} \tag{1}$$

où $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma$
$\Gamma$ est la courbe définie par $\Gamma = (x, f(x)), x \in \Gamma_0$
considérons $D$, un rectangle tel que $\Omega \subset D$ comme sur la figure (1). Notons $\tilde{\Gamma_1}$ le prolongement de

Fig. 1: A two-dimensional steady- state inverse problem.

$\Gamma_1$ et $\tilde{\Gamma_2}$ le prolongement de $\Gamma_2$ tel que

$$\partial D = \Gamma_0 \cup \tilde{\Gamma_1} \cup \tilde{\Gamma_2} \cup \Gamma_3.$$

Considérons la condition aux limites suivante

$$\tilde{T}(x,H) = f_3(x) \text{sur} \Gamma_3$$

Considérons le problème défini sur $D$ par

$$
\begin{array}{lll}
\text{Trouver } \tilde{T} \text{ tel que,} & & \\
\Delta \tilde{T} = 0, & \text{dans} & D \\
\dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial x} = 0 & \text{sur} & \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2, \\
\dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial y}(x,0) = -q_0(x) & \text{sur} & \Gamma_0, \\
\tilde{T}(x,0) = f_0(x) & \text{sur} & \Gamma_0, \\
\tilde{T}(x,H) = f_3(x) & \text{sur} & \Gamma_3,
\end{array}
\tag{2}
$$

avec la donnée $f_3(x)$ est inconnue et doit être reconstruite.

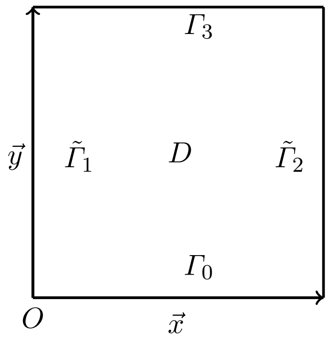


Fig. 2: Notation of the domain $\Omega$

Notons que $\tilde{T}$ satisfait deux conditions sur $\Gamma_0$ et nous n'avons aucune condition connue sur $\Gamma_3$. Ainsi (2) est un problème de Cauchy qui peut être résolu par n'importe quelle méthode dédiée à résoudre ce type de problème.

Définissons $\tilde{\Gamma}$ par $\tilde{\Gamma} = (x,y), x \in \Gamma_0, \tilde{T}(x,y) = T_0(x)$.
Soit $\tilde{\Omega}$ le domaine délimité par $\Gamma_0, \tilde{\Gamma}, 0 \times [0,a], L \times [0,b]$
où $a = \tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Gamma}_1$ et $b = \tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Gamma}_2$. La restriction de $\tilde{T}$ à $\tilde{\Omega}$ n'est autre que la solution du problème (1) sur $\tilde{\Omega}$ et du résultat d'unicité $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.
Ainsi, nous pouvons trouver la solution de (1) en deux étapes,

**Première étape :** Nous découplons le problème (1), qui est un problème de frontière libre, non linéaire fortement couplé en résolvant un problème de Cauchy linéaire, sur un domaine fixe.

**Deuxième étape :** Nous résolvons une série de problèmes scalaires non linéaires, permettant la détermination de la frontière libre $\tilde{\Gamma}$.

En résumé, la détermination de la solution $T$ et $\Gamma$ de (1) se réduit à la solution de (2) suivie de la résolution de l'équation scalaire non linéaire.
Pour $x \in \Gamma_0$, trouvez $y$ tel que

$$\tilde{T}(x,y) - T_0(x) = 0. \tag{3}$$

Dans ce qui suit nous utilisons la séparation des variables pour trouver une solution semi-analytique de (2), cette solution est ensuite injectée dans (3) pour obtenir la frontière libre.

## 2 Solution du problème de Cauchy

La méthode de résolution par séparation de variable consiste à trouver une solution de la forme

$$\tilde{T}(x,y) = X(x)Y(y) \tag{4}$$

On obtient alors que $\tilde{T}$ est donné par

$$\tilde{T}(x,y) = A_0 + B_0 y + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{\frac{m\pi}{L}y} + B_m e^{\frac{-m\pi}{L}y}) cos(\frac{m\pi}{L}x) \tag{5}$$

avec

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f_0(x)dx, \tag{6}$$

$$B_0 = \frac{1}{HL}\int_0^L (f_3(x) - f_0(x))dx, \tag{7}$$

$$A_m = \frac{1}{Lsinh(\frac{m\pi}{L}H)}\int_0^L (f_3(x) - e^{\frac{-m\pi}{L}H} f_0(x))cos(\frac{m\pi}{L}x)dx, \tag{8}$$

$$B_m = \frac{1}{Lsinh(\frac{m\pi}{L}H)}\int_0^L (f_0(x)e^{\frac{m\pi}{L}H} - f_3(x))cos(\frac{m\pi}{L}x)dx. \tag{9}$$

Maintenant, en différenciant (5) par rapport à $y$, en utilisant la condition $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}(x,0) = -q_0(x)$ dans (2) et quelques calculs, on obtient

$$h(x) = \int_0^L k(x,t) f_3(t)dt, \tag{10}$$

où

$$h(x) = -q_0(x) + \frac{1}{HL}\int_0^L f_0(t)dt + \frac{2\pi}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mcos(\frac{m\pi}{L}x)cosh(\frac{m\pi}{L}H)}{sinh(\frac{m\pi}{L}H)}\int_0^L f_0(t)cos(\frac{m\pi}{L}t)dt, \tag{11}$$

et la fonction noyau $k(x,t)$ est donnée par

$$k(x,t) = \frac{1}{HL} + \frac{2\pi}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mcos(\frac{m\pi}{L}x)}{sinh(\frac{m\pi}{L}H)} cos(\frac{m\pi}{L}t). \tag{12}$$

Pour obtenir $f_3(x)$, il faut résoudre l'intégrale de Fredholm de première espèce (10), qui est également mal posée comme l'est le problème de Cauchy. Au lieu de (10), nous résolvons $f_3(x)$ en utilisant l'équation intégrale de Fredholm du deuxième espèce :

$$\alpha f_3(x) + \int_0^L k(x,t) f_3(t)dt = h(x), \tag{13}$$

où $\alpha$ est un paramètre de régularisation de Lavrentier.
Nous supposons également que la fonction noyau peut être approchée par $n$ termes avec

$$k(x,t) = \frac{1}{HL} + \frac{2\pi}{L^2}\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{sinh(\frac{m\pi}{L}H)} cos(\frac{m\pi}{L}x)cos(\frac{m\pi}{L}t) \tag{14}$$

L'introduction de l'approximation de $f_3^{\alpha}(x)$ dans l'équation (7)-(9) permet d'obtenir une solution régularisée $\tilde{T}^{\alpha}$.

**Travail à faire :**

1. Monter que dans la méthode Méthode de décomposition d'Adomain on peut réécrire $f_n^\alpha$ comme :
$$f_n^\alpha := \int_0^L \cdots \int_0^L K_n^\alpha(x, s_1, \ldots, s_n)\mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_n \tag{15}$$
où $K_n^\alpha(x, s_1, \ldots, s_n)$ est une fonction de $= h(s_n)$ et $\prod_{i=1}^{n} K(s_{i-1}, s_i)$, avec la convention $s_0 = x$.
2. Comparer les deux méthodes du calcul de $f_n^\alpha$, ( récurrence et direct par l'équation (15))
3. Implémenter les méthodes de résolution de l'équation intégrale de Fredholm du deuxième espèce (voir fichier répartition_projet_2)
4. Écrire un programme principal pour résoudre le problème de Cauchy
   - Enregistrer sur un fichier texte $(x_i, T^\alpha(x_i))$ pour $i = 1, N_L$ où $x_i$ un point du maillage de $\Gamma_3$.
   - Tracer pour différentes valeurs de $\alpha$, l'erreur $\|T_{ex} - T_{cal}\|_{L^2(\Gamma_3)}$ où $T_{ex}$ est la solution exacte du problème de Cauchy et $T_{cal}$ est la solution calculée $T^{(\alpha)}$.
   - Pour $\alpha$ correspondant au cas où on a la meilleure erreur, tracer $T_{ex}$ et $T_{cal}$ et $T_{ex} - T_{cal}$ sur $\Omega$.
5. Écrire une fonction qui implémente l'algorithme de Newton pour trouver la racine de l'équation Pour $x \in \Gamma_0$, trouvez $y$ tel que
$$\tilde{T}^\alpha(x, y) - T_0(x) = 0. \tag{16}$$
6. Écrire une programme principal pour la détermination de la frontière libre $\Gamma$
   - Enregistrer sur un fichier texte $(x_i, y_i^\alpha)$ pour $i = 1, N_L$ où $x_i$ un point du maillage de $\Gamma_0$.
   - Pour différentes valeurs de $\alpha$, tracer la frontière exacte $\Gamma$ et la frontière approchée $\Gamma^\alpha$.

## References