

Jindra Petáková

MATEMATIKA

# MATEMATIKA

MATURITA  
VYŠKOLENÍ

MATURITA

*příprava*  
**K MATERITĚ**  
*a k přijímacím*  
*zkouškám*  
**NA VYSOKÉ ŠKOLY**



# OBSAH

## Předmluva

### 1 Základní poznatky o výrocích a množinách

- 1.1 Výrok, operace s výroky
- 1.2 Obměněná implikace, obrácená implikace
- 1.3 Negace složených výroků
- 1.4 Výroky s kvantifikátory
- 1.5 Operace s množinami — průnik, sjednocení, rozdíl, doplněk

### 2 Základní typy rovnic a nerovnic

- 2.1 Lineární rovnice a nerovnice
- 2.2 Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru
- 2.3 Rovnice a nerovnice v podílovém tvaru
- 2.4 Kvadratické rovnice
- 2.5 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice
- 2.6 Kvadratický trojčlen
- 2.7 Kvadratické nerovnice
- 2.8 Rovnice s neznámou ve jmenovateli
- 2.9 Nerovnice s neznámou ve jmenovateli
- 2.10 Rovnice s neznámou pod odmocninou
- 2.11 Nerovnice s neznámou pod odmocninou
- 2.12 Rovnice s neznámou v absolutní hodnotě
- 2.13 Nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě
- 2.14 Řešení rovnic metodou substituce
- 2.15 Reciproké rovnice
- 2.16 Soustavy rovnic
- 2.17 Řešení soustav rovnic metodou substituce
- 2.18 Soustavy nerovnic
- 2.19 Slovní úlohy

### 3 Rovnice s parametrem

- 3.1 Lineární rovnice s parametrem
- 3.2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli
- 3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou
- 3.4 Neznámá v absolutní hodnotě
- 3.5 Soustavy rovnic
- 3.6 Kvadratické rovnice s parametrem
- 3.7 Neznámá ve jmenovateli (po úpravě kvadratická rovnice)

### 4 Funkce

- 4.1 Definice funkce
- 4.2 Rovnost funkcí

### 4.3 Definiční obor funkce

- 4.4 Hodnota funkce, obor funkčních hodnot
- 4.5 Funkce složená
- 4.6 Vlastnosti funkcí
- 4.7 Vztahy mezi grafy funkcí
- 4.8 Lineární funkce
- 4.9 Kvadratická funkce
- 4.10 Úprava výrazu — graf funkce
- 4.11 Exponenciální funkce
- 4.12 Logaritmus čísla
- 4.13 Logaritmická funkce
- 4.14 Grafické řešení rovnic a nerovnic
- 4.15 Inverzní funkce

### 5 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

- 5.1 Exponenciální rovnice
- 5.2 Logaritmické rovnice
- 5.3 Exponenciální nerovnice
- 5.4 Logaritmické nerovnice

### 6 Goniometrické funkce a trigonometrie

- 6.1 Velikost úhlu — míra stupňová, míra oblouková
- 6.2 Orientovaný úhel
- 6.3 Hodnoty goniometrických funkcí  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$
- 6.4 Grafy goniometrických funkcí  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$
- 6.5 Hodnoty goniometrických funkcí  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$
- 6.6 Grafy goniometrických funkcí  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$
- 6.7 Grafy goniometrických funkcí s absolutními hodnotami
- 6.8 Cyklometrické funkce
- 6.9 Základní vztahy mezi funkcemi
- 6.10 Vzorce pro dvojnásobný úhel
- 6.11 Součtové vzorce
- 6.12 Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí
- 6.13 Vzorce pro poloviční úhel
- 6.14 Grafy funkcí — užití vzorců
- 6.15 Vztahy pro úhly v trojúhelníku
- 6.16 Sinová a kosinová věta
- 6.17 Vzorce pro obsah trojúhelníku, čtyřúhelníku
- 6.18 Vzorce pro poloměry kružnic trojúhelníku opsané a vepsané
- 6.19 Pravidelné mnogouhelníky

## 7 Goniometrické rovnice a nerovnice

- 7.1 Goniometrické rovnice
- 7.2 Goniometrické nerovnice

## 8 Mocninné funkce, lineární lomená funkce

- 8.1 Grafy mocninných funkcí
- 8.2 Grafy lineárních lomených funkcí
- 8.3 Inverzní funkce k funkcím mocninným
- 8.4 Inverzní funkce k funkci lineární lomené
- 8.5 Počítání s odmocninami
- 8.6 Počítání s mocninami s celým exponentem
- 8.7 Počítání s mocninami s racionálním exponentem
- 8.8 Úpravy výrazů obsahujících mocniny a odmocniny

## 9 Posloupnosti a řady

- 9.1 Způsoby zadání posloupnosti
- 9.2 Vlastnosti posloupností
- 9.3 Aritmetická, geometrická posloupnost
- 9.4 Zápis pomocí  $\Sigma$
- 9.5 Užití geometrické posloupnosti
- 9.6 Nekonečná geometrická řada

## 10 Geometrie — konstrukční úlohy

- 10.1 Základní typy bodových množin
- 10.2 Tečna z bodu ke kružnici
- 10.3 Konstrukce kružnic požadovaných vlastností
- 10.4 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků
- 10.5 Konstrukce úseček
- 10.6 Shodná zobrazení
- 10.7 Skládání osových souměrností
- 10.8 Hledání minimálního součtu úseček (Hledání dráhy kulečníkové koule)
- 10.9 Stejnolehlost
- 10.10 Skládání rotace a stejnolehlosti

## 11 Geometrie — výpočty

- 11.1 Trojúhelníková nerovnost
- 11.2 Úhly střídavé, souhlasné, vedlejší, vrcholové
- 11.3 Úhly v trojúhelníku
- 11.4 Shodnost trojúhelníků
- 11.5 Podobnost trojúhelníků
- 11.6 Pythagorova věta a Euklidovy věty
- 11.7 Středový a obvodový úhel

## 11.8 Mocnost bodu ke kružnici

- 11.9 Aritmetický a geometrický průměr

## 12 Stereometrie

- 12.1 Vzájemná poloha dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, tří rovin
- 12.2 Řezy
- 12.3 Průnik dvou rovin
- 12.4 Průnik přímky s rovinou
- 12.5 Průnik přímky s povrchem tělesa
- 12.6 Vzdálenost dvou bodů
- 12.7 Vzdálenost bodu od přímky
- 12.8 Vzdálenost rovnoběžných přímek
- 12.9 Vzdálenost mimoběžek
- 12.10 Vzdálenost bodu od roviny
- 12.11 Vzdálenost rovnoběžných rovin
- 12.12 Odchylka dvou přímek
- 12.13 Odchylka přímky od roviny
- 12.14 Odchylka dvou rovin
- 12.15 Další úlohy
- 12.16 Obsah řezu
- 12.17 Objemy a povrchy těles

## 13 Vektory

- 13.1 Vektor, souřadnice vektoru
- 13.2 Sčítání a odčítání vektorů, násobek vektoru
- 13.3 Lineární kombinace vektorů
- 13.4 Lineárně závislé a lineárně nezávislé vektory
- 13.5 Velikost vektoru
- 13.6 Skalární součin dvou vektorů  $u \cdot v$
- 13.7 Vektorový součin dvou vektorů  $u \times v$
- 13.8 Smíšený součin tří vektorů  $(u \times v) \cdot w$

## 14 Analytická geometrie v rovině

- 14.1 Rovnice přímky
- 14.2 Úsečka, polopřímka, polorovina
- 14.3 Vzájemná poloha přímek
- 14.4 Odchylka dvou přímek
- 14.5 Výpočty vzdáleností
- 14.6 Zobrazení v analytické geometrii
- 14.7 Další úlohy
- 14.8 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

## 15 Analytická geometrie v prostoru

- 15.1 Přímka v prostoru
- 15.2 Vzájemná poloha přímek v prostoru
- 15.3 Rovina
- 15.4 Vzájemná poloha přímky a roviny
- 15.5 Vzájemná poloha dvou rovin
- 15.6 Vzájemná poloha tří rovin
- 15.7 Odchylka dvou přímek
- 15.8 Odchylka přímky od roviny
- 15.9 Odchylka dvou rovin
- 15.10 Vzdálenost dvou bodů v prostoru
- 15.11 Vzdálenost bodu od přímky v prostoru
- 15.12 Vzdálenost bodu od roviny
- 15.13 Vzdálenost mimoběžek
- 15.14 Souměrnosti v prostoru
- 15.15 Další úlohy
- 15.16 Úlohy na tělesech

## 16 Kuželosečky

- 16.1 Kružnice
- 16.2 Elipsa
- 16.3 Hyperbola
- 16.4 Parabola
- 16.5 Obecná rovnice kuželosečky
- 16.6 Vnitřní (vnější) oblast kuželosečky
- 16.7 Kuželosečka a přímka
- 16.8 Tečna v bodě kuželosečky
- 16.9 Tečna z bodu ke kuželosečce
- 16.10 Tečna rovnoběžná s danou přímkou
- 16.11 Tečna kolmá k dané přímce
- 16.12 Tečna daným směrem
- 16.13 Další úlohy
- 16.14 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

## 17 Komplexní čísla

- 17.1 Algebraický tvar komplexního čísla
- 17.2 Mocniny imaginární jednotky i
- 17.3 Znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině
- 17.4 Čísla komplexně sdružená
- 17.5 Absolutní hodnota komplexního čísla
- 17.6 Goniometrický tvar komplexního čísla
- 17.7 Umocňování komplexních čísel
- 17.8 Odmocňování komplexních čísel

## 17.9 Rovnice v množině komplexních čísel

- 17.10 Kvadratická rovnice v množině komplexních čísel
- 17.11 Binomická rovnice

## 18 Kombinatorika a binomická věta

- 18.1 Faktoriál čísla —  $n!$
- 18.2 Kombinační číslo, vlastnosti kombinačních čísel 142
- 18.3 Rovnice a nerovnice s kombinačními čísly
- 18.4 Pravidlo kombinatorického součinu
- 18.5 Variace
- 18.6 Permutace
- 18.7 Kombinace
- 18.8 Variace, kombinace — rovnice
- 18.9 Variace, permutace, kombinace s opakováním
- 18.10 Binomická věta
- 18.11 Důkaz matematickou indukcí

## 19 Diferenciální počet a integrální počet

- 19.1 Limita funkce ve vlastním bodě
- 19.2 Limita funkce v nevlastním bodě
- 19.3 Jednostranné limity
- 19.4 Definice derivace funkce
- 19.5 Pravidla pro výpočet derivace
- 19.6 Tečna ke grafu funkce
- 19.7 Funkce rostoucí, klesající
- 19.8 Druhá derivace funkce
- 19.9 Maximum, minimum funkce
- 19.10 Průběh funkce
- 19.11 Derivace implicitní funkce
- 19.12 Derivace funkce a výpočet limity
- 19.13 Slovní úlohy řešené pomocí derivací
- 19.14 Primitivní funkce
- 19.15 Určitý integrál
- 19.16 Obsah rovinného obrazce
- 19.17 Objem rotačního tělesa

## 20 Pravděpodobnost a statistika

- 20.1 Definice pravděpodobnosti, vlastnosti pravděpodobnosti, binomické rozdělení
- 20.2 Aritmetický průměr, modus, medián, směrodatná odchylka, variační koeficient

## Výsledky

- Použité matematické symboly a značky
- Seznam použité literatury

## **Předmluva**

---

Sbírka úloh z učiva střední školy je určena k opakování a procvičení učiva k maturitě a k přípravě na přijímací zkoušky z matematiky na vysoké školy.

Obsah sbírky je zpracován v souladu s učebními osnovami matematiky pro gymnázia, které schválilo Ministerstvo školství mládeže a tělovýchovy České republiky dne 24. 5. 1991 pod č.j. 17 668/91-20 s platností od 1. 9. 1991.

Sbírka je členěna podle tematických celků do 20 kapitol. Úlohy jsou seřazeny nejen podle tematických celků, ale v rámci jednotlivých kapitol jsou i dále systematicky uspořádány. K lepší orientaci slouží podrobně zpracovaný obsah. Sbírka obsahuje celkem 1 200 číslovaných úloh s mnoha obměnami. Podle typu třídy nebo střední školy (gymnázium, průmyslová škola, ekonomická škola apod.) nebo podle zvolené vysoké školy lze počítat jen příklady v těch kapitolách, které student potřebuje znát.

Nakonec jsou uvedeny výsledky úloh, které umožňují kontrolu správnosti řešení. U složitějších úloh je uveden i stručný návod řešení.

*Autorka*

## 1 Základní poznatky o výrocích a množinách

### 1.1 Výrok, operace s výroky

1 Rozhodněte, které z následujících vět lze považovat za výroky:

- a) Úhlopříčky čtverce nejsou navzájem kolmé.
- b) Existuje rovnostranný trojúhelník.
- c) Pythagorova věta.
- d) Číslo  $x$  je kladné.

2 Vyslovte negace následujících výroků:

- a) Součin dvou záporných reálných čísel je kladný.
- b) Číslo  $\sqrt{18}$  je dvojnásobkem čísla  $\sqrt{3}$ .
- c) Přímka daná rovnicí  $y = 2x - 1$  neprochází bodem  $[1; 1]$ .
- d)  $\sqrt{10} \geq 3$ .

3 Rozhodněte, zda jsou pravdivé následující složené výroky:

- a) Číslo  $\pi$  lze zapsat desetinným číslem 3,141 59 nebo zlomkem  $\frac{22}{7}$ .
- b) Číslo e je větší než 2 a zároveň menší než 3.
- c) Je-li číslo dělitelné třemi, potom je ciferný součet čísla dělitelný třemi.
- d) Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvanácti.

4 Rozepište jako konjunkci nebo jako disjunkci dvou výroků zápis:

- |                 |  |
|-----------------|--|
| a) $10 > 8 > 5$ | c) $100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25$                       |
| b) $3 \leq \pi$ | d) $\triangle KLM \sim \triangle PQR \sim \triangle XYZ$ |

5 Víme, že je pravdivá implikace: „Jestliže je Jana nemocná, potom nepřijde do školy.“ Dnes Jana nepřišla do školy. Rozhodněte, zda je pravdivý výrok: „Jana je nemocná.“

6 Maminka řekla malému Petrovi: „Jestliže budeš hodný, dostaneš dort.“ Jsou čtyři možnosti:

- a) Petr byl hodný, dostal dort.
- b) Petr byl hodný, nedostal dort.
- c) Petr nebyl hodný, dostal dort.
- d) Petr nebyl hodný, nedostal dort.

Ve kterých případech a) až d) vyslovila maminka pravdivý výrok?

7 Rozhodněte, při kterých pravdivostních hodnotách výroků  $A, B$  je uvedená výroková formule pravdivá:

- a)  $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$
- b)  $(\neg A \vee B) \Rightarrow \neg B$

8 Rozhodněte, zda uvedené výrokové formule jsou tautologiemi:

- a)  $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- b)  $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
- c)  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
- d)  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

### 1.2 Obměněná implikace, obrácená implikace

9 K dané implikaci napište obrácenou implikaci a obměněnou implikaci. V jednotlivých případech rozhodněte o pravdivosti implikace dané, obrácené i obměněné.

- a) Je-li součin dvou přirozených čísel liché číslo, potom jsou obě čísla lichá.
- b) Jestliže je konvexní čtyřúhelník kosočtverec, potom jsou jeho úhlopříčky navzájem kolmé.
- c) Je-li druhá mocnina reálného čísla větší než 5, potom je i dané reálné číslo větší než 5.

### 1.3 Negace složených výroků

10 Napište negace následujících slovních výroků.

- a) Přijde Alena a Barbora.
- b) Přijde Cyril nebo David.
- c) Jestliže přijde Eva, potom přijde i Hana.
- d) Jan přijde právě tehdy, když přijde Iva.

11 Napište negace uvedených výroků.

- a) Číslo 50 je dělitelné 15 a 5.
- b) Číslo 50 není dělitelné 15 nebo není dělitelné 5.
- c) Jestliže je poslední dvojčíslí daného přirozeného čísla dělitelné 4, potom je i dané číslo dělitelné 4.
- d) Číslo je dělitelné 6 právě tehdy, když je dělitelné 2 a 3.

### 1.4 Výroky s kvantifikátory

12 Doplňte jedno ze slov: „aspoň, právě, nejvýše“ tak, aby výrok byl pravdivý.

- a) Každé provočíslo má ... dva různé dělitele.
- b) Dvě různé přímky v rovině mohou mít ... jeden společný bod.
- c) Nerovnici  $x^2 > 5$  splňují ... tři přirozená čísla.

13 Doplňte jedno ze slov: „existuje, každý“ tak, aby výrok byl pravdivý.

- a) ... trojúhelník, který je rovnostranný.
- b) ... přirozený násobek čísla 2 je číslo sudé.

14 Kvantifikované výroky zapsané symbolicky vyjádřete slovy a rozhodněte o jejich pravdivosti.

- |  |   |
|--|---|
| a) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$                                 | d) $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}: a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ |
| b) $\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2} =  x $                        | e) $\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall b \in \mathbb{R}^+: a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ |
| c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 10$ | f) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: x \cdot y = y$                   |

15 Vyslovte negace následujících výroků.

- a) Aspoň šest přirozených čísel splňuje nerovnost  $x - 40 < 0$ .
- b) Číslo 92 má nejvýše pět dělitelů.
- c) Rovnice  $x^5 - x + 2 = 0$  má právě tři kořeny v množině komplexních čísel.
- d) Existuje takové reálné číslo  $m$ , že platí:  $(m + 1)^2 = m$ .
- e) Každé provočíslo je liché číslo.

### 1.5 Operace s množinami – průnik, sjednocení, rozdíl, doplněk

16 Zapište výčtem prvků následující množiny.

- a)  $M_1 = \{x \in \mathbb{N}; x^2 < 20\}$
- b)  $M_2 = \{x \in \mathbb{Z}; |x| = 5\}$

17 Jsou dány dvě množiny:  $M_1 = \{x \in \mathbb{N}; x \mid 60\}$ ,  $M_2 = \{x \in \mathbb{N}; 7 < x \leq 10\}$ . Zapište výsledek operací  $M_1 \cap M_2$ ,  $M_1 \cup M_2$ ,  $M_2 - M_1$ .

18 Najděte takové množiny  $A, B$ , pro které platí:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A \cap B = \{1, 2, 3\}, B - A = \{5, 6\}.$$

19 Doplněk množiny  $\{x \in \mathbb{R}; -3 < x \leq 5\}$  v množině reálných čísel zapište jako sjednocení dvou intervalů.

20 Jsou dány tři intervaly  $A = (-7; 2)$ ,  $B = (-2; 5)$ ,  $C = (2; \infty)$ . Zapište:

- |               |                        |                                 |            |
|---------------|------------------------|---------------------------------|------------|
| a) $A \cap B$ | c) $A \cup B$          | e) $(A \cup B) \cap C$          | g) $A'_R$  |
| b) $A \cap C$ | d) $(A \cap B) \cup C$ | f) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ | h) $A - B$ |

## 2 Základní typy rovnic a nerovnice

### 2.1 Lineární rovnice a nerovnice

1 Řešte rovnice a nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $5 \cdot \{5 \cdot [5 \cdot (5x - 4) - 4] - 4\} = 5$
- b)  $3[2(3x - 6) - 2(4x - 5) + 1] - 3 = 6[3 - 8(x - 3)]$
- c)  $x - (2x - 0,2)^2 = 5,8 - (2x + 0,1) \cdot (2x - 0,1)$
- d)  $(x - 1)^3 + (x - 2)^3 + (x - 3)^3 = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

e)  $\frac{x}{2} - \frac{x - \frac{x}{2}}{2} - \frac{x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2+\frac{x}{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$

f)  $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 < 8$

g)  $\frac{4x - 7}{2} - \frac{x - 4}{6} \geq 2x - 3$

### 2.2 Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

2 Řešte rovnice a nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $(9 - 4x^2)(x^2 - 6x + 9) = 0$
- b)  $(4x^2 + 25)(50 - x^2) = 0$
- c)  $(x - 6)(x + 2) > 0$
- d)  $(x + 2)(4 - x) \leq 0$
- e)  $(x^2 + 2)(x + 7) \geq 0$
- f)  $x^2(11x - 3) < 0$
- g)  $(2 - x)(x^2 - 9) \geq 0$
- h)  $(x - 10)(10 - x) \leq 0$

### 2.3 Rovnice a nerovnice v podílovém tvaru

3 Řešte rovnice a nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\frac{2x - 5}{x + 3} = 0$
- b)  $\frac{(x + 5)(x - 6)}{36 - x^2} = 0$
- c)  $\frac{x + 2}{3x - 2} \leq 0$
- d)  $\frac{4x - 3}{7 + x} > 0$
- e)  $\frac{(5x - 3)(x + 4)}{x(6 - x)} \leq 0$
- f)  $\frac{1 - 2x}{x^2 - 1} < 0$

### 2.4 Kvadratické rovnice

4 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $4x^2 + x = 0$
- b)  $2x^2 - 5 = 0$
- c)  $3x^2 + x - 2 = 0$
- d)  $x^2 + 2x - 1 = 0$
- e)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- f)  $3x^2 + x + 2 = 0$
- g)  $x^2 + (2\sqrt{3} + 1)x + 3 + \sqrt{3} = 0$
- h)  $x^2 + x(2\sqrt{3} + 1) + 2\sqrt{3} = 0$
- i)  $x^2 - \sqrt{2}x + x - \sqrt{2} = 0$
- j)  $\frac{1}{2}(2x - 1)^2 - [\frac{1}{2}(x + 1)]^2 = 3 \left[ \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]$

5 Ověřte, že číslo  $x = 2 + 3\sqrt{2}$  je kořenem rovnice  $x^2 - 6x - 10 + 6\sqrt{2} = 0$ .

### 2.5 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

6 Sestavte všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla:

- a) 2; -3
- c) -1; -1
- e)  $\frac{1}{10 - \sqrt{50}}; \frac{1}{10 + 5\sqrt{2}}$
- b)  $1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}$
- d) 0; 5

7 Rovnice  $x^2 + px + 6 = 0$  má jeden kořen -2. Vypočítejte druhý kořen a koeficient  $p \in \mathbb{R}$ .

8 Rovnice  $x^2 - 3x + q = 0$  má jeden kořen -1. Vypočítejte druhý kořen a absolutní člen  $q \in \mathbb{R}$ .

9 Určete všechny hodnoty parametru  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice  $2x^2 + bx + 9 = 0$  byl dvakrát větší než druhý kořen.

10 Určete koeficient lineárního členu  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice  $x^2 + mx + 5 = 0$  byl o 4 větší než druhý kořen této rovnice.

11 Určete všechny hodnoty absolutního členu  $q \in \mathbb{R}$  tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice  $4x^2 - 15x + q = 0$  byl druhou mocninou druhého kořene.

12 Aniž rovnici  $x^2 + 2x + 5 = 0$  řešíte, určete:

- a) součet převrácených hodnot jejích kořenů
- b) součet druhých mocnin jejích kořenů

13 Aniž rovnici  $5x^2 + 8x + 5 = 0$  řešíte, sestavte všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla:

- a) třikrát větší než kořeny původní rovnice
- b) o tři větší než kořeny původní rovnice

### 2.6 Kvadratický trojčlen

14 Dané kvadratické trojčleny (resp. dvojčleny) rozložte v množině reálných čísel v součin kořenových činitelů:

- |                     |                     |                       |
|---------------------|---------------------|-----------------------|
| a) $x^2 - 5x + 6$   | g) $x^2 - 10x + 25$ | m) $2x^2 + x - 1$     |
| b) $x^2 + 7x + 10$  | h) $x^2 + 4x + 4$   | n) $3x^2 - 17x + 10$  |
| c) $x^2 + 2x - 8$   | i) $x^2 - 6x + 9$   | o) $-x^2 + 7x + 8$    |
| d) $x^2 + 10x - 11$ | j) $4x^2 + 4x + 1$  | p) $-2x^2 + 11x - 15$ |
| e) $x^2 + x - 2$    | k) $16x^2 - 25$     | q) $x^2 + 4$          |
| f) $x^2 - 11x + 30$ | l) $15x^2 - 30x$    | r) $x^2 + 4x + 5$     |

15 Určete maximum (resp. minimum) kvadratického trojčlenu (resp. dvojčlenu) pomocí úpravy:

- |                   |                     |                    |
|-------------------|---------------------|--------------------|
| a) $x^2 + 2x + 6$ | d) $4x^2 - 4x$      | g) $-2x^2 + x$     |
| b) $x^2 + 4x + 4$ | e) $4x^2 + 8x + 12$ | h) $-x^2 + 2x + 3$ |
| c) $x^2 - 3x + 2$ | f) $2x^2 - 8x + 1$  | i) $-x^2 - 16$     |

16 Rozložte kvadratické trojčleny, zapište, kdy má výraz smysl a zjednodušte:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\frac{4x^2 + 7x - 2}{12x^2 + 5x - 2}$ | b) $\frac{\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2} - \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 6}}{\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 3x - 10} - \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 + 4x - 12}}$ |
|---|---|

## 2.7 Kvadratické nerovnice

17 Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $x^2 - 2x - 15 \geq 0$
- b)  $3x^2 + 5x - 2 < 0$
- c)  $-2x^2 - 5x + 12 > 0$
- d)  $x^2 - 2x - 2 \leq 0$
- e)  $2x - x^2 \geq 2 - x$
- f)  $x^2 + 5x + 7 > 0$
- g)  $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$
- h)  $2x^2 + 3x \geq 0$
- i)  $4x^2 \leq 1$
- j)  $x^2 + 2x + 6 < 0$

## 2.8 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

18 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\frac{3}{x+2} + \frac{5x}{4-x^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{x}{x^2-4}$
- b)  $1 + 3\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x-3}{x-2} - \frac{2}{x-2}\right) = \frac{15}{2x-x^2}$
- c)  $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right) = \frac{x+1}{x-1}$

## 2.9 Nerovnice s neznámou ve jmenovateli

19 Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\frac{1}{x} \geq 6$
- b)  $\frac{2x+3}{x-1} < 1$
- c)  $\frac{x+3}{x-1} \leq \frac{x+3}{x}$
- d)  $\frac{8}{x^2+4x+1} \leq 0$
- e)  $\frac{\frac{1}{2}x-2}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}x+2}{x+1} \geq 1$
- f)  $2 \leq \frac{x}{x^2+1}$

## 2.10 Rovnice s neznámou pod odmocninou

20 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sqrt{x} + x = 2$
- b)  $3\sqrt{x+5} - 5 = x$
- c)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$
- d)  $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+7} = -4$
- e)  $\sqrt{-x} = 2 - \sqrt{2-x}$
- f)  $\sqrt{10-x} + \sqrt{x-10} = 2$
- g)  $\sqrt{2x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{3x+2}$
- h)  $\sqrt{-x-\sqrt{1-x}} = 1$
- i)  $\frac{2x}{2\sqrt{3}+\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{x}}{4\frac{1}{2}}$
- j)  $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}$

## 2.11 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

21 Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sqrt{x^2-4} \leq x+1$
- b)  $\sqrt{x^2-1} < x+2$
- c)  $x+1 \leq \sqrt{x^2+3x}$
- d)  $x-1 < \sqrt{x^2-4}$

## 2.12 Rovnice s neznámou v absolutní hodnotě

22 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $|x| = 7$
- b)  $|x-1| = 3$
- c)  $|x+4| = 1$
- d)  $|x+\pi| = 6$
- e)  $|2x-3| = 6$
- f)  $|6-x| = 2$
- g)  $|x-\sqrt{3}+1| = 2-\sqrt{3}$
- h)  $|x-5\sqrt{11}| = 0$
- i)  $|4x-7| = -1$
- j)  $|x-7| = x-7$
- k)  $|x-2| = 2-x$
- l)  $|8-5x| = 5x-8$
- m)  $|2x-3| = x$
- n)  $|2x-5| = 1-3x$
- o)  $|4-x| - |2x+3| = 7$
- p)  $|2x-4| - |x+3| = 2 - |x-5|$
- q)  $|x-1| + 3|2-x| = x - |1-x|$
- r)  $|x-4| + |2x-1| = |x| + 3$
- s)  $|x+2| = 4|x-3|$
- t)  $x^2 + |x-1| - 1 = 0$
- u)  $|x^2 + 4x| - 3x - 6 = 0$
- v)  $|x^2 + 2x - 1| - x = 1$

## 2.13 Nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě

23 Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $|x| \geq 6$
- b)  $|x-3| < 2$
- c)  $|x+5| \leq 7$
- d)  $|x-\sqrt{3}| > 2 + 5\sqrt{3}$
- e)  $|3x-1| < x$
- f)  $|1-x| > 3|x+3|$
- g)  $|2x+1| - |3-x| \geq x$
- h)  $x^2 - 3|x+1| - x \leq 0$
- i)  $|x| < x^2 - 6$
- j)  $|x^2 + 4x| - 6 \leq 3x$
- k)  $\frac{3}{|x-2|} \leq x$
- l)  $\frac{|x+3|}{x+1} \geq 2$

## 2.14 Řešení rovnic metodou substituce

24 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- b)  $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
- c)  $20x^{-4} + 3x^{-2} - 2 = 0$
- d)  $5\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} - 6 = 0$

25 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $(1-x^2)^2 - 2(x^2-1) + 1 = 0$
- b)  $(x^2+2x-3)(x^2+2x+1) - 5 = 0$
- c)  $(x^2-x+2)^2 - 6(x^2-x) - 4 = 0$
- d)  $(x^2-2x+8)^2 : (x^2-2x)^2 - 4 = 0$

26 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $x^2 + 2x - 12 - 2\sqrt{x^2+2x+12} = 0$
- b)  $\sqrt{2x^2+5x} - \sqrt{2x^2+5x-10} = \sqrt{2}$
- c)  $(2x+\sqrt{x-1})(2x+\sqrt{x-1}-8) - 2(2x+\sqrt{x-1}) - 24 = 0$

27 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\left(\frac{x^2+2}{x^2-4} - 3\right)\left(\frac{x^2+2}{x^2-4} + 4\right) + 10 = 0$
- b)  $\frac{1}{3} \left(\frac{2x-1}{x^2} + 2\right) \left(\frac{1-2x}{x^2} + 1\right) = \left(3 \cdot \frac{2x-1}{x^2}\right)^2$

c)  $\sqrt{\frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{3}{x}} = 1 - \sqrt{\frac{3}{x}}$

d)  $\sqrt{\frac{x+10}{x+2}} - 3\sqrt{\frac{x+2}{x+10}} = 2$

e)  $(3 - \sqrt{\frac{x+4}{2-x}})(2 + \sqrt{\frac{x+4}{2-x}}) - 6 = 0$

f)  $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} = 3$

## 2.15 Reciproké rovnice

28 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$     c)  $6x^4 + 17x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0$   
b)  $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$     d)  $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

29 Určete  $K, L \in \mathbb{R}$  tak, aby daná rovnice byla reciproká. Potom rovnici řešte v  $\mathbb{R}$ :  
 $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 + Kx + L = 0$

## 2.16 Soustavy rovnic

### Soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých

30 Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $7x - 3y = 15$     d)  $(x+4)(y-2) = (x-2)(y+13)$   
b)  $5x + 6y = 27$     e)  $(x-1)(y-3) = (x+2)(y-5)$   
c)  $3x + 2y = 20$     f)  $x - 5y = 7$   
d)  $2x + 3y = 20$     g)  $x - 5y = 6$   
e)  $3(x-2) + 2y = x+y$     h)  $2x - 3y = 5$   
f)  $4x + 5(y+x) = 3x - 6$     i)  $4x - 6y = 10$

### Soustavy lineárních rovnic o třech neznámých

31 Určete všechna čísla  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $x + y + 2z = -1$     d)  $2x - y = 6$   
b)  $2x - y + 2z = -4$     e)  $y + 4z = 8$   
c)  $4x + y + 4z = -2$     f)  $x - z = 1$   
b)  $2x + 3y + z = 15$     g)  $2x + y - z = 0$   
c)  $7x - y + z = 9$     h)  $x + y + 2z = 4$   
d)  $x + 2y + z = 9$     i)  $4x + 3y + 3z = 5$   
c)  $2x + y - z = 0$     j)  $f) 3x + 2y + z = 3$   
d)  $4x + 2y + z = 0$     k)  $x + y + z = 2$   
e)  $x - y + 3z = 0$     l)  $4x + 3y + 2z = 5$

### Soustavy lineárních rovnic o více neznámých

32 Určete všechna čísla  $x, y, z, u \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $2x - 3y + z + 2u = 0$     b)  $x - y + z + u = 0$   
c)  $3x + y - 2z - u = 6$     d)  $x + y - z - u = 2$   
e)  $4x - 2y - 3z - 4u = -6$     f)  $2x - y + u = 3$   
g)  $x + 2y + 3z - 2u = -7$     h)  $3x + z - u = 0$

## Další úlohy

33 Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $\frac{x+y+1}{x-y+1} = \frac{3}{2}$     g)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$   
b)  $\frac{x+y+1}{1-x+y} = 3$     h)  $|x| + 2|y| = 10$   
c)  $x+y = 5$     i)  $2x - 3y = 6$   
d)  $xy = 6$     j)  $|x-y| = 2$   
e)  $x+xy+y = 7$     k)  $2x+y = 7$   
f)  $x-xy+y = 1$     l)  $|x-y|^2 = 27$   
g)  $x^2 + y^2 = 125$     m)  $x^2y^2 - x^2y^3 = -4$   
h)  $x^2 - y^2 = 25$     n)  $x^2y^3 - x^2 = 7$   
i)  $2x^2 - 3y^2 = 24$     o)  $x^2 + y = 4$   
j)  $2x - 3y = 0$     p)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 3$   
k)  $x - y + 1 = 0$

## 2.17 Řešení soustav rovnic metodou substituce

34 Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 5$     c)  $\frac{1}{3-x+2y} + \frac{1}{3+x-2y} = \frac{3}{4}$   
b)  $\frac{2}{x} - \frac{6}{y} = 6$     d)  $\frac{1}{3+x-2y} - \frac{1}{3-x+2y} = \frac{1}{4}$   
b)  $\frac{2}{x+y} - \frac{5}{x-y} = 1$     e)  $\frac{x+1}{x+y} + \frac{y}{x-y} = \frac{3}{2}$   
c)  $\frac{1}{x+y} + \frac{4}{x-y} = \frac{9}{5}$     f)  $2 \cdot \frac{x+1}{x+y} - 3 \cdot \frac{y}{x-y} = \frac{1}{2}$

35 Určete všechna čísla  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$     b)  $\frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-z} = \frac{3}{2}$   
b)  $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 11$     c)  $\frac{1}{x+y} - \frac{10}{y-z} = \frac{7}{3}$   
c)  $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} = 9$     d)  $\frac{3}{x-z} + \frac{5}{y-z} = -\frac{1}{4}$

36 Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $|x+2| + 2|y-3| = 15$     b)  $|x+y| - |x-y| = 4$   
c)  $|x+2| - 4|y-3| = 3$     d)  $|x+y| + 2|x-y| = 13$

37 Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4$     c)  $x^2 + \sqrt{y} = 14$   
b)  $2\sqrt{x+y} - 3\sqrt{x-y} = 3$     d)  $x^4 - \sqrt{y} = 6$   
b)  $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{y+5} = 9$     e)  $x^2 - y^2 + \sqrt{x+y} = 1,5$   
c)  $\sqrt{x+3} + \sqrt{y+5} = 6$     f)  $(x^2 - y^2) \cdot \sqrt{x+y} = 0,5$

## 2.18 Soustavy nerovnic

38 Řešte v R soustavy nerovnic:

a)  $2(x-1) \leq 1-x$   
 $7-3x \leq x+10$   
 $x-3 > 2x-6$

b)  $3x-8 < x+6 < 2x+2$

c)  $3x - \frac{x+2}{6} > x$   
 $2x - \frac{1}{3}x > x - \frac{x-1}{6}$

d)  $x^2 - 9 \geq 0$   
 $x^2 - 3x - 4 < 0$

e)  $4 < x^2 + 4x + 8 \leq 5$

f)  $-2 \leq 2x^2 - x - 3 < 1 + 3x$

g)  $\frac{2+x}{x-1} < 3$   
 $\frac{2}{x-1} \geq 1$

h)  $x < \frac{1}{x} < 3$

i)  $\frac{4}{3} + \frac{4}{x} \leq \frac{x}{3}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \leq \frac{x}{2}$

j)  $|x-3| + 2|x+1| > 4$   
 $|1+2x|-5 \leq x$

k)  $2 \leq |x-4| < 5$

l)  $3 < |2x+4| < 10$

## Soustava rovnice a nerovnice se dvěma neznámými

39 Graficky znázorněte množinu všech řešení  $[x; y]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  dané soustavy:

a)  $x - 2y = 5$       b)  $x + y = 5$       c)  $2x - y \leq 4$   
 $3x + y \leq 1$        $y + 2 \geq 0$        $2x - y = 2$

## Soustava nerovnic se dvěma neznámými

40 Graficky znázorněte množinu všech řešení  $[x; y]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  dané soustavy:

a)  $3x - y \leq 7$       b)  $x - 3y \leq 0$       c)  $xy \geq 0$   
 $x + 2y \geq 0$        $x - 3y \leq 5$        $(x+2)(y-3) \leq 0$   
 $x - 5y \geq -7$

## 2.19 Slovní úlohy

41 Připíšeme-li k danému číslu číslici 1 vpravo, dostaneme dvojciferné číslo 4,5krát větší než číslo, které bychom dostali, kdybychom číslici 1 připsali vlevo. Určete dané číslo.

42 Ze tří různých nenulových cifer vytvoříme všechna trojciferná čísla s různými ciframi. Potom tato trojciferná čísla sečteme a výsledek je dělitelný 222. Dokažte.

43 Najděte zlomek v základním tvaru, pro který platí: jmenovatel zlomku je o tři větší než čitatel a hodnota zlomku se nezmění, jestliže k čitateli přičteme číslo 1 a ke jmenovateli přičteme číslo 2,5.

44 Součet dvou přirozených čísel je 50, rozdíl jejich aritmetického a geometrického průměru je 18. Určete tato dvě čísla.

45 Tři čísla splňují následující podmínky. Dělíme-li součet prvního a druhého čísla třetím číslem, vyjde podíl 1 se zbytkem 2. Dělíme-li součet prvního a třetího čísla číslem druhým, vyjde podíl 2 beze zbytku a při dělení součtu druhého a třetího čísla prvním číslem je podíl 3 se zbytkem 2. Určete tato tři čísla.

46 Na schodišti vysokém 3,6 m by se počet schodů zvětšil o 3, kdyby se výška jednoho schodu zmenšila o 4 cm. Kolik schodů má schodiště? Jak jsou schody vysoké?

47 Jana měla vypočítat 70 úloh. Kdyby denně vyřešila o dvě více, než si naplánovala, skončila by o 4 dny dříve. Za kolik dní chtěla původně všechny úlohy vypočítat?

48 Malý Pavel skládal kostky stavebnice (kostka má tvar krychle). Chtěl postavit velikou krychli. Zbylo mu však 75 kostek, proto hrano zvětšil o jednu kostku. Potom mu ale 16 kostek chybělo. Kolik kostek měl ve stavebnici?

49 Zvětšíme-li jednu stranu obdélníku o 2 cm a druhou zmenšíme o 4 cm, zmenší se obsah obdélníku o  $36 \text{ cm}^2$ . Zvětšíme-li obě strany o 1 cm, bude obsah  $143 \text{ cm}^2$ . Určete původní rozměry obdélníku.

50 Jana je třikrát starší než Martin. Za pět let však bude jen dvakrát starší. Kolik let je nyní oběma dětem?

51 Zvětšíme-li stranu čtverce, zvětší se obsah o 21 %. O kolik procent jsme zvětšili stranu čtverce?

52 a) Cena zboží nejprve vzrostla o 20 %, později klesla o 10 %. O kolik procent se změnila původní cena vzhledem ke konečné ceně zboží?

b) Cena zboží nejprve klesla o 10 %, později vzrostla o 20 %. O kolik procent se změnila původní cena vzhledem ke konečné ceně zboží?

c) Jsou úlohy a), b) stejné?

53 Petr a Pavel skládali uhlí. Petr by sám uhlí složil za 3 hodiny, Pavel by sám pracoval 2 hodiny.

a) Za jak dlouho složí hromada uhlí, pracují-li oba společně?

b) Nejprve pracuje Petr sám půl hodiny, pak teprve přijde Pavel a zbytek uhlí složí společně. Za jak dlouho práci dokončí?

c) Chlapci nejprve pracují společně 20 minut, potom Pavel odejde. Jak dlouho ještě bude muset Petr pracovat, aby zbytek hromady uhlí sklidil?

54 Naplnění bazénu vodou první rourou trvá o dvě hodiny déle než druhou rourou a o 3 hodiny 36 minut déle, než kdyby bazén natékal oběma rourami najednou. Kolik hodin trvá naplnění bazénu jen první rourou? Za jak dlouho by se bazén naplnil jen druhou rourou?

55 Smícháme 10 litrů 30% roztoku a 15 litrů 50% roztoku. Kolikaprocentní bude výsledný roztok?

56 Kolik litrů destilované vody musíme přilít ke 100 litrům 90% lihu, abychom dostali líh 75%?

57 Kolik litrů vody  $60^\circ\text{C}$  teplé musíme přilít do 30 litrů vody  $30^\circ\text{C}$  teplé, chceme-li, aby výsledná teplota vody byla  $40^\circ\text{C}$ ?

58 Ze stanic A a B, vzdálených od sebe 170 km, jedou proti sobě dva vlaky. Rychlík, který ujede za hodinu 80 km, vyjel ze stanice A v 8 hodin. Osobní vlak vyjel ze stanice B v 7 hodin 30 minut a jel rychlosť  $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . V kolik hodin a jak daleko od stanice A se oba vlaky potkají?

59 Ze dvou míst C, D, vzdálených od sebe 120 km, vyjedou současně dvě auta. Pohybují-li se proti sobě, je po 20 minutách jízdy jejich vzdálenost 50 km.

Vyjedou-li týmž směrem, pak po 24 minutách je jejich vzdálenost 108 km.  
Vypočítejte, jakými rychlostmi se obě auta pohybují.

- 60** Do města vzdáleného 50 km vyjel cyklista. Vyjel však o 10 minut později, než si naplánoval, a proto jel rychlostí o  $0,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  větší, než měl původně v plánu. Do města však přijel v plánovaném čase. Jakou rychlosť měl v plánu jet? Za jak dlouho chtěl původně dojet do města?

### 3 Rovnice s parametrem

#### 3.1 Lineární rovnice s parametrem

- 1** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  a s parametrem  $a \in \mathbb{R}$ :

a)  $x(a-4) = a^2 - 16$       d)  $a^2x - x + a = 1$   
b)  $x(2a+1) = 5$       e)  $(3x+5)(a+4) = 2a+8$   
c)  $x(a-1) + a(x+4) = 2$       f)  $xa^2 = a(1+3x) - 3$

- 2** Určete všechny hodnoty parametru  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby řešením rovnice  $2p(xp+1) - (p^2+1)x = 2$  bylo kladné reálné číslo.

- 3** V rovnici  $\frac{m}{x} + \frac{m+3}{2} = 8 + \frac{1}{x}$  určete hodnotu parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby kořenem dané rovnice bylo číslo 2.

- 4** Řešte rovnici s neznámou  $p \in \mathbb{R}$  a s parametrem  $q \in \mathbb{R}$ :  $pq + 2q = 1 + p$

#### 3.2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

- 5** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  a s parametrem  $m \in \mathbb{R}$ :

a)  $\frac{2m}{2+x} = \frac{m-1}{x+1-m}$       c)  $\frac{2x+m}{x+1} - \frac{3m}{x-m} = 2$   
b)  $\frac{2+2m}{x+m} + \frac{x-m}{x+1} = 1$       d)  $\frac{(m+1)x-6}{x} = 3\left(1 - \frac{m^2-m}{x}\right)$

#### 3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou

- 6** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  a s parametrem  $p \in \mathbb{R}$ :

a)  $\sqrt{x^2 + 2p} = x + p$       c)  $\sqrt{x^2 + p^2} = x - 2p$   
b)  $\sqrt{x^2 - 4p} + x = 2p$       d)  $\sqrt{4x^2 + 4x - p} + 2x = p$

#### 3.4 Neznámá v absolutní hodnotě

- 7** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  a s parametrem  $k \in \mathbb{R}$ :

a)  $|x - k| = 2$       c)  $|x + 3k| = |x - k|$   
b)  $|x - 5| = k$       d)  $|x + 5 - k| = |x - 2|$

#### 3.5 Soustavy rovnic

- 8** Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy s parametrem  $a \in \mathbb{R}$ :

a)  $x - 4ay = 1$       c)  $3(ax - 1) = -y$   
 $2ax - 2y = 1$       d)  $3(ay - 1) = -x$   
b)  $x + (a-1)y = 1$       e)  $x - 2ay = 3$   
 $(a+1)x + 3y = -1$       f)  $2a(x-2) = 1+y$

- 9** Určete, pro která  $t \in \mathbb{R}$  je řešením soustavy

$x + 2y = 2$ ,  $2x - 3y = t$   
uspořádaná dvojice reálných čísel  $[x; y]$  taková, že  $x < 0 \wedge y > 0$ .

- 10** Určete všechny hodnoty parametru  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby řešením soustavy  $px + y = 3$ ,  $2x - 3y = p$  byla taková uspořádaná dvojice reálných čísel  $[x; y]$ , pro kterou platí  $y = \frac{1}{2}x$ .

### 3.6 Kvadratické rovnice s parametrem

11 Je dána rovnice  $(2a+3)x^2 + x - a + 4 = 0$ .

Určete všechny hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$ , pro které je daná rovnice lineární.

12 Je dána rovnice  $2x^2 + (b+1)x + 6 = 0$ .

Určete všechny hodnoty parametru  $b \in \mathbb{R}$ , pro které má daná rovnice dva různé reálné kořeny.

13 Je dána rovnice  $x^2 + cx + 4 + \frac{3}{2}c = 0$ .

Určete všechny hodnoty parametru  $c \in \mathbb{R}$ , pro které má rovnice dvojnásobný kořen.

14 Je dána rovnice  $x^2 - 2dx + 2d^2 - 9 = 0$ .

Určete všechny hodnoty parametru  $d \in \mathbb{R}$ , pro které nemá rovnice v množině reálných čísel řešení.

15 Je dána rovnice  $px(3x+4) = x^2 + 1$ .

V závislosti na hodnotě parametru  $p \in \mathbb{R}$  určete počet řešení dané rovnice v množině reálných čísel.

16 Je dána rovnice  $(a+1)x^2 - 2(a+3)x + 2a^2 - 7a + 3 = 0$ .

Určete všechny hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$ , pro které má rovnice jeden kořen roven nule. Potom určete druhý kořen.

17 Je dána rovnice  $t(x^2 + 1) - 3 = x(x - 2t)$ .

Určete všechny hodnoty parametru  $t \in \mathbb{R}$ , pro které má daná rovnice:

- a) dva různé reálné kladné kořeny
- b) dva různé reálné záporné kořeny
- c) dva různé reálné kořeny opačných znamének

18 Je dána rovnice  $x^2 - (m+3)x + m - 13 = 0$ .

Určete všechny hodnoty parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby kořeny dané rovnice byla dvě navzájem opačná čísla.

19 Je dána rovnice  $x^2 - (m+3)x + m - 13 = 0$ .

Určete všechny hodnoty parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby kořeny dané rovnice byla dvě navzájem převrácená čísla.

### 3.7 Neznámá ve jmenovateli (po úpravě kvadratická rovnice)

20 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  a s parametrem  $a \in \mathbb{R}$ :

a)  $\frac{2x+a}{x+2} - \frac{a}{x-2} = a$

c)  $\frac{3}{x+a} + \frac{a-1}{x-a} = \frac{2a}{x}$

b)  $x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{2}{x+a} - \frac{1}{ax+a^2}$

d)  $\frac{a}{x(a-1)} = 2-x$

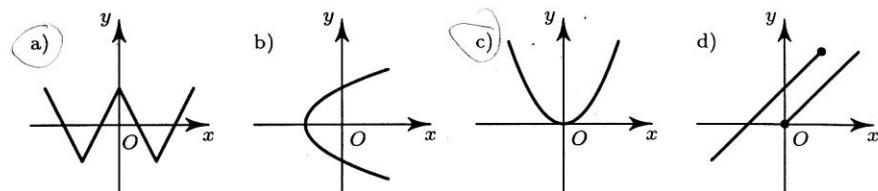
## 4 Funkce

### 4.1 Definice funkce

1 Rozhodněte, zda následujícími předpisy jsou dány funkce na dané množině:

- |  |   |
|--|---|
| a) $f_1: y = 2x - 1 \wedge x \in \mathbb{R}$       | c) $f_3: y^2 = x \wedge x \in \mathbb{R}$ |
| b) $f_2: y = \sqrt{x+4} \wedge x \in (-4; \infty)$ | d) $f_4: y = x^2 \wedge x \in \mathbb{R}$ |

2 Rozhodněte, které z nakreslených množin bodů na obr. 1 jsou grafem funkce:



Obr. 1

### 4.2 Rovnost funkcí

3 Rozhodněte, zda dané funkce  $f, g$  jsou si rovny:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $f(x) = 1$<br>$g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ | b) $f(x) = x$<br>$g(x) = x^2 \cdot x^{-1}$ | c) $f(x) = \sin x$<br>$g(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$ |
|---|--|---|

### 4.3 Definiční obor funkce

4 Určete definiční obory uvedených funkcí:

$$f_1(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$f_8(x) = \sqrt{\frac{x+2}{4x-6}}$$

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$f_9(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x-6}}$$

$$f_3(x) = \frac{x}{13x^2 + 10x - 3}$$

$$f_{10}(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{\frac{7}{10-x}}$$

$$f_4(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$f_{11}(x) = \log(x-3)$$

$$f_5(x) = \frac{1}{|x+3|-4}$$

$$f_{12}(x) = \frac{1}{\log_2(x+4)-3}$$

$$f_6(x) = \sqrt{x+2}$$

$$f_{13}(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)}$$

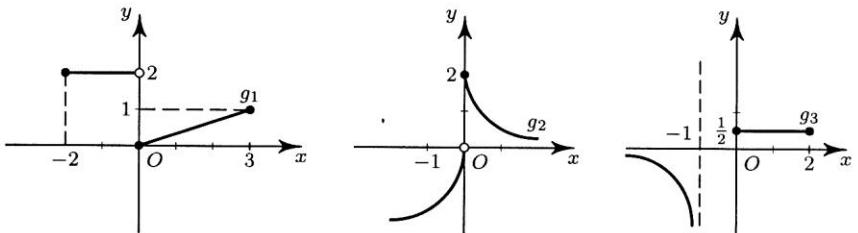
$$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$$

$$f_{14}(x) = \sqrt{\log_5 x + 1}$$

### 4.4 Hodnota funkce, obor funkčních hodnot

5 Vypočítejte hodnotu funkce  $y = \frac{x+4}{x-1}$  v bodech  $-1, 3, \sqrt{2}$ .

- 6** Je dána funkce  $f: y = x^3 - x$  a  $x \in \mathbb{R}$ . Vypočítejte:  $f(-2)$ ,  $f(\frac{1}{3})$ ,  $f(2\sqrt{3})$ .
- 7** Je dána funkce  $g(x) = 3x^2 + 1$ . Vypočítejte:  $g(1)$ ,  $g(a) + g(2)$ ,  $g(a+2)$ ,  $g(b^2)$ ,  $[g(b)]^2$ .
- 8** Je dána funkce  $f(x) = x^2 + 2x - 30$ . Rozhodněte, zda existuje  $x \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo:
- a)  $f(x) = 5$       b)  $f(x) = -100$       c)  $f(x) = \frac{11}{2}\sqrt{3}$
- 9** Je dána funkce  $g(x) = 2x - 3$ . Rozhodněte, zda existuje  $x \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo:
- a)  $g(x^2) = [g(x)]^2 - 2$       b)  $g(x+6) = g(6x)$       c)  $g(x)+6 = 6g(x)$
- 10** Je dána funkce  $h: y = \frac{x^2 + 1}{2 - x^2}$ .
- a) Rozhodněte, která z následujících čísel  $2, -\frac{5}{2}, 0, 5, -1$  patří do oboru hodnot funkce  $h$ .
- b) Určete všechna čísla  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo:  $h(m) = h(\sqrt{3})$
- c) Určete všechna čísla  $c \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo:  $h(c+1) = h(\frac{1}{2})$
- 11** Na obr. 2 jsou grafy funkcí  $g_1, g_2, g_3$ :



Obr. 2

- a) Určete definiční obor a obor funkčních hodnot pro funkce  $g_1, g_2, g_3$ .
- b) Určete čísla  $x_1, x_2, x_3$  z definičního oboru funkce  $g_1$  tak, aby platilo:  
 $g_1(x_1) = 0,5$        $g_1(x_2) = 2$        $g_1(x_3) = -3$

#### 4.5 Funkce složená

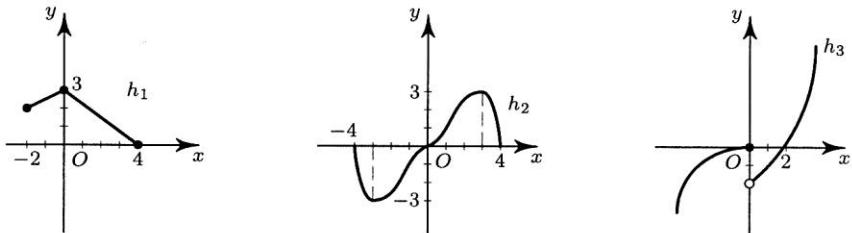
- 12** Jsou dány dvě funkce  $f(x) = 3x + 1$  a  $g(x) = x^2 + 3x + 2$ . Vypočítejte:
- a)  $f(g(1))$       c)  $f(f(2))$       e)  $f(g(a))$   
 b)  $g(f(1))$       d)  $g(g(-3))$       f)  $g(f(b))$
- 13** Jsou dány dvě funkce  $f(x) = x^2 + 1$  a  $g(x) = (x+1)^2$ .
- a) Vypočítejte  $f(g(-2))$ .
- b) Vyjádřete předpis funkce  $h(x) = f(g(x))$  rovnicí a potom vypočítejte  $h(-2)$ .
- 14** Jsou dány dvě funkce  $f(x) = -2x + 3$  a  $g(x) = \sqrt{x}$ . Napište předpisy pro funkce složené:
- a)  $f \circ g$       c)  $f \circ (f \circ g)$       e)  $f \circ (g \circ f)$   
 b)  $g \circ f$       d)  $g \circ (g \circ f)$       f)  $g \circ (f \circ g)$

- 15** Jsou dány tři funkce  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $h(x) = x + 3$ . Vytvořte složené funkce  $h_1$  až  $h_4$  a určete jejich definiční obory:
- a)  $h_1(x) = g(h(f(x)))$       c)  $h_3(x) = f(g(h(x)))$   
 b)  $h_2(x) = f(h(g(x)))$       d)  $h_4(x) = h(g(f(x)))$
- 16** Určete hodnotu parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby pro funkci  $h(x) = ax + 3$  platilo  $h(h(2)) = 17$ .
- 17** U daných složených funkcí určete funkci vnější a funkci vnitřní:
- a)  $y = 6\sqrt{x} - 4$       c)  $y = \log^2 x$       e)  $y = 5^{\sqrt{x}}$       g)  $y = \log^2 x - 4 \log x$   
 b)  $y = \sqrt{x^2 - 4x}$       d)  $y = \log x^2$       f)  $y = \sqrt{5^x}$       h)  $y = (x^2 + 1)^3$

#### 4.6 Vlastnosti funkcí

##### Rostoucí, klesající funkce

- 18** Na obr. 3 jsou grafy funkcí  $h_1, h_2, h_3$ . Rozhodněte, ve kterých intervalech jsou dané funkce rostoucí, klesající.



Obr. 3

- 19** Dokažte, že funkce  $g_1: y = 2x - 1$  je rostoucí v  $\mathbb{R}$ .

- 20** Dokažte, že funkce  $g_2: y = -3x + 6$  je klesající v  $\mathbb{R}$ .

##### Prostá funkce

- 21** Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou prosté ve svém definičním oboru:

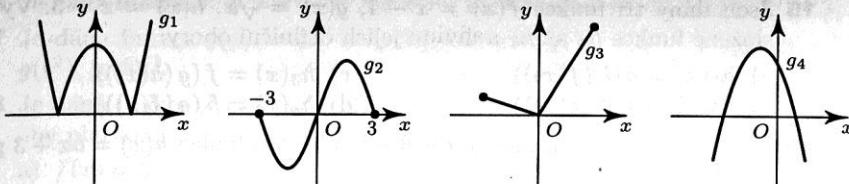
$$f_1: y = 2x + 5 \quad f_2: y = x^2 - 4 \quad f_3: y = 2^x \quad f_4: y = |x + 1|$$

- 22** Určete co největší intervaly, ve kterých jsou prosté funkce, jejichž grafy jsou na obr. 3.

##### Sudá, lichá funkce

- 23** Které z funkcí  $h_1$  až  $h_{12}$  jsou sudé (liche) v definičním oboru?

$h_1: y = x$	$h_4: y = 4x$	$h_7: y =  x $	$h_{10}: y = x^3$
$h_2: y = \cos x$	$h_5: y = x^2$	$h_8: y = \log x$	$h_{11}: y = 2^x$
$h_3: y = \frac{1}{x}$	$h_6: y = \frac{4x}{x^2 - 4}$	$h_9: y = \frac{4x}{x^2 + 4}$	$h_{12}: y = \frac{x^2}{ x  + 3}$



Obr. 4

- 24** Na obr. 4 jsou nakresleny grafy funkcií  $g_1, g_2, g_3, g_4$ . Rozhodněte, které z uvedených funkcií jsou sudé (líché) v definičním oboru.  
(Pozn.: Graf funkce  $g_1$  je souměrný podle osy  $y$ , graf funkce  $g_2$  je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.)

### Omezená funkce

- 25** Rozhodněte, které z funkcií  $g_1$  až  $g_{16}$  jsou omezené shora, omezené zdola, omezené v definičním oboru.

$$\begin{array}{llll} g_1: y = \cos x & g_5: y = x & g_9: y = x^2 & g_{13}: y = 2^x \\ g_2: y = \sin^2 x & g_6: y = |x| & g_{10}: y = x^3 & g_{14}: y = 2^{|x|} \\ g_3: y = \cos x - 1 & g_7: y = -4x & g_{11}: y = x^{-1} & g_{15}: y = \log x \\ g_4: y = 2 \sin x & g_8: y = -4|x| + 3 & g_{12}: y = x^{-2} & g_{16}: y = -|\log x| \end{array}$$

- 26** Dokažte, že dané funkce jsou omezené v definičním oboru.

$$f_1(x) = \frac{10}{x^2 + 2} \quad f_2(x) = x^2 \wedge x \in \langle -5; 3 \rangle \quad f_3(x) = \frac{x}{x+4} \wedge x \in \mathbb{R}_0^+$$

### Maximum, minimum funkce

- 27** Rozhodněte, zda funkce  $f_1$  až  $f_9$  mají maximum nebo minimum v definičním oboru. Jestliže mají maximum nebo minimum, potom určete, ve kterém bodě, a dále určete jeho hodnotu.

$$\begin{array}{llll} f_1: y = 2x & f_4: y = |x| + 1 & f_7: y = 2^x + 1 & \\ f_2: y = 2x^2 - 1 & f_5: y = -x^2 + 4 & f_8: y = -|\log x| & \\ f_3: y = \frac{x+3}{x} & f_6: y = \frac{4x^2}{x^2+4} & f_9: y = \frac{1}{x^2+2x+1} & \end{array}$$

### Vlastnosti funkcií — opakování

- 28** Načrtněte graf funkce  $f$ , víte-li, že

$$D(f) = \langle -3; \infty \rangle - \{0\}, f(-3) = -2.$$

Průsečíky grafu funkce  $f$  s osou  $x$  jsou v bodech  $P_1[-1; 0], P_2[5; 0]$ .

V intervalu  $\langle -3; 0 \rangle$  je funkce  $f$  rostoucí a není omezená shora.

V intervalu  $\langle -3; 3 \rangle - \{0\}$  je funkce  $f$  sudá.

V intervalu  $\langle 3; \infty \rangle$  je funkce  $f$  rostoucí a omezená shora číslem  $h = 4$ .

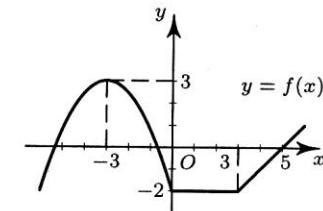
- Z grafu určete obor funkčních hodnot funkce  $f$ .
- Určete souřadnice průsečíku grafu funkce  $f$  s osou  $y$ .
- Je funkce  $f$  omezená zdola v definičním oboru?
- Určete maximum funkce  $f$  v definičním oboru.

- Určete minimum funkce  $f$  v definičním oboru.
- Je funkce  $f$  prostá v definičním oboru?
- Určete alespoň jeden interval, ve kterém je funkce  $f$  prostá.

### 4.7 Vztahy mezi grafy funkcí

- 29** Za předpokladu, že znáte graf funkce  $y = f(x)$ , který je na obr. 5, načrtněte grafy funkcí:

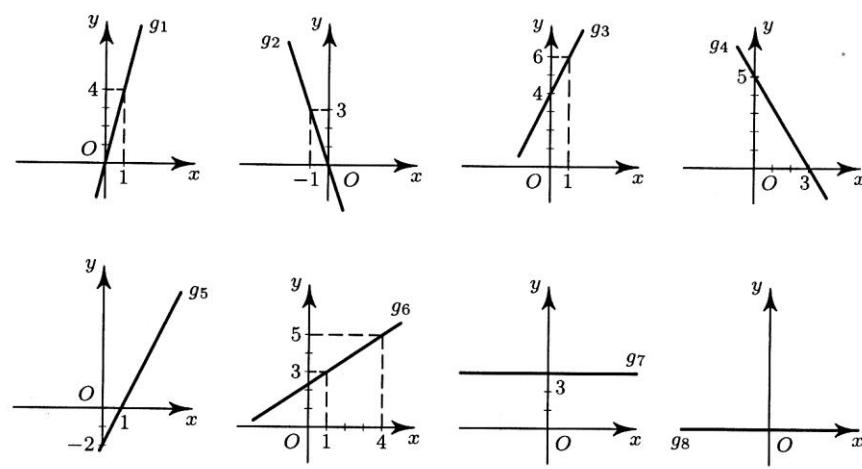
- $y = f(x) + 2$
- $y = f(x+2)$
- $y = f(x-1) - 3$
- $y = 2f(x)$
- $y = \frac{1}{2}f(x)$
- $y = -f(x)$
- $y = -f(2x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(|x|)$
- $y = |f(|x|)|$



Obr. 5

### 4.8 Lineární funkce

- Funkční předpis lineární funkce  $f$  zapište rovnicí, víte-li, že platí:  $f(0) = 1 \wedge f(2) = 5$ .
- Funkční předpis lineární funkce  $g$  zapište rovnicí, víte-li, že graf funkce  $g$  prochází body  $A[1; 2], B[3; -4]$ .
- Funkční předpis lineární funkce  $h$  zapište rovnicí, víte-li, že pro funkci  $h$  platí:  $h(x+1) - h(x) = 2 \wedge h(0) = 3$ .
- Funkční předpisy lineárních funkcií  $g_1$  až  $g_8$  zapište rovnicemi, jsou-li jejich grafy na obr. 6:



Obr. 6

**34** Nakreslete graf funkce  $f$ , která je po částech lineární a pro kterou platí:  
 $D(f) = \langle -5; \infty \rangle$ ,  $f(-5) = 0$ . Pro  $x = 0$  funkce nabývá maxima, hodnota maxima je 5. Pro  $x \in \langle -5; 0 \rangle$  je funkce rostoucí, pro  $x \in \langle 0; 4 \rangle$  je funkce klesající a  $f(4) = -5$ . V intervalu  $\langle 4; \infty \rangle$  je daná funkce konstantní. Dále zapište funkci  $f$  jako sjednocení lineárních funkcí.

**35** Načrtněte graf funkce, určete obor funkčních hodnot:

a)  $f_1: y = -2x + 1$       b)  $f_2: y = 0,5x + 3 \wedge x \in \langle -3; 0 \rangle \cup \{2\} \cup (5; \infty)$

**36** Načrtněte grafy funkcí  $f_1, f_2$ :

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ 2x + 1, & x < 2 \end{cases}$$

**37** Je dána funkce  $g: y = -2x + 3$ . Funkční předpis lineární funkce  $f$  určete tak, aby graf funkce  $f$  byl souměrný s grafem funkce  $g$  podle  
 a) osy  $x$ ,      b) osy  $y$ ,      c) počátku,      d) přímky  $y = x$ .

**38** Určete reálné číslo  $a$  tak, aby pro lineární funkci  $f: y = ax + 2$  platilo:  
 $\forall x \in \langle -4; 4 \rangle$  je  $f(x) \in \langle -10; 10 \rangle$ .

**39** Určete reálné číslo  $b$  tak, aby pro lineární funkci  $h: y = -2x + b$  platilo:  
 $\forall x \in \langle -5; 5 \rangle$  je  $f(x) \in \langle -15; 25 \rangle$ .

### Graf lineární funkce s absolutními hodnotami

**40** Nakreslete grafy funkcí:

$$\begin{array}{ll} f_1: y = |x| & m_1: y = |x + 2| + 0,5|x - 1| - x \\ f_2: y = |x| + 2 & m_2: y = |x + 1| - |3 - x| + 2 \\ f_3: y = |x + 2| & g_1: y = |x - 1| - 2 \\ f_4: y = |x + 2| - 3 & g_2: y = ||x - 1| - 2| - 3 \\ h_1: y = 2|x| & g_3: y = |||x - 1| - 2| - 3| \\ h_2: y = 2|x - 3| + 1 & g_4: y = ||||x| - 1| - 1| - 1 \end{array}$$

**41** Načrtněte grafy funkcí:

a)  $y = x + \sqrt{x^2}$       b)  $y = 2x - 1 + |x - 1| + \sqrt{(1-x)^2}$

### Funkce signum: $y = \operatorname{sgn} x$

**42** Načrtněte grafy funkcí:

$$\begin{array}{lll} h_1: y = \operatorname{sgn} x & h_3: y = \operatorname{sgn}(x - 2) & h_5: y = \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn}(x + 2) \\ h_2: y = x \operatorname{sgn} x & h_4: y = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3) & h_6: y = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn}(x + 2) \end{array}$$

### Funkce celá část: $y = [x]$

**43** Načrtněte grafy funkcí:

$$\begin{array}{lll} g_1: y = [x] & g_3: y = [x - 2] & g_5: y = 2[x] \\ g_2: y = -[x] & g_4: y = [x] - 2 & g_6: y = [2x] \\ & & g_7: y = [x] + x \\ & & g_8: y = [x] - x \end{array}$$

### Lineární interpolace

**44** Za předpokladu, že graf funkce  $f(x) = x^2$  lze v intervalu  $\langle 2,14; 2,15 \rangle$  považovat za úsečku, vypočítejte  $f(2,147)$ .

**45** Za předpokladu, že graf funkce  $g(x) = \cos x$  lze v intervalu  $\langle 22^\circ 40'; 22^\circ 50' \rangle$  považovat za úsečku, vypočítejte  $\cos 22^\circ 43'$ .

### 4.9 Kvadratická funkce

**46** Funkční předpis kvadratické funkce  $f$  zapište rovnicí, víte-li, že platí:  $f(1) = -2, f(2) = 4, f(3) = 4$ .

**47** Funkční předpis kvadratické funkce  $f$  zapište rovnicí, víte-li, že graf funkce  $f$  prochází body  $K[0; -3], L[1; 0], M[-1; -4]$ .

**48** Funkční předpis kvadratické funkce  $f$  zapište rovnicí, víte-li, že platí: funkce  $f$  je sudá v  $\mathbb{R}$ , hodnota minima je  $-8$  a jeden z průsečíků grafu funkce s osou  $x$  má souřadnice  $[2; 0]$ .

**49** Funkční předpis kvadratické funkce  $f$  zapište rovnicí, víte-li, že platí: funkce  $f$  pro  $x = 2$  nabývá maxima, přičemž hodnota maxima je  $4$  a osu  $y$  protíná graf funkce  $f$  v bodě  $[0; 1]$ .

**50** Funkční předpis kvadratické funkce  $f$  zapište rovnicí, víte-li, že platí: funkce  $f$  je v intervalu  $(-\infty; 3)$  rostoucí, v intervalu  $(3; \infty)$  je klesající. Graf prochází počátkem soustavy souřadnic. Hodnota maxima je  $18$ .

**51** Je dána funkce  $g: y = x^2 - 4x + 3$ . Určete všechna reálná čísla  $x$  tak, aby platilo  $g(x) = g(-2)$ .

**52** Určete reálná čísla  $a, b$  tak, aby pro funkci  $y = ax^2 + bx + 5$  platilo:  $\forall x \in \mathbb{R} f(x+1) - f(x) = 8x + 3$ .

**53** Je dána funkce  $g: y = x^2 - 2x - 3$ . Funkční předpis kvadratické funkce  $f$  určete tak, aby graf funkce  $f$  byl souměrný s grafem funkce  $g$

a) podle osy  $x$ ,      b) podle osy  $y$ ,      c) podle počátku.

**54** Načrtněte grafy funkcí (určete souřadnice vrcholu, souřadnice průsečíků grafu s osou  $x$  a s osou  $y$ , načrtněte graf, určete obor funkčních hodnot):

$$\begin{array}{lll} f_1: y = x^2 + 4x + 3 & f_4: y = -x^2 - 3x & f_7: y = 3x^2 + 6x + 3 \\ f_2: y = x^2 - 6x + 9 & f_5: y = 2x^2 - 6 & f_8: y = -2x^2 + 4x + 1 \\ f_3: y = x^2 + x + 1 & f_6: y = \frac{1}{2}x^2 + 2 & f_9: y = \frac{3}{4}x^2 - 3x - \frac{7}{2} \end{array}$$

### Graf kvadratické funkce s absolutními hodnotami

**55** Načrtněte grafy funkcí:

$$\begin{array}{lll} g_1: y = x^2 + 2x - 3 & h_1: y = x^2 - 3x & k_1: y = |2x + 1| - x|x - 4| \\ g_2: y = |x^2 + 2x - 3| & h_2: y = x^2 - 3|x| & k_2: y = |x|x - 2| + |x^2 - 2x| \\ g_3: y = x^2 + 2|x| - 3 & h_3: y = |x|x - 3| & k_3: y = |x^2 - x| + |x| - 2 \\ g_4: y = |x^2 + 2|x| - 3| & h_4: y = |x|(x - 3) & k_4: y = |9 - x^2| + |4 - x^2| - 5 \end{array}$$

### 4.10 Úprava výrazu – graf funkce

**56** Načrtněte grafy daných funkcí:

$$\begin{array}{ll} a) y = \left(\frac{x-5}{x+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{2x-1}{x+1}\right) & d) y = \frac{x^3 - 4x + x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \cdot x \\ b) y = \frac{x^3 - 8}{\frac{x^2+4}{x+2} + \frac{2x}{x+2}} : \frac{x^3 + 8}{(x-2)^2 + 2x} & e) y = \frac{12x^3 - 5x^2 - 6x - 1}{4x + 1} \\ c) y = \left(x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) \cdot \left(x - 2 + \frac{2}{x+1}\right) & f) y = 2x^2 - \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x}} \end{array}$$

4. funkce

4. funkce

4.11 Exponenciální funkce

**57** Určete reálná čísla  $a, b$  tak, aby graf funkce  $y = a \cdot 2^x + b$  procházel body  $A[0; \frac{7}{2}], B[-1; 2]$ .

**58** Určete reálná čísla  $a, b$  tak, aby graf funkce  $y = 2^{x+a} + b$  procházel body  $A[1; 15], B[-2; 1]$ .

**59** Určete všechny hodnoty reálného parametru  $q$  tak, aby daná funkce byla rostoucí.

a)  $y = \left(\frac{2q^2}{q^2+1}\right)^x$       b)  $y = \left(\frac{1}{q}\right)^x$       c)  $y = \left(\frac{q+3}{q-1}\right)^x$

**60** Určete všechny hodnoty reálného parametru  $p$  tak, aby daná funkce byla klesající.

a)  $y = \left(\frac{p-1}{3p}\right)^x$       b)  $y = (p^2 - 4)^x$       c)  $y = \left(\frac{p+1}{p^2-1}\right)^x$

**61** Užitím grafu vhodné exponenciální funkce dokažte, že  $\left(\frac{7}{5}\right)^{-0,5} < 1$ .

**62** Užitím grafu vhodné exponenciální funkce rozhodněte, zda číslo  $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{0,4}$  je větší, nebo menší než 1.

**63** Pomocí grafů vhodných exponenciálních funkcí rozhodněte, které z čísel  $K, L$  je větší:

a) $K = 0,25^{0,1}$	b) $K = e^{-1,1}$	c) $K = \left(\frac{6}{11}\right)^{2,3}$
$L = 0,26^{0,1}$	$L = \pi^{-1,1}$	$L = \left(\frac{6}{11}\right)^{2,4}$

**64** Pomocí grafu vhodné exponenciální funkce rozhodněte, jaký vztah platí mezi reálnými čísly  $r, s$  víte-li, že platí:

a)  $\left(\frac{2}{7}\right)^r < \left(\frac{2}{7}\right)^s$       b)  $1,7^r > 1,7^s$       c)  $(\sqrt{2}-1)^r > (\sqrt{2}-1)^s$

**65** Pomocí grafů exponenciálních funkcí rozhodněte, který ze vztahů  $0 < a < 1$ ,  $a > 1$  platí, víte-li, že platí:

a)  $a^{-0,7} > a^{-0,8}$       b)  $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$       c)  $\frac{1}{a^3} > \frac{1}{a^2}$

**66** Načrtněte grafy funkcí (určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky grafu s osou  $x$  a s osou  $y$ ):

$f_1: y = 2^x - 4$	$f_4: y =  2^{x+1} - 4 $	$f_7: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 1$
$f_2: y = 2^{x+1} - 4$	$f_5: y = 2^{ x+1 } - 4$	$f_8: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$
$f_3: y = -(2^{x+1} - 4)$	$f_6: y = 2^{ x +1} - 4$	$f_9: y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$

**67** Načrtněte grafy funkcí:

$g_1: y = 2^{-x}$	$g_3: y = 3 \cdot 2^x$	$g_5: y = e^x$
$g_2: y = 2^{-x+1}$	$g_4: y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$g_6: y = 10^x$

4.12 Logaritmus čísla

**68** Danou rovnost přepište pomocí definice logaritmu:

a)  $3^2 = 9$       b)  $2^{-3} = \frac{1}{8}$       c)  $9^{\frac{1}{2}} = 3$

**69** Vypočítejte:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 9$	c) $\log_7 \sqrt{7}$	e) $\log_8 \sqrt{2}$	g) $\log_{0,25} 4$
b) $\log_5 125$	d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$	f) $\log_5 1$	h) $\log_{0,2} 0,04$

**70** Najděte všechna  $x \in (0; \infty)$ , pro něž platí:

a) $\log_3 x = 4$	c) $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$	e) $\log_5 x = 0$	g) $\log_{17} x = 1$
b) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$	d) $\log_2 x = -\frac{1}{3}$	f) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$	h) $\log x = -\frac{3}{5}$

**71** Najděte všechna kladná reálná čísla  $a$  tak, aby platilo:

a) $\log_a 27 = 3$	c) $\log_a \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	e) $\log_a 4 = \frac{1}{4}$	g) $\log_a 8 = 6$
b) $\log_a \frac{1}{16} = 4$	d) $\log_a 5 = -1$	f) $\log_a \sqrt{8} = 3$	h) $\log_a \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$

**72** Užitím pravidel pro počítání s logaritmy upravte a potom rozhodněte, zda dané číslo  $x$  je kladné, nebo záporné. Je-li číslo  $x$  kladné, rozhodněte dále, zda je menší, nebo větší než jedna.

a) $x_1 = 2 \log 4 + \log 3 - \log 6$	c) $x_3 = 2 \log_{0,2} 4 + \log_{0,2} 3 - \log_{0,2} 6$
b) $x_2 = \log_6 12 - \log_6 \frac{1}{12} - 2$	d) $x_4 = \ln 4 + \ln \frac{1}{3} - 2(\ln 2 + \ln \frac{1}{4})$

**73** Vypočítejte:

a) $\log_2 \log_2 16$	d) $3 \log_2 \frac{5}{3} - 2 \log_2 \frac{10}{9} + \log_2 \frac{1}{30}$
b) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$	e) $\log^2 2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5 - \log 1$
c) $\log_5 \frac{1}{25} - (\log_{\frac{1}{3}} 9)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4^2$	f) $2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 5}$

**74** Vypočítejte  $x$ , víte-li, že  $a, b, c$  jsou kladná reálná čísla (odlogaritmujte):

a) $\log x = 0,5 \log a + 3 \log b - 2 \log c$
b) $\log x = \frac{1}{2} \log a - \log b - \frac{3}{5} \log c + 1$
c) $\log_2 x = 3 \log_2 a + 2 \log_2 b + 4$
d) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4} (\log_{\frac{1}{2}} a + 3 \log_{\frac{1}{2}} b) - 2 + \log_{\frac{1}{2}} c$

**75** Dané výrazy vyjádřete pomocí  $\log a, \log b, \log c$ , kde  $a, b, c$  jsou daná kladná reálná čísla (zlogaritmujte):

a) $\log \frac{a^2 b^3}{100 \sqrt{c}}$	b) $\log \sqrt{\frac{10a}{bc}}$	c) $\log \frac{(a+b)^2}{c}$
--	---------------------------------	-----------------------------

VÝSLEDKY

OBSAH

30

31

### 4.13 Logaritmická funkce

**76** Určete reálná čísla  $a, b$  tak, aby pro funkci  $h_1: y = a \log_2 x + b$  platilo  $h_1(4) = 5, h_1(\frac{1}{4}) = -7$ .

**77** Určete reálná čísla  $a, b$  tak, aby graf funkce  $h_2: y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)+b$  procházel body  $K[2; 1], L[8; 0]$ .

**78** Určete definiční obory funkcií  $f_1$  až  $f_{10}$ :

$$f_1: y = \log_3 x$$

$$f_2: y = \log_3(x+6)$$

$$f_3: y = \log(x^2 - 4)$$

$$f_4: y = \frac{1}{\log x - 1}$$

$$f_5: y = \frac{1}{\log_2(x+7)-1}$$

$$f_6: y = \log(|x+1|-7)$$

$$f_7: y = \log(-|x+3|+|x|+1)$$

$$f_8: y = \sqrt{\log(x+3)}$$

$$f_9: y = \log \frac{x}{2x-1}$$

$$f_{10}: y = \sqrt{\log_{0,2} \frac{x+5}{x}}$$

**79** Pomocí grafu vhodné logaritmické funkce rozhodněte, zda je dané číslo kladné, nebo záporné. Je-li dané číslo kladné, rozhodněte dále, zda je menší, nebo větší než jedna.

a)  $A = \log_2 3$       b)  $B = \log_{0,3} 0,6$       c)  $C = \log_{100} 0,99$

**80** Pomocí grafu vhodné logaritmické funkce rozhodněte, zda platí  $A > B$ , nebo  $A < B$ :

a)  $A = \log_3 11$       b)  $A = \log_{\frac{1}{2}} 0,4$       c)  $A = \log_3 5$       d)  $A = \log_{0,1} 0,2$   
 $B = \log_3 12$        $B = \log_{\frac{1}{2}} 0,3$        $B = \log_5 3$        $B = \log_{0,6} 0,2$

**81** Pomocí grafu vhodné logaritmické funkce rozhodněte, zda je  $a > 1$ , nebo  $a \in (0; 1)$ , víte-li, že platí:

a)  $\log_a 2 < \log_a 5$       b)  $\log_a 2,7 > \log_a 2,8$       c)  $\log_a 0,4 < \log_a 1$

**82** Určete takové celé číslo  $m$ , pro které platí nerovnosti:

a)  $m < \log_3 2 < m+1$       c)  $m < \log 150 < m+1$   
 $b) m < \log_{\frac{1}{2}} 5 < m+1$       d)  $m < \ln 10 < m+1$

Využijte graf vhodné logaritmické funkce.

**83** Načrtněte grafy funkcí. (Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky grafu s osou  $x$  a s osou  $y$ .)

$g_1: y = \log_2(x+4)$        $g_4: y = |\log_2(x+4)| - 1$   
 $g_2: y = \log_2(x+4) - 1$        $g_5: y = \log_2|x+4| - 1$   
 $g_3: y = |\log_2(x+4) - 1|$        $g_6: y = \log_2(|x|+4) - 1$

**84** Načrtněte grafy funkcií:

$h_1: y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$        $h_4: y = \ln x$        $h_6: y = \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x$   
 $h_2: y = 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 2$        $h_5: y = \log x$        $h_7: y = \log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x$   
 $h_3: y = 3 \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

**85** Najděte všechna reálná čísla  $x$ , pro která platí:

a)  $\log_{1,5} x < \log_{1,5} 5$       b)  $\log_{0,7}(x+1) \leq \log_{0,7} \frac{1}{3}$

Využijte graf vhodné logaritmické funkce.

### 4.14 Grafické řešení rovnic a nerovnic

**86** Řešte v R graficky rovnice. Kreslete na milimetrový papír, pro kreslení grafů funkcí užijte šablonu, výsledky uvádějte s přesností na desetiny. Proveďte zkoušku dosazením nebo užitím grafické kalkulačky.

a)  $x^2 = x + 4$       c)  $\log_2 x = x - 4$       e)  $\ln x + 6 = |x - 2|$   
**b)  $|x| = \frac{1}{2}x + 4$**       d)  $2^{x-1} = -(x-2)^2 + 5$       f)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 3 = -\frac{1}{x}$

**87** Řešte v R graficky nerovnice. Kreslete na milimetrový papír, pro kreslení grafů funkcí užijte šablonu, výsledky uvádějte s přesností na desetiny.

a)  $|x+2| \geq -|x| + 4$       c)  $\log_{\frac{1}{2}} x > 9x - 10^2$   
**b)  $|x^2 - 1| > -x^2 + 4$**       d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \log_2(x+4)$

**88** Řešte v R graficky rovnice s parametrem  $a \in \mathbb{R}$ . Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k hodnotě parametru  $a \in \mathbb{R}$ .

a)  $-x + a = 2|x|$       d)  $|x-2| + x = ax + 3$   
**b)  $ax = |x-1|$**       e)  $|x-2| + x = ax$   
c)  $|x-2| + x = 2x + a$       f)  $|1-2x| + |x+1| = a$

### 4.15 Inverzní funkce

**89** Rozhodněte, ke kterým z daných funkcí existují funkce inverzní v definičním oboru, a svoje tvrzení zdůvodněte.

a)  $y = 2x - 1$       c)  $y = 3^x$       e)  $y = |x|$   
**b)  $y = x^2 - 2x$**       d)  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$       f)  $y = \sqrt{x}$

**90** U následujících funkcí postupně určete definiční obor, vypočítejte průsečíky s osami, načrtněte graf, zapište obor funkčních hodnot. Rozhodněte, zda existuje funkce inverzní. Jestliže ano, do téže soustavy souřadnic nakreslete graf funkce inverzní a pro funkci inverzní určete definiční obor, obor funkčních hodnot a rovnici.

a)  $y = 3x + 2$       j)  $y = x^2 - 6x + 5$   
**b)  $y = -\frac{x}{2} + 4$**       k)  $y = x^2 - 6x + 5 \wedge x \in (3; \infty)$   
c)  $y = |x+2|$       l)  $y = x^2 - 6x + 5 \wedge x \in (-\infty; 3)$   
d)  $y = -x + 3$       m)  $y = 2^{x-1} - 4$   
e)  $y = x$       n)  $y = 0,5^{x+2} - 1$   
f)  $y = 2$       o)  $y = e^x$   
g)  $y = \frac{1}{2}x^2 \wedge x \in (0; \infty)$       p)  $y = \log_2 x + 1$   
h)  $y = \frac{1}{2}x^2 \wedge x \in (-\infty; 0)$       q)  $y = \log_2(x+4)$   
i)  $y = \frac{1}{2}x^2$       r)  $y = 2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

## 5 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

### 5.1 Exponenciální rovnice

1 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$  e)  $2 \cdot 0,5^{x^2+\frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$   
 b)  $\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$  f)  $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$   
 c)  $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{27^{3-3x}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$  g)  $\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$   
 d)  $0,25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$  h)  $\frac{3^x}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = 4,5$

2 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $3^x + 3^{x+1} = 108$  d)  $\frac{4}{5} \cdot 5^0 + 5^{-1} - 25^x + 20 \cdot 25^{x-1} = 0$   
 b)  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$  e)  $3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$   
 c)  $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$  f)  $2^{2x} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} = -600$

3 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$  d)  $9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} = \frac{10}{3}$   
 b)  $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$  e)  $2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$   
 c)  $9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$  f)  $5^{2x} \cdot (5^{2x} - 5) = 3 \cdot (5^{2x+1} + 5^{2x}) + 50$

4 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$  c)  $2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$   
 b)  $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$  d)  $3^x + \frac{9^x}{3} = 3^{x+1} + \frac{9^x}{9}$

5 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$  b)  $16^x = 8 \cdot 4^x + 2 \cdot 8^x$

6 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $3^x = 10$  c)  $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$   
 b)  $5^{x+1} = 4$  d)  $5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$

7 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $6 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} = 82$  c)  $2^x - 3^x = 2^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1}$   
 b)  $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7$  d)  $7 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 6 \cdot 9^x$

8 Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

- a)  $2^x + 5 \cdot 3^y = 53$  d)  $16^{x+y} = 8$   
 b)  $7 \cdot 2^x - 3^y = 47$  e)  $16^x + 16^y = 6$   
 c)  $2^{x+1} + 3^y = 31$  f)  $5^{\frac{x+y}{2}} : 5^{\frac{x+y}{4}} = 625$   
 d)  $2^x - 3^{y-2} = -1$  g)  $6^{\frac{x-y}{2}} : 6^{\frac{x-y}{4}} = 216$   
 e)  $2 \cdot 2^{x-y} + 2^{x+y-1} = 20$  h)  $x^{y+1} = 27$   
 f)  $10 \cdot 2^{x-y-1} - 2^{x+y} = -22$  i)  $x^{-y+1} = 3^{-1}$

### 5.2 Logaritmické rovnice

9 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log_2(x+1) = 3$  e)  $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$   
 b)  $4 \log_3(2x-1) = 12$  f)  $\log_{\frac{1}{2}} \log_3(1+20 \log_2 x) = -2$   
 c)  $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$  g)  $\log_2[14+2 \log_7(1+2 \log_{\frac{1}{2}} x)] = 4$   
 d)  $\log_4(5x-4) = 2$  h)  $\log_9\{3 \log_2[1+\log_3(1-2 \log_3 x)]\} = 0,5$

10 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log_5(x^2+2x) = \log_5(-3x)$  c)  $\log_{0,1}(x^2-5x) = \log_{0,1}(5x+11)$   
 b)  $\log x^2 = \log(4-x^2)$  d)  $\log_2(x^2-x) = \log_2 x$

11 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log x = 2 \log 5 + \log 4$   
 b)  $\frac{\log_3 x}{1 + \log_3 2} = 2$   
 c)  $\log_6(x+1) + \log_6 x = 1$   
 d)  $\log_2(x+7) - \log_2 x = 3$   
 e)  $\log(x+3) = \log x + \log 3$   
 f)  $\log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1$   
 g)  $\log x^5 - \log x^4 + \log x^3 = 12$   
 h)  $\log \sqrt{x} + \log \frac{1}{x^2} - \log x^3 + \frac{11}{2} = \frac{\log x^2}{1 + \log 10}$   
 i)  $3 \log 2x^2 + 2 \log 3x^3 = 5 \log x + 2 \log 6x^3$   
 j)  $0,5(3 \log 5 - 1 - \log x) = 2 - \log 5$   
 k)  $\log_4(3x+2) - 2 \log_4 x = 2 - \log_4 8$   
 l)  $1 + \log_3(5-x) - \log_3(2x-1) = \log_3(2x-1)$

12 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log_2 \frac{3-x}{x+3} = -2$  c)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x+14} = \frac{\log 125}{\log 5}$   
 b)  $\log_3 \frac{6x-2}{x-3} = 2$  d)  $\log_7 \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$

13 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\frac{\log_3(6x-2)}{\log_3(x-3)} = 2$  c)  $\frac{2 \log 3x}{\log(2-7x)} = 1$   
 b)  $\frac{\log_5(x-\frac{1}{4})}{\log_5(x+\frac{7}{2})} = -1$  d)  $\frac{\log x}{\log(x-2)} = \frac{\log 9}{\log 3}$

14 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0$   
 b)  $4 \log_9 x (\log_9 x - 1) = 2 + 3 \log_9 x$   
 c)  $\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1) + 5 \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 6$   
 d)  $4 \log_3(2x+1) + \log_3 \sqrt{2x+1} = \frac{3}{2} \log_3^2(2x+1) - 6$

**15** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\frac{\log x + 3}{3 - \log x} = 5$

b)  $\frac{\log x + 1}{2 + \log x} + \frac{2 \log x - 1}{\log x} = 3$

**16** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\log_{\frac{1}{7}} x + \frac{1}{\log_{\frac{1}{7}} x} = -2$

c)  $\log_3^2(x+1) + \frac{1}{\log_3^2(x+1)} = \frac{17}{4}$

b)  $\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}$

d)  $\log_4^2 x^3 - \frac{4}{\log_4^2 x^2} = 8$

**17** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\log 100x + \log 10x = 7$

c)  $\log 100x + \log 10x^2 = 7$

b)  $\log 100x + \log^2 10x = 7$

d)  $\log 100x^2 + \log^2 10x^2 = 7$

**18** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\frac{3}{2} \log \frac{x^2}{10} + \log \frac{100}{x^3} - \log \frac{\sqrt{10}}{x} = -2$

b)  $\frac{\log_2 x - 2}{\log_2 \frac{x}{4}} - 2 \log_2 \sqrt{x} = \log_2^2 x + 1$

c)  $\frac{\log_2 2x}{\log_2 8x} + \log_2 \frac{x}{8} = \frac{2}{\log_2 4 - \log_2 0,5}$

d)  $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{2}} 4x = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 16x}{\log_{\frac{1}{2}} 8} + \log_{\frac{1}{2}} 4$

e)  $\frac{\log_3^2 9x}{\log_3 81x^2} = \frac{3}{2}$

f)  $\frac{\log \frac{x}{10}}{\log^2 \sqrt{x}} + 1 = \log x$

**19** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $x^{\log x} = 100x$

c)  $1000x^2 = x^{\log x}$

b)  $x^{\log x+2} = 100x$

d)  $27x^2 = x^{\log_3 x}$

e)  $x^{\log_7 x^2} = 49x^3$

f)  $(\sqrt{x})^{\log_2 x+1} = 2$

**20** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\log_2 x + \log_4 8 = \log_8 16$

c)  $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = \frac{3}{4}$

b)  $\log_9 x + \log_3 x = 6$

d)  $\log_x 2 + \log_{4x} 8 = 2 \log_{4x} 16$

**21** Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $x + y = 7$

c)  $\log_2 x + \log_4 y = 2$

b)  $\log x + \log y = 1$

d)  $\log_4 x + \log_2 y = 2,5$

b)  $x^2 + y^2 = 20$

d)  $\log_3(x+1) = 3^{\log_3 1}$

log<sub>1/3</sub>(x+y) = 1 + log<sub>1/3</sub> 6

**22** Určete všechna čísla  $x, y \in \mathbb{R}$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

a)  $\log x + \log y = 1$

d)  $xy = 100$

2 log x - log y = 5

log<sup>2</sup> x + log<sup>2</sup> y = 10

b)  $\log_2 x + 2 \log_2 y = 10$

e)  $2^{x+y} \cdot 4^{2x-y} = 8$

2 log<sub>2</sub> x<sup>2</sup> - log<sub>2</sub> y<sup>2</sup> = 10

log<sub>3</sub>(x+y) = 2

c)  $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2 y = 3$

f)  $5^{\log x} + 3^{\log y} = 4$

$\frac{6 \log_{\frac{1}{2}} x}{\log_2 y} - \frac{2 \log_2 y}{\log_{\frac{1}{2}} x} = -1$

5<sup>2 log x</sup> - 3<sup>2 log y</sup> = -8

**23** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $x + \log_2(8 + 2^x) = 7$

b)  $x + \log_2(1 - 3 \cdot 2^x) = x \log_2 4$

c)  $\log_2 3 + \log_2 4^{x+\sqrt{x}} = \log_2(2^{x+\sqrt{x}+1} + 4) + 2$

d)  $\log_3(4 \cdot 2^x) + \log_3 3^{x+2} = \log_3 36^x$

e)  $\log_5 10 \cdot 25^x - \log_5(5^x + 25) = x + 1$

**24** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $3^{\log_5 x} + 45 = 2 \cdot 3^{\log_5 x+1}$

b)  $5 \cdot (4^{\log_3 x} - 4^0) = 4^{\log_3 x+1} - 4^{\log_3 x-1}$

c)  $3 \cdot 16^{\log x} - 5 \cdot 4^{\log x} - 2 = 0$

d)  $2^{\log x} + 3^{\log x-1} = 2^{\log x+1} - 3^{\log x-2}$

### 5.3 Exponenciální nerovnice

**25** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $3^{x+5} < 1$

c)  $0,1^{2x} \leq 1$

e)  $3^{x-5} < 0$

b)  $2^{3x-4} \geq 1$

d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} > 1$

f)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq 0$

**26** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $3^{x-1} > 9$

c)  $3^{2x} \leq 7$

e)  $4^x \cdot 2^x \leq 100$

b)  $0,125^{2x+3} \leq 16$

d)  $0,2^x > 3$

f)  $\left(\frac{2}{7}\right)^x \cdot 3^{x+4} > -1$

**27** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $3^{x+4} \geq 3^{2x-1}$

c)  $0,2^{3x-2} \geq 0,2^{x+5}$

e)  $2^x \cdot 2^{x+1} < 2^{x+3}$

b)  $4^{x+5} < 16^{x+1}$

d)  $\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{6}\right)^{2x+8}$

f)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{8}$

**28** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $3^{x+1} + 3^{x+2} < 36$

d)  $25^x - 9 \cdot 5^x + 20 < 0$

b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \leq 3$

e)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 1$

c)  $2^x - 3^x > 2^{x+2} - 3^{x+1}$

f)  $2^x - 5 \cdot 4^{x-2} < 1 - 2^{x-1}$

## 5.4 Logaritmické nerovnice

**29** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log_3(x-4) < 0$       c)  $\log_{\frac{1}{2}}(x+5) \leq 0$       e)  $\log_{0,3} \frac{x+7}{2-x} \geq 0$   
 b)  $\log_5(x^2-2x+1) \geq 0$     d)  $\log_{\frac{1}{4}}(4x^2+3x) > 0$     f)  $\log_{1,2}\left(4+\frac{2}{x}\right) \geq 0$

**30** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log_3(x+4) \leq 4$       c)  $\log_{\frac{1}{2}}(2x+4) \geq -3$     e)  $\log_x 2 > 1$   
 b)  $\log_5(2x-1) > -1$       d)  $\log_{0,1}(x-6) < 2$       f)  $\log_x 5 < -2$

**31** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log_3(2x-1) \geq \log_3(4x+3)$       c)  $\log_{20}(x^2-3x) \leq \log_{20}x + \log_{20}5$   
 b)  $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) \leq \log_{\frac{1}{3}}(5x-4)$       d)  $\log_{0,2}(x-3) > \log_{0,2}x - \log_{0,2}2$

**32** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log 5 \cdot \log_{11}(x+3) \geq 0$       c)  $\log x \cdot \log(x+1) \leq 0$   
 b)  $\log_5 0,4 \cdot \log_{0,9}(x-1) \leq 0$       d)  $\log_{0,1}x \cdot \log_7(4x-1) > 0$

**33** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log_3^2 x + \log_3 x - 2 \leq 0$       c)  $\log_4^2(x+1) - 9 > 0$   
 b)  $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \leq 0$       d)  $\log_{0,25}^2(x-1) - \log_{0,25}(x-1) \geq 0$

**34** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\frac{\log x + 1}{\log x - 2} < 0$       b)  $\frac{1}{\log x} + \frac{1}{3} \geq 0$

**35** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $|\log x| \leq 4$       d)  $|2 - \log x| > 1$       f)  $\frac{1}{2} |\log_2 x + 1| \leq 4$   
 b)  $|\log_3 x - 1| \leq 2$   
 c)  $|2 \log x + 3| > 4$       e)  $\left| \frac{\log x - 3}{4} \right| \leq \frac{1}{2}$       g)  $\left| \frac{2 \log_{\frac{1}{2}} x + 8}{4} \right| < 3$

**36** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $2|\log x| - 3 \leq |\log x - 1|$       b)  $|\log x + 2| - |\log x| \leq 1$

**37** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\log|x| > 2$       d)  $\log|3-x| \geq 2$       f)  $\frac{1}{2} \log\left|\frac{x}{3}\right| < \frac{1}{4}$   
 b)  $\log_2|x-3| \leq 4$   
 c)  $\log_{\frac{1}{2}}|x+2| < 1$       e)  $\log \frac{|2x+1|}{3} < 1$       g)  $\log_{\frac{1}{3}}\left|\frac{4x+3}{9}\right| \geq 2$

**38** Řešte soustavy nerovnic s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $1 \leq \log_3 x \leq 2$       c)  $-3 \leq 2 - \log_2 x \leq -2$   
 b)  $-3 \leq \frac{4 \log x - 3}{5} \leq 1$       d)  $1 < \frac{\log x + 1}{2} + \log x < 2$

**39** Řešte soustavy nerovnic s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $1 \leq |\log_3 x| \leq 2$       c)  $2 \geq |4 - \log_{\frac{1}{2}} x| \geq 1$   
 b)  $2 \leq \frac{|\log x| + 1}{2} \leq 3$       d)  $3 < \left| \frac{\log x - 5}{2} \right| < 4$

**40** Řešte soustavy nerovnic s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $1 \leq \log_3|x| \leq 2$       c)  $-3 < \log|x-4| < 2$   
 b)  $-2 < \log_{\frac{1}{2}}\left|\frac{2}{3}x\right| < -1$       d)  $-1 < \log\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1$

## 6 Goniometrické funkce a trigonometrie

### 6.1 Velikost úhlu — míra stupňová, míra oblouková

**1** Velikost úhlu v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové. Výsledek napište jako násobek čísla  $\pi$ .

$$\alpha = 20^\circ \quad \beta = 200^\circ$$

$$\gamma = 210^\circ \quad \delta = 9^\circ$$

$$\varepsilon = 100^\circ \quad \omega = 22^\circ 30'$$

**2** Velikost úhlu v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové. K převodu užijte kalkulačku, výsledek udejte s přesností na tři desetinná místa.

$$\alpha = 26^\circ 54' \quad \beta = 156^\circ 09' \quad \gamma = 222,37^\circ$$

**3** Velikost úhlu v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové.

$$x_1 = \frac{7}{4}\pi \quad x_2 = \frac{15}{6}\pi \quad x_3 = \frac{11}{12}\pi$$

**4** Velikost úhlu v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové. K výpočtu použijte kalkulačku, výsledek uveďte s přesností na minuty.

$$y_1 = 0,24 \quad y_3 = -1,57 \quad y_5 = 0,003 \\ y_2 = 2,5 \quad y_4 = 0,8\pi \quad y_6 = 10^6$$

**5** Vyjádřete ve stupních i v radiánech úhel, který svírají hodinové ručičky v 11 hodin 30 minut.

### 6.2 Orientovaný úhel

**6** Nakreslete daný orientovaný úhel v soustavě souřadnic. Vrchol zvolte v počátku, počáteční rameno splývá s kladnou poloosou  $x$ . Určete, ve kterém kvadrantu potom leží koncové rameno.

$$\alpha = 143^\circ \quad \gamma = 11\,234^\circ \quad x_1 = 3,25\pi \quad x_3 = -\frac{11}{6}\pi \\ \beta = -426^\circ \quad \delta = -270^\circ \quad x_2 = \frac{17}{3}\pi \quad x_4 = 2$$

**7** Je dána jedna z velikostí orientovaného úhlu. Určete jeho základní velikost. Potom zapište všechny jeho velikosti.

$$\alpha = 5\,432^\circ \quad \gamma = 200^\circ 20' \quad x_1 = \frac{31}{4}\pi \quad x_3 = -\frac{17}{3}\pi \\ \beta = -544^\circ \quad \delta = -5^\circ 55' \quad x_2 = 20\pi \quad x_4 = 8$$

### 6.3 Hodnoty goniometrických funkcí $y = \sin x$ , $y = \cos x$

**8** Vypočítejte (bez použití kalkulačky):

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sin \frac{5}{6}\pi & \text{b)} \cos \frac{3}{4}\pi & \text{c)} \sin 210^\circ & \text{d)} \cos(-180^\circ) \\ \sin \frac{15}{3}\pi & \cos \frac{7}{6}\pi & \sin 330^\circ & \cos 120^\circ \\ \sin(-\frac{7}{4}\pi) & \cos(-\frac{4}{3}\pi) & \sin 720^\circ & \cos 240^\circ \end{array}$$

**9** S užitím kalkulačky nebo tabulek vypočítejte s přesností na 4 desetinná místa:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sin 144^\circ 21' & \text{b)} \cos 126^\circ 47' & \text{c)} \sin 1 & \text{d)} \cos 5,4 \\ \sin(-15^\circ 13') & \cos 2\,400^\circ & \sin 4,2 & \cos 3,14 \end{array}$$

**10** Určete všechny velikosti úhlu  $\alpha \in \langle 0; 360^\circ \rangle$ , pro které platí:

$$\text{a)} \sin \alpha = \sin 57^\circ \quad \text{b)} \cos \alpha = \cos 306^\circ \quad \text{c)} \sin \alpha = \sin 203^\circ 18'$$

**11** Určete základní velikost úhlu ve stupních, víte-li, že platí:

$$\text{a)} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \cos \alpha < 0 \quad \text{c)} \sin \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b)} \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin \beta > 0 \quad \text{d)} \cos \delta = 2$$

**12** Určete základní velikost úhlu v radiánech, víte-li, že platí:

$$\text{a)} \sin x_1 = -\frac{1}{2} \wedge \cos x_1 > 0 \quad \text{c)} \sin x_3 = -1$$

$$\text{b)} \cos x_2 = -\frac{1}{2} \wedge \sin x_2 < 0 \quad \text{d)} \cos x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**13** S užitím kalkulačky nebo tabulek určete základní velikost úhlu ve stupních a minutách, víte-li, že platí:

$$\text{a)} \sin \alpha = 0,4000 \wedge \cos \alpha > 0 \quad \text{c)} \sin \gamma = -0,1234 \\ \text{b)} \cos \beta = 0,4000 \wedge \sin \beta < 0 \quad \text{d)} \cos \delta = 0,5678$$

**14** S užitím kalkulačky nebo tabulek určete základní velikost úhlu v radiánech s přesností na dvě desetinná místa, víte-li, že platí:

$$\text{a)} \sin x_1 = 0,7000 \wedge \cos x_1 < 0 \quad \text{c)} \sin x_3 = -0,8765 \\ \text{b)} \cos x_2 = -0,7000 \wedge \sin x_2 < 0 \quad \text{d)} \cos x_4 = 0,4321$$

### 6.4 Grafy goniometrických funkcí $y = \sin x$ , $y = \cos x$

**15** Načrtněte grafy funkcí  $f_1$  až  $f_9$ . Určete periodu, vypočítejte průsečíky grafu funkce s osou  $x$  i s osou  $y$ , určete obor funkčních hodnot.

$$\begin{array}{lll} f_1: y = \sin x & f_4: y = 2 \sin x & f_7: y = \sin 2x \\ f_2: y = \sin x + 2 & f_5: y = -\sin x + 2 & f_8: y = \sin(-2x) \\ f_3: y = \sin(x+2) & f_6: y = -2 \sin(-x) & f_9: y = \sin \frac{1}{2}x \end{array}$$

**16** Načrtněte grafy funkcí  $g_1$  až  $g_9$ . Určete periodu, vypočítejte průsečíky grafu funkce s osou  $x$  i s osou  $y$ , určete obor funkčních hodnot.

$$\begin{array}{lll} g_1: y = \cos x & g_4: y = \cos(x - \frac{\pi}{4}) & g_7: y = \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ g_2: y = \cos x - \frac{\pi}{4} & g_5: y = \frac{1}{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) & g_8: y = -\frac{1}{2} \cos 4x \\ g_3: y = \frac{\pi}{4} - \cos x & g_6: y = -\cos(\frac{\pi}{4} - x) & g_9: y = \cos \frac{\pi}{4}x \end{array}$$

**17** Načrtněte grafy funkcí  $h_1$  až  $h_6$ . Určete periodu, vypočítejte průsečíky grafu funkce s osou  $x$  i s osou  $y$ , určete obor funkčních hodnot.

$$\begin{array}{lll} h_1: y = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) & h_3: y = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}) & h_5: y = \sin 2\pi x \\ h_2: y = 3 \cos 2x - \frac{\pi}{3} & h_4: y = \sin(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) & h_6: y = \sin(2\pi + x) \end{array}$$

**18** Načrtněte grafy funkcí  $f_1$  až  $f_4$ ,  $g_1$  až  $g_4$  a podle obrázků rozhodněte, které dvojice funkcí se sobě rovnají.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) & g_1(x) = \sin x \\ f_2(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) & g_2(x) = \cos x \\ f_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) & g_3(x) = -\sin x \\ f_4(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) & g_4(x) = -\cos x \end{array}$$

**19** Graficky ověřte platnost následujících rovností:

- a)  $\sin(x + \pi) = -\sin x$       c)  $\cos(\frac{3}{2}\pi + x) = \sin x$   
 b)  $\sin(2\pi - x) = -\sin x$       d)  $\sin(\frac{3}{2}\pi - x) = -\cos x$

**20** V intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  načrtněte grafy funkcí:

- a)  $y = \sin^2 x$       c)  $y = \sin x + \cos x$       e)  $y = \sin^{-1} x$   
 b)  $y = \cos^2 x$       d)  $y = \sin x - \cos x$       f)  $y = \cos^{-1} x$

**21** Pomocí grafu vhodné funkce nebo pomocí jednotkové kružnice rozhodněte, které z daných dvou čísel je větší.

- |                           |                          |                     |
|---------------------------|--------------------------|---------------------|
| a) $A_1 = \sin 170^\circ$ | c) $C_1 = \sin 2$        | e) $E_1 = \cos 6$   |
| $A_2 = \sin 175^\circ$    | $C_2 = \sin 3$           | $E_2 = \sin 6$      |
| b) $B_1 = \cos 20^\circ$  | d) $D_1 = \cos 50^\circ$ | f) $F_1 = \sin(-1)$ |
| $B_2 = \cos 290^\circ$    | $D_2 = \sin 50^\circ$    | $F_2 = -\cos(-1)$   |

## 6.5 Hodnoty goniometrických funkcí $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{cotg} x$

**22** Vypočítejte (bez použití kalkulačky):

- |                                       |   |                                  |                                    |
|---------------------------------------|---|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $\operatorname{tg} \frac{7}{6}\pi$ | b) $\operatorname{cotg} \frac{7}{4}\pi$ | c) $\operatorname{tg} 135^\circ$ | d) $\operatorname{cotg} 210^\circ$ |
| $\operatorname{tg} 4\pi$              | $\operatorname{cotg} \frac{2}{3}\pi$    | $\operatorname{tg}(-60^\circ)$   | $\operatorname{cotg}(-300^\circ)$  |
| $\operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi$    | $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}$     | $\operatorname{tg} 90^\circ$     | $\operatorname{cotg} 270^\circ$    |

**23** S užitím kalkulačky nebo tabulek vypočítejte s přesností na 4 desetinná místa:

- |                                     |                                       |                          |                               |
|-------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| a) $\operatorname{tg} 58^\circ 28'$ | b) $\operatorname{cotg} 20^\circ 32'$ | c) $\operatorname{tg} 2$ | d) $\operatorname{cotg} 0,25$ |
| $\operatorname{tg} 145^\circ 18'$   | $\operatorname{cotg} 92^\circ 47'$    | $\operatorname{tg} 0,03$ | $\operatorname{cotg} 7$       |

**24** Určete základní velikost úhlu v radiánech, víte-li, že platí:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3} \wedge \sin x_1 > 0$ | c) $\operatorname{tg} x_3 = 0$                     |
| b) $\operatorname{cotg} x_2 = 1 \wedge \cos x_2 < 0$      | d) $\operatorname{cotg} x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**25** S užitím kalkulačky nebo tabulek určete základní velikost úhlu ve stupních a minutách, víte-li, že platí:

- |                                  |                                   |                                       |   |
|----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|---|
| $\operatorname{tg} \alpha = 1,4$ | $\operatorname{tg} \gamma = -0,2$ | $\operatorname{cotg} \varepsilon = 2$ | $\operatorname{cotg} \psi = -3$         |
| $\operatorname{tg} \beta = 10$   | $\operatorname{tg} \delta = -10$  | $\operatorname{cotg} \varphi = 10^6$  | $\operatorname{cotg} \omega = -10^{-3}$ |

**26** S užitím kalkulačky nebo tabulek určete základní velikost úhlu v radiánech s přesností na dvě desetinná místa, víte-li, že platí:

- |                              |                                  |                                   |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| $\operatorname{tg} x_1 = 2$  | $\operatorname{tg} x_3 = 0,15$   | $\operatorname{cotg} x_5 = -0,01$ | $\operatorname{cotg} x_7 = 1,55$ |
| $\operatorname{tg} x_2 = 20$ | $\operatorname{tg} x_4 = -0,003$ | $\operatorname{cotg} x_6 = -10^3$ | $\operatorname{cotg} x_8 = -0,2$ |

## 6.6 Grafy goniometrických funkcí $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{cotg} x$

**27** Načrtněte grafy funkcí  $f_1$  až  $f_9$ . Určete definiční obor, periodu, vypočítejte průsečíky s osou  $x$  i s osou  $y$ , určete obor funkčních hodnot.

- |   |                                      |   |
|---|--------------------------------------|---|
| $f_1: y = \operatorname{tg} x$                  | $f_4: y = 2 \operatorname{tg} x$     | $f_7: y = \operatorname{tg} 2x$           |
| $f_2: y = \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{6}$  | $f_5: y = -\operatorname{tg} x + 2$  | $f_8: y = \operatorname{tg}(-2x)$         |
| $f_3: y = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$ | $f_6: y = 2 - \operatorname{tg}(-x)$ | $f_9: y = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ |

**28** Načrtněte grafy funkcí  $g_1$  až  $g_9$ . Určete definiční obor, periodu, vypočítejte průsečíky s osou  $x$  i s osou  $y$ , určete obor funkčních hodnot.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| $g_1: y = \operatorname{cotg} x$                 | $g_4: y = \operatorname{cotg}(x - \frac{\pi}{3})$             | $g_7: y = \operatorname{cotg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$ |
| $g_2: y = \operatorname{cotg} x - \frac{\pi}{3}$ | $g_5: y = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{3} - x)$             | $g_8: y = -\frac{1}{2} \operatorname{cotg} 2x$              |
| $g_3: y = \frac{\pi}{3} - \operatorname{cotg} x$ | $g_6: y = \frac{1}{2} \operatorname{cotg}(x - \frac{\pi}{4})$ | $g_9: y = \operatorname{cotg} x \pi$                        |

**29** Načrtněte grafy funkcí  $f_1$  až  $f_4$ ,  $g_1$  až  $g_4$  a podle obrázků rozhodněte, které dvojice funkcí se sobě rovnají.

- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| $f_1(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$   | $g_1(x) = \operatorname{tg} x$    |
| $f_2(x) = \operatorname{cotg}(x + \frac{\pi}{2})$ | $g_2(x) = \operatorname{cotg} x$  |
| $f_3(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$   | $g_3(x) = -\operatorname{tg} x$   |
| $f_4(x) = \operatorname{cotg}(x - \frac{\pi}{2})$ | $g_4(x) = -\operatorname{cotg} x$ |

**30** V intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  načrtněte grafy funkcí:

- |                                  |  |                                     |
|----------------------------------|--|-------------------------------------|
| a) $y = \operatorname{tg}^2 x$   | c) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$ | e) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$   |
| b) $y = \operatorname{cotg}^2 x$ | d) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ | f) $y = \operatorname{cotg}^{-1} x$ |

**31** Pomocí grafu vhodné funkce nebo pomocí jednotkové kružnice rozhodněte, které z daných dvou čísel je větší.

- |  |  |                                       |
|--|--|---------------------------------------|
| a) $A_1 = \operatorname{tg} \frac{13}{3}\pi$ | c) $C_1 = \operatorname{cotg} 3$         | e) $E_1 = \operatorname{tg}(-1)$      |
| $A_2 = \operatorname{tg} \frac{14}{3}\pi$    | $C_2 = \operatorname{tg} 3$              | $E_2 = \operatorname{cotg}(-1)$       |
| b) $B_1 = \operatorname{tg}(-150^\circ)$     | d) $D_1 = \operatorname{cotg} 170^\circ$ | f) $F_1 = \operatorname{cotg} 0,1\pi$ |
| $B_2 = \operatorname{tg}(-250^\circ)$        | $D_2 = \operatorname{cotg} 250^\circ$    | $F_2 = -\operatorname{cotg} 0,2\pi$   |

## 6.7 Grafy goniometrických funkcí s absolutními hodnotami

**32** Načrtněte grafy funkcí:

- |                                   |                                      |                           |
|-----------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| $f_1: y =  \sin x $               | $f_4: y = \sin x $                   | $f_7: y = 1 -  \sin x $   |
| $f_2: y =  \sin x  - \frac{1}{2}$ | $f_5: y = \sin x + \frac{\pi}{6} $   | $f_8: y =  2 \sin x - 1 $ |
| $f_3: y =  \sin x - \frac{1}{2} $ | $f_6: y = \sin( x  + \frac{\pi}{6})$ | $f_9: y = 2 \sin x  - 1$  |

**33** Načrtněte grafy funkcí:

- |                         |                             |                                     |
|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| $g_1: y =  \cos x $     | $g_4: y =  1 - 2 \cos x $   | $g_7: y =  \cos x  - \frac{\pi}{4}$ |
| $g_2: y =  \cos x  + 1$ | $g_5: y =   \cos x  - 0,5 $ | $g_8: y =  \cos x - \frac{\pi}{4} $ |
| $g_3: y =  1 - \cos x $ | $g_6: y = \cos x $          | $g_9: y = \cos x - \frac{\pi}{4} $  |

**34** Načrtněte grafy funkcí:

- |                                      |   |  |
|--------------------------------------|---|--|
| $f_1: y =  \operatorname{tg} x $     | $f_4: y = \operatorname{tg} x $                 | $f_7: y =  \operatorname{tg} x  + \frac{\pi}{4}$ |
| $f_2: y =  \operatorname{tg} x - 1 $ | $f_5: y = \operatorname{tg} x  - \frac{\pi}{4}$ | $f_8: y =  \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{4} $ |
| $f_3: y =  \operatorname{tg} x  - 1$ | $f_6: y = \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{4} $ | $f_9: y = \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{4} $  |

**35** Načrtněte grafy funkcí:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| $g_1: y =  \operatorname{cotg} x $                 | $g_4: y = \operatorname{cotg} x $      | $g_7: y =  \operatorname{cotg} x - \frac{\pi}{4} $    |
| $g_2: y =  \operatorname{cotg} x  + \frac{\pi}{3}$ | $g_5: y =  1 - \operatorname{cotg} x $ | $g_8: y =  \operatorname{cotg}( x  - \frac{\pi}{4}) $ |
| $g_3: y =  \operatorname{cotg} x + \frac{\pi}{3} $ | $g_6: y = 1 -  \operatorname{cotg} x $ | $g_9: y = \operatorname{cotg} x - \frac{\pi}{4} $     |

**36** Načrtněte grafy funkcí:

$$\begin{array}{lll} f_1: y = \sin x + |\sin x| & f_3: y = 2|\sin x| \cos x & f_5: y = \operatorname{tg} x |\cos x| \\ f_2: y = \cos x - |\cos x| & f_4: y = -2|\cos x| \sin x & f_6: y = \operatorname{cotg} x |\sin x| \end{array}$$

**37** Načrtněte grafy funkcí:

$$\begin{array}{lll} g_1: y = \frac{|\sin x|}{\sin x} & g_3: y = \frac{\sin x + |\sin x|}{\sin x - |\sin x|} & g_5: y = \frac{\sin x + |\sin x|}{\cos x + |\cos x|} \\ g_2: y = \frac{\cos x}{|\cos x|} & g_4: y = \frac{\cos x - |\cos x|}{\cos x + |\cos x|} & g_6: y = \frac{\sin x - |\sin x|}{\cos x - |\cos x|} \end{array}$$

**38** Načrtněte grafy funkcí:

$$\begin{array}{lll} h_1: y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x| & h_3: y = |\operatorname{tg} x| \cdot |\operatorname{cotg} x| & h_5: y = |\operatorname{tg} x| \cdot \operatorname{tg}^{-1} x \\ h_2: y = \operatorname{cotg} x - |\operatorname{cotg} x| & h_4: y = \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{cotg} x| & h_6: y = |\operatorname{cotg} x|^{-1} \cdot \operatorname{cotg} x \end{array}$$

## 6.8 Cyklometrické funkce

**39** Načrtněte graf funkce  $y = \sin x$  v intervalu  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ . Potom nakreslete graf funkce inverzní  $y = \arcsin x$ . Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot.

**40** Načrtněte graf funkce  $y = \cos x$  v intervalu  $(0; \pi)$ . Potom nakreslete graf funkce inverzní  $y = \arccos x$ . Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot.

**41** Načrtněte graf funkce  $y = \operatorname{tg} x$  v intervalu  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ . Potom nakreslete graf funkce inverzní  $y = \operatorname{arctg} x$ . Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot.

**42** Načrtněte graf funkce  $y = \operatorname{cotg} x$  v intervalu  $(0; \pi)$ . Potom nakreslete graf funkce inverzní  $y = \operatorname{arccotg} x$ . Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot.

**43** Vypočítejte:

$$\begin{array}{llll} \arcsin \frac{1}{2} & \arccos 1 & \operatorname{arctg} \sqrt{3} & \operatorname{arccotg}(-1) \\ \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) & \arccos 0 & \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) & \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

**44** Vypočítejte pomocí kalkulačky, výsledek uveďte ve stupních a minutách i v radiánech.

$$\begin{array}{llll} \arcsin 0,42 & \arccos(-0,9) & \operatorname{arctg} 35 & \operatorname{arccotg} 0,8 \\ \arcsin 2 & \arccos(-\frac{3}{4}) & \operatorname{arctg}(-5) & \operatorname{arccotg} 6 \end{array}$$

## Goniometrické vzorce

### 6.9 Základní vztahy mezi funkcemi

**45** Aniž určíte hodnotu  $x$ , určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí v bodě  $x$ , víte-li, že platí:

$$\begin{array}{llll} a) \cos x = \frac{4}{5} \wedge x \in (0; \frac{\pi}{2}) & c) \operatorname{tg} x = \frac{15}{8} \wedge x \in (0; \frac{\pi}{2}) & \\ b) \sin x = -\frac{12}{13} \wedge x \in (\pi; \frac{3\pi}{2}) & d) \operatorname{cotg} x = -\frac{7}{24} \wedge x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi) & \end{array}$$

**46** Určete definiční obor daného výrazu a potom ho zjednodušte.

$$\begin{array}{ll} a) (1 + \cos x)(1 - \cos x) & j) \sin^2 x \cdot \operatorname{cotg}^2 x + \sin^2 x - 1 \\ b) \sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x & k) \cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x \\ c) (\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cdot \cos x & l) \cos x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) \\ d) (\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 & m) (1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ e) \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x & n) \operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x \\ f) \sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x & o) \operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x - \operatorname{cotg}^2 x \cdot \cos^2 x \\ g) \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} & p) \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \\ h) \frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} & q) \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{cotg} x}{1 + \operatorname{cotg} x} \\ i) \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} & r) \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} x} - \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \end{array}$$

**47** Určete, pro která  $x \in \mathbb{R}$  jsou definovány uvedené rovnosti, a pak je dokážte.

$$\begin{array}{ll} a) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x & i) \sin x \cdot \operatorname{cotg} x \cdot \cos x = 1 - \sin^2 x \\ b) \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cdot \cos x} = 2 & j) \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \\ c) \frac{\cos(-x)}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin(-x)}{\cos x} & k) \frac{2}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{tg} x)^2 \\ d) \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x & l) 1 - 2 \sin^2 x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{\operatorname{cotg}^2 x + 1} \\ e) \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x & m) \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x + 1} = 1 \\ f) \frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \operatorname{tg} x = \cos x & n) \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\sin x \cos x} \\ g) \sin x + \cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} & o) \left( \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x} \right)^2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} \\ h) \left( \frac{1}{\sin x} + \sin x \right)^2 + \left( \frac{1}{\cos x} + \cos x \right)^2 = 5 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} & \end{array}$$

**48** Určete, pro která  $x \in \mathbb{R}$  jsou definovány uvedené rovnosti, a pak je dokážte.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x + \cos x}{\cos x} & \\ b) \frac{1 + \cos x + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \sin x - \cos x}{\sin x} & \end{array}$$

## 6.10 Vzorce pro dvojnásobný úhel

**49** Aniž určíte hodnotu  $x$ , určete hodnoty goniometrických funkcí  $\sin 2x, \cos 2x, \operatorname{tg} 2x, \sin 4x$  a  $\cos 4x$ , víte-li, že platí:

$$\begin{array}{ll} a) \sin x = \frac{3}{4}, x \in (\frac{\pi}{2}; \pi) & c) \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, x \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ b) \cos x = -\frac{3}{5}, x \in (\pi; \frac{3\pi}{2}) & d) \operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{2}}{5}, x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi) \end{array}$$

**50** Aniž určíte hodnotu  $x$ , určete hodnoty goniometrických funkcí  $\cos x$  a  $\sin x$ , víte-li, že platí:

$$\begin{array}{ll} a) \cos 2x = \frac{3}{4}, 2x \in (0; \frac{\pi}{2}) & b) \sin 2x = -\frac{1}{3}, 2x \in (\pi; \frac{3\pi}{2}) \end{array}$$

**51** Vypočítejte:

- a)  $2 \sin 22^\circ 30' \cdot \cos 22^\circ 30'$   
 b)  $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$
- c)  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$   
 d)  $\cos^4 75^\circ - \sin^4 75^\circ$

**52** Určete, pro která  $x \in \mathbb{R}$  mají dané rovnosti smysl, a dokažte jejich správnost.

- a)  $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$   
 b)  $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$   
 c)  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$   
 d)  $\frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \cotg x$   
 e)  $\frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \tg x$   
 f)  $\frac{\sin 2x}{\cos 2x - \cos^2 x} = -2 \cotg x$   
 g)  $\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = \tg x$   
 h)  $\frac{\sin 2x - \cos x}{1 - \cos 2x - \sin x} = \cotg x$   
 i)  $\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x - 2 \sin^2 x} = \cotg x + 1$   
 j)  $\frac{\sin 2x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \cos 2x} = 2 \cotg x + 1$   
 k)  $\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} = \tg x$   
 l)  $\frac{\sin 2x + \cos 2x - 1}{\sin 2x - \cos 2x - 1} = -\tg x$
- m)  $4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 2x = 1$   
 n)  $(\cotg x + \tg x)^{-1} = \frac{1}{2} \sin 2x$   
 o)  $\cotg^{-1} x + \tg^{-1} x = 2 \sin^{-1} 2x$   
 p)  $\frac{\cos 2x}{1 - \tg x} = \cos^2 x + \frac{\sin 2x}{2}$   
 q)  $\frac{\cos 2x}{\cotg x - 1} = \frac{\sin 2x}{2} + \sin^2 x$   
 r)  $\frac{\cos 2x}{\cotg^2 x - \tg^2 x} = \frac{1}{4} \sin^2 2x$   
 s)  $\frac{1 - \tg^2 x}{1 + \tg^2 x} = \cos 2x$   
 t)  $\frac{2 \tg x}{1 + \tg^2 x} = \sin 2x$   
 u)  $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 + \tg x}{1 - \tg x}$   
 v)  $\frac{1 + \tg x}{1 - \tg x} = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$   
 w)  $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} + \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \cotg x$   
 z)  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} + \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \tg x$

**53** Určete, pro která  $x \in \mathbb{R}$  mají dané výrazy smysl, a pak výrazy zjednodušte.

- a)  $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$   
 b)  $\cos 2x + 2 \sin^2 x$   
 c)  $\frac{\sin 2x}{\cos 2x - \cos^2 x}$   
 d)  $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$   
 e)  $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos 2x}$   
 f)  $\frac{2 \sin x + \sin 2x}{2 \sin x - \sin 2x}$
- g)  $\cos^2 2x + \sin^2 2x$   
 h)  $\cos^4 2x - \sin^4 2x$   
 i)  $\frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \cos 2x}$   
 j)  $\frac{2 \sin^2 x - \sin 2x}{2 \cos^2 x - \sin 2x}$   
 k)  $\frac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$   
 l)  $\frac{2 \cos x - \cos 2x - 1}{2 \cos x + \cos 2x + 1}$

## 6.11 Součtové vzorce

**54** Aniž určíte hodnotu  $x$ , vypočítejte  $\sin(x+y)$ ,  $\cos(x-y)$ , víte-li, že platí:

- a)  $\cos x = \frac{5}{7}$ ,  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$  a  $\sin y = \frac{1}{5}$ ,  $y \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$   
 b)  $\tg x = 3$ ,  $x \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$  a  $\cotg y = -2$ ,  $y \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

**55** Dokažte:

- a)  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$   
 b)  $\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
- c)  $\cos \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$   
 d)  $\sin \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
- e)  $\tg 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$   
 f)  $\tg 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$

**56** Dokažte:

- a)  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$   
 b)  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$   
 c)  $\sin(\frac{\pi}{4} + x) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$   
 d)  $\sin(\frac{\pi}{6} - x) = \cos(\frac{\pi}{3} + x)$
- e)  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$   
 f)  $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x)$   
 g)  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$   
 h)  $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$

**57** Dokažte:

- a)  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) - \sin(x - \frac{\pi}{2}) = 2 \cos x$   
 b)  $\sin(x + \pi) + \sin(x - \pi) = -2 \sin x$   
 c)  $\sin(x + \frac{\pi}{6}) - \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \cos x$   
 d)  $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(y-x)$   
 e)  $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$   
 f)  $\sin x - \sin(x+60^\circ) + \sin(x+120^\circ) = 0$   
 g)  $\cos x + \cos(x+120^\circ) + \cos(x+240^\circ) = 0$   
 h)  $\sin(\frac{\pi}{3} + x) - \cos(\frac{\pi}{6} + x) = \sin x$   
 i)  $\sin(x - \frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{7}{6}\pi + x) = -\cos x$   
 j)  $\cos(x + \frac{2}{3}\pi) + \cos(x + \frac{5}{3}\pi) = 0$   
 k)  $\frac{\sin x}{\sin y} + \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{2 \sin(x+y)}{\sin 2y}$   
 l)  $\frac{\cos x}{\sin y} - \frac{\sin x}{\cos y} = \frac{2 \cos(x+y)}{\sin 2y}$

**58** Vypočítejte:

- a)  $\sin 44^\circ \cdot \cos 1^\circ + \cos 44^\circ \cdot \sin 1^\circ$   
 b)  $\cos \frac{9}{13}\pi \cdot \cos \frac{4}{13}\pi - \sin \frac{9}{13}\pi \cdot \sin \frac{4}{13}\pi$

**59** Dokažte pomocí součtových vzorců a vzorců pro dvojnásobný úhel:

- a)  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$   
 b)  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

## 6.12 Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí

**60** Následující úlohy zjednodušte dvěma způsoby. Jednak použijte součtové vzorce, jednak použijte vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí.

- a)  $\cos(\alpha + 30^\circ) - \cos(\alpha - 30^\circ)$   
 b)  $\sin(\beta + 30^\circ) - \sin(\beta - 30^\circ)$   
 c)  $\cos(\gamma + 135^\circ) + \cos(\gamma - 135^\circ)$
- d)  $\sin(\frac{\pi}{6} + x) + \sin(\frac{\pi}{6} - x)$   
 e)  $\sin(\frac{\pi}{2} + x) - \sin(\frac{\pi}{2} - x)$   
 f)  $\cos(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4} + x)$

**61** Dokažte:

- a)  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{6}$   
 b)  $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

**62** Dokažte:

- a)  $\frac{\cos 80^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 110^\circ + \sin 10^\circ} = 1$   
 b)  $\frac{\sin 5^\circ - \sin 85^\circ}{\cos 130^\circ - \cos 50^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**63** Vypočítejte:

a)  $\frac{\sin 65^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 80^\circ + \cos 40^\circ}$

b)  $\frac{\cos 50^\circ - \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 50^\circ}$

**64** Vypočítejte:

a)  $\frac{\sin(x+15^\circ) + \sin(x-15^\circ)}{\cos(x-15^\circ) + \cos(x+15^\circ)}$

b)  $\frac{\sin(x+\frac{5}{3}\pi) - \sin(x+\frac{1}{3}\pi)}{\cos(x-\frac{2}{3}\pi) - \cos(x-\frac{4}{3}\pi)}$

### 6.13 Vzorce pro poloviční úhel

**65** Aniž určíte hodnotu  $x$ , vypočítejte  $\sin \frac{x}{2}$  a  $\cos \frac{x}{2}$ , víte-li, že platí:

a)  $\sin x = -0,8 \wedge x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$

b)  $\cos x = \frac{12}{13} \wedge x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

**66** Dokažte:

a)  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c)  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

b)  $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

d)  $\cos 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

**67** Dokažte a určete podmínky pro  $x$ :

a)  $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

b)  $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

**68** Vyjádřete  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{cotg} x$  pomocí  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Určete podmínky pro  $x$ .

**69** Dokažte:

a)  $1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$

c)  $1 + \sin x = (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2$

b)  $2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x$

d)  $1 - \sin x = (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2$

**70** Dokažte:

a)  $1 + \sin x = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$

b)  $1 - \sin x = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$

### 6.14 Grafy funkcí — užití vzorců

**71** Nakreslete grafy funkcí:

a)  $y = \sin x \cdot \cos x$       b)  $y = \sin^2 x - \cos^2 x$       c)  $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

**72** Jsou dány funkce  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ . Nakreslete jejich grafy, potom nakreslete graf funkce  $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ . Pro funkci  $g(x)$  určete obor funkčních hodnot a periodu.

a)  $f_1(x) = \frac{1}{2} \sin x$       b)  $f_1(x) = \sin x$       c)  $f_1(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$   
 $f_2(x) = -2 \sin x$        $f_2(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$        $f_2(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$

### 6.15 Vztahy pro úhly v trojúhelníku

**73** Označíme-li  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  vnitřní úhly v libovolném trojúhelníku  $ABC$ , potom platí pro jejich velikosti následující rovnosti. Dokažte jejich správnost.

a)  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

b)  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$

c)  $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

d)  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$

e)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$

### 6.16 Sinová a kosinová věta

V následujících úlohách počítejte délky stran s přesností na milimetry a velikosti úhlů s přesností na minuty.

**74** Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 62^\circ$ ,  $\beta = 34^\circ$       c)  $c = 8,4 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 41^\circ 05'$ ,  $\gamma = 26^\circ 55'$   
 b)  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 110^\circ$ ,  $\beta = 28^\circ$       d)  $a = 5,66 \text{ cm}$ ,  $\beta = 56^\circ 32'$ ,  $\gamma = 44^\circ 47'$

**75** Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 7 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 40^\circ$       c)  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 26^\circ 55'$   
 b)  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 9 \text{ cm}$ ,  $\beta = 75^\circ$       d)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $\beta = 30^\circ$

**76** Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $c = 4 \text{ cm}$       c)  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 7 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 29^\circ 14'$   
 b)  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $c = 4 \text{ cm}$       d)  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $c = 12 \text{ cm}$ ,  $\beta = 124^\circ$

**77** Určete délky všech stran trojúhelníku  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $t_a = 6 \text{ cm}$ ,  $t_b = 9 \text{ cm}$ ,  $c = 8 \text{ cm}$       d)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $t_a = 9 \text{ cm}$ ,  $t_b = 4 \text{ cm}$   
 b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $t_b = 5 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$       e)  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $t_a = 8 \text{ cm}$ ,  $v_b = 6 \text{ cm}$   
 c)  $c = 6 \text{ cm}$ ,  $t_a = 5 \text{ cm}$ ,  $a = 8 \text{ cm}$       f)  $t_a = 6 \text{ cm}$ ,  $t_b = 4 \text{ cm}$ ,  $t_c = 8 \text{ cm}$

**78** Vypočítejte velikost nejmenšího úhlu v trojúhelníku  $ABC$ , znáte-li délky stran  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $c = 9 \text{ cm}$ .

**79** V trojúhelníku  $ABC$  známe délku strany  $b = 8 \text{ cm}$ , velikost úhlu  $\alpha = 30^\circ$ . Proveďte diskusi o počtu řešení a vždy vypočítejte velikost úhlu  $\beta$ , jestliže délka strany  $a$  postupně nabývá hodnot z množiny  $a \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . Údaje jsou v centimetrech.

**80** Vypočítejte velikosti úhlů v trojúhelníku  $ABC$ , znáte-li délky stran  $c = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 14 \text{ cm}$  a poměr velikostí dvou úhlů  $\beta : \gamma = 2 : 1$ .

**81** Vypočítejte velikosti úhlů v trojúhelníku  $ABC$ , víte-li, že  $b : a = \sqrt{3} : 1$ ,  $\beta = 2\alpha$ .

**82** V trojúhelníku  $ABC$  znáte poměr délek stran  $a : b : c = 2 : 4 : 5$ . Vypočítejte velikosti úhlů trojúhelníku  $ABC$ .

**83** V trojúhelníku  $ABC$  znáte velikosti úhlů  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 75^\circ$ . Vypočítejte, v jakém poměru jsou délky stran.

**84** V trojúhelníku  $ABC$  znáte:  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$   
 a) Vypočítejte délku strany  $c$  pomocí kosinové věty. (Řešte kvadratickou rovnici, počítejte s přesností na jedno desetinné místo, tj. s přesností na milimetry.)

b) Výpočet ověřte konstrukcí. Narýsujte všechny trojúhelníky podle daných údajů, změřte délku strany  $c$  a porovnejte s výpočtem a).

**85** Užitím kosinové věty dokažte, že všechny úhly v rovnostranném trojúhelníku mají velikost  $60^\circ$ .

**86** Užitím kosinové věty dokažte, že v rovnoramenném trojúhelníku  $ABC$  se základnou  $AB$  platí:

a)  $c = 2a \cos \alpha$       b)  $c^2 = 2a^2(1 - \cos \gamma)$

**87** Určete délky všech stran, délky úhlopříček, výšky a velikosti všech vnitřních úhlů rovnoběžníku  $ABCD$ , je-li dáno:

a)  $|AB| = 6,2 \text{ cm}$ ,  $|BC| = 5,4 \text{ cm}$ ,  $|AC| = 4,8 \text{ cm}$   
 b)  $|AB| = 10,8 \text{ cm}$ ,  $v_a = 4,2 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 27^\circ 11'$

**88** V lichoběžníku  $ABCD$  znáte délky stran  $|AB| = 30 \text{ cm}$ ,  $|BC| = 15 \text{ cm}$ ,  $|CD| = 20 \text{ cm}$ ,  $|AD| = 12 \text{ cm}$ . Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů.

**89** Vypočítejte délku strany  $KN$  a velikost úhlu  $|\angle NKL|$  ve čtyřúhelníku  $KLMN$ , je-li dáno:  $|KL| = 10 \text{ cm}$ ,  $|LM| = 12 \text{ cm}$ ,  $|MN| = 6 \text{ cm}$ ,  $|\angle KLM| = 65^\circ$ ,  $|\angle KNM| = 98^\circ$ .

**90** Vzdálenost dvou bodů  $A$ ,  $B$  kterou nelze přímo změřit určíme následovně: zvolíme libovolné dva body  $K$ ,  $L$  ze kterých je na body  $A$ ,  $B$  vidět. (Body  $A$ ,  $B$ ,  $K$ ,  $L$  leží v jedné rovině.) Změříme vzdálenost  $|KL| = 50 \text{ m}$  a následující úhly:  $|\angle BLK| = 54^\circ$ ,  $|\angle ALK| = 124^\circ$ ,  $|\angle AKL| = 28^\circ$ ,  $|\angle BKL| = 76^\circ$ . Vypočítejte vzdálenost  $|AB|$ .

**91** Vypočítejte šířku řeky, jestliže na jednom břehu byla vyznačena úsečka  $KL$  délky  $40 \text{ m}$  a dále byly změřeny úhly  $|\angle LKS| = 76^\circ 24'$  a  $|\angle KLS| = 43^\circ 52'$ , kde  $S$  je bod na druhém břehu řeky.

**92** Na těleso působí v jednom bodě dvě síly  $F_1 = 40 \text{ N}$  a  $F_2 = 70 \text{ N}$ , které svírají úhel  $50^\circ$ . Určete velikost výslednice  $F$  a úhel, který svírají síly  $F$  a  $F_1$ .

**93** Síla  $F = 200 \text{ N}$  se rozkládá na dvě složky  $F_1 = 150 \text{ N}$  a  $F_2 = 100 \text{ N}$ . Vypočítejte úhel, který svírají síly  $F_1$  a  $F_2$ .

**94** Síla  $F = 200 \text{ N}$  se rozkládá na dvě složky, které s ní svírají úhly o velikostech  $\alpha = 27^\circ$ ,  $\beta = 74^\circ$ . Vypočítejte velikosti obou složek.

**95** Tři síly  $F_1 = 10 \text{ N}$ ,  $F_2 = 20 \text{ N}$ ,  $F_3 = 27 \text{ N}$  působí na těleso v jednom bodě v téže rovině a jsou v rovnováze. Vypočítejte úhly, které svírají jednotlivé síly navzájem.

## 6.17 Vzorce pro obsah trojúhelníku, čtyřúhelníku

**96** V trojúhelníku  $ABC$  znáte:  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $v_a = 2 \text{ cm}$ . Vypočítejte obsah trojúhelníku  $ABC$  a výšku  $v_b$ .

**97** V trojúhelníku  $ABC$  znáte:  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 60^\circ$ . Vypočítejte obsah trojúhelníku  $ABC$  a výšky  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$ .

**98** Vypočítejte obsah trojúhelníku  $ABC$ , jestliže délky jeho stran jsou  $5 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$ ,  $9 \text{ cm}$ . Potom vypočítejte obsah trojúhelníku  $S_{AB}S_{BC}S_{AC}$ , kde  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$ ,  $S_{AC}$  jsou postupně středy stran  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ .

**99** V rovnoběžníku  $ABCD$  znáte:  $|AB| = 8 \text{ cm}$ ,  $|AD| = 2 \text{ cm}$ ,  $|\angle DAB| = 30^\circ$ . Vypočítejte obsah rovnoběžníku  $ABCD$  a výšky  $v_a$ ,  $v_b$ . Potom rovnoběžník narýsujte a měřením ověrte správnost výpočtu obou výšek.

**100** Vypočítejte obsah lichoběžníku  $ABCD$ , znáte-li délky stran  $|AB| = 8 \text{ cm}$ ,  $|BC| = 6 \text{ cm}$ ,  $|CD| = 2 \text{ cm}$ ,  $|AD| = 6 \text{ cm}$ .

**101** Čtverec  $ABCD$  ( $a = 4 \text{ cm}$ ) otočte kolem vrcholu  $A$  o úhel  $45^\circ$ . Dostanete tak čtverec  $A_1B_1C_1D_1$ . Vypočítejte obsah čtyřúhelníku, který je průnikem čtverců  $ABCD$  a  $A_1B_1C_1D_1$ .

## 6.18 Vzorce pro poloměry kružnic trojúhelníku opsané a vepsané

**102** Vypočítejte poloměr kružnice trojúhelníku  $ABC$  opsané i poloměr kružnice trojúhelníku  $ABC$  vepsané, znáte-li:  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $c = 6 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

**103** Vypočítejte poloměr kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku  $ABC$ , je-li délka přepony  $c = 5 \text{ cm}$  a délka odvěsný  $a = 3 \text{ cm}$ .

**104** Vypočítejte poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku  $ABC$ , je-li pravý úhel u vrcholu  $C$ ,  $c = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ .

**105** Vypočítejte poloměry kružnic připsaných trojúhelníku  $ABC$  znáte-li:  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 100^\circ$

## 6.19 Pravidelné mnohoúhelníky

**106** Vypočítejte délku strany  $a$ , obvod  $o$  a obsah  $S$  pravidelného pětiúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru  $r = 6 \text{ cm}$ .

**107** Vypočítejte délku strany  $a$ , obvod  $o$  a obsah  $S$  pravidelného pětiúhelníku, kterému je vepsána kružnice o poloměru  $r = 6 \text{ cm}$ .

**108** Strana pravidelného devítiúhelníku je  $a = 5 \text{ cm}$ . Vypočítejte poloměr kružnice, kterou lze danému devítiúhelníku a) opsat, b) vepsat.

**109** a) V pravidelném dvanáctiuhelníku  $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$  ( $a = 6 \text{ cm}$ ) označte postupně  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , ...,  $S_{12}$  středy stran  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ , ...,  $A_{11}A_{12}$ ,  $A_{12}A_1$ . Vypočítejte poměr obsahů dvanáctiuhelníků  $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$  a  $S_1S_2S_3 \dots S_{12}$ .

b) Úlohu a) řešte obecně, tj.  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  je libovolný pravidelný  $n$ -úhelník o straně  $a$ .

c) Do kružnice o poloměru  $R$  vepište pravidelný  $n$ -úhelník a zároveň této kružnici opište pravidelný  $n$ -úhelník. Vypočítejte poměr obsahů  $n$ -úhelníku vepsaného a opsaného dané kružnici.

**110** Do kružnice o poloměru  $R$  vepište pravidelný  $n$ -úhelník,  $n \in \{3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$ . Dokažte správnost vzorce pro obsah  $n$ -úhelníku, je-li vepsán

a) rovnostranný trojúhelník, potom jeho obsah je  $S = \frac{3R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ ,

b) čtverec, potom jeho obsah je  $S = 2R^2$ ,

c) pravidelný šestiúhelník, potom jeho obsah je  $S = \frac{3R^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$ ,

d) pravidelný osmiúhelník, potom jeho obsah je  $S = 2R^2 \cdot \sqrt{2}$ ,

e) pravidelný dvanáctiuhelník, potom jeho obsah je  $S = 3R^2$ ,

f) pravidelný šestnáctiuhelník, potom jeho obsah je  $S = 4R^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ,

g) pravidelný dvacetitiúhelník, potom jeho obsah je  $S = 6R^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

## 7 Goniometrické rovnice a nerovnice

### 7.1 Goniometrické rovnice

1 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin x = \frac{1}{2}$       c)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$       e)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$   
 b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$       d)  $\cos x = -1$       f)  $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$

2 Řešení následujících rovnic vyjádřete ve stupňové míře:

- a)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       b)  $\cos x = \frac{1}{2}$       c)  $\operatorname{tg} x = 1$

3 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $2 \cdot \frac{\cos x + 1}{3} - \frac{4 \cos x - 1}{2} = 1 - \cos x$   
 b)  $\frac{5 \sin x + 4}{10 \sin x + 4} = 1$   
 c)  $\sin x = \sin \pi - \cos \frac{\pi}{3}$   
 d)  $\cos x - \cos \frac{5}{2}\pi = \sin \frac{5}{2}\pi + \cos \frac{5}{2}\pi$

4 Dané rovnice řešte v intervalu  $\langle 0; 360^\circ \rangle$  s užitím kalkulačky nebo tabulek.  
(Výsledky zapište ve stupňové míře s přesností na minuty.)

- a)  $\cos x = 0,2425$       b)  $\operatorname{tg} x = -35$       c)  $4 \operatorname{cotg} x = \pi$

5 Následující rovnice řešte v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  s užitím kalkulačky nebo tabulek.  
(Výsledky zapište v obloukové míře s přesností na dvě desetinná místa.)

- a)  $\sin x = 0,9876$       b)  $\cos x = 2,5000$       c)  $4 \cos x + \frac{\pi}{4} = 0,8000$

6 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin 3x = 1$       f)  $\operatorname{tg}(4x - 3) = 1$   
 b)  $\cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2}$       g)  $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$   
 c)  $\cos \frac{5}{2}x = 0$       h)  $\sin(1 - x) = 0$   
 d)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$       i)  $\sqrt{2} \cos(4\pi + 2x) = -1$   
 e)  $\cos\left(3x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$       j)  $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

7 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$       g)  $12 \sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$   
 b)  $4 \sin^2 x - 2 \sin x = \sqrt{3}(-1 + 2 \sin x)$       h)  $8 \cos^4 x - 10 \cos^2 x + 3 = 0$   
 c)  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$       i)  $\sin^4 x - \cos^4 x = -1$   
 d)  $2 \cos^2 x - 3 = 3 \sin x$       j)  $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$   
 e)  $2 \sin^2 x + 3\sqrt{2} \cos x - 4 = 0$       k)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x - 2 = 0$   
 f)  $\sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x - 2 = 0$       l)  $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{cotg}^2 x - 4 = 0$

8 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $4 \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$       b)  $2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 7$   
 c)  $\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = 2$       d)  $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)^2 = 4$

9 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $2 \sin^2 5x + 3 \cos 5x = 0$       c)  $2 \cos^2 8x = 3 - 3 \sin 8x$   
 b)  $2 \sin^2 \frac{x}{3} + 3 \cos \frac{x}{3} = 0$       d)  $3 \operatorname{tg}^4 3x + 1 = 4 \operatorname{tg}^2 3x$

10 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $2 \sin^2 x - \sin x = 0$       f)  $3 \operatorname{cotg}^3 x + 3 \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg} x - 1 = 0$   
 b)  $4 \cos^3 x = \cos x$       g)  $5 \sin x + 4 \cos x - 10 \sin x \cos x = 2$   
 c)  $3 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$       h)  $3 \cos x + 3 = 4 \cos^3 x + 4 \cos^2 x$   
 d)  $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$       i)  $2 \sin x + \operatorname{tg} x + 2 \cos x + 1 = 0$   
 e)  $4 \cos^2 x = 3 \operatorname{cotg}^2 x$       j)  $\sqrt{2} \cos x - \operatorname{cotg} x - \sqrt{2} \sin x + 1 = 0$

11 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin x = \cos x$       c)  $\sin 10x = -\cos 10x$   
 b)  $\cos x = -\sqrt{3} \sin x$       d)  $4 \cos x = 3 \sin x$

12 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin^2 x - 6 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$       d)  $4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3$   
 b)  $2 \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 1$       e)  $\sin x \cos x - \cos^2 x = -2$   
 c)  $3 \cos^2 x + \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 2$       f)  $7 \sin^2 x + 10 \cos^2 x - 11 \sin x \cos x = 5$

13 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin x + \sin 2x = 0$       c)  $\sin 2x \cos x + \sin^2 x = 1$   
 b)  $\sin x - \sin 2x + 2 \cos x - 1 = 0$       d)  $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

14 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$       d)  $\sin^2 x \cos^2 x = 0,125$   
 b)  $(\sin x + \cos x)^2 = 1$       e)  $0,5 \sin^2 2x = \sin^4 x + \cos^4 x$   
 c)  $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$       f)  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$

15 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\cos 2x + \sin x \cos x = 1$       e)  $(1 + \cos 2x) \sin x = 4 \cos^2 x$   
 b)  $\cos 2x + \sin x = 0$       f)  $\cos 2x - 2 = \cos x$   
 c)  $\sin x + \cos 2x = 1$       g)  $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos^2 2x$   
 d)  $1 = \cos 2x - \sin x$       h)  $\sin^6 x - \cos^6 x = \cos 2x$

16 Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\cos 2x - \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$       d)  $1 - \cos 2x = \sin 2x \cdot \sin x$   
 b)  $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$   
 c)  $2 \sin 2x - 2 \cos 2x = 2$

**17** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $(\sin 2x + \cos 2x)^2 = 0,5$   
 b)  $(\sin 2x - \cos 2x)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 c)  $\sin 2x \cdot \cos 2x = 0,5$   
 d)  $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = (\cos x + \sin x)^2$
- e)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 8 \cos 2x$   
 f)  $\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x \cdot \cos 2x = -\frac{1}{8}$   
 g)  $\operatorname{tg} x \cdot (1 - \sin 2x) = 1 - \cos 2x$   
 h)  $\frac{1}{\cos^2 2x} - 2 \operatorname{tg} 2x = 0$

**18** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin 4x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$   
 b)  $\sin 4x + \sin 2x = 0$   
 c)  $\sin 4x + 2 \sin^2 2x = 2$   
 d)  $2 \sin^4 2x - \sin^2 2x \cdot \sin 4x = 2 \sin^2 2x - \sin 4x$
- e)  $1 + \cos 4x = \cos 2x$   
 f)  $(1 + \cos 4x) \cdot \sin 2x = \cos 2x$   
 g)  $\cos 4x - 3 \cos 2x - 3 \sin 2x = 0$

**19** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin 4x = \sin 2x$   
 b)  $\cos 4x = \cos 2x$   
 c)  $\cos 20x = \sin 10x$
- d)  $\sqrt{2} \sin 8x + 2 \sin 4x = 0$   
 e)  $\sin 6x - 2 \cos 3x = 0$   
 f)  $\operatorname{tg} 3x - 2 \sin 6x = 0$

**20** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \sin x = 0$   
 b)  $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$   
 c)  $\cos \frac{x}{2} + \sin x = 0$
- d)  $\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{2} = 0$   
 e)  $\sin \frac{x}{8} + \cos \frac{x}{4} = 0$   
 f)  $\sqrt{3} \sin \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{2} = 0$

**21** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin 4x = \sin(3x - \frac{\pi}{2})$   
 b)  $\sin(3x + 60^\circ) = \sin x$   
 c)  $-\sin 2x = \sin 10x$   
 d)  $\cos(x+1) = \cos(6x+2)$   
 e)  $\sin 3x = \cos(0,5x + \frac{\pi}{2})$
- f)  $\sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{x}{2} = 0$   
 g)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$   
 h)  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$   
 i)  $\sin 5x - \sin x = \cos 3x$
- j)  $\cos 3x - \sin 3x = \cos 2x - \sin 2x$

**22** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin(x+30^\circ) + \sin(x-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 b)  $\sin x + \sin(x+\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 c)  $\cos(x+120^\circ) - \cos x = \sqrt{3}$   
 d)  $\sin(\frac{\pi}{4}+x) - \sin(\frac{\pi}{4}-x) = \sin 2x$   
 e)  $\sin(x-\frac{\pi}{6}) = \sin x - \sin \frac{\pi}{6}$   
 f)  $\sin(x+30^\circ) + \cos(x+60^\circ) = 1 + \cos 2x$
- g)  $\sin x - 2 \sin(60^\circ - x) = 0$   
 h)  $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 5 \cos(x-\frac{\pi}{4})$   
 i)  $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{6}) \cdot \operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{3}) = 1$   
 j)  $\cos(x+60^\circ) \cdot \cos(x-60^\circ) = \frac{1}{4}$   
 k)  $\sin(x+\frac{\pi}{4}) \cdot \cos(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$

$$+ \sin(x+\frac{\pi}{3}) = \sin x - \sin \frac{\pi}{6}$$

**23** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$   
 b)  $\sin x + 2 \cos x = 2$   
 c)  $\sin x + \cos x = 2$   
 d)  $2 \sin x - \cos x + 1 = 0$
- e)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$   
 f)  $\cos x + 3 \sin x + 3 = 0$   
 g)  $2 \sin x + 5 \cos x = 20$   
 h)  $4 \sin x + 2 \cos x = \sqrt{2}$
- i)  $(1 - \operatorname{tg} x) \cdot (1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$   
 m)  $\cos x + \sin 2x = \operatorname{cotg} x$   
 n)  $\cos x + \operatorname{cotg} x = 1 + \sin x$   
 o)  $\cos 2x = \cos^2 x - 0,5 \operatorname{tg}^2 x$   
 p)  $\operatorname{tg} x \cdot \left( \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right) = 1$   
 q)  $\frac{2}{\cos^2 x} - 5 = \operatorname{tg} x$   
 r)  $\frac{3}{\sin^2 x} - 2 = 4 \operatorname{cotg} x$   
 s)  $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2 \cos 2x$   
 t)  $\frac{1}{\sin^2 x} + 2 \operatorname{cotg} x = 0$   
 u)  $\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 1$   
 v)  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) - \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x}$

**25** Určete všechna čísla  $x \in (0; 2\pi)$ ,  $y \in (0; 2\pi)$  tak, aby byla řešením dané soustavy:

- |                                     |                             |                                    |
|-------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| a) $x + y = \pi$                    | c) $x + y = \frac{5}{6}\pi$ | e) $2 \sin x - 3 \sin y = -2$      |
| $\operatorname{tg}(x-y) = \sqrt{3}$ | $\sin x \cdot \cos y = 0,5$ | $\sin x + \sin y = 1,5$            |
| b) $x - y = 120^\circ$              | d) $x + y = \frac{2}{3}\pi$ | f) $\cos(x+2y) = 1$                |
| $\sin(x+y) = 0,5$                   | $\sin x - 2 \sin y = 0$     | $\sin(2x+y) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ |

## 7.2 Goniometrické nerovnice

**26** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- |                                     |                                 |  |
|-------------------------------------|---------------------------------|--|
| a) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ | c) $\sin x < 0$                 | e) $\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{cotg} x < \sqrt{3}$ |
| b) $\operatorname{tg} x \leq -1$    | d) $\operatorname{cotg} x > -1$ | f) $0 \leq \cos x < \frac{1}{2}$                           |

**27** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- |                                       |                     |                               |
|---------------------------------------|---------------------|-------------------------------|
| a) $ \sin x  \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ | c) $\sin^2 x < 1$   | e) $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$ |
| b) $ \operatorname{tg} x  \leq 1$     | d) $\cos x \geq -4$ | f) $\cos \frac{x}{2} > 0$     |

**28** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\sin x \geq \cos x$       b)  $\cos x < -\sin x$       c)  $\operatorname{tg} x \geq \operatorname{cotg} x$

**29** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ :

a) $\sin x \cdot \cos x > 0$	c) $\sin 2x \leq \sin x$	e) $\cos 2x < 1$
b) $\sin 2x \cdot \cos x < 0$	d) $\sin^2 x \geq \sin x$	f) $\cos 2x + \sin x < 1$

**30** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a) $2 \sin^2 x > 3 \cos x$	c) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x > 2$
b) $\sin^2 x + 3 \cos x - 3 \leq 0$	d) $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x > \frac{1}{2}$

## 8 Mocninné funkce, lineární lomená funkce

### 8.1 Grafy mocninných funkcí

**1** V jednotlivých případech vždy nakreslete graf funkce  $f$  a  $g$  v jedné soustavě souřadnic a určete jejich vzájemný vztah.

a) $f_1(x) = \frac{1}{x^2}, g_1(x) = \frac{1}{(x - 0,5)^2}$	c) $f_3(x) = \frac{1}{x^5}, g_3(x) = \frac{2}{x^5}$
b) $f_2(x) = \frac{1}{x^3}, g_2(x) = \frac{1}{x^3} + 2$	d) $f_4(x) = \frac{1}{x^4}, g_4(x) = \frac{1}{(x + 2)^4} - 1$

**2** Načrtněte grafy mocninných funkcí  $f_1$  až  $f_6$ . Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou  $x$  a s osou  $y$ . Při výpočtu průsečíků užijte kalkulačku, počítejte s přesností na dvě desetinná místa.

$f_1: y = (x - 1)^4$	$f_3: y = (x - 2)^{-2}$	$f_5: y = 2x^3 - 4$
$f_2: y = x^5 - 2$	$f_4: y = x^{-3} - 1$	$f_6: y = -x^{-4} + 2$

**3** Načrtněte grafy mocninných funkcí  $g_1$  až  $g_6$ . Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou  $x$  a s osou  $y$ .

$g_1: y =  x^{-3}  - 1$	$g_3: y =  x^{-3} - 1 $	$g_5: y =  x^{-3}  + 2$
$g_2: y =  (x - 1)^{-3} $	$g_4: y = ( x  - 1)^{-3}$	$g_6: y =  x^{-3} + 2 $

**4** Načrtněte grafy mocninných funkcí  $h_1$  až  $h_6$ . Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou  $x$  a s osou  $y$ .

$h_1: y =  x^{-4}  - 1$	$h_3: y =  x^{-4} - 1 $	$h_5: y =  x^{-4}  + 2$
$h_2: y =  (x - 1)^{-4} $	$h_4: y = ( x  - 1)^{-4}$	$h_6: y =  x^{-4} + 2 $

**5** Načrtněte grafy mocninných funkcí  $m_1$  až  $m_6$ . Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou  $x$  a s osou  $y$ . Při výpočtu průsečíků užijte kalkulačku, počítejte s přesností na dvě desetinná místa.

$m_1(x) = 2(x + \sqrt{3})^5 - 1$	$m_3(x) = -\frac{1}{2}x^{-4} + 1$	$m_5(x) = -2x^{-2}$
$m_2(x) = (x + \sqrt{2})^6 + \sqrt{3}$	$m_4(x) = 2 - x^{-3}$	$m_6(x) = (-2x)^{-2}$

**6** Načrtněte grafy funkcí  $k_1, k_2$ . Ve všech případech určete definiční obor, obor funkčních hodnot a vlastnosti funkcí  $k_1, k_2$ .

$k_1(x) = (x - 1)^{-2} - 3$	$k_2(x) = 2 - (x - 3)^5$
-----------------------------	--------------------------

**7** Načrtněte grafy funkcí  $s_1$  až  $s_6$ .

$s_1(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$	$s_3(x) = \frac{x^3 -  x ^3}{2}$	$s_5(x) = \frac{1}{x( x  + x)}$
$s_2(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$	$s_4(x) = \frac{x^4 +  x ^4}{x +  x }$	$s_6(x) = \frac{x^4}{ x  - x}$

**8** Řešte v  $\mathbb{R}$  graficky následující nerovnice:

a) $x^6 > x^5$	c) $x^{-2} > x^5$	e) $x^{-3} \leq -x^7$	g) $-x^3 \geq x^{-6}$
b) $-x^3 \leq x^4$	d) $x^{-4} \leq x^{-5}$	f) $x^{-6} > -x^6$	h) $-x^{-2} \leq x^5$

## 8.2 Grafy lineárních lomených funkcí

**9** Nakreslete grafy funkcí  $f_1$  až  $f_{12}$ . Vždy určete definiční obor, obor funkčních hodnot, asymptoty grafu, střed souměrnosti grafu, průsečíky s osou  $x$  i s osou  $y$ .

$$f_1: y = \frac{1}{x}$$

$$f_2: y = \frac{1}{x} + 3$$

$$f_3: y = \frac{1}{x-4}$$

$$f_4: y = \frac{1}{x-4} + 3$$

$$f_5: y = \frac{x+3}{x-4}$$

$$f_6: y = \frac{1-x}{x+3}$$

$$f_7: y = \frac{x+3}{x}$$

$$f_8: y = \frac{x}{x-2}$$

$$f_9: y = \frac{2}{x}$$

$$f_{10}: y = \frac{-4x}{x+3}$$

$$f_{11}: y = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$f_{12}: y = \frac{3x+4}{2x+1}$$

**10** Nakreslete grafy funkcí  $g_1$  až  $g_6$ .

$$g_1: y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$g_2: y = \left| \frac{x+1}{x-2} \right|$$

$$g_3: y = \frac{|x|+1}{|x|-2}$$

$$g_4: y = \frac{|x+1|}{x-2}$$

$$g_5: y = \frac{x+1}{|x-2|}$$

$$g_6: y = \frac{|x|+1}{x-2}$$

**11** Nakreslete graf funkce  $y = \frac{2x+1}{3x-6}$ . Užitím grafu řešte nerovnice:

$$\text{a)} \frac{2x+1}{3x-6} \geq 0$$

$$\text{b)} \frac{2x+1}{3x-6} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{c)} \left| \frac{2x+1}{3x-6} \right| \geq 1$$

**12** Nakreslete graf funkce  $y = \frac{2x+a}{x-1}$  pro  $a \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ . Jak hodnota parametru  $a$  ovlivňuje graf funkce?

**13** Nakreslete graf funkce  $y = \frac{2x+1}{x+b}$  pro  $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Jak hodnota parametru  $b$  ovlivňuje graf funkce?

**14** Nakreslete graf funkce  $y = \frac{2x+1}{cx}$  pro  $c \in \{-2, -1, 1, 2\}$ . Jak hodnota parametru  $c$  ovlivňuje graf funkce?

**15** Nakreslete grafy funkcí:

$$\text{a)} y = \left(1 - \frac{x^2}{x^2-1}\right) : \left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)$$

$$\text{b)} y = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\text{d)} y = \frac{1-x^2}{x^3-1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\text{e)} y = \frac{x^3}{x^3+2x^2} + \frac{x^2}{x^2+2x} - \frac{2x+1}{x+2}$$

$$\text{c)} y = 1 + \frac{2}{1 - \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}}$$

$$\text{f)} y = \frac{x + \frac{x+\frac{1}{2}}{2}}{x - \frac{x-\frac{x}{2}}{2}}$$

## 8.3 Inverzní funkce k funkcím mocninným

**16** Nakreslete graf dané funkce, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, souřadnice průsečíků s osami. Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní v celém definičním oboru, nebo zda existuje jen v podmnožině definičního oboru. Jestliže inverzní funkce existuje, nakreslete v téže soustavě souřadnic její graf, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky s osami a rovnici.

$$f_1: y = x^2$$

$$f_2: y = x^3$$

$$f_3: y = x^6$$

$$f_4: y = x^{-2}$$

$$f_5: y = x^{-3}$$

$$f_6: y = x^{-6}$$

$$f_7: y = (x+2)^2 - 1$$

$$f_8: y = 4 - x^2$$

$$f_9: y = 2x^3 + 1$$

**17** Nakreslete graf dané funkce, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, souřadnice průsečíků s osami. Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní v celém definičním oboru, nebo zda existuje jen v podmnožině definičního oboru. Jestliže inverzní funkce existuje, nakreslete v téže soustavě souřadnic její graf, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky s osami a rovnici.

$$g_1: y = \sqrt{x}$$

$$g_2: y = \sqrt{x+2}$$

$$g_3: y = \sqrt{x+2}$$

$$g_4: y = \sqrt[3]{x}$$

$$g_5: y = \sqrt[3]{x-2}$$

$$g_6: y = 2\sqrt[3]{x-2}$$

$$g_7: y = 2\sqrt{x-1} + 3$$

$$g_8: y = 2\sqrt[3]{1-x}$$

$$g_9: y = \sqrt[3]{x-1}$$

## 8.4 Inverzní funkce k funkci lineární lomené

**18** Nakreslete graf dané funkce, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, souřadnice průsečíků s osami. Zdůvodněte, proč k dané funkci existuje funkce inverzní. Nakreslete v téže soustavě souřadnic její graf, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky s osami a rovnici.

$$h_1: y = \frac{1}{x}$$

$$h_2: y = \frac{1}{x} - 2$$

$$h_3: y = \frac{1}{x-2}$$

$$h_4: y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$h_5: y = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$h_6: y = \frac{4+x}{1-x}$$

## Počítání s odmocninami a s mocninami

### 8.5 Počítání s odmocninami

**19** Vypočítejte:

$$\text{a)} \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{b)} \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{27}$$

$$\text{c)} (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{12} - \sqrt{8})$$

$$\text{d)} (2\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - 2\sqrt{5})$$

$$\text{e)} \sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3}) - \sqrt{6} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\text{f)} (\sqrt{11} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{5})$$

$$\text{g)} (3\sqrt{7} + \sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{7} - \sqrt{2})$$

$$\text{h)} (\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt[3]{3})$$

$$\text{i)} (\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{3})$$

**20** Vypočítejte:

$$\text{a)} \sqrt{72} : \sqrt{2}$$

$$\text{b)} \sqrt{60} : \sqrt{15}$$

$$\text{c)} \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{d)} (\sqrt{10} + \sqrt{12}) : \sqrt{2}$$

$$\text{e)} (6\sqrt{15} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}) : 2\sqrt{5}$$

$$\text{f)} \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

**21** Vypočítejte:

a)  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8}$     c)  $(3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54}) \cdot \sqrt[3]{4}$     e)  $(2\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{12}) : \sqrt[3]{6}$   
 b)  $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$     d)  $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8})$     f)  $(\sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{4}) : \sqrt[3]{4}$

**22** Částečně odmocněte:

a)  $\sqrt{12} - \sqrt{48} + 2\sqrt{75}$     d)  $\sqrt{98} + \sqrt{200} + \sqrt{128}$   
 b)  $2\sqrt{8} - \sqrt{8} + 11\sqrt{72}$     e)  $\sqrt{75} - \sqrt{300} + \sqrt{243}$   
 c)  $8\sqrt{50} + 4\sqrt{32} - 6\sqrt{162}$     f)  $2\sqrt{108} - 2\sqrt{27} + 12\sqrt{12}$

**23** Částečně odmocněte:

a)  $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 2\sqrt[3]{250}$     c)  $\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{1024}$   
 b)  $5\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5} - 10\sqrt[3]{40}$     d)  $\sqrt[3]{32} + 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{500}$

**24** Částečně odmocněte:

a)  $\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{243}$     b)  $\sqrt[3]{405} + 3\sqrt[3]{80} - 5\sqrt[3]{5}$

**25** Zapište pomocí jediné odmocniny:

a)  $2\sqrt{7}$     b)  $5\sqrt{3}$     c)  $4\sqrt[3]{2}$     d)  $3\sqrt[4]{4}$

**26** Odstraňte odmocninu ze jmenovatele zlomku (zlomky usměrněte):

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$	e) $\frac{2}{3 - \sqrt{5}}$	i) $\frac{2 + \sqrt{8}}{6 - 3\sqrt{2}}$
b) $\frac{12}{\sqrt{6}}$	f) $\frac{1}{1 + \sqrt{7}}$	j) $\frac{\sqrt{27} - 1}{2 + 4\sqrt{3}}$
c) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{14}}{\sqrt{6}}$	g) $\frac{15}{2\sqrt{3} - 3}$	k) $\frac{3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}$
d) $\frac{4\sqrt{15} + 5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$	h) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{10}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$	l) $\frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}$

**27** Odstraňte odmocninu ze jmenovatele zlomku (zlomky usměrněte):

a)  $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$     b)  $\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1}$

**28** Rozhodněte, které z čísel A, B je větší. (Při výpočtu nepoužívejte kalkulačku.)

a) $A_1 = \frac{22222}{2 - \sqrt{2}}$	b) $A_2 = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$	c) $A_3 = \frac{11\sqrt{13}}{13\sqrt{11}}$
$B_1 = \frac{33333}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$	$B_2 = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{30}}$	$B_3 = \frac{22\sqrt{27}}{27\sqrt{22}}$

**29** Vypočítejte hodnotu výrazu  $v(x) = \frac{1}{x} + 2x$  pro následující hodnoty  $x_1$  až  $x_9$ :

$x_1 = \sqrt{2}$	$x_4 = 3 - \sqrt{3}$	$x_7 = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$
$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x_5 = \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$	$x_8 = \frac{2}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$
$x_3 = 2\sqrt{5}$	$x_6 = 3 + \sqrt{5}$	$x_9 = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}$

**30** Odstraňte odmocniny ze jmenovatele zlomků (zlomky usměrněte):

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	d) $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$	g) $\frac{3}{\sqrt[5]{8}}$
b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$	e) $\frac{1}{\sqrt[4]{10^2}}$	h) $\frac{3}{\sqrt[3]{2} - 1}$
c) $\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$	f) $\frac{1}{\sqrt[4]{10^3}}$	i) $\frac{3}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$

**31** Vypočítejte:

a)  $\sqrt[3]{2\sqrt{6} - 4} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6} + 4}$     b)  $\sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}}$

**32** Umocněte:

a) $(1 + \sqrt{2})^2$	d) $(1 - 2\sqrt{3})^3$	g) $(2 - \sqrt{5})^{-2}$
b) $(5\sqrt{3} - \sqrt{6})^2$	e) $(\sqrt{2} + 2)^3$	h) $(\sqrt{3} + 2)^{-2}$
c) $(3\sqrt{5} + 2\sqrt{10})^2$	f) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^3$	i) $(\sqrt{2} - 1)^{-3}$

**33** Odmocněte ( $a, b, x, y, z, m \in \mathbb{R}$ ):

a) $\sqrt{a^2}$	c) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$	e) $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$
b) $\sqrt{100x^6} \cdot \sqrt{y^2z^4}$	d) $\sqrt{a^2 + b^2}$	f) $\sqrt{0,25m^2 + m + 1}$

**34** Vypočítejte hodnotu výrazu  $w(x) = x^3 - x^2 - \frac{1}{x}$  pro hodnoty  $x_1, x_2, x_3$ :

$x_1 = \sqrt{5}$      $x_2 = 2 + \sqrt{3}$      $x_3 = 2\sqrt{2} - 3$

**35** Vypočítejte:

a) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) : \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
b) $(\sqrt{7} + 4) \cdot \left(\frac{21}{2\sqrt{7}} - \frac{12}{\sqrt{7} + 1}\right)$
c) $\left(\frac{55}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} - \frac{8}{3 - \sqrt{5}}\right) \cdot (\sqrt{5} - 3)$
d) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 2} - \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$
e) $\frac{(1 + \sqrt{5})^2 - (1 - \sqrt{5})^2}{4\sqrt{5}}$
f) $\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{\sqrt{3} - \sqrt{11}} + \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}}\right)^2$
g) $\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}}\right)^2$

**36** Vypočítejte:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}} - \sqrt{2}$
b) $\frac{\sqrt{\sqrt{13} + 2} + \sqrt{\sqrt{13} - 2}}{\sqrt{\sqrt{13} + 2} - \sqrt{\sqrt{13} - 2}}$

## 8.6 Počítání s mocninami s celým exponentem

**37** Zapište jako mocninu ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ):

- a)  $2^2 \cdot 2^3$       c)  $16 \cdot 2^{n-4}$       e)  $x^{4n-3} \cdot x^{5-2n}$   
 b)  $5^{-1} \cdot 5^5$       d)  $x^3 \cdot x^5 \cdot x^7$       f)  $a^5 \cdot b^3 \cdot a^{-2} \cdot b^4$

**38** Zapište jako mocninu ( $n, k \in \mathbb{Z}$ ,  $x, y, a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ):

- a)  $4^7 : 4^5$       c)  $16 : 2^{n+4}$       e)  $y^{2n+3} : y^{n+3}$   
 b)  $\frac{7^{n+1}}{49}$       d)  $\frac{x^3}{x^5 \cdot x^{-2}}$       f)  $\frac{a^{k+1}}{b^{k+2}} : \frac{a^{2k}}{b^3}$

**39** Vypočítejte a určete, kdy výrazy mají smysl:

- a)  $(2x)^3$       c)  $(12x)^2 : (3x)^3$       e)  $[(x^{-2}y)^3]^2 \cdot (y^{-1})^{-6}$   
 b)  $(1\frac{1}{2})^5 \cdot \left(\frac{2^{-1}}{3}\right)^3$       d)  $\left(\frac{-x^{-1} \cdot y^2}{x^3}\right)^{-5}$       f)  $\left(\frac{x}{2y^2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^5$

**40** Vypočítejte z paměti ( $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ):

- a)  $2x^0$       b)  $(2x)^0$       c)  $2^0 x$       d)  $2 : x^0$       e)  $2^0 : x$       f)  $0^0$

**41** Vypočítejte z paměti ( $k \in \mathbb{N}$ ):

- a)  $(-1)^{-1}$       b)  $-1^2$       c)  $(-1)^3$       d)  $(-1)^{-2}$       e)  $(-1)^{2k}$       f)  $(-1)^{2k+1}$

**42** Vypočítejte (bez použití kalkulačky):

- a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2^{-1} + (-1)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$       e)  $\left[2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^2$   
 b)  $(0,1)^{-1} - 2^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} - \frac{1^{-4}}{2} - (-1)^{-1}$       f)  $(2^{-2} + 4^{-1})^2$   
 c)  $0,2^{-1} - (-1^{-2}) - \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1^{-5}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$       g)  $(0,02)^{-3} \cdot [(0,1)^{-2}]^{-1}$   
 d)  $\left\{ \left[\frac{1}{2}^{-2}\right]^{-1} - (3^{-1})^{-2} + 1 \right\}^{-2}$       h)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 0,4^{-1}$

**43** Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

- a)  $(x^2)^{-1} : 9(x^{-3})^2$       d)  $\left(\frac{a^2b^{-3}}{c^{-2}d^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{c^4d^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^2$   
 b)  $\frac{(x^4y^{-3})^{-2}}{(x^3)^{-3}y^5}$       e)  $[n^{-2} \cdot 3n^3 \cdot (6n)^{-1}]^{-2} : (2n^{-1})^0$   
 c)  $0,8^{-1} \cdot a^2b^{-3} \cdot 1,5a^{-2}b^5$       f)  $\left[m^4 \cdot \left(\frac{2}{m}\right)^5 \cdot \left(\frac{m^2}{4}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{16}\right]^{-1}$

**44** Základy mocnin rozložte na prvočinitele, potom zlomky krátte ( $n \in \mathbb{N}$ ):

- a)  $\frac{6^7 \cdot 22^5 \cdot 15^6 \cdot 2^7}{10^7 \cdot 12^6 \cdot 33^5}$       b)  $\frac{6^{3n-1} \cdot 9^{n-1} \cdot 10^{2n-1}}{30^{2n-4} \cdot 32^n \cdot 12^{1-n}}$       c)  $\frac{21^{2n-2} \cdot 15^{n+2} \cdot 49^n}{20^{2n-5} \cdot 14^{n-2} \cdot 16^{3-2n}}$

**45** Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

- a)  $\frac{x^5 \cdot (x^n \cdot 6 \cdot y^{4n})^3}{9 \cdot y^{4n} \cdot (x^5 \cdot 2 \cdot y^6)^2}$       b)  $\frac{(16b^3a^{-1})^{-3}}{(a^3b^{-2} \cdot 4)^{-2}}$       c)  $\frac{(27r^3s^4)^{n-1}}{(3rs^{-2})^{3n+1}}$

**46** Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

- a)  $\frac{x^{n+1} + 6x^n}{x^{n-1} + 6x^{n-2}}$       b)  $\frac{y^{a+2} - y^a}{y^{a+1} + y^a}$       c)  $\frac{a^{2x} + 6a^x + 9}{a^{2x} - 9}$       d)  $\frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^{n+1} - xy^n}$

**47** Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

- a)  $\frac{x^3 - x^2}{x^{n+1}} - \frac{4x^5 - x^3}{x^{n+3}} - \frac{4 - x}{x^n}$   
 b)  $\frac{x^2 - 1}{4x^5} - 2 \cdot \frac{1 - x^{n-4}}{16x^{n-1}} - \frac{3x^{n-2} - x^2}{8x^{n+1}}$

**48** Vypočítejte:

- a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - (\sqrt{5})^{-4} - \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}$   
 b)  $(\sqrt{3})^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$   
 c)  $2^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{-3}$   
 d)  $(\sqrt{2})^{-1} + (\sqrt{2})^{-2} - (-\sqrt{2})^{-3}$

## 8.7 Počítání s mocninami s racionálním exponentem

**49** Zapište pomocí odmocnin a vypočítejte bez použití kalkulačky:

- a)  $4^{\frac{1}{2}}$       d)  $16^{0,5}$       g)  $1000^{-\frac{2}{3}}$       j)  $1^{-\frac{5}{4}}$   
 b)  $125^{\frac{1}{3}}$       e)  $81^{0,25}$       h)  $4^{-\frac{3}{2}}$       k)  $-1^{\frac{5}{4}}$   
 c)  $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$       f)  $\left(\frac{1}{100}\right)^{1,5}$       i)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$       l)  $0^{\frac{1}{5}}$

**50** Zapište jako mocninu s racionálním exponentem ( $x \in \mathbb{R}^+$ ):

- a)  $\sqrt{x}$       b)  $\sqrt[3]{x^5}$       c)  $\sqrt[5]{x^3}$       d)  $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$       e)  $\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$

**51** Výsledky následujících úloh zapište jako mocninu čísla 2:

- a)  $2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$       c)  $\left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{3}{4}}$       e)  $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \cdot 16^{\frac{10}{16}}$   
 b)  $2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{1}{2}}$       d)  $\left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{7}{8}}$       f)  $(2^{\frac{1}{3}})^4 \cdot 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$

**52** Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

- a)  $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}}}{x^2}$       c)  $\frac{(y^{\frac{1}{2}})^3 \cdot (y^2)^{\frac{1}{3}}}{y \cdot y^{\frac{2}{3}}}$       e)  $\frac{(xy)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2y)^{-\frac{1}{3}}}{(xy^2)^{-\frac{2}{3}}}$   
 b)  $\frac{y^2}{(y^{\frac{1}{6}})^2}$       d)  $\frac{(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} \cdot (x^{\frac{1}{6}})^{\frac{9}{4}}}{(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{5}{6}}}$       f)  $\left(\frac{x^{\frac{2}{5}}}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-2} \cdot \frac{(y^{-1}x^{-2})^{-\frac{1}{2}}}{(xy^2)^{\frac{1}{10}}}$

**53** Následující úlohy počítejte dvěma způsoby:

1. způsob: výraz upravte užitím pravidel pro počítání s odmocninami.  
 2. způsob: výraz nejprve přepište pomocí mocnin s racionálním exponentem a potom upravte užitím pravidel pro počítání s mocninami.

- a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$       b)  $\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt[2]{2}}$       c)  $\sqrt[3]{5^2 \cdot \sqrt{5}}$       d)  $\sqrt[4]{11} \cdot \sqrt[4]{11^3}$   
 e)  $\sqrt[5]{5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5} \cdot \sqrt[4]{5}}}$       f)  $\frac{\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[6]{49}}{\sqrt[7]{7}}$       g)  $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8}}{\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{4}}$       h)  $\sqrt[6]{\frac{16}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{2}} \cdot \sqrt[2]{2}$

**54** Upravte a udejte podmínky:

a)  $\sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$   
 b)  $\sqrt{z^3 \cdot \sqrt{z^2 \cdot \sqrt{z}}}$  e)  $\sqrt{y \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{y}} \cdot \sqrt[4]{y}}$  g)  $\frac{\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^3}}}{\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}}$

c)  $\sqrt[3]{k^2 \cdot \sqrt{k}}$   
 d)  $\sqrt[4]{m} \cdot \sqrt[4]{m^3}$  f)  $\frac{\sqrt[5]{u} \cdot \sqrt[6]{u^2}}{\sqrt{u}}$  h)  $\sqrt[6]{\frac{b^4}{\sqrt{b}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^3}{\sqrt{b}}} \cdot \sqrt{b}$

**55** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $x^4 = 625$  c)  $x^{\frac{1}{3}} = 0,4$  e)  $\sqrt{x^3} = 8$  g)  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5}} = 3$   
 b)  $64x^6 - 1 = 0$  d)  $\sqrt[4]{x} = 9$  f)  $x^{\frac{2}{3}} = 0,25$  h)  $\sqrt{125x^2} = 5x\sqrt{5}$

## 8.8 Úpravy výrazů obsahujících mocniny a odmocniny

**56** Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a)  $\left( \frac{8 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{8 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x^2 - 16}{4\sqrt{x}}$   
 b)  $\frac{2}{1 + \sqrt{x}} - \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x + 2}{1 - x}$   
 c)  $\left( 4 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) - \frac{6}{x - 1}$   
 d)  $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{7} + \sqrt{x}} + \left( \frac{7\sqrt{7} + x\sqrt{x}}{\sqrt{7} + \sqrt{x}} - \sqrt{7x} \right) : (7 - x)$   
 e)  $\left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$

**57** Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a)  $[2x^{-1} + (2x)^{-1} + (x+2)^{-1}]^{-1} \cdot (x+2)^{-1}$   
 b)  $[1 + (x^{-2}-1)^{-1}]^{-1} + [1 - (x^{-2}+1)^{-1}]^{-1}$   
 c)  $x^{-1} \cdot (1-x^{-2}) \cdot (1+x^{-3})^{-1} \cdot (x^{-2}-x^{-1}+1)$   
 d)  $[x^{-1} \cdot (x^{-1}-x^{-2})]^{-1} - [x \cdot (x^{-1}-1^{-1})]^{-1}$

**58** Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a)  $\frac{a^{-\frac{1}{2}} + 1}{a^{-\frac{1}{2}} - 1} - \frac{a^{-\frac{1}{2}} - 1}{a^{-\frac{1}{2}} + 1}$   
 b)  $\frac{b^{\frac{3}{2}} + b^{-\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{3}{2}}} + \frac{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{3}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$   
 c)  $\frac{c^{-\frac{1}{3}}}{c^{-\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}} - \frac{2c^{-\frac{2}{3}}}{c^{-\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}}}$   
 d)  $\left( \frac{d^{-0,5}}{d^{0,5} + 1} - \frac{d^{-0,5} + d^{0,5}}{1 - d} \right)^{-1}$   
 e)  $\left( \frac{16e^{-1} - 9e}{4e^{-0,5} - 3e^{0,5}} + \frac{16e - 9e^{-1}}{4e^{0,5} - 3e^{-0,5}} - \frac{e - e^{-1}}{e^{0,5} - e^{-0,5}} \right) : (e^{0,5} + e^{-0,5})$

**59** Načrtněte grafy funkcí:

$f_1(x) = \frac{(-x)^3 \cdot (-x)^5}{x^2 \cdot (-x)^2}$   $f_2(x) = \frac{x^4 \cdot (-x)^{-4}}{x \cdot (-x)^5} \cdot \frac{-x^6}{x^{-2} \cdot (-x)^{-3}}$

**60** Načrtněte grafy funkcí:

$g_1(x) = \sqrt{\frac{x^{-3} \cdot \sqrt{x}}{x^2}} \cdot \frac{x^{-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$   $g_3(x) = \frac{\sqrt{3x} - x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{3x}}$   
 $g_2(x) = \sqrt[3]{\frac{x \cdot \sqrt{x}}{x^{-2}}} \cdot \frac{x^{-4} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$   $g_4(x) = \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2}$

## 9 Posloupnosti a řady

### 9.1 Způsoby zadání posloupnosti

**1** V dané posloupnosti závisí  $n$ -tý člen  $a_n$  na čísle  $n$ . Znáte-li několik prvních členů, napište alespoň tři členy další a odhadněte vzorec pro  $a_n$ .

a)  $4, 8, 12, 16, 20, \dots$

b)  $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

c)  $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

d)  $-\frac{1}{27}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, -3, \dots$

**2** Zapište vzorcem pro  $n$ -tý člen

a) posloupnost všech přirozených sudých čísel,

b) posloupnost všech přirozených lichých čísel,

c) posloupnost všech přirozených čísel dělitelných 11,

d) posloupnost všech přirozených čísel, která při dělení 5 dávají zbytek 1.

**3** Posloupnost je dána vzorcem pro  $n$ -tý člen. Napište prvních pět členů dané posloupnosti a načrtněte graf.

a)  $a_n = 2n + 1$       c)  $a_n = (n - 1) \cdot n$       e)  $a_n = n^2 - 5$

b)  $a_n = n \cdot 2^{-n}$       d)  $a_n = \frac{n-1}{n+1}$       f)  $a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$

**4** Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, odhadněte vzorec pro  $n$ -tý člen a dokažte jeho správnost.

a)  $a_1 = 5$       b)  $a_1 = 1$       c)  $a_1 = -1$   
 $a_{n+1} = a_n + 4$        $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$        $a_{n+1} = (-1)^{2n+1} a_n + 2$

**5** Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, odhadněte vzorec pro  $n$ -tý člen a dokažte jeho správnost.

a)  $a_1 = 2$       b)  $a_1 = 1$       c)  $a_1 = -3$   
 $a_2 = 4$        $a_2 = 3$        $a_2 = -1$   
 $a_{n+1} = \frac{4}{3}(a_n + a_{n-1})$        $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$        $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

### 9.2 Vlastnosti posloupností

#### Posloupnost rostoucí, klesající

**6** Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou rostoucí, které jsou klesající, které nejsou ani rostoucí ani klesající. Potom svoje tvrzení dokažte.

a)  $(n)_{n=1}^{\infty}$       d)  $(-n^2 + 4n - 4)_{n=1}^{\infty}$       g)  $((-1)^n \cdot n)_{n=1}^{\infty}$

b)  $(-2n + 3)_{n=1}^{\infty}$       e)  $(\log n)_{n=1}^{\infty}$

c)  $(n^2 + 2n + 4)_{n=1}^{\infty}$       f)  $(\log \frac{1}{2} n)_{n=1}^{\infty}$       h)  $\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

#### Posloupnost omezená

**7** Rozhodněte, zda dané posloupnosti jsou omezené shora, zdola, omezené. Potom svoje tvrzení dokažte.

a)  $(n+1)_{n=1}^{\infty}$       c)  $(n^2 - 1)_{n=1}^{\infty}$       e)  $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$

b)  $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$       d)  $\left(\frac{5n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$       f)  $\left(\frac{n+4}{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$

### Limita posloupnosti

**8** Vypočítejte limity daných posloupností.

(Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou konvergentní.)

a)  $\left(\frac{5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

d)  $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{5n}\right)_{n=1}^{\infty}$

g)  $(1 + (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

b)  $(7)_{n=1}^{\infty}$

e)  $(3^n)_{n=1}^{\infty}$

h)  $(\sqrt{n+2})_{n=1}^{\infty}$

c)  $\left(\frac{4n}{3n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

f)  $\left(\frac{n^2+4n-1}{2n^2-n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

i)  $\left(\frac{n^2+4n}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

### 9.3 Aritmetická, geometrická posloupnost

**9** Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou aritmetické, které jsou geometrické. V případě aritmetických posloupností určete diferenci, v případě geometrických posloupností určete kvocient.

a)  $\left(\frac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$

b)  $(1-n)_{n=1}^{\infty}$

c)  $\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$

d)  $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

**10** Posloupnost je dána rekurentně. Napište několik členů. Rozhodněte, které z uvedených posloupností jsou aritmetické, které jsou geometrické. Posloupnosti zapište vzorcem pro  $n$ -tý člen a dokažte jeho správnost.

a)  $a_1 = 7$

b)  $a_1 = 8$

c)  $a_1 = 5, a_2 = 3$

$a_{n+1} = 2a_n - 3n - 1$

$a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 2^n$

$a_{n+2} = 2(a_n - 3) - a_{n+1}$

**11** Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté aritmetické posloupnosti. Určete diferenci.

a)  $\log 16, \log 8, \log 4$

c)  $\sin 60^\circ, \sin 0^\circ, \sin(-60^\circ)$

b)  $\frac{1999}{2000}, \frac{2999}{2000}, \frac{3999}{2000}$

d)  $a^2 - 2, (a+1)^2, (a+2)^2$ , kde  $a \in \mathbb{R}$

**12** Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté geometrické posloupnosti. Určete kvocient.

a)  $\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} + \sqrt{2}$

c)  $\sin 2x, \cos x, \frac{1}{2} \cot g x$ , kde  $x \in (0, \pi)$

b)  $\frac{1999}{2000}, \frac{1999}{4000}, \frac{1999}{8000}$

d)  $b+1, b^2 + 2b + 1, b^3 + 3b^2 + 3b + 1$ , kde  $b \in \mathbb{R}$

**13** Tvoří-li kladná reálná čísla  $a_1, a_2, a_3$  tři následující členy geometrické posloupnosti, potom jejich dekadické logaritmy tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti. Dokažte.

**14** Přičteme-li k daným číslům  $-6, 2, 26$  reálné číslo  $x$ , dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete, které číslo musíme přičíst. Potom určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, která takto vznikne.

**15** Určete reálné číslo  $x$  tak, aby čísla  $a_1, a_2, a_3$  tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti.

a)  $a_1 = x^2 + x$

b)  $a_1 = \log(2x - 1)$

c)  $a_1 = \sin x$

$a_2 = x^2 + 4x + 4$

$a_2 = \log(4x - 2)$

$a_2 = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

$a_3 = 16$

$a_3 = \log(5x + 2)$

$a_3 = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

**16** Určete reálné číslo  $x$  tak, aby čísla  $a_1, a_2, a_3$  tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti.

a) $a_1 = 1$	b) $a_1 = 1 + 2 \log x$	c) $a_1 = \frac{1}{2 \cotg x}$
$a_2 = 2^x$	$a_2 = 3 - 4 \log x$	$a_2 = 1$
$a_3 = 2^{x+2} + 12$	$a_3 = 3 + \log x$	$a_3 = \frac{3}{\sin 2x}$

**17** V aritmetické posloupnosti je  $a_1 = 20, d = 4$ .

- a) Kolikátý člen je roven číslu 100?
- b) Kolikátý člen je roven číslu 150?

**18** V geometrické posloupnosti je  $a_1 = 64, q = \frac{1}{2}$ . Kolikátý člen je roven číslu  $\frac{1}{32}$ ?

**19** Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

a) $a_4 = 9$	d) $a_3 = 2a_4$	g) $a_1 + a_2 = 5$
$a_{10} = 21$	$a_2 = -a_8$	$a_1^2 + a_2^2 = 13$
b) $a_1 + a_3 = 2$	e) $a_2 - a_1 = 6$	h) $a_3 + a_5 = 8$
$a_2 + a_7 = -8$	$a_{20} - a_{18} = 15$	$a_3^2 - a_5^2 = 32$
c) $2a_2 - a_3 = 20$	f) $a_4 + a_5 + a_7 + a_8 = 10$	i) $a_4 + a_5 = 4$
$a_4 - 5a_1 = -95$	$a_{21} : a_1 = 2$	$a_4 \cdot a_5 = -5$

**20** Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

a) $a_2 = 1,5$	c) $a_1 + a_2 - a_4 = -110$	e) $a_2 + a_3 = 60$
$a_5 = 40,5$	$a_2 + a_3 - a_5 = -220$	$a_1 + a_4 = 252$
b) $a_2 = 16$	d) $a_8 - a_4 = 360$	f) $a_2 \cdot a_3 = 9$
$a_4 = 1$	$a_7 - a_5 = 144$	$a_2 + a_3 = 10$

**21** Tři čísla, která tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti, mají součet 60 a součin 7500. Určete tato čísla.

**22** Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořila pět následujících členů

- a) aritmetické posloupnosti,
- b) geometrické posloupnosti.

**23** Mezi kořeny kvadratické rovnice  $x^2 - 10x + 16 = 0$  vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů

- a) aritmetické posloupnosti,
- b) geometrické posloupnosti.

**24** Najděte dvě reálná čísla  $x, y$  tak, aby čísla 3,  $x, y$  tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti a čísla  $x, y, 18$  tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti.

**25** Určete čtyři čísla tak, aby první tři tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti s diferencí  $d = -3$  a poslední tři tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti s kvocientem  $q = \frac{1}{2}$ .

**26** Deset čísel tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí  $d = 3$ . První, třetí a sedmé číslo tvoří tři následující členy geometrické posloupnosti. Určete tato čísla.

**27** V aritmetické posloupnosti známe první člen  $a_1 = 18$  a diferenci  $d = -5$ . Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby platilo  $a_n + a_{n+3} = -189$ .

**28** V geometrické posloupnosti známe první člen  $a_1 = \frac{1}{64}$  a kvocient  $q = 2$ . Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby platilo  $a_n + a_{2n} = 8200$ .

**29** Součet tří po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 9. První číslo necháme, druhé číslo zvětšíme o 12 a třetí číslo zmenšíme o 3. Dostaneme tak tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete původní trojici čísel a proveděte zkoušku.

**30** Tři čísla tvoří tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti a součet jejich druhých mocnin je 126. Jestliže první číslo zmenšíme třikrát, druhé číslo necháme a třetí číslo zvětšíme čtyřikrát, dostaneme tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tuto trojici čísel a proveděte zkoušku.

**31** Tři čísla tvoří tři po sobě následující členy geometrické posloupnosti. Jestliže první číslo zmenšíme o 36, dostaneme tři následující členy aritmetické posloupnosti. Jestliže dále třetí číslo dělíme -8, dostaneme opět tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tuto trojici čísel a proveďte zkoušku.

**32** Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Vypočítejte délky stran.

**33** Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 84 cm. Vypočítejte povrch kvádru, víte-li, že jeho objem je  $64 \text{ cm}^3$ .

**34** Aritmetická posloupnost je dána vzorcem pro  $n$ -tý člen  $a_n = \frac{1}{4}(3 - 2n)$ . Vypočítejte  $a_1, d$ . Dále vypočítejte součet prvních deseti členů a součet druhých deseti členů dané posloupnosti.

**35** V aritmetické posloupnosti je  $a_1 = 3, d = 4$ . Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250?

**36** V aritmetické posloupnosti známe třetí člen  $a_3 = 18$ . Určete podmínu pro diferenci tak, aby platilo  $s_9 \leq 150$ .

**37** Určete, jakou podmínu musí splňovat první člen aritmetické posloupnosti s diferencí  $d = 5$ , aby platilo  $s_{20} \geq 1000$ .

**38** Určete součet všech přirozených čísel, která vyhovují nerovnici

$$\left(12x + \frac{2}{3}\right) \cdot 5 - \frac{5x - 15}{3} < 50(x + 10).$$

**39** Určete součet všech sudých čísel, která vyhovují nerovnici  $x^2 - 53x + 150 \leq 0$ .

**40** Vypočítejte součet všech přirozených dvojciferných čísel.

**41** Dokažte, že součet prvních  $n$  lichých čísel je  $n^2$ .

**42** V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, víte-li, že platí:

a) $a_6 = -\frac{1}{3}a_{16}$	b) $s_5 = 60$	c) $s_{10} = s_{11} = 165$
$s_{26} = 104$		$s_{10} = 170$

**43** V aritmetické posloupnosti je první člen  $a_1 = 10$  a diference  $d = -2$ . Vypočítejte člen, který je roven jedné šestině součtu všech členů předchozích.

**44** V geometrické posloupnosti s prvním členem  $a_1 = 36$  určete kvocient tak, aby platilo:  $s_3 \leq 252$ .

**45** V geometrické posloupnosti s kvocientem  $q = 2$  vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec je  $a_n = 96$ .

**46** V geometrické posloupnosti platí  $s_6 = 9s_3$ . Určete  $a_1$ ,  $q$ .

**47** Součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti je 210, součet následujících deseti členů této posloupnosti je 610. Určete  $a_1$ ,  $d$ .

**48** Součet prvních tří členů geometrické posloupnosti je 38, součet následujících tří členů této posloupnosti je  $\frac{304}{27}$ . Vypočítejte  $a_1$ ,  $q$ ,  $s_6$ .

**49** Určete několik reálných čísel větších než 2 a menších než 42 tak, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost a dále aby platilo:

- a) celkový součet čísel původních i vložených je 88
- b) součet čísel vložených je 88

**50** Mezi čísla 16 a 81 dejte několik čísel tak, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a dále aby platilo:

- a) celkový součet čísel původních i vložených je 211
- b) součet čísel vložených je -42

**51** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{N}$ :

- a)  $4 + 6 + 8 + \dots + x = 270$
- b)  $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970$
- c)  $5 + 6 + 15 + 16 + 25 + 26 + \dots + x = 1221$
- d)  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^x = 1023$
- e)  $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \dots + \frac{x}{1024} = 8188$
- f)  $x + 2x + 3x + 4x + \dots + 50x = 2550$

**52** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{N}$ :

- a)  $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 3x \geq 999$
- b)  $15 + 10 + 5 + 0 - 5 - \dots - x \leq -100$
- c)  $2 + 20 + \dots + 2 \cdot 10^x < 10^6$
- d)  $\frac{x^2}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{9} + \dots + \frac{x^2}{3^{10}} \geq 54321$

**53** Řešte soustavy nerovnic s neznámou  $x \in \mathbb{N}$ :

- a)  $500 \leq 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + x \leq 1000$
- b)  $0,9 < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^x} < 1$

#### 9.4 Zápisy pomocí $\sum$

**54** Zapište pomocí sumy:

- a)  $5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 27$
- b)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{64}$
- c)  $-2 - 5 - 8 - 11 - \dots - 56$
- d)  $-1 + 2 - 4 + 8 - 16 + \dots - 1024$

**55** Danou sumu rozepište pomocí součtu a součet vypočítejte.

- a)  $\sum_{i=1}^{16} i$
- b)  $\sum_{n=2}^{18} (4n - 5)$
- c)  $\sum_{k=20}^{30} 2k$

**56** Dokažte:

a)  $\sum_{i=16}^{40} (i+4) = -20 + \sum_{j=1}^{40} j$

b)  $\sum_{i=1}^{24} (3i+1) = \sum_{k=6}^{26} (3k-4)$

**57** Vypočítejte:

a)  $\left( \sum_{i=1}^{20} i \cdot 2 \right)^2 + \sum_{i=1}^{20} i \cdot 2^2$

b)  $\sqrt{\sum_{i=3}^{10} 13i} + \sum_{i=5}^{10} \sqrt{2^i}$

**58** V úlohách a), b), e), f) řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{N}$ , v úlohách c), d) řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\sum_{i=1}^x i = 1275$

d)  $\sum_{i=5}^{50} x \cdot i = 55x + 605$

b)  $\sum_{i=1}^x (2i+3) = 2496$

e)  $\sum_{i=1}^x \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{511}{512}$

c)  $\sum_{i=1}^{200} (x+i) = 10100$

f)  $\sum_{i=1}^5 2^{x-i} = 2^{2x-10} - 2^{x-5}$

#### 9.5 Užití geometrické posloupnosti

**59** Počátkem roku uložil pan Novák do banky 50 000 Kč. Vklad je úročen 8 % ročně.

- a) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za jeden rok? (Daň z úroků neuvažujte.)
- b) Kolik korun bude mít k dispozici za jeden rok, bude-li mu odečtena daň z úroků ve výši 15 %?
- c) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech? (Daň z úroků neuvažujte.)
- d) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech, jestliže na konci každého roku mu bude odečtena daň z úroků ve výši 15 %?

**60** Za pět let se počet obyvatel ve městě X zvýší o 12 %. Jaký byl roční přírůstek? (Počítejte s přesností na desetiny.)

**61** Za kolik let klesne hodnota předmětu na méně než desetinu původní ceny, jestliže ročně odepisujeme 18 % ceny předmětu z předchozího roku?

**62** Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 5 % své intenzity. Kolik desek je třeba dát na sebe, aby se intenzita světla snížila alespoň na polovinu původní hodnoty?

**63** Kolik peněz musí pan Dvořák uložit, aby při ročním úročení 8,5 % měl za pět let 25 000 Kč? (Daně z úroků jsou 15 %.)

**64** Pan Novotný pravidelně počátkem roku uloží 10 000 Kč do banky na roční úrok 9 %. Kolik peněz bude mít k dispozici za pět let?

- a) Daně z úroků neuvažujeme.
- b) Počítejte daň z úroků ve výši 15 %.

**65** Kuřák prokouří ročně 1 200 Kč. Kolik by uspořil za 50 let, kdyby tuto částku vždy počátkem roku ukládal na vkladní knížku při ročním úročení 8 %? (Počítejte daň z úroků ve výši 15 %.)



**82** Vypočítejte délku „nekonečné“ spirály, která vznikne spojením bodů  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  atd. čtvrtkružnicemi. Střed první čtvrtkružnice je v bodě  $S_1[0; 0]$ , krajní body jsou  $A_1[-4; 0], A_2[0; 4]$ . Střed druhé čtvrtkružnice je v bodě  $S_2[0; 2]$ , krajní body jsou  $A_2[0; 4], A_3[2; 2]$ . Střed třetí čtvrtkružnice je v bodě  $S_3[1; 2]$ , krajní body jsou  $A_3[2; 2], A_4[1; 1]$ . Střed čtvrté čtvrtkružnice je v bodě  $S_4[1; \frac{1}{2}]$ , krajní body jsou  $A_4[1; 1], A_5[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}]$ . Tento postup stále opakujeme.

**83** Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry, která se skládá z úseček  $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, \dots$ . Souřadnice krajních bodů úseček jsou  $B_1[1; 0], B_2[1; 1], B_3[0; 1], B_4[0; \frac{1}{2}], B_5[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], B_6[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}], B_7[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}], B_8[\frac{1}{4}; \frac{5}{8}], \dots$

**84** V daném rovnostranném trojúhelníku  $ABC$  o straně  $a = 6$  cm sestrojte kolmici z vrcholu  $C$  na stranu  $AB$ , patu kolmice označte  $B_1$ . Bodem  $B_1$  vedeťe rovnoběžku se stranou  $AC$ , průsečík této rovnoběžky se stranou  $BC$  označte  $C_1$ . Patu kolmice z bodu  $C_1$  na stranu  $AB$  označte  $B_2$ , průsečík strany  $BC$  a rovnoběžky se stranou  $AC$  vedené bodem  $B_2$  označte  $C_2$ . Patu kolmice z bodu  $C_2$  na stranu  $AB$  označte  $B_3$ , průsečík strany  $BC$  a rovnoběžky s  $AC$  vedené bodem  $B_3$  označte  $C_3$ . Tento postup stále opakujte. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry  $ACB_1C_1B_2C_2B_3C_3\dots$ , která vznikne uvedeným způsobem.

**85** Ve čtverci  $ABCD$ ,  $|AB| = 6$  cm postupně vyznačte „nekonečnou“ lomenou čáru spojením následujících bodů:  $A, B, S_1(\text{střed } BC), S_2(\text{střed } AC), S_3(\text{střed } AB), S_4(\text{střed } BS_1), S_5(\text{střed } S_1S_3), S_6(\text{střed } BS_3), S_7(\text{střed } BS_4), S_8(\text{střed } S_4S_6), S_9(\text{střed } S_6B)$  atd. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry  $ABS_1S_2S_3S_4\dots$

**86** V pravoúhlé soustavě souřadnic narýsujte přímky  $o_1: y = x, o_2: y = -x$ . „Nekonečnou“ lomenou čáru  $D_1D_2D_3D_4D_5D_6D_7\dots$  sestrojte tak, že z bodu  $D_1[4; 0]$  povedete kolmici na přímku  $o_1$ , patu kolmice označte  $D_2$ . Z bodu  $D_2$  sestrojte kolmici na osu  $y$ , patu kolmice označte  $D_3$ . Patu kolmice vedené z bodu  $D_3$  na přímku  $o_2$  označte  $D_4$ . Patu kolmice vedené z bodu  $D_4$  na osu  $x$  označte  $D_5$ . Patu kolmice vedené z bodu  $D_5$  na přímku  $o_1$  označte  $D_6$  atd. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry  $D_1D_2D_3D_4D_5D_6D_7\dots$

**87** Do pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  ( $a = 3$  cm,  $b = 4$  cm,  $|\angle ACB| = 90^\circ$ ) je vepsána kružnice  $k_1$ . Tečna ke kružnici  $k_1$  rovnoběžná se stranou  $BC$  protíná stranu  $AB$  v bodě  $B_1$ , stranu  $AC$  v bodě  $C_1$ . Do trojúhelníku  $AB_1C_1$  je vepsána kružnice  $k_2$ , tečna ke kružnici  $k_2$  rovnoběžná s  $B_1C_1$  protíná strany  $AB, AC$  v bodech  $B_2, C_2$ . Do trojúhelníku  $AB_2C_2$  je vepsána kružnice  $k_3$ , tečna ke kružnici  $k_3$  rovnoběžná s  $B_2C_2$  protíná  $AB, AC$  v bodech  $B_3, C_3$ . Tento postup stále opakujte. Vypočítejte součet obsahů kruhů  $k_1, k_2, k_3, k_4, \dots$

**88** Sestavte následujícím způsobem „nekonečnou“ šipku. V daném rovnostranném trojúhelníku  $ABC$  ( $a = 6$  cm) sestrojte body  $K_1, L_1$  na straně  $AB$  tak, aby platilo  $|AK_1| = |K_1L_1| = |L_1B|$ . Sestrojte obdélník  $K_1L_1L_2K_2$  ( $|K_1K_2| = 2|K_1L_1|$ ) tak, aby s trojúhelníkem  $ABC$  měl společnou jen úsečku  $K_1L_1$ . Nyní na straně  $K_2L_2$  sestrojte body  $K_3, L_3$  tak, aby platilo  $|K_2K_3| = |K_3L_3| = |L_3L_2|$ . Sestrojte další obdélník  $K_3L_3L_4K_4$  ( $|K_3K_4| = 2|K_3L_3|$ ) tak, aby s obdélníkem  $K_1L_1L_2K_2$  měl společnou jen úsečku

$K_3L_3$ . Tento postup při konstrukci dalších obdélníků neustále opakujte. Vypočítejte obsah plochy „nekonečné“ šipky, kterou tvoří daný trojúhelník a obdélníky sestrojené uvedeným způsobem.

**89** V krychli  $ABCDEFGH$  o hraně  $a = 6$  cm označte postupně  $A_1, B_1, C_1, D_1$  středy hran  $EF, FG, GH, HE$ . Čtverec  $A_1B_1C_1D_1$  tvoří podstavu další krychle  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ , která je postavená na původní krychli. Označte postupně  $A_2, B_2, C_2, D_2$  středy hran  $E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1, H_1E_1$ . Čtverec  $A_2B_2C_2D_2$  tvoří podstavu další krychle  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ , která je postavená na předchozí krychli. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte objem „nekonečné“ pyramidy, která takto vznikne.

**90** V kouli se středem  $S$  a poloměrem 6 cm vyznačte průměr  $AB$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník  $ABS_1$ . Sestrojte kouli se středem  $S_1$  tak, aby s koulí původní měla vnější dotyk. V této kouli vyznačte průměr  $A_1B_1$  rovnoběžný s  $AB$  a sestrojte další rovnostranný trojúhelník  $A_1B_1S_2$  tak, aby s trojúhelníkem  $ABS_1$  měl společný jen bod  $S_1$  a trojúhelníky  $ABS_1$  a  $A_1B_1S_2$  ležely v téže rovině. Opět sestrojte kouli se středem  $S_2$  tak, aby s předchozí koulí měla vnější dotyk. V této nové kouli vyznačte průměr  $A_2B_2$  rovnoběžný s průměrem  $A_1B_1$ , sestrojte rovnostranný trojúhelník  $A_2B_2S_3$  tak, aby s trojúhelníkem  $A_1B_1S_2$  měl společný jen bod  $S_2$  a trojúhelníky  $A_1B_1S_2$  a  $A_2B_2S_3$  ležely v téže rovině. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte objem „nekonečného sněhuláka“ složeného z koulí, které umístíme popsaným způsobem.

# 10 Geometrie — konstrukční úlohy

## 10.1 Základní typy bodových množin

1 Úsečka  $AB$  má délku 6 cm. Narýsujte následující množiny bodů v rovině  $\varrho$ :

- a)  $M_1 = \{X \in \varrho; |AX| = 2 \text{ cm}\}$
- b)  $M_2 = \{X \in \varrho; |AX| \leq 4 \text{ cm} \wedge |BX| \leq 4 \text{ cm}\}$
- c)  $M_3 = \{X \in \varrho; |AX| = |BX|\}$
- d)  $M_4 = \{X \in \varrho; |AX| \leq |BX|\}$

2 Úsečka  $AB$  má délku 6 cm. Narýsujte následující množiny bodů v rovině  $\varrho$ :

- a)  $G_1 = \{X \in \varrho; |\angle ABX| = 90^\circ\}$  e)  $G_5 = \{X \in \varrho; |\angle AXB| = 150^\circ\}$
- b)  $G_2 = \{X \in \varrho; |\angle AXB| = 90^\circ\}$  f)  $G_6 = \{X \in \varrho; |\angle AXB| \geq 45^\circ\}$
- c)  $G_3 = \{X \in \varrho; |\angle ABX| = 60^\circ\}$  g)  $G_7 = \{X \in \varrho; |\angle AXB| < 120^\circ\}$
- d)  $G_4 = \{X \in \varrho; |\angle AXB| = 60^\circ\}$  h)  $G_8 = \{X \in \varrho; 135^\circ \geq |\angle AXB| \geq 45^\circ\}$

3 Je dána přímka  $p$  a číslo  $m \in \mathbb{R}^+$ . Nakreslete  $\{X \in \varrho; |Xp| = m\}$ .

4 Jsou dány dvě přímky  $p, q$ . Nakreslete  $\{X \in \varrho; |Xp| = |Xq|\}$ . Uvažujte:

- a)  $p \parallel q$
- b)  $p, q$  jsou různoběžky

## 10.2 Tečna z bodu ke kružnici

5 Je dána kružnice  $k(S; 3 \text{ cm})$  a bod  $M$ ,  $|SM| = 7 \text{ cm}$ . Sestrojte tečny z bodu  $M$  ke kružnici  $k$ . Vyznačte body dotyku.

6 Je dána kružnice  $k(S; 4 \text{ cm})$  a bod  $M$ ,  $|SM| = 8 \text{ cm}$ . Bodem  $M$  vedeť všechny přímky  $p$  tak, aby délka tětivy, kterou přímka  $p$  vytíná na kružnici  $k$ , byla 5 cm.

## 10.3 Konstrukce kružnic požadovaných vlastností

7 Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají dané kružnice  $k(O; 4 \text{ cm})$  a procházejí daným bodem  $M$ , pro který platí:

- a)  $|OM| = 3 \text{ cm}$
- b)  $|OM| = 1 \text{ cm}$
- c)  $|OM| = 0,5 \text{ cm}$
- d)  $|OM| = 5 \text{ cm}$

8 Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají dané kružnice  $k(O; 4 \text{ cm})$  a přímky  $p$ , pro kterou platí:

- a)  $|Op| = 3 \text{ cm}$
- b)  $|Op| = 0,5 \text{ cm}$

9 Jsou dány dvě rovnoběžné přímky  $p_1, p_2$ ,  $|p_1 p_2| = 4 \text{ cm}$  a bod  $M$ , pro který platí  $|Mp_1| = 1 \text{ cm}$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají daných přímek  $p_1, p_2$  a procházejí bodem  $M$ .

10 Jsou dány kružnice  $k_1(O_1; 5 \text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 2 \text{ cm})$ . Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1 cm, které se dotýkají těchto dvou kružnic. Vzdálenost středů daných dvou kružnic je

- a)  $|O_1 O_2| = 6 \text{ cm}$
- b)  $|O_1 O_2| = 8 \text{ cm}$

11 Jsou dány kružnice  $k_1(O_1; 4 \text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 2 \text{ cm})$ . Sestrojte všechny kružnice o poloměru 3 cm, které se dotýkají těchto dvou kružnic. Vzdálenost středů daných dvou kružnic je

- a)  $|O_1 O_2| = 5,5 \text{ cm}$
- b)  $|O_1 O_2| = 7,5 \text{ cm}$

12 Jsou dány soustředné kružnice  $k_1(O; 5 \text{ cm})$ ,  $k_2(O; 2 \text{ cm})$  a přímka  $p$ , pro kterou platí  $|Op| = 3 \text{ cm}$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic  $k_1, k_2$  a přímky  $p$ .

13 Jsou dány soustředné kružnice  $k_1(O; 5 \text{ cm})$ ,  $k_2(O; 2 \text{ cm})$  a bod  $M$ , pro který platí  $|OM| = 4 \text{ cm}$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic  $k_1, k_2$  a prochází bodem  $M$ .

## 10.4 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

### Položové úlohy

14 Je dána úsečka  $BS_1$ ,  $|BS_1| = 6 \text{ cm}$ . Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je úsečka  $BS_1$  těžnicí  $t_b$  a pro které dále platí:

- a)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $b = 5 \text{ cm}$
- b)  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $t_a = 7 \text{ cm}$

15 Je dána úsečka  $CC_1$ ,  $|CC_1| = 5 \text{ cm}$ . Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je úsečka  $CC_1$  výškou  $v_c$  a pro které dále platí:

- a)  $\beta = 120^\circ$ ,  $c = 3 \text{ cm}$
- b)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $t_c = 5,5 \text{ cm}$

16 Je dána úsečka  $AB$ ,  $|AB| = 6 \text{ cm}$ . Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , pro které je úsečka  $AB$  stranou  $c$  a pro které dále platí:

- a)  $v_c = 2 \text{ cm}$ ,  $r = 4 \text{ cm}$
- b)  $v_c = 3 \text{ cm}$ ,  $t_c = 4 \text{ cm}$

### Nepoložové úlohy

Ve všech následujících úlohách jsou délky úseček uvedeny v centimetrech.

Značení:  $r$  je poloměr kružnice trojúhelníku opsané,  $\varrho$  je poloměr kružnice trojúhelníku vepsané.

17 Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  ( $|\angle ACB| = 90^\circ$ ), znáte-li:

- a)  $c = 6$ ,  $v_c = 2,5$
- b)  $c = 6$ ,  $t_c = 4$
- c)  $a = 3$ ,  $\alpha = 60^\circ$
- d)  $t_c = 2,5$ ,  $\alpha = 60^\circ$
- e)  $a = 4$ ,  $r = 3$
- f)  $c = 4$ ,  $r = 3$
- g)  $a = 6$ ,  $\varrho = 2$
- h)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\varrho = 1,5$

18 Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , znáte-li:

- |  |  |
|--|--|
| a) $c = 6$ , $a = 4,5$ , $\alpha = 45^\circ$   | l) $c = 4$ , $v_a = 3$ , $t_a = 3,5$                     |
| b) $b = 8$ , $t_b = 2,5$ , $\gamma = 30^\circ$ | m) $c = 5$ , $v_a = 4$ , $t_c = 3,5$                     |
| c) $c = 6$ , $a = 3$ , $t_b = 4$               | n) $c = 5$ , $v_a = 4$ , $v_c = 3$                       |
| d) $c = 3$ , $a = 5$ , $t_a = 4,5$             | o) $c = 3,5$ , $v_c = 3$ , $t_a = 2$                     |
| e) $c = 5$ , $t_a = 6$ , $t_b = 3$             | p) $c = 6$ , $v_a = 3,5$ , $v_b = 5,5$                   |
| f) $c = 7$ , $t_b = 6$ , $t_c = 4,5$           | q) $c = 8$ , $v_c = 1,5$ , $\gamma = 120^\circ$          |
| g) $t_c = 4$ , $t_a = 6$ , $v_c = 3,5$         | r) $c = 8$ , $t_c = 4,7$ , $\gamma = 75^\circ$           |
| h) $t_a = 6$ , $t_b = 6,3$ , $t_c = 5,4$       | s) $t_a = 7,5$ , $t_c = 6$ , $\alpha = 45^\circ$         |
| i) $c = 7$ , $v_a = 6,5$ , $\alpha = 30^\circ$ | t) $v_c = 4$ , $\alpha = 60^\circ$ , $\beta = 45^\circ$  |
| j) $c = 5$ , $a = 6$ , $v_a = 4,5$             | u) $t_c = 4$ , $\alpha = 60^\circ$ , $\beta = 45^\circ$  |
| k) $c = 4$ , $v_c = 3$ , $t_c = 4,5$           | v) $t_c = 4$ , $\alpha = 45^\circ$ , $\gamma = 60^\circ$ |

19 Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , znáte-li:

- a)  $r = 4$ ,  $v_c = 2$ ,  $c = 7,5$
- b)  $r = 4$ ,  $v_a = 3$ ,  $c = 7$
- c)  $r = 4$ ,  $t_c = 4,5$ ,  $c = 7,5$
- d)  $r = 4$ ,  $v_a = 5$ ,  $\gamma = 45^\circ$

**20** Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , znáte-li:

- a)  $\rho = 1,5$ ,  $c = 8$ ,  $\alpha = 45^\circ$       b)  $\rho = 1,5$ ,  $v_c = 4$ ,  $\beta = 60^\circ$

**21** Sestrojte všechny rovnoběžníky  $ABCD$  (bod  $S$  je průsečík úhlopříček), znáte-li:

- a)  $a = 6$ ,  $v_a = 3$ ,  $|\angle ASB| = 120^\circ$   
b)  $b = 4$ ,  $|BD| = f = 5$ ,  $|\angle ASB| = 45^\circ$

**22** Sestrojte všechny kosočtverce  $ABCD$ , znáte-li:

- a)  $a = 4$ ,  $v = 3$       b)  $|AC| = e = 6$ ,  $|BD| = f = 4$

**23** Sestrojte všechny lichoběžníky  $ABCD$  (úhlopříčky lichoběžníku jsou  $AC$ ,  $BD$ , průsečík úhlopříček je bod  $S$ ), znáte-li:

- a)  $|AB| = 8$ ,  $|CD| = 3$ ,  $|AC| = 6$ ,  $|BD| = 7$   
b)  $|AB| = 6$ ,  $|CD| = 4$ ,  $|AC| = 5$ ,  $|\angle ASB| = 120^\circ$   
c)  $|AB| = 7$ ,  $|BC| = 4$ ,  $|CD| = 2$ ,  $|AD| = 3$   
d)  $|AB| = 6$ ,  $|BD| = 6$ ,  $|AD| = 4$ ,  $|\angle BCD| = 120^\circ$

**24** Sestrojte všechny konvexní čtyřúhelníky  $ABCD$  (průsečík úhlopříček je bod  $S$ ), znáte-li:

- a)  $|AB| = 7$ ,  $|AC| = 8$ ,  $|BD| = 5$ ,  $|\angle ADC| = 150^\circ$ ,  $|\angle BAD| = 45^\circ$   
b)  $|BC| = 5$ ,  $|CD| = 5$ ,  $|AC| = 6$ ,  $|\angle ADC| = 90^\circ$ ,  $|\angle BAC| = 45^\circ$   
c)  $|BC| = 6$ ,  $|AC| = 5$ ,  $|CD| = 3$ ,  $|\angle DAB| = 30^\circ$ ,  $|\angle BCD| = 30^\circ$   
d)  $|CD| = 4$ ,  $|AD| = 5$ ,  $|AC| = 6$ ,  $|\angle ASB| = 90^\circ$ ,  $|\angle ABC| = 90^\circ$

## 10.5 Konstrukce úseček

### Konstrukce úseček pomocí Pythagorovy věty

**25** Je dána jednotková úsečka. Užitím Pythagorovy věty narýsujte postupně úsečky délky  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{7}$  atd.

**26** Je dána jednotková úsečka. Užitím Pythagorovy věty narýsujte úsečku délky:

- a)  $\sqrt{5}$       b)  $\sqrt{13}$       c)  $\sqrt{24}$       d)  $\sqrt{12}$

### Konstrukce úseček pomocí Euklidových vět

**27** Je dána jednotková úsečka. Užitím Euklidových vět narýsujte úsečku délky:

- a)  $\sqrt{6}$       b)  $\sqrt{12}$       c)  $\sqrt{17}$       d)  $\sqrt{18}$

### Konstrukce úseček užitím podobnosti

**28** Úsečku  $AB$  rozdělte bodem  $X$  na dvě části tak, aby platilo:

- a)  $|AX| : |BX| = 2 : 3$       b)  $|AB| : |AX| = 3 : 2$

**29** Jsou dány dva body  $A$ ,  $B$ . Na přímce  $AB$  vyznačte všechny body  $X$  tak, aby platilo  $|AB| : |AX| = 2 : 3$ .

**30** Narýsujte trojúhelník  $ABC$  ( $a = 2\text{ cm}$ ,  $b = 3\text{ cm}$ ,  $c = 4\text{ cm}$ ). Narýsujte trojúhelník  $A_1B_1C_1$ , který je s  $\triangle ABC$  podobný a jehož obvod je 15 cm.

## Konstrukce výrazů

**31** Jsou dány úsečky  $a$ ,  $b$  ( $a > b$ ). Sestrojte úsečku  $x$ , pro kterou platí:

- a)  $x = \sqrt{a^2 + b^2}$       c)  $x = a \cdot \sqrt{2}$       e)  $x = \sqrt{ab}$       g)  $x = \frac{a^2}{b}$   
b)  $x = \sqrt{a^2 - b^2}$       d)  $x = a \cdot \sqrt{3}$       f)  $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$       h)  $x = \frac{ab}{a+b}$

**32** Je dána jednotková úsečka a úsečky  $c$ ,  $d$  ( $c > d$ ). Sestrojte úsečku  $y$ , pro kterou platí:

- a)  $y = c \cdot d$       b)  $y = \frac{c}{d}$       c)  $y = c^2$       d)  $y = \frac{2c}{c+d}$

## 10.6 Shodná zobrazení

### Základní úlohy

**33** Jsou dány dvě různoběžky  $p$ ,  $q$  a bod  $M$  ( $M \notin p$ ,  $M \notin q$ ). Sestrojte úsečku  $XY$  tak, aby platilo:  $X \in p$ ,  $Y \in q$  a bod  $M$  je střed úsečky  $XY$ .

**34** Jsou dány dvě různoběžky  $p$ ,  $q$  a kružnice  $k$ . Sestrojte úsečku  $XY$  tak, aby platilo  $X \in k$ ,  $Y \in p$ , úsečka  $XY$  je kolmá na přímku  $q$  a střed úsečky  $XY$  leží na přímce  $q$ . Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímek tak, aby úloha měla 2, resp. 1, resp. 0 řešení.

**35** Jsou dány dvě různoběžky  $p$ ,  $q$  a bod  $M$  ( $M \notin p$ ,  $M \notin q$ ). Sestrojte úsečku  $XY$  tak, aby platilo  $X \in p$ ,  $Y \in q$ ,  $|\angle XMY| = 60^\circ$ ,  $|MX| = |MY|$ . Zvolte postupně vzájemnou polohu přímek  $p$ ,  $q$  tak, aby úloha měla 2, resp. 1 řešení. Při jaké vzájemné poloze  $p$ ,  $q$ ,  $M$  má úloha nekonečně mnoho řešení?

**36** Je dána kružnice  $k$  a přímka  $p$  ( $k \cap p = \emptyset$ ). Dále je dána úsečka  $AB$ . Sestrojte úsečku  $XY$  tak, aby platilo  $X \in k$ ,  $Y \in p$ , úsečka  $XY$  je rovnoběžná s úsečkou  $AB$  a je stejně dlouhá jako úsečka  $AB$ . Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímky tak, aby úloha měla 4, resp. 3, resp. 2, resp. 1, resp. 0 řešení.

### Další úlohy

**37** Je dána úsečka  $OP$ ,  $|OP| = 4\text{ cm}$ . Sestrojte kružnici  $k(O; 2,5\text{ cm})$  a přímku  $p$ ,  $p \perp OP \wedge P \in p$ . Dále sestrojte jeden bod  $M$ , pro který platí  $|OM| = 3\text{ cm}$  a  $|\angle POM| = 30^\circ$ .

Sestrojte všechny čtverce  $ABCD$  tak, aby platilo  $A \in k \wedge C \in p \wedge M = S$ , kde  $S$  je střed čtverce  $ABCD$ .

**38** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $M$ . Vzájemnou polohu  $p$ ,  $k$ ,  $M$  volte stejně, jako v úloze 37.

Sestrojte všechny čtverce  $ABCD$  tak, aby platilo  $B \in k \wedge D \in p \wedge A = M$ .

**39** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $M$ . Vzájemnou polohu  $p$ ,  $k$ ,  $M$  volte stejně jako v úloze 37.

Sestrojte všechny čtverce  $ABCD$  tak, aby platilo  $A \in k \wedge C \in p \wedge BD \subset \leftrightarrow PM$ .

- 40** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $M$ . Vzájemnou polohu  $p, k, M$  volte stejně jako v úloze 37.  
Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky  $ABC$  tak, aby platilo  $C \in k \wedge A \in p \wedge B \in p \wedge A = M$ .

**41** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $M$ . Vzájemnou polohu  $p, k, M$  volte stejně jako v úloze 37.  
Sestrojte všechny rovnoběžníky  $MOKL$  tak, aby platilo  $K \in k \wedge L \in p$ .

**42** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a body  $P, M$ . Vzájemnou polohu  $p, k, P, M$  volte stejně jako v úloze 37.  
Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky  $ABC$  se základnou  $AB$  tak, aby platilo  $B \in k \wedge A \in p \wedge v_c \subset \leftrightarrow PM \wedge C = M$ .

**43** Je dán čtverec  $KLMN$ ,  $|KL| = 6\text{ cm}$ . Vně čtverce sestrojte bod  $A$  tak, aby platilo  $|AM| = 3\text{ cm}$ ,  $|AL| = 4\text{ cm}$ .  
Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky  $ABC$  tak, aby vrcholy  $B, C$  ležely na obvodu čtverce  $KLMN$ .

**44** Kružnice  $k_1(O_1; 5\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 3\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 4\text{ cm}$  se protínají ve dvou bodech. Označte  $C$  jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky  $ABC$  se základnou  $AB$  tak, aby platilo  $A \in k_1 \wedge B \in k_2 \wedge |\measuredangle ACB| = 120^\circ$ .

**45** Kružnice  $k_1(O_1; 4\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 2,5\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 3\text{ cm}$  se protínají ve dvou bodech. Označte  $T$  jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky  $ABC$  tak, aby platilo  $A \in k_1$ ,  $B \in k_2$  a bod  $T$  byl těžištěm trojúhelníku  $ABC$ .

**46** Je dána kružnice  $k(O; 4\text{ cm})$  a bod  $A$ . Sestrojte všechny tětivy  $XY$  kružnice  $k$ , které mají délku  $6\text{ cm}$  a pro které platí, že přímka  $XY$  prochází daným bodem  $A$ .
 
  - $|OA| = 3\text{ cm}$
  - $|OA| = 5,5\text{ cm}$

**47** Je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$  ( $a = 6\text{ cm}$ ) a kružnice  $k(O; 2,5\text{ cm})$ . Střed  $O$  zvolte tak, aby platilo  $|CO| = |BO| = 5\text{ cm}$ ,  $k \cap \triangle ABC = \emptyset$ . Sestrojte všechny přímky  $p$  rovnoběžné se stranou  $AB$  tak, aby tětiva, kterou kružnice  $k$  vytíná na přímce  $p$ , byla stejná jako úsečka  $XY$ , kterou přímka  $p$  vytíná na trojúhelníku  $ABC$ , tj.  $X \in p \cap AC$ ,  $Y \in p \cap BC$ .

## **Užití středové a osové souměrnosti ke konstrukci trojúhelníků**

- 48** Je dána úsečka  $CS_1$ ,  $|CS_1| = 3$  cm. Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$  pro které je úsečka  $CS_1$  těžnicí  $t_c$  a pro které dále platí:

  - a)  $a = 3,5$  cm,  $b = 5$  cm
  - c)  $b = 8$  cm,  $\beta = 30^\circ$
  - b)  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$
  - d)  $\alpha = 30^\circ$ ,  $t_b = 7,5$  cm

**49** Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$  (délky uvedeny v cm), znáte-li:

  - a)  $a + b = 10$ ,  $c = 5$ ,  $v_a = 3$
  - c)  $a + b + c = 12$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 75^\circ$
  - b)  $b + c = 10$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$
  - d)  $a + b + c = 12$ ,  $v_c = 3$ ,  $\gamma = 60^\circ$

## **10.7 Skládání osových souměrností**

- 50** Zvolte soustavu souřadnic  $Oxy$ . V dané soustavě souřadnic narýsujte trojúhelník  $ABC$ ,  $A[0; 0]$ ,  $B[3; -2]$ ,  $C[0; -2]$ . V jednotlivých případech narýsujte trojúhelník  $A_1B_1C_1$ , který je obrazem trojúhelníku  $ABC$  v osové souměrnosti dané osou  $o_1$ , potom narýsujte trojúhelník  $A_2B_2C_2$ , který je obrazem trojúhelníku  $A_1B_1C_1$  v osové souměrnosti dané osou  $o_2$ . Najděte shodné zobrazení, které zobrazuje trojúhelník  $ABC$  na trojúhelník  $A_2B_2C_2$ .

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| a) $o_1: x = 1$ , $o_2: x = 3$ | d) $o_1: x = 1$ , $o_2: y = x$         |
| b) $o_1: x = 3$ , $o_2: x = 1$ | e) $o_1: y = x - 2$ , $o_2: y = 0$     |
| c) $o_1: x = 1$ , $o_2: y = 2$ | f) $o_1: y = x + 1$ , $o_2: y = x + 1$ |

### **10.8 Hledání minimálního součtu úseček (Hledání dráhy kulečníkové koule)**

- 51** Je dán obdélník  $ABCD$ ,  $|AB| = 6\text{ cm}$ ,  $|BC| = 4\text{ cm}$  a uvnitř obdélníku dva body  $K, L$  tak, že platí  $|AK| = 6\text{ cm}$ ,  $|BK| = 3,5\text{ cm}$ ,  $|AL| = 2\text{ cm}$ ,  $|BL| = 4,5\text{ cm}$ .

  - Na úsečce  $AB$  najděte bod  $X$  tak, aby součet vzdáleností  $|KX| + |LX|$  byl minimální.
  - Najděte dva body  $X, Y$  tak, aby platilo  $X \in AB$ ,  $Y \in BC$  a součet vzdáleností  $|LX| + |XY| + |KY|$  byl minimální.
  - Najděte dva body  $X, Y$  tak, aby platilo  $X \in AB$ ,  $Y \in CD$  a součet vzdáleností  $|LX| + |XY| + |KY|$  byl minimální.

**52** Na kulečníkovém stole leží dvě koule, červená a bílá. Červená leží ve středu stolu, bílá v jedné čtvrtině úhlopříčky stolu. (Kouli považujte za bod.)

  - Určete dráhu červené koule tak, aby se po jednom odrazu od některé stěny stolu srazila s bílou koulí.
  - Určete dráhu červené koule tak, aby se po odrazu od dvou sousedních stěn stolu srazila s bílou koulí.
  - Určete dráhu červené koule tak, aby se po odrazu od dvou protilehlých stěn stolu srazila s bílou koulí.

## 10.9 Stejnolehlos

**Obraz útvar**

- 53** Je dán trojúhelník  $ABC$  ( $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ ). Vně trojúhelníku  $ABC$  sestrojte bod  $S$  tak, aby platilo  $|AS| = 3 \text{ cm}$ ,  $|CS| = 4 \text{ cm}$ . Narýsujte obraz trojúhelníku  $ABC$  ve stejnolehlosti se středem  $S$  a koeficientem:

a)  $\varkappa = \frac{3}{2}$       b)  $\varkappa = \frac{1}{3}$       c)  $\varkappa = -\frac{1}{2}$       d)  $\varkappa = -1$

**54** Je dán čtverec  $KLMN$  ( $a = 4 \text{ cm}$ ). Označte  $S$  střed čtverce. Nakreslete obraz čtverce ve stejnolehlosti se středem  $S$  a koeficientem:

a)  $\varkappa = \frac{1}{2}$       b)  $\varkappa = 2$       c)  $\varkappa = -\frac{3}{4}$       d)  $\varkappa = -2$

**55** Sestrojte trojúhelník  $ABC$  ( $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 7 \text{ cm}$ ,  $c = 8 \text{ cm}$ ). Narýsujte těžiště  $T$  trojúhelníku  $ABC$ . Sestrojte obraz trojúhelníku  $ABC$  ve stejnolehlosti se středem  $T$  a koeficientem  $\varkappa = -\frac{1}{2}$ .

**56** Je dána kružnice  $k(S; 4\text{ cm})$  a bod  $M \in k$ . Narýsujte obraz kružnice  $k$  ve stejnolehlosti se středem v bodě  $M$  a koeficientem:

- a)  $\kappa = \frac{3}{4}$       b)  $\kappa = \frac{1}{2}$       c)  $\kappa = \frac{1}{4}$       d)  $\kappa = -\frac{1}{2}$

### Středy stejnolehlosti dvou úseček

**57** Narýsujte středy stejnolehlosti dvou rovnoběžných úseček  $AB, CD$  v případě, že délky úseček  $AB$  a  $CD$

- a) nejsou stejné,      b) jsou stejné.

**58** Narýsujte středy stejnolehlosti dvou úseček  $KL$  a  $MN$ , které leží na téže přímce. Úsečky  $KL$  a  $MN$

- a) nemají žádný společný bod,      b) mají společnou úsečku  $ML$ .

### Středy stejnolehlosti dvou kružnic

**59** Narýsujte středy stejnolehlosti dvou kružnic  $k_1, k_2$ , je-li dáno:

- |   |   |
|---|---|
| a) $k_1(O_1; 3)$ , $k_2(O_2; 1)$ , $ O_1O_2  = 6$   | e) $k_1(O_1; 3)$ , $k_2(O_2; 2)$ , $ O_1O_2  = 0$ |
| b) $k_1(O_1; 3)$ , $k_2(O_2; 2)$ , $ O_1O_2  = 3,5$ | f) $k_1(O_1; 3)$ , $k_2(O_2; 3)$ , $ O_1O_2  = 7$ |
| c) $k_1(O_1; 3)$ , $k_2(O_2; 2)$ , $ O_1O_2  = 1$   | g) $k_1(O_1; 3)$ , $k_2(O_2; 3)$ , $ O_1O_2  = 6$ |
| d) $k_1(O_1; 3)$ , $k_2(O_2; 2)$ , $ O_1O_2  = 0,5$ | h) $k_1(O_1; 3)$ , $k_2(O_2; 3)$ , $ O_1O_2  = 5$ |

**60** Jsou dány dvě kružnice  $k_1(O_1; 4\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 1\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 7\text{ cm}$ .

Narýsujte středy stejnolehlosti  $S_1, S_2$  daných kružnic. Označte  $S_1$  vnější střed stejnolehlosti,  $S_2$  vnitřní střed stejnolehlosti. Potom určete koeficienty stejnolehlosti v následujících případech:

- a) střed stejnolehlosti je  $S_1$  a stejnolehlost zobrazuje  $k_1$  na  $k_2$   
 b) střed stejnolehlosti je  $S_1$  a stejnolehlost zobrazuje  $k_2$  na  $k_1$   
 c) střed stejnolehlosti je  $S_2$  a stejnolehlost zobrazuje  $k_1$  na  $k_2$   
 d) střed stejnolehlosti je  $S_2$  a stejnolehlost zobrazuje  $k_2$  na  $k_1$

### Užití stejnolehlosti dvou kružnic v konstrukčních úlohách

**61** Narýsujte společné tečny daných dvou kružnic.

- a)  $k_1(O_1; 3,5\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 1,5\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 6,5\text{ cm}$   
 b)  $k_1(O_1; 3,5\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 1,5\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 5\text{ cm}$

**62** Jsou dány dvě kružnice  $k_1(O_1; 3,5\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 2,5\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 7\text{ cm}$ . Narýsujte všechny přímky  $p$  tak, aby obě kružnice  $k_1$  i  $k_2$  vytínaly na přímce  $p$  stejně dlouhé tětivy délky 4 cm.

**63** Je dán úhel  $\angle AVB$ ,  $|\angle AVB| = 45^\circ$  a uvnitř úhlu bod  $M$  tak, že vzdálenost  $M$  od  $\overleftrightarrow{VB}$  je 1,5 cm, vzdálenost  $M$  od  $\overleftrightarrow{VA}$  je 3 cm. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají ramen úhlu a procházejí bodem  $M$ .

**64** Je dán úhel  $AVB$ ,  $|\angle AVB| = 45^\circ$ , a bod  $M$ , který leží na ose úhlu  $AVB$  a pro který platí  $|VM| = 5\text{ cm}$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají ramen úhlu a procházejí bodem  $M$ .

**65** Je dána kružnice  $k(O; 2,5\text{ cm})$  a přímka  $p$ ,  $|Op| = 4\text{ cm}$ . Na přímce  $p$  je dán bod  $T$  tak, že  $|OT| = 4,5\text{ cm}$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnice  $k$  a přímky  $p$  v bodě  $T$ .

### Konstrukce úsečky dělené daným bodem v určitém poměru

**66** Je dán úhel  $AVB$ ,  $|\angle AVB| = 30^\circ$ . Uvnitř úhlu sestrojte bod  $M$ , pro který platí, že vzdálenost bodu  $M$  od  $\overleftrightarrow{AV}$  je 1,5 cm, vzdálenost bodu  $M$  od  $\overleftrightarrow{BV}$  je 2 cm. Sestrojte všechny úsečky  $XY$  tak, aby bod  $X \in \overleftrightarrow{AV}$ , bod  $Y \in \overleftrightarrow{VB}$  a bod  $M$  dělil úsečku  $XY$  v poměru 1 : 2.

**67** Je dán čtverec  $ABCD$  ( $|AB| = 5\text{ cm}$ ). Uvnitř čtverce zvolte bod  $M$ , pro který platí:  $|CM| = 4\text{ cm}$ ,  $|BM| = 1,5\text{ cm}$ . Sestrojte všechny úsečky  $XY$  tak, aby body  $X, Y$  ležely na obvodu čtverce a aby dále platilo:

- a)  $|MX| : |MY| = 3 : 2$       b)  $|MX| : |XY| = 1 : 3$

**68** Je dána kružnice  $k(O; 4,5\text{ cm})$  a bod  $M$ ,  $|OM| = 3,6\text{ cm}$ . Sestrojte všechny tětivy  $XY$  kružnice  $k$ , které procházejí bodem  $M$  tak, že bod  $M$  dělí tětivu  $XY$  v poměru 3 : 1.

**69** Je dána kružnice  $k(O; 4,5\text{ cm})$  a bod  $M$ ,  $|OM| = 10\text{ cm}$ . Sestrojte přímku procházející bodem  $M$  tak, aby kružnici  $k$  protínala v bodech  $X, Y$  a aby dále platilo:

- a) bod  $X$  leží mezi body  $M, Y$  a platí  $|MX| : |XY| = 3 : 1$   
 b) bod  $Y$  leží mezi body  $M, X$  a platí  $|MX| : |XY| = 3 : 1$

**70** Je dána kružnice  $k(O; 4\text{ cm})$  a bod  $M$ ,  $|OM| = 9\text{ cm}$ . Sestrojte přímku procházející bodem  $M$  tak, aby kružnici  $k$  protínala v bodech  $X, Y$  a aby dále platilo  $|XY| = |XM|$ .

**71** Kružnice  $k_1(O_1; 4\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 2,5\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 3\text{ cm}$  se protínají ve dvou bodech. Označte  $M$  jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny úsečky  $XY$ , které procházejí bodem  $M$  a pro které dále platí, že  $X \in k_1, Y \in k_2$  a bod  $M$  dělí úsečku  $XY$  v poměru 2 : 1.

### Užití stejnolehlosti při konstrukci trojúhelníků

**72** Sestrojte všechny trojúhelníky  $ABC$ , znáte-li:

- |  |   |
|--|---|
| a) $a : b = 4 : 5$ , $\gamma = 60^\circ$ , $v_c = 3\text{ cm}$         | f) $a : b : c = 4 : 3 : 5$ , $r = 4\text{ cm}$  |
| b) $b : c = 7 : 6$ , $\alpha = 45^\circ$ , $v_c = 3\text{ cm}$         | g) $a : b : c = 5 : 6 : 5$ , $\varrho = 2\text{ cm}$  |
| c) $\alpha = 75^\circ$ , $\gamma = 45^\circ$ , $\varrho = 2\text{ cm}$ | h) $\alpha = 45^\circ$ , $v_b = 4\text{ cm}$ ,<br>$ AB_1  :  B_1C  = 3 : 4$ ,<br>$e) a : b : c = 7 : 3 : 5$ , $v_c = 4\text{ cm}$ kde $B_1$ je pata výšky z $B$ na $AC$ . |

### Užití stejnolehlosti k vepisování útváru

**73** Do trojúhelníku  $ABC$  ( $a = 5\text{ cm}$ ,  $b = 6\text{ cm}$ ,  $c = 7\text{ cm}$ ) vepište čtverec  $KLMN$  tak, aby platilo  $KL \subset AB \wedge M \in BC \wedge N \in AC$ .

**74** V kružnici  $k(S; 4\text{ cm})$  vyznačte kruhovou úseč o výšce 2,5 cm. Krajní body základny úseče označte  $A, B$ . Potom do kruhové úseče vepište čtverec  $KLMN$  tak, aby platilo  $KL \subset AB \wedge M \in k \wedge N \in k$ .

**75** V kružnici  $k(S; 8\text{ cm})$  vyznačte dva poloměry  $SA, SB$ , které svírají úhel  $\alpha = 45^\circ$ . Potom do kruhové výseče  $ASB$ , kterou takto dostanete, vepište obdélník  $KLMN$  tak, aby platilo:

$$K \in BS \wedge L \in AS \wedge M \in k \wedge N \in k \wedge LM = 2|KL|$$

## Konstrukce na omezené nákresně

- 76** Jsou dány dvě přímky  $a, b$ , jejichž průsečík  $P$  leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Dále je dán bod  $M$ . Narýsujte přímku  $PM$ , tj. spojte bod  $M$  s nedostupným průsečíkem  $P$  přímek  $a, b$ .
- 77** Je dán úhel  $AVB$ . Vrchol  $V$  leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Narýsujte osu úhlu  $AVB$ .
- 78** Je dán trojúhelník  $ABC$ . Vrchol  $C$  leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Narýsujte kolmici bodem  $C$  na stranu  $AB$ .

## 10.10 Skládání rotace a stejnolehlosti

- 79** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $M$ . Vzájemnou polohu  $p, k, M$  zvolte jako v úloze 37. Sestrojte všechny obdélníky  $ABCD$  tak, aby platilo:  
 $A = M \wedge B \in p \wedge D \in k \wedge |AB| : |BC| = 2 : 1$
- 80** Je dána přímka  $p$ , kružnice  $k$  a bod  $M$ . Vzájemnou polohu  $p, k, M$  zvolte jako v úloze 37. Sestrojte všechny čtverce  $ABCD$  tak, aby platilo:  $A \in p \wedge D \in k \wedge C = M$

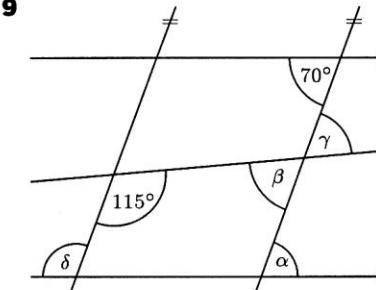
## 11 Geometrie – výpočty

### 11.1 Trojúhelníková nerovnost

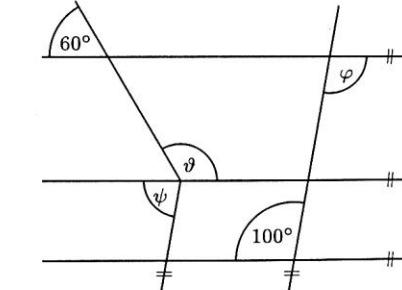
- 1** V trojúhelníku  $ABC$  jsou dány strany  $a = 6\text{ cm}$ ,  $b = 8\text{ cm}$ . Určete, pro které hodnoty strany  $c \in \mathbb{R}^+$  existuje trojúhelník  $ABC$ .
- 2** Víte, že v rovnoramenném trojúhelníku má rameno délku  $10\text{ cm}$ . Jakou délku může mít jeho základna?
- 3** V trojúhelníku  $ABC$  znáte těžnice  $t_a = 9\text{ cm}$ ,  $t_b = 6\text{ cm}$ . Jakých hodnot může nabývat délka strany  $a$ ?
- 4** Dokažte, že v každém ostroúhlém trojúhelníku je každá z výšek menší než poloviční obvod trojúhelníku.
- 5** Dokažte, že v každém trojúhelníku  $ABC$  platí  $t_c < \frac{1}{2}(a + b)$ .
- 6** Dokažte, že v každém trojúhelníku  $ABC$  platí  $\frac{3}{4}o < t_a + t_b + t_c < o$ , kde  $o$  je obvod trojúhelníku  $ABC$ .
- 7** Je možné sestrojit trojúhelník, jehož těžnice mají délky  $2\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$  a  $5\text{ cm}$ ?
- 8** Je možné sestrojit trojúhelník, jehož výšky jsou  $2\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$  a  $5\text{ cm}$ ?

### 11.2 Úhly střídavé, souhlasné, vedlejší, vrcholové

**9**



a) Dopočítejte úhly  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .



b) Dopočítejte úhly  $\varphi, \psi, \vartheta$ .

### 11.3 Úhly v trojúhelníku

- 10** Dokažte, že součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je  $180^\circ$ .
- 11** Je dán trojúhelník  $ABC$ . Vrcholem  $C$  veďte rovnoběžku s osou úhlu  $\beta$ , její průsečík s přímkou  $AB$  označte  $M$ . Dokažte, že trojúhelník  $MBC$  je rovnoramenný.
- 12** Vypočítejte úhly, které svírají výšky v rovnostranném trojúhelníku.
- 13** Průsečík os úhlů  $\alpha, \beta$  v trojúhelníku  $ABC$  označte  $O$ . Dokažte, že  $|\angle AOB| = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$ .
- 14** V rovnostranném trojúhelníku  $ABC$  sestrojte body  $K, L, M$  tak, aby plnilo  $K \in AB, L \in BC, M \in AC, |AK| = |BL| = |CM|$ . Dokažte, že i trojúhelník  $KLM$  je rovnostranný.

- 15** V dané kružnici  $k$  sestrojte dva libovolné průměry  $AB, CD$ . Označte  $\alpha$  úhel, který svírají přímky  $AB, CD$ . Dokažte, že tečny ke kružnici  $k$  v krajních bodech daných průměrů svírají také úhel  $\alpha$ .
- 16** Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  s pravým úhlem u vrcholu  $C$  je osa pravého úhlu zároveň i osou mezi  $v_c, t_c$ .

#### 11.4 Shodnost trojúhelníků

- 17** Nad stranami  $AB, AC$  trojúhelníku  $ABC$  jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky  $ABH$  a  $ACK$  tak, že  $\Delta ABH \cap \Delta ABC = AB$ ,  $\Delta ACK \cap \Delta ABC = AC$ . Dokažte, že  $|CH| = |BK|$ .
- 18** Nad stranami  $AB, BC$  trojúhelníku  $ABC$  jsou sestrojeny čtverce  $ABPQ$  a  $BCRT$  tak, že s daným trojúhelníkem mají společné jen úsečky  $AB$  a  $BC$ . Dokažte, že  $|CP| = |AT|$ .
- 19** Vně rovnoběžníku  $ABCD$  sestrojte čtverce  $ABMN$  a  $BCRS$ . Dokažte:
- $\Delta MBS \cong \Delta DCB$
  - $\Delta DAN \cong \Delta SBA$
- 20** Narýsujte konvexní úhel  $\angle AVB$  a jeho osu označte  $o$ . Zvolte libovolný bod  $M$  na ose  $o$ . Sestrojte kolmici  $k_1$  bodem  $M$  na  $\rightarrow VA$ , označte body  $X_1, X_2$  tak, aby  $X_1 \in \rightarrow VA \cap k_1, X_2 \in \rightarrow VB \cap k_1$ . Sestrojte kolmici  $k_2$  bodem  $M$  na  $\rightarrow VB$ , označte body  $Y_1, Y_2$  tak, aby  $Y_1 \in \rightarrow VA \cap k_2, Y_2 \in \rightarrow VB \cap k_2$ . Dokažte:
- $\Delta MX_1V \cong \Delta MY_2V$
  - $\Delta MX_1Y_1 \cong \Delta MY_2X_2$

#### 11.5 Podobnost trojúhelníků

- 21** V lichoběžníku  $ABCD$  označte  $S$  průsečík úhlopříček  $AC$  a  $BD$ . Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé:
- $\Delta ABS \sim \Delta CDS$
  - $\Delta ABS \sim \Delta DCS$
  - $\Delta SAB \sim \Delta SCD$
- 22** V trojúhelníku  $ABC$  narýsujte všechny tři střední příčky.  $\Delta ABC$  je tak rozdělen na čtyři trojúhelníky, které jsou podobné s  $\Delta ABC$ . Dokažte a po-dobnost zapište.
- 23** V ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  veďte kolmici z bodu  $B$  na stranu  $AC$ , její patu označte  $B_1$ . Patu kolmice z bodu  $A$  na stranu  $BC$  označte  $A_1$ . Dokažte, že  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ .
- 24** Do rovnostranného trojúhelníku  $ABC$  o straně délky  $a$  je vepsán čtverec. Vypočítejte délku strany čtverce.
- 25** Do rovnostranného trojúhelníku  $ABC$  o straně délky  $a$  je vepsán obdélník, jehož strany jsou v poměru  $2 : 1$ . Vypočítejte jeho rozměry.
- 26** Dané kružnici vepište a opište pravidelný šestiúhelník. Dokažte, že oba šestiúhelníky jsou podobné a vypočítejte poměr podobnosti.
- 27** Jsou dány kružnice  $k_1(O_1; 4\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2; 2\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 9\text{ cm}$ . Vypočítejte vzdálenost středů stejnolehlosti daných kružnic  $k_1, k_2$ .
- 28** V pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  s odvěsnami  $|AC| = b$ ,  $|BC| = a$  označte  $C_1$  patu kolmice sestrojené z vrcholu  $C$  na přeponu  $AB$ . Z bodu  $C_1$  sestrojte kolmici na stranu  $BC$ , její patu označte  $L$ , patu kolmice z bodu  $C_1$  na stranu  $AC$  označte  $K$ . Dokažte, že platí  $|BL| : |AK| = a^3 : b^3$ .

- 29** V jakém poměru jsou obsahy dvou podobných trojúhelníků?
- 30** Je dán trojúhelník  $ABC$  ( $a = 6\text{ cm}$ ,  $b = 4\text{ cm}$ ,  $c = 8\text{ cm}$ ). Na straně  $AB$  najděte bod  $M$  tak, aby obsah  $\Delta ABC$  byl dvakrát větší než obsah  $\Delta MBN$ , kde bod  $N \in BC$  a  $MN \parallel AC$ . Vypočítejte délku úsečky  $AM$ .
- 31** V rovnoramenném trojúhelníku  $ABC$  sestrojte rovnoběžku  $p$  se základnou  $AB$  tak, aby rozdělila trojúhelník na dvě části o stejném obsahu.
- Vyjádřete vzdálenost rovnoběžky  $p$  od přímky  $AB$  pomocí výšky na základnu  $AB$ .
  - V jakém poměru dělí přímka  $p$  výšku  $\Delta ABC$  na základnu?
- 32** Je dán obdélník  $ABCD$ . Označte  $S$  střed strany  $AB$ . Z bodu  $B$  sestrojte kolmici na úsečku  $SC$ , její patu označte  $B_1$ . Vypočítejte poměr délek úseček  $|SB_1|, |B_1C|$ , tj.  $|SB_1| : |B_1C|$ .
- Úlohu řešte pro hodnoty  $|AB| = a = 6\text{ cm}$ ,  $|BC| = b = 4\text{ cm}$ .
  - Úlohu řešte obecně, tj.  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ .
  - Určete podmínu pro délky stran obdélníku  $ABCD$  tak, aby bod  $B_1$  byl středem úsečky  $SC$ .
- #### 11.6 Pythagorova věta a Euklidovy věty
- 33** Rozhodněte, zda jsou pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran jsou:
- $5, 3, 4$
  - $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{4}$
  - $5, 1, 4$
- 34** Dokažte, že jsou pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran lze zapsat:
- $4n^2 - 1, 4n^2 + 1, 4n$ , kde  $n \in (\frac{1}{2}; \infty)$
  - $2, k - k^{-1}, k + k^{-1}$ , kde  $k \in (1; \infty)$
  - $r^2 - s^2, 2rs, r^2 + s^2$ , kde  $r, s \in \mathbb{R}^+, r > s$
- 35** Napište všechny možnosti kosinové věty pro pravoúhlý trojúhelník.
- 36** Odvoďte vzorec pro výpočet výšky v rovnostranném trojúhelníku, znáte-li délku jeho strany  $a$ .
- 37** V pravoúhlém trojúhelníku známe odvěsnu  $b = 10\text{ cm}$  a výšku na přeponu  $v_c = 8\text{ cm}$ . Vypočítejte délku odvěsny  $a$  a délku přepony  $c$ .
- 38** Ve čtverci  $ABCD$  označte  $S$  střed strany  $AB$ . Potom zvolte  $L \in BD$  tak, aby platilo  $|BL| : |DL| = 3 : 1$ . Dokažte, že  $|\angle SLC| = 90^\circ$ .
- 39** Je dána kružnice  $k(S; r)$ . Kružnici  $k$  opíšeme a vepíšeme čtverec. Určete poměr délek stran a poměr obsahů těchto dvou čtverců.
- 40** V pravidelném šestiúhelníku  $ABCDEF$  ( $|AB| = 1\text{ cm}$ ) je bod  $K$  průsečíkem přímek  $AB$  a  $CD$ . Dokažte, že  $|EK| = \sqrt{7}\text{ cm}$ .
- 41** Je dán obdélník  $ABCD$  ( $|AB| = 8\text{ cm}$ ,  $|BC| = 6\text{ cm}$ ). Označte  $A_1$  patu kolmice sestrojené z bodu  $A$  na úsečku  $BD$ , označte  $A_2$  patu kolmice sestrojené z bodu  $A_1$  na úsečku  $AB$ . Vypočítejte délky úseček:
- $|BD|$
  - $|DA_1|$
  - $|BA_1|$
  - $|AA_1|$
  - $|A_1A_2|$
- 42** Je dána kružnice  $k(S, 3\text{ cm})$ . Zvolte bod  $M$  tak, aby platilo  $|SM| = 9\text{ cm}$ . Z bodu  $M$  sestrojte tečny ke kružnici  $k$ . Označte body dotyku  $T_1, T_2$ . Vypočítejte délky úseček:
- $|MT_1|$
  - $|T_1T_2|$
  - vzdálenost středu  $S$  od úsečky  $T_1T_2$

- 43** Sestrojte společné tečny dvou daných kružnic  $k_1(O_1; r_1)$ ,  $k_2(O_2; r_2)$ . Vypočítejte délky úseček  $T_1T_2$ ,  $T_3T_4$ , kde  $T_1, T_2$  jsou body dotyku jedné vnější tečny s kružnicemi  $k_1, k_2$ ,  $T_3, T_4$  jsou body dotyku jedné vnitřní tečny s kružnicemi  $k_1, k_2$ . Úlohu řešte pro hodnoty:  
 a)  $r_1 = 4\text{ cm}$ ,  $r_2 = 2\text{ cm}$ ,  $|O_1O_2| = 2,5\text{ cm}$   
 b)  $r_1 = 4\text{ cm}$ ,  $r_2 = 2\text{ cm}$ ,  $|O_1O_2| = 8\text{ cm}$

- 44** V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou  $c$  je dána odvěsna  $a = 4\text{ cm}$  a těžnice  $t_a = 6\text{ cm}$ . Vypočítejte těžnici  $t_b$ .

- 45** Je dán obdélník  $ABCD$ , ve kterém platí  $|AB| : |BC| = 5 : 2$ . Na straně  $CD$  najděte bod  $X$  tak, aby  $\measuredangle AXB = 90^\circ$ . Vypočítejte, v jakém poměru dělí bod  $X$  stranu  $CD$ .

- 46** Jsou dány dvě kružnice  $k_1(O_1, 4\text{ cm})$ ,  $k_2(O_2, 6\text{ cm})$ ,  $|O_1O_2| = 5\text{ cm}$ . Označte  $P_1, P_2$  průsečíky daných dvou kružnic. Vypočítejte délku úsečky  $P_1P_2$ .

- 47** Uvnitř obdélníku  $ABCD$  zvolte libovolný bod  $M$ . Dokažte, že platí

- a)  $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$ ,  
 b)  $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = |AC|^2 + 4 \cdot |MS|^2$ , kde  $S$  je střed daného obdélníku.

## 11.7 Středový a obvodový úhel

- 48** Na ciferníku hodinek vyznačte trojúhelník, který spojuje body odpovídající číslům 11, 8, 4. Vypočítejte jeho vnitřní úhly.

- 49** Na ciferníku hodinek vyznačte trojúhelník, který spojuje body odpovídající číslům 1, 8, 3. Dokažte, že je rovnoramenný, vypočítejte velikosti vnitřních úhlů.

- 50** Na ciferníku hodinek vyznačte dvě úsečky, které vzniknou spojením bodů odpovídajících číslům 1, 5 a 8, 4. Dokažte, že tyto úsečky jsou navzájem kolmé.

- 51** Vypočítejte velikost úhlu, který svírají dvě úsečky, které vzniknou spojením bodů odpovídajících číslům 7, 2 a 1, 4 na ciferníku hodinek.

- 52** Je dán pravidelný devítíúhelník  $ABCDEFGHI$ . Vypočítejte

- a) velikosti úhlů v trojúhelníku  $ACD$ ,  
 b) odchylku přímek  $BF, CI$ .

- 53** V pravidelném osmiúhelníku  $ABCDEFGH$  vyznačte čtyřúhelník  $BDEH$ . Vypočítejte velikosti jeho vnitřních úhlů.

- 54** Do kružnice  $k(S; r)$  je vepsán trojúhelník  $ABC$ , jehož vrcholy dělí danou kružnici  $k$  na tři kružnicové oblouky, jejichž délky jsou v poměru  $2 : 3 : 7$ . Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku  $ABC$ .

## 11.8 Mocnost bodu ke kružnici

- 55** V dané kružnici sestrojte dvě libovolné různoběžné tětivy  $AB, CD$ . Krajní body označte tak, aby  $ABDC$  byl čtyřúhelník. Průsečík úseček  $AD$  a  $BC$  označte  $P$ . Dokažte, že potom platí:

- a)  $\triangle APB \sim \triangle CPD$   
 b)  $|PA| \cdot |PD| = |PC| \cdot |PB|$

- 56** V dané kružnici sestrojte dvě libovolné různoběžné tětivy  $AB, CD$ . Krajní body označte tak, aby  $ABDC$  byl čtyřúhelník. Průsečík přímek  $AB$  a  $CD$  označte  $M$ . Dokažte, že potom platí:

- a)  $\triangle MAD \sim \triangle MCB$   
 b)  $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$

- 57** Z bodu  $M$  sestrojte ke kružnici  $k$  tečnu, bod dotyku označte  $T$ . Dále bodem  $M$  sestrojte přímku tak, aby kružnici  $k$  protínala ve dvou bodech  $A, B$ . (Označení zvolte tak, aby bod  $B$  ležel mezi body  $A, M$ .) Dokažte, že potom platí:

- a)  $|\triangle MTB| = |\triangle MAT|$  b)  $\triangle MAT \sim \triangle MTB$  c)  $|MA| \cdot |MB| = |MT|^2$

## 11.9 Aritmetický a geometrický průměr

- 58** Jsou dána dvě čísla  $a = 8$  a  $b = 2$ . Vypočítejte jejich aritmetický a geometrický průměr.

- 59** V pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  s pravým úhlem u vrcholu  $C$  sestrojte výšku z vrcholu  $C$  na přeponu, jejíž patu označte  $C_1$ .  $S$  je střed  $AB$ . Označte  $|AC_1| = c_b$ ,  $|BC_1| = c_a$ . Dokažte, že

- a) úsečka  $SC$  je aritmetickým průměrem úseček  $c_a$  a  $c_b$ ,  
 b) úsečka  $CC_1$  je geometrickým průměrem úseček  $c_a$  a  $c_b$ .

- 60** Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $M$ ,  $|MS| > r$ . Průsečíky přímky  $MS$  s kružnicí  $k$  označte  $A, B$  ( $|MA| = a > |MB| = b$ ). Bod  $T$  je bod dotyku tečny vedené z bodu  $M$  ke kružnici  $k$ . Dokažte, že

- a) úsečka  $MS$  je aritmetickým průměrem úseček  $a, b$ ,  
 b) úsečka  $MT$  je geometrickým průměrem úseček  $a, b$ .

## 12 Stereometrie

Použité značení:  $S_{XY}$  značí střed úsečky  $XY$ .

### Polohové úlohy

#### 12.1 Vzájemná poloha dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, tří rovin

1 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

- a)  $AS_{GH}, DS_{AB}$
- c)  $AS_{CH}, S_{AE}S_{GH}$
- b)  $BS_{CG}, AS_{CH}$
- d)  $EC, AS_{GH}$

2 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny:

- a)  $EC, ABH$
- c)  $BG, ABH$
- b)  $FH, BDH$
- d)  $AG, BHS_{AB}$

3 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Rozhodněte o vzájemné poloze daných dvou rovin:

- a)  $BFS_{AC}, HFS_{EH}$
- c)  $EFG, BCS_{AE}$
- b)  $AFH, BDG$
- d)  $ABS_{DH}, S_{AB}S_{CG}S_{CH}$

4 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin:

- a)  $ECG, BDF, ABH$
- c)  $ADE, BCS_{EF}, S_{AF}S_{CG}S_{BF}$
- b)  $BCE, ADF, S_{AE}S_{CG}S_{AF}$
- d)  $AGH, S_{BF}S_{CG}S_{GH}, S_{AE}S_{AB}S_{CD}$

5 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ . Vyšetřete vzájemnou polohu:

- a) dvou přímek  $AS_{DV}, BS_{CV}$
- b) přímky  $S_{AB}S_{BC}$  a roviny  $CVS_{AD}$
- c) dvou rovin  $BVS_{AD}, DS_{BC}S_{CV}$
- d) tří rovin  $ACV, BDV, S_{AV}S_{BV}S_{CV}$

### 12.2 Řezy

6 Sestrojte řez krychle  $ABCDEFGH$  rovinou:

- a)  $AC S_{GH}$
- f)  $IJK$   
 $I \in BF \wedge |FI| = 3|BI|$   
 $J \in CG \wedge |CJ| = 3|GJ|$   
 $K \in AD \wedge |AK| = 2|DK|$
- b)  $S_{FG}S_{GH}S_{AD}$
- c)  $S_{AD}S_{AB}S_{CG}$
- d)  $KLM$   
 $K \in AB \wedge |BK| = 3|AK|$   
 $L = S_{GH}$   
 $M \in EH \wedge |HM| = 3|EM|$
- e)  $RST$   
 $R \in BF \wedge |BR| = 3|FR|$   
 $S = S_{AD}$   
 $T \in CG \wedge |GT| = 3|CT|$
- i)  $UVW$   
 $U \in \leftrightarrow AE \wedge S_{UE} = A$   
 $V \in EF \wedge |EV| = 3|FV|$   
 $W \in \leftrightarrow BC, |BW| = \frac{4}{3}|BC|$

7 Sestrojte řez krychle  $ABCDEFGH$  rovinou:

- a)  $S_{AB}S_{FG}S_{DH}$
- c)  $S_{AE}S_{BC}S_{GH}$
- b)  $S_{AE}S_{CD}S_{FG}$
- d)  $S_{AD}S_{BF}S_{GH}$

8 Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  rovinou:

- a)  $KLM$   
 $K \in AB \wedge |BK| = 3|AK|$   
 $L \in CD \wedge |DL| = 3|CL|$   
 $M \in DV \wedge |DM| = 2|MV|$
- b)  $OPQ$   
 $O \in AB \wedge |AO| = 2|BO|$   
 $P \in CV \wedge |VP| = 3|CP|$   
 $Q \in DV \wedge |DQ| = 3|QV|$
- c)  $RST$   
 $R \in AB \wedge |AR| = 2|BR|$   
 $S \in CV \wedge |VS| = 3|CS|$   
 $T = S_{AV}$
- d)  $XYZ$   
 $X = S_{AD}$   
 $Y \in CD \wedge |DY| = 3|CY|$   
 $Z \in BV \wedge |BZ| = 3|VZ|$
- e)  $EFG$   
 $E \in BC \wedge |BE| = 2|CE|$   
 $F \in AV \wedge |AF| = 2|VF|$   
 $G \in DV \wedge |DG| = 2|VG|$
- f)  $IJK$   
 $I \in \leftrightarrow DC \wedge |DI| = 1,5|CD|$   
 $J \in \leftrightarrow DA \wedge |DJ| = 1,5|AD|$   
 $K = S_{DV}$
- g)  $LMN$   
 $L \in AV \wedge A = S_{LV}$   
 $M \in \leftrightarrow VB \wedge |VM| = 1,25|BV|$   
 $N = S_{AD}$
- h)  $UMW$   
 $U = B$   
 $M \in CV \wedge |VM| = 3|CM|$   
 $W \in AV \wedge |AW| = 2|VW|$

#### 12.3 Průnik dvou rovin

9 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Sestrojte průsečníci rovin:

- a)  $ACE, AFH$
- d)  $ABC, FHS_{AE}$
- g)  $AFH, BDG$
- b)  $EGS_{BC}, BHF$
- e)  $ABC, AFH$
- h)  $ACH, S_{AB}S_{BC}S_{EF}$
- c)  $ABG, HFS_{AD}$
- f)  $ACF, CGS_{AB}$
- i)  $ASEFS_{EH}, CS_{CD}S_{FG}$

10 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ . Sestrojte průsečníci rovin:

- a)  $ACV, BDS_{CV}$
- d)  $BDV, S_{BC}S_{CV}K; K \in AD \wedge |DK| = 3|AK|$
- b)  $BCV, ADV$
- e)  $ABC, S_{CV}S_{AV}K; K \in BV \wedge |VK| = 3|BK|$
- c)  $ACS_{CV}, VS_{AD}S_{BC}$
- f)  $BCV, S_{AV}CK; K \in AB \wedge |AK| = 3|BK|$

#### 12.4 Průnik přímky s rovinou

11 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Sestrojte průsečík

- a) přímky  $S_{AC}S_{EG}$  s rovinou  $BCE$ ,
- b) přímky  $FD$  s rovinou  $S_{GH}S_{CG}M$ ;  $M \in EF \wedge |FM| = 3|EM|$ ,
- c) přímky  $EC$  s rovinou  $AS_{BF}M$ ;  $M \in EH \wedge |EM| = 3|MH|$ ,
- d) přímky  $S_{AE}G$  s rovinou  $AS_{CG}S_{GH}$ .

12 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ . Sestrojte průsečík

- a) přímky  $CS_{AV}$  s rovinou  $KLV$ ;  
 $K \in AB \wedge |BK| = 3|AK|$ ,  $L \in CD \wedge |DL| = 3|CL|$ ,
- b) přímky  $VS_{AC}$  s rovinou  $S_{AB}S_{CV}D$ ,
- c) přímky  $VS_{AC}$  s rovinou  $AS_{BC}S_{CV}$ ,



## Metrické úlohy — výpočty odchylek

### 12.12 Odchylka dvou přímek

29 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Vypočítejte odchylku přímek:

- |             |                           |             |
|-------------|---------------------------|-------------|
| a) $AC, CH$ | d) $AF, CH$               | g) $AF, BH$ |
| b) $AC, EC$ | e) $AE, BH$               | h) $DE, BH$ |
| c) $AG, BH$ | f) $S_{EG}, S_{AB}S_{BC}$ | i) $AC, BH$ |

30 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Určete konstrukčně odchylku daných přímek. Velikost odchylky změřte úhloměrem.

- |             |                  |                  |
|-------------|------------------|------------------|
| a) $BH, DF$ | b) $AS_{BC}, CH$ | c) $DH, BS_{GH}$ |
|-------------|------------------|------------------|

31 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Vypočítejte odchylku přímek:

- |                  |             |                       |
|------------------|-------------|-----------------------|
| a) $AV, DV$      | d) $BC, AV$ | g) $AC, VS_{BC}$      |
| b) $AV, CV$      | e) $BD, AV$ | h) $AS_{CV}, CS_{AV}$ |
| c) $AB, VS_{AB}$ | f) $AC, BV$ | i) $AS_{CV}, BS_{DV}$ |

32 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Určete konstrukčně odchylku daných přímek. Velikost odchylky změřte úhloměrem.

- |             |                  |             |
|-------------|------------------|-------------|
| a) $AD, BV$ | b) $CD, BS_{CV}$ | c) $BD, CV$ |
|-------------|------------------|-------------|

### 12.13 Odchylka přímky od roviny

33 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Vypočítejte odchylku přímky od roviny:

- |              |                   |                   |
|--------------|-------------------|-------------------|
| a) $BH, ABC$ | d) $AS_{EG}, BDH$ | g) $CE, CDH$      |
| b) $BH, BCF$ | e) $AS_{EG}, CDH$ | h) $EC, AGH$      |
| c) $AG, BCG$ | f) $AS_{EG}, BCF$ | i) $AC, EGS_{CD}$ |

34 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Vypočítejte odchylku přímky od roviny:

- |                   |              |                             |
|-------------------|--------------|-----------------------------|
| a) $VS_{AC}, ABC$ | c) $AV, ABC$ | e) $BS_{DV}, ABC$           |
| b) $VS_{AC}, BCV$ | d) $AV, BCV$ | f) $BS_{DV}, S_{AB}S_{CD}V$ |

### 12.14 Odchylka dvou rovin

35 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Vypočítejte odchylku daných rovin:

- |               |                              |               |
|---------------|------------------------------|---------------|
| a) $ACG, BDH$ | c) $EFC, AGH$                | e) $ABG, BEG$ |
| b) $ABC, BDG$ | d) $ABC, S_{BF}S_{CG}S_{EH}$ | f) $ABG, ACE$ |

36 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Vypočítejte odchylku daných rovin:

- |               |                         |                         |
|---------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $ABC, ADV$ | c) $BCV, VS_{AB}S_{CD}$ | e) $BCS_{AV}, ADS_{BV}$ |
| b) $ADV, BCV$ | d) $ABV, BCV$           | f) $ADV, BCS_{AV}$      |

37 Je dán pravidelný šestiboký jehlan  $ABCDEFV$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Vypočítejte odchylku daných rovin:

- |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| a) $ABV, ABC$ | b) $ABV, DEV$ | c) $ABV, BCV$ | d) $ABV, CDV$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|

### 12.15 Další úlohy

38 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ ,  $a = 4\text{ cm}$ . Na povrchu krychle najděte nejkratší cestu, která vede

- a) z bodu  $S_{BE}$  do bodu  $X$ , kde  $X \in GH \wedge |HX| = 3|GX|$ ,
- b) z bodu  $X$  do bodu  $Y$ , kde  $X \in GH \wedge |HX| = 3|GX|$ ,  $Y \in BF \wedge |FY| = 3|YB|$ .

39 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Na povrchu jehlanu najděte nejkratší cestu, která vede

- a) z bodu  $S_{AV}$  do bodu  $C$ ,
- b) z těžiště  $\Delta BCV$  do bodu  $D$ .

40 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ .

- a) Dokažte, že body  $ACFH$  tvoří vrcholy pravidelného čtyřstěnu.
- b) Určete délku hrany krychle tak, aby délka hrany čtyřstěnu  $ACFH$  byla  $2\text{ cm}$ .
- c) Dokažte, že každé dvě protilehlé hrany čtyřstěnu  $ACFH$  jsou navzájem kolmé.
- d) Vypočítejte tělesové výšky pravidelného čtyřstěnu  $ACFH$ .
- e) Vypočítejte vzdálenost protilehlých hran pravidelného čtyřstěnu  $ACFH$ .
- f) Vypočítejte odchylku sousedních hran pravidelného čtyřstěnu  $ACFH$ .
- g) Vypočítejte odchylku sousedních stěn pravidelného čtyřstěnu  $ACFH$ .

41 Je dán pravidelný trojboký hranol  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Označte  $M$  střed  $AC$ ,  $N$  střed  $BC$ .

- a) Vypočítejte odchylku přímek  $A_1N, B_1M$ .
- b) Vypočítejte odchylku přímek  $BA_1, AC_1$ .
- c) Vypočítejte odchylku roviny  $A_1MN, ABC$ .
- d) Vypočítejte vzdálenost přímek  $A_1B_1, MN$ .

42 Je dán pravidelný komolý čtyřboký jehlan  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , ve kterém platí  $|AB| = 8\text{ cm}$ ,  $|A_1B_1| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ .

- a) Vypočítejte  $AA_1$ .
- b) Vypočítejte  $AC_1$ .
- c) Vypočítejte odchylku hrany  $AA_1$  od roviny  $ABC$ .
- d) Vypočítejte odchylku roviny  $AA_1D, ABC$ .
- e) Vypočítejte výšku původního jehlanu, ze kterého řezem rovinou rovnoběžnou s podstavou ve vzdálenosti  $6\text{ cm}$  daný komolý jehlan vznikl.

### 12.16 Obsah řezu

43 Je dána krychle  $ABCDEFGH$ ,  $a = 4\text{ cm}$ . Vypočítejte obvod a obsah mnohoúhelníku, který je shodný s řezem krychle rovinou:

- a)  $KLM; K \in AE \wedge |EK| = 3|AK|$ ,  $L = S_{BF}$ ,  $M \in CG \wedge |CM| = 3|GM|$
- b)  $EGS_{AB}$
- c)  $SCGS_{EH}S_{AB}$

44 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Vypočítejte obvod a obsah mnohoúhelníku, který je shodný s řezem jehlanu rovinou:

- a)  $BCS_{AV}$
- b)  $AS_{CD}S_{DV}$
- c)  $S_{AV}S_{CV}B$

- 45** Je dán pravidelný trojboký hranol  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $|AB| = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ . Označte  $M$  střed  $AC$ ,  $N$  střed  $BC$ . Vypočítejte obvod a obsah mnohoúhelníku, který je shodný s řezem hranolu rovinou  $MNA_1$ .

### 12.17 Objemy a povrchy těles

- 46** Délka tělesové úhlopříčky krychle je  $3\sqrt{6}\text{ cm}$ . Vypočítejte  
a) délku hrany krychle,      b) objem krychle,      c) povrch krychle.
- 47** Hranu krychle  $ABCDEFGH$  zvětšíme dvakrát. Kolikrát se zvětší  
a) objem krychle,      b) povrch krychle?
- 48** O kolik procent se zvětší objem krychle, jestliže se hrana krychle zvětší o  $15\%$ ?
- 49** Objem kvádru  $ABCDEFGH$  se čtvercovou podstavou je  $64\text{ cm}^3$ . Odchylka tělesové úhlopříčky  $AG$  od roviny podstavy je  $45^\circ$ . Vypočítejte jeho povrch.
- 50** Délky hran čtyřbokého hranolu jsou v poměru  $a : b : c = 2 : 4 : 5$ . Povrch hranolu je  $57\text{ cm}^2$ . Vypočítejte jeho objem.
- 51** Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého hranolu. Délka podstavné hrany je  $4\text{ cm}$ , výška hranolu je  $6\text{ cm}$ .
- 52** Vypočítejte délku podstavné hrany pravidelného pětibokého hranolu, jehož výška je stejná jako délka podstavné hrany. Objem hranolu je  $100\text{ cm}^3$ .
- 53** Pravidelný dvanáctiboký hranol o objemu  $100\text{ cm}^3$  má výšku dvakrát větší než délku podstavné hrany. Vypočítejte jeho povrch s přesností na jedno desetinné místo.
- 54** Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří  $3\text{ cm}$  a délka boční hrany je  $6\text{ cm}$ .
- 55** Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří  $4\text{ cm}$ . Odchylka boční hrany od roviny podstavy je  $60^\circ$ .
- 56** Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li obsah podstavy  $20\text{ cm}^2$ . Odchylka boční stěny od roviny podstavy je  $60^\circ$ .
- 57** V krychli  $ABCDEFGH$ ,  $a = 4\text{ cm}$  spojte postupně vrcholy  $ABCD$  se středem hrany  $EH$ . Vypočítejte objem jehlanu  $ABCDSE_{EH}$ .
- 58** Délky hran kvádru  $ABCDEFGH$  jsou  $a = 3\text{ cm}$ ,  $b = 4\text{ cm}$ ,  $c = 5\text{ cm}$ . Vypočítejte objem a povrch trojbokého jehlanu  $ADEC$ .
- 59** Odvoďte vzorec pro výpočet objemu a povrchu pravidelného čtyřštěnu.
- 60** Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délku  $6\text{ cm}$  a  $4\text{ cm}$ . Boční hrana svírá s rovinou podstavy úhel  $60^\circ$ . Vypočítejte objem a povrch komolého jehlanu.
- 61** Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délku  $6\text{ cm}$  a  $4\text{ cm}$ . Boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel  $60^\circ$ . Vypočítejte objem a povrch komolého jehlanu.
- 62** Je dán pravidelný čtyřštěn  $ABCD$ . Na hraně  $CD$  určete bod  $X$  tak, aby rovina sestrojená bodem  $X$  rovnoběžně s rovinou podstavy  $ABC$  rozdělila čtyřštěn na dvě tělesa o stejném objemu.

- 63** Vypočítejte objem a povrch pravidelného osmistěnu, je-li délka jeho hrany  $5\text{ cm}$ .
- 64** Vypočítejte objem a povrch pravidelného rotačního kužele o výšce  $10\text{ cm}$ , jehož strana má od roviny podstavy odchylku  $30^\circ$ .
- 65** Vypočítejte objem a povrch rovnostranného kužele, který vznikl rotací rovnostranného trojúhelníku  $ABC$  o straně  $a = 4\text{ cm}$  kolem osy úhlu  $\gamma$ .
- 66** Rotací pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  kolem odvěsný  $BC$  vznikne rotační kužel, rotací téhož pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  kolem odvěsný  $AC$  vznikne jiný rotační kužel. Vypočítejte poměr objemů těchto dvou kuželů.
- 67** Kužel ( $r = 4\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ ) je rozdělen rovinou rovnoběžnou s podstavou na dvě části téhož objemu. Vypočítejte  
a) poloměr kružnice, která je řezem,  
b) poměr, ve kterém rovina řezu dělí výšku daného kužele.
- 68** Kužel má objem  $V$ . Body  $C_1$ ,  $C_2$ , které dělí jeho výšku na tři stejné díly, vedeme roviny rovnoběžné s rovinou podstavy. Dostaneme tak tři tělesa. Vypočítejte, v jakém poměru jsou jejich objemy.
- 69** Komolý kužel ( $r_1 = 4\text{ cm}$ ,  $r_2 = 2\text{ cm}$ ,  $v = 6\text{ cm}$ ) je rozdělen rovinou rovnoběžnou s podstavou na dvě části téhož objemu. Vypočítejte  
a) poloměr kružnice, která je řezem,  
b) poměr, ve kterém rovina řezu dělí výšku.
- 70** Nálevka má tvar rovnostranného kužele. Vypočítejte obsah plochy smáčené vodou v případě, že do nálevky nalijete 3 litry vody.
- 71** Jestliže plášť kužele je půlkruh, potom průměr podstavy kužele je dvakrát větší než délka jeho strany. Dokažte.
- 72** Vypočítejte poloměr podstavy a objem rotačního kužele, jestliže rozvinutý plášť je kruhová výseč s poloměrem  $3\text{ cm}$  a se středovým úhlem  $120^\circ$ .
- 73** Nakreslete plášť stínítka na lampačku, které má tvar komolého rotačního kužele. Poloměry podstav jsou  $30\text{ cm}$  a  $15\text{ cm}$ . Délka strany komolého kužele je  $25\text{ cm}$ .
- 74** Určete rozměry válcové nádoby o objemu 5 litrů, jestliže výška nádoby se rovná polovině průměru podstavy.
- 75** Osovým řezem válce je obdélník s úhlopříčkou délky  $20\text{ cm}$ . Výška válce je dvakrát větší než průměr podstavy. Vypočítejte objem válce v litrech.
- 76** Osovým řezem válce je čtverec o obsahu  $25\text{ cm}^2$ . Vypočítejte povrch válce.
- 77** Určete rozměry rovnostranného válce o objemu 1 litr.
- 78** Jaká je přibližně délka vlny, která je namotána na klubku tvaru koule o poloměru  $8\text{ cm}$ , je-li průměr vlny  $1\text{ mm}$ ?
- 79** Kolik procent zemského povrchu leží v oblasti  
a) pásmu tropického (obratník  $\dots \varphi = 23^\circ 27'$ ),  
b) pásmu mírného (polární kruh  $\dots \varphi = 66^\circ 33'$ ),  
c) pásmu polárního,  
d) mezi desátou a dvacátou rovnoběžkou na severní polokouli?  
(Poloměr Země počítejte  $6\,378\text{ km}$ .)

**80** Jakou část zemského povrchu vidíme z výšky 350 km nad Zemí?

**81** Vypočítejte objem a povrch čočky, která vznikne průnikem dvou koulí o poloměrech 8 cm a 4 cm. Vzdálenost středů koulí je 10 cm.

**82** Do krabice tvaru kvádru se čtvercovou podstavou o straně  $a = 6$  cm a výškou  $v = 4$  cm dáme kouli o poloměru 3 cm. Vypočítejte obsah kulového vrchlíku, který leží vně kvádru.

**83** Do krychle  $ABCDEFGH$  je vepsán jehlan  $ABCDV$ , kde  $V$  je střed úsečky  $EG$  a kužel, jehož podstavu tvoří kruh vepsaný do čtverce  $ABCD$  a bod  $V$ . Vypočítejte poměr objemů krychle, jehlanu a kuželes.

**84** Krychli opište a vepište kouli. Vypočítejte poměr objemů koule opsané, krychle a koule vepsané.

**85** Vypočítejte poloměr a výšku rovnostranného válce, který lze vepsat do koule o poloměru 6 cm. Vypočítejte, kolik procent z objemu koule zaujímá objem válce.

**86** a) Vypočítejte poloměr a výšku rovnostranného kuželes vepsaného kouli o poloměru 6 cm. Vypočítejte, kolik procent z objemu koule zaujímá objem kuželes.

b) Vypočítejte poloměr a výšku rovnostranného kuželes opsaného kouli o poloměru 6 cm. Vypočítejte, kolik procent z objemu kuželes zaujímá objem koule.

**87** Vypočítejte poloměr koule vepsané do kuželes, jehož výška je  $v = 6$  cm a poloměr podstavy je  $r = 2$  cm. Potom vypočítejte, kolikrát je objem kuželes větší než objem koule vepsané.

**88** Vypočítejte poloměr koule vepsané do pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož délka podstavné hrany je  $a = 4$  cm a výška je  $v = 6$  cm. Potom vypočítejte, kolikrát je objem jehlanu větší než objem koule vepsané.

**89** Vypočítejte délku hrany krychle vepsané do polokoule o poloměru 6 cm. Kolik procent zaujímá objem krychle z objemu polokoule?

**90** Vypočítejte poloměr a výšku kuželes vepsaného do pravidelného čtyřstěnu. Délka hrany čtyřstěnu je 6 cm. Potom vypočítejte, kolikrát je objem kuželes menší než objem čtyřstěnu.

## 13 Vektory

### 13.1 Vektor, souřadnice vektoru

**1** Body  $A[1; 3]$ ,  $B[4; 1]$  určují vektor  $\mathbf{u}$  ( $A$  je počáteční bod,  $B$  je koncový bod vektoru, tj.  $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ ).

a) Vypočítejte souřadnice vektoru  $\mathbf{u}$ .

b) V soustavě souřadnic znázorněte body  $A$ ,  $B$ , potom nakreslete alespoň tři orientované úsečky, které jsou umístěným vektoru  $\mathbf{u}$ .

c) Vypočítejte souřadnice bodu  $X$  tak, aby orientovaná úsečka  $CX$ ,  $C[-3; -2]$  též určovala vektor  $\mathbf{u}$ .

d) Vektor  $\mathbf{u}_1$  je opačný vektor k vektoru  $\mathbf{u}$ . Vypočítejte souřadnice vektoru  $\mathbf{u}_1$ . Nakreslete orientované úsečky  $OU$ ,  $OU_1$ , které jsou umístěným vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_1$  s počátečním bodem  $O[0; 0]$ .

**2** Body  $K[-2; 4; 3]$ ,  $L[-3; 2; -1]$  určují vektor  $\mathbf{z}$  ( $L$  je počáteční bod,  $K$  je koncový bod vektoru, tj.  $\mathbf{z} = \mathbf{K} - \mathbf{L}$ ).

a) Vypočítejte souřadnice vektoru  $\mathbf{z}$ .

b) Vypočítejte souřadnice koncového bodu vektoru  $\mathbf{z}$ , jestliže vektor  $\mathbf{z}$  umísťme do počátku soustavy souřadnic.

c) V soustavě souřadnic nakreslete orientovanou úsečku  $OZ$ , která je umístěným vektoru  $\mathbf{z}$  s počátečním bodem  $O[0; 0; 0]$ .

**3** Jsou dány body  $R[3; -2]$ ,  $S[-4; 5]$ ,  $T[2; 1]$ . Vypočítejte souřadnice bodu  $X$  tak, aby

a) čtyřúhelník  $RSTX$  byl rovnoběžník,

b) čtyřúhelník  $RSXT$  byl rovnoběžník,

c) čtyřúhelník  $RXST$  byl rovnoběžník.

**4** V rovnoběžnostěnu  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  známe souřadnice bodů  $A[2; -3; 1]$ ,  $B[3; -4; 2]$ ,  $D[4; 2; -3]$ ,  $A_1[5; 3; 4]$ . Vypočítejte souřadnice vrcholů  $C$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ .

### 13.2 Sčítání a odčítání vektorů, násobek vektoru

**5** Jsou dány vektory  $\mathbf{u} = (4; 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-2; -4)$ .

a) Nakreslete v soustavě souřadnic orientované úsečky, které jsou umístěním vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  s počátečním bodem  $O[0; 0]$ . Potom graficky sestrojte orientované úsečky, které odpovídají následujícím vektorům:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{u}$$

$$\mathbf{w}_5 = \frac{3}{2}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{u} + \left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{v}$$

b) Vypočítejte souřadnice vektorů  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$ ,  $\mathbf{w}_4$ ,  $\mathbf{w}_5$ .

c) Porovnejte výsledky úloh b) s obrázkem z úlohy a).

**6** Jsou dány body  $A[3; 3]$ ,  $B[5; 4]$ ,  $C[7; 5]$ .

a) Rozhodněte, zda body  $A$ ,  $B$ ,  $C$  leží na přímce.

b) Určete číslo  $y_D \in \mathbb{R}$  tak, aby bod  $D[-3; y_D]$  ležel na přímce  $AB$ .

**7** Jsou dány body  $K[1; 2; 3]$ ,  $L[-4; 5; 6]$ ,  $M[4; 3; 2]$ .

a) Dokažte, že body  $K$ ,  $L$ ,  $M$  tvoří trojúhelník.

b) Určete reálná čísla  $m$ ,  $n$ ,  $k$ ,  $p$  tak, aby body  $R[0; m; n]$ ,  $S[k; p; 6]$  ležely na přímce  $KL$ .

### 13.3 Lineární kombinace vektorů

- 8** Vektor  $z = (2; 10)$  zapište jako lineární kombinaci vektorů  $u = (1; 3)$ ,  $v = (-2; 2)$ . Výpočet ověřte obrázkem.
- 9** Vektor  $z = (2; -2; -10)$  zapište jako lineární kombinaci vektorů  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , kde  $u = (2; 1; -1)$ ,  $v = (2; 3; 2)$ ,  $w = (4; 5; -2)$ .
- 10** V trojúhelníku  $ABC$  označte vektory  $u = C - B$ ,  $v = C - A$ . Jako lineární kombinaci vektorů  $u$ ,  $v$  zapište následující vektory:
- $w_1 = B - A$
  - $w_2 = A_1 - A$ , kde  $A_1$  je střed strany  $BC$
  - $w_3 = T - A$ , kde  $T$  je těžiště trojúhelníku  $ABC$
- 11** Narýsujte trojúhelník  $ABC$  ( $a = 4\text{ cm}$ ,  $b = 3\text{ cm}$ ,  $c = 6\text{ cm}$ ). Vyznačte vektory  $b = C - A$ ,  $c = B - A$ . Potom v obrázku sestrojte vektor  $u$  tak, aby platilo  $u = \left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b\right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cdot (c + b)$ . Zapište výsledek.
- 12** V rovnoběžníku  $ABCD$  vyznačte body  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $S$  tak, že bod  $E$  je střed úsečky  $AB$ , bod  $F$  je střed úsečky  $BC$ , bod  $G$  je střed úsečky  $CD$ , bod  $S$  je střed úsečky  $AC$ . Dále označte vektory  $u = E - A$ ,  $v = S - A$ . Zapište vektory  $w = D - F$ ,  $z = G - B$  jako lineární kombinaci vektorů  $u$ ,  $v$ .
- 13** V trojúhelníku  $ABC$  vyznačte vektory  $a = C - B$ ,  $b = A - C$ ,  $c = B - A$ .
- Dokažte, že pak platí  $a + b + c = o$ .
  - Dokažte, že platí:  $t_a + t_b + t_c = o$ , kde  $t_a = S_{BC} - A$ ,  $t_b = S_{AC} - B$ ,  $t_c = S_{AB} - C$ .

**14** Je dána krychle  $ABCDEFGH$ .

- a) V krychli vyznačte vektory  $e_1 = A - D$ ,  $e_2 = C - D$ ,  $e_3 = H - D$ . Jako lineární kombinaci vektorů  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  zapište vektory:

$$\begin{array}{lll} x_1 = G - H & x_3 = G - A & x_5 = F - C \\ x_2 = B - G & x_4 = B - S_{AH} & \end{array}$$

- b) Vektory  $x_1$  až  $x_5$  z úlohy a) vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů  $i$ ,  $j$ ,  $k$ , kde  $i = B - A$ ,  $j = C - A$ ,  $k = H - A$ .

### 13.4 Lineárně závislé a lineárně nezávislé vektory

- 15** Dokažte, že vektory  $a = (2; 2)$ ,  $b = (4; -4)$ ,  $c = (-2; -6)$  jsou lineárně závislé. Výpočet ověřte obrázkem.

- 16** Rozhodněte, zda dané trojice vektorů tvoří skupinu lineárně závislých, nebo lineárně nezávislých vektorů.

$$\begin{array}{lll} a) u_1 = (3; 6) & b) v_1 = (2; -1; 3) & c) w_1 = (0; 6; -2) \\ u_2 = (-1; -2) & v_2 = (3; 0; 6) & w_2 = (2; 4; 6) \\ u_3 = (1; 4) & v_3 = (7; -5; 10) & w_3 = (-1; 4; -5) \end{array}$$

### 13.5 Velikost vektoru

- 17** Vypočítejte velikost vektoru  $u = (-4; 2)$ . Výpočet ověřte obrázkem.

- 18** Vypočítejte velikost vektoru  $u = (4; -3; 5)$ .

- 19** Určete číslo  $y \in \mathbb{R}$  tak, aby velikost vektoru  $z = (6; y)$  byla 10.

- 20** Je dán vektor  $u = (7; -1)$ . Určete vektor  $v$  tak, aby platilo:  $v \parallel u \wedge |v| = 10$ . Výpočet ověřte obrázkem.
- 21** Jsou dány vektory  $a = (4; 2)$ ,  $b = (-1; 2)$ . Vypočítejte souřadnice a velikosti vektorů  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , vše-li, že
- $c_1 = a + b$ ,
  - $c_2 = a - b$ ,
  - $c_3 = \frac{1}{2}a + 3b$ .
- 22** Je dán vektor  $f = (3; 2)$ . Určete  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby pro vektor  $g = (6; m)$  platilo  $|g - f| = 5$ . Výpočet ověřte obrázkem.
- 23** Je dán vektor  $r = (3; 2)$ . Určete  $q \in \mathbb{R}$  tak, aby pro vektor  $s = (q; -2)$  platilo  $|3r + s| = 5$ . Výpočet ověřte obrázkem.

### 13.6 Skalární součin dvou vektorů $u \cdot v$

- 24** Jsou dány vektory  $u = (0; 3)$ ,  $v = (1; 1)$ . V pravoúhlé soustavě souřadnic nakreslete orientované úsečky, které jsou umístěním daných vektorů v počátku. Z obrázku určete, jaký úhel dané vektory svírají. Potom vypočítejte skalární součin vektorů  $u \cdot v$  dvěma způsoby:
- podle vzorce pro výpočet skalárního součinu pomocí velikostí vektorů a úhlu, který tyto vektory svírají,
  - podle vzorce pro výpočet skalárního součinu ze souřadnic vektorů  $u$ ,  $v$ .

### Úhel dvou vektorů

- 25** Vypočítejte velikost úhlu vektorů  $u_1$ ,  $u_2$ :
- $u_1 = (3; 1)$
  - $u_1 = (-2; 4)$
  - $u_1 = (3; -2)$
  - $u_1 = (-1; 0)$
  - $u_2 = (1; 2)$
  - $u_2 = (6; -2)$
  - $u_2 = (4; 6)$
  - $u_2 = (\sqrt{3}; 1)$
- 26** Vypočítejte úhel vektorů  $v_1$ ,  $v_2$  s přesností na stupně a minuty:
- $v_1 = (-1; 0; 1)$
  - $v_1 = (-2; 6; 3)$
  - $v_1 = (2; -3; 3)$
  - $v_1 = (1; 0; 1)$
  - $v_2 = (-2; 2; 0)$
  - $v_2 = (2; 4; 4)$
  - $v_2 = (-1; 2; -2)$
  - $v_2 = (0; 5; 0)$
- 27** Vypočítejte velikosti úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  v trojúhelníku  $ABC$ , znáte-li souřadnice vrcholů. (Počítejte s přesností na stupně a minuty.)
- $A[0; 1]$
  - $A[2; 3]$
  - $A[1; 0; 2]$
  - $A[1; 3; -2]$
  - $B[2; 3]$
  - $B[3; 1]$
  - $B[2; -2; 4]$
  - $B[-2; 3; 1]$
  - $C[4; 0]$
  - $C[5; 2]$
  - $C[3; 6; 1]$
  - $C[-2; 6; -2]$

- 28** Dán vektor  $u = (\sqrt{3}; -1)$ . Určete souřadnice vektoru  $v$ , který svírá s vektorem  $u$  úhel  $60^\circ$  a jehož velikost je 4.

- 29** Jsou dány body  $A[2; 5; 10]$ ,  $B[2; 1; 7]$ . Na ose  $x$  určete bod  $X$  tak, aby platilo:
- $|\triangle ABX| = 60^\circ$
  - $|\triangle XAB| = 45^\circ$

- 30** Určete vektor  $x$  tak, aby platilo:  $|x| = \sqrt{2} \wedge |\triangle xb| = 90^\circ \wedge |\triangle xa| = \frac{\pi}{3}$ , kde  $a = (1; 1; 0)$ ,  $b = (1; 1; -1)$ .

### Kolmost vektorů

- 31** Dokažte, že dané vektory  $u$ ,  $v$  jsou navzájem kolmé:
- $u = (2; 4)$
  - $v = (-3; \frac{3}{2})$
  - $u = (4; -1; 13)$
  - $v = (5; -6; -2)$
  - $u = (\sqrt{5} - 1; 2\sqrt{2})$
  - $v = (\sqrt{5} + 1; -\sqrt{2})$
  - $u = (1; 1; 0)$
  - $v = (0; 0; 1)$

**32** Je dán vektor  $u = (4; 9)$ . Určete  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby vektor  $v = (m; 2)$  byl kolmý k vektoru  $u$ .

**33** Je dán vektor  $x = (-1; 2; 3)$ . Určete  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby vektor  $y = (17; p; 3)$  byl kolmý k vektoru  $x$ .

**34** a) K vektoru  $a = (1; 3)$  určete alespoň jeden vektor  $b_1$ , který je k vektoru  $a$  kolmý.

b) K vektoru  $a = (1; 3)$  určete všechny vektory  $b_2$ , které jsou k vektoru  $a$  kolmé a mají stejnou velikost jako vektor  $a$ .

c) K vektoru  $a = (1; 3)$  určete všechny vektory  $b_k$ , které jsou k vektoru  $a$  kolmé.

**35** Určete vektor  $f$  tak, aby platilo  $f \perp g \wedge |f| = 4\sqrt{5}$ , kde  $g = (3; 6)$ .

**36** Jsou dány body  $S[3; 2], M[5; 1]$ . Určete bod  $M_1$  tak, aby vektory  $u_1 = M - S$  a  $u_2 = M_1 - S$  měly stejnou velikost a byly navzájem kolmé.

**37** Jsou dány body  $A[2; 1], B[5; 4]$ . Určete souřadnice bodů  $C, D$  tak, aby čtyřúhelník  $ABCD$  byl čtverec.

**38** Jsou dány body  $A[4; 1], S[6; 2]$ . Určete souřadnice bodů  $B, C, D$  tak, aby čtyřúhelník  $ABCD$  byl čtverec. (Bod  $S$  je střed čtverce.)

**39** Jsou dány body  $A[-2; 4], C[8; 5]$ . Určete souřadnice bodů  $B, D$  tak, aby čtyřúhelník  $ABCD$  byl čtverec.

**40** Jsou dány body  $K[2; 5], L[6; 2]$ . Určete souřadnice bodů  $M, N$  tak, aby čtyřúhelník  $KLMN$  byl obdélník a aby platilo  $|KL| = 3|LM|$ .

**41** Jsou dány body  $K[-2; 2], L[6; 8]$ . Na ose  $x$  určete bod  $X$  tak, aby trojúhelník  $KLX$  byl pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $X$ .

**42** Jsou dány body  $R[3; 1], S[-1; 3]$ . Určete bod  $T$  tak, aby platilo:

- a) bod  $T$  leží na ose  $x$  a  $|\angle RTS| = 90^\circ$
- b) bod  $T$  leží na ose  $y$  a  $|\angle SRT| = 90^\circ$
- c) bod  $T$  leží na ose I. a III. kvadrantu a  $|\angle STR| = 90^\circ$

**43** Body  $E[2; -2; -2], F[0; -1; -4], G[2; 1; -5]$  tvoří trojúhelník  $EFG$ . Dokažte, že trojúhelník  $EFG$  je pravoúhlý a rovnoramenný. U kterého vrcholu je pravý úhel?

**44** Jsou dány body  $M[3; -2\sqrt{2}], N[-1; 2\sqrt{2}]$ . Určete souřadnice bodu  $O$  tak, aby trojúhelník  $MNO$  byl pravoúhlý a rovnoramenný, s pravým úhlem

- a) u vrcholu  $M$ ,
- b) u vrcholu  $N$ ,
- c) u vrcholu  $O$ .

### 13.7 Vektorový součin dvou vektorů $u \times v$

**45** Jsou dány dva vektory  $u = (0; 1; 0), v = (1; 1; 0)$ .

- a) Vypočítejte pomocí souřadnic vektorů  $u, v$  vektorový součin  $u \times v$ .
- b) V pravotočivé soustavě souřadnic nakreslete orientované úsečky  $OU, UV, OW$ , které jsou umístěním vektorů  $u, v, u \times v$  s počátečním bodem  $O[0; 0; 0]$ . V nakresleném obrázku ověřte, že  $OU \perp OW \wedge OV \perp OW$ .
- c) Vypočítejte velikost vektoru  $u \times v$ .

- d) Z obrázku určete úhel orientovaných úseček  $OU, OV$ , vypočítejte velikosti vektorů  $u, v$  a potom vypočítejte velikost vektorového součinu  $u \times v$  pomocí velikostí vektorů a úhlu, který tyto vektory svírají.
- e) Vypočítejte  $v \times u$ .
- f) Vyznačte v obrázku orientované úsečky  $OZ_1, OZ_2$ , které jsou umístěním vektorů  $z_1 = u \times v, z_2 = v \times u$  a rozhodněte o vzájemné poloze orientovaných úseček  $OZ_1, OZ_2$ . Je vektorový součin komutativní?

**46** Vypočítejte vektorový součin vektorů  $u, v$  je-li dáno:

- a)  $u = (2; 1; 3)$
- b)  $u = (0; 1; 3)$
- c)  $u = (2; -1; 3)$
- d)  $u = (2; 1)$
- $v = (-1; 4; 2)$
- $v = (1; 0; 2)$
- $v = (4; -2; 6)$
- $v = (3; 4)$

**47** Vypočítejte obsah rovnoběžníku  $KLMN$ , jestliže znáte souřadnice vrcholů  $K, L, M, N$ . Vypočítejte souřadnice vrcholu  $N$ .

- a)  $K[2; 0; 1], L[1; -1; 3], M[4; 2; 1]$
- b)  $K[1; 3], L[2; 0], M[4; -1]$

**48** Vypočítejte obsah trojúhelníku  $ABC$ , znáte-li souřadnice vrcholů  $A, B, C$ :

- a)  $A[4; 0; -1], B[2; 4; -1], C[5; 3; 4]$
- b)  $A[2; -1], B[-1; 4], C[3; -2]$
- c)  $A[3; -6; 5], B[4; 8; 1], C[5; 22; -3]$
- d)  $A[\sqrt{6}; 1 - \sqrt{6}; -3 + 2\sqrt{6}], B[\sqrt{6}; 2 - \sqrt{6}; 2\sqrt{6}], C[2 + \sqrt{6}; 2 + 2\sqrt{6}; \sqrt{6}]$

**49** Vypočítejte obvod, vnitřní úhly a obsah trojúhelníku  $RST$ , jsou-li souřadnice vrcholů  $R[4; 1; 0], S[4; -2; -3], T[1; -2; 0]$ .

**50** Jsou dány vektory  $u = (2; 3; 4), v = (-2; m; 0)$ . Určete hodnotu parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo  $|u \times v| = 4\sqrt{6}$ .

**51** Na ose  $y$  určete bod  $Y$  tak, aby obsah trojúhelníku  $XYZ$  byl 10. Souřadnice bodů  $X, Z$  jsou  $X[2; 1; 0], Z[2; 2; 3]$ .

**52** Na ose  $x$  určete bod  $X$  tak, aby obsah trojúhelníku  $PQX$  byl 3. Souřadnice bodů  $P, Q$  jsou  $P[4; 0], Q[2; -4]$ .

**53** Jsou dány vektory  $a = (2; 4; -1), b = (3; 1; 2)$ . Určete hodnotu parametru  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby pro vektor  $z = (1; p; 2)$  platilo  $a \times z \perp z \times b$ .

**54** Jsou dány vektory  $u = (3; -1; 0), v = (9; -3; 2)$ . Určete souřadnice vektoru  $z$  tak, aby platilo  $z \perp u \wedge z \perp v \wedge |z| = 1$ . Úlohu řešte dvěma způsoby:

- a) užitím vektorového součinu
  - b) užitím skalárního součinu
- Posudte, který způsob je lepší.

### 13.8 Smíšený součin tří vektorů $(u \times v) \cdot w$

**55** V rovnoběžnostěnu  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  známe souřadnice vrcholů  $A[1; 0; 2], B[3; 4; 3], D[-1; 4; 6], A_1[2; 1; -5]$ .

- a) Vypočítejte souřadnice vrcholů  $C, B_1, C_1, D_1$ .
- b) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

**56** Jsou dány body  $K[2; 3; -1], L[8; 4; -2], M[0; 6; 0], O[2; 1; 4]$ .

- a) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu  $KLMNOPQR$ .
- b) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu  $KLNMOPQR$ .
- c) Porovnejte výsledky úloh a), b) a zdůvodněte.

**57** Vypočítejte objem čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$ , znáte-li souřadnice bodů  $A[2; 3; 4]$ ,  $B[-1; 4; -2]$ ,  $D[0; 2; -5]$ ,  $V[3; 2; 1]$ .

**58** Vypočítejte objem trojbokého hranolu  $OPQO_1P_1Q_1$ , znáte-li souřadnice vrcholů  $O[2; 0; 0]$ ,  $P[0; 0; 0]$ ,  $Q[0; 2; 0]$ ,  $O_1[0; 0; 4]$ .

**59** Jsou dány body  $A[2; 2; 3]$ ,  $B[6; 3; 0]$ ,  $C[3; -1; -1]$ .

- Dále je dán bod  $D[0; 0; 0]$ . Vypočítejte objem čtyřstěnu  $ABCD$ .
- Na ose  $x$  určete bod  $X$  tak, aby objem čtyřstěnu  $ABCX$  byl 26.

**60** Na ose  $z$  určete bod  $Z$  tak, aby objem čtyřstěnu  $ABCZ$ , kde  $A[2; -3; 1]$ ,  $B[1; 0; 3]$ ,  $C[3; 1; -1]$ , byl 14.

## 14 Analytická geometrie v rovině

### 14.1 Rovnice přímky

**1** Přímka  $p$  je dána v jednotlivých případech různými způsoby. Nakreslete přímku  $p$  v soustavě souřadnic pomocí daných prvků. Potom sestavte její parametrické rovnice, obecnou rovnici, zapište přímku  $p$  ve směrnicovém tvaru, ve tvaru úsekovém (pokud tyto tvary existují).

- Přímka  $p$  je dána bodem  $A[4; 2]$  a směrovým vektorem  $s = (2; -1)$ .
- Přímka  $p$  je dána bodem  $A[2; 0]$  a normálovým vektorem  $n = (-3; 2)$ .
- Přímka  $p$  je dána dvěma body  $A[2; 3]$ ,  $B[-2; -5]$ .
- Přímka  $p$  prochází bodem  $A[-3; -1]$  a počátkem soustavy souřadnic.
- Přímka  $p$  prochází bodem  $A[3; -2]$  kolmo k ose  $x$ .
- Přímka  $p$  je dána bodem  $A[1; 2\sqrt{3}]$  a směrovým úhlem  $\varphi = 120^\circ$ .
- Přímka  $p$  prochází bodem  $A[-2; 4]$  a má směrnici  $k = 2$ .
- Přímka  $p$  protíná souřadnicové osy v bodech  $X[3; 0]$ ,  $Y[0; -2]$ .

**2** Přímka  $p$  je dána obecnou rovnicí  $2x + 5y - 6 = 0$ .

- Vyjádřete přímku  $p$  parametrickými rovnicemi.
- Napište rovnici přímky  $p$  ve směrnicovém tvaru.

**3** Vypočítejte směrnici a směrový úhel přímky, která je dána body  $A[0; 2]$ ,  $B[-2; 4]$ .

**4** Napište v parametrickém tvaru rovnici přímky  $p$ , která prochází počátkem a je rovnoběžná s přímkou  $q$ :  $4x - y + 3 = 0$ .

**5** Určete obecnou rovnici přímky  $p$ , která je kolmá k přímce  $q$ :  $2x - y + 7 = 0$  a prochází počátkem soustavy souřadnic.

**6** Určete hodnotu parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby přímka  $x + my + 2m^2 - m - 1 = 0$  procházela počátkem soustavy souřadnic.

**7** Napište obecnou rovnici přímky  $p$ , která prochází bodem  $A[-4; 3]$  a je rovnoběžná s přímkou  $q$ :  $5x - 2y + 6 = 0$ .

**8** Napište obecnou rovnici přímky  $p$ , která prochází bodem  $A[-6; 5]$  a je kolmá na přímku  $q$ :  $x - 2y + 9 = 0$ .

**9** Určete souřadnici  $y_M$  bodu  $M[2; y_M]$  tak, aby bod  $M$  ležel na přímce  $AB$ , kde  $A[-3; 5]$ ,  $B[-1; -1]$ .

**10** Body  $A[2; 4]$ ,  $B[4; -6]$  určují přímku  $AB$ . Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem úsečky  $AB$  a je kolmá na přímku  $MN$ ,  $M[-4; -3]$ ,  $N[1; -2]$ .

**11** Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici přímky  $p$ , která prochází bodem  $A[3; -1]$  a je

- rovnoběžná s přímkou  $q_1$ :  $2x + 3y + 7 = 0$ ,
- kolmá k přímce  $q_2$ :  $x - 2y + 4 = 0$ ,
- rovnoběžná s osou  $x$ ,
- kolmá k ose  $y$ .

**12** Je dán trojúhelník  $ABC$ ,  $A[1; 4]$ ,  $B[3; -2]$ ,  $C[-4; -6]$ . Určete v parametrickém tvaru rovnici přímky, na které leží

- strana  $c$ ,
- výška  $v_c$ ,
- těžnice  $t_c$ ,
- osa úsečky  $AB$ ,
- střední příčka rovnoběžná s  $AB$ ,
- kolmice na  $AB$  bodem  $A$ .

**13** Jsou dány body  $K[2; 4]$ ,  $L[3; -2]$ .

a) Napište obecnou rovnici osy úsečky  $KL$ .

b) Napište obecnou rovnici kolmice k úsečce  $KL$  v bodě  $L$ .

**14** Body  $A[2; 4]$ ,  $B[4; 2]$ ,  $C[4; 1]$  jsou vrcholy trojúhelníku  $ABC$ . Napište obecné rovnice os všech jeho stran. Potom vypočítejte souřadnice jejich průsečíku.

**15** Body  $A[2; 4]$ ,  $B[4; 2]$ ,  $C[4; 1]$  jsou vrcholy trojúhelníku  $ABC$ . Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží těžnice  $t_a$ ,  $t_b$ ,  $t_c$ . Potom vypočítejte souřadnice těžiště.

**16** Body  $A[2; 4]$ ,  $B[4; 2]$ ,  $C[4; 1]$  jsou vrcholy trojúhelníku  $ABC$ . Napište obecné rovnice výšek  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$ . Potom vypočítejte souřadnice průsečíku výšek.

**17** Je dán trojúhelník  $ABC$ ,  $A[0; 0]$ ,  $B[-4; 2]$ ,  $C[-6; 0]$ . Vypočítejte souřadnice průsečíku výšek  $V$ , souřadnice těžiště  $T$  a souřadnice středu  $S$  kružnice trojúhelníku  $ABC$  opsané. Dokažte, že body  $V$ ,  $T$ ,  $S$  leží na jedné přímce.

**18** Napište rovnici přímky  $AB$ ,  $A[5; -2]$ ,  $B[2; -3]$  v úsekovém tvaru. Vypočítejte souřadnice průsečíků přímky  $AB$  s osami souřadnic. Vypočítejte obsah trojúhelníku, který omezuje daná přímka  $AB$  spolu s osami  $x$ ,  $y$ .

**19** Osy  $x$ ,  $y$  a přímka  $KL$ ,  $K[2; 9]$ ,  $L[-4; -3]$  určují trojúhelník. Vypočítejte jeho obsah.

**20** Určete obecnou rovnici přímky  $p$  tak, aby procházela bodem  $M[1; 4]$  a spolu s osami  $x$ ,  $y$  určovala trojúhelník o obsahu 1.

**21** Bodem  $M[2; 3]$  vede přímku  $m$  tak, aby pro průsečíky  $P[p; 0]$ ,  $Q[0; q]$  přímky  $m$  se souřadnicovými osami platilo:

- a)  $p = q$       b)  $p + q = 0$       c)  $p + q = 12$       d)  $p : q = 2 : 3$

Určete obecnou rovnici přímky  $m$  v jednotlivých případech.

## 14.2 Úsečka, polopřímka, polorovina

**22** Jsou dány dva body  $A[-2; 5]$ ,  $B[4; -1]$ .

a) Napište rovnici úsečky  $AB$ .

b) Napište rovnici polopřímky  $AB$ .

c) Napište rovnici polopřímky  $BA$ .

**23** Je dána polopřímka  $MN = \{[2 + 3t; 3 + t], t \in (-\infty; \frac{1}{2})\}$ .

a) Určete souřadnice počátečního bodu  $M$  dané polopřímky.

b) Polopřímku nakreslete.

c) Určete  $y_K$  tak, aby bod  $K[-1; y_K]$  ležel na dané polopřímce.

**24** Nakreslete poloroviny:

- |                        |                    |                  |
|------------------------|--------------------|------------------|
| a) $3x + y - 6 \leq 0$ | c) $2x - y \leq 0$ | e) $y \geq 2$    |
| b) $x - 2y + 5 \geq 0$ | d) $x + y \geq 0$  | f) $x \leq -2,6$ |

**25** Rozhodněte, zda bod  $M[4; -7]$  leží v polorovině  $2x - 3y + 2 \leq 0$ .

**26** Určete všechny hodnoty parametru  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby bod  $P[-4; p + 3]$  ležel v polorovině  $y \geq 2x$ .

**27** Rozhodněte, zda přímka  $p: 2x + 7y - 12 = 0$  protíná úsečku  $A[2; 3]$ ,  $B[5; -1]$ .

**28** Určete hodnotu parametru  $c \in \mathbb{R}$  tak, aby body  $A[4; 1]$ ,  $B[2; -6]$  ležely uvnitř též poloroviny s hraniční přímkou  $p: 3x + 5y + c = 0$ .

**29** Určete hodnotu parametru  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby body  $K[-3; 8]$ ,  $L[1; -9]$  ležely v opačných polorovinách určených hraniční přímkou  $x + by - 3 = 0$ .

## 14.3 Vzájemná poloha přímek

**30** Vyšetřete vzájemnou polohu přímek  $p$ ,  $q$ . V případě různoběžných přímek vypočítejte souřadnice průsečíku přímek  $p$ ,  $q$ .

- |   |   |
|---|---|
| a) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ | e) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ |
| $q = \{[-1 + 2k; 7 - 3k], k \in \mathbb{R}\}$   | $q: 2x + y - 1 = 0$                             |
| b) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ | f) $p: 2x + y - 1 = 0$                          |
| $q = \{[1 + 4k; 5 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$    | $q: x - 2y - 8 = 0$                             |
| c) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ | g) $p: 2x + y - 1 = 0$                          |
| $q = \{[17 + 4k; -6 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$  | $q: 4x + 2y - 2 = 0$                            |
| d) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ | h) $p: 2x + y - 1 = 0$                          |
| $q = \{[5 + 4k; -4 - 6k], k \in \mathbb{R}\}$   | $q: 2x + y - 3 = 0$                             |

**31** Vyšetřete vzájemnou polohu přímek  $AB$  a  $CD$ , znáte-li souřadnice bodů, které dané přímky určují:  $A[-1; -2]$ ,  $B[-1; 1]$ ,  $C[1; 1]$ ,  $D[2; 3]$ .

**32** Průsečíkem přímek  $p$ :  $3x + y - 2 = 0$ ,  $q$ :  $x - y - 6 = 0$  vede rovnoběžku s přímkou  $r$ :  $2x - y + 4 = 0$ . Určete její obecnou rovnici.

**33** Průsečíkem přímek  $p = \{[1 + t; 2 - t], t \in \mathbb{R}\}$ ,  $q = \{[2k; -3 + k], k \in \mathbb{R}\}$  vede kolmici k přímce  $r = \{[2 + 4m; 8 - 3m], m \in \mathbb{R}\}$ . Určete její obecnou rovnici.

**34** Určete parametrické rovnice přímky, která prochází průsečíkem přímek  $p$ ,  $q$ , kde  $p$ :  $3x - 7y + 9 = 0$ ,  $q$ :  $5x + 3y - 29 = 0$ , kolmo k ose I. a III. kvadrantu.

**35** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku  $ABC$  tak, aby jeho strany ležely na přímkách  $a$ :  $x - 2y + 8 = 0$ ,  $b$ :  $2x + y + 1 = 0$ ,  $c$ :  $8x - y - 11 = 0$ .

**36** Body  $A[1; 2]$ ,  $B[-2; 3]$ ,  $C[-3; -1]$  určují trojúhelník. Vrcholy trojúhelníku  $ABC$  sestrojte rovnoběžky s protějšími stranami. Dostanete tak trojúhelník  $A_1B_1C_1$ . Vypočítejte souřadnice vrcholů  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ .

**37** Jsou dány dvě přímky  $p$ :  $ax + (2b - 1)y + c + 3 = 0$ ,  $q$ :  $2x - (b + 2)y - 2c = 0$ . Pro které hodnoty parametrů  $a$ ,  $b$ ,  $c \in \mathbb{R}$  jsou dané přímky

- a) splývající rovnoběžky,
- b) různé rovnoběžky,
- c) dvě různoběžky, které se protínají v bodě  $M[5; 0]$ .

**38** Určete hodnoty parametrů  $a$ ,  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby dané přímky  $p$ ,  $q$  splývaly:  $p = \{[1 - t; 2 + t], t \in \mathbb{R}\}$ ,  $q = \{[a + k; 5 + bk], k \in \mathbb{R}\}$

**39** Určete hodnotu parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby přímka  $mx + y + m - 11 = 0$  procházela průsečíkem přímek  $p$ :  $2x + y + 6 = 0$ ,  $q$ :  $x - 2y + 8 = 0$ .

**40** Určete hodnoty parametrů  $a$ ,  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby body  $A[3; -1]$ ,  $B[-2; 4]$  ležely na přímce  $p = \{[a + 2t; 3 - bt], t \in \mathbb{R}\}$ .

**41** Je dána přímka  $p$ :  $3x - 2y + 6 = 0$ . Určete hodnoty parametrů  $a$ ,  $c \in \mathbb{R}$  tak, aby přímka  $q$ :  $ax - 5y + c = 0$  byla s přímkou  $p$  rovnoběžná a procházela bodem  $M[5; 3]$ .

**42** Určete všechny hodnoty parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby se přímky  $p$ ,  $q$  protínaly ve IV. kvadrantu;  $p$ :  $2x - 3y = m$ ,  $q$ :  $4x + 3y = -11$ .

**43** Určete všechny hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby se přímky  $p, q$  protínaly ve II. kvadrantu;  $p = \{[5 + 2t; a - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ ,  $q = \{[1 + 4k; 2 + k], k \in \mathbb{R}\}$ .

**44** Vypočítejte hodnotu parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby se přímky  $p, q$  protínaly na ose  $y$ .

$$p: (m-1)x - (m+2)y + m = 0, q: (m+2)x + (m-3)y + 3m - 1 = 0$$

**45** Vyšetřete vzájemnou polohu úseček  $u_1 = \{[1 + 2t; 2 - t], t \in (-2; 1)\}$ ,  $u_2 = \{[-1 + k; 2k], k \in (0; 1)\}$ . Nakreslete obrázek.

**46** Je dána úsečka  $AB$ , kde  $A[-1; 2], B[2; 1]$ . Určete hodnotu parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby úsečka  $KL$  protínala úsečku  $AB$  v jejím středu. Souřadnice bodů  $K, L$  jsou  $K[-2; -6], L[2; m]$ .

#### 14.4 Odchylka dvou přímek

**47** Vypočítejte odchylku přímek  $p, q$ . Výsledky uvádějte s přesností na minuty.

- |  |  |
|--|--|
| a) $p = \{[4 - 2t; 5 - t], t \in \mathbb{R}\}$ | e) $p = \{[2 + t; 5], t \in \mathbb{R}\}$      |
| $q = \{[2 + k; 1 + 3k], k \in \mathbb{R}\}$    | $q: x + \sqrt{3}y - 6 = 0$                     |
| b) $p: x + 2y - 1 = 0$                         | f) $p = \{[1 - 3t; 2 + t], t \in \mathbb{R}\}$ |
| $q: 2x - y + 4 = 0$                            | $q: 3x - y + 7 = 0$                            |
| c) $p: 3x - 4y = 0$                            | g) $p: y = x - 3$                              |
| $q: y - 6 = 0$                                 | $q: y = -0,2x + 0,1$                           |
| d) $p: 7x - y + 1 = 0$                         | h) $p: y = 0$                                  |
| $q: x - 7y + 1 = 0$                            | $q: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$             |

**48** Je dán trojúhelník  $ABC$ ,  $A[-1; 4], B[2; -2], C[5; -1]$ . Vypočítejte

- a) vnitřní úhel  $\beta$  trojúhelníku  $ABC$ ,
- b) odchylku přímek  $AB, BC$ ,
- c) odchylku osy úsečky  $AB$  a osy  $x$ ,
- d) velikost úhlu  $ATB$ , kde  $T$  je těžiště  $\Delta ABC$ .

**49** Jsou dány dvě přímky  $p: ax + y - 4 = 0, q: x + 2y + 8 = 0$ . Určete hodnotu parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby

- a) přímky  $p, q$  byly navzájem kolmé,
- b) odchylka přímek  $p, q$  byla  $45^\circ$ .

**50** Bodem  $P[6; 1]$  vedete přímku  $p$  a bodem  $Q[-2; 7]$  vedete přímku  $q$  tak, aby se přímky  $p, q$  protínaly na ose  $x$  a byly navzájem kolmé. Napište obecné rovnice přímek  $p, q$ .

**51** Bodem  $A[-1; 3]$  vedete přímku  $p$  tak, aby odchylka přímky  $p$  a přímky  $o: y = x$  byla  $\varphi = 60^\circ$ . Vypočítejte souřadnice průsečíku přímek  $p, o$ .

**52** Jsou dány přímky  $p: y = kx + 2, q: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$ . Určete směrnici  $k \in \mathbb{R}$  přímky  $p$  tak, aby odchylka přímek  $p, q$  byla  $\varphi = 30^\circ$ .

**53** Je dána přímka  $q: y = -2x + 5$ . Určete rovnici přímky  $p$  procházející počátkem soustavy souřadnic tak, aby odchylka přímek  $p, q$  byla  $\varphi = 45^\circ$ .

#### 14.5 Výpočty vzdáleností

##### Vzdálenost dvou bodů

**54** Vypočítejte obvod trojúhelníku  $ABC$ , kde  $A[-3; 1], B[2; -4], C[3; 3]$ .

**55** Na ose  $y$  najděte bod  $Y$ , který má od bodu  $A[-4; 3]$  vzdálenost 5.

**56** Na ose  $x$  najděte bod  $X$ , který má od bodu  $B[6; -3]$  vzdálenost 7.

**57** Na ose  $y$  určete bod  $Y$  tak, aby měl stejnou vzdálenost od daných dvou bodů  $A[-2; 1], B[4; -2]$ .

**58** Na přímce  $p = \{[1 - t; 2 + 3t], t \in \mathbb{R}\}$  určete bod  $C$  tak, aby měl stejnou vzdálenost od daných dvou bodů  $A[-4; 2], B[2; -1]$ .

**59** Na přímce  $p: 2x + y = 0$  najděte bod  $C$  tak, aby trojúhelník  $ABC$  byl rovnoramenný se základnou  $AB$ , kde  $A[6; 4], B[2; -2]$ .

**60** Na přímce  $AB$ , kde  $A[-3; 2], B[2; -3]$  určete bod  $M$  tak, aby platilo  $|AM| = \frac{2}{3}|BM|$ .

**61** V rovině najděte takový bod  $S$ , který má od daných tří bodů  $A[2; 0], B[-4; 2], C[2; -2]$  stejnou vzdálenost (tj. najděte souřadnice středu kružnice trojúhelníku  $ABC$  opsané).

##### Vzdálenost bodu od přímky

**62** Vypočítejte vzdálenost bodu  $A[-3; 13]$  od přímky  $KL, K[0; 4], L[-5; -6]$ .

**63** Vypočítejte vzdálenost bodu  $A[8; -5]$  od přímky  $p = \{[-4t; \frac{7}{2} + 3t], t \in \mathbb{R}\}$ .

##### Vzdálenosti — další úlohy

**64** Na ose  $y$  určete takový bod  $Y$ , který má od přímky  $p: y = -2x + 4$  vzdálenost  $2\sqrt{5}$ .

**65** Na přímce  $p: x + 3y - 2 = 0$  určete bod  $M$  tak, aby jeho vzdálenost od přímky  $q: 5x + 12y - 4 = 0$  byla 3.

**66** Určete hodnotu parametru  $c \in \mathbb{R}$  tak, aby vzdálenost počátku soustavy souřadnic od přímky  $p: 2x - y + c = 0$  byla 4.

**67** Přímka  $q$  je dána rovnicí  $3x - 4y + 12 = 0$ . Napište obecnou rovnici přímky  $p$ , která je rovnoběžná s přímkou  $q$  ve vzdálenosti 3.

**68** Vypočítejte vzdálenost rovnoběžek  $p_1: 8x - 6y + 3 = 0, p_2: 8x - 6y - 3 = 0$ .

**69** Jsou dány přímky  $p: 3x + 2y - 6 = 0, q: 3x + 2y + 8 = 0, r: 6x + 4y - 5 = 0$ . Dokažte, že dané tři přímky jsou rovnoběžné a určete, v jakém poměru dělí přímku  $r$  vzdálenost mezi přímkami  $p, q$ .

**70** Jsou dány přímky  $p_1: 2x + 3y - 11 = 0, p_2: 4x + 6y + 5 = 0$ . Určete obecnou rovnici přímky, která je rovnoběžná s danými přímkami a má od obou přímek stejnou vzdálenost (osa pásu).

**71** Určete rovnici přímky, která prochází bodem  $A[-2; -6]$  a jejíž vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je  $2\sqrt{2}$ .

**72** Ze svažku přímek procházejících počátkem soustavy souřadnic vyberte takovou, od které má bod  $M[6; 2]$  vzdálenost 2.

**73** Ze svažku přímek rovnoběžných s osou I. a III. kvadrantu vyberte takovou, od které má bod  $M[-5; 2]$  vzdálenost  $3\sqrt{2}$ .

**74** Najděte všechny body  $M$ , které mají od přímky  $p: 3x - y = 0$  vzdálenost  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  a od přímky  $q: 2x + y - 2 = 0$  vzdálenost  $2\sqrt{5}$ .

**75** V rovině najděte všechny body  $O$ , které mají stejnou vzdálenost od daných přímek  $a: x + 2y = 0$ ,  $b: 2x + y = 0$ ,  $c: x - 2y + 4 = 0$ . (Dané přímky určují trojúhelník; najděte střed kružnice vepsané a středy kružnic trojúhelníku připsaných.)

**76** Napište obecnou rovnici přímky  $p$ , která prochází bodem  $M[4; 6]$ . Dva dané body  $A[-6; 10]$ ,  $B[10; -6]$  mají od přímky  $p$  stejnou vzdálenost.

**77** Je dán trojúhelník  $ABC$ , kde  $A[2; -4]$ ,  $B[1; -2]$ ,  $C[0; -3]$ . Určete obecnou rovnici přímky  $q$ , která je osou úhlu  $\alpha$  trojúhelníku  $ABC$ .

**78** V trojúhelníku  $ABC$ ,  $A[-3; 4]$ ,  $B[-1; -2]$ ,  $C[3; 6]$  vypočítejte:

- |                            |                                  |
|----------------------------|----------------------------------|
| a) výšky $v_a, v_b, v_c$   | c) délku střední příčky          |
| b) těžnice $t_a, t_b, t_c$ | d) obvod a obsah $\triangle ABC$ |

**79** Dokažte, že body  $A[0; -2]$ ,  $B[5; 3]$ ,  $C[2; 2]$ ,  $D[1; 1]$  tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníku s rameny  $AD$ ,  $BC$ . Vypočítejte:

- |                         |          |
|-------------------------|----------|
| a) obvod lichoběžníku   | c) výšku |
| b) délku střední příčky | d) obsah |

## 14.6 Zobrazení v analytické geometrii

**80** Určete souřadnice bodu  $A'$ , který je obrazem bodu  $A[3; -2]$  v osové souměrnosti dané osou  $o$ :  $2x - y + 7 = 0$ .

**81** Určete souřadnice bodu  $C'$ , který je s bodem  $C[3; 6]$  souměrný podle přímky  $AB$ , kde  $A[-2; 1]$ ,  $B[-1; -2]$ .

**82** Určete obecnou rovnici přímky  $p'$ , která je s přímkou  $p$ :  $2x + y - 5 = 0$  středově souměrná

- |                   |                              |
|-------------------|------------------------------|
| a) podle počátku, | b) podle středu $S[-3; 2]$ . |
|-------------------|------------------------------|

**83** Určete obecnou rovnici přímky  $p'$ , která je s přímkou  $p$ :  $3x - y + 6 = 0$  souměrná

- |                    |                                      |
|--------------------|--------------------------------------|
| a) podle osy $x$ , | c) podle osy $o$ : $x + y + 1 = 0$ , |
| b) podle osy $y$ , | d) podle osy $o$ : $x = 4$ .         |

**84** Napište rovnici přímky  $p'$ , která je obrazem přímky  $p$ :  $3x - y + 6 = 0$  ve stejnolehlosti se středem  $S[2; 1]$  a koeficientem stejnolehlosti  $\varkappa = 3$ .

**85** Světelný paprsek vychází z bodu  $A[3; 4]$  a odráží se od přímky  $p$ :  $x + y - 5 = 0$  do bodu  $B[-4; 12]$ . Určete souřadnice bodu odrazu.

**86** Po přímce  $2x - y = 0$  dopadá světelný paprsek na přímku  $p$ :  $x - 3y + 5 = 0$ , od které se odráží. Určete souřadnice bodu odrazu a napište rovnici přímky, na které leží paprsek odražený.

## 14.7 Další úlohy

**87** Dokažte, že body  $A[-3; 2]$ ,  $B[1; 1]$ ,  $C[0; -6]$  jsou vrcholy trojúhelníku. Najděte alespoň dva způsoby důkazu.

**88** Dokažte, že trojúhelník  $ABC$ , kde  $A[1; 0]$ ,  $B[5; 6]$ ,  $C[6; 1]$  je pravoúhlý a rovnoramenný.

**89** Určete bod  $C$  tak, aby trojúhelník  $ABC$  byl pravoúhlý a rovnoramenný s přeponou  $AB$ , kde  $A[4; -6]$ ,  $B[-2; 10]$ .

**90** V rovnoramenném trojúhelníku  $ABC$  se základnou  $AB$ ,  $A[-3; 4]$ ,  $B[1; 6]$ , leží vrchol  $C$  na přímce  $5x - 6y - 16 = 0$ . Vypočítejte souřadnice vrcholu  $C$ .

**91** Jsou dány body  $A[6\sqrt{3}; 0]$ ,  $B[0; 2\sqrt{3}]$ . Určete souřadnice bodu  $C$  tak, aby trojúhelník  $ABC$  byl rovnostranný.

**92** Najděte souřadnice vrcholů  $B$ ,  $C$  rovnoramenného trojúhelníku  $ABC$  se základnou  $AB$ , víte-li, že vrchol  $A$  má souřadnice  $A[3; -2]$ , vrchol  $C$  leží na ose  $x$ , a dále víte, že osa úhlu  $\gamma$  má rovnici  $2x + y + 6 = 0$ .

**93** Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoramenného trojúhelníku  $ABC$  se základnou  $AB$ , jestliže znáte obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice  $t_a$ :  $4x + 3y + 5 = 0$ , těžiště  $T[4; -7]$  a  $S_{AB}[1; 2]$ .

**94** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku  $ABC$ , jestliže znáte obecné rovnice přímek, na nichž leží strany  $b$ :  $3x + 4y - 1 = 0$ ,  $c$ :  $x - y + 2 = 0$  a výšky  $v_c = 14\sqrt{2}$ ,  $v_b = 7$ .

**95** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku  $ABC$ , jestliže znáte vrchol  $A[-1; -2]$  a obecné rovnice přímek, na kterých leží těžnice  $t_b$ :  $x + 2y - 1 = 0$ ,  $t_c$ :  $y - 4 = 0$ .

**96** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku  $ABC$ , jestliže znáte vrchol  $C[-2; 6]$  a obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky  $v_a$ :  $4x - y + 3 = 0$ ,  $v_b$ :  $2x + 3y + 1 = 0$ .

**97** V trojúhelníku  $ABC$  znáte souřadnice vrcholů  $A[-5; 1]$ ,  $B[4; -2]$  a souřadnice průsečíku výšek  $V[3; -3]$ . Vypočítejte souřadnice vrcholu  $C$ .

**98** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku  $ABC$ , jestliže znáte vrchol  $A[2; 4]$  a obecnou rovnici výšky  $v_c$ :  $2x + y = 0$  a těžnice  $t_c$ :  $x + y + 3 = 0$ .

**99** Body  $S_{AB}[3; 4]$ ,  $S_{BC}[5; -3]$ ,  $S_{AC}[-3; 5]$  jsou středy stran daného trojúhelníku  $ABC$ . Vypočítejte souřadnice vrcholů  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

**100** Vrchol  $C$  trojúhelníku  $ABC$  leží na přímce  $x - 2y + 8 = 0$ . Určete jeho souřadnice, znáte-li vrcholy  $A[2; -1]$ ,  $B[4; 8]$  a víte-li, že obsah trojúhelníku  $ABC$  je 10.

**101** Vypočítejte souřadnice vrcholů a napište rovnice přímek, na nichž leží strany rovnostranného trojúhelníku, jestliže jedna strana splývá s osou  $y$  a jeden z vrcholů má souřadnice  $[8; 0]$ .

**102** Dokažte, že body  $A[3; 0]$ ,  $B[6; 4]$ ,  $C[4; 5]$ ,  $D[1; 1]$  tvoří rovnoběžník. Vypočítejte jeho vnitřní úhly a úhel úhlopříček.

**103** Vypočítejte souřadnice vrcholů  $B$ ,  $D$  rovnoběžníku  $ABCD$ , znáte-li souřadnice vrcholů  $A[4; 0]$ ,  $C[0; -2]$  a víte-li, že strana  $AB$  je rovnoběžná s osou II. a IV. kvadrantu. Délka strany  $BC$  je  $3\sqrt{2}$ .

**104** Body  $ABCD$  tvoří rovnoběžník. Vypočítejte souřadnice bodů  $C$ ,  $D$ , znáte-li vrcholy  $A[2; -4]$ ,  $B[3; -2]$  a délky úhlopříček  $|AC| = 2\sqrt{5}$ ,  $|BD| = 4$ .

**105** Přímka  $3x + y - 10 = 0$  je osou základny  $AB$  rovnoramenného lichoběžníku  $ABCD$ ,  $B[4; 8]$ ,  $C[6; 12]$ . Vypočítejte souřadnice vrcholů  $A$ ,  $D$ .

- 106** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li body  $A[-1; -3]$ ,  $B[2; 1]$ .
- 107** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li souřadnice bodů  $A[6; 3]$ ,  $S[1; 7]$ , kde bod  $S$  je střed čtverce.
- 108** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li souřadnice bodů  $A[3; 2]$ ,  $C[-5; 4]$ .
- 109** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li souřadnice bodů  $A[5; -6]$ ,  $S_{AB}[7; 1]$ .
- 110** Určete souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li  $S_{AB}[0; -3]$ ,  $S_{CD}[2; 5]$ .
- 111** Určete souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li  $S_{AB}[4; 1]$ ,  $S_{BC}[9; 0]$ .
- 112** Určete souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li  $A[-3; -2]$ ,  $S_{BC}[2; \frac{1}{2}]$ .
- 113** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li bod  $B[4; -8]$  a rovnici přímky  $p: x - 2y = 0$ , na které leží úhlopříčka  $AC$ .
- 114** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li délku strany  $|AB| = 2\sqrt{10}$  a rovnice přímek  $p: x - 2y + 1 = 0$ ,  $q: 2x + y - 3 = 0$ , na kterých leží úhlopříčky  $AC$ ,  $BD$ .
- 115** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , víte-li, že jeden vrchol čtverce je v počátku soustavy souřadnic a úhlopříčky čtverce leží na daných přímkách  $p_1: x + 2y + 5 = 0$ ,  $p_2: 2x - y = 0$ .
- 116** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li souřadnice středu čtverce  $S[2; -6]$  a rovnici přímky  $p: 5x - y + 10 = 0$ , na které leží strana  $AB$ .
- 117** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , jestliže  $S_{AC}[8; 0]$  a jestliže znáte rovnici přímky  $p: 4x + 3y + 18 = 0$ , na které leží strana  $BC$ .
- 118** Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$  tak, aby vrchol  $A$  ležel na přímce  $a: 2x - y + 1 = 0$  a vrchol  $C$  ležel na přímce  $c: x + 5y - 12 = 0$ . Střed  $S$  čtverce je  $S[-2; 1]$ .
- 119** Určete souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li vrchol  $A[4; -7]$  a víte-li, že vrcholy  $B$ ,  $C$  leží na přímce  $p: 2x - y - 10 = 0$ .
- 120** Určete souřadnice vrcholů čtverce  $ABCD$ , znáte-li vrchol  $A[-6; 6]$  a víte-li, že vrcholy  $B$ ,  $D$  leží na přímce  $q: x - 2y + 8 = 0$ .
- 121** Vypočítejte souřadnice vrcholů kosočtverce  $ABCD$ , znáte-li vrchol  $B[4; -3]$  a víte-li, že úhlopříčka  $AC$  leží na přímce  $p: 2x - y + 4 = 0$ . Dále platí  $|AC| = 2|BD|$ .
- 122** Určete souřadnice vrcholů obdélníku  $ABCD$ , znáte-li body  $B[2; 2]$ ,  $D[11; 4]$  a víte-li, že vrchol  $A$  leží na přímce  $x + 2y - 10 = 0$ .
- 123** Určete souřadnice vrcholů obdélníku  $ABCD$ , znáte-li body  $A[1; 7]$ ,  $S[-4; 6]$ , kde  $S$  je střed obdélníku, a víte-li, že vrchol  $D$  leží na přímce  $5x - y = 0$ .
- 124** Určete souřadnice vrcholů obdélníku  $ABCD$ , znáte-li body  $A[2; 0]$ ,  $B[-6; 2]$  a víte-li, že střed obdélníku  $S$  leží na přímce  $6x - y + 10 = 0$ .
- 125** Určete souřadnice vrcholů obdélníku  $ABCD$ , znáte-li body  $A[-4; 6]$ ,  $C[0; 8]$  a víte-li, že pro strany obdélníku platí  $|AB| = 2|BC|$ .

## 14.8 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

- 126** Jsou dány dva body  $A[-4; 11]$ ,  $B[2; 3]$ . Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, pro které platí  $|AX| = |BX|$ .
- 127** Je dána úsečka  $u = \{[1 - t; 2 + 2t], t \in \langle 0; 1 \rangle\}$  a bod  $A[2; 3]$ . Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině takových, pro které střed úsečky  $AX$  leží na úsečce  $u$ .
- 128** Jsou dány přímky  $p_1: 2x - y + 3 = 0$ ,  $p_2: 2x - y - 3 = 0$ . Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, které mají od přímek  $p_1$ ,  $p_2$  stejnou vzdálenost.
- 129** Jsou dány přímky  $p_1: 2x - y + 3 = 0$ ,  $p_2: 2x - y - 3 = 0$ . Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, pro které platí  $|Xp_1| = 2|Xp_2|$ .
- 130** Jsou dány přímky  $a: x - y + 4 = 0$ ,  $b: x - y - 1 = 0$ . Vyšetřete množinu středů všech úseček  $AB$ , kde  $A \in a$ ,  $B \in b$ .
- 131** Jsou dány přímky  $p_1: 3x + 4y + 1 = 0$ ,  $p_2: 3x - 4y = 0$ . Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od přímek  $p_1$  a  $p_2$ .
- 132** Je dána přímka  $p: 3x + y - 1 = 0$ . Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, které mají od přímky  $p$  vzdálenost  $\sqrt{10}$ .
- 133** Vyšetřete množinu těžišť  $T$  všech trojúhelníků  $APY$ , kde  $A[1; 0]$ ,  $P[0; 0]$  a bod  $Y$  je libovolný bod ležící na kladné poloosě  $y$ .
- 134** Vyšetřete množinu těžišť  $T$  všech trojúhelníků  $ABC$ , kde  $A[-1; -2]$ ,  $B[3; 0]$  a bod  $C$  je libovolný bod přímky  $y = 6$ .
- 135** Je dána polopřímka  $VB = \{[2-t; -1+2t], t \in \langle -1; \infty \rangle\}$ . Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, pro které platí  $|XB| = 90^\circ$ .
- 136** Jsou dány přímky  $p$ ,  $q$ , které jsou navzájem kolmé. Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, pro které platí:
- součet vzdáleností bodu  $X$  od daných dvou přímek je 5
  - rozdíl vzdáleností bodu  $X$  od daných dvou přímek je 5
  - poměr vzdáleností bodu  $X$  od daných dvou přímek je 5
- 137** Znázorněte v rovině množinu všech bodů  $X$ , pro jejichž souřadnice platí:
- $|x| + |y| = 4$
  - $|x - 2| + |y + 1| = 4$
  - $|x| - |y| = 4$
  - $|x + 1| - |y - 3| = 4$
- 138** Znázorněte v rovině množinu všech bodů  $X$ , pro jejichž souřadnice platí:
- $|x| + |y| \leq 3$
  - $|x| - |y| \leq 3$
  - $||x| - 1| + ||y| + 2| \leq 3$
  - $||x| - 1| - ||y| + 2| \leq 3$
- 139** Znázorněte v rovině množinu všech bodů  $X$ , pro jejichž souřadnice platí:
- $2|x| + 3y = 6$
  - $2x + 3|y| = 6$
  - $2|x| + 3|y| = 6$
  - $2|x - 1| + 3|y + 2| = 6$
- 140** Znázorněte v rovině množinu všech bodů  $X$ , pro jejichž souřadnice platí:
- $|x + y| \leq 2$
  - $|x - y| \leq 2$
  - $|x + y| \leq |x - y|$
  - $|x| - |y| \leq |x - y|$

## 15 Analytická geometrie v prostoru

### 15.1 Přímka v prostoru

- 1** Znázorněte dané body  $A[1; 2; 4]$ ,  $B[3; 2; -3]$ ,  $C[2; -4; 1]$ ,  $D[-2; 2; 0]$  v pravoúhlé soustavě souřadnic  
a) levotočivé, b) pravotočivé.
- 2** Napište parametrické rovnice přímky  $p$ , která je dána body  $A[1; -1; 3]$ ,  $B[2; 3; 0]$ . Potom přímku  $p$  nakreslete v soustavě souřadnic, vyznačte vnitřitelnost. Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka  $p$  protíná souřadnicové roviny. Ověrte, zda výpočet souhlasí s obrázkem.
- 3** Je dána přímka  $p = \{[1 - 2k; 2 + 3k; 1 + k], k \in \mathbb{R}\}$ .  
a) Rozhodněte, zda body  $C[5; 8; 3]$ ,  $D[3; -1; 0]$  leží na přímce  $p$ .  
b) Určete  $y, z \in \mathbb{R}$  tak, aby bod  $E[9; y; z]$  ležel na přímce  $p$ .
- 4** Jsou dány body  $A[2; 3; -1]$ ,  $B[4; 3; -2]$ .  
a) Rozhodněte, zda body  $K[0; 4; 2]$ ,  $L[2\sqrt{3}; 3; -\sqrt{3}]$  leží na přímce  $AB$ .  
b) Určete  $r, s \in \mathbb{R}$  tak, aby bod  $M[r; 2r; s]$  ležel na přímce  $AB$ .
- 5** Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka  $p = \{[2; 1 - t; 4t], t \in \mathbb{R}\}$  protíná souřadnicové roviny. Přímku  $p$  nakreslete.
- 6** Jsou dány body  $A[1; 4; 6]$ ,  $B[4; 1; -3]$ .  
a) Napište parametrické rovnice přímky  $AB$ .  
b) Napište parametrické rovnice úsečky  $AB$ .  
c) Napište parametrické rovnice polopřímky  $BA$ .  
d) Napište parametrické rovnice přímky  $p_1$ , která je pravoúhlým průmětem přímky  $AB$  do souřadnicové roviny určené osou  $x$  a osou  $y$ .  
e) Přímku  $AB$  i přímku  $p_1$  nakreslete.
- 7** Napište parametrické rovnice přímky  $q$ , která prochází bodem  $M[0; 4; 5]$  a je rovnoběžná s přímkou  $p = \{[2 + t; 1 - t; 3 + 5t], t \in \mathbb{R}\}$ .
- 8** Napište parametrické rovnice přímky  $q$ , která prochází bodem  $K[2; 4; 1]$  a je rovnoběžná s osou  $z$ . Přímku  $q$  nakreslete.
- 9** Napište parametrické rovnice přímky  $p$ , která prochází bodem  $N[1; -2; 3]$  rovnoběžně se souřadnicovou rovinou určenou osami  $y$  a  $z$  a je různoběžná s osou  $x$ .
- 10** Napište parametrické rovnice osy  $x$ .

### 15.2 Vzájemná poloha přímek v prostoru

- 11** Vyšetřete vzájemnou polohu přímek  $p, q$ . Jsou-li přímky různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku.  
a)  $p = \{[-6 + t; 7 - t; 2t], t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[-5 - k; 3 - 2k; 5 + k], k \in \mathbb{R}\}$   
b)  $p = \{[1 + t; 2 - 2t; t], t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[4 - 2k; 1 + 4k; 3 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$

- c)  $p = \{[2 - 3t; 1 + t; 4 - t], t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[-4 + 3k; 3 - k; 2 + k], k \in \mathbb{R}\}$   
d)  $p = \{[2t; 3 - t; 4 - t], t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[2 - 2k; -1 + k; 6 + 2k], k \in \mathbb{R}\}$   
e)  $p = \{[2; 4 - t; 1 + 2t], t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[1 - k; 2 + 3k; -1 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$   
f)  $p = \{[2; 1 + t; 3], t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[k; 4; 1 + k], k \in \mathbb{R}\}$

- 12** Nakreslete přímky  $p, q$ , odhadněte jejich vzájemnou polohu a potom svůj odhad ověrte výpočtem.

- a)  $p = \{[1; 0; t], t \in \mathbb{R}\}$       b)  $p = \{[3; 3; 4 - t], t \in \mathbb{R}\}$   
 $q = \{[0; 2 + 2k; -3k], k \in \mathbb{R}\}$        $q = \{[1; 1; 2k], k \in \mathbb{R}\}$

- 13** Určete hodnotu parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby přímky  $p, q$  byly různoběžné. Potom vypočítejte souřadnice průsečíku přímek  $p, q$ :

$$p = \{[2 + k; 3 - 2k; 4], k \in \mathbb{R}\}, q = \{[1 - 4t; m + t; 1 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$$

- 14** Proveďte diskusi o vzájemné poloze daných přímek  $p, q$  vzhledem k hodnotě parametru  $a \in \mathbb{R}$ :

$$p = \{[a + 3k; 1 - 2k; 2 + k], k \in \mathbb{R}\}, q = \{[2 - 6t; -9 + 4t; 7 - 2t], t \in \mathbb{R}\}$$

- 15** Jsou dány body  $A[3; 2; -1]$ ,  $B[1; -2; 1]$ ,  $C[-2; 8; 3]$ ,  $D[3; m; -1]$ . Proveďte diskusi o vzájemné poloze přímek  $AB$  a  $CD$  vzhledem k hodnotě parametru  $m \in \mathbb{R}$ .

### 15.3 Rovina

#### Parametrické rovnice roviny

- 16** Dokažte, že body  $A[2; 1; 6]$ ,  $B[0; -1; -6]$ ,  $C[-1; 2; 0]$  určují rovinu a napište její parametrické rovnice.

- a) Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých rovina  $ABC$  protíná osu  $x$ , osu  $y$  a osu  $z$ .  
b) Danou rovinu znázorněte ve zvolené soustavě souřadnic.  
c) Rozhodněte, zda body  $K[2; 4; 15]$ ,  $L[-3; 2; 6]$  leží v rovině  $ABC$ .  
d) Vypočítejte  $z \in \mathbb{R}$  tak, aby bod  $M[-2; 1; z]$  ležel v rovině  $ABC$ .

- 17** Je dána rovina  $\varrho = \{[1 + t + k; 2 + 3t - k; 5t + k], t, k \in \mathbb{R}\}$ .

- a) Vypočítejte průsečíky roviny  $\varrho$  se souřadnicovými osami a rovinu  $\varrho$  nakreslete.  
b) Napište rovnice přímek, ve kterých rovina  $\varrho$  protíná souřadnicové roviny.

- 18** Ve zvolené soustavě souřadnic nakreslete rovinu  $\sigma = \{[4; k; 2 - t], k, t \in \mathbb{R}\}$ .

#### Obecná rovnice roviny

- 19** Rozhodněte, zda dané tři body určují rovinu. V případě, že rovinu určují, napište její obecnou rovnici. Vypočítejte souřadnice průsečíků roviny s osami souřadnic a rovinu ve zvolené soustavě souřadnic znázorněte.

- a)  $A[1; 1; 1]$ ,  $B[5; 1; -3]$ ,  $C[2; 0; 2]$   
b)  $A[1; -3; -1]$ ,  $B[2; 2; 0]$ ,  $C[-4; 5; 5]$   
c)  $A[1; 2; -3]$ ,  $B[0; 1; 2]$ ,  $C[2; 3; -8]$   
d)  $A[0; 0; 0]$ ,  $B[1; 2; -2]$ ,  $C[-3; -6; -5]$

**20** Dokažte, že přímka  $p$  a bod  $A$  určují rovinu. Napište její obecnou rovnici:

- a)  $p = \{[3-t; -2+t; 4+2t], t \in \mathbb{R}\}$ ,  $A[0; -1; 5]$
- b)  $p = \{[2; 4; k], k \in \mathbb{R}\}$ ,  $A[0; 3; 0]$
- c)  $p = \{[1+t; 2-2t; 0], t \in \mathbb{R}\}$ ,  $A[1; 0; 3]$

**21** Dokažte, že přímky  $p, q$  určují rovinu. Napište její obecnou rovnici:

$$p = \{[\frac{5}{2}; 2+t; 0], t \in \mathbb{R}\}, q = \{[3; 1+k; 2], k \in \mathbb{R}\}$$

V soustavě souřadnic znázorněte přímky  $p, q$  i rovinu, kterou určují.

**22** Dokažte, že přímky  $p, q$  určují rovinu. Napište její obecnou rovnici:

$$p = \{[1-t; 2+t; 3+2t], t \in \mathbb{R}\}, q = \{[k; 1-k; 1-2k], k \in \mathbb{R}\}$$

**23** Dokažte, že přímky  $p, q$  určují rovinu. Napište její obecnou rovnici:

$$p = \{[2; t; 4-t], t \in \mathbb{R}\}, q = \{[1+k; 2+k; k], k \in \mathbb{R}\}$$

**24** Je dána rovina  $\varrho = \{[1-2k-2s; 2+3k-2s; 1-k+4s], k, s \in \mathbb{R}\}$ . Napište její obecnou rovnici.

**25** Přímka  $p = \{[2+2t; -1-t; 5], t \in \mathbb{R}\}$  je kolmá k rovině  $\varrho$ . Bod  $M[2; 0; -3]$  leží v rovině  $\varrho$ . Napište obecnou rovnici roviny  $\varrho$ .

**26** Napište obecnou rovnici roviny  $\sigma$ , víte-li, že v rovině leží body  $A[3; 4; 5]$ ,  $B[-2; 1; 0]$  a osa  $y$  je rovnoběžná s rovinou  $\sigma$ .

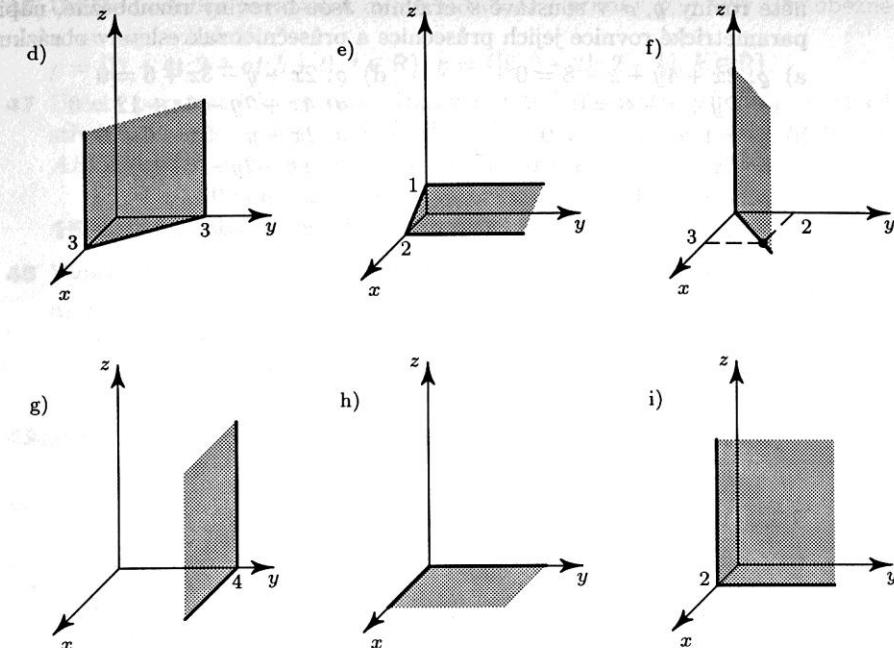
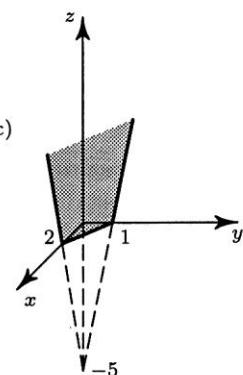
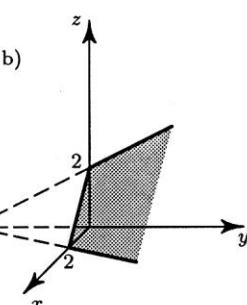
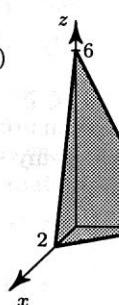
**27** Napište obecnou rovnici roviny  $\psi$ , víte-li, že rovina  $\psi$  prochází počátkem soustavy souřadnic, bodem  $A[1; 2; 3]$  a rovina  $\psi$  je kolmá k souřadnicové rovině dané osami  $x$  a  $y$ .

**28** Napište obecnou rovnici roviny  $\tau$ , která prochází bodem  $T[4; 3; 2]$  rovnoběžně se souřadnicovou rovinou určenou osami  $y$  a  $z$ .

**29** Napište obecnou rovnici roviny  $\varrho$ , ve které leží body  $A[2; 3; 0]$ ,  $B[-1; 2; 2]$  a rovina  $\varrho$  je kolmá k rovině  $\sigma: 3x-2y+z+6=0$ .

**30** Kolmicemi sestrojenými z bodu  $A[-2; 1; 8]$  na rovinu  $\varrho: 3x+y-2z-4=0$  a  $\sigma: x+2y-z+5=0$  proložte rovinu  $\tau$ . Určete její obecnou rovnici.

**31** Napište obecné rovnice nakreslených rovin.



## 15.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

**32** Vyšetřete vzájemnou polohu přímky  $p$  a roviny  $\varrho$ .

- a)  $p = \{[2+t; 3+2t; 1-t], t \in \mathbb{R}\}$ ,  $\varrho: x-2y+z-5=0$
- b)  $p = \{[1-2k; 5-k; -3+5k], k \in \mathbb{R}\}$ ,  $\varrho: 3x-y+z-11=0$
- c)  $p = \{[2s; 4+s; -1], s \in \mathbb{R}\}$ ,  $\varrho: x-2y-3z+5=0$

**33** Vyšetřete vzájemnou polohu přímky  $AB$ ,  $A[-2; 0; -1]$ ,  $B[2; 1; 4]$  a roviny  $\varrho$ , která je dána body  $K[0; 0; 3]$ ,  $L[-2; -1; 1]$ ,  $M[0; 1; 4]$ .

**34** Vyšetřete vzájemnou polohu přímky  $q$  a roviny  $\sigma$ .

$$q = \{[2+t; 3t; 1-t], t \in \mathbb{R}\}, \sigma = \{[1+s+2r; 3s+3r; 1-s-3r], s, r \in \mathbb{R}\}.$$

**35** Dokažte, že přímka  $p = \{[2+k; -2k; 3], k \in \mathbb{R}\}$  je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou určenou osami  $x$  a  $y$ . Nakreslete obrázek.

**36** Určete hodnoty parametrů  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby přímka

$$p = \{[a-t; 1+bt; 2-2t], t \in \mathbb{R}\}$$
 byla s rovinou  $\varrho: x+2y-z-10=0$

- a) různoběžná,
- b) ležela v rovině  $\varrho$ ,
- c) rovnoběžná a neležela v rovině  $\varrho$ .

## 15.5 Vzájemná poloha dvou rovin

**37** Vyšetřete vzájemnou polohu rovin  $\varrho$  a  $\sigma$ . Ve všech případech též znázor-

něte roviny  $\varrho$ ,  $\sigma$  v soustavě souřadnic. Jsou-li roviny různoběžné, napište parametrické rovnice jejich průsečnice a průsečnici zakreslete v obrázku.

- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\varrho: 2x + 4y + z - 8 = 0$ | d) $\varrho: 2x + y - 3z + 6 = 0$ |
| $\sigma: 2y + z - 6 = 0$          | $\sigma: 4x + 2y - 6z + 12 = 0$   |
| b) $\varrho: x + y - z - 2 = 0$   | e) $\varrho: 2x + y - 2z + 6 = 0$ |
| $\sigma: 2x - y + z - 4 = 0$      | $\sigma: 4x + 2y - 4z + 6 = 0$    |
| c) $\varrho: x + y - 4 = 0$       | f) $\varrho: x - 4 = 0$           |
| $\sigma: y + 2z - 6 = 0$          | $\sigma: y - 2 = 0$               |

38 Vyšetřete vzájemnou polohu rovin  $\varrho$  a  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}\varrho &= \{[3 + t - k; 5 + t; -t + 2k], t, k \in \mathbb{R}\} \\ \sigma &= \{[3 + s - 4p; 6 + 2s - 3p; 1 + 5p], s, p \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

39 Určete hodnoty parametrů  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby roviny

$$\varrho: x + by + z - 7 = 0, \sigma: ax + 4y - z + 3 = 0 \text{ byly}$$

- a) rovnoběžné,      b) různoběžné,      c) navzájem kolmé.

## 15.6 Vzájemná poloha tří rovin

40 Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\varrho_1: 2x - y + z - 5 = 0$ | c) $\varrho_3: x - y + 2z - 1 = 0$ |
| $\sigma_1: x + y + 3z - 6 = 0$     | $\sigma_3: x + 2y - z + 2 = 0$     |
| $\tau_1: 3x + 2y - 4z + 7 = 0$     | $\tau_3: x - 2y + 3z - 2 = 0$      |
| b) $\varrho_2: x + y + z - 3 = 0$  | d) $\varrho_4: x + y - z - 1 = 0$  |
| $\sigma_2: 3x - 2y + z - 8 = 0$    | $\sigma_4: x + y + z + 2 = 0$      |
| $\tau_2: 4x - y + 2z + 1 = 0$      | $\tau_4: 2x + 2y - 2z + 1 = 0$     |

## 15.7 Odchylka dvou přímek

41 Vypočítejte odchylku přímek  $p, q$ .

- |  |   |
|--|---|
| a) $p = \{[2 + t; t; 7 - 2t], t \in \mathbb{R}\}$      | c) $p = \{[2 + t; 2t; -3t], t \in \mathbb{R}\}$     |
| $q = \{[4 - k; 5; -3 + k], k \in \mathbb{R}\}$         | $q = \{[1 - k; 2 - 2k; 3 + 3k], k \in \mathbb{R}\}$ |
| b) $p = \{[2 - 2t; 1 + t; 4 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ | d) $p = \{[2; 3; t], t \in \mathbb{R}\}$            |
| $q = \{[1 + k; 1 - k; 4 - k], k \in \mathbb{R}\}$      | $q = \{[k; 0; -k], k \in \mathbb{R}\}$              |

42 Body  $A[2; -2; 1]$ ,  $B[0; 2; 1]$ ,  $C[9; -6; 6]$  určují trojúhelník  $ABC$ . Vypočítejte:

- a) úhel  $\alpha$  v  $\triangle ABC$       b) odchylku přímek  $AC, AB$

43 Je dána přímka  $p = \{[1 + 3t; 2 - t; 4t], t \in \mathbb{R}\}$ . Vypočítejte s přesností na minuty

- a) odchylku  $\alpha$  přímky  $p$  a osy  $x$ ,
- b) odchylku  $\beta$  přímky  $p$  a osy  $y$ ,
- c) odchylku  $\gamma$  přímky  $p$  a osy  $z$ .
- d) Dokažte, že platí:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

44 Je dán bod  $A[2; -1; 0]$  a přímka  $p = \{[3 + t; 1 - t; -3], t \in \mathbb{R}\}$ . Na přímce  $p$  určete bod  $M$  tak, aby odchylka přímek  $AM$  a  $p$  byla a)  $90^\circ$ , b)  $60^\circ$ .

45 Vypočítejte odchylku průsečnice rovin  $\varrho: 2x + y - z + 3 = 0$  a  $\sigma: x + y - 5 = 0$  od osy  $z$ .

46 Určete hodnoty parametrů  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby přímky  $p, q$  byly různoběžné a navzájem kolmé.

$$p = \{[1 + 4t; 2 + at; b + t], t \in \mathbb{R}\}, q = \{[9; 2 + 2k; 2 - k], k \in \mathbb{R}\}.$$

47 Určete parametrické rovnice přímky  $p$ , víte-li, že platí: přímka  $p$  prochází středem úsečky  $AB$ ,  $A[-1; 4; 5]$ ,  $B[2; -2; -1]$ , přímka  $p$  je kolmá na úsečku  $AB$  a zároveň je kolmá na přímku  $KL$ , kde  $K[1; 0; 0]$ ,  $L[0; 1; 0]$ .

## 15.8 Odchylka přímky od roviny

48 Vypočítejte odchylku přímky  $p$  od roviny  $\varrho$ .

- |  |  |
|--|--|
| a) $p_1 = \{[4 - 2t; 1 - 2t; t], t \in \mathbb{R}\}$ | c) $p_3 = \{[1 + t; 2 - t; 9 - t], t \in \mathbb{R}\}$ |
| $\varrho_1: x + 4y + z - 1 = 0$                      | $\varrho_3: 2x - y + 3z - 5 = 0$                       |
| b) $p_2 = \{[t; 5; 2 + t], t \in \mathbb{R}\}$       | d) $p_4 = \{[t; t; 0], t \in \mathbb{R}\}$             |
| $\varrho_2: x + z - 7 = 0$                           | $\varrho_4: x - y = 0$                                 |

49 Vypočítejte odchylku osy  $z$  od roviny  $\varrho: 2x - 2y + z + 11 = 0$ . Výsledek uveďte s přesností na minuty.

50 Vypočítejte odchylku přímky  $p = \{[2 + 2t; -1 - 3t; 3 + \sqrt{3}t], t \in \mathbb{R}\}$  od souřadnicové roviny určené osami  $y$  a  $z$ .

51 Je dána přímka  $p = \{[1+t; 2+at; -1-t], t \in \mathbb{R}\}$  a rovina  $\varrho: x + y - z + 8 = 0$ . Určete hodnotu parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo:

- a)  $p \perp \varrho$       c) odchylka přímky  $p$  od roviny  $\varrho$  je  $30^\circ$       b)  $p \parallel \varrho$

## 15.9 Odchylka dvou rovin

52 Vypočítejte odchylku daných dvou rovin  $\varrho, \sigma$ .

- |                                      |                                  |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| a) $\varrho_1: 2x + y - z + 4 = 0$   | c) $\varrho_3: x - y + z = 0$    |
| $\sigma_1: 2x + 4y + 2z - 5 = 0$     | $\sigma_3: 2x - 2y + 2z - 4 = 0$ |
| b) $\varrho_2: 2x + 3y - 4z + 1 = 0$ | d) $\varrho_4: x - y + 9 = 0$    |
| $\sigma_2: 4x - 4y - z - 7 = 0$      | $\sigma_4: y - 11 = 0$           |

53 Vypočítejte odchylku roviny  $\varrho: 2x + 2y - z - 8 = 0$  od souřadnicové roviny určené osami  $x$  a  $y$ . Výsledek uveďte s přesností na minuty.

54 Určete všechny hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby roviny  $\varrho: ax - y + 2z - 5 = 0$  a  $\sigma: x + y - 2z + 1 = 0$  byly

- a) navzájem kolmé,      b) navzájem rovnoběžné.

## 15.10 Vzdálenost dvou bodů v prostoru

55 Dokažte, že dané tři body  $A[2; 3; -1]$ ,  $B[4; 1; 0]$ ,  $C[-2; -1; 3]$  jsou vrcholy trojúhelníku a vypočítejte jeho obvod.

56 Jsou dány body  $A[1; 2; 3]$ ,  $B[-3; 0; -2]$ . Na ose  $x$  určete bod  $X$  tak, aby platilo  $|AX| = |BX|$ .

57 Je dán bod  $A[-1; 4; -2]$ . Na ose  $y$  určete bod  $Y$  tak, aby platilo  $|AY| = 3$ .

58 Na ose  $z$  určete bod  $C$  tak, aby trojúhelník  $ABC$  byl rovnoramenný se základnou  $AB$ ,  $A[3; -2; 4]$ ,  $B[0; -1; -2]$ .

59 Na přímce  $AB$ ,  $A[1; 4; -3]$ ,  $B[0; 2; -1]$  najděte bod  $M$  tak, aby platilo  $|AM| = 1$ .

## 15.11 Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

**60** Vypočítejte vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $p$ .

- $A[0; 2; 3]$ ,  $p = \{[3 + t; 5 + 2t; -t], t \in \mathbb{R}\}$
- $A[4; -6; 1]$ ,  $p = \{[3 + t; 1 + t; -1], t \in \mathbb{R}\}$
- $A[4; 5; 3]$ ,  $p = \{[2 + t; 7 - t; 1 + t], t \in \mathbb{R}\}$
- $A[0; 0; 5]$ ,  $p = \{[2; 0; t], t \in \mathbb{R}\}$

**61** V trojúhelníku  $ABC$  vypočítejte výšku  $v_a$ , znáte-li  $A[1; 2; 3]$ ,  $B[3; 6; 2]$ ,  $C[-1; 10; -2]$ .

**62** Je dáná přímka  $p = \{[2 + k; 1 - k; 1 - k], k \in \mathbb{R}\}$ . Na ose  $x$  určete bod  $X$  tak, aby jeho vzdálenost od přímky  $p$  byla 2.

**63** Na přímce  $q = \{[4 + k; 2; 2 + k], k \in \mathbb{R}\}$  určete bod  $M$  tak, aby vzdálenost bodu  $M$  od přímky  $p = \{[3 - 2t; t; 1], t \in \mathbb{R}\}$  byla 4.

**64** Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek  $p = \{[1 - t; 1 + 2t; -t], t \in \mathbb{R}\}$  a  $q = \{[2 + k; 1 - 2k; 2 + k], k \in \mathbb{R}\}$ .

**65** V rovině  $\varrho: x + y - z + 1 = 0$  určete bod  $M$  tak, aby jeho vzdálenost od přímky  $p = \{[2 + t; 3; t], t \in \mathbb{R}\}$  byla 6 a současně vzdálenost bodu  $M$  od souřadnicové roviny dané osami  $x, y$  byla 4.

## 15.12 Vzdálenost bodu od roviny

**66** Vypočítejte vzdálenost bodu  $A[4; 2; -3]$  od roviny  $\varrho: 2x - 2y + z + 5 = 0$ .

**67** Jsou dány body  $A[-1; 4; 5]$ ,  $B[2; -2; -1]$ ,  $C[0; -1; -3]$ . Na ose  $z$  určete bod  $Z$  tak, aby jeho vzdálenost od roviny určené body  $A, B, C$  byla 5.

**68** Vypočítejte vzdálenost počátku soustavy souřadnic od roviny určené přímkami  $p = \{[t; 2t; 4 - t], t \in \mathbb{R}\}$ ,  $q = \{[1 - k; 1 - 2k; 3 + k], k \in \mathbb{R}\}$ .

**69** Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných rovin  $\varrho: 2x + y - 2z - 3 = 0$ ,  $\sigma: 2x + y - 2z - 1 = 0$ .

**70** Na přímce  $p = \{[k; 3 + k; 2 + 4k], k \in \mathbb{R}\}$  určete bod  $M$  tak, aby jeho vzdálenost od roviny  $\tau: 2x + y - z + 12 = 0$  byla  $2\sqrt{6}$ .

**71** Na přímce  $p = \{[2 + 4t; 1 - t; 3 + 2t], t \in \mathbb{R}\}$  určete bod  $M$  tak, aby jeho vzdálenost od souřadnicové roviny určené osami  $x$  a  $y$  byla 7.

**72** Určete  $z_M \in \mathbb{R}$  tak, aby vzdálenost bodu  $M[4; 3; z_M]$  od roviny dané přímkami  $p = \{[-1 + t; 2; 2 - t], t \in \mathbb{R}\}$ ,  $q = \{[2; 3 + k; k], k \in \mathbb{R}\}$  byla  $5\sqrt{3}$ .

## 15.13 Vzdálenost mimoběžek

**73** Vypočítejte vzdálenost mimoběžek:

- $p_1 = \{[2 + 2t; 1 - t; 2 + t], t \in \mathbb{R}\}$       b)  $p_2 = \{[2; 3; 5 + t], t \in \mathbb{R}\}$   
 $q_1 = \{[1 - k; 3 + k; 6], k \in \mathbb{R}\}$        $q_2 = \{[0; 1 + k; 4 - k], k \in \mathbb{R}\}$

Nakreslete obrázek pro úlohu b), tj. v soustavě souřadnic narýsujte mimoběžky  $p_2, q_2$  a potom vyznačte jejich vzdálenost.

## 15.14 Souměrnosti v prostoru

**74** Určete souřadnice bodu  $A'$ , který je obrazem bodu  $A[5; 3; -4]$  ve středové souměrnosti dané středem souměrnosti  $S[-6; 4; 1]$ .

**75** Určete souřadnice bodu  $A'$ , který je obrazem bodu  $A[2; -3; 6]$  v osové souměrnosti dané osou  $o = \{[2 - t; 3 + t; 2t], t \in \mathbb{R}\}$ .

**76** Určete souřadnice bodu  $C'$ , který je obrazem bodu  $C[-3; 0; 2]$  v osové souměrnosti dané přímkou  $AB$ , kde  $A[0; -2; 4]$ ,  $B[-5; 3; -6]$ .

**77** Určete souřadnice bodu  $M'$ , který je s bodem  $M[1; 0; 2]$  souměrný podle roviny  $\varrho: x - 2y - z + 13 = 0$ .

**78** Je dáná přímka  $p = \{[2 - 2k; 1 - k; 3 + 2k], k \in \mathbb{R}\}$ . Určete parametrické rovnice přímky  $p'$ , která je s přímkou  $p$  středově souměrná  
a) podle počátku,  
b) podle středu  $S[4; -1; 3]$ .

**79** Je dáná přímka  $p = \{[-k; 1 + 2k; 4 + k], k \in \mathbb{R}\}$ . Určete parametrické rovnice přímky  $p'$ , která je s přímkou  $p$  souměrná  
a) podle roviny  $\varrho: 2x + y + 3z - 10 = 0$ ,  
b) podle souřadnicové roviny dané osami  $x$  a  $y$ ,  
c) podle roviny  $\sigma: x - 5 = 0$ .

**80** Určete obecnou rovnici roviny  $\varrho'$ , která je s rovinou  $\varrho: 2x - y + z = 0$  souměrná podle roviny  $\sigma: x + y - 4 = 0$ . Potom určete obecnou rovnici druhé roviny, která tvoří též rovinu souměrnosti rovin  $\varrho$  a  $\varrho'$ .

**81** Světelný paprsek, který vychází z bodu  $A[1; -2; 3]$ , se odráží od dané roviny  $\varrho: x + y - z + 1 = 0$  do bodu  $B[3; 4; 11]$ . Určete souřadnice bodu odrazu.

## 15.15 Další úlohy

**82** Dokažte, že body  $A[3; 0; 3]$ ,  $B[4; 2; 1]$ ,  $C[2; 1; -1]$ ,  $D[1; -1; 1]$  jsou vrcholy čtverce.

**83** Dokažte, že body  $K[5; 1; -2]$ ,  $L[2; 4; -2]$ ,  $M[2; 1; 1]$ ,  $N[2; -2; -2]$  nemohou být vrcholy čtverce.

**84** Dokažte, že body  $A[2; -1; 4]$ ,  $B[-2; 1; -2]$ ,  $C[0; 2; 0]$ ,  $D[2; 1; 3]$  jsou vrcholy lichoběžníku.

**85** Dokažte, že body  $K[1; 0; 3]$ ,  $L[-1; 2; 2]$ ,  $M[2; -1; -1]$  jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Vypočítejte souřadnice bodu  $X$  tak, aby body  $KLXM$  byly vrcholy obdélníku.

**86** Jsou dány body  $A[-1; 4; 5]$ ,  $B[2; -2; -1]$ ,  $C[0; -1; -3]$ ,  $D[2; 0; m]$ . Určete hodnotu parametru  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby body  $A, B, C, D$  byly vrcholy čtyřúhelníku.

## 15.16 Úlohy na tělesech

V následujících úlohách nejprve situaci narýsujte ve volném rovnoběžném promítání, potom zvolte vhodně soustavu souřadnic a úlohy řešte pomocí analytické geometrie. Odpověď k úloze však napište tak, aby nezávisela na vaši volbě soustavy souřadnic.

**87** Krychle  $ABCDEFGH$  má hranu  $a = 4$ . Bod  $K$  je střed úsečky  $EG$ , bod  $L$  leží na hraně  $GH$ ,  $|GL| = 1$ , bod  $M$  leží na hraně  $BC$ ,  $|BM| = 1$ .

a) Sestrojte řez krychle rovinou  $KLM$ .

b) Vypočítejte délky úseček  $AX_1, BX_2, CX_3$ , kde  $X_1, X_2, X_3$  jsou body, ve kterých rovina  $KLM$  postupně protíná přímky  $AE, AB, CG$ .

**88** Pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$  má rozměry  $|AB| = 4$ ,  $|VV_1| = 6$ , kde  $V_1$  je střed podstavy  $ABCD$ . Zvolte body  $K, L, M$  tak, aby platilo:  $K \in AB$  a  $|BK| = 3|AK|$ ,  $L \in BC$  a  $|CL| = 3|BL|$ ,  $M$  je střed  $DV$ .

a) Sestrojte řez jehlanu rovinou  $KLM$ .

b) Vypočítejte délky úseček  $AX_1, BX_2, CX_3$ , kde  $X_1, X_2, X_3$  jsou body, ve kterých rovina  $KLM$  protíná přímky  $AV, BV, CV$ .

**89** Krychle  $ABCDEFGH$  má hranu  $a = 4$ . Zvolte body  $P, Q$  tak, aby platilo: bod  $A$  leží v jedné třetině úsečky  $DP$  od  $P$ , bod  $G$  je středem úsečky  $CQ$ .

a) Sestrojte body  $P_1, P_2$ , ve kterých přímka  $PQ$  protíná povrch krychle.

b) Vypočítejte délku úsečky  $P_1P_2$ , která je průnikem přímky  $PQ$  s danou krychlí.

**90** Pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$  má výšku  $v = 6$ , délku hrany  $|AB| = 4$ . Označte  $S$  střed hrany  $AV$ ,  $T$  těžiště trojúhelníku  $BCV$ . Vypočítejte délku úsečky  $ST$ .

**91** Krychle  $ABCDEFGH$  má hranu  $a = 4$ . Střed hrany  $AE$  označte  $K$ , střed hrany  $AB$  označte  $L$ . Bod  $M$  je vnitřní bod hrany  $FG$  a platí  $|FM| = 3|GM|$ .

a) Vyšetřete vzájemnou polohu přímky  $AG$  a roviny  $KLM$ .

b) Vypočítejte v jakém poměru dělí rovina  $KLM$  úsečku  $FD$ .

**92** Krychle  $ABCDEFGH$  má hranu  $a = 4$ .  $S_1$  je střed  $EH$ ,  $S_2$  je střed  $FG$ , bod  $M$  leží na hraně  $DH$  tak, že  $|HM| = 3|DM|$ . Na přímce  $S_1S_2$  určete bod  $X$  tak, aby přímky  $CX$  a  $FM$  byly různoběžné.

**93** Krychle  $ABCDEFGH$  má hranu  $a = 4$ . Vypočítejte vzdálenost středu hrany  $FG$  od přímky  $DS$ , kde bod  $S$  je střed hrany  $AE$ .

**94** Pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$  má výšku  $v = 6$ , hranu  $|AB| = 4$ . Označte  $M$  střed hrany  $VC$ . Vypočítejte vzdálenost bodu  $M$  od přímky  $AB$ .

**95** Krychle  $ABCDEFGH$  má hranu  $a = 4$ . Bod  $S$  je střed hrany  $AE$ . Vypočítejte vzdálenost bodu  $E$  od roviny  $FHS$ .

**96** Krychle  $ABCDEFGH$  má hranu  $a$ . Bod  $K$  je střed hrany  $EH$ , bod  $L$  je střed hrany  $BC$ .

a) Vypočítejte odchylku přímek  $BK$  a  $AG$ .

b) Vypočítejte odchylku přímky  $BK$  od roviny  $ALG$ .

c) Vypočítejte odchylku rovin  $BCK$  a  $ALH$ .

**97** Pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$  má výšku  $v = 6$ , délku hrany  $|AB| = 4$ . Označte postupně  $K, L, M$  středy hran  $AB, AD, CV$ . Vypočítejte

a) vzdálenost bodu  $V$  od roviny  $KLM$ ,

b) odchylku přímek  $KM$  a  $CV$ ,

c) odchylku přímky  $AV$  od roviny  $KLM$ ,

d) odchylku rovin  $KLM$  a  $ABC$ .

**98** Pravidelný čtyřstěn  $ABCD$  má délku hrany  $|AB| = 4$ . Vypočítejte

a) odchylku přímek  $AB$  a  $CD$ ,

b) odchylku přímek  $S_{AB}S_{CD}$  a  $S_{BC}S_{AD}$ ,

c) odchylku rovin  $ABC$  a  $ACD$ .

**99** Krychle  $ABCDEFGH$  má hranu  $a = 4$ . Vypočítejte vzdálenost mimoběžek  $BH$  a  $DG$ .

**100** Pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$  má výšku  $v = 6$ , délku hrany  $|AB| = 4$ . Vypočítejte vzdálenost mimoběžek  $RS$  a  $AD$ , kde  $R$  je střed hrany  $AB$  a  $S$  je střed hrany  $CV$ .

## 16.1 Kružnice

- 1** Načrtněte kružnici (určete souřadnice středu a poloměr), jestliže znáte její rovnici:
- $x^2 + y^2 = 9$
  - $(x - 1)^2 + y^2 = 16$
  - $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$
- 2** Napište rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a prochází bodem  $A[1; 1]$ .
- 3** Napište rovnici kružnice, která má střed  $S[2; 1]$  a prochází bodem  $K[6; -2]$ . Potom vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých kružnice protíná osy  $x$  a  $y$ .
- 4** Napište rovnici kružnice, víte-li, že úsečka  $AB$ ,  $A[-1; 5]$ ,  $B[3; 7]$  je její průměr.
- 5** Napište rovnici kružnice, která prochází body  $K[3; 2]$ ,  $L[1; -4]$  a má střed:
- na ose  $x$
  - na ose  $y$
  - na přímce  $y = x$
  - na přímce  $y = -x$
  - na přímce  $x - y + 9 = 0$
  - na přímce  $x + 3y + 1 = 0$
- 6** Napište rovnici kružnice, která prochází body  $R[-3; 2]$ ,  $S[-1; 4]$ ,  $T[3; 0]$ .
- 7** Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ . Vypočítejte souřadnice středu a poloměr.
- $A[-5; 0]$ ,  $B[2; -1]$ ,  $C[1; 2]$
  - $A[0; 0]$ ,  $B[4; 0]$ ,  $C[4; 8]$
- 8** Napište rovnici kružnice, která má střed v bodě  $S[-5; 4]$  a dotýká se přímky  $p$ :  $3x - 4y + 6 = 0$ .
- 9** Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy  $y$  v bodě  $Y[0; -4]$  a osu  $x$  protíná v bodě  $X[6; 0]$ .
- 10** Napište rovnici kružnice, která se osy  $x$  dotýká v bodě  $T[3; 0]$  a prochází bodem  $M[0; 1]$ .
- 11** Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky  $p$ :  $3x + 4y - 15 = 0$ , její střed leží na přímce  $q$ :  $x + 2y + 6 = 0$  a poloměr je 5.
- 12** Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky  $p$ :  $2x - y - 4 = 0$  v bodě  $P[3; 2]$  a má poloměr  $r = 2\sqrt{5}$ .
- 13** Napište rovnici kružnice, která má střed  $S[-5; 4]$  a na přímce  $p$ :  $y = 2x + 4$  vytíná tětu délky 8.
- 14** Napište rovnici kružnice, která prochází body  $E[3; 2]$ ,  $F[1; 4]$  a dotýká se osy  $x$ .
- 15** Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy  $x$  i osy  $y$ . Střed kružnice leží na přímce  $p$ :  $x + 3y - 4 = 0$ .
- 16** Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy  $x$  i osy  $y$ . Její střed leží na přímce  $q$ :  $x - y + 3 = 0$ .
- 17** Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy  $x$  i osy  $y$  a prochází bodem  $M[3; -6]$ .
- 18** Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek  $p_1$ :  $y = 2$ ,  $p_2$ :  $y = 0$  a prochází bodem  $M[-\frac{5}{2}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}]$ .

**19** Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek  $p_1$ :  $x = -2$ ,  $p_2$ :  $y = 1$  a prochází bodem  $M[1; -5]$ .

**20** Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek  $p_1$ :  $3x - 4y + 1 = 0$ ,  $p_2$ :  $3x - 4y + 5 = 0$ . Její střed leží na přímce  $q$ :  $3x + 2y = 0$ .

**21** Napište rovnici kružnice, která prochází bodem  $M[1; 1]$  a dotýká se daných přímek  $p_1$ :  $x + y - 6 = 0$ ,  $p_2$ :  $x + y + 2 = 0$ .

**22** Napište rovnici kružnice, která prochází bodem  $M[2; 1]$  a dotýká se daných přímek  $p_1$ :  $x - y - 3 = 0$ ,  $p_2$ :  $7x + y + 3 = 0$ .

**23** Napište rovnici kružnice vepsané trojúhelníku  $KLM$ , je-li  $K[2; 1]$ ,  $L[6; 4]$ ,  $M[6; 1]$ .

**24** Napište rovnici kružnice, která se dotýká kružnice  $k$ :  $(x + 2)^2 + y^2 = 8$ , přímky  $p$ :  $x - y + 8 = 0$ . Její střed leží na kolmici vedené středem kružnice  $k$  na přímkou  $p$ .

**25** Napište rovnici kružnice, která je obrazem kružnice  $k$ :  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ , a) ve středové souměrnosti dané středem  $S[0; 5]$ ,

b) v osové souměrnosti dané osou  $o$ :  $-2x + y - 5 = 0$ ,

c) ve stejnolehlosti se středem  $S[-2; 3]$  a koeficientem  $\kappa = -\frac{1}{2}$ ,

d) v otočení se středem  $O[1; 3]$  a úhlem otočení  $\alpha = 90^\circ$ .

## 16.2 Elipsa

**26** Načrtněte elipsu (určete délky poloos  $a$ ,  $b$ , excentricitu  $e$ , souřadnice středu  $S$ , souřadnice ohnisek  $F_1$ ,  $F_2$ ):

a)  $4x^2 + 9y^2 = 36$     b)  $25x^2 + y^2 = 100$     c)  $(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 = 1$

**27** Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech  $F_1[-3; 2]$ ,  $F_2[3; 2]$  a hlavní poloosu 5.

**28** Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech  $F_1[1; 8]$ ,  $F_2[1; 0]$  a vedlejší poloosu 3.

**29** Napište rovnici elipsy, která má ohniska  $F_1[3; 1]$ ,  $F_2[5; 1]$  a hlavní vrchol  $A[7; 1]$ .

**30** Napište rovnici elipsy, která má ohniska  $F_1[-2; -2]$ ,  $F_2[-2; 6]$  a hlavní vrchol  $A[-2; 7]$ .

**31** Napište rovnici elipsy, znáte-li jedno ohnisko  $F_1[3; -2]$  a vedlejší vrcholy  $C[6; 2]$ ,  $D[6; -6]$ .

**32** Napište rovnici elipsy, znáte-li hlavní vrcholy  $A[-4; -1]$ ,  $B[3; -1]$  a vedlejší vrchol  $C[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ .

**33** Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, dotýká se osy  $x$  i osy  $y$  a její střed je v bodě a)  $S[4; -2]$ , b)  $S[-1; 3]$ .

**34** Napište rovnici elipsy, která se dotýká osy  $x$  v bodě  $X[-4; 0]$  a osy  $y$  v bodě  $Y[0; -3]$ .

**35** Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu totožnou s osou  $x$ , její střed je v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosa má délku 4 a elipsa prochází bodem  $M[-2\sqrt{3}; 1]$ .

**36** Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu totožnou s osou  $y$ , střed má v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosa má délku  $4\sqrt{2}$  a elipsa prochází bodem  $M[-2\sqrt{2}; 4]$ .

**37** Napište rovnici elipsy, která má osy shodné s osami soustavy souřadnic a prochází body  $M[-6; \sqrt{7}]$ ,  $N[3\sqrt{2}; 4]$ .

**38** Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed  $S[-3; 1]$  a prochází body  $K[9; 9]$ ,  $L[13; -5]$ .

**39** Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed  $S[-2; 3]$ , dotýká se osy  $x$  a osu  $y$  protíná v bodě  $Y[0; \frac{3}{5}]$ .

**40** Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou  $x$ , střed  $S[2; 1]$ , hlavní poloosa je dvakrát delší než vedlejší poloosa a elipsa prochází počátkem soustavy souřadnic.

### 16.3 Hyperbola

**41** Načrtněte hyperbolu (určete délky poloos  $a$ ,  $b$ , excentricitu  $e$ , střed  $S$ , ohniska  $F_1$ ,  $F_2$ , rovnice asymptot):

- a)  $4x^2 - 9y^2 = 36$     c)  $4y^2 - 9x^2 = 36$     e)  $(x - 1)^2 - 4(y + 2)^2 = 16$   
 b)  $9x^2 - 4y^2 = 36$     d)  $x^2 - y^2 = 4$     f)  $2x^2 - (y - 3)^2 = 1$

**42** Napište rovnici hyperboly, která má ohniska v bodech  $F_1[-2; 0]$ ,  $F_2[18; 0]$  a hlavní poloosu o délce 8.

**43** Napište rovnici hyperboly s ohnisky  $F_1[1; 1]$ ,  $F_2[1; 11]$  a vedlejší poloosou o délce 4.

**44** Napište rovnici hyperboly, která má ohniska  $F_1[-2; 1]$ ,  $F_2[6; 1]$  a hlavní vrchol  $A[4; 1]$ .

**45** Napište rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky  $F_1[-6; 2]$ ,  $F_2[14; 2]$ .

**46** Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy  $A[0; -3]$ ,  $B[-4; -3]$  a jedno ohnisko  $F_1[-5; -3]$ .

**47** Napište rovnici hyperboly, která má osy shodné s osami soustavy souřadnic a prochází body:

- a)  $M[4; 2\sqrt{6}]$ ,  $N[2\sqrt{3}; 4]$     b)  $M[3; 5\sqrt{2}]$ ,  $N[2; 5]$

**48** Napište rovnici hyperboly, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed  $S[2; -1]$  a prochází body:

- a)  $M[30; 23]$ ,  $N[-6; 5]$     b)  $M[3; \frac{1}{2}]$ ,  $N[6; 2]$

**49** Napište rovnici hyperboly, která prochází bodem  $M[30; 24]$  a má ohniska v bodech  $F_1[0; 4\sqrt{6}]$ ,  $F_2[0; -4\sqrt{6}]$ .

**50** Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty  $a_1$ ,  $a_2$  mají rovnice  $a_1: y = 2x$ ,  $a_2: y = -2x$  a jeden vrchol je  $B[3; 0]$ .

**51** Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty  $a_1$ ,  $a_2$  mají rovnice  $a_{1,2}: y = \pm 2(x - 3)$  a jedno ohnisko je  $F_1[-2; 0]$ .

**52** Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty  $a_1$ ,  $a_2$  mají rovnice  $a_{1,2}: y - 1 = \pm 3x$  a jedno ohnisko je  $F_1[-20; 1]$ .

**53** Napište rovnici hyperboly, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, jedno ohnisko je  $F_1[0; 10]$  a rovnice jedné asymptoty je  $a_1: y = 2x$ .

**54** Napište rovnici hyperboly, která prochází počátkem soustavy souřadnic a její asymptoty jsou přímky  $a_1$ ,  $a_2$ :

- a)  $a_1: 3x - y + 9 = 0$     b)  $a_1: y = x + 2$   
 a<sub>2</sub>:  $3x + y + 3 = 0$     a<sub>2</sub>:  $y = -x + 6$

**55** a) Určete ohniska  $F_1$ ,  $F_2$  hyperboly  $x^2 - 4y^2 = 16$ . Vypočítejte vzdálenosti ohnisek od jejích asymptot.

b) Úlohu a) řešte obecně, tj. vypočítejte vzdálenosti ohnisek od asymptot hyperboly  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ .

**56** Grafem nepřímé úměrnosti  $y = \frac{1}{x}$  je rovnoosá hyperbola. Načrtněte graf. Vyznačte a vypočítejte poloosy  $a$ ,  $b$ , excentricitu  $e$ , určete ohniska  $F_1$ ,  $F_2$ .

### 16.4 Parabola

**57** Načrtněte parabolu (určete vrchol, ohnisko a rovnici řídící přímky):

- a)  $y^2 = 10x$     b)  $x^2 = 4y$     c)  $y^2 = -6x$     d)  $x^2 = -\frac{1}{2}y$

**58** Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a ohnisko:

- a)  $F[2; 0]$     b)  $F[-\frac{3}{2}; 0]$     c)  $F[0; -12]$     d)  $F[0; \frac{1}{4}]$

**59** Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a řídící přímku:

- a)  $x = -1$     b)  $y = 3$     c)  $x = 8$     d)  $y = -11$

**60** Napište rovnici paraboly, která má vrchol  $V[2; -5]$  a řídící přímku:

- a)  $x = 4$     b)  $x = -3$     c)  $y = 5$     d)  $y = -6$

**61** Napište rovnici paraboly, která má ohnisko  $F[3; -1]$  a řídící přímku:

- a)  $y = 5$     b)  $y = -3$     c)  $x = 7$     d)  $x = 1$

**62** Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osa paraboly je shodná s osou  $y$  a parabola prochází bodem:

- a)  $M_1[4; 8]$     b)  $M_2[2; -6]$

**63** Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osa paraboly je shodná s osou  $x$  a parabola prochází bodem:

- a)  $N_1[-4; -1]$     b)  $N_2[4; 4]$

**64** Napište rovnici paraboly, jejíž ohnisko je  $F[0; -4]$ , tečna ve vrcholu má rovnici  $x - 4 = 0$ .

**65** Napište rovnici paraboly, která prochází bodem  $L[4; 5]$ , její osa má rovnici  $x - 2 = 0$  a tečna ve vrcholu má rovnici  $y - 1 = 0$ .

**66** Napište rovnici paraboly, znáte-li vrchol  $V[-4; -2]$  a zároveň platí:

- a) osa paraboly je rovnoběžná s osou  $x$   
 b) osa paraboly je rovnoběžná s osou  $y$

**67** Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s některou z os souřadnic, vrchol  $V[1; -4]$ , a zároveň platí:

- a) na ose  $x$  vytíná úsečku délky 8  
 b) na ose  $y$  vytíná úsečku délky 6

**68** Napište rovnici paraboly, která prochází body  $A[1; 2]$ ,  $B[5; 2]$ ,  $C[-1; 5]$ ,  $D[7; 5]$ .

**69** Napište rovnici paraboly, která prochází body  $M[-2; 3]$ ,  $N[6; 3]$ . Tečna ve vrcholu má rovnici  $y = 4$ .

**70** Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou  $x$ , prochází body  $K[0; 0]$ ,  $L[0; -4]$ . Ohnisko je  $F[0; -2]$ .

**71** Napište rovnici paraboly, která prochází body  $E[3; 8]$ ,  $F[-5; 0]$ ,  $G[-2; -2]$ . Její osa je rovnoběžná s osou  $x$ .

**72** Napište rovnici paraboly, která prochází danými body  $K[-5; 3]$ ,  $L[1; -3]$ ,  $M[-9; -13]$ . Její osa je rovnoběžná s osou  $y$ .

**73** Napište rovnici paraboly, která prochází body  $R[2; 0]$ ,  $S[0; 4]$ ,  $T[1; 1]$ . Její osa je rovnoběžná s některou osou soustavy souřadnic.

## 16.5 Obecná rovnice kuželosečky

### Kružnice

**74** Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí kružnice. V případě, že se jedná o kružnici, určete souřadnice středu a poloměr.

a)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

b)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 12x + 40 = 0$

d)  $x^2 + y^2 + 6x - y + 9 = 0$

e)  $4x^2 + 4y^2 - 16y - 9 = 0$

f)  $3x^2 + 3y^2 - \sqrt{3}x + y = 0$

### Elipsa

**75** Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí elipsy. V případě, že se jedná o elipsu, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu, ohniska.

a)  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

b)  $2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$

c)  $3x^2 + 6y^2 + 12x + 13 = 0$

d)  $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 = 0$

e)  $4x^2 + y^2 - 4x = 0$

f)  $4x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6 = 0$

### Hyperbola

**76** Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí hyperboly. V případě, že se jedná o hyperbolu, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu, ohniska, rovnice asymptot.

a)  $4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0$

b)  $9x^2 - 4y^2 + 8y + 32 = 0$

c)  $9x^2 - 4y^2 - 8y - 40 = 0$

d)  $x^2 - y^2 - 1 = 0$

e)  $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y = 0$

f)  $x^2 - 4y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$

### Parabola

**77** Úpravou na vrcholový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí paraboly. V případě, že se jedná o parabolu, určete souřadnice vrcholu, ohnisko, rovnici řídící přímky.

a)  $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

b)  $x^2 + 4x + 2y + 2 = 0$

c)  $y^2 - 3x - 2y + 7 = 0$

d)  $y^2 + x - y = 0$

e)  $4y^2 - x + 3 = 0$

f)  $2x^2 - 6x - 10y - 3 = 0$

## Další úlohy

**78** Nejprve proveďte odhad, jakou kuželosečku může daná rovnice vyjadřovat. Potom úpravou na středový (vrcholový) tvar rozhodněte, zda odhad byl správný. Určete charakteristické prvky kuželosečky. Načrtněte obrázek.

a)  $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$  1. g)  $7x^2 + 5y^2 - 14x - 10y + 18 = 0$

b)  $y^2 - 4x + 4 = 0$  hyp. h)  $x^2 - 9y^2 - 2x - 8 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$  hyp. i)  $y^2 + 3x - 4 = 0$

d)  $x^2 - 2y^2 + 4x + 12y - 23 = 0$  hyp. j)  $2x^2 - 4y^2 - 6x - 12y = 0$

e)  $x^2 - 2x - 5y + 2 = 0$  hyp. k)  $x^2 + y^2 + x + y = 0$

f)  $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$  hyp. l)  $x^2 - y^2 + x + y = 0$

## Obecná rovnice kuželosečky s parametrem

**79** Obecnou rovnici kuželosečky upravte na středový (vrcholový) tvar a proveděte diskusi vzhledem k parametru  $p \in \mathbb{R}$ .

a)  $x^2 + y^2 + x - p = 0$  d)  $x^2 + 4y - px = 0$

b)  $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + p = 0$  e)  $x^2 + y^2 + 2px + 4y + 8 = 0$

c)  $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - p = 0$  f)  $2x^2 + y^2 + py = 0$

g) Je dána obecná rovnice kuželosečky  $x^2 + py^2 = 20$ .

Proveďte diskusi vzhledem k parametru  $p \in \{0, 1, -1, 5, -5\}$ .

## 16.6 Vnitřní (vnější) oblast kuželosečky

**80** Rozhodněte, zda body  $A[0; 0]$ ,  $B[0; 3]$ ,  $C[-2; 0]$ ,  $D[2; 1]$  leží ve vnitřní nebo ve vnější oblasti dané kuželosečky.

a)  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$  c)  $x^2 - y^2 - 2 = 0$  e)  $y^2 + 2x - 8 = 0$

b)  $3x^2 + 4y^2 = 16$  d)  $x^2 - 4y^2 + 4y = 0$  f)  $(x + 2)^2 = 10y$

## 16.7 Kuželosečka a přímka

**81** Vyšetřete vzájemnou polohu přímky  $p$  a kuželosečky.

a)  $p: 2x + y - 6 = 0$ ,  $4x^2 + y^2 = 20$

b)  $p: 3x - y - 5 = 0$ ,  $2x^2 - y^2 - 2x - 5 = 0$

c)  $p: x - y - 1 = 0$ ,  $y^2 - 2x + 3 = 0$

d)  $p: 2x - y + 4 = 0$ ,  $4x^2 - y^2 - 4 = 0$

**82** Je dána kružnice  $k$  se středem  $S[1; 2]$  a poloměrem  $r = 5$ . Dále jsou dány body  $A[2; 0]$ ,  $B[5; 9]$ . Vyšetřete vzájemnou polohu kružnice  $k$  a

a) přímky  $AB$ , b) úsečky  $AB$ , c) polopřímky  $SA$ .

**83** Určete, pro které hodnoty parametru  $k \in \mathbb{R}$  má daná přímka s kuželosečkou právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

a)  $p_k: y = kx$ ,  $x^2 + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

b)  $p_k: y = kx - 2$ ,  $x^2 - y^2 = 1$

c)  $p_k: y = kx - k$ ,  $x^2 + y^2 + 2x = 0$

d)  $p_k: y = kx + 2$ ,  $x^2 + 4y^2 = 16$

**84** Určete, pro které hodnoty parametru  $c \in \mathbb{R}$  má daná přímka s kuželosečkou právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

a)  $p_c: y = x + c$ ,  $x^2 + y^2 - 2 = 0$

b)  $p_c: 8x - 4y + c = 0, y^2 - 4x = 0$

c)  $p_c: y = c, x^2 + 4y^2 = 36$

d)  $p_c: y = 2x + c, 16x^2 - 4y^2 = 1$

**85** Provedte diskusi vzhledem k parametru  $a \in \mathbb{R}$  o vzájemné poloze dané přímky  $q = \{[-1+t; a-t], t \in \mathbb{R}\}$  a kružnice  $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ .

**86** Určete hodnotu  $r \in \mathbb{R}$  tak, aby přímka  $x + 2y - 1 = 0$  byla tečnou kružnice  $x^2 + y^2 = r^2$ .

**87** Určete hodnotu  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby přímka  $x + 2y - 1 = 0$  byla tečnou paraboly  $y^2 = 2px$ .

**88** Určete hodnotu  $m \in \mathbb{R}$  tak, aby přímka  $x + 2y - 1 = 0$  byla tečnou elipsy  $x^2 + 4y^2 = m$ .

**89** Určete hodnotu  $n \in \mathbb{R}$  tak, aby přímka  $x + 2y - 1 = 0$  byla tečnou hyperboly  $x^2 - 2y^2 = n$ .

### 16.8 Tečna v bodě kuželosečky

**90** Ověřte, že bod  $T$  leží na dané kuželosečce. Potom napište rovnici tečny v bodě  $T$  dané kuželosečky.

- a)  $T[2; 0], 2x^2 - 3x + y - 2 = 0$     c)  $T[-2; 2], 4x^2 - y^2 - 12 = 0$   
 b)  $T[2; -4], x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$     d)  $T[1; 0], x^2 + 2y^2 + 4x - 5 = 0$

### 16.9 Tečna z bodu ke kuželosečce

**91** Rozhodněte, zda z bodu  $M$  lze sestrojit tečny dané kuželosečky.

- a)  $M[-8; 0], y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$   
 b)  $M[3; 4], x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$   
 c)  $M[1; -4], 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$   
 d)  $M[0; 0], x^2 - y^2 + 4x + 3 = 0$

**92** Napište rovnice tečen, které lze sestrojit z bodu  $M$  k dané kuželosečce.  
 (Určete souřadnice bodů dotyku  $T_1, T_2$ .)

- a)  $M[0; 0], x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 12 = 0$   
 b)  $M[0; -1], (x - 2)^2 + y^2 = 1$   
 c)  $M[-3; 0], x^2 + y^2 - 2y = 0$   
 d)  $M[1; -1], y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$

**93** Určete odchylku tečen, které lze sestrojit z bodu  $M$  k dané kuželosečce.

- a)  $M[0; 0], x^2 - 4y^2 - 6x - 3 = 0$   
 b)  $M[-3; 0], x^2 + y^2 - 6x = 0$   
 c)  $M[0; -2], x^2 - 8y = 0$   
 d)  $M[1; 0], x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$

### 16.10 Tečna rovnoběžná s danou přímkou

**94** Napište rovnice tečen kuželosečky, které jsou rovnoběžné s přímkou  $p$ .

- a)  $p: x + y - 1 = 0, y^2 - 3x + y - 2 = 0$   
 b)  $p: 2x - 3y = 0, x^2 + 9y^2 - 5 = 0$

c)  $p: 2x - y + 2 = 0, x^2 + y^2 - 8x - y + 5 = 0$

d)  $p: 4x - y + 3 = 0, 4x^2 - y^2 - 8x + 1 = 0$

e)  $p: x - y = 0, 9x^2 - 4y^2 - 20 = 0$

f)  $p: x - 2y = 0, x^2 - 4y^2 - 12 = 0$

### 16.11 Tečna kolmá k dané přímce

**95** Napište rovnice tečen kuželosečky, které jsou kolmé k dané přímce  $q$ .

- a)  $q: 2x - y + 6 = 0, x^2 + y^2 - x - 2y = 0$   
 b)  $q: 3x + 2y = 0, x^2 + 4y^2 = 4$   
 c)  $q: x - y = 0, x^2 - 4y^2 = 12$   
 d)  $q: x - 7 = 0, 2x^2 + y - 4 = 0$

### 16.12 Tečna daným směrem

**96** Napište rovnici tečny kuželosečky tak, aby odchylka tečny a osy  $x$  byla  $\varphi$ .

- a)  $\varphi = 45^\circ, x^2 + y^2 - x - y - 4 = 0$   
 b)  $\varphi = 45^\circ, y^2 + 4x - 8 = 0$   
 c)  $\varphi = 60^\circ, 6x^2 - 4y^2 = 1$   
 d)  $\varphi = 30^\circ, 3x^2 + y^2 = 36$

**97** Napište rovnici tečny dané kuželosečky, víte-li, že směrnice tečny je  $k$ .

- a)  $k = 2, x^2 + y^2 - 8x - y + 15 = 0$   
 b)  $k = -3, y^2 - 2x = 0$

### 16.13 Další úlohy

**98** Určete délku tětivy, kterou vytíná

- a) parabola  $y^2 = 8x$  na přímce  $y = x - 2$ ,  
 b) kružnice  $x^2 + y^2 = 10$  na přímce  $y = x - 2$ ,  
 c) elipsa  $2x^2 + y^2 = 8$  na přímce  $y = x - 2$ ,  
 d) hyperbola  $x^2 - 2y^2 = 4$  na přímce  $y = x - 2$ .

**99** Do paraboly  $y^2 = 4x$  vepište čtverec  $ABCD$  tak, aby vrchol čtverce  $A$  splýval s vrcholem paraboly, vrchol  $C$  ležel na ose paraboly a vrcholy  $B, D$  ležely na parabole. Vypočítejte souřadnice bodů  $A, B, C, D$  a stranu čtverce.

**100** Určete rovnici paraboly s vrcholem v počátku a s osou v ose  $y$  tak, aby čtverec vepsaný do této paraboly podle podmínek předchozí úlohy měl stranu  $a = 2$ .

**101** Do paraboly  $y^2 = 4x$  vepište rovnostranný trojúhelník  $ABC$  tak, aby vrchol  $A$  splýval s vrcholem paraboly a vrcholy  $B, C$  ležely na parabole. Vypočítejte souřadnice bodů  $A, B, C$  a stranu trojúhelníku  $ABC$ .

**102** Do elipsy  $x^2 + 3y^2 = 36$  vepište čtverec  $KLMN$  (tj. vrcholy  $K, L, M, N$  leží na dané elipse). Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce a jeho stranu.

**103** Do elipsy  $x^2 + 3y^2 = 36$  vepište rovnostranný trojúhelník  $KLM$  tak, aby vrchol  $K$  splýval s hlavním vrcholem elipsy a vrcholy  $L, M$  ležely na dané elipse. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku  $KLM$  a jeho stranu.

- 104** Do elipsy  $x^2 + 3y^2 = 36$  vešte rovnostranný trojúhelník  $KLM$  tak, aby vrchol  $K$  splýval s vedlejším vrcholem elipsy a vrcholy  $L, M$  ležely na dané ellipse. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku  $KLM$  a jeho stranu.
- 105** Jsou dány paraboly  $P_1: y^2 = 1 - x$  a  $P_2: y^2 = -4(x + 2)$ . Napište rovnice jejich společných tečen. Načrtněte obrázek.
- 106** Jsou dány elipsy  $E_1: 4x^2 + 5y^2 = 20$  a  $E_2: 5x^2 + 4y^2 = 20$ . Napište rovnice jejich společných tečen. Načrtněte obrázek.
- 107** Jsou dány kružnice  $K_1: x^2 + y^2 = 5$  a  $K_2: (x - 10)^2 + y^2 = 45$ . Napište rovnice jejich společných tečen. Narýsuje obrázek.
- 108** Jsou dány kružnice  $K_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  a  $K_2: x^2 + y^2 - 6x - 8 = 0$ . Vypočítejte průsečíky  $P_1, P_2$  daných kružnic. Napište rovnici přímky, která prochází body  $P_1, P_2$ .

## 16.14 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

- 109** Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, které mají od bodu  $A[-3; 6]$  dvakrát větší vzdálenost než od počátku soustavy souřadnic.
- 110** Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, které mají od bodu  $M[0; \frac{1}{4}]$  a od přímky  $p: y = -\frac{1}{4}$  stejnou vzdálenost.
- 111** Jsou dány body  $M[-1; 0], N[1; 0]$ . Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, pro které platí:
- a)  $|XM| + |XN| = 6$       c)  $|XM| - |XN| = 1$   
 b)  $|XM| + |XN| = 1$       d)  $|XN| - |XM| = 1$
- 112** Jsou dány body  $A, B$ ,  $|AB| = 6$  cm. Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, pro které platí:
- a)  $|AX| = 2|BX|$       b)  $|AX| \geq 2|BX|$       c)  $|AX| \leq 2|BX|$
- 113** Je dáná přímka  $p$  a bod  $M$ , přičemž vzdálenost bodu  $M$  od přímky  $p$  je 6 cm. Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, pro které platí:
- a)  $|XM| = |Xp|$       b)  $\frac{|XM|}{|Xp|} = \frac{1}{2}$       c)  $\frac{|XM|}{|Xp|} = 2$
- 114** Úsečka délky 3 cm se pohybuje koncovými body po dvou navzájem kolmých přímkách. Vyšetřete
- a) křivku, kterou opisuje při tomto pohybu střed úsečky,  
 b) křivku, kterou opisuje při tomto pohybu bod  $X$ , který dělí danou úsečku v poměru 2 : 1.
- 115** Jsou dány body  $M_1[\sqrt{2}; \sqrt{2}], M_2[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ . Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, pro které platí  $||XM_1| - |XM_2|| = 2\sqrt{2}$ .
- 116** Je dáná kružnice  $k(S; 2\text{ cm})$  a přímka  $p$  procházející středem  $S$ . Vyšetřete množinu všech bodů  $X$  v rovině, které dostanete následujícím způsobem: zvolte libovolný bod  $K$  na kružnici  $k$ , bodem  $K$  sestrojte kolmici  $m$  na přímku  $p$  a na ní bod  $X$  tak, aby platilo  $|Xp| = 4|Kp|$ . Tuto konstrukci postupně opakujte pro všechny body  $K$  dané kružnice.

- 117** Je dána přímka  $p$  a bod  $M$ ,  $|Mp| = 6$  cm. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které procházejí bodem  $M$  a dotýkají se přímky  $p$ .
- 118** Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice  $k(S; 5\text{ cm})$  a procházejí bodem  $M$ , pro který platí  $|SM| = 3$  cm.
- 119** Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice  $k(S; 2\text{ cm})$  a procházejí bodem  $M$ , přičemž platí  $|SM| = 6$  cm.
- 120** Je dáná kružnice  $k(S; 4\text{ cm})$  a její tečna  $t$ . Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice  $k$  a přímky  $t$ . Úlohu řešte
- a) v polovině určené tečnou  $t$  a středem kružnice  $k$ ,  
 b) v polovině opačné k polovině z úlohy a).

## 17.1 Algebraický tvar komplexního čísla

1 Vypočítejte:

a)  $2+i+3(7-i)$

d)  $(2+i)(3+i)(1+2i)$   
e)  $(i+1)(i-1)+(2i+1)^2$

c)  $(\sqrt{2}+i\sqrt{3}) \cdot i\sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot (2i\sqrt{2}-3) + i \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{3}}\right)$

2 Vypočítejte:

a)  $\frac{3i+1}{2+i}$

c)  $\frac{3i+2}{2i-3}$

e)  $\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

b)  $\frac{100}{3+4i}$

d)  $\frac{1+4i}{i}$

f)  $49(2-i\sqrt{3})^{-2}$

3 Vypočítejte:

a)  $(2+i) \cdot i + \frac{3+i}{2-i}$

d)  $(5i-1) : \left(2 - \frac{i+3}{2+i}\right)$

b)  $\frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1}$

e)  $\frac{\frac{i}{2-i} + \frac{1}{i}}{1 + \frac{1}{2i+1}}$

c)  $-\frac{i-1}{2} - \frac{i}{i-1} \cdot i + 1$

4 Dokažte, že platí:  $\frac{(\sqrt{5}+2i) \cdot (1+i)^2}{i\sqrt{5}-2} = 2$

5 Dokažte, že daná komplexní čísla  $z_1, z_2$  se sobě rovnají:

a)  $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

b)  $z_1 = \sin 135^\circ - i \cos 270^\circ$

z<sub>2</sub> =  $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{i}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

z<sub>2</sub> =  $\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin 8\pi$

6 Dokažte, že podíl  $\frac{m-3i}{3+mi}$  nezávisí na hodnotě  $m \in \mathbb{R}$ .7 Dokažte, že pro každé reálné číslo  $p$  je komplexní číslo  $z = \frac{i}{p-3i} + \frac{i}{p+3i}$  ryze imaginární.  
Potom určete  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo  $z = \frac{1}{3}i$ .8 Určete, pro která reálná čísla  $b$  je komplexní číslo  $z = \frac{8-6b-ib}{1-ib}$ 

a) reálné, b) imaginární, c) ryze imaginární.

9 Určete reálné číslo  $k$  tak, aby reálná část komplexního čísla  $z = \frac{k+2i}{k-i}$  byla rovna 0,25.10 Určete  $x \in \mathbb{R}$  tak, aby imaginární část komplexního čísla  $z = \frac{5+x-4i}{x+1-2i}$  byla rovna 0,5.

## 17.2 Mocniny imaginární jednotky i

11 Vypočítejte:

a)  $i^2; i^3; i^4; i^{50}; i^{125}; i^{505}$   
b)  $5i^{100} - 3i^{10} + 12i^{75}$   
c)  $2i^9 - i^{12} + 5i^{16} - 3i^{11}$

d)  $i^{-1}; i^{-2}; i^{-3}; i^{-4}; i^{-37}; i^{-78}$   
e)  $i^{-30} + i^{-40} + i^{-50} + i^{-60}$   
f)  $i^{-1} + 5i^{-6} - 14i^{-7}$

12 Vypočítejte:

a)  $1+i^2+i^3+i^4$   
b)  $1+i^2+i^4+i^6+i^8+i^{10}$   
c)  $1+i^3+i^5+i^7+i^9+i^{11}$   
d)  $1+i^{-1}+i^{-2}+i^{-3}+i^{-4}$   
e)  $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7 \cdot i^8 \cdot i^9 \cdot i^{10}$   
f)  $i^2 \cdot i^4 \cdot i^6 \cdot i^8 \cdot i^{10} \cdot i^{12} \cdot i^{14} \cdot i^{16} \cdot i^{18} \cdot i^{20}$

13 Vypočítejte mocniny následujících závorek:

a)  $(1+i)^2; (1-i)^2; (1+i)^{-2}; (1-i)^{-2}$   
b)  $(1+i)^3; (1-i)^3; (1+i)^{-3}; (1-i)^{-3}$   
c)  $(1+i)^4; (1-i)^4; (1+i)^{-4}; (1-i)^{-4}$

## 17.3 Znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině

14 Nakreslete obrazy komplexních čísel  $z_1 = 1+2i, z_2 = 3-i$ .Potom graficky určete: a)  $z = z_1 + z_2$  b)  $z' = z_1 - z_2$ 15 Nakreslete obrazy komplexních čísel  $z_1 = 2-i, z_2 = -2-4i$ .Potom graficky určete: a)  $2z_1$  b)  $\frac{1}{2}z_2$  c)  $z = 2z_1 + \frac{1}{2}z_2$ 16 Nakreslete obrazy komplexních čísel  $z_3 = 1+2i, z_4 = 2-i$ .Potom graficky určete: a)  $z = z_3 \cdot z_4$  b)  $z = z_3 : z_4$ 17 Nakreslete obraz komplexního čísla  $z_5 = 2+3i$ .Potom graficky určete: a)  $i \cdot z_5$  b)  $-i \cdot z_5$  c)  $z_5 : i$ 

## 17.4 Čísla komplexně sdružená

18 Napište čísla komplexně sdružená k daným číslům:

z<sub>1</sub> = 2+i      z<sub>3</sub> = 4i      z<sub>5</sub> =  $\sqrt{3} + 1 - 7i$   
z<sub>2</sub> = 7-3i      z<sub>4</sub> =  $\frac{1+5i}{3}$       z<sub>6</sub> =  $\sqrt{10} + i + i\sqrt{2}$

19 Vypočítejte čísla komplexně sdružená k daným číslům:

w<sub>1</sub> = (2+i)(3-i)      w<sub>2</sub> =  $\frac{3+4i}{1-2i}$       w<sub>3</sub> =  $\frac{4-2i}{i}$

20 Vypočítejte:

a)  $\overline{2+i} + 1 - \bar{i}$       c)  $\overline{(1+i) \cdot (3+2i)}$       e)  $\overline{(5+3i)^2}$   
b)  $\overline{3+4i} + 3 - \bar{7i}$       d)  $\overline{(1+i)} \cdot \overline{(3+2i)}$       f)  $\overline{(5+3i)^2}$

21 Vypočítejte:

a)  $\overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)}$       b)  $\overline{\frac{1+i}{2-i}}$       c)  $\overline{\frac{1+i}{2-i}}$

## 17.5 Absolutní hodnota komplexního čísla

**22** Vypočítejte:

a)  $|6 + 2i|$

c)  $|\sqrt{5} + 2 + 2i - i\sqrt{5}|$

b)  $\left| \frac{\sqrt{3} + 1}{3} - \frac{\sqrt{3} - 1}{3} \cdot i \right|$

d)  $\left| \frac{\sqrt{7}}{4}(1+i) + \frac{\sqrt{5}}{4}(1-i) \right|$

**23** Vypočítejte:

a)  $|(7+i)(4-3i)|$

c)  $\left| \frac{10i}{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}i} \right|$

e)  $\frac{\left| \frac{3-4i}{5i} \right| \cdot \left| \frac{1+i}{3-i} \right|}{|2i-1| + |-i|}$

b)  $\left| \frac{4-2i}{3+i} \right|$

d)  $\left| \frac{|4-3i|+i}{3-2i} \right|$

f)  $\left| \frac{|\sqrt{3}-i| \cdot (i-1)}{|i(i-1)| - 2i} \right|$

**24** Vypočítejte:

a)  $\frac{1+|i|+|i^2|}{2-|i|-|2i|}$

b)  $\frac{1+|i|}{i-|i-1|}$

c)  $\frac{|7i|-i+1}{i-|\sqrt{5}+2i|}$

**25** Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel  $z$ , pro která platí:

a)  $|z| = 3$

d)  $|z-2| \leq 3$

g)  $|z| = |z-2+i|$

b)  $|z-i| = 1$

e)  $|z-2-i| > 4$

h)  $|z-1-3i| \geq |z+2i|$

c)  $|z-1+i| = 2$

f)  $1 < |z+3i-2| \leq 4$

i)  $|z+i| + |z+1-i| = 4$

## Komplexní jednotka

**26** Dokažte, že dané číslo je komplexní jednotkou:

a)  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d)  $\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6} - i \cdot \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

b)  $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

e)  $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}-i\sqrt{3}) + i\frac{\sqrt{2}}{4}$

c)  $\frac{\sqrt{6}}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}i$

f)  $\cos x + i \sin x$ , kde  $x \in \mathbb{R}$

**27** Znázorněte v Gaussově rovině obrazy všech komplexních jednotek.

**28** Dokažte, že pro každé reálné číslo  $k$  je komplexní číslo  $\frac{k+i}{k-i}$  komplexní jednotkou.

**29** Určete všechna čísla  $x \in \mathbb{R}$  tak, aby dané číslo bylo komplexní jednotkou:

a)  $x + i\frac{\sqrt{5}}{3}$

d)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + xi + \frac{i}{2}$

b)  $x + 6i$

e)  $\sin x(\sin x + i) + \cos x(\cos x + 1)$

c)  $x + 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

f)  $(1+i) \cdot \frac{\sqrt{x}}{4} + (1-i) \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}$

## 17.6 Goniometrický tvar komplexního čísla

**30** Převeďte na goniometrický tvar následující komplexní čísla:

$z_1 = 1+i$

$z_4 = -2+2i\sqrt{3}$

$z_7 = -7-7i$

$z_2 = 3$

$z_5 = -\sqrt{3}+i$

$z_8 = \sin 30^\circ + i \cos 30^\circ$

$z_3 = 5i$

$z_6 = 10-10i$

$z_9 = 1 + \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi$

**31** Následující komplexní čísla převeďte na goniometrický tvar s použitím kalkulačky. Absolutní hodnotu vypočítejte s přesností na dvě desetinná místa, argument vypočítejte s přesností na minuty.

$z_1 = 6+3i$

$z_2 = -1,4+5,6i$

$z_3 = 9-4i$

**32** Převeďte na algebraický tvar:

$z_1 = 4\left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi\right)$

$z_3 = 5(\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$

$z_2 = \cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi$

$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{105}{4}\pi + i \sin \frac{105}{4}\pi\right)$

**33** Převeďte na algebraický tvar s použitím kalkulačky. Reálnou i imaginární část vypočítejte s přesností na dvě desetinná místa.

$z_1 = 3(\cos 123^\circ 55' + i \sin 123^\circ 55')$

$z_2 = 7\left(\cos \frac{14}{11}\pi + i \sin \frac{14}{11}\pi\right)$

**34** Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru:

a)  $\frac{-1+2i}{1+3i}$

b)  $\frac{1+i}{1-i}$

c)  $\frac{i-3}{2+i}$

d)  $\frac{i-2}{4i-8}$

**35** U daných komplexních čísel určete absolutní hodnotu, argument a potom komplexní číslo znázorněte v Gaussově rovině:

$z_1 = 5(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

$z_2 = 2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right)$

**36** Určete  $k \in \mathbb{R}$  tak, aby čísla  $z_1 = 3+4i$ ,  $z_2 = 6+ki$  měla stejný argument.

**37** Je dána komplexní jednotka  $z = \cos x + i \sin x$ , kde  $x \in \mathbb{R}$ . Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní číslo:

a)  $\bar{z}$

b)  $(z)^{-1}$

c)  $(\bar{z})^{-1}$

d)  $\bar{z} \cdot (z)^{-1}$

## Počítání s komplexními čísly v goniometrickém tvaru

**38** Vypočítejte součin a podíl komplexních čísel  $z_1$ ,  $z_2$ . Výsledek vyjádřete v goniometrickém i v algebraickém tvaru.

a)  $z_1 = 2(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$ ,  $z_2 = 4(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

b)  $z_1 = 2\left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi\right)$ ,  $z_2 = 4\left(\cos \frac{1}{6}\pi + i \sin \frac{1}{6}\pi\right)$

**39** Je dáné komplexní číslo  $z = 6-2i$ . Určete komplexní čísla  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  tak, aby platilo:

a) Komplexní číslo  $z_1$  má stejnou absolutní hodnotu a dvojnásobný argument než dané číslo  $z$ . Řešte výpočtem i graficky.

b) Komplexní číslo  $z_2$  má absolutní hodnotu poloviční a argument o  $\frac{5}{4}\pi$  větší než dané číslo  $z$ . Řešte výpočtem i graficky.

c) Komplexní číslo  $z_3$  má poloviční argument než dané číslo  $z$  a je komplexní jednotkou. Řešte výpočtem i graficky.

**40** Jsou dána komplexní čísla  $z_1 = \frac{7}{2} + i\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_2 = \sqrt{3} - i$ .

- a) V algebraickém tvaru vypočítejte  $z_1 \cdot z_2$ , pak výsledek převeďte do goniometrického tvaru.
- b) Komplexní číslo  $z_1$  i číslo  $z_2$  převeďte nejprve do goniometrického tvaru, potom vypočítejte  $z_1 \cdot z_2$  a výsledek převeďte zpět do algebraického tvaru.

**41** Pomocí počítání s komplexními čísly v goniometrickém tvaru odvodte součtové vzorce:

a)  $\sin(x+y)$ ,  $\cos(x+y)$       b)  $\sin(x-y)$ ,  $\cos(x-y)$

### 17.7 Umocňování komplexních čísel

**42** Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převeďte do algebraického tvaru:

a)  $\left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18}\right)^6$       c)  $(1+i)^6$       e)  $(-2\sqrt{3} - 2i)^{12}$   
 b)  $\left(\cos \frac{3\pi}{32} + i \sin \frac{3\pi}{32}\right)^8$       d)  $(1-i\sqrt{3})^5$       f)  $(5\sqrt{3} - 5i)^7$

**43** Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby platilo:  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

**44** Dokažte:  $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2$

**45** Užitím Moivreovy věty a vzorce pro  $(a+b)^3$  odvodte vzorec pro  $\sin 3x$  a vzorec pro  $\cos 3x$ .

### 17.8 Odmocňování komplexních čísel

**46** Vypočítejte všechny druhé komplexní odmocniny

a) z čísla 4,      b) z čísla  $-4$ .

**47** Vypočítejte všechny čtvrté komplexní odmocniny

a) z čísla  $i$ ,      b) z čísla  $1-i$ .

**48** Vypočítejte všechny páté komplexní odmocniny z čísla 32.

**49** Vypočítejte součet všech třetích komplexních odmocnin z čísla  $-2$ .

**50** Vypočítejte součet třetích mocnin všech čtvrtých odmocnin z čísla 1.

### 17.9 Rovnice v množině komplexních čísel

**51** Určete reálná čísla  $x, y$  tak, aby platilo:

a)  $2x+iy=4-3i$       c)  $x(y+i)+y(x-i)=2x+2yi$   
 b)  $x(1+i)+y(1-i)=4+2i$       d)  $(2+i)^3 - \frac{1-i}{i} = x-4yi-y$

**52** Řešte rovnice s neznámou  $z \in \mathbb{C}$ :

a)  $z=3i(z-i)-5z$       c)  $(z+i)(z-3i)=z(z-i)$   
 b)  $\frac{z}{1-i} + \frac{z+2}{i} = \frac{5}{2i-1}$       d)  $i - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 1 - \frac{1}{z}$

**53** Řešte rovnice s neznámou  $z \in \mathbb{C}$ :

a)  $2z+3\bar{z}=5+i$       c)  $z\bar{z}-z=\overline{6-2i}$   
 b)  $\left(2-\frac{1}{i}\right)\bar{z}-13=2(6,5i-z)$       d)  $z(\bar{z}-4)-1=8i$

**54** Řešte rovnici  $(1+2i)x-2y=1$

- a) s neznámými  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
- b) s neznámými  $x, y \in \mathbb{C}$  tak, aby čísla  $x, y$  byla čísla komplexně sdružená.

**55** Řešte rovnice s neznámou  $z \in \mathbb{C}$ :

a)  $|z|=1+2i+z$       c)  $|z+1|-4i=z+3$   
 b)  $|z+i|=2z+i$       d)  $|z+2-i|=5(z+3i)$

**56** Vypočítejte komplexní čísla  $z, w$  tak, aby byla řešením soustavy:

a)  $2z+w=8i$       b)  $(1+i)z-3w=-7-6i$   
 $z-w=6+i$        $2z+(2+i)w=6+5i$

### Rovnice v množině komplexních čísel s parametrem

**57** Pro které hodnoty parametru  $a \in \mathbb{C}$  nemá rovnice  $iz+az=2$  s neznámou  $z \in \mathbb{C}$  v množině komplexních čísel řešení?

**58** Je dána rovnice  $2za+i-z(1+2i)=3$  s neznámou  $z \in \mathbb{C}$  a parametrem  $a \in \mathbb{C}$ .

- a) Pro která  $a \in \mathbb{C}$  nemá rovnice řešení?
- b) Pro která  $a \in \mathbb{C}$  je řešením dané rovnice číslo  $z=2+i$ ?
- c) Pro která  $a \in \mathbb{C}$  je kořenem dané rovnice imaginární jednotka?

### 17.10 Kvadratická rovnice v množině komplexních čísel

**59** Vyšetřete, pro které hodnoty parametru  $t \in \mathbb{R}$  mají dané kvadratické rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{C}$  imaginární kořeny:

a)  $x^2+2tx-t+2=0$       c)  $x^2+tx-1+t=0$   
 b)  $2x^2+t=0$       d)  $tx^2-x+t=0$

**60** Řešte kvadratické rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ :

a)  $x^2-5x+5=0$       g)  $x^2+x(2-i)+3-i=0$   
 b)  $5x^2-2x+1=0$       h)  $ix^2-3x+4i=0$   
 c)  $3x^2-2x+1=0$       i)  $x^2+(i-3)x+2-2,5i=0$   
 d)  $x^2-4ix-8=0$       j)  $(7+i)x^2-5ix-1=0$   
 e)  $x^2-6ix-12=0$       k)  $x(3-x)=3-i$   
 f)  $x^2-6ix-9=0$       l)  $x^2-20=ix(2i-x)$

### Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

**61** Sestavte všechny kvadratické rovnice s komplexními koeficienty, jejichž kořeny jsou čísla:

a)  $x_1=3+i, x_2=3-i$       c)  $x_1=x_2=1+i$   
 b)  $x_1=2+i\sqrt{3}, x_2=3+i\sqrt{3}$       d)  $x_1=i, x_2=0$

**62** Sestavte všechny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, znáte-li jeden kořen hledané kvadratické rovnice:

a)  $x_1=3+i$       c)  $x_1=\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi$   
 b)  $x_1=5i$       d)  $x_1=2\left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi\right)$

**63** Rovnice  $x^2 + ix + q = 0$  má jeden kořen  $x_1 = 2 - i$ . Určete druhý kořen a koeficient  $q \in \mathbb{C}$ .

**64** Rovnice  $x^2 + px + 21 = 0$  má jeden kořen  $x_1 = -3 + 2i\sqrt{3}$ . Vypočítejte druhý kořen a určete koeficient  $p \in \mathbb{C}$ .

**65** V rovnici  $x^2 + 2(3 - 2i)x + k = 0$  určete  $k \in \mathbb{C}$  tak, aby rovnice měla dvojnásobný kořen.

**66** Je dána kvadratická rovnice  $x^2 + ix - 1 = 0$ . Užitím vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice vypočítejte  
a) součet převrácených hodnot kořenů,  
b) součet druhých mocnin kořenů.  
c) Vypočítejte kořeny dané rovnice a ověřte správnost výsledků a), b).

**67** V množině  $\mathbb{C}$  rozložte na součin kořenových činitelů:

- a)  $x^2 + 2x + 2$       c)  $2x^2 - 4x + 10$       e)  $4x^2 + 1$   
b)  $x^2 - 4x + 5$       d)  $x^2 + x + 1$       f)  $x^4 - 16$

### 17.11 Binomická rovnice

**68** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ . Výsledek zapište nejprve v goniometrickém tvaru, pak ve tvaru algebraickém. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

- a)  $x^3 - 27 = 0$       c)  $x^6 - 1 = 0$   
b)  $x^4 + 16 = 0$       d)  $x^3 - 64i = 0$

**69** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{C}$ . Výsledky zapište v goniometrickém tvaru. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

- a)  $x^3 - 1 - i = 0$       c)  $(ix)^4 + \sqrt{3} - i = 0$   
b)  $x^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$       d)  $(2x)^5 - 16 = 16i\sqrt{3}$

**70** Uvedené rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{C}$  řešte dvěma způsoby. Buď jako rovnice kvadratické, nebo jako rovnice binomické.

- a)  $x^2 = 1 + i\sqrt{3}$       b)  $x^2 + 2x + 5 = 0$

## 18 Kombinatorika a binomická věta

### 18.1 Faktoriál čísla — $n$ !

**1** Vypočítejte:

- a)  $2! + 0!$       b)  $2 \cdot 2! + (2^2)! + (2!)^2$       c)  $3! + (3!)!$

**2** Vypočítejte:

- a)  $\frac{8!}{4!}$       b)  $\frac{8!}{4! + 4!}$       c)  $\frac{8!}{4! \cdot 4!}$       d)  $\frac{8!}{4 \cdot 4!}$

**3** Zjednodušte:

- a)  $\frac{2! \cdot 5! \cdot 6!}{7! \cdot 4! \cdot 3!}$       b)  $\frac{28! + 29!}{30!}$       c)  $\frac{7 \cdot 7! + 6 \cdot 6!}{6 \cdot 7! - 7 \cdot 6!}$

**4** Upravte na společného jmenovatele:

- a)  $\frac{1}{12!} + \frac{7}{13!}$       b)  $\frac{1}{15!} - \frac{15}{16!}$       c)  $\frac{3}{5!} - \frac{20}{7!} + \frac{2}{6!}$

**5** Kraťte, určete podmínky pro  $n$ :

- a)  $\frac{(n+1)!}{n!}$       c)  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$       e)  $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$       g)  $\frac{(2n)!}{(2n-1)!}$   
b)  $\frac{n!}{(n-2)!}$       d)  $\frac{(n-100)!}{(n-99)!}$       f)  $\frac{(n-4)!}{(n-2)!}$       h)  $\frac{(3n-2)!}{(3n-3)!}$

**6** Upravte, určete podmínky pro  $n$ :

- a)  $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$       c)  $2 \cdot \frac{n^2 - 16}{(n+4)!} + \frac{n^2 + 5}{(n+3)!} + \frac{3}{(n+2)!}$   
b)  $\frac{n}{(n-3)!} - \frac{1}{(n-4)!}$       d)  $\frac{2}{n!} - \frac{2n}{(n+1)!} - \frac{2n+4}{(n+2)!}$

**7** Upravte, určete podmínky pro  $n$ :

- a)  $\frac{(n-1)!}{3n!} + \frac{n!}{4(n+1)!}$       c)  $\frac{(n+5)!}{(n+3)!} - 2 \cdot \frac{(n+4)!}{(n+2)!} + \frac{(n+3)!}{(n+1)!}$   
b)  $\frac{(n-1)!}{3n!} \cdot \frac{n!}{4(n+1)!}$       d)  $\frac{(n+1)!}{n!} + 4 \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} - \frac{9n!}{(n-1)!}$

**8** Rozhodněte, které z čísel  $A, B$  je větší.

- a)  $A = 70! + 73!$   
 $B = 71! + 72!$   
b)  $A = n! + (n+3)!$   
 $B = (n+1)! + (n+2)!$

**9** Dokažte, že platí:

- a)  $\frac{1000! + 1003!}{1001! + 1002!} > 1$   
b)  $\frac{1004! - 1002!}{1005! - 1003!} < 1$

**10** a) Kolika nulami končí číslo  $50!$ ?

b) Kolika nulami končí číslo  $100!$ ?

c) Kolika nulami končí číslo  $500!$ ?

**11** Dokažte, že platí:

- a)  $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0: (n+1)! - n! = n \cdot n!$   
 b)  $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq -2: (n+2)! + (n+3)! + (n+4)! = (n+2)! \cdot (n+4)^2$   
 c)  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4: (n-2)! + (n-3)! + (n-4)! = (n-4)! \cdot (n-2)^2$   
 d)  $\forall n \in \mathbb{N}: n! \cdot (n+1) + n \cdot (n-1)! - (n-1)! \cdot (n^2 + n) = n!$   
 e)  $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0: (n+1)^2 \cdot (n!)^2 - [(n+1)!]^2 = 0$

**12** Řešte rovnice s neznámou  $n \in \mathbb{Z}$ :

- a)  $5(n+1)! = (n+2)!$   
 b)  $(n+2)! \cdot n! = 24(n+1)! \cdot (n-1)!$   
 c)  $(n+1)! - 16(n-1)! = n!$   
 d)  $(n-90)! + 4(n-91)! = (n-89)!$

**13** Řešte rovnice s neznámou  $n \in \mathbb{Z}$ :

- a)  $\frac{n!}{(n-2)!} = 4n$   
 b)  $\frac{10-17n}{(n+1)!} + \frac{4}{(n-1)!} = 0$   
 c)  $\frac{(n+6)!}{(n+4)!} - n \cdot \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n + 80$   
 d)  $\frac{(2n+1)!}{(2n)!} + \frac{(3n)!}{(3n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2n!} + 50$

**14** Řešte nerovnice s neznámou  $n \in \mathbb{Z}$ :

- a)  $72n! < (n+2)!$   
 b)  $(n+2)! \cdot (24+6n) \leq (n+4)!$   
 c)  $(n+1)! + (n+2)! \leq (n+3)!$   
 d)  $(n-2)! + 5(n-4)! \geq n(n-4)!$

**15** Řešte nerovnice s neznámou  $n \in \mathbb{Z}$ :

- a)  $\frac{n!}{(n-2)!} + 24 \geq 10n$   
 c)  $\frac{3(n+4)!}{(n+2)!} - 22n \leq 46$   
 b)  $n - \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \geq -1$   
 d)  $\frac{n!}{(n-2)!} - 3n \leq \frac{(n+4)!}{(n+3)!} + 2$

## 18.2 Kombinační číslo, vlastnosti kombinačních čísel

**16** Následující kombinační čísla  $\binom{5}{2}, \binom{3}{3}, \binom{7}{2}, \binom{7}{5}$  vypočítejte třemi způsoby.

- a) Vypočítejte je podle definice.  
 b) Vypočítejte je na kalkulačce.  
 c) Výsledek vyhledejte v Pascalově trojúhelníku.

**17** Výpočtem ověrte, že platí:

- a)  $\binom{12}{5} = \binom{10}{5} + 2 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{3} = \binom{9}{5} + 3 \cdot \binom{9}{4} + 3 \cdot \binom{9}{3} + \binom{9}{2}$   
 b)  $\left[ \binom{11}{7} \right]^2 - \left[ \binom{10}{7} \right]^2 = \binom{10}{4} \cdot \left[ \binom{10}{6} + \frac{1}{3} \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{10}{3} \right]$

c)  $\binom{15}{3} - \binom{10}{3} - \binom{5}{3} = \binom{10}{2} \cdot 5 + 10 \cdot \binom{5}{2}$

**18** Kolikrát je číslo  $M = \binom{100}{10}$  větší než číslo  $N = \binom{99}{90}$ ?

**19** Které z čísel  $K, L$  je větší?

- a)  $K = \binom{500}{50}, L = \binom{501}{51}$       b)  $K = \binom{120}{60}, L = \binom{120}{61}$

**20** Které z čísel  $\binom{100}{k}$ , kde  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$  je největší?

**21** Dokažte a rozhodněte, pro která  $n \in \mathbb{N}$  platí:

- a)  $n^2 = 2 \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$       c)  $2 \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$   
 b)  $n^3 = 6 \binom{n}{3} + 6 \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$       d)  $\frac{3}{2} \binom{3n-1}{n} = \binom{3n}{n}$

**22** Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

- a)  $\binom{17}{8} + \binom{17}{9}$       d)  $\binom{12}{3} + \binom{4}{3} - \binom{12}{9}$   
 b)  $\binom{11}{7} + \binom{11}{5}$       e)  $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$   
 c)  $\binom{10}{1} + \binom{10}{0} + \binom{11}{9}$       f)  $\binom{20}{20} + \binom{21}{20} + \binom{22}{20} + \binom{23}{20}$

**23** Víte-li, že  $\binom{14}{5} = 2002$ , určete: a)  $\binom{14}{9}$       b)  $\binom{14}{6}$       c)  $\binom{14}{4}$       d)  $\binom{14}{8}$

**24** Jednotlivé zlomky nejprve zapište pomocí kombinačních čísel a pak užitím vlastností kombinačních čísel upravte (určete podmínky pro  $n, k, r$ ):

- a)  $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!}$   
 b)  $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} + \frac{2n!}{(n-r+1)! \cdot (r-1)!} + \frac{n!}{(n-r+2)! \cdot (r-2)!}$

## 18.3 Rovnice a nerovnice s kombinačními čísly

**25** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\binom{10}{4}x = \binom{12}{6}$   
 b)  $\binom{6}{3} = \frac{1}{2} \left[ x + \binom{5}{1} \right] + \frac{1}{2} \binom{4}{3}$   
 c)  $\left[ x + \binom{1}{1} \right] \cdot \left[ x - \binom{2}{2} \right] = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$   
 d)  $\binom{5}{0}x^2 - x \binom{2}{2} - \binom{8}{4} : \binom{7}{3} = 0$   
 e)  $\left[ \binom{x}{2} \right]^2 - 2 \binom{6}{5} \cdot \binom{x}{2} - \binom{7}{3} - \binom{5}{3} = 0$

**26** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{N}$ :

a)  $\binom{8}{x} = \binom{8}{5}$

b)  $\binom{6}{x} + \binom{6}{x+1} = \binom{7}{4}$

c)  $\binom{10}{x} = 45$

**27** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\binom{x}{2} + \binom{x+1}{2} = 25$

b)  $\binom{x}{1} + \binom{x-3}{x-4} = 2x - 3$

c)  $\binom{x-1}{x-3} - 2 \cdot \binom{x-2}{x-4} = 0$

d)  $2\binom{x+6}{x+4} - \binom{x+4}{x+2} = 4! + \binom{5}{2}x$

e)  $\binom{x+1}{x+1} + \binom{5}{3} \cdot \binom{x+1}{x} - \binom{4}{3} \cdot \binom{x+1}{x-1} = 1$

f)  $5\binom{x+8}{x+7} - \binom{x}{1} = 2\binom{x}{0} \cdot \binom{x+1}{x} \cdot \binom{x}{x-1}$

g)  $\left[ \binom{x}{1} \right]^2 - 11 = 2 \left[ \binom{x-1}{1} + \binom{x-2}{2} \right] \cdot \binom{x-3}{0}$

h)  $\binom{x}{x-3} + \binom{x+1}{x-2} = \frac{1}{3} \left[ x^3 - \binom{7}{4} \right]$

**28** Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\binom{x-2}{x-4} + 3 \geq 4x$

b)  $\binom{x+1}{x} + 2x < 50$

c)  $\binom{x+4}{2} \geq \binom{x-4}{2}$

d)  $\binom{x+1}{x-1} - \binom{x}{x} \cdot \binom{8}{5} \leq 44$

e)  $\binom{x}{2} + \binom{x+2}{2} + \binom{x+4}{2} \leq 100$

f)  $6\binom{x+3}{3} - (x+3)^3 \leq \frac{x+2}{2} - \binom{x+2}{2} \cdot 6$

**29** Řešte rovnici a nerovnici s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\binom{4x+2}{4x} + \binom{3x}{3x-2} - \binom{2x+1}{2x} = 5 \left[ \binom{5x}{1} + \binom{5x}{5x} \right]$

b)  $\binom{3x-3}{1} + \binom{3x-3}{2} > \frac{3x-3}{2}$

**30** Řešte nerovnice a rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\binom{8}{x} < 2 \binom{8}{x-1}$

c)  $\left[ \binom{x}{2} \right]^2 - 5 \binom{x}{2} - 6 = 0$

b)  $\binom{7}{x+1} \leq \binom{7}{x} \cdot 2$

d)  $\left[ \left( \frac{x}{2} \right)! \right]^2 - 5 \left( \frac{x}{2} \right)! - 6 = 0$

**31** Vypočítejte celá čísla  $x, y$  tak, aby byla řešením soustavy:

a)  $\binom{x}{y} = 2 \binom{x-1}{y-1}$   
 $2x - 3y - 3 = 0$

b)  $\binom{x+2}{y+2} : \binom{x+1}{y+1} = 5 : 4$   
 $x : y = 4 : 3$

c)  $\binom{x}{y} : \binom{x-1}{y-1} = 1\frac{3}{5}$   
 $\binom{x-1}{y-1} : \binom{x-2}{y-2} = 1\frac{3}{4}$

d)  $\binom{x-1}{y} : \binom{x}{y+1} : \binom{x+1}{y+2} = 5 : 6 : 7$

#### 18.4 Pravidlo kombinatorického součinu

**32** Jana má pět různě barevných triček a tři nestejně sukně. Kolika způsoby si může vzít tričko a sukni, aby pokázdě vypadala jinak?

**33** Do tanečních přišlo 32 chlapců a 34 dívek. Kolik různých tanečních páru mohou vytvořit? Za předpokladu, že první pár je zadán, každý pár spolu tančí jednu minutu a další výměna trvá 5 sekund, vypočítejte, jak dlouho by musel trvat taneční večer, aby se všichni v párech vystřídalí.

**34** V restauraci mají na jídelním lístku 3 druhy polévek, 7 možností výběru hlavního jídla, 4 druhy moučníku. K pití si lze objednat kávu, limonádu nebo džus. Kolika způsoby si host může vybrat oběd, za předpokladu, že bude jíst

- a) jen polévku a hlavní jídlo,
- b) polévku, hlavní jídlo a dále si objedná nápoj,
- c) polévku, hlavní jídlo, moučník a nápoj.

**35** Ve třídě chodí 14 žáků na němčinu a 13 na francouzštinu. Každý žák navštěvuje právě jeden z uvedených předmětů. Kolika způsoby lze vybrat dvojici na týdenní službu tak, aby měl službu jeden žák z oddělení němčiny a jeden žák z oddělení francouzštiny? Kolik let by žáci museli chodit do školy, aby se všechny tyto dvojice vystřídalily? (Počítejte, že školní rok má 33 vyučovacích týdnů.)

**36** Maminka koupila 10 rohlíků a 8 housek. Martin si vezme buď rohlík, nebo housku. Potom si David vezme jednu housku a jeden rohlík. Kdy má David více možností výběru, když si Martin vzal rohlík, nebo když si Martin vzal housku?

## 18.5 Variace

- 37** Kolik různých přirozených čtyřciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5? Kolik z nich je dělitelných 5? Kolik z nich je lichých?
- 38** Kolik různých přirozených pěticiferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9? Kolik z nich je dělitelných 4? Kolik z nich je dělitelných 10? Kolik z nich je sudých?
- 39** Určete počet všech přirozených čísel větších než 2 000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 1, 2, 4, 6, 8, a to každá nejvýše jednou.
- 40** Určete počet všech přirozených čísel větších než 300 a menších než 5 000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 2, 3, 4, 7, 8, a to každá nejvýše jednou.
- 41** Ve třídě 1.A se vyučuje 11 různých předmětů. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den, vyučuje-li se tento den 6 různých předmětů?
- 42** Ve třídě je 30 míst, ale ve třídě 3. B je jen 28 žáků. Kolika způsoby lze sestavit zasedací pořádek? (Ve třídě jsou tři oddělení po 5 lavicích. Jedna lavice je pro dvojici žáků.)
- 43** Na běžecké trati běží 8 závodníků. Za předpokladu, že každou z medailí získá právě jeden závodník, vypočítejte, kolik je možností na rozdělení zlaté, stříbrné a bronzové medaile mezi závodníky.
- 44** Z kolika prvků lze vytvořit 992 variací druhé třídy bez opakování?
- 45** Zvětší-li se počet prvků o 5, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 1 170. Určete původní počet prvků.
- 46** Zmenší-li se počet prvků o 27, zmenší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků desetkrát. Určete původní počet prvků.

## 18.6 Permutace

- 47** Kolika způsoby lze postavit 20 žáků do řady při nástupu na tělocvik?
- 48** Kolika způsoby lze postavit do řady vedle sebe na poličku 15 různých knih?
- 49** Kolika způsoby lze postavit do řady na poličku 10 různých knih českých a 5 různých knih anglických tak, že nejprve budou knihy české a vedle nich knihy anglické.
- 50** Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet?
- 51** Kolik různých devíticiferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1 až 9?

## 18.7 Kombinace

- 52** Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž  
a) žádné tři neleží v přímce,  
b) právě šest leží v přímce?
- 53** Kolik kružnic určuje deset různých bodů v rovině, z nichž  
a) žádné tři neleží v přímce,  
b) právě šest leží v přímce?

**54** V prostoru je dáno 15 různých bodů. Kolik rovin tyto body určují, jestliže  
a) žádné čtyři neleží v jedné rovině,  
b) právě 8 leží v jedné rovině?

**55** Je dán čtverec  $KLMN$ . Na každé straně čtverce zvolíme 8 vnitřních bodů.  
a) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech.  
b) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech a každé dva vrcholy jednoho trojúhelníku leží na různých stranách čtverce.

**56** Je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Na každé hraně zvolíme 8 vnitřních bodů.  
a) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech.  
b) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech a navíc trojúhelníky leží na povrchu krychle.

**57** Určete počet všech úhlopříček v konvexním  $n$ -úhelníku.

**58** Ve třídě je 30 žáků. Kolika způsoby lze vybrat čtveřici žáků na zkoušení?

**59** Na běžecké trati běží 8 závodníků. Do finále postupují první tři. Kolik je možností na postupující trojici?

**60** Kolika způsoby lze rozdělit 12 hráčů na dvě šestičlenná družstva?

**61** Kolika způsoby lze 4 dívky a 8 chlapců rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla dvě děvčata a 4 chlapci?

**62** Test přijímací zkoušky se skládá z 10 otázek z chemie, z 10 otázek z biologie a z 10 otázek z fyziky. V každém předmětu je vybíráno ze 200 navržených otázek. Kolik je možností sestavit test? (Na pořadí otázek nezáleží.)

**63** Kolika způsoby lze ze skupiny 10 děvčat a 5 chlapců vybrat trojici, ve které jsou dvě děvčata a jeden chlapec?

**64** Ve skupině je 20 dětí, každé dvě děti mají jiné jméno. Je mezi nimi i Alena a Jana. Kolika způsoby lze vybrat 8 dětí tak, aby mezi vybranými

- a) byla Alena, d) byla alespoň jedna z dívek Alena, Jana,  
b) nebyla Alena, e) byla nejvýše jedna z dívek Alena, Jana,  
c) byla Alena a Jana, f) nebyla ani Alena, ani Jana?

**65** V krabici je 10 výrobků, z nichž jsou právě tři vadné. Kolika způsoby lze vybrat 5 výrobků tak, aby

- a) žádný nebyl vadný, d) právě dva byly vadné,  
b) právě jeden byl vadný, e) nejvýše dva byly vadné,  
c) nejvýše jeden byl vadný, f) alespoň dva byly vadné?

**66** Kolika způsoby lze 20 dětí rozdělit do tří skupin tak, aby v první skupině bylo 10 dětí, ve druhé skupině bylo 6 dětí a ve třetí zbytek?

**67** Z kolika prvků lze vytvořit 990 kombinací druhé třídy bez opakování?

**68** Zvětší-li se počet prvků o 4, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 30. Určete původní počet prvků.

**69** Zvětší-li se počet prvků o 15, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků třikrát. Určete původní počet prvků.

## 18.8 Variace, kombinace — rovnice

**70** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{N}$ :

- a)  $V(2, x) = 56$
- b)  $V(x, 10) = 30\,240$
- c)  $\frac{V(7, x) + V(5, x)}{V(5, x)} = 13$
- d)  $18K(4, x+1) = 5K(5, x+3)$
- e)  $2K(2, x-1) = 10(x-2)$
- f)  $\frac{K(5, x) + K(6, x)}{K(4, x+1)} = \frac{2}{3}$

## 18.9 Variace, permutace, kombinace s opakováním

**71** Kolik značek Morseovy abecedy lze sestavit z teček a čárek, vytváříme-li skupiny o jednom až čtyřech prvcích?

**72** Kolik pěticierných čísel lze sestavit z cifer 2, 3, 4, 6, 7, 9, jestliže se cifry mohou opakovat?

**73** V krabičce je 10 pastelek, z toho 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné žluté a jedna zelená pastelka. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce uspořádat?

**74** Kolika způsoby lze koupit v prodejně 5 sešitů, mají-li 3 druhy sešitů v dostatečném množství?

**75** V cukrárně mají pět druhů dortů v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit 8 dortů?

## 18.10 Binomická věta

**76** Vypočítejte:

- a)  $(1 + \sqrt{2})^5$
- b)  $(1 - 2\sqrt[3]{3})^6$
- c)  $(x + \sqrt{x})^4$
- d)  $(y - \frac{1}{2y})^5$
- e)  $(a\sqrt[3]{a} - 3)^3$
- f)  $\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)^5$

**77** Umocněte:

- a)  $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$
- b)  $\left(2a - \frac{1}{a^2}\right)^5 - \left(2a + \frac{1}{a^2}\right)^5$

**78** Umocněte podle binomické věty i podle Moivreovy věty:

- a)  $(1+i)^7$
- b)  $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6$
- c)  $(-2 + 2i\sqrt{3})^5$

**79** Ověřte, že číslo  $x = \sqrt{2} - 2$  je kořenem rovnice  $x^5 - 10x^3 - 24x - 16 = 0$ .

**80** Kolik členů obsahuje binomický rozvoj  $(1+2x)^{20}$ ?

**81** Vypočítejte pátý člen binomického rozvoje  $(1+y)^{10}$ .

**82** Vypočítejte desátý člen binomického rozvoje  $(2a+b)^{15}$ .

**83** Určete  $x \in \mathbb{R}$  tak, aby pátý člen binomického rozvoje  $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$  byl roven 2016.

**84** Určete  $z \in \mathbb{R}$  tak, aby sedmý člen binomického rozvoje  $(\sqrt[3]{1+z} + \sqrt[6]{1-z})^9$  byl roven 63.

**85** Který člen binomického rozvoje  $(5-2m)^7$  obsahuje  $m^4$ ?

**86** Který člen binomického rozvoje  $(y^2 + y^{-1})^9$  obsahuje  $y^3$ ?

**87** Který člen binomického rozvoje  $\left(\frac{2}{c^2} + \sqrt{c}\right)^{12}$  obsahuje výraz  $\sqrt{\frac{1}{c^3}}$ ?

**88** Vypočítejte takový člen binomického rozvoje, který neobsahuje  $a$ :

- a)  $(3\sqrt{a} - a^{-2})^{10}$
- b)  $\left(\sqrt[4]{a^3} + \frac{1}{a\sqrt{a}}\right)^8$

**89** V binomickém rozvoji  $\left(\frac{2x^2}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^5}\right)^{14}$  najděte člen, který

- a) neobsahuje  $x$ ,
- b) neobsahuje  $y$ .

**90** Najděte všechny členy binomického rozvoje, které jsou racionálními čísly:

- a)  $(\sqrt{5} + 1)^6$
- b)  $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^{11}$
- c)  $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$

**91** Kolik racionálních členů obsahuje binomický rozvoj?

- a)  $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})^{50}$
- b)  $(\sqrt[6]{5} + 6\sqrt[8]{11})^{66}$

**92** Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby pro binomický rozvoj  $(1+x)^n$  platilo:

- a) koeficient u třetího člena je stejný jako koeficient u osmého člena
- b) koeficient u třetího člena je 2,5krát větší než koeficient u šestého člena
- c) poměr koeficientů u čtvrtého člena a třetího člena je  $8 : 3$
- d) součet koeficientů u druhého a třetího člena je 55
- e) koeficient u  $x^3$  je čtyřikrát větší než koeficient u  $x^2$
- f) koeficient u  $x^2$  je o 152 větší, než absolutní člen
- g) koeficienty u druhého, třetího a čtvrtého člena tvoří aritmetickou posloupnost

**93** Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby třetí člen binomického rozvoje  $(\sqrt[3]{x} + x^{-1})^n$  neobsahoval proměnnou  $x$ .

**94** Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby pátý člen binomického rozvoje  $\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 2z\right)^n$  neobsahoval proměnnou  $z$ .

**95** Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby koeficient u  $y^8$  v binomickém rozvoji  $(1+2y^2)^n$  byl roven 240.

**96** Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby pětinásobek třetího člena binomického rozvoje  $\left(\sqrt{2} + \frac{i}{4}\right)^n$  byl číslo opačné k osminásobku člena pátého.

**97** Určete  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby poměr koeficientů u osmého člena a šestého člena v binomickém rozvoji  $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^n$  byl  $1 : 21$ .

**98** Užitím binomické věty a věty Moivreovy odvodte vzorce pro

- a)  $\sin 3x, \cos 3x$ ,
- b)  $\sin 5x, \cos 5x$ .

**99** Pomocí binomické věty dokažte, že  $\forall n \in \mathbb{N}$  platí:

$$\text{a) } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\text{b) } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

c)  $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \dots + (-2)^n\binom{n}{n} = (-1)^n$

d)  $4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \dots + 1\binom{n}{n} = 5^n$

e)  $1 + 4\binom{n}{1} + 4^2\binom{n}{2} + \dots + 4^n\binom{n}{n} = 5^n$

**100** Užitím binomické věty dokažte, že platí:

a)  $\forall n \in \mathbb{N}$  je číslo  $\frac{4^{2n}-1}{15}$  celé číslo

b)  $\forall n \in \mathbb{N}$  je číslo  $4^n - 1$  dělitelné 3

### 18.11 Důkaz matematickou indukcí

**101** Dokažte užitím matematické indukce:

a)  $\forall n \in \mathbb{N}: 6 \mid (n^3 + 5n)$

c)  $\forall n \in \mathbb{N}: 4 \mid (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n)$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}: 5 \mid (n^5 + 4n)$

d)  $\forall n \in \mathbb{N}: 7 \mid (n^7 - 8n)$

**102** Dokažte užitím matematické indukce:

a)  $\forall n \in \mathbb{N}: 3 \mid (4^n + 5)$

d)  $\forall n \in \mathbb{N}: 5 \mid (8^{2n} - 3^{2n})$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}: 16 \mid (9^{n+1} - 8n - 9)$

e)  $\forall n \in \mathbb{N}: 5 \mid (2^{4n+3} - 3)$

c)  $\forall n \in \mathbb{N}: 36 \mid (7^n - 6n - 1)$

f)  $\forall n \in \mathbb{N}: 7 \mid (2^{n+2} + 3^{2n+1})$

**103** Dokažte užitím matematické indukce:

a)  $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$

c)  $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

d)  $\forall n \in \mathbb{N}: 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e)  $\forall n \in \mathbb{N}: 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

f)  $\forall n \in \mathbb{N}: 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

**104** Dokažte užitím matematické indukce:

a)  $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

c)  $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

d)  $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n i(3i+1) = n(n+1)^2$

**105** Dokažte užitím matematické indukce:

$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \frac{3 \cdot 4!}{2^3} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$

**106** Dokažte užitím matematické indukce:  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5: 2^n > n^2$

**107** Posloupnost je dána rekurentně:  $a_1 = 3 \wedge a_n = a_{n-1} + 2n$ . Dokažte užitím matematické indukce správnost vzorce pro  $n$ -tý člen  $a_n = n^2 + n + 1$ .

**108** Dokažte užitím matematické indukce, že pro každé přirozené číslo  $n$  je také výraz  $v(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$  přirozeným číslem.

**109** Užitím matematické indukce dokažte, že libovolnou částku peněz větší než 4 koruny vyjádřenou v celých korunách lze složit jen užitím dvoukorun a pětikorun.

**110** Užitím matematické indukce dokažte úlohy 99a), 99b) a 100a) z této kapitoly.

## Limita funkce

### 19.1 Limita funkce ve vlastním bodě

**1** Vypočítejte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{7} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + \sin 2x}{x+1} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}\pi} (\sin x + \cos x) & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 1} (2^x - 3^x) & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} (\log 10x - \ln x) \end{array}$$

**2** Vypočítejte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 36}{x+3} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{81 - x^4} \end{array}$$

**3** Vypočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^2 - x - 1} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 8x + 15} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 5x - 2}{27x^3 - 1} \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 + 9x + 4} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^4 + x^2 - 12}{x^4 - 2x^2 - 3} \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x + 6 - x^2}{7x - 6 - x^2} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} & \text{j)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)^3 - 8}{3x^2 - 10x + 3} \end{array}$$

**4** Vypočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x - 3 \cos x - 4}{\cos^2 x - 4 \cos x - 5} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 4}{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x - 5} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{4 + 2 \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x - 1} \end{array}$$

**5** Vypočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{x-3} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 2}{x-2} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 + 2x + 3} \end{array}$$

**6** Vypočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}}{x^2-9} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^3}-1}{x} \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-\sqrt{6+x}}{x+2} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x}-3\sqrt{2}} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} & \text{j)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1} \end{array}$$

**7** Vypočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos 2x} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right) & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{cotg} x}{\sin x + \cos x} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos 2x} & \text{j)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{cotg} x - 1} \end{array}$$

**8** Vypočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 - \sqrt{\cos 2x}} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{3} - \sqrt{2 + \cos x}} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sqrt{\cos x + 2}}{\sin^2 2x} \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - \sin x} - \sqrt{1 + \sin x}} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - \cos 2x}{\sqrt{2 \sin x} - 1} \end{array}$$

**9** Vypočítejte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x}{2x} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{x} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x \sin x}{x^2} \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin 7x}{2x} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1 + \sin 2x}{x} \end{array}$$

**10** Vypočítejte:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{x}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{\sin x}$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{|x|}$   
 h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{|x|}$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 3 \sin^2 x}}{\sqrt{\sin^2 x}}$

**19.2 Limita funkce v nevlastním bodě****11** Vypočítejte:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{3x-6}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x^2+x-2}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+4x}{3-7x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 4}{5x^4 + x^3 + 2}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+3} + 4}{2^{x-1} + 1}$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x + 5}{3 \log x - 1}$

**12** Vypočítejte:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2 + 3}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x^3 - 3}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{3 - x}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{2x}}{2^x - 1}$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0,1^x + 3}{0,1^{3x} + 3}$

**13** Vypočítejte:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2-x}{3x^2}}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x-1}}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+x}}{x}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x^2-6}}{2x+1}$   
 h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2+3x})$   
 j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

**19.3 Jednostranné limity****14** Vypočítejte:

a)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x+1}{x-5}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x+1}{x-5}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x+1}{x-5}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+3}{x}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-5}{x^2}$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{7}{(2-x)^3}$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}$   
 h)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x}{1-x^2}$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2+6}{x^2-9}$

**15** Načrtněte grafy lineárních lomených funkcí: určete definiční obor, vypočítejte jednostranné limity v bodě nespojitosti, limity v nevlastních bodech. Napište rovnice asymptot, určete souřadnice středu hyperboly. Vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou  $x$  i s osou  $y$ .

a)  $f_1: y = \frac{x+3}{x-2}$   
 b)  $f_2: y = \frac{2x+3}{x-2}$   
 c)  $f_3: y = \frac{2x+3}{2-x}$   
 d)  $f_4: y = \frac{3}{2x+4}$   
 e)  $f_5: y = \frac{11-5x}{3x}$   
 f)  $f_6: y = \frac{5+3x}{2x+7}$

**16** Načrtněte schéma grafu funkcí  $g_1, g_2, g_3$ : určete definiční obor, vypočítejte limity v nevlastních bodech, vypočítejte jednostranné limity v bodech nespojitosti.

$g_1: y = \frac{x^2-1}{x^2+x-6}$   
 $g_2: y = \frac{5-2x^2}{x^2-4x+3}$   
 $g_3: y = \frac{-2x^3+x-1}{x^3-x}$

**Derivace funkce****19.4 Definice derivace funkce**

**17** Užitím definice derivace vypočtěte derivaci funkce v daném bodě  $x_0$ .

$f_1(x) = x^2, x_0 = 3$	$f_6(x) = x^2 + 2x, x_0 = -1$
$f_2(x) = x^2 - 4x, x_0 = 1$	$f_7(x) = \sin x, x_0 = 0$
$f_3(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1$	$f_8(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4}$
$f_4(x) = x^3, x_0 = 2$	$f_9(x) = 1 + \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$
$f_5(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 4$	$f_{10}(x) = \frac{x+1}{2x-1}, x_0 = -2$

**18** Užitím definice derivace odvoďte vzorec pro derivaci dané funkce v libovolném bodě  $x_0$  definičního oboru.

$g_1(x) = x^2 \quad g_2(x) = x^3 \quad g_3(x) = \sin x \quad g_4(x) = \sqrt{x}$

**19.5 Pravidla pro výpočet derivace**

**19** Vypočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě definičního oboru. (Vždy také určete definiční obor funkce dané i její derivace.)

$f_1: y = x^2 + x^3$	$f_7: y = 2 \sin x + 3 \cos x$
$f_2: y = 4x^2 - x + 1$	$f_8: y = x^7 - 7 \cos x$
$f_3: y = \sqrt{x} + x^{-2}$	$f_9: y = 6 \ln x - 9 \log x$
$f_4: y = 6\sqrt[3]{x} - 5$	$f_{10}: y = 3^x + 2e^x$
$f_5: y = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$	$f_{11}: y = 2x + \sin x - \frac{1}{5}$
$f_6: y = \frac{2}{x} - \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{x^2}$	$f_{12}: y = \operatorname{tg} x + 11 \operatorname{cotg} x$

**20** Vypočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě definičního

oboru. (Nejprve upravte předpis, kterým je funkce definována, potom teprve derivujte.)

$$g_1: y = \frac{(x^2 + 2)^2}{4}$$

$$g_2: y = \frac{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x})}{x}$$

$$g_3: y = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$g_4: y = \frac{(x + 1)^3}{x}$$

$$g_5: y = \frac{x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{x - 1}$$

$$g_6: y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x - 1}$$

$$g_7: y = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$$

$$g_8: y = \frac{\sin 2x + 1}{\sin x + \cos x}$$

**21** Derivujte podle pravidel pro derivaci součinu, podílu.

$$h_1: y = x \cdot \sin x$$

$$h_4: y = \frac{2x - 1}{x + 3}$$

$$h_2: y = (x^2 - 1) \cdot \sin x$$

$$h_5: y = \frac{x^2 + 2x}{1 - x^2}$$

$$h_3: y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$h_6: y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

**22** Vypočítejte derivace složených funkcí.

$$f_1(x) = (x^2 + 1)^6$$

$$f_9(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$$

$$f_2(x) = \sqrt{4x^3 - x}$$

$$f_{10}(x) = \sqrt{\cos 2x}$$

$$f_3(x) = (\sqrt{2x^3 - 1} + 2)^8$$

$$f_{11}(x) = \sqrt[3]{\cos 2x + 2x}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{(3x^4 + x^2)^{10}}$$

$$f_{12}(x) = \operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{4})$$

$$f_5(x) = \sqrt{x + \sqrt{5x}}$$

$$f_{13}(x) = \sqrt{\sin 3x + 5}$$

$$f_6(x) = \cos(2x + 4)$$

$$f_{14}(x) = \ln(2x + 4)$$

$$f_7(x) = \sin^2 x$$

$$f_{15}(x) = \ln(3 \sin x - 8)$$

$$f_8(x) = \sin x^2$$

$$f_{16}(x) = e^{\sin x}$$

**23** Je dána funkce  $g: y = x^3 + 2x$ . Vypočítejte  $g'(0)$ ,  $g'(1)$ ,  $g'(-2)$ .

**24** Je dána funkce  $f: y = 2x^3 - 2x + 1$ . Určete, pro která  $x \in \mathbb{R}$  platí:

- a)  $f'(x) = 0$       b)  $f'(x) = 4$       c)  $f'(x) = -5$       d)  $f'(x) = f'(3)$

## 19.6 Tečna ke grafu funkce

**25** Určete směrnici tečny ke grafu funkce  $y = x^2$  v bodě  $T[3; 9]$ .

**26** Napište rovnici tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $T$ . Rovnici tečny uveděte v obecném tvaru.

a)  $f_1(x) = x^2 - 2x$ ,  $T[4; ?]$

e)  $f_5(x) = 2 \sin x$ ,  $T[0; ?]$

b)  $f_2(x) = 2x^4 + 8x$ ,  $T[-1; ?]$

f)  $f_6(x) = x \operatorname{tg} x$ ,  $T[0; ?]$

c)  $f_3(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $T[\frac{1}{2}; ?]$

g)  $f_7(x) = \frac{1+x^3}{x-1}$ ,  $T[2; ?]$

d)  $f_4(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ,  $T[-2; ?]$

h)  $f_8(x) = \frac{\sin 2x + 1}{\cos x + \sin x}$ ,  $T[\frac{\pi}{2}; ?]$

**27** Je dána funkce  $f(x) = 2x^2 + x - 1$ . Na grafu funkce  $y = f(x)$  určete bod  $T$  tak, aby

- a) tečna v bodě  $T$  měla směrnici  $k = 5$ ,
- b) tečna v bodě  $T$  měla směrový úhel  $\varphi = 60^\circ$ ,
- c) tečna v bodě  $T$  byla rovnoběžná s osou  $x$ ,
- d) tečna v bodě  $T$  byla rovnoběžná s osou  $y$ ,
- e) tečna v bodě  $T$  byla rovnoběžná s přímkou  $p: x - y + 10 = 0$ ,
- f) tečna v bodě  $T$  byla kolmá k přímce  $q: 3x + y - 1 = 0$ .

**28** Napište obecnou rovnici tečny  $t$  ke grafu funkce  $y = -x^2 - 4x + 8$  tak, aby tečna  $t$  byla rovnoběžná s přímkou  $p: 4x - 2y + 7 = 0$ . Nakreslete.

**29** Ve kterém bodě křivky  $y = \frac{1}{x^2}$  je tečna rovnoběžná s osou I. a III. kvadrantu?

**30** Ve kterých bodech grafu funkce  $y = x^3 - x^2 - x$  jsou tečny ke grafu rovnoběžné s osou  $x$ ?

**31** Pomocí derivace určete souřadnice vrcholu paraboly  $y = -3x^2 + x - 1$ .

**32** Určete obecnou rovnici tečny ve vrcholu paraboly  $y = 2x^2 + 4x - 7$ .

**33** Vypočítejte směrové úhly tečen vedených ke grafu funkce  $y = f(x)$  v průsečících grafu funkce s osou  $x$ . Načrtněte graf dané funkce, vyznačte vypočítané úhly.

- |                            |                                   |                       |
|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| a) $f_1(x) = -x^2 + 2x$    | d) $f_4(x) = \sin x$              | g) $f_7(x) = e^x - 1$ |
| b) $f_2(x) = x^3$          | e) $f_5(x) = \cos x$              | h) $f_8(x) = \ln x$   |
| c) $f_3(x) = \sqrt{x} - 2$ | f) $f_6(x) = \operatorname{tg} x$ | i) $f_9(x) = \log x$  |

**34** Ve kterém bodě grafu funkce  $y = -2x^2 + 4x$  svírá tečna ke grafu s kladnou poloosou  $x$  úhel:

- a)  $45^\circ$       b)  $120^\circ$       c)  $0^\circ$       d)  $\frac{3\pi}{4}$       e)  $\frac{\pi}{2}$

**35** Vypočítejte odchylku tečen sestrojených v průsečících grafů kvadratických funkcí  $y_1 = x^2 - 6x$  a  $y_2 = -x^2$ .

**36** Vypočítejte odchylku tečen sestrojených v průsečících parabol  $y_1 = x^2 + 1$  a  $y_2 = -x^2 + 9$ .

**37** Napište rovnice tečen vedených z bodu  $M[3; 0]$  ke křivce  $y = \frac{x-4}{x}$ . K výpočtu směrnice užijte derivaci. Výpočet ověřte obrázkem.

## 19.7 Funkce rostoucí, klesající

**38** Užitím derivace funkce určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí a ve kterých je klesající.

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| $f_1(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$  | $f_4(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$     |
| $f_2(x) = -2x^3 + x^2 + 4x + 3$ | $f_5(x) = 4x^2 - x^4$          |
| $f_3(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$  | $f_6(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$ |

**39** Užitím derivace určete intervaly monotónnosti následujících funkcí:

$$g_1(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$g_5(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

$$g_9(x) = (x^2 - 1)^4$$

$$g_2(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$g_6(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 1}$$

$$g_{10}(x) = x\sqrt{x-1}$$

$$g_3(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$g_7(x) = \frac{1-2x}{x+3}$$

$$g_{11}(x) = \sqrt{\frac{x-6}{4-x}}$$

$$g_4(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g_8(x) = \frac{1-2x^2}{x^2+3}$$

$$g_{12}(x) = \frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{4-x}}$$

## 19.8 Druhá derivace funkce

**40** Vypočítejte druhé derivace následujících funkcí v libovolném bodě  $x_0$  definičního oboru.

$$f_1(x) = 3x^2 + 6x - 2$$

$$f_4(x) = 4 \sin x + 2 \cos x$$

$$f_2(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$f_5(x) = \frac{(x^2 + 4)(x - 1)}{x^2}$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

$$f_6(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$$

**41** Je dáná funkce  $g(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2$ . Vypočítejte  $g(-1)$ ,  $g'(-1)$ ,  $g''(-1)$ .

**42** Dokažte, že funkce  $f: y = 2 \sin x - \cos x$  vyhovuje rovnici  $y'' + y = 0$ .

**43** Dokažte, že funkce  $f: y = 2x^2 - 4x$  vyhovuje rovnici  $xy'' - y' = 4$ .

## 19.9 Maximum, minimum funkce

**44** Určete, pro která  $x \in \mathbb{R}$  nabývá funkce lokálního minima, pro která  $x \in \mathbb{R}$  nabývá lokálního maxima.

$$f_1(x) = x^3 + 6x^2$$

$$f_4(x) = x^3 - 12x + 9$$

$$f_2(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$f_5(x) = x^4 + 4x^3$$

$$f_3(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$$

$$f_6(x) = x^5 + 10x^4$$

**45** Najděte lokální extrémy funkcí:

$$g_1(x) = \frac{x^2}{x+3}$$

$$g_3(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$$

$$g_5(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

$$g_2(x) = \frac{-2}{x^2+4}$$

$$g_4(x) = \sqrt{4x-x^2}$$

$$g_6(x) = (x^2 - 1)^3$$

**46** Vyšetřete globální extrémy funkcií  $h_1$  až  $h_6$  v intervalu  $(0; 2\pi)$ .

$$h_1(x) = \cos x + \sin x$$

$$h_4(x) = \cos x - 0,5 \cos 2x$$

$$h_2(x) = \sin^2 x - 2 \cos^2 x$$

$$h_5(x) = \cos^2 x + 0,5 \sin 2x$$

$$h_3(x) = \cos^2 x - \sin x$$

$$h_6(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$$

**47** Dokažte, že funkce  $y = \frac{2x+3}{x-6}$  nemá ve svém definičním oboru extrém.

**48** Určete hodnoty parametrů  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby minimum funkce  $h(x) = ax^2 + bx + 5$  bylo v bodě  $x = 2$  a jeho hodnota byla 4.

**49** Určete hodnoty parametrů  $p, q \in \mathbb{R}$  tak, aby funkce  $m(x) = x^2 + px + q$  nabývala minima pro  $x = -4$  a aby dále platilo  $m(3) = -10$ .

**50** Určete hodnoty parametrů  $b, d \in \mathbb{R}$  tak, aby lokální minimum funkce  $g(x) = x^3 + bx^2 + d$  bylo v bodě  $x = 2$  a jeho hodnota byla 5. Potom určete lokální maximum dané funkce  $g(x)$ .

## 19.10 Průběh funkce

**51** Je dáná funkce  $g: y = x^3 - \frac{9}{2}x^2$ .

a) Najděte intervaly, ve kterých je daná funkce  $y = g(x)$  rostoucí, klesající.

b) Vypočítejte lokální extrémy dané funkce.

c) Vypočítejte průsečíky grafu funkce  $g$  s osou  $x$  a s osou  $y$ .

d) Načrtněte graf funkce  $y = g(x)$ .

e) Napište rovnice tečen ke grafu dané funkce v bodech

$$T_1[0; 0], T_2[3; -13\frac{1}{2}], T_3[\frac{3}{2}; -6\frac{3}{4}]$$

f) Všechny tři tečny z úlohy e) zakreslete do obrázku.

**52** Vyšetřete průběh funkce:

$$f_1(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f_6(x) = x^4 - 6x^2 + 8$$

$$f_2(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$$

$$f_7(x) = -2x^4 + 4x^2 + 6$$

$$f_3(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

$$f_8(x) = 0,1x^4 - 0,4x^3$$

$$f_4(x) = 3x^3 + 12x^2 + 12x$$

$$f_9(x) = 0,02x^5 - 0,1x^4$$

$$f_5(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x$$

$$f_{10}(x) = x^6 - 2x^3 - 3$$

**53** Vyšetřete průběh funkce:

$$g_1(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$g_3(x) = x^3 - \frac{1}{10}x^5$$

$$g_5(x) = \frac{x^4 - 8x^2}{4}$$

$$g_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

$$g_4(x) = x^3 + \frac{1}{10}x^5$$

$$g_6(x) = \frac{x^4 + 8x^2}{4}$$

**54** Vyšetřete průběh funkce:

$$h_1(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

$$h_4(x) = \frac{2x^2 - 10}{x+3}$$

$$h_7(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$h_2(x) = \frac{1}{x} + x$$

$$h_5(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$$h_8(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$h_3(x) = \frac{10x + 10}{x^2}$$

$$h_6(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$h_9(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$$

**55** Vyšetřete průběh funkce v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ :

$$g_1(x) = \sin^2 x + \sin x$$

$$g_3(x) = \cos^2 x - \sin x$$

$$g_2(x) = \cos^2 x + \cos x$$

$$g_4(x) = \sin^2 x - 2 \cos x$$

**56** Je dáná funkce  $f_1(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ .

a) Načrtněte graf funkce  $f_1(x)$  v intervalu  $\langle -5; 2 \rangle$ .

b) Určete obecné rovnice tečen v bodech:

$$T_1[-5; -5], T_2[-3; 27], T_3[-1; 11], T_4[0; 0], T_5[1; -5], T_6[2; 2]$$

c) V intervalu  $\langle -5; 2 \rangle$  načrtněte graf funkce  $f_2(x)$ , pro kterou platí, že  $f_2(x) = f_1'(x)$ .

d) V intervalu  $\langle -5; 2 \rangle$  načrtněte graf funkce  $f_3(x)$ , platí-li  $f_3(x) = f_1''(x)$ .

## 19.11 Derivace implicitní funkce

**57** Užitím derivace funkce dané implicitně určete rovnici tečny v bodě  $T$  dané kuželosečky. Načrtněte kuželosečku i tečnu v soustavě souřadnic. Vyznačte směrový úhel tečny. Vypočítejte směrový úhel tečny s přesností na minuty.

- a)  $x^2 + y^2 = 10, T[2; \sqrt{6}]$
- b)  $x^2 + 2y^2 = 4, T[\sqrt{2}; 1]$
- c)  $4x^2 + y^2 = 16, T[\sqrt{3}; 2]$
- d)  $x^2 - 4y^2 = 4, T[\sqrt{5}; \frac{1}{2}]$
- e)  $y^2 - 2x^2 = 16, T[0; 4]$
- f)  $y^2 = 6x - 8, T[2; -2]$
- g)  $x^2 = 4y + 5, T[3; 1]$
- h)  $x^2 + 4y^2 = 4, T[1; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$
- i)  $x^2 + 4y^2 = 4, T[0; 1]$
- j)  $x^2 + 4y^2 = 4, T[2; 0]$
- k)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0, T[-5; 5]$
- l)  $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0, T[1; -1]$
- m)  $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 19 = 0, T[9; 2\sqrt{3} - 1]$
- n)  $y^2 - 2y - 2x + 1 = 0, T[8; 5]$
- o)  $x^2 + 6x + 4y + 9 = 0, T[1; -4]$
- p)  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25, T[2; 6]$
- q)  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25, T[4; 2]$
- r)  $(x+2)^2 + 4y^2 = 8, T[-4; -1]$
- s)  $2x^2 - (y+3)^2 = 4, T[2\sqrt{5}; 3]$
- t)  $y^2 = 2(x-1), T[9; 4]$

**58** Ve kterém bodě elipsy  $4(x-1)^2 + y^2 = 1$  svírá tečna elipsy s kladnou poloosou  $x$  úhel  $45^\circ$ ?

**59** Ve kterém bodě paraboly  $y^2 = 4x - 8$  je tečna kolmá na osu I. a III. kvadrantu?

**60** Vypočítejte odchylku tečen křivek  $x^2 + y^2 = 5, 2x^2 + y^2 = 9$  v jejich průsečících.

## 19.12 Derivace funkce a výpočet limity

**61** Užitím definice derivace funkce vypočítejte následující limity:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$                   | d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - 0,5}{x - \frac{\pi}{3}}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$    |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$           | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$                               | h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3}$ | f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$                           | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$   |

**62** Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limity:

- |  |  |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$            | g) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$   |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$                      | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 4x^2 + x}{4x^3 + x}$           | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$           |
| d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$         | j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$               |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ | k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$            |
| f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + 2x}{\sin x + x}$            | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x + x}$     |

## 19.13 Slovní úlohy řešené pomocí derivací

**63** Z papíru tvaru čtverce  $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$  vystříhneme ve všech rozích stejné čtverečky a složíme krabičku. Určete stranu čtverečku tak, aby tato krabička měla maximální objem.

**64** Určete stranu čtverce, které musíme vyříznout ve všech rozích obdélníkového papíru o rozměrech  $8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  tak, aby po složení vznikla krabička maximálního objemu.

**65** Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch.

**66** Určete rozměry válcové nádoby bez víka tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch.

**67** Do koule o poloměru 3 cm vepište válec maximálního objemu. Určete jeho rozměry.

**68** Do koule o poloměru 3 cm vepište kužel maximálního objemu. Určete poloměr podstavy a výšku kuželes.

**69** Do rotačního kuželesa o rozměrech  $r = 6 \text{ cm}, v = 3 \text{ cm}$  vepište válec maximálního objemu tak, aby osa válce splývala s osou kuželesa. Určete rozměry válce.

**70** Do rotačního kuželesa o rozměrech  $r = 6 \text{ cm}, v = 3 \text{ cm}$  vepište válec maximálního objemu tak, aby osa válce byla kolmá na osu kuželesa. Určete rozměry válce.

**71** Kouli o poloměru 3 cm opište kužel minimálního objemu. Určete jeho rozměry.

**72** Do elipsy  $4x^2 + 9y^2 = 36$  vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry.

**73** Určete rozměry obdélníku tak, aby při daném obsahu  $16 \text{ cm}^2$  měl minimální obvod.

**74** Určete rozměry obdélníku tak, aby při daném obvodu  $20 \text{ cm}$  měl maximální obsah.

**75** Do ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$ ,  $c = 8\text{ cm}$ ,  $v_c = 4\text{ cm}$  vepište obdélník  $KLMN$  maximálního obsahu tak, aby  $KL \subset AB$ . Určete jeho rozměry.

**76** Z kruhu o poloměru 6 cm oddělte kruhovou úseč, která má výšku 5 cm. Do této kruhové úseče vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry.

b)

## Integrální počet

### 19.14 Primitivní funkce

**77** Dokažte, že funkce  $F(x)$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x)$ :

a)  $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$ ,  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

b)  $F(x) = -\cotg x + 11$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$

c)  $F(x) = \ln \sqrt{\left| \frac{x+1}{1-x} \right|}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

**78** Dokažte, že dané dvě funkce  $F_1(x)$  a  $F_2(x)$  jsou primitivní funkce k téže funkci a určete konstantu, o kterou se liší.

a)  $F_1(x) = -\frac{\cos 2x}{2}$ ,  $F_2(x) = 3 - \cos^2 x$

b)  $F_1(x) = \cos 2x$ ,  $F_2(x) = 6 \cos^2 x + 4 \sin^2 x$

c)  $F_1(x) = \sin 2x$ ,  $F_2(x) = (\sin x + \cos x)^2$

d)  $F_1(x) = \ln \sqrt{x-2} + 3$ ,  $F_2(x) = \ln \sqrt{2x-4}$

**79** Dokažte, že platí:

a)  $\int \sin^5 x \, dx = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c$

b)  $\int \sin^4 x \, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

c)  $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$

d)  $\int \frac{1}{1+\cos x} \, dx = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$

**80** Ověřte správnost následujících vzorců:

a)  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c$

b)  $\int f'(x) \cdot f^n(x) \, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$

**81** Vypočítejte a proveděte zkoušku:

a)  $\int (x^3 + x^2 - 2x) \, dx$

l)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} \, dx$

b)  $\int (3x + 5) \, dx$

m)  $\int x\sqrt{x} \left(1 + \frac{5}{x\sqrt{x}}\right) \, dx$

c)  $\int (2x^{-3} - x^{-4}) \, dx$

n)  $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right) \frac{1}{x^2} \, dx$

d)  $\int (x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{3}}) \, dx$

o)  $\int \sqrt[3]{x}(2x - \sqrt{x}) \, dx$

e)  $\int \left(\frac{x^3}{4} - \frac{4}{x^3}\right) \, dx$

p)  $\int (x^2 + 1)(x^2 - 3) \, dx$

f)  $\int \left(5\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right) \, dx$

q)  $\int (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \, dx$

g)  $\int \frac{7}{2\sqrt{5x}} \, dx$

r)  $\int (x^2 - 2x) : x \, dx$

h)  $\int x^2(x-2) \, dx$

s)  $\int \frac{x^4 - 1 + \sqrt{x}}{x^3} \, dx$

i)  $\int (x^2 + 4x)^2 \, dx$

t)  $\int \frac{x(\sqrt[4]{x} - x)}{\sqrt{x}} \, dx$

j)  $\int (1+2x)^3 \, dx$

u)  $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} \, dx$

k)  $\int 5x^2 \sqrt{x} \, dx$

**82** Vypočítejte a proveděte zkoušku:

a)  $\int \left(4 + \frac{1}{x}\right) \, dx$

b)  $\int \frac{1}{x+1} \, dx$

c)  $\int \frac{1}{5x+25} \, dx$

d)  $\int \frac{1}{2x+1} \, dx$

e)  $\int \frac{5}{1-3x} \, dx$

f)  $\int \frac{x^3+3x}{x^2} \, dx$

g)  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} \, dx$

h)  $\int \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{x} \, dx$

i)  $\int \frac{(x+1)^3}{x^2} \, dx$

**83** Vypočítejte:

a)  $\int \frac{x^2-4}{x+2} \, dx$

b)  $\int \frac{x^4-1}{x^2+1} \, dx$

c)  $\int \frac{x^3+1}{x+1} \, dx$

d)  $\int \frac{x^3-8}{x-2} \, dx$

e)  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \, dx$

f)  $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1} \, dx$

g)  $\int \frac{x^2-5x+6}{x-3} \, dx$

h)  $\int \frac{2x^2+x-6}{2x-3} \, dx$

i)  $\int \frac{x^2-4x+4}{4x^3-2x^4} \, dx$

**84** Vypočítejte:

a)  $\int \frac{x^2+5x+7}{x+2} \, dx$

b)  $\int \frac{x^2+2x}{x-1} \, dx$

c)  $\int \frac{x^3+2x^2-10x}{x-2} \, dx$

d)  $\int \frac{x^3+3x}{x+1} \, dx$

e)  $\int \frac{x^3}{x+2} \, dx$

f)  $\int \frac{4x^2-3}{2x+1} \, dx$

**85** Vypočítejte a proveděte zkoušku:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| a) $\int (\sin x - 2 \cos x) dx$ | g) $\int (\cos 3x + 3x + 1) dx$                   |
| b) $\int \sin 2x dx$             | h) $\int (3 \cos 3x + 1) dx$                      |
| c) $\int \cos 4x dx$             | i) $\int \sin (\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) dx$   |
| d) $\int 3 \sin 6x dx$           | j) $\int (\sin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) dx$   |
| e) $\int \cos (3x + 1) dx$       | k) $\int \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{x}{2} dx$ |
| f) $\int (\cos 3x + 1) dx$       | l) $\int (\sin \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) dx$   |

**86** Vypočítejte a proveděte zkoušku:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\int (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$                                  | g) $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$                                       |
| b) $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$                                  | h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$                             |
| c) $\int (\cos^{-2} x + \sin^{-2} x) dx$                            | i) $\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx$                                 |
| d) $\int \left( \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx$ | j) $\int \frac{\cos^2 2x}{1 + \sin 2x} dx$                               |
| e) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$                                  | k) $\int \left( \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$   |
| f) $\int \operatorname{cotg}^2 x dx$                                | l) $\int \left( \operatorname{cotg}^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$ |

**87** Vypočítejte a proveděte zkoušku:

- |                                 |                                 |                        |
|---------------------------------|---------------------------------|------------------------|
| a) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ | c) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ | e) $\int \sin^2 5x dx$ |
| b) $\int \sin^2 x dx$           | d) $\int \cos^2 x dx$           | f) $\int \cos^2 6x dx$ |

**88** Vypočítejte:

- |                                 |  |                                    |
|---------------------------------|--|------------------------------------|
| a) $\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$ | d) $\int \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$     | g) $\int \operatorname{tg} x dx$   |
| b) $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$  | e) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$     | h) $\int \operatorname{cotg} x dx$ |
| c) $\int \frac{5x^2}{1+x^3} dx$ | f) $\int \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} dx$ | i) $\int \operatorname{tg} 2x dx$  |

**89** Vypočítejte a proveděte zkoušku:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\int 2x(x^2 + 4)^5 dx$             | g) $\int x\sqrt{2x^2 - 8} dx$                     |
| b) $\int 3x(x^2 - 1)^6 dx$             | h) $\int \sqrt{5+2x} dx$                          |
| c) $\int x^2(4+x^3)^4 dx$              | i) $\int 2x(x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} dx$           |
| d) $\int \frac{x^2}{(1+4x^3)^3} dx$    | j) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$       |
| e) $\int x(2x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dx$ | k) $\int \cos x(\sin x + 7)^2 dx$                 |
| f) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3 - 2} dx$     | l) $\int \sin x \sqrt{\cos x + \frac{\pi}{2}} dx$ |

**90** Vypočítejte a proveděte zkoušku:

- |                       |                                  |                              |
|-----------------------|----------------------------------|------------------------------|
| a) $\int x \sin x dx$ | e) $\int e^x \sin x dx$          | i) $\int x^2 \sin x dx$      |
| b) $\int x \cos x dx$ | f) $\int e^x \cos x dx$          | j) $\int x^2 e^x dx$         |
| c) $\int x e^x dx$    | g) $\int \sin x \cdot \cos x dx$ | k) $\int x e^{2x} dx$        |
| d) $\int \ln x dx$    | h) $\int x \ln x dx$             | l) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ |

**91** Určete funkci  $f$  tak, aby platilo:

- a)  $f'(x) = x^2 + 2 \wedge f(1) = 3$     b)  $f''(x) = x - 3 \wedge f(0) = 1 \wedge f(2) = 3$

### 19.15 Určitý integrál

**92** Vypočítejte:

- |                              |  |                                    |
|------------------------------|--|------------------------------------|
| a) $\int_2^4 x dx$           | e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$    | i) $\int_{-3}^3 \sqrt{2x+10} dx$   |
| b) $\int_{-3}^3 (2x - 5) dx$ | f) $\int_0^{\pi} \cos x dx$              | j) $\int_{-1}^1 e^x dx$            |
| c) $\int_1^3 (x^2 + 2x) dx$  | g) $\int_1^2 \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} dx$ | k) $\int_2^4 \frac{1}{x} dx$       |
| d) $\int_{-2}^1 (x+3)^2 dx$  | h) $\int_{-2}^3 \frac{x}{x^2 + 1} dx$    | l) $\int_{-1}^5 \frac{1}{4x+5} dx$ |

**93** Určete hodnotu parametru  $c \in \mathbb{R}$  tak, aby pro funkci  $g(x) = x^2 + c$  platilo  $\int_0^3 g(x) dx = 15$ .

**94** Určete hodnoty parametrů  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby pro funkci  $f(x) = ax^2 + b$  platilo  $\int_0^1 f(x) dx = 2 \wedge \int_2^3 f(x) dx = 20$ .

**95** Určete hodnoty  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tak, aby pro funkci  $f(x) = ax^2 + bx + c$  platilo  $f'(-1) = -7 \wedge f(0) + f''(0) = 5 \wedge \int_0^2 f(x) dx = \frac{4}{3}$ .

**96** Určete hodnoty parametrů  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby pro funkci  $h(x) = a\sqrt{x} + b$  platilo  $h'(4) = \frac{1}{2} \wedge \int_0^4 h(x) dx = \frac{44}{3}$ .

**97** Určete hodnotu parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby pro funkci  $f(x) = a \sin 2x$  platilo:

- a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1$     b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 4$

**98** Určete hodnoty  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby pro funkci  $g(x) = a \sin x + b \cos x$  platilo  $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = \sqrt{2} \wedge \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) dx = 3$ .

**99** Určete hodnoty  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo  $b - a = 3 \wedge \int_a^b x^2 dx = 21$ .

### 19.16 Obsah rovinného obrazce

**100** Nakreslete rovinný obrazec, který omezuje osa  $x$  a graf funkce  $y = f(x)$ , přičemž  $x \in \langle a; b \rangle$ . Potom vypočítejte jeho obsah.

- |  |  |
|--|--|
| a) $y = x^2 \wedge x \in \langle 0; 2 \rangle$                   | e) $y = \sin x \wedge x \in \langle 0; \pi \rangle$                    |
| b) $y = -x^2 + 2 \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$             | f) $y = \sin x + \cos x \wedge x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ |
| c) $y = \sqrt{x} \wedge \langle 0; 4 \rangle$                    | g) $y = e^x - 1 \wedge x \in \langle 0; 1 \rangle$                     |
| d) $y = \frac{1}{x} \wedge x \in \langle \frac{1}{2}; 5 \rangle$ | h) $y = \ln x \wedge x \in \langle 1; e \rangle$                       |

**101** Nakreslete rovinný obrazec, který omezuje daná parabola a osa  $x$ . Potom vypočítejte jeho obsah.

a)  $y = -x^2 + 4$

b)  $y = 2x^2 - 4x$

c)  $y = -x^2 - x + 2$

d)  $y = 2x^2 + 2x - 4$

**102** Nakreslete rovinný obrazec, který je omezen grafy funkcí  $f$  a  $g$  v daném intervalu  $\langle a; b \rangle$ . Potom vypočítejte jeho obsah.

a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^2 + 4 \wedge x \in \langle -2; 2 \rangle$

b)  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \sin x + 1 \wedge x \in \langle 0; \pi \rangle$

**103** Nakreslete rovinný obrazec, který je omezen grafy funkcí  $f$  a  $g$ . Potom vypočítejte jeho obsah.

a)  $f_1(x) = x^2$ ,  $g_1(x) = 5x - 6$

g)  $f_7(x) = x^2 - 2x + 3$ ,

$g_7(x) = -2x^2 + 4x + 3$

b)  $f_2(x) = x^2$ ,  $g_2(x) = 4$

h)  $f_8(x) = 2x^2 + 3$ ,

$g_8(x) = -x^2 + 2x - 1$

c)  $f_3(x) = x^2 - 1$ ,  $g_3(x) = x + 1$

i)  $f_9(x) = x^2$ ,  $g_9(x) = \sqrt{x}$

d)  $f_4(x) = -x^2 + 5$ ,  $g_4(x) = x + 3$

j)  $f_{10}(x) = \sqrt{x}$ ,  $g_{10}(x) = 0,5x$

e)  $f_5(x) = x^2 + 2$ ,  $g_5(x) = 2x^2 - 2$

k)  $f_{11}(x) = \frac{2}{x}$ ,  $g_{11}(x) = 3 - x$

f)  $f_6(x) = x^2 + 2x$ ,  $g_6(x) = -x^2 - 2x$

l)  $f_{12}(x) = -x^2 + 5$ ,  $g_{12}(x) = \frac{4}{x^2}$

**104** Nakreslete grafy funkcí  $f$  a  $g$ . Vypočítejte souřadnice  $x_1$ ,  $x_2$  průsečíků daných grafů v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ . Vyšrafujte rovinný obrazec, který funkce  $f(x)$ ,  $g(x)$  pro  $x \in \langle x_1; x_2 \rangle$  omezují. Vypočítejte jeho obsah.

a)  $f_1(x) = \sin x$ ,  $g_1(x) = \cos x$

c)  $f_3(x) = 2 \sin x$ ,  $g_3(x) = \sin 2x$

b)  $f_2(x) = \sin x$ ,  $g_2(x) = \frac{1}{2}$

d)  $f_4(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $g_4(x) = \sin x$

**105** Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného grafem funkce  $y = f(x)$  a osou  $x$  v daném intervalu. Načrtněte obrázek.

a)  $f(x) = x^3 - x \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$

b)  $f(x) = x^4 - 4x^2 \wedge x \in \langle -2; 2 \rangle$

**106** Vypočítejte obsah rovinného obrazce, který je omezen grafy funkcí  $y = f(x)$  a  $y = g(x)$ . Načrtněte obrázek.

a)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x$

b)  $f(x) = x^3 - 4x$ ,  $g(x) = -3x$

**107** Nakreslete rovinný obrazec, který omezují grafy daných tří funkcí v uvedeném definičním oboru. Potom vypočítejte jeho obsah.

a)  $f(x) = -x^2 + 5$ ,  $g(x) = 5$ ,  $h(x) = 3x + 1$ ,  $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = 4x$ ,  $h(x) = \frac{1}{4}x$ ,  $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}^+$

c)  $f(x) = x^2 - 2x$ ,  $g(x) = x$ ,  $h(x) = -x^2 + 2x + 6$ ,  $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}_0^-$

**108** Nakreslete rovinný obrazec, který omezují dvě křivky dané rovnicemi  $y^2 = 4x - 4$ ,  $y^2 = 8x - 16$ . Vypočítejte jeho obsah.

**109** Vypočítejte obsah trojúhelníku  $ABC$ , který je omezen přímkami  $y_1 = x$ ,  $y_2 = -x$ ,  $y_3 = 3x - 4$  dvěma způsoby:

a) pomocí integrálního počtu

b) pomocí analytické geometrie

**110** Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného grafem funkce  $y = f(x)$ , tečnou ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $A$  a přímkou  $p$ . Načrtněte obrázek.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ ,  $A[2; 4]$ ,  $p: x = -2$

b)  $f(x) = \sin x$ ,  $A[0; 0]$ ,  $p: x = \frac{\pi}{2}$

**111** Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného danou parabolou a tečnami k této parabole v bodech, ve kterých parabola protíná osu  $x$ . Načrtněte obrázek.

a)  $y = x^2 - 4x$

b)  $y = x^2 - 4$

c)  $y = -x^2 + 2x + 3$

**112** Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného danou parabolou a tečnami k této parabole v bodech  $A$ ,  $B$ . Načrtněte obrázek.

a)  $y = x^2$ ,  $A[1; 1]$ ,  $B[0; 0]$

b)  $y = x^2 - 4x + 3$ ,  $A[0; 3]$ ,  $B[3; 0]$

**113** Určete hodnotu parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby obsah rovinného obrazce, který omezují daná parabola  $y = ax^2 - 3$  a osa  $x$  byl 2.

**114** Určete hodnotu parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby graf kvadratické funkce  $y = ax^2 + x$  omezoval s osou  $x$  rovinný obrazec, jehož obsah je 24.

**115** Určete hodnotu parametru  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby graf kvadratické funkce  $y = x^2 + bx$  omezoval s osou  $x$  rovinný obrazec, jehož obsah je 36.

**116** Určete hodnoty parametrů  $a$ ,  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby maximum kvadratické funkce  $y = ax^2 + b$  bylo v bodě  $[0; 4]$  a graf této funkce omezoval s osou  $x$  rovinný obrazec, jehož obsah je 32.

**117** Určete kvadratickou funkci tak, aby její graf protínal osu  $x$  v bodech  $A[0; 0]$ ,  $B[6; 0]$  a spolu s osou  $x$  omezoval rovinný obrazec, jehož obsah je 48.

**118** Určete kvadratickou funkci tak, aby nabývala maxima pro  $x = 2$ , její graf procházel počátkem soustavy souřadnic a graf této funkce spolu s osou  $x$  omezoval rovinný obrazec o obsahu 16.

**119** Určete kvadratickou funkci tak, aby nabývala minima v bodě  $[0; -4]$  a aby graf této funkce spolu s osou  $x$  omezoval rovinný obrazec o obsahu 16.

**120** Určete hodnotu parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby graf funkce  $y = a \sin x$  omezoval s osou  $x$  v intervalu  $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$  rovinný obrazec, jehož obsah je 10.

**121** Určete hodnoty parametrů  $a$ ,  $c \in \mathbb{R}$  tak, aby graf funkce  $y = a \sin x + c$  procházel bodem  $A[\frac{\pi}{6}; 2]$  a spolu s osou  $x$  omezoval v intervalu  $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$  rovinný obrazec, jehož obsah je  $2 + \frac{1}{2}\pi$ .

**122** Určete hodnoty parametrů  $a$ ,  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby funkce  $y = a \sin x + b \cos x$  nabývala maxima pro  $x = \frac{1}{4}\pi$  a graf této funkce spolu s osou  $x$  omezoval v intervalu  $\langle 0; \frac{1}{2}\pi \rangle$  rovinný obrazec, jehož obsah je 6.

**123** Graf funkce  $y = \sin x$  a osa  $x$  omezují v intervalu  $\langle 0; b \rangle$  pro  $b < \pi$  rovinný obrazec. Určete hodnotu parametru  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby jeho obsah byl 1.

**124** Graf funkce  $y = \frac{1}{\cos^2 x}$  a osa  $x$  omezují v intervalu  $\langle 0; b \rangle$  pro  $b < \pi$  rovinný obrazec. Určete hodnotu parametru  $b \in \mathbb{R}$  tak, aby jeho obsah byl 1.

**125** Graf funkce  $y = \frac{1}{x}$  a osa  $x$  omezují v intervalu  $\langle a; 1 \rangle$  rovinný obrazec. Určete hodnotu parametru  $a \in \mathbb{R}^+$  tak, aby jeho obsah byl 5.

**126** Nakreslete graf funkce  $y = x^2$  v intervalu  $\langle 0; 2 \rangle$ . Potom vypočítejte číslo  $m \in \langle 0; 2 \rangle$  tak, aby obsah rovinného obrazce omezeného danou parabolou a osou  $x$  v intervalu  $\langle 0; m \rangle$  byl dvakrát větší než obsah rovinného obrazce omezeného touto parabolou a osou  $x$  v intervalu  $\langle m; 2 \rangle$ . Nakreslete.

**127** Nakreslete graf funkce  $y = \sin x$  v intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$ . Potom vypočítejte  $k \in \langle 0; \pi \rangle$  tak, aby obsah rovinného obrazce omezeného grafem dané funkce a osou  $x$  v intervalu  $\langle 0; k \rangle$  byl roven třetině obsahu rovinného obrazce omezeného tímto grafem a osou  $x$  v intervalu  $\langle k; \pi \rangle$ . Nakreslete.

### 19.17 Objem rotačního tělesa

**128** Nakreslete graf dané funkce v intervalu  $\langle a; b \rangle$ . Graf dané funkce a osa  $x$  v uvedeném intervalu omezují rovinný obrazec. Potom načrtněte těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy  $x$ . Vypočítejte jeho objem. Je-li to možné, pojmenujte toto těleso.

- |  |  |
|--|--|
| a) $y = 2 - x, x \in \langle 0; 2 \rangle$     | g) $y = 3, x \in \langle 0; 2 \rangle$                                   |
| b) $y = 2 - x, x \in \langle 0; 1 \rangle$     | h) $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0; 2 \rangle$                            |
| c) $y = x + 1, x \in \langle 0; 1 \rangle$     | i) $y = 0,5x\sqrt{x}, x \in \langle 0; 2 \rangle$                        |
| d) $y = x^2, x \in \langle 0; 2 \rangle$       | j) $y = x^{-1}, x \in \langle \frac{1}{2}; 5 \rangle$                    |
| e) $y = x^2 + 1, x \in \langle -2; 2 \rangle$  | k) $y = \sin x, x \in \langle 0; \pi \rangle$                            |
| f) $y = -x^2 + 1, x \in \langle -1; 1 \rangle$ | l) $y = 2 + \sin x, x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ |

**129** Daná kuželosečka omezí rotaci kolem osy  $x$  rotační těleso. Nakreslete danou kuželosečku, načrtněte vzniklé rotační těleso. Vypočítejte jeho objem. Je-li to možné, pojmenujte toto těleso.

- |                          |                     |
|--------------------------|---------------------|
| a) $x^2 + y^2 = 4$       | c) $x^2 + 4y^2 = 4$ |
| b) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ | d) $4x^2 + y^2 = 4$ |

**130** Daná kuželosečka omezí rotaci kolem osy  $x$  v daném intervalu rotační těleso. Nakreslete danou kuželosečku, načrtněte vzniklé rotační těleso. Vypočítejte jeho objem. Je-li to možné, pojmenujte toto těleso.

- |  |   |
|--|---|
| a) $x^2 + y^2 = 4, x \in \langle 1; 2 \rangle$           | e) $y^2 = x, x \in \langle 0; 2 \rangle$        |
| b) $x^2 + y^2 = 4, x \in \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$ | f) $y^2 = 4x, x \in \langle 0; 2 \rangle$       |
| c) $x^2 + y^2 = 25, x \in \langle -4; 4 \rangle$         | g) $x^2 - y^2 = 1, x \in \langle 1; 2 \rangle$  |
| d) $x^2 = 2 - 2y, x \in \langle -1; 1 \rangle$           | h) $y^2 - x^2 = 1, x \in \langle -2; 2 \rangle$ |

**131** Odvodte vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru  $r$ .

**132** Odvodte vzorec pro výpočet objemu válce, který má poloměr podstavy  $r$  a výšku  $v$ .

**133** Odvodte vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele, je-li poloměr podstavy  $r$  a výška kužele je  $v$ .

**134** Odvodte vzorec pro výpočet objemu rotačního komolého kužele, jsou-li poloměry podstav  $r_1, r_2$  a výška komolého kužele je  $v$ .

**135** Odvodte vzorec pro výpočet objemu rotačního elipsoidu, který vznikne rotací dané elipsy kolem osy  $x$  ( $a$  — hlavní poloosa,  $b$  — vedlejší poloosa):

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ | b) $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ |
|-------------------------------|-------------------------------|

**136** Parabolická úseč má základnu  $a = 4$  cm a výšku  $v = 6$  cm. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací této úseče

- |                        |                   |
|------------------------|-------------------|
| a) kolem své základny, | b) kolem své osy. |
|------------------------|-------------------|

**137** Přímka  $y = kx$  a osa  $x$  omezují v intervalu  $\langle 0; 2 \rangle$  trojúhelník, jehož rotací kolem osy  $x$  vznikne kužel. Určete hodnotu parametru  $k \in \mathbb{R}$  tak, aby objem kužele byl  $24\pi$ .

**138** Parabola  $y^2 = 2px$  a osa  $x$  omezují v intervalu  $\langle 0; 2 \rangle$  rovinný obrazec, jehož rotací kolem osy  $x$  vznikne rotační těleso. Určete hodnotu parametru  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby objem tohoto tělesa byl 10.

**139** Rotací paraboly  $y^2 = 2px$  kolem osy  $x$  v intervalu  $\langle 1; 3 \rangle$  vznikne parabolická vrstva. Určete hodnotu parametru  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby její objem byl  $12\pi$ .

**140** Nakreslete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice platí  $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq x \wedge y \geq 0$ . Dostanete tak kruhovou výseč. Její rotací kolem osy  $x$  vznikne kulová výseč. Vypočítejte její objem.

## **20.1 Definice pravděpodobnosti, vlastnosti pravděpodobnosti, binomické rozdělení**

- 1** Jaká je pravděpodobnost, že při hodu mincí padne  
a) rub,                    b) líc?

**2** Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne  
a) šestka,                c) číslo větší než jedna,  
b) sudé číslo,            d) číslo deset?

**3** Hodíme dvěma kostkami, červenou a modrou. Jaká je pravděpodobnost, že  
a) na obou kostkách padne šestka,  
b) na obou kostkách padne liché číslo,  
c) alespoň na jedné kostce padne liché číslo,  
d) bude součet bodů na kostkách 5,  
e) bude součet bodů na kostkách menší než 5?

**4** Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že  
a) padne alespoň jednou liché číslo,    c) padne součet osm,  
b) padne dvojice sudých čísel,              d) padne součet větší než deset?

**5** Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že  
a) padne právě jednou šestka,                c) padne nejvýše jednou šestka,  
b) padne alespoň jednou šestka,                d) nepadne ani jednou šestka?

**6** Hodíme třikrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že  
a) padne právě jednou šestka,                c) padne nejvýše jednou šestka,  
b) nepadne ani jednou šestka,                d) padne alespoň jednou šestka?

**7** Hodíme třemi kostkami. Hráč A vyhraje, padne-li součet bodů 10, hráč B vyhraje, padne-li součet bodů 11. Padne-li jiný součet, nevyhraje nikdo, hráči házejí znova. Který z hráčů má větší pravděpodobnost výhry?

**8** Hodíme třikrát kostkou. Vypočítejte pravděpodobnost, že při prvním hodu padne sudé číslo, při druhém hodu padne liché číslo a při třetím hodu padne šestka?

**9** Hodíme třikrát kostkou. Vypočítejte pravděpodobnost, že při prvním, nebo při druhém, nebo třetím hodu padne sudé číslo.

**10** Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma mincemi najednou padne  
a) na obou rub,                                    b) alespoň na jedné rub?

**11** a) Jaká je pravděpodobnost, že při třech hodech jednou mincí padne alespoň dvakrát líc?  
b) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi mincemi najednou padne alespoň na dvou mincích líc?

**12** Hodíme jedenkrát čtyřmi mincemi najednou. S jakou pravděpodobností padne na dvou mincích rub a na dvou mincích líc?

**13** Kolikrát musíme hodit hrací kostkou, aby alespoň jedna šestka padla s pravděpodobností větší než 0,5?

- 14** Kolikrát musíme hodit hrací kostkou, aby alespoň jedna šestka padla s pravděpodobností větší než 75 %?

**15** Kolikrát musíme hodit dvěma kostkami, aby dvojice šestek padla s pravděpodobností větší než 80 %?

**16** Kolikrát musíme hodit dvěma kostkami, aby součet dvanáct padl s pravděpodobností větší než 50 %?

**17** Kolikrát musíme hodit mincí, aby pravděpodobnost, že padne alespoň jednou líc byla větší než 0,999?

**18** Hodíme pětkrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne právě dvakrát?

**19** Hodíme desetkrát kostkou. S jakou pravděpodobností mezi prvními pěti hody nepadne žádná šestka a mezi šestým až desátým hodem padnou právě tři šestky?

**20** S jakou pravděpodobností padne při deseti hodech jednou kostkou alespoň tříkrát šestka?

**21** Rozhodněte, který z případů a), b) je pravděpodobnější.  
a) Při dvaceti hodech kostkou padne šestka alespoň desetkrát.  
b) Při dvaceti hodech kostkou padne šestka nejvýše desetkrát.

**22** S jakou pravděpodobností při deseti hodech dvěma kostkami najednou padne alespoň tříkrát dvojice šestek?

**23** Co je pravděpodobnější? Hodit při čtyřech hodech kostkou právě jednu šestku, nebo hodit při osmi hodech dvěma kostkami právě jednou dvojici šestek?

**24** Jaká je pravděpodobnost, že se Jana a Tomáš narodili ve stejný měsíc? (Počítejte, že měsíc je  $\frac{1}{12}$  roku.)

**25** Jaká je pravděpodobnost, že ze skupiny 5 studentů se alespoň dva studenti narodili ve stejný měsíc? (Počítejte, že měsíc je  $\frac{1}{12}$  roku.)

**26** Jaká je pravděpodobnost, že se Jana a Tomáš narodili ve stejný den? (Narodili se roku 1990.)

**27** Ve skupině je 10 děvčat a 18 chlapců. Náhodně vybereme skupinu 3 studentů. S jakou pravděpodobností jsou ve vybrané skupině 2 děvčata a jeden chlapec?

**28** Ve třídě je 30 žáků. Právě pět z nich nemá domácí úkol. Učitel náhodně kontroluje 6 žáků. Vypočítejte pravděpodobnost, že nejvýše dva žáci, které učitel kontroluje, nemají domácí úkol.

**29** Dvanáct studentů, mezi kterými je Pavel a Tomáš, mají ze svého středu vylosovat čtyřčlennou skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině bude  
a) Tomáš, c) Tomáš a Pavel,  
b) Tomáš, ale Pavel ne, d) Tomáš nebo Pavel?

**30** Šest studentek a osm studentů, mezi kterými jsou Jana a David, mají ze svého středu vylosovat čtyřčlennou skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vylosovanými studenty bude  
a) Jana a David, c) David,  
b) Jana nebo David, d) Jana, ale David ne?

**31** Střelec zasáhl cíl dvaadevadesátkrát ze 100 výstřelů.

- a) Jaká je pravděpodobnost jednoho zásahu cíle?
- b) S jakou pravděpodobností střelec cíl nezasáhne?
- c) Jaká je pravděpodobnost, že při dvou pokusech zasáhl cíl právě dvakrát?
- d) Jaká je pravděpodobnost, že při třech pokusech zasáhl cíl alespoň jedenkrát?

**32** Střelec zasáhne cíl v průměru osmkrát z 10 ran.

- a) S jakou pravděpodobností zasáhne cíl alespoň jedenkrát ze tří ran?
- b) S jakou pravděpodobností zasáhne cíl alespoň dvakrát ze tří ran?
- c) Kolikrát musí střelit, aby zasáhl cíl alespoň jednou s pravděpodobností, která je větší než 99 %?

**33** Dva střelci střílejí nezávisle na sobě na cíl. První střelec zasáhne cíl s pravděpodobností 0,6, druhý s pravděpodobností 0,8. Každý vystřelí právě jednu ránu. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) žádný z nich nezasáhl cíl,
- b) právě jeden zasáhl cíl,
- c) oba dva zasáhli cíl?
- d) Jaký výsledek dostaneme, sečteme-li pravděpodobnosti z úloh a) až c)?

**34** V porotě jsou tři členové. Dva z nich rozhodují s pravděpodobností 0,95 správně, třetí rozhoduje tak, že si hodí mincí. Jaká je pravděpodobnost, že celá porota rozhodne správně (tj. rozhodnou správně alespoň dva porotci)?

**35** Žárovka svítí se spolehlivostí 0,85 (tj. po určité době svítí jen 85 % žárovek).

- Jaká je spolehlivost systému (alespoň část svítí), jsou-li zapojeny
- a) dvě žárovky sériově,
  - b) dvě žárovky paralelně,
  - c) dvě žárovky sériově a třetí k nim paralelně?

**36** Žárovka svítí se spolehlivostí 92 %. Jaká je spolehlivost zařízení, ve kterém jsou tři žárovky zapojeny sériově?

**37** Pravděpodobnost úspěchu určité akce je 0,9. Jaká bude pravděpodobnost, že při dvojím (při trojím) opakování akce bude alespoň jedenkrát dosaženo úspěchu?

**38** Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané trojciferné číslo je

- a) sudé,
- b) dělitelné 5?

**39** Náhodně vybereme čtyřciferné číslo. Jaká je pravděpodobnost, že se v jeho zápisu vyskytuje cifra 8

- a) právě jednou,
- b) právě dvakrát,
- c) alespoň jednou,
- d) na druhém místě?

**40** a) S jakou pravděpodobností náhodně vybrané dvojciferné číslo není dělitelné 5 a není dělitelné 7?

- b) S jakou pravděpodobností náhodně vybrané dvojciferné číslo není dělitelné 5 nebo není dělitelné 7?

**41** Z čísel 1 až 50 vybereme náhodně jedno číslo. S jakou pravděpodobností je dělitelné

- a) šesti,
- b) osmi,
- c) šesti a osmi,
- d) šesti nebo osmi?

**42** S jakou pravděpodobností polopřímka vedená z bodu A má s kružnicí  $k(S; 3 \text{ cm})$  alespoň jeden společný bod? Řešte pro případy, že

- a)  $|AS| = 6 \text{ cm}$ ,
- b)  $|AS| = 3 \text{ cm}$ ,
- c)  $|AS| = 2 \text{ cm}$ .

**43** S jakou pravděpodobností protíná přímka vedená počátkem soustavy souřadnic úsečku BC, kde  $B[1; 2]$ ,  $C[6; -3]$ ?

**44** S jakou pravděpodobností polopřímka vedená z počátku soustavy souřadnic má s elipsou  $(x - 3)^2 + 0,375y^2 = 1$  alespoň jeden společný bod?

**45** Krychli o hraně  $a = 4 \text{ cm}$  obarvíme modrou barvou a potom ji rozřežeme na malé krychličky o hraně  $a_1 = 1 \text{ cm}$ . Malé krychličky zamícháme a náhodně vybereme jednu krychličku. Jaká je pravděpodobnost, že vybraná krychlička

- a) má obovenou právě jednu stěnu,
- b) má obovené právě dvě stěny,
- c) má obovené právě tři stěny,
- d) má všechny stěny neobarvené?
- e) Vypočítejte součet pravděpodobností z úloh a) až d).

**46** Krychli o hraně  $a = 4 \text{ cm}$  obarvíme červenou barvou a potom ji rozřežeme na malé krychličky o hraně  $a_1 = 1 \text{ cm}$ . Malé krychličky zamícháme a náhodně vybereme osm krychliček. Jaká je pravděpodobnost, že z vybraných krychliček lze sestavit novou krychli o hraně  $a_2 = 2 \text{ cm}$ ,

- a) která bude celá červená,
- b) která nebude obovená,
- c) která bude mít právě jednu stěnu červenou?

**47** V osudí je 5 červených a 3 bílé koule. Z osudí v prvním tahu vytáhneme jednu kouli, při druhém tahu vytáhneme opět jednu kouli. S jakou pravděpodobností vytáhneme ve druhém tahu červenou kouli, jestliže po prvním tahu kouli

- a) vracíme,
- b) nevracíme?

**48** Máme dvě osudí. V prvním osudí jsou 3 modré a 5 černých koulí, ve druhém jsou 4 modré a 6 černých koulí. Z každého osudí vytáhneme jednu kouli. S jakou pravděpodobností budeme mít jednu modrou a jednu černou kouli?

**49** Máme dvě osudí. V prvním osudí jsou 3 modré a 5 černých koulí, ve druhém jsou 4 modré a 6 černých koulí. Z prvního osudí vytáhneme jednu kouli a dáme ji do druhého osudí. S jakou pravděpodobností potom vytáhneme ze druhého osudí modrou kouli?

**50** V osudí je 20 koulí, ze kterých je právě 5 žlutých. Vytáhneme najednou 2 koule. S jakou pravděpodobností

- a) jsou obě vytažené koule žluté,
- b) je mezi vytaženými koulemi právě jedna žlutá,
- c) mezi vytaženými koulemi není žádná žlutá?
- d) Vypočítejte součet pravděpodobností z úloh a) až c).

**51** V osudí je 10 koulí, ze kterých jsou právě 3 zelené. Vytáhneme najednou tři koule. S jakou pravděpodobností

- a) je mezi vytaženými koulemi alespoň jedna zelená,
- b) jsou mezi vytaženými koulemi alespoň dvě zelené?

**52** V osudí je 8 červených a 6 bílých koulí.

- a) Vytáhneme postupně tři koule. Po každém tahu kouli vracíme. Jaká je pravděpodobnost, že postupně vytáhneme kouli červenou, bílou, červenou?
- b) Vytáhneme postupně tři koule. Po každém tahu kouli nevracíme. Jaká je pravděpodobnost, že postupně vytáhneme kouli červenou, bílou, červenou?
- c) Vytáhneme tři koule najednou. S jakou pravděpodobností jsou ve vytažené trojici koulí dvě červené a jedna bílá koule?

**53** V osudí jsou v dostatečném množství stejným počtem zastoupeny koule bílé a červené. Náhodně vytáhneme 2 koule najednou. Bez ohledu na počet koulí v osudí dokažte, že pravděpodobnost, že vybrané koule jsou

- a) obě červené, je vždy menší než 25 %,
- b) různé barvy, je vždy větší než 50 %.

**54** V bedně je 40 výrobků, z nichž právě 6 je vadných. Náhodně vybereme 5 výrobků. S jakou pravděpodobností

- a) budou mezi 5 vybranými výrobky právě tři vadné,
- b) budou mezi 5 vybranými výrobky alespoň dva vadné,
- c) bude mezi 5 vybranými výrobky nejvýše jeden vadný?

**55** V loterii vyhrává 4. cenu ten, jehož výrobní číslo losu končí stejným dvojčíslím, jako je dvojčíslí, které bylo vylosováno. S jakou pravděpodobností vyhrajeme alespoň jednu 4. cenu, koupíme-li si

- a) jeden los,
- b) pět losů?

**56** Koupíme si po jednom losu ve dvou tombolách. V první tombole vyhrává každý desátý, ve druhé tombole vyhrává každý padesátý los. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) vyhrajeme na oba losy,
- b) vyhrajeme alespoň na jeden los,
- c) nevyhrajeme na žádný los?

**57** V tombole je 30 cen (vyhrává 30 losů). Bylo prodáno 500 losů. Pan Novák si koupil 3 losy. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) na všechny tři losy vyhraje,
- b) vyhraje alespoň jednu cenu?

**58** Loterie má 10 000 losů, z nichž právě 20 vyhrává. S jakou pravděpodobností alespoň něco vyhrajeme, koupíme-li si 4 losy?

**59** Stroj vyrobí jednu součástku za dvě minuty. Pravděpodobnost, že součástka je vadná, je 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že za směnu (8 hodin) vyrobí stroj právě 10 vadných součástek?

**60** Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že pravděpodobnost narození chlapce je 0,485, pravděpodobnost narození dívčete je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že rodina, která má tři děti, má

- a) právě tři děvčata,
- b) dva chlapce a jedno děvče,
- c) alespoň jednoho chlapce,
- d) alespoň jednu dívku?

**61** Student dostal test, který obsahuje 10 otázek. Ke každé otázce vybírá ze

tří možností právě jednu odpověď. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví právě polovinu otázek správně, volí-li odpovědi zcela náhodně?

**62** Student dostal test, který obsahuje 10 otázek. Ke každé otázce vybírá právě jednu odpověď z možností a, b, c, d. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví alespoň 70 % otázek správně, volí-li odpovědi zcela náhodně?

**63** Lék úspěšně léčí 90 % případů onemocnění. Vypočítejte pravděpodobnost, že se vyléčí alespoň 18 pacientů z 20, kterým je lék podán.

**64** Kličivost semen určitého druhu mrkve je 96 %. Jaká je pravděpodobnost, že vyklíčí alespoň 25 semen ze 30 semen, které jsme zasadili?

**65** V obchodě zjistili, že pravděpodobnost dodávky s vadnými výrobky je 0,08. Určete pravděpodobnost, že mezi 20 dodávkami budou

- a) právě dvě dodávky obsahovat vadné výrobky,
- b) nejvýše dvě dodávky obsahovat vadné výrobky.

## Statistika

### 20.2 Aritmetický průměr, modus, medián, směrodatná odchylka, variační koeficient

**66** Ve třídě 1. A je 15 chlapců. Údaje o výšce chlapců udává následující tabulka:

Výška (cm)	160–164	165–169	170–174	175–179	180–184
Počet žáků	2	5	4	3	1

Vypočítejte průměrnou výšku žáka, určete modus, medián.

**67** Pan Dvořák jel automobilem prvních  $20 \text{ km}$  rychlostí  $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , dalších  $30 \text{ km}$  rychlostí  $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Vypočítejte průměrnou rychlosť jeho jízdy.

**68** V testu při zkoušce dostalo 15 studentů známku 1, dalších 35 studentů dostalo známku 2, známku 3 dostalo 30 studentů, 15 studentů dostalo známku 4 a zbylých 5 studentů dostalo známku 5. Vypočítejte průměrnou známku z testu, modus, medián. Výsledky testu znázorněte graficky.

**69** Při kontrole hmotnosti sušenek bylo zkontrolováno 10 krabic se sušenkami a zjistili se následující hodnoty: 250 g, 247 g, 251 g, 249 g, 252 g, 248 g, 251 g, 250 g, 251 g, 248 g. Vypočítejte průměrnou hmotnost krabice sušenek, směrodatnou odchylku a variační koeficient.

**70** Průměrný měsíční příjem byl zjištěn náhodně u 20 osob. Výsledky zachycuje následující tabulka:

Příjem (Kč)	0–2 000	2 001–4 000	4 001–6 000	6 001–8 000
Četnost	0	3	6	4

Příjem (Kč)	8 001–10 000	10 001–12 000	12 001–14 000	18 001–20 000
Četnost	3	1	2	1

Vypočítejte průměrný příjem, modus, medián a směrodatnou odchylku.

## Výsledky

# 1 Základní poznatky o výrocích a množinách

## 1.1 Výrok, operace s výroky

- 1 a) Ano; b) ano; c) ne; d) ne.
- 2 a) Součin dvou záporných reálných čísel není kladný. b) Číslo  $\sqrt{18}$  není dvojnásobkem čísla  $\sqrt{3}$ . c) Přímka  $y = 2x - 1$  prochází bodem  $[1; -1]$ . d)  $\sqrt{10} < 3$ .
- 3 a) Nepravdivý; b) pravdivý; c) pravdivý; d) nepravdivý.
- 4 a)  $10 > 8 \wedge 8 > 5$ ; b)  $3 < \pi \vee 3 = \pi$ ; c)  $100 = 2 \cdot 50 \wedge 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25$ ; d)  $\triangle KLM \sim \triangle PQR \wedge \triangle PQR \sim \triangle XYZ$ .
- 5 Platí implikace  $A \Rightarrow B$ , platí  $B$ , potom o platnosti  $A$  nelze nic říci. Tedy výrok, „Jana je nemocná“ může být pravdivý i nepravdivý.
- 6 a) Pravdivý; b) nepravdivý; c) pravdivý; d) pravdivý.
- 7 a) Musí platit výrok  $B$ . b) Nesmí platit výrok  $B$ .
- 8 a) Je; b) je; c) není; d) je.

## 1.2 Obměněná implikace, obrácená implikace

- 9 a) Obrácená: Jsou-li daná dvě přirozená čísla lichá, potom je jejich součin liché číslo. Obměněná: Nejsou-li daná dvě přirozená čísla obě lichá, potom jejich součin není liché číslo. Platí implikace původní, obrácená i obměněná.
- b) Obrácená: Jsou-li úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku navzájem kolmé, potom se jedná o kosočtverec. Obměněná: Nejsou-li úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku navzájem kolmé, potom se nejedná o kosočtverec. Platí implikace původní a obměněná, neplatí obrácená.
- c) Obrácená: Je-li číslo větší než 5, potom je i jeho druhá mocnina větší než 5. Obměněná: Není-li číslo větší než 5, potom i jeho druhá mocnina není větší než 5. Neplatí implikace původní a neplatí implikace obměněná, platí implikace obrácená.

## 1.3 Negace složených výroků

- 10 a) Nepřijde Alena nebo nepřijde Barbora. b) Nepřijde Cyril a nepřijde David. c) Přijde Eva a nepřijde Hana. d) Přijde Jan a nepřijde Iva nebo přijde Iva a nepřijde Jan.
- 11 a) Číslo 50 není dělitelné 15 nebo není dělitelné 5. b) Číslo 50 je dělitelné 15 a je dělitelné 5. c) Poslední dvojčíslí přirozeného čísla je dělitelné 4 a číslo není dělitelné 4. d) Číslo je dělitelné 6 a není dělitelné 2 nebo 3 nebo číslo není dělitelné 6 a je dělitelné 2 a 3.

## 1.4 Výroky s kvantifikátory

- 12 a) Právě; b) nejvyšše; c) aspoň.
- 13 a) Existuje; b) každý.
- 14 a) Druhá mocnina každého reálného čísla je číslo kladné. Neplatí, stačí zvolit  $x = 0$ .  
b) Druhá odmocnina z druhé mocniny libovolného reálného čísla je rovna jeho absolutní hodnotě. Platí.  
c) Ke každému reálnému číslu  $x$  existuje reálné číslo  $y$  tak, že součin  $x \cdot y = 10$ . Neplatí, stačí zvolit  $x = 0$ .  
d) Pro každá dvě reálná čísla platí: čísla se sobě rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich druhé mocniny. Neplatí, protože rovnají-li se sobě druhé mocniny, ještě se nemusí sobě rovnat čísla. Např.  $(-4)^2 = 4^2$  ale  $-4 \neq 4$ .  
e) Pro každá dvě kladná reálná čísla platí: je-li  $a < b$ , potom je i  $a^2 < b^2$ . Platí.  
f) Existuje takové reálné číslo  $x$ , že pro všechna reálná čísla  $y$  platí  $x \cdot y = y$ . Platí,  $x = 1$ .
- 15 a) Nejvyšše pět ... b) ... má aspoň šest ... c) ... má nejvyšše dva nebo aspoň čtyři ...  
d) Pro každé reálné číslo neplatí ... e) Existuje prvočíslo, které není liché.

## 1.5 Operace s množinami – průnik, sjednocení, rozdíl, doplněk

- 16 a)  $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}$ ; b)  $M_2 = \{\pm 5\}$ .
- 17  $M_1 \cap M_2 = \{10\}$ ;  $M_1 \cup M_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$ ;  
 $M_2 - M_1 = \{8; 9\}$ .
- 18  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 7\}$ ,  $B = \{1; 2; 3; 5; 6\}$ .

19  $(-\infty; -3) \cup (5; \infty)$ .

- 20 a)  $\langle -2; 2 \rangle$ ; b)  $\{2\}$ ; c)  $\langle -7; 5 \rangle$ ; d)  $\langle -2; \infty \rangle$ ; e)  $\langle 2; 5 \rangle$ ; f)  $\langle 2; 5 \rangle$ ;  
g)  $(-\infty; -7) \cup (2; \infty)$ ; h)  $\langle -7; -2 \rangle$ .

## 2 Základní typy rovnic a nerovnic

### 2.1 Lineární rovnice a nerovnice

- 1 a)  $\{1\}$ ; b)  $\{4\}$ ; c)  $\{3,25\}$ ; d)  $\{2\}$ ; e)  $\{4\}$ ;  
f)  $(-2; \infty)$ ; g)  $(-\infty; 1)$ .

### 2.2 Rovnice a nerovnice v součinném tvaru

- 2 a)  $\{\pm \frac{3}{2}; 3\}$ ; b)  $\{\pm 5\sqrt{2}\}$ ; c)  $(-\infty; -2) \cup (6; \infty)$ ; d)  $(-\infty; -2) \cup (4; \infty)$ ; e)  $(-7; \infty)$ ;  
f)  $(-\infty; \frac{3}{11}) - \{0\}$ ; g)  $(-\infty; -3) \cup (2; 3)$ ; h)  $\mathbb{R}$ .

### 2.3 Rovnice a nerovnice v podílovém tvaru

- 3 a)  $\{\frac{5}{2}\}$ ; b)  $\{-5\}$ ; c)  $\langle -2; \frac{2}{3} \rangle$ ; d)  $(-\infty; -7) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$ ; e)  $(-\infty; -4) \cup (0; \frac{3}{5}) \cup (6; \infty)$ ;  
f)  $(-1; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$ .

### 2.4 Kvadratické rovnice

- 4 a)  $\{0; -\frac{1}{4}\}$ ; b)  $\{\pm \frac{\sqrt{10}}{2}\}$ ; c)  $\{-1; \frac{2}{3}\}$ ; d)  $\{-1 \pm \sqrt{2}\}$ ; e)  $\{\frac{1}{2}\}$ ; f)  $\emptyset$ ;  
g)  $\{-\sqrt{3}-1; -\sqrt{3}\}$ ;  
h)  $D = 12 + 4\sqrt{3} + 1 - 8\sqrt{3} = 12 - 4\sqrt{3} + 1 = (2\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow x \in \{-1; -2\sqrt{3}\}$ ;  
i)  $D = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow x \in \{-1; \sqrt{2}\}$ , nebo lze řešit  
vytýkáním; j)  $\{2; \frac{1}{2}\}$ .

5 x dosadíme.

### 2.5 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

- 6 a)  $k(x^2 + x - 6) = 0$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; b)  $k(x^2 - 2x - 2) = 0$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ;  
c)  $k(x^2 + 2x + 1) = 0$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; d)  $k(x^2 - 5x) = 0$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ;  
e)  $k(50x^2 - 20x + 1) = 0$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

7  $x_2 = -3$ ,  $p = 5$ .8  $x_2 = 4$ ,  $q = -4$ .9  $b = \pm 9$ .10  $m = \pm 6$ .11  $q_1 = -\frac{125}{2}$ ,  $q_2 = \frac{27}{2}$ .12 a)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{2}{5}$ ; b)  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = -6$ .13 a)  $k(5x^2 + 24x + 45) = 0$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; b)  $k(5x^2 - 22x + 26) = 0$ , kde  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

### 2.6 Kvadratický trojčlen

- |                  |                   |                                  |
|------------------|-------------------|----------------------------------|
| a) $(x-3)(x-2)$  | g) $(x-5)^2$      | m) $(2x-1)(x+1)$                 |
| b) $(x+2)(x+5)$  | h) $(x+2)^2$      | n) $(3x-2)(x-5)$                 |
| c) $(x-2)(x+4)$  | i) $(x-3)^2$      | o) $(8-x)(x+1)$                  |
| d) $(x-1)(x+11)$ | j) $(2x+1)^2$     | p) $(2x-5)(3-x)$                 |
| e) $(x-1)(x+2)$  | k) $(4x-5)(4x+5)$ | q) nelze v $\mathbb{R}$ rozložit |
| f) $(x-6)(x-5)$  | l) $15x(x-2)$     | r) nelze v $\mathbb{R}$ rozložit |

- 15 a)  $(x+1)^2 + 5 \Rightarrow$  pro  $x = -1$  min. 5; b) pro  $x = -2$  min. 0; c) pro  $x = \frac{3}{2}$  min.  $-\frac{1}{4}$ ;  
d)  $4(x - \frac{1}{2})^2 - 1 \Rightarrow$  pro  $x = \frac{1}{2}$  min.  $-1$ ; e) pro  $x = -1$  min. 8; f) pro  $x = 2$  min.  $-7$ ;  
g)  $-2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow$  pro  $x = \frac{1}{4}$  max.  $\frac{1}{8}$ ; h) pro  $x = 1$  max. 4; i) pro  $x = 0$  max.  $-16$ .

- 16 a)  $\frac{x+2}{3x+2}$   $[x \neq \frac{1}{4}; -\frac{2}{3}]$ ; b)  $-1 [x \neq -6; -5; -3; -1; 2]$ .

### 2.7 Kvadratické nerovnice

- 17 a)  $(-\infty; -3) \cup (5; \infty)$ ; b)  $(-2; \frac{1}{3})$ ; c)  $(-4; \frac{3}{2})$ ; d)  $(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ ; e)  $(1; 2)$ ;  
f)  $\mathbb{R}$ ; g)  $\{\frac{1}{3}\}$ ; h)  $(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (0; \infty)$ ; i)  $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ; j)  $\emptyset$ .

### 2.8 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

- 18 a)  $\emptyset$ ; b)  $\{3\}$ ; c)  $\mathbb{R} - \{\pm 1; 0\}$ .

### 2.9 Nerovnice s neznámou ve jmenovateli

- 19 a)  $(0; \frac{1}{6})$ ; b)  $(-4; 1)$ ; c)  $(-\infty; -3) \cup (0; 1)$ ; d)  $(-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3})$ ; e)  $(-1; 1)$ ; f)  $\emptyset$ .

### 2.10 Rovnice s neznámou pod odmocninou

- 20 a)  $\{1\}$ ; b)  $\{-5; 4\}$ ; c)  $\{5\}$ ; d)  $\{-\frac{14}{9}; 2\}$ ; e)  $\{-\frac{1}{4}\}$ ; f)  $\emptyset$ ; g)  $\{5\}$ ; h)  $\{-3\}$ ;  
i)  $\{\frac{6}{5}\}$ ; j)  $\{-1; \frac{9}{16}\}$ .

### 2.11 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

- 21 a) Umocníme  $\Rightarrow x^2 - 4 \leq (x+1)^2 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$ . Určíme podmínky:  $x^2 - 4 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ , tedy  $x \in (-\frac{5}{2}; \infty) \cap (2; \infty) \Rightarrow x \in (2; \infty)$ ;  
b)  $(-\frac{5}{4}; -1) \cup (1; \infty)$ ;  
c) Uvažujte dva případy. Pro  $x+1 < 0$ , nelze nerovnici umocnit, stačí aby  $x^2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -3)$ . Pro  $x+1 \geq 0$  postup jako a)  $\Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ ;  
d)  $(-\infty; -2) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$ .

### 2.12 Rovnice s neznámou v absolutní hodnotě

- 22 a)  $\{\pm 7\}$ ; b)  $\{-2; 4\}$ ; c)  $\{-5; -3\}$ ; d)  $\{-\pi - 6; -\pi + 6\}$ ; e)  $\{-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\}$ ; f)  $\{4; 8\}$ ;  
g)  $\{-3 + 2\sqrt{3}; 1\}$ ; h)  $\{5\sqrt{11}\}$ ; i)  $\emptyset$ ; j)  $(7; \infty)$ ; k)  $(-\infty; 2)$ ; l)  $(\frac{8}{5}; \infty)$ ;  
m)  $\{1; 3\}$ ; n)  $\{-4\}$ ; o)  $\emptyset$ ; p)  $\{1; 7\}$ ; q)  $\{2\}$ ; r)  $(\frac{1}{2}; 4)$ ; s)  $\{2; \frac{14}{3}\}$ ; t)  $\{0; 1\}$ ; u)  $\{-1; 2\}$ ;  
v)  $\{0; 1\}$ .

### 2.13 Nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě

- 23 a)  $(-\infty; -6) \cup (6; \infty)$ ; b)  $(1; 5)$ ; c)  $\langle -12; 2 \rangle$ ; d)  $(-\infty; -2 - 4\sqrt{3}) \cup (2 + 6\sqrt{3}; \infty)$ ;  
e)  $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ ; f)  $(-5; -2)$ ; g)  $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ ; h)  $(2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$ ;  
i)  $(-\infty; -3) \cup (3; \infty)$ ; j)  $\langle -1; 2 \rangle$ ; k)  $\langle 3; \infty \rangle$ ; l)  $\langle -1; 1 \rangle$ .

### 2.14 Řešení rovnic metodou substituce

- 24 a)  $\{\pm 1; \pm 2\}$ ; b)  $\{-1; 2\}$ ; c)  $\{\pm 2\}$ ; d) Subst.  $a = \sqrt[4]{x} \Rightarrow \sqrt{x} = a^2 \Rightarrow x \in \{16; 81\}$ .  
25 a)  $\{\pm \sqrt{2}\}$ ; b)  $\{-1 \pm \sqrt{5}\}$ ; c)  $\{0; \pm 1; 2\}$ ; d)  $\{-2; 4\}$ .  
26 a)  $\{-6; 4\}$ ; b)  $\{-\frac{9}{2}; 2\}$ ; c)  $\{5\}$ .

- 27 a)  $\{\pm \sqrt{2}\}$ ; b)  $\{4 \pm 2\sqrt{3}; \frac{-7 \pm 3\sqrt{7}}{2}\}$ ; c)  $\{27\}$ ; d)  $\{-1\}$ ; e)  $\{-4; -1\}$ ; f)  $\{-\frac{4}{3}\}$ .

### 2.15 Reciproké rovnice

- 28 a) Upravte:  $2(x^3 + 1) - 3x(x+1) = 0 \Rightarrow 2(x+1)(x^2 - x + 1) - 3x(x+1) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x+1)(2x^2 - 2x + 2 - 3x) = 0 \Rightarrow x \in \{-1; \frac{1}{2}; 2\}$ ; b)  $\{-2; -1; -\frac{1}{2}\}$ ; c) Vytkněte:  
 $6(x^4 + 1) + 17(x^3 + x) + 17x^2 = 0$ . Nyní rovnici dělte  $x^2$   $\Rightarrow 6(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 17(x + \frac{1}{x}) + 17 = 0$ .  
Zvolte subst.  $x + \frac{1}{x} = a$ . Potom  $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 \Rightarrow x \in \{-2; -\frac{1}{2}\}$ ; d)  $\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2; 3\}$ .  
29  $K = -5 \wedge L = 6 \Rightarrow x \in \{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 3\}$ .

**2.16 Soustavy rovnic**

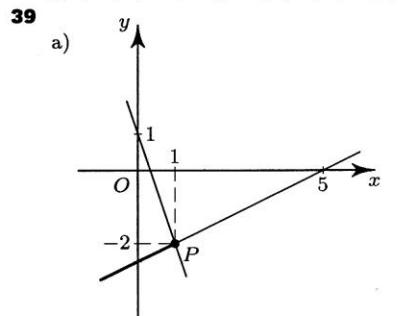
- 30** a)  $[3; 2]$ ; b)  $[4; 4]$ ; c)  $[9; -12]$ ; d)  $[4; 7]$ ; e)  $\emptyset$ ; f)  $[t; \frac{2t-5}{3}]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
**31** a)  $[1; 2; -2]$ ; b)  $[2; 4; -1]$ ; c)  $[0; 0; 0]$ ; d)  $[3; 0; 2]$ ; e)  $\emptyset$ ; f)  $[t; 1-2t; 1+t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
**32** a)  $[1; 2; -2; 3]$ ; b)  $[1; 0; -2; 1]$ .  
**33** a)  $[\frac{2}{3}; \frac{1}{3}]$ ; b)  $[2; 3]; [3; 2]$ ; c)  $[1; 3]; [3; 1]$ ; d)  $[5\sqrt{3}; \pm 5\sqrt{2}]; [-5\sqrt{3}; \pm 5\sqrt{2}]$ ;  
e)  $[6; 4]; [-6; -4]$ ; f)  $[1; 2]; [-\frac{11}{5}; -\frac{6}{5}]$ ; g)  $[-2; 1]; [1; -2]$ ; h)  $[6; 2]; [-\frac{18}{7}; -\frac{26}{7}]$ ;  
i)  $[3; 1]; [\frac{5}{3}; \frac{11}{3}]$ ; j)  $[3; 2]; [24; \frac{1}{2}]$ ; k)  $[1; 2]; [-1; 2]$ ; l)  $[0; 4]; [3; 1]$ .

**2.17 Řešení soustav rovnic metodou substituce**

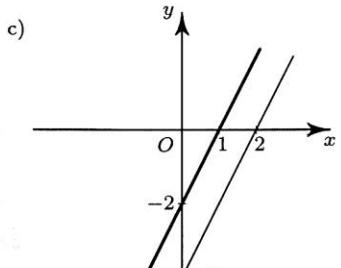
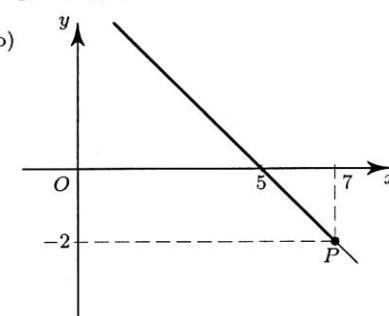
- 34** a)  $[\frac{1}{4}; 3]$ ; b)  $[3; -2]$ ; c)  $[t; \frac{t+1}{2}]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; d)  $[3; 1]$ .  
**35** a)  $[\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}]$ ; b)  $[6; -3; 2]$ .  
**36** a)  $[-13; 1], [-13; 5], [9; 1], [9; 5]$ ; b)  $[5; 2], [2; 5], [-5; -2], [-2; -5]$ .  
**37** a)  $[5; 4]$ ; b)  $[6; 4]$ ; c)  $[2; 100], [-2; 100]$ ; d)  $[\frac{3}{4}; \frac{1}{4}], [\frac{17}{8}; -\frac{15}{8}]$ .

**2.18 Soustavy nerovnic**

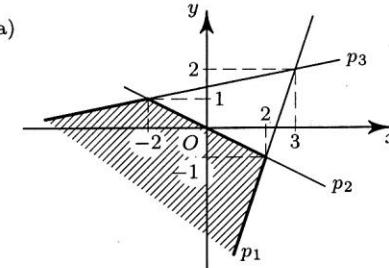
- 38** a)  $\langle -\frac{3}{4}; 1 \rangle$ ; b)  $(4; 7)$ ; c)  $(\frac{1}{5}; \infty)$ ; d)  $\langle 3; 4 \rangle$ ; e)  $\langle -3; -1 \rangle - \{-2\}$ ;  
f)  $(1 - \sqrt{3}; -\frac{1}{2}) \cup (1; 1 + \sqrt{3})$ ; g)  $(\frac{5}{2}; 3)$ ; h)  $(-\infty; -1) \cup (\frac{1}{3}; 1)$ ; i)  $\langle -1; 0 \rangle \cup \langle 6; \infty \rangle$ ;  
j)  $\langle -2; 4 \rangle - \{-1\}$ ; k)  $(-1; 2) \cup (6; 9)$ ; l)  $(-7; -\frac{7}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 3)$ .



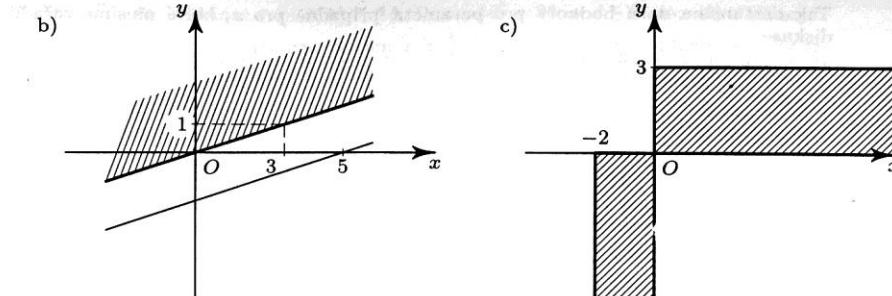
K řešení úlohy 39



K řešení úlohy 39

**40**

K řešení úlohy 40



K řešení úlohy 40

**2.19 Slovní úlohy**

- 41** 8. **42** Platí. **43**  $\frac{2}{5}$ . **44** 49; 1. **45** 4; 6; 8. **46** 15 schodů po 24 cm.  
**47** Za 14 dní. **48** 200. **49**  $a = 12$  cm,  $b = 10$  cm. **50** Jana 15 let, Martin 5 let.  
**51** O 10 %. **52** a) Vzrostla o 8%; b) vzrostla o 8%; c) úlohy a) i b) jsou stejné.  
**53** a) Za 1 h 12 min; b) za 1 h; c) 2 h 10 min.  
**54** 1. roura ... 6 h, 2. roura ... 4 h. **55** 42 %. **56** 20 l. **57** 15 l.  
**58** V 9 h 15 min ve vzdálenosti 100 km od A.  
**59**  $v_1 = 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $v_2 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . **60**  $v = 12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ;  $t = 4 \text{ h } 10 \text{ min}$ .

**3 Rovnice s parametrem****3.1 Lineární rovnice s parametrem**

- |  |                                |                                 |                            |                             |                    |
|--|--------------------------------|---------------------------------|----------------------------|-----------------------------|--------------------|
| <b>1</b> a) $x \cdot (a-4) = a^2 - 16$ | c) $x \cdot (2a-1) = -2(2a-1)$ | e) $x \cdot (a+4) = -1(a+4)$    |                            |                             |                    |
| $a = 4$                                | $x \in \mathbb{R}$             | $a = 0,5$                       | $x \in \mathbb{R}$         | $a = -4$                    | $x \in \mathbb{R}$ |
| $a \in \mathbb{R} - \{4\}$             | $x \in \{a+4\}$                | $a \in \mathbb{R} - \{0,5\}$    | $x \in \{-2\}$             | $a \in \mathbb{R} - \{-4\}$ | $x \in \{-1\}$     |
| <b>b</b> ) $x \cdot (2a+1) = 5$        | d) $x \cdot (a^2 - 1) = 1 - a$ | f) $x \cdot (a^2 - 3a) = a - 3$ |                            |                             |                    |
| $a = -0,5$                             | $x \in \emptyset$              | $a = 0$                         | $x \in \emptyset$          |                             |                    |
| $a \in \mathbb{R} - \{-0,5\}$          | $x \in \{\frac{5}{2a+1}\}$     | $a = 1$                         | $x \in \mathbb{R}$         |                             |                    |
|  |                                | $a = -1$                        | $x \in \emptyset$          |                             |                    |
|  |                                | $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$  | $x \in \{\frac{-1}{a+1}\}$ |                             |                    |
|  |                                | $a \in \mathbb{R} - \{0; 3\}$   | $x \in \{\frac{1}{a}\}$    |                             |                    |

- 2**
- $x > 0$
- pro
- $p \in (-\infty; -1) \cup \{1\}$
- .

- 3**
- $m = 7$
- .
- 4**
- $p \cdot (q-1) = 1 - 2q$
- .

$q = 1$	$x \in \emptyset$
$q \in \mathbb{R} - \{1\}$	$x \in \{\frac{1-2q}{q-1}\}$

**3.2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli**

- 5**
- Je-li neznámá ve jmenovateli, musíme nakonec buď provést zkoušku, nebo ověřit podmínky.

Tak dostaneme další hodnoty pro parametr, případně pro  $x$ , které musíme zařadit do diskuse.

a)  $x \cdot (m+1) = 2(m^2 - 1)$

$m = -1$	$x \in \mathbb{R} - \{-2\}$
$m \in \{0; 1\}$	$x \in \emptyset$
$m \in \mathbb{R} - \{0; \pm 1\}$	$x \in \{2m - 2\}$

b)  $x \cdot (m+1) = (m+1)(m-2)$

$m = -1$	$x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
$m = 1$	$x \in \emptyset$
$m \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$	$x \in \{m - 2\}$

c)  $-2x \cdot (m+1) = m(m+1)$

$m = -1$	$x \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$m \in \{0; 2\}$	$x \in \emptyset$
$m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 2\}$	$x \in \{-\frac{1}{2}m\}$

d)  $x \cdot (m-2) = -3(m+1)(m-2)$

$m = -1$	$x \in \emptyset$
$m = 2$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
$m \in \mathbb{R} - \{-1; 2\}$	$x \in \{-3m - 3\}$

### 3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou

Umočňování není ekvivalentní úprava, proto musíme udělat zkoušku dosazením. Nezapomeňte, že  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

a)  $2px = 2p - p^2$

$p = 0$	$x \in \mathbb{R}_0^+$
$p < -2$	$x \in \emptyset$
$p \geq -2 \wedge p \neq 0$	$x \in \{1 - \frac{1}{2}p\}$

b)  $px = p^2 + p$

$p = 0$	$x \in \mathbb{R}_0^-$
$p < 1 \wedge p \neq 0$	$x \in \emptyset$
$p \geq 1$	$x \in \{p + 1\}$

c)  $4px = 3p^2$

$p = 0$	$x \in \mathbb{R}_0^+$
$p > 0$	$x \in \emptyset$
$p < 0$	$x \in \{\frac{3}{4}p\}$

d)  $4x(1+p) = p^2 + p$

$p = -1$	$x \in (-\infty; -0,5)$
$p < 0 \wedge p \neq -1$	$x \in \emptyset$
$p \geq 0$	$x \in \{\frac{1}{4}p\}$

### 3.4 Neznámá v absolutní hodnotě

7 a)  $\forall k \in \mathbb{R}: x \in \{k-2; k+2\}$

$k < 0$	$x \in \emptyset$
$k \geq 0$	$x \in \{5-k; 5+k\}$

c)  $k = 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$k \in \mathbb{R} - \{0\}$	$x \in \{-k\}$
----------------------------	----------------

d)  $k = 7 \quad x \in \mathbb{R}$

$k \in \mathbb{R} - \{7\}$	$x \in \{\frac{1}{2}(k-3)\}$
----------------------------	------------------------------

### 3.5 Soustavy rovnic

8 a)  $a = 0,5 \quad \{(1+2y; y), y \in \mathbb{R}\}$

$a = -0,5 \quad \emptyset$

$a \in \mathbb{R} - \{\pm 0,5\} \quad \{[\frac{1}{2a+1}; \frac{-1}{4a+2}]\}$

b)  $a = -2 \quad \{(1+3y; y), y \in \mathbb{R}\}$

$a = 2 \quad \emptyset$

$a \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \quad \{[\frac{-1}{a-2}; \frac{1}{a-2}]\}$

9  $x = \frac{6+2t}{7}, y = \frac{4-t}{7} \Rightarrow t \in (-\infty; -3)$ . 10  $x = \frac{p+9}{2+3p}, y = \frac{6-p^2}{2+3p} \Rightarrow p \in \{-\frac{3}{2}; 1\}$ .

### 3.6 Kvadratické rovnice s parametrem

11  $a = -\frac{3}{2}$ , potom  $x = -\frac{11}{2}$ . 12  $D = b^2 + 2b - 47 \Rightarrow b \in (-\infty; -1 - 4\sqrt{3}) \cup (-1 + 4\sqrt{3}; \infty)$ .

13  $D = c^2 - 6c - 16 \Rightarrow c \in \{-2; 8\}$ . 14  $D = -4d^2 + 36 \Rightarrow d \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$ .

15 Pro  $p = \frac{1}{3}$  je rovnice lineární, potom  $x = \frac{3}{4}$ . Pro  $p \neq \frac{1}{3}$  je  $D = 4(4p^2 + 3p - 1) \Rightarrow$  pro  $p \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{4}; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; \infty)$  má rovnice dva různé reálné kořeny, pro  $p \in \{-1; \frac{1}{4}\}$  má rovnice dvojnásobný reálný kořen, pro  $p \in (-1; \frac{1}{4})$  nemá rovnice v  $\mathbb{R}$  řešení.

16  $x = 0$  dosadit, potom pro  $a = \frac{1}{2}$  je  $x_2 = \frac{14}{3}$ , pro  $a = 3$  je  $x_2 = 3$ .

17 a)  $D > 0 \wedge x_1 + x_2 > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \wedge -\frac{b}{a} > 0 \wedge \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow t \in (\frac{3}{4}; 1)$ .  
b)  $D > 0 \wedge x_1 + x_2 < 0 \wedge x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow t \in (3; \infty)$ .  
c)  $D > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow t \in (1; 3)$ .

18  $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow m = -3$ . 19  $x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow m = 14$ .

### 3.7 Neznámá ve jmenovateli (po úpravě kvadratická rovnice)

20 Je-li neznámá ve jmenovateli, musíme nakonec buď provést zkoušku, nebo ověřit podmínky. Tak dostaneme další hodnoty pro parametr případně pro  $x$ , které musíme zařadit do diskuse.

a)  $(2-a)x^2 - 4x = 0$

$a \in \{0; 2; 4\}$	$x \in \{0\}$
$a \in \mathbb{R} - \{0; 2; 4\}$	$x \in \{0; \frac{4}{2-a}\}$

c)  $(2-a)x^2 + (a^2 - 4a)x + 2a^3 = 0$

$a = 0$	$x \in \emptyset$
$a = 1$	$x \in \{2\}$
$a = 2$	$x \in \{4\}$
$a \in \mathbb{R} - \{0; 1; 2\}$	$x \in \{2a; \frac{a^2}{2-a}\}$

b)  $x^2 - 2a + 1 = 0$

$a = 0$	rovnice nemá smysl
$a = 1$	$x \in \{1\}$
$a \geq 0,5 \wedge a \neq 1$	$x \in \{\pm\sqrt{2a-1}\}$
$a < 0,5 \wedge a \neq 0$	$x \in \emptyset$

d)  $(a-1)x^2 + (2-2a)x + a = 0$

$a = 1$	rovnice nemá smysl
$a = 0$	$x \in \{2\}$
$a > 1$	$x \in \emptyset$
$a < 1 \wedge a \neq 0$	$x \in \{1 \pm \frac{\sqrt{1-a}}{a-1}\}$

## 4 Funkce

### 4.1 Definice funkce

1 a)  $f_1$  je funkce; b)  $f_2$  je funkce; c)  $f_3$  není funkce, protože např.  $[4; 2] \in f_3 \wedge [4; -2] \in f_3$ .  
d)  $f_4$  je funkce.

2 a) Je funkce; b) není funkce; c) je funkce; d) není funkce.

### 4.2 Rovnost funkcí

3 a)  $f = g$  v  $\mathbb{R}$ ; b)  $f \neq g$ , protože  $D_f \neq D_g$ ; c)  $f \neq g$ , protože  $D_f \neq D_g$ .

### 4.3 Definiční obor funkce

4 $D(f_1) = \mathbb{R}$	$D(f_6) = (-2; \infty)$	$D(f_{11}) = (3; \infty)$
$D(f_2) = \mathbb{R} - \{3\}$	$D(f_7) = (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$	$D(f_{12}) = (-4; \infty) - \{4\}$
$D(f_3) = \mathbb{R} - \{-1; \frac{3}{13}\}$	$D(f_8) = (-\infty; -2) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$	$D(f_{13}) = (-\frac{1}{2}; 0)$
$D(f_4) = \mathbb{R}$	$D(f_9) = (\frac{3}{2}; \infty)$	$D(f_{14}) = (\frac{1}{5}; \infty)$
$D(f_5) = \mathbb{R} - \{-7; 1\}$	$D(f_{10}) = (-4; 10)$	

#### 4.4 Hodnota funkce, obor funkčních hodnot

- 5  $f(-1) = -\frac{3}{2}$ ,  $f(3) = \frac{7}{2}$ ,  $f(\sqrt{2}) = 6 + 5\sqrt{2}$ . 6  $f(-2) = -6$ ,  $f(\frac{1}{3}) = -\frac{8}{27}$ ,  $f(2\sqrt{3}) = 22\sqrt{3}$ .  
 7  $g(1) = 4$ ;  $g(a) + g(2) = 3a^2 + 14$ ;  $g(b^2) = 3b^4 + 1$ ;  
 $g(a+2) = 3a^2 + 12a + 13$ ;  $[g(b)]^2 = 9b^4 + 6b^2 + 1$ .  
 8 a)  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = 5$ ; b)  $x \in \mathbb{R}$  neexistuje; c)  $x_1 = \frac{9+\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-13-\sqrt{3}}{2}$ .  
 9 a)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$ ; b)  $x = \frac{6}{5}$ ; c)  $x = \frac{21}{10}$ .  
 10 a)  $2; -\frac{5}{2}; 5 \in \mathbb{H}$ ; b)  $m \in \{\pm\sqrt{3}\}$ ; c)  $c \in \{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\}$ .  
 11 a)  $D(g_1) = \langle -2; 3 \rangle$ ;  $D(g_2) = \mathbb{R}$ ;  $D(g_3) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; 2 \rangle$ ;  
 $H(g_1) = \langle 0; 1 \rangle \cup \{2\}$ ;  $H(g_2) = (-\infty; 2) - \{0\}$ ;  $H(g_3) = (-\infty; 0) \cup \{\frac{1}{2}\}$ .  
 b)  $x_1 = 1,5$ ;  $x_2 \in \langle -2; 0 \rangle$ ;  $x_3 \in \emptyset$ .

#### 4.5 Funkce složená

- 12 a) 19; b) 30; c) 22; d) 12; e)  $3a^2 + 9a + 7$ ; f)  $9b^2 + 15b + 6$ .

- 13 a) 2; b)  $h(x) = (x+1)^4 + 1 \wedge h(-2) = 2$ .

- 14 a)  $-2\sqrt{x+3}$ ; b)  $\sqrt{-2x+3}$ ; c)  $4\sqrt{x}-3$ ; d)  $\sqrt[4]{-2x+3}$ ; e)  $-2\sqrt{-2x+3}+3$ ;  
 f)  $\sqrt{-2\sqrt{x}+3}$ .

- 15 a)  $h_1(x) = \sqrt{x+2}$ ,  $D(h_1) = \langle -2; \infty \rangle$ ; b)  $h_2(x) = \sqrt{x}+2$ ,  $D(h_2) = \langle 0; \infty \rangle$ ;  
 c)  $h_3(x) = \sqrt{x+3}-1$ ,  $D(h_3) = \langle -3; \infty \rangle$ ; d)  $h_4(x) = \sqrt{x-1}+3$ ,  $D(h_4) = \langle 1; \infty \rangle$ .

- 16  $a_1 = 2$ ;  $a_2 = -3,5$ .

- 17 a) vnější  $f(x) = 6x-4$  d) vnější  $f(x) = \log x$  g) vnější  $f(x) = x^2 - 4x$   
 vnitřní  $g(x) = \sqrt{x}$  vnitřní  $g(x) = x^2$  vnitřní  $g(x) = \log x$   
 b) vnější  $f(x) = \sqrt{x}$  e) vnější  $f(x) = 5^x$  h) vnější  $f(x) = x^3$   
 vnitřní  $g(x) = x^2 - 4x$  vnitřní  $g(x) = \sqrt{x}$  vnitřní  $g(x) = x^2 + 1$   
 c) vnější  $f(x) = x^2$  f) vnější  $f(x) = \sqrt{x}$  vnitřní  $g(x) = 5^x$   
 vnitřní  $g(x) = \log x$

#### 4.6 Vlastnosti funkcí

##### Rostoucí, klesající funkce

- 18  $h_1$  roste v  $\langle -2; 0 \rangle$ , klesá v  $\langle 0; 4 \rangle$ ;  $h_2$  roste v  $\langle -3; 3 \rangle$ , klesá v  $\langle -4; -3 \rangle$ , klesá v  $\langle 3; 4 \rangle$ ;  
 $h_3$  roste v  $\langle -\infty; 0 \rangle$ , roste v  $\langle 0; \infty \rangle$ .

- 19  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Rightarrow y_1 < y_2$ .

- 20  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 + 6 > -3x_2 + 6 \Rightarrow y_1 > y_2$ .

##### Prostá funkce

- 21  $f_1$  prostá v  $\mathbb{R}$ ;  $f_2$  není prostá v  $\mathbb{R}$ ;  $f_3$  prostá v  $\mathbb{R}$ ;  $f_4$  není prostá v  $\mathbb{R}$ .

- 22  $h_1$  prostá v  $\langle 0; 4 \rangle$ ;  $h_2$  prostá v  $\langle -3; 3 \rangle$ ;  $h_3$  prostá v  $\langle -\infty; 0 \rangle, \langle 0; \infty \rangle$ .

##### Sudá, lichá funkce

- 23  $h_1$  lichá v  $\mathbb{R}$ ;  $h_5$  sudá v  $\mathbb{R}$ ;  $h_9$  lichá v  $\mathbb{R}$ ;  
 $h_2$  sudá v  $\mathbb{R}$ ;  $h_6$  lichá v  $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$ ;  $h_{10}$  lichá v  $\mathbb{R}$ ;  
 $h_3$  lichá v  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;  $h_7$  sudá v  $\mathbb{R}$ ;  $h_{11}$  není sudá, není lichá;  
 $h_4$  lichá v  $\mathbb{R}$ ;  $h_8$  není sudá, není lichá;  $h_{12}$  sudá v  $\mathbb{R}$ .

- 24  $g_1$  je sudá v  $\mathbb{R}$ ;  $g_2$  je lichá v  $\langle -3; 3 \rangle$ ;  $g_3, g_4$  není sudá, není lichá.

##### Omezená funkce

- 25  $g_1$  omez. v  $\mathbb{R}$ ;  $g_5$  není omez. v  $\mathbb{R}$ ;  $g_9$  omez. zdola v  $\mathbb{R}$ ;  $g_{13}$  omez. zdola v  $\mathbb{R}$ ;  
 $g_2$  omez. v  $\mathbb{R}$ ;  $g_6$  omez. zdola v  $\mathbb{R}$ ;  $g_{10}$  není omez. v  $\mathbb{R}$ ;  $g_{14}$  omez. zdola v  $\mathbb{R}$ ;  
 $g_3$  omez. v  $\mathbb{R}$ ;  $g_7$  není omez. v  $\mathbb{R}$ ;  $g_{11}$  není omez. v  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;  $g_{15}$  není omez. v  $\mathbb{R}^+$ ;  
 $g_4$  omez. v  $\mathbb{R}$ ;  $g_8$  omez. shora v  $\mathbb{R}$ ;  $g_{12}$  omez. zdola v  $\mathbb{R} - \{0\}$ ;  $g_{16}$  omez. shora v  $\mathbb{R}^+$ .

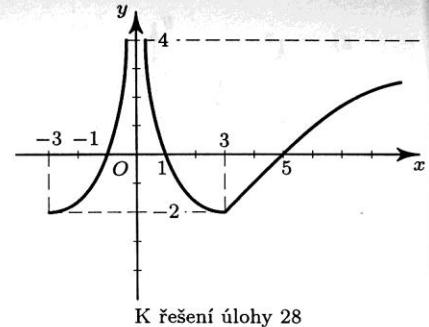
- 26  $\forall x \in \mathbb{R}: 0 < f_1(x) \leq 5$ ;  $\forall x \in \langle -5; 3 \rangle: 0 \leq f_2(x) \leq 25$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq f_3(x) < 1$ .

##### Maximum, minimum funkce

- 27  $f_1$ : v  $\mathbb{R}$  nemá max., nemá min.;  $f_6$ : pro  $x = 0$  je hodnota min. 0;  
 $f_2$ : pro  $x = 0$  je hodnota min. -1;  $f_7$ : nemá max., nemá min. v  $\mathbb{R}$ ;  
 $f_3$ : nemá max., nemá min. v  $\mathbb{R}$ ;  $f_8$ : pro  $x = 1$  je hodnota max. 0;  
 $f_4$ : pro  $x = 0$  je hodnota min. 1;  $f_9$ : nemá max., nemá min. v  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .  
 $f_5$ : pro  $x = 0$  je hodnota max. 4;

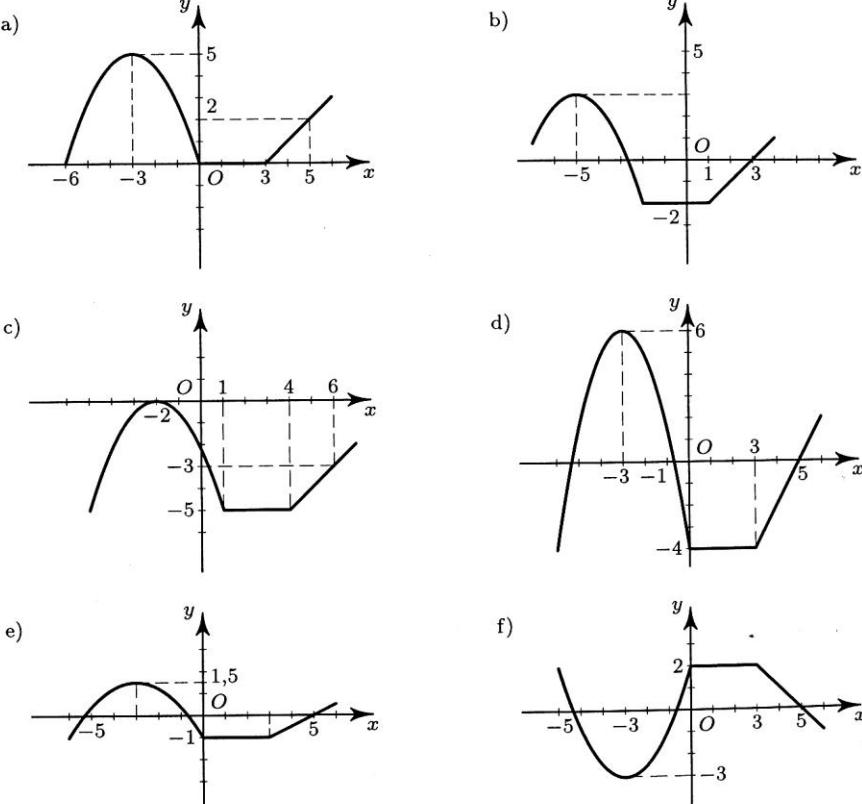
#### Vlastnosti funkcí — opakování

- 28 a)  $H_f = \langle -2; \infty \rangle$ ;  
 b)  $P_y$  neex.;  
 c) omez. zdola;  
 d) max. neex.;  
 e) pro  $x = \pm 3$  je hodnota min. -2;  
 f) není prostá v  $D$ ;  
 g) např. je prostá v  $\langle 3; \infty \rangle$ ;



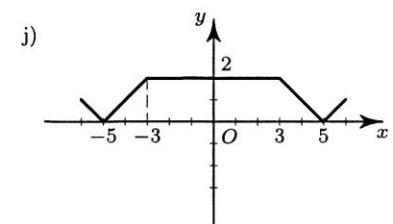
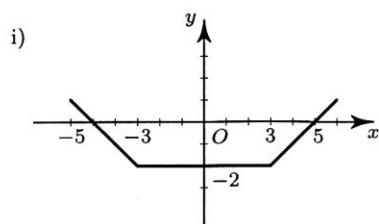
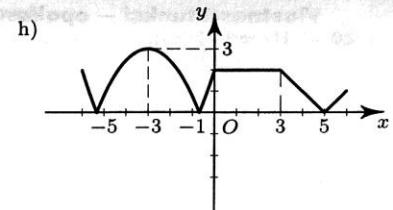
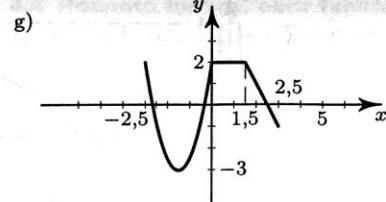
#### 4.7 Vztahy mezi grafy funkcí

29



ZPĚT

OBSAH



K řešení úlohy 29

#### 4.8 Lineární funkce

30  $f: y = 2x + 1.$  31  $g: y = -3x + 5.$  32  $h: y = 2x + 3.$

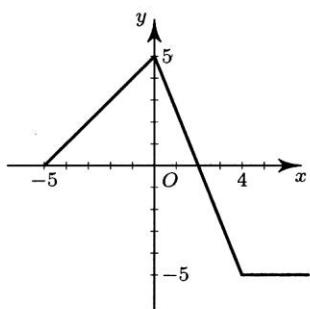
33  $g_1: y = 4x,$   $g_2: y = -3x,$   $g_3: y = 2x + 4,$   $g_4: y = -\frac{5}{3}x + 5,$   $g_5: y = 2x - 2,$   
 $g_6: y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3},$   $g_7: y = 3,$   $g_8: y = 0.$

34  $f = f_1 \cup f_2 \cup f_3$

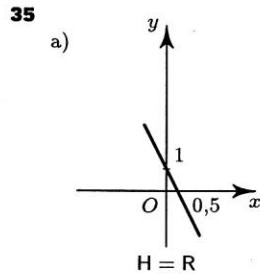
$f_1: y = x + 5 \wedge x \in \langle -5; 0 \rangle$

$f_2: y = -\frac{5}{2}x + 5 \wedge x \in \langle 0; 4 \rangle$

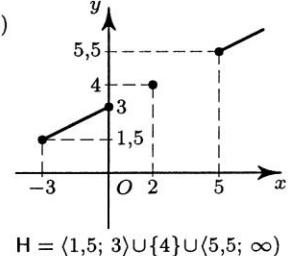
$f_3: y = -5 \wedge x \in \langle 4; \infty \rangle$



K řešení úlohy 34

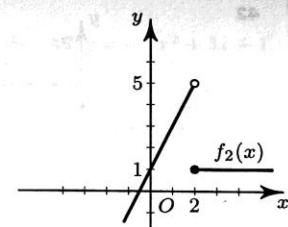
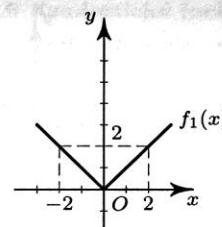


K řešení úlohy 35



$H = \langle 1,5; 3 \rangle \cup \{4\} \cup \langle 5,5; \infty \rangle$

36



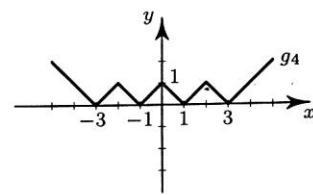
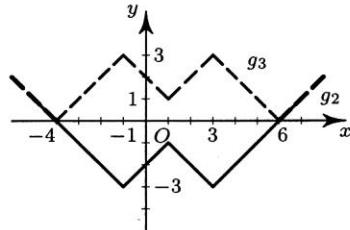
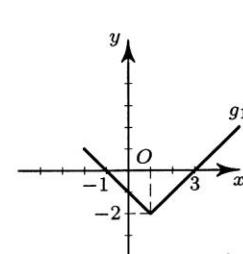
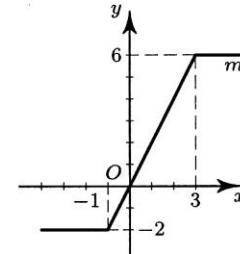
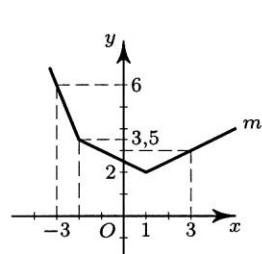
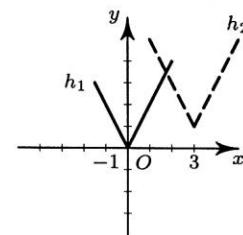
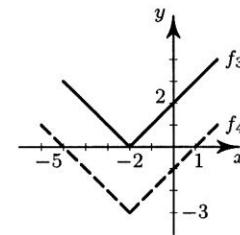
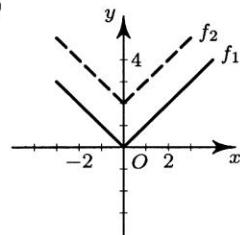
K řešení úlohy 36

37 a)  $y = 2x - 3;$  b)  $y = 2x + 3;$  c)  $y = -2x - 3;$  d)  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$

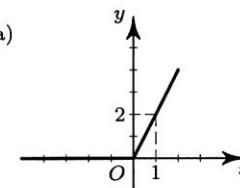
38  $a \in \langle -2; 2 \rangle.$  39  $b \in \langle -5; 15 \rangle.$

#### Graf lineární funkce s absolutními hodnotami

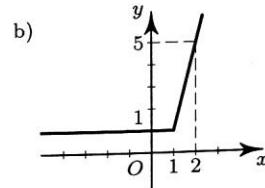
40



41

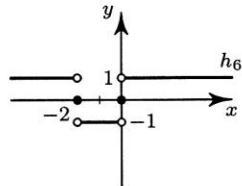
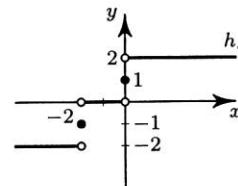
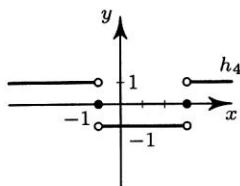
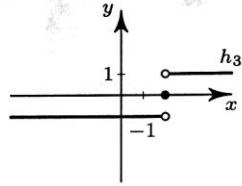
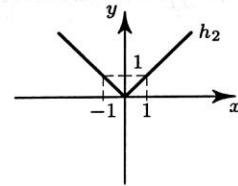
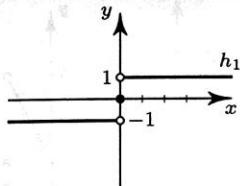


K řešení úlohy 40



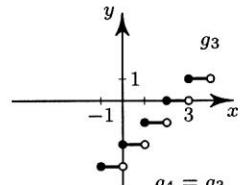
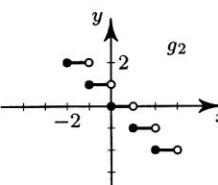
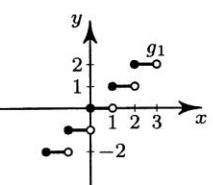
K řešení úlohy 41

42

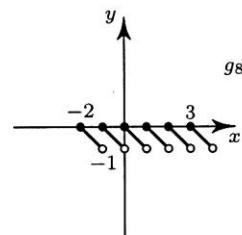
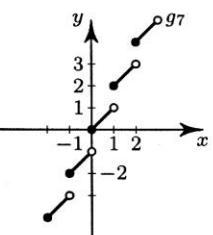
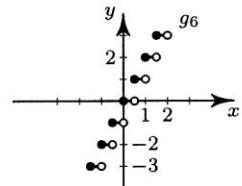
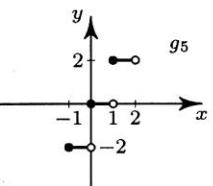


K řešení úlohy 42

43



$$g_4 = g_3$$



K řešení úlohy 43

## Lineární interpolace

44 4,609 6. 45 0,922 4.

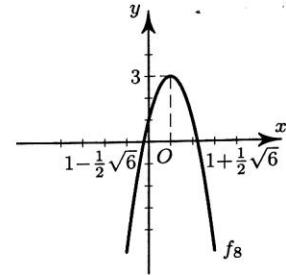
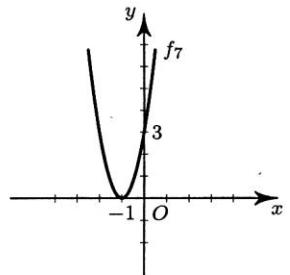
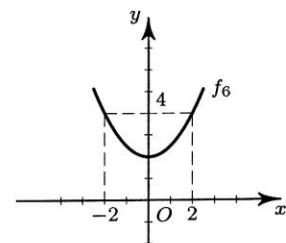
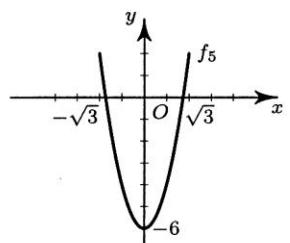
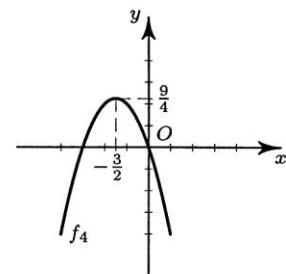
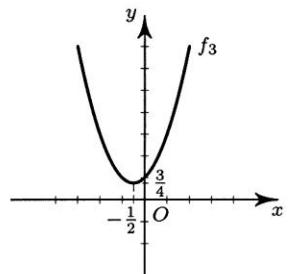
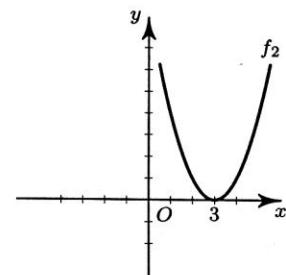
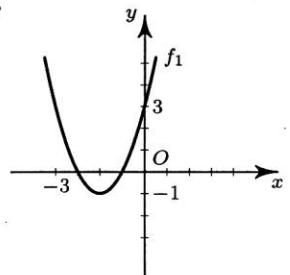
## 4.9 Kvadratická funkce

46  $y = -3x^2 + 15x - 14$ . 47  $y = x^2 + 2x - 3$ . 48  $y = 2x^2 - 8$ . 49  $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$ .

50  $y = -2x^2 + 12x$ . 51  $g(-2) = g(6) = 15$ . 52  $y = 4x^2 - x + 5$ .

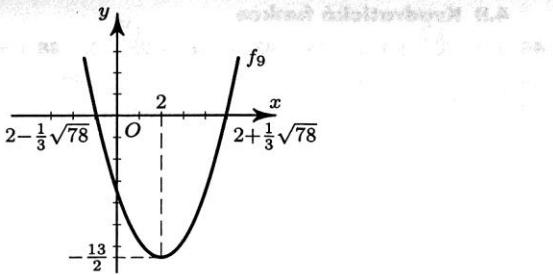
53 a)  $y = -x^2 + 2x + 3$ ; b)  $y = x^2 + 2x - 3$ ; c)  $y = -x^2 - 2x + 3$ .

54



ZPĚT

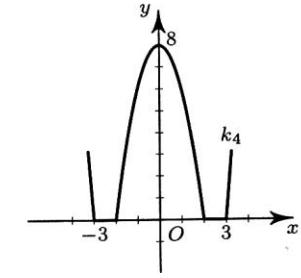
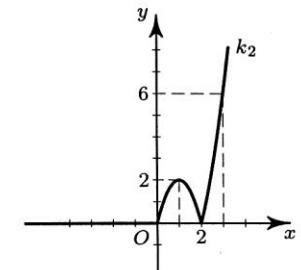
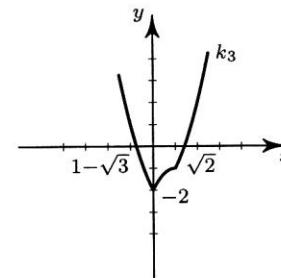
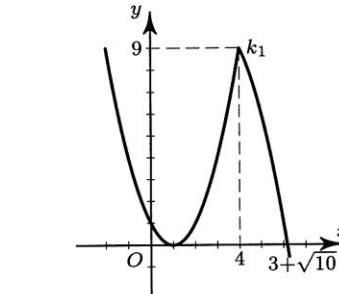
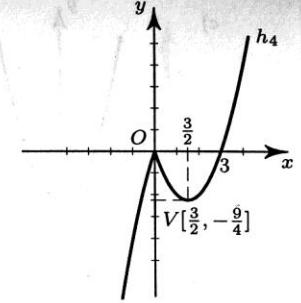
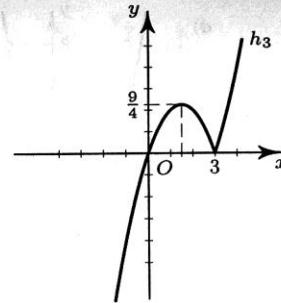
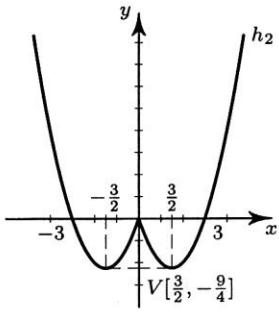
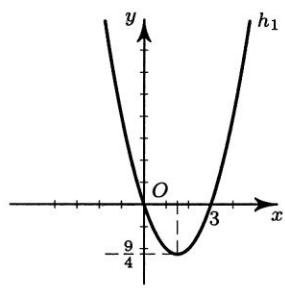
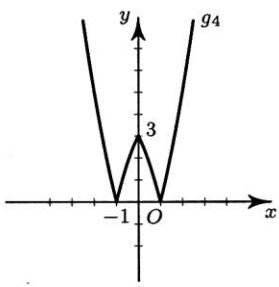
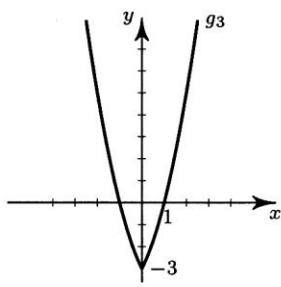
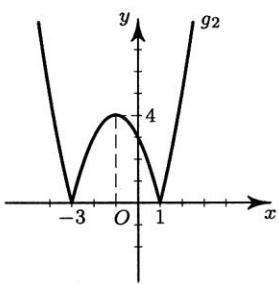
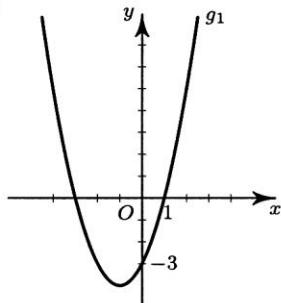
OBSAH



K řešení úlohy 54

### Graf kvadratické funkce s absolutními hodnotami

55

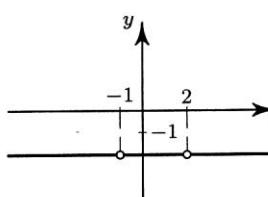


K řešení úlohy 55

### 4.10 Úprava výrazu — graf funkce

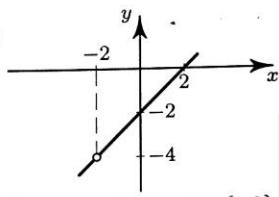
56

a)



$$a) y = -2; D = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$$

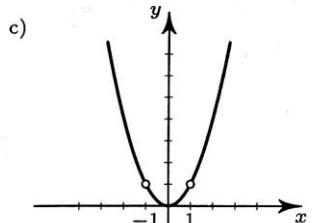
b)



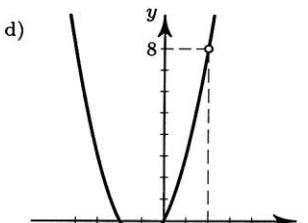
$$b) y = x - 2; D = \mathbb{R} - \{-2\}$$

ZPĚT

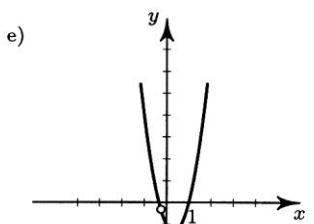
OBSAH



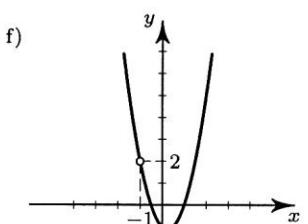
c)  $y = x^2$ ;  $D = \mathbb{R} - \{-1\}$



d)  $y = x^2 + 2x$ ;  
 $D = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$



e)  $y = 3x^2 - 2x - 1$ ;  
 $D = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{4}\}$



f)  $y = 2x^2 - x - 1$ ;  
 $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

K řešení úlohy 56

#### 4.11 Exponenciální funkce

57  $a = 3 \wedge b = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 \cdot 2^x + \frac{1}{2}$ . 58  $a = 3 \wedge b = -1 \Rightarrow y = 2^{x+3} - 1$ .

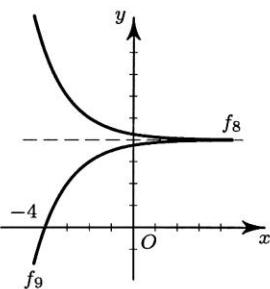
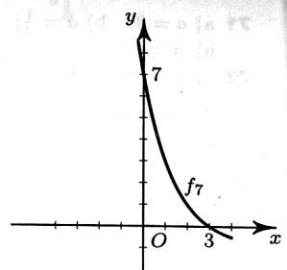
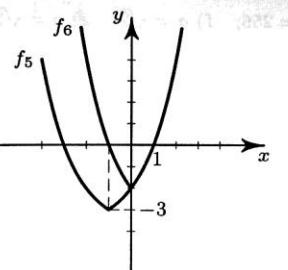
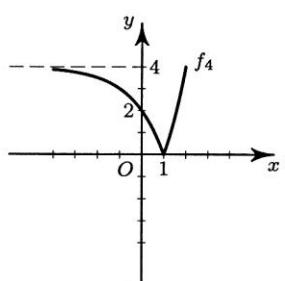
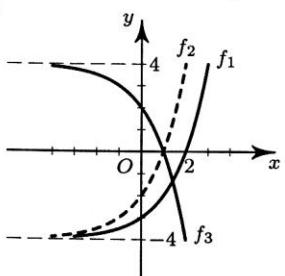
59 a)  $q \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ; b)  $q \in (0; 1)$ ; c)  $q \in (1; \infty)$ .

60 a)  $p \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$ ; b)  $p \in (-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5})$ ; c)  $p \in (2; \infty)$ . 61 Platí.

62  $(\frac{\sqrt{5}}{2})^{0,4} > 1$ . 63 a)  $K < L$ ; b)  $K > L$ ; c)  $K > L$ .

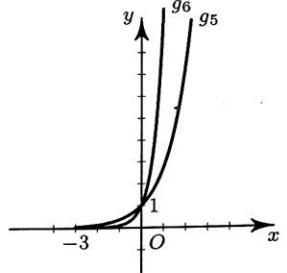
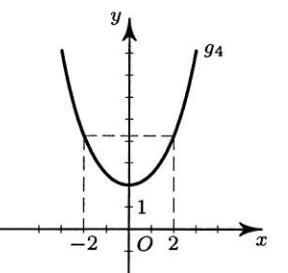
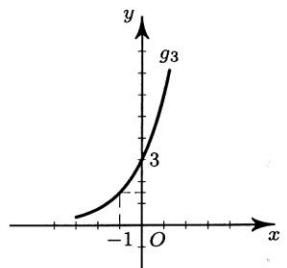
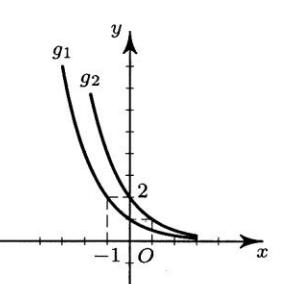
64 a)  $r > s$ ; b)  $r > s$ ; c)  $r < s$ . 65 a)  $a > 1$ ; b)  $a > 1$ ; c)  $0 < a < 1$ .

66



K řešení úlohy 66

67



K řešení úlohy 67

#### 4.12 Logaritmus čísla

68 a)  $\log_3 9 = 2$ ; b)  $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ ; c)  $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ .

69 a) -2; b) 3; c)  $\frac{1}{2}$ ; d) -8; e)  $\frac{1}{6}$ ; f) 0; g) -1; h) 2.

70 a) 81; b) 4; c) 5; d)  $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ ; e) 1; f)  $\frac{1}{8}$ ; g) 17; h)  $\sqrt[5]{0,001}$ .

- 71** a)  $a = 3$ ; b)  $a = \frac{1}{2}$ ; c)  $a = \frac{1}{27}$ ; d)  $a = \frac{1}{5}$ ; e)  $a = 256$ ; f)  $a = \sqrt{2}$ ; g)  $a = \sqrt[3]{2}$ ; h)  $a = 10$ .

- 72** a)  $x_1 = \log 8$ ,  $0 < x_1 < 1$ ; b)  $x_2 = \log_6 4$ ,  $0 < x_2 < 1$ ; c)  $x_3 = \log_{\frac{1}{5}} 8$ ,  $x_3 < 0$ ; d)  $x_4 = \ln \frac{16}{3}$ ,  $x_4 > 1$ .

- 73** a) 2; b) -1; c) -10; d) -3; e) 1; f) 8.

- 74** a)  $x = \frac{\sqrt{a} \cdot b^3}{c^2}$ ; b)  $x = \frac{\sqrt{a} \cdot 10}{b \cdot \sqrt[3]{c^3}}$ ; c)  $x = a^3 \cdot b^2 \cdot 16$ ; d)  $x = 4 \cdot \sqrt[4]{ab^3} \cdot c$ .

- 75** a)  $2 \log a + 3 \log b - 2 - \frac{1}{2} \log c$ ; b)  $\frac{1}{2}(\log a - \log b - \log c + 1)$ ; c)  $2 \log(a+b) - \log c$ .

### 4.13 Logaritmická funkce

**76**  $a = 3 \wedge b = -1 \Rightarrow y = 3 \log_2 x - 1$ . **77**  $a = 1 \wedge b = 2 \Rightarrow y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 2$ .

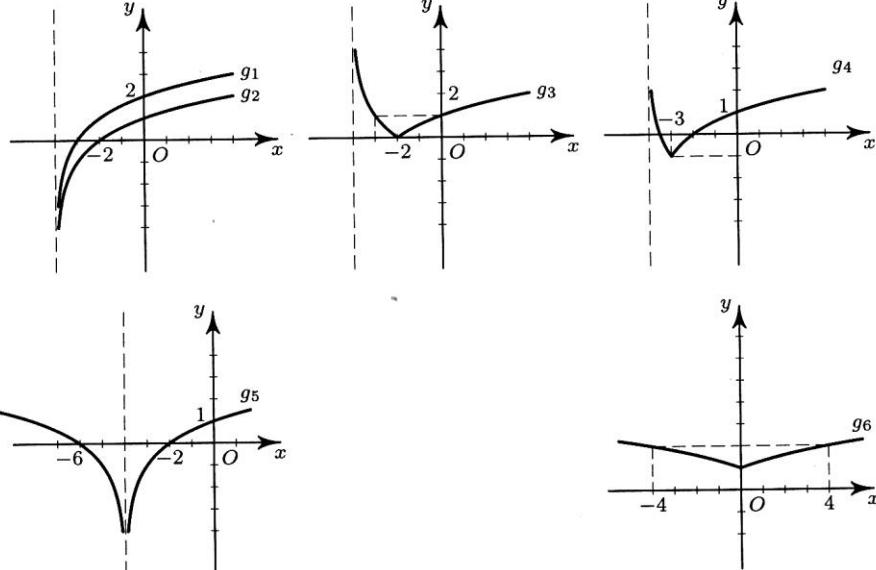
<b>78</b> $D(f_1) = (0; \infty)$	$D(f_4) = (0; \infty) - \{10\}$	$D(f_7) = (-\infty; -1)$
$D(f_2) = (-6; \infty)$	$D(f_5) = (-7; \infty) - \{-5\}$	$D(f_8) = (-2; \infty)$
$D(f_3) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$	$D(f_6) = (-\infty; -8) \cup (6; \infty)$	$D(f_9) = (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
		$D(f_{10}) = (-\infty; -5)$

**79** a)  $A > 1$ ; b)  $0 < B < 1$ ; c)  $C < 0$ .

**80** a)  $B > A$ ; b)  $B > A$ ; c)  $B < A$ ; d)  $B > A$ .

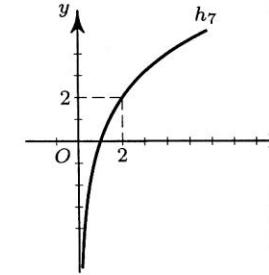
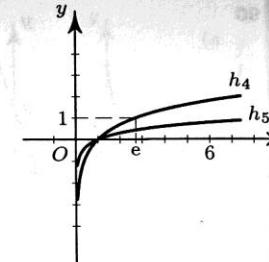
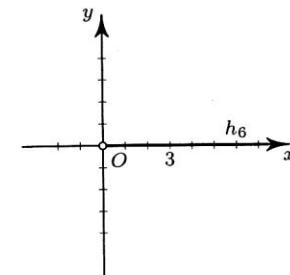
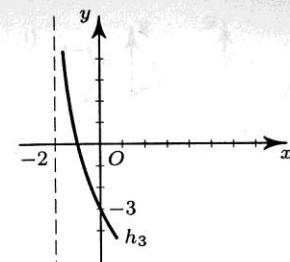
**81** a)  $a > 1$ ; b)  $0 < a < 1$ ; c)  $a > 1$ . **82** a)  $m = 0$ ; b)  $m = -3$ ; c)  $m = 2$ ; d)  $m = 2$ .

**83**



K řešení úlohy 83

**84**



K řešení úlohy 84

**85** a)  $x \in (0; 5)$ ; b)  $x \in (-\frac{2}{3}; \infty)$ .

### 4.14 Grafické řešení rovnic a nerovnic

**86** a)  $\{-1,6; 2,6\}$ ; b)  $\{-2,7; 8,0\}$ ; c)  $\{6,7\}$ ; d)  $\{-0,1; 3,0\}$ ; e)  $\{10,3\}$ ; f)  $\{-1,0; 0,4\}$ .

**87** a)  $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ ; b)  $x \in (-\infty; -1,6) \cup (1,6; \infty)$ ; c)  $x \in (0; 10,7)$ ; d)  $x \in (-4,0; -0,8)$ .

<b>88</b> a)	$a < 0$	0 řeš.
	$a = 0$	1 řeš.
	$a > 0$	2 řeš.

d)	$a \in (0; 2)$	2 řeš.
	$a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$	1 řeš.

b)	$a \in (-1; 0)$	0 řeš.
	$a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$	1 řeš.
	$a \in (0; 1)$	2 řeš.

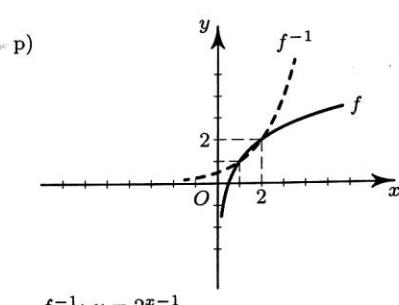
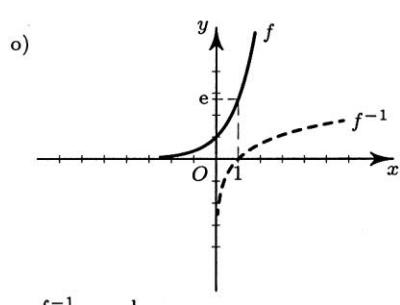
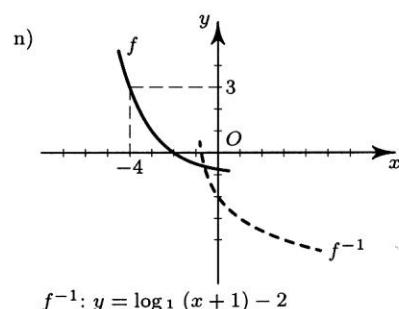
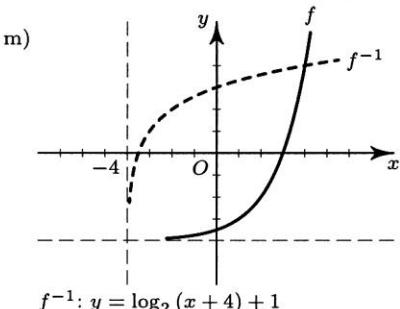
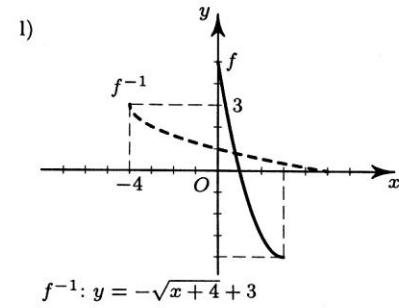
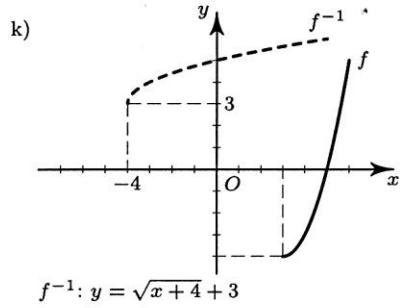
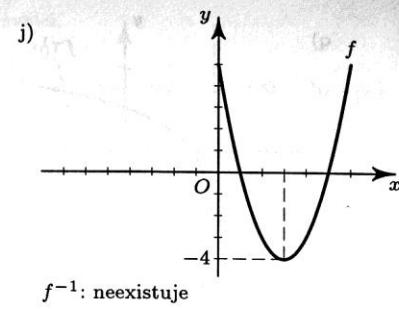
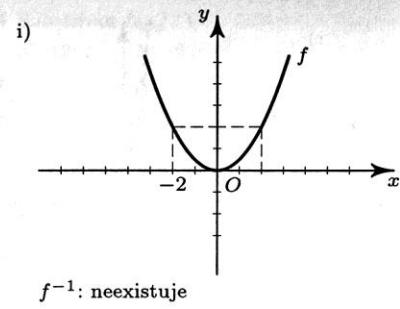
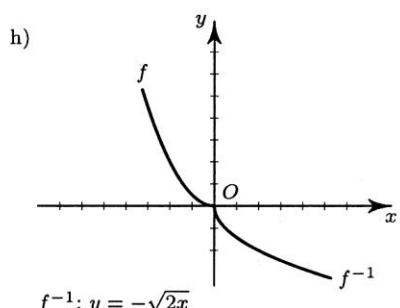
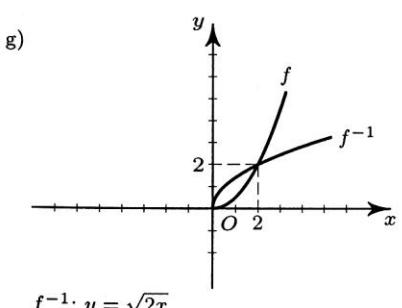
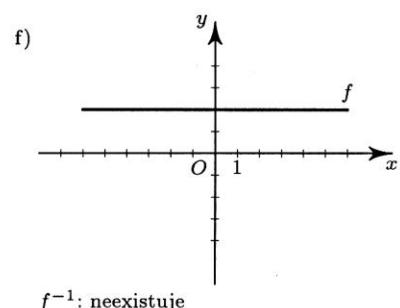
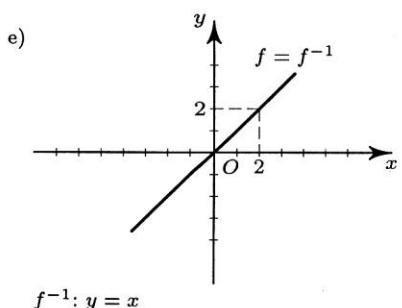
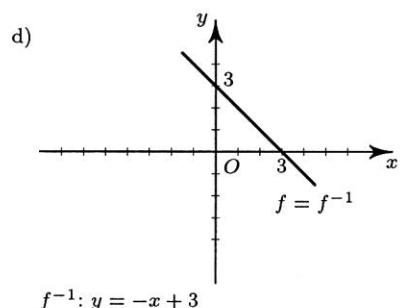
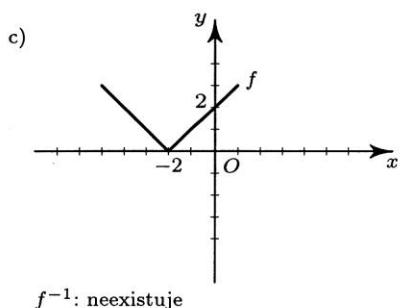
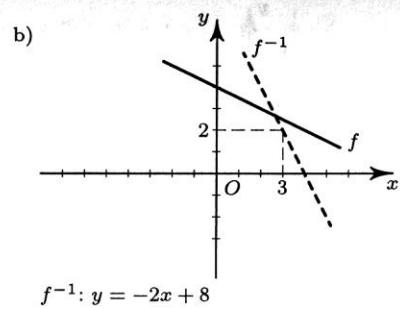
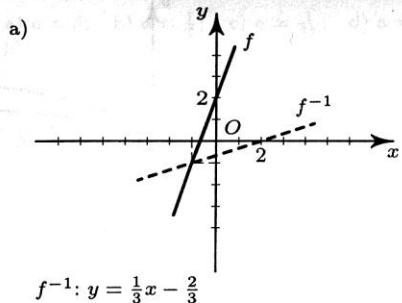
e)	$a \in (0; 1)$	0 řeš.
	$a \in (-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (2; \infty)$	1 řeš.
	$a \in (1; 2)$	2 řeš.

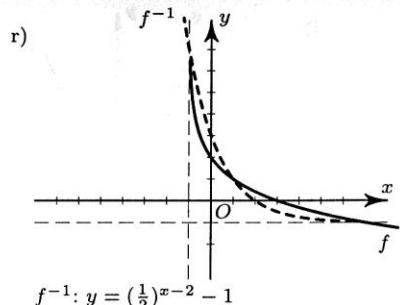
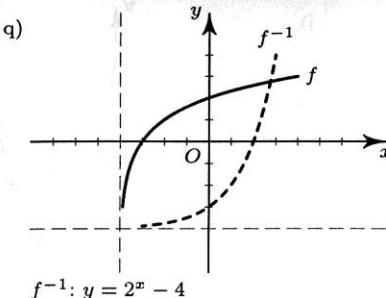
c)	$a < -2$	0 řeš.
	$a = -2$	nek. mnoho řeš.
	$a > -2$	1 řeš.

f)	$a < -1,5$	0 řeš.
	$a = -1,5$	1 řeš.
	$a > -1,5$	2 řeš.

### 4.15 Inverzní funkce

- 89** a) Lineární funkce je prostá v  $\mathbb{R} \Rightarrow$  existuje v  $\mathbb{R}$  funkce inverzní. b) Kvadr. funkce nejsou prosté v  $\mathbb{R} \Rightarrow$  neexistuje v  $\mathbb{R}$  funkce inverzní. c) Exp. funkce je prostá v  $\mathbb{R} \Rightarrow$  existuje v  $\mathbb{R}$  funkce inverzní. d) Log. funkce je prostá v  $\mathbb{R}^+$   $\Rightarrow$  existuje v  $\mathbb{R}^+$  funkce inverzní. Daná funkce není prostá v  $\mathbb{R} \Rightarrow$  neexistuje v  $\mathbb{R}$  funkce inverzní. f) Daná funkce je prostá v  $\mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$  existuje v  $\mathbb{R}_0^+$  funkce inverzní.





K řešení úlohy 90

## 5 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

### 5.1 Exponenciální rovnice

1 Převeďte na stejný základ.

- a) {2}; b) {2}; c) {-2}; d) {-\frac{1}{2}}; e) {-2; -\frac{2}{3}}; f) {2}; g) {2}; h) {2 + \sqrt{3}}.

2 Vytákejte. a)  $3^x + 3^x \cdot 3^1 = 108 \Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3^1) = 108 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$ ;

- b) {-2}; c) {2}; d) {\frac{1}{2}}; e) {-1}; f) {2}.

3 Substituce na kvadratickou rovnici.

- a) {\frac{1}{2}; 1}; b) {2}; c) {-2; 0}; d) {0; 1}; e) {-2}; f) {1}.

4 a) Vytákněte  $3^x(1+3) = 4^x(7-4)$ , potom dělte  $\frac{3^x}{4^x} = \frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{3}{4})^x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 1$ ;

- b) {3}; c) {\frac{3}{2}}; d) {2}.

5 a) Upravte  $2^x \cdot 2^x + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot 3^x \cdot 3^x$ , potom dělte součinem  $2^x \cdot 3^x$  a dostanete  $(\frac{2}{3})^x + 1 = 2 \cdot (\frac{3}{2})^x$ . Po substituci kvadratická rovnice.  $x = 0$ ;

b) upravit, dělit součinem  $4^x \cdot 2^x$ ;  $x = 2$ .

6 Logaritmujte.

a)  $x = \log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} \doteq 2,10$ ; b)  $x = \log_5 \frac{4}{5} = \frac{\log \frac{4}{5}}{\log 5} \doteq -0,14$ ;

c)  $x = \log_6 18 = \frac{\log 18}{\log 6} \doteq 1,61$ ; d)  $x = \log_{\frac{16}{245}} 16 = \frac{\log 16}{\log \frac{16}{245}} \doteq -1,02$ .

7 a)  $\{\log_7 \frac{2}{49}\}$ ; b)  $\{\log_3 2; -1\}$ ; c)  $\{\log_2 \frac{16}{3}\}$ ; d)  $\{\log_2 2; -1\}$ .

8 a) Substituce  $2^x = a$ ,  $3^y = b$ , [3; 2]; b) substituce  $2^x = a$ ,  $3^y = b$ , [1; 3];

c) substituce  $2^{x-y} = a$ ,  $2^x + y = b$ , [3; 2];

d) substituce  $16^x = a$ ,  $16^y = b$ , 2 řešení:  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ ;

e) v první rovnici převeďte obě strany na základ 5, ve druhé na základ 6. [14; 2];

f) substituce  $x^y = a$ , [3; 2].

### 5.2 Logaritmické rovnice

9 Užijte definici logaritmu čísla.

- a) {7}; b) {14}; c) {-2}; d) {4}; e) {\frac{1}{8}}; f) {16}; g) {\frac{1}{8}}; h) {\frac{1}{3}}.

10 Rovnají-li se logaritmy o stejném základu, potom se rovnají i logaritmované výrazy.

- a) {-5}; b) {\pm\sqrt{2}}; c) {-1; 11}; d) {2}.

11 Užijte pravidla pro počítání s logaritmy.

- a) {100}; b) {36}; c) {2}; d) {1}; e) {\frac{3}{2}}; f) {2};

- g) {1000}; h) {10}; i) {\frac{1}{2}}; j) {\frac{1}{32}}; k) {2}; l) {2}.

12 Užijte definici logaritmu, viz úloha 9. a) {\frac{9}{5}}; b) {\frac{25}{3}}; c) {2}; d) {\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}.

13 V rovnici odstraňte zlomek, pak užijte vztah  $k \cdot \log x = \log x^k$ , dále viz úlohu 10.

- a) {11}; b) {\frac{1}{2}}; c) {\frac{2}{9}}; d) {4}.

14 Substituce  $\log_a x = t$ , dostanete kvadratickou rovnici.

- a) {2; \frac{1}{8}}; b) {81; \frac{\sqrt{3}}{3}}; c) {-\frac{1}{2}; 63}; d) {-\frac{1}{3}; 40}.

15 Substituce  $\log x = t$ , dostanete rovnici s neznámou ve jmenovateli. a) {100} b) {\frac{1}{10}}.

16 a), c) Substituce, úprava, kvadratická rovnice.

- b), d) Pravidlo  $\log x^k = k \cdot \log x$ , potom substituce, úprava, kvadratická rovnice.  
a) {7}; b) {10; \frac{3\sqrt{10}}{100}}; c) {-\frac{8}{9}; 8; -1 + \sqrt{3}; -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}; d) {4; \frac{1}{4}}.

17 Dejte si pozor, kde je napsáno na druhou. Užijte pravidlo pro logaritmus součinu.

- a) {100}; b) {10^{-4}; 10}; c) {10\sqrt[3]{10}}; d) {\pm 0,01; \pm\sqrt{10}}.

18 Pravidla pro počítání s logaritmy. Složitější úlohy.

- a) {\frac{1}{100}}; b) {\frac{1}{2}; 1}; c) {8; \frac{3\sqrt{4}}{16}}; d) {\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}}; e) {3}; f) {0,01; 10; 100}.

19 Logaritmujte. a)  $x^{\log x} = 100x \Rightarrow \log x^{\log x} = \log 100x \Rightarrow \log x \cdot \log x = \log 100 + \log x$ , potom substituce  $\log x = a$ .

- a) {0,1; 100}; b) {0,01; 10}; c) {0,1; 1000}; d) {\frac{1}{3}; 27}; e) {\frac{\sqrt{7}}{7}; 49}; f) {\frac{1}{4}; 2}.

20 Užijte vzorec pro změnu základu logaritmu  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .

- a) {\frac{\sqrt{32}}{2}}; b) {81}; c) {2}; d) {\sqrt{2}}.

21 a)  $x = 7 - y$ , dosadit o druhé rovnice. [5; 2], [2; 5].

b) Ze druhé rovnice plyne  $x \cdot y = 2^3 \Rightarrow x = \frac{8}{y}$ , dosadit do první rovnice. [4; 2], [2; 4].

c) Převeďte všechny logaritmy na základ 2, potom  $\log_2 x = a$ ,  $\log_2 y = b$ . [2; 4].

d) Nejdříve upravte pravé strany obou rovnic, potom užijte definice logaritmu. [2; 0].

22 a) Substituce  $\log x = a$ ,  $\log y = b$ . [100; 0,1].

b) Nejdříve ve 2. rovnici pravidlo pro logaritmus mocnin, potom substituce. [16; 8].

c) Substituce  $\log \frac{1}{2} x = a$ ,  $\log_2 y = b$ . [64; 512], [\frac{1}{2}; 4].

d)  $x = \frac{100}{y}$  dosadit do druhé rovnice. [1000; 0,1], [0,1; 1000].

e) V první rovnici obě strany na stejný základ, ve druhé užijte definici logaritmu. [2; 7].

f) Substituji  $5^{\log x} = a$ ,  $3^{\log y} = b$ . [1; 10].

23 a) Užijte, že  $x = \log 2^x$ , nebo převeďte  $x$  na pravou stranu a užijte definice logaritmu.

- a) {3}; b) {-2}; c) {1}; d) {2}; e) {2}.

24 a) Substituji  $3^{\log_5 x} = a$ ,  $x = 25$ ; b) Substituji  $4^{\log_3 x} = a$ ,  $x = 3$ .

c) Substituji  $4^{\log x} = a$ , kvadratická rovnice,  $x = \sqrt{10}$ .

d) Stejně základy na jednu stranu, vytáknout, dělit,  $x = 100$ .

### 5.3 Exponenciální nerovnice

25 a)  $(-\infty; -5)$ ; b)  $(\frac{4}{3}; \infty)$ ; c)  $(0; \infty)$ ; d)  $(-\infty; -3)$ ; e)  $\emptyset$ ; f)  $\mathbb{R}$ .

26 a)  $(3; \infty)$ ; b)  $(-\frac{13}{6}; \infty)$ ; c)  $(-\infty; \log_9 7)$ ; d)  $(-\infty; \log_{0,2} 3)$ ; e)  $(-\infty; \log_8 100)$ ; f)  $\mathbb{R}$ .

27 Po substituci kvadratická nerovnice.

- a)  $(-\infty; 5)$ ; b)  $(3; \infty)$ ; c)  $(-\infty; \frac{7}{2})$ ; d)  $(-\infty; -2) \cup (4; \infty)$ ; e)  $(-\infty; 2)$ ; f)  $(2; \infty)$ .

28 a), b) Vytáknout, upravit. c) Stejně základy k sobě, vytáknout. d), e), f) Substituji na kvadratickou nerovnici.

- a)  $(-\infty; 1)$ ; b)  $(1; \infty)$ ; c)  $(1; \infty)$ ; d)  $(\log_5 4; 1)$ ; e)  $(1; \infty)$ ; f)  $(-\infty; \log_2 \frac{4}{5}) \cup (2; \infty)$ .

### 5.4 Logaritmické nerovnice

29 a)  $(4; 5)$ ; b)  $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ ; c)  $(-4; \infty)$ ; d)  $(-1; -\frac{3}{4}) \cup (0; \frac{1}{4})$ ; e)  $(-7; -\frac{5}{2})$ ; f)  $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (0; \infty)$ .

30 a)  $(-4; 77)$ ; b)  $(\frac{3}{5}; \infty)$ ; c)  $(-2; 2)$ ; d)  $(6,01; \infty)$ ; e)  $(1; 2)$ ; f)  $(\frac{\sqrt{5}}{5}; 1)$ .

- 31 a)  $\emptyset$ ; b)  $(\frac{4}{5}; 2)$ ; c)  $(3; 8)$ ; d)  $(3; 6)$ .

32 a)  $(-2; \infty)$ ; b)  $(1; 2)$ ; c)  $(0; 1)$ ; d)  $(\frac{1}{2}; 1)$ .

33 Substituji na kvadratickou nerovnici.

- a)  $(\frac{1}{9}; 3)$ ; b)  $(\frac{1}{2}; 4)$ ; c)  $(-1; -\frac{63}{64}) \cup (63; \infty)$ ; d)  $(1; \frac{5}{4}) \cup (2; \infty)$ .

**34** Po substituci nerovnice s neznámou ve jmenovateli.

a)  $(0,1; 100)$ ; b)  $(0; 0,001) \cup (1; \infty)$ .

**35** a) Substituce  $\log x = a \Rightarrow |a| \leq 4 \Rightarrow a \in (-4; 4) \Rightarrow \log x \in (-4; 4) \Rightarrow x \in (10^{-4}; 10^4)$ .

b)  $(\frac{1}{3}; 27)$ ; c)  $(0; \frac{\sqrt{10}}{10^4}) \cup (\sqrt{10}; \infty)$ ; d)  $(0; 10) \cup (1000; \infty)$ ; e)  $(10; 10^5)$ ; f)  $(\frac{1}{512}; 128)$ ; g)  $(\frac{1}{4}; 1024)$ .

**36** Substituce  $\log x = a$ , dostanete nerovnici s absolutními hodnotami.

a)  $(10^{-4}; 100)$ ; b)  $(0; \frac{\sqrt{10}}{10})$ .

**37** a) Substituce  $|x| = a$ , potom  $\log a > 2 \Rightarrow a > 10^2 \Rightarrow |x| > 100 \Rightarrow (-\infty; -100) \cup (100; \infty)$ .

b)  $(-13; 19) - \{3\}$ ; c)  $(-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; \infty)$ ; d)  $(-\infty; -97) \cup (103; \infty)$ ;

e)  $(-15,5; 14,5) - \{-0,5\}$ ; f)  $(-3\sqrt{10}; 0) \cup (0; 3\sqrt{10})$ ; g)  $(-1; -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2})$ .

**38** a)  $x \in (3; 9)$ ; b)  $(10^{-3}; 100)$ ; c)  $(16; 32)$ ; d)  $(\sqrt[3]{10}; 10)$ .

**39** a) Substituce  $\log_3 x = a \Rightarrow 1 \leq |a| \leq 2 \Rightarrow a \in (-2; -1) \cup (1; 2) \Rightarrow \log_3 x \in (-2; -1) \cup (1; 2) \Rightarrow x \in (\frac{1}{9}; \frac{1}{3}) \cup (3; 9)$ ;

b)  $(10^{-5}; 10^{-3}) \cup (10^3; 10^5)$ ; c)  $(\frac{1}{64}; \frac{1}{32}) \cup (\frac{1}{8}; \frac{1}{4})$ ; d)  $(0,001; 0,1) \cup (10^{11}; 10^{13})$ .

**40** a) Substituce  $|x| = a \Rightarrow 1 \leq \log_3 a \leq 2 \Rightarrow a \in (3^1; 3^2) \Rightarrow |x| \in (3; 9) \Rightarrow x \in (-9; -3) \cup (3; 9)$ ; b)  $(-6; -3) \cup (3; 6)$ ; c)  $(-96; 3,999) \cup (4,001; 104)$ ; d)  $(-21; -\frac{6}{5}) \cup (-\frac{4}{5}; 19)$ .

## 6 Goniometrické funkce a trigonometrie

### 6.1 Velikost úhlu — míra stupňová, míra oblouková

1  $\alpha = \frac{1}{9}\pi$ ;  $\beta = \frac{10}{9}\pi$ ;  $\gamma = \frac{7}{6}\pi$ ;  $\delta = \frac{1}{20}\pi$ ;  $\varepsilon = \frac{5}{9}\pi$ ;  $\omega = \frac{1}{8}\pi$ .

2  $\alpha = 0,469$ ;  $\beta = 2,725$ ;  $\gamma = 3,881$ . 3  $x_1 = 315^\circ$ ;  $x_2 = 450^\circ$ ;  $x_3 = 165^\circ$ .

4  $y_1 = 13^\circ 45'$ ;  $y_2 = 143^\circ 14'$ ;  $y_3 = -89^\circ 57'$ ;  $y_4 = 144^\circ 00'$ ;  $y_5 = 0^\circ 10'$ ;  $y_6 = 339^\circ 31' + 159,154 \cdot 360^\circ$ . 5  $165^\circ$  popř.  $195^\circ$ ;  $\frac{11}{12}\pi$  popř.  $\frac{13}{12}\pi$ .

### 6.2 Orientovaný úhel

6  $\alpha \in \text{II.}$ ;  $\beta \in \text{IV.}$ ;  $\gamma \in \text{I.}$ ;  $\delta \in \text{osa } y^+$ ;  $x_1 \in \text{III.}$ ;  $x_2 \in \text{IV.}$ ;  $x_3 \in \text{I.}$ ;  $x_4 \in \text{II.}$

7  $\alpha_0 = 32^\circ$ ;  $\beta_0 = 176^\circ$ ;  $\gamma_0 = 200^\circ 20'$ ;  $\delta_0 = 354^\circ 05'$ ;  $x_{10} = \frac{7}{4}\pi$ ;  $x_{20} = 0$ ;  $x_{30} = \frac{1}{3}\pi$ ;  $x_{40} = 8 - 2\pi \doteq 1,7168$ .

### 6.3 Hodnoty goniometrických funkcí $y = \sin x$ , $y = \cos x$

8 a)  $\frac{1}{2}$ ; 0;  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ ; c)  $-0,5$ ;  $-0,5$ ; 0; d)  $-1$ ;  $-0,5$ ;  $-0,5$ .

9 a)  $0,5828$ ;  $-0,2625$ ; b)  $-0,5988$ ;  $-0,5000$ ; c)  $0,8415$ ;  $-0,8716$ ; d)  $0,6347$ ;  $-1,0000$ .

10 a)  $\alpha_1 = 57^\circ$ ,  $\alpha_2 = 123^\circ$ ; b)  $\beta_1 = 306^\circ$ ,  $\beta_2 = 54^\circ$ ; c)  $\gamma_1 = 203^\circ 18'$ ,  $\gamma_2 = 336^\circ 42'$ .

11 a)  $\alpha_1 = 120^\circ$ ; b)  $\beta = 135^\circ$ ; c)  $\gamma_1 = 210^\circ$ ,  $\gamma_2 = 330^\circ$ ; d)  $\delta$  neexistuje.

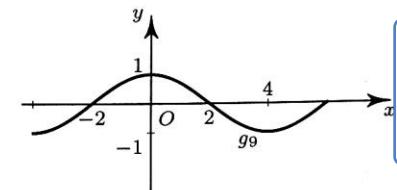
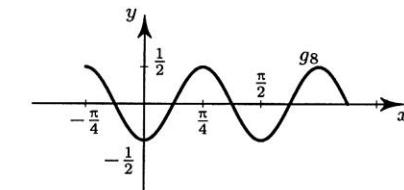
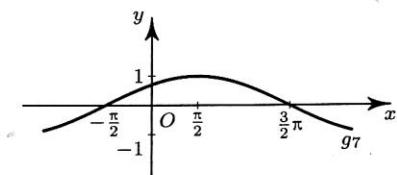
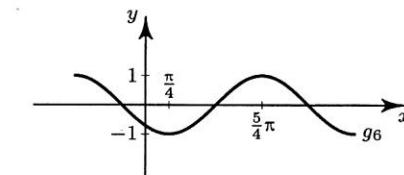
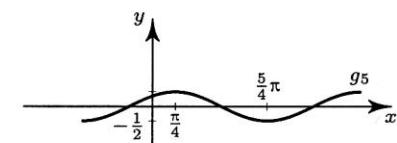
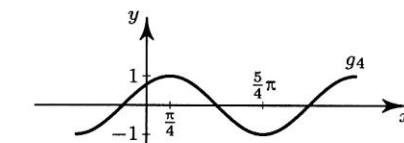
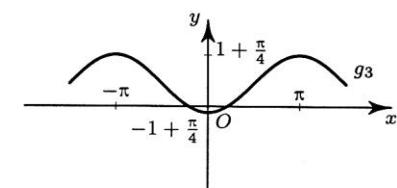
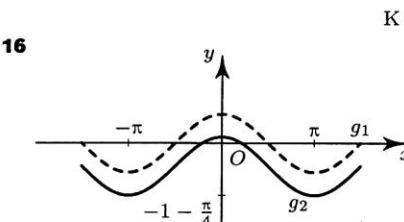
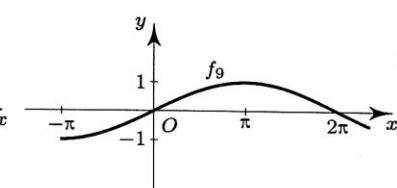
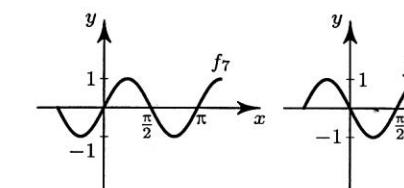
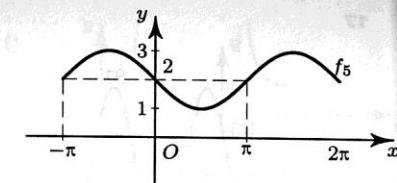
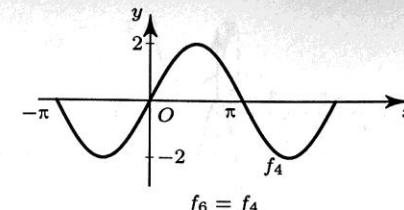
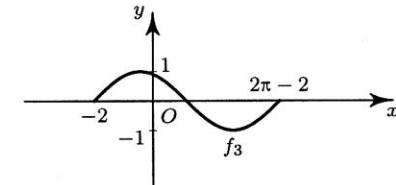
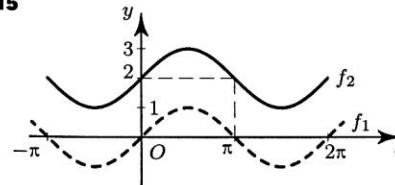
12 a)  $x_1 = \frac{11}{6}\pi$ ; b)  $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ ; c)  $x_3 = \frac{3}{2}\pi$ ; d)  $x_{41} = \frac{1}{4}\pi$ ,  $x_{42} = \frac{7}{4}\pi$ .

13 a)  $\alpha_1 = 23^\circ 35'$ ; b)  $\beta = 293^\circ 35'$ ; c)  $\gamma_1 = 187^\circ 05'$ ,  $\gamma_2 = 352^\circ 55'$ ; d)  $\delta_1 = 55^\circ 24'$ ,  $\delta_2 = 304^\circ 36'$ .

14 a)  $x_{10} = 2,37$ ; b)  $x_{20} = 3,94$ ; c)  $x_{30} = 4,21$ ,  $x_{31} = 5,21$ ; d)  $x_{40} = 1,12$ ,  $x_{41} = 5,16$ .

### 6.4 Grafy goniometrických funkcí $y = \sin x$ , $y = \cos x$

15

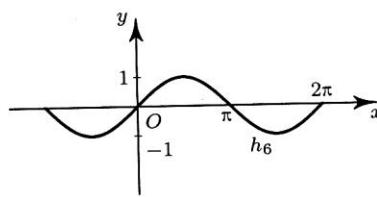
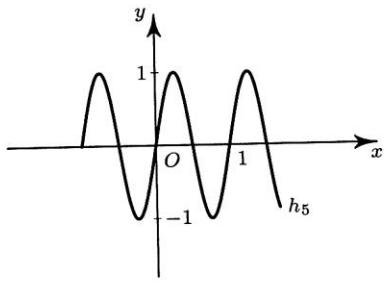
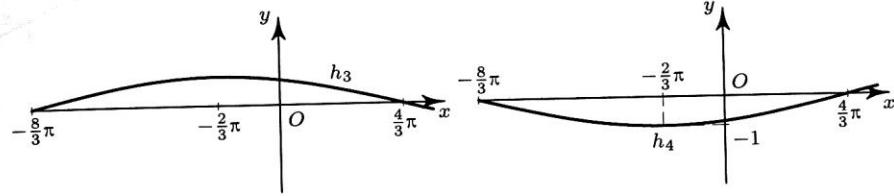
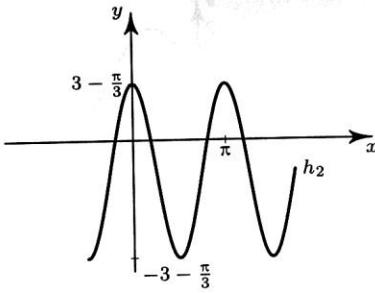
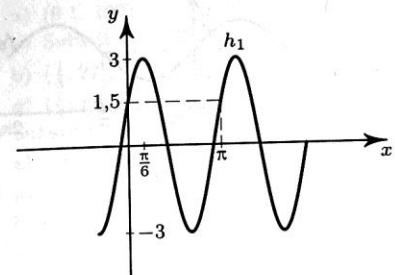


K řešení úlohy 16

ZPĚT

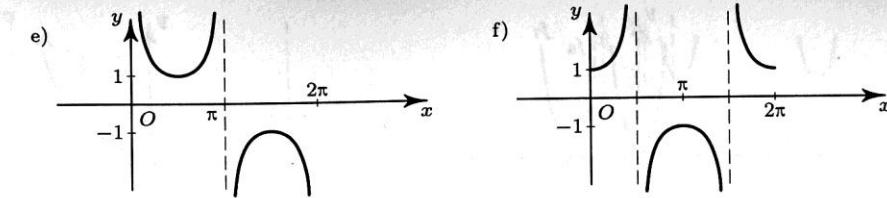
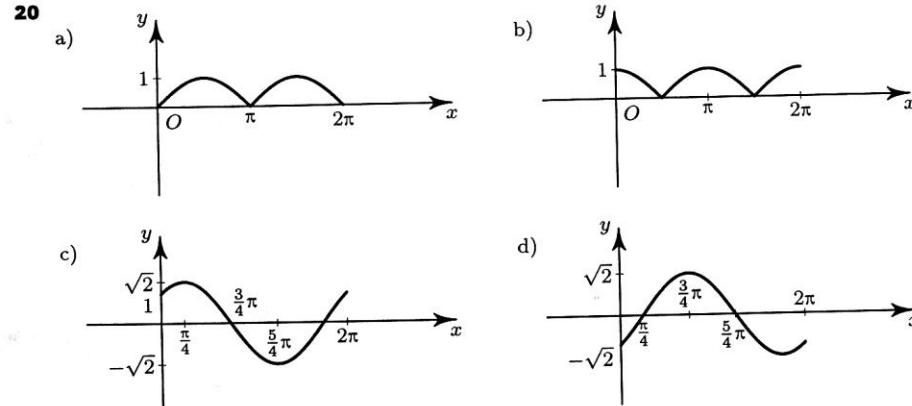
OBSAH

17



K řešení úlohy 17

18  $f_1 = g_2$ ;  $f_2 = g_3$ ;  $f_3 = g_4$ ;  $f_4 = g_1$ . 19 a) až d) platí.



K řešení úlohy 20

21 a)  $A_1 > A_2$ ; b)  $B_1 > B_2$ ; c)  $C_1 < C_2$ ; d)  $D_1 < D_2$ ; e)  $E_1 > E_2$ ; f)  $F_1 < F_2$ .

### 6.5 Hodnoty goniometrických funkcí $y = \operatorname{tg} x$ , $y = \operatorname{cotg} x$

22 a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}; 0; 1$ ; b)  $-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}; 0$ ; c)  $-1; -\sqrt{3}$ ; není def.; d)  $\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0$ .

23 a)  $1,6297; -0,6924$ ; b)  $2,6699; -0,0486$ ; c)  $-2,1850; 0,0300$ ; d)  $3,9163; 1,1475$ .

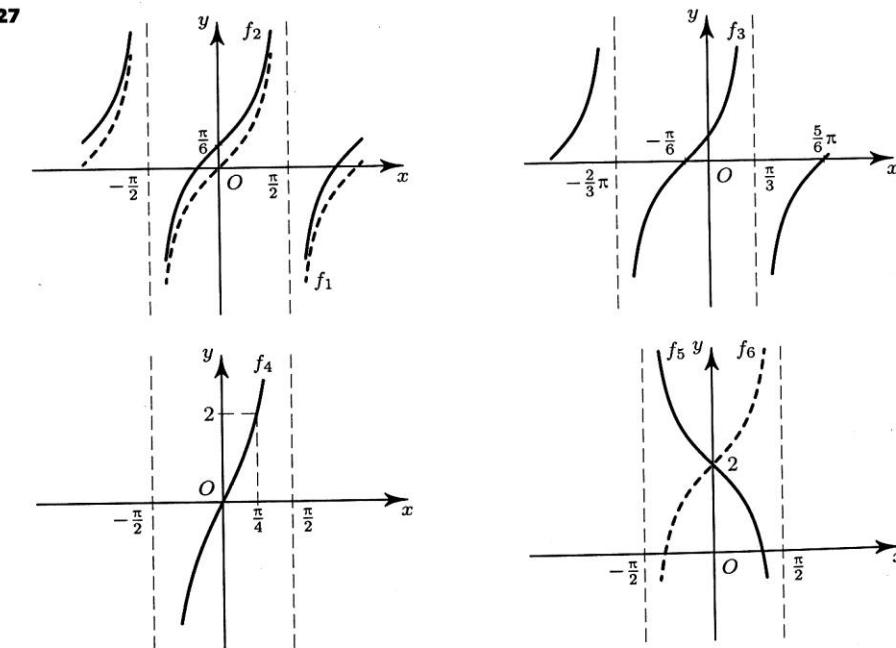
24 a)  $x_1 = \frac{1}{3}\pi$ ; b)  $x_2 = \frac{5}{4}\pi$ ; c)  $x_{31} = 0; x_{32} = \pi$ ; d)  $x_{41} = \frac{2}{3}\pi; x_{42} = \frac{5}{3}\pi$ .

25  $\alpha = 54^\circ 28'$ ,  $\alpha' = 234^\circ 28'$ ;  $\beta = 84^\circ 17'$ ,  $\beta' = 264^\circ 17'$ ;  $\gamma = 168^\circ 41'$ ,  $\gamma' = 348^\circ 41'$ ;  $\delta = 95^\circ 43'$ ,  $\delta' = 275^\circ 43'$ ;  $\varepsilon = 26^\circ 34'$ ,  $\varepsilon' = 206^\circ 34'$ ;  $\varphi = 0^\circ 00' 0,21'' \doteq 0^\circ$ ,  $\varphi' = 180^\circ$ ;  $\psi = 161^\circ 34'$ ,  $\psi' = 341^\circ 34'$ ;  $\omega = 90^\circ 03'$ ,  $\omega' = 270^\circ 03'$ .

26  $x_1 = 1,11, x'_1 = 4,25$ ;  $x_2 = 1,52, x'_2 = 4,66$ ;  $x_3 = 0,15, x'_3 = 3,29$ ;  $x_4 = 3,14, x'_4 = 6,28$ ;  $x_5 = 1,58, x'_5 = 4,72$ ;  $x_6 = 3,14, x'_6 = 6,28$ ;  $x_7 = 0,57, x'_7 = 3,71$ ;  $x_8 = 1,77, x'_8 = 4,91$ .

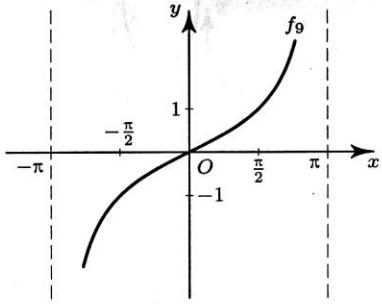
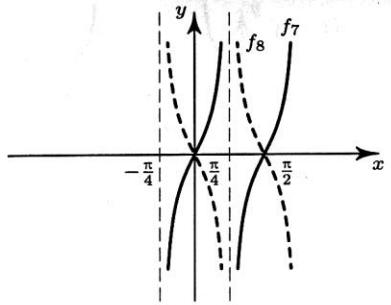
### 6.6 Grafy goniometrických funkcí $y = \operatorname{tg} x$ , $y = \operatorname{cotg} x$

27



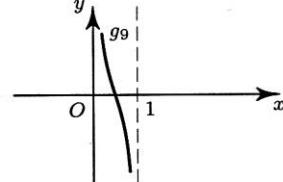
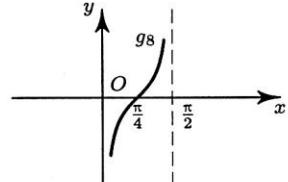
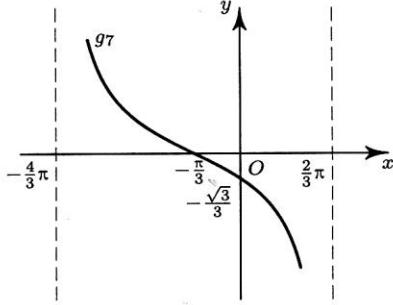
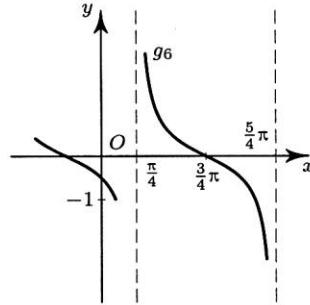
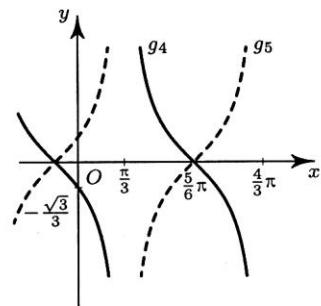
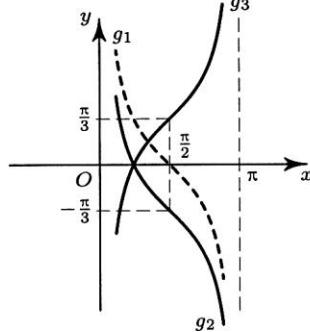
ZPĚT

OBSAH



K řešení úlohy 27

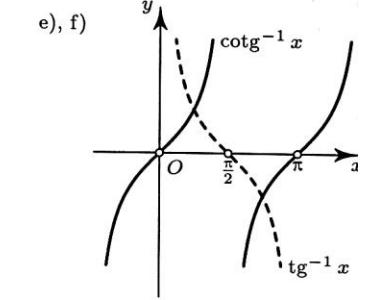
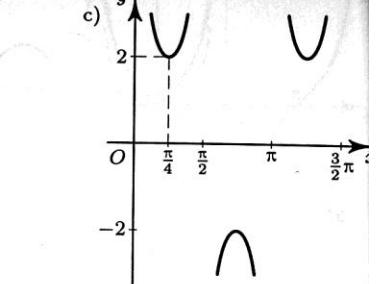
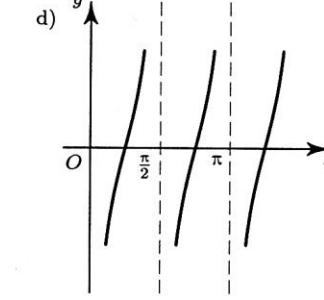
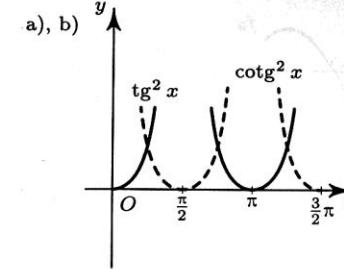
28



K řešení úlohy 28

$$29 \quad f_1 = g_4; \quad f_2 = g_3; \quad f_3 = g_4; \quad f_4 = g_3.$$

30

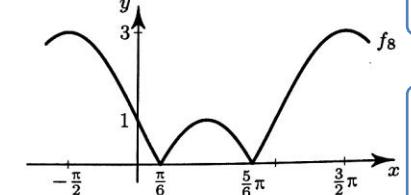
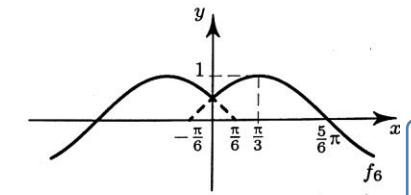
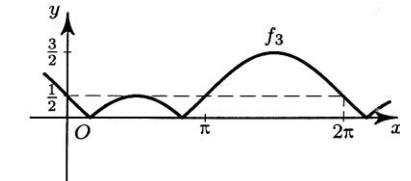
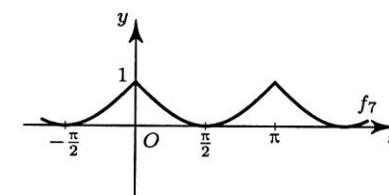
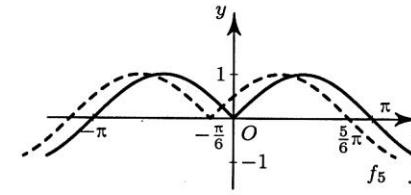
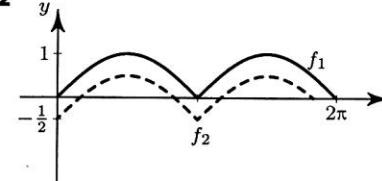


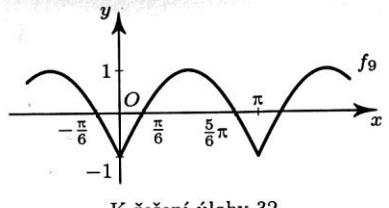
K řešení úlohy 30

$$31 \quad a) A_1 > A_2; \quad b) B_1 > B_2; \quad c) C_1 < C_2; \quad d) D_1 < D_2; \quad e) E_1 < E_2; \quad f) F_1 > F_2.$$

### 6.7 Grafy goniometrických funkcí s absolutními hodnotami

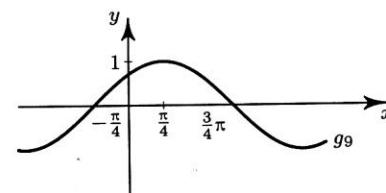
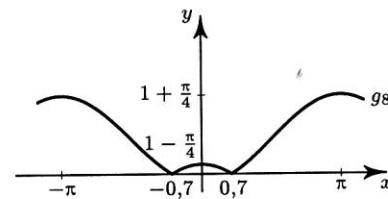
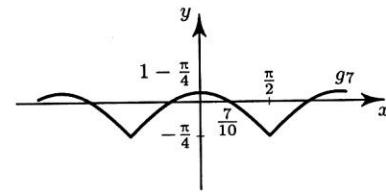
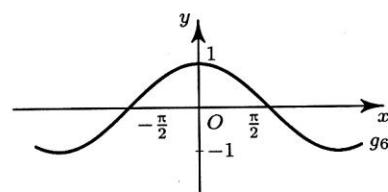
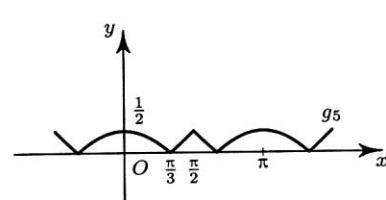
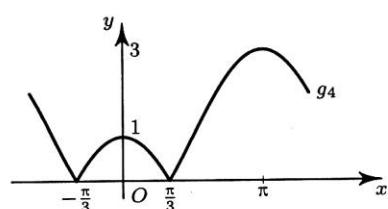
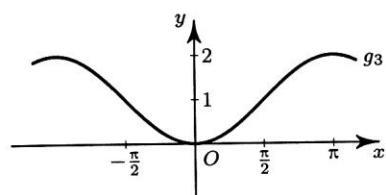
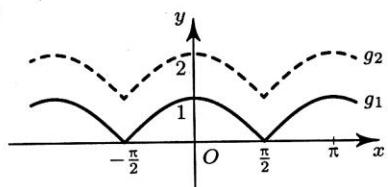
32





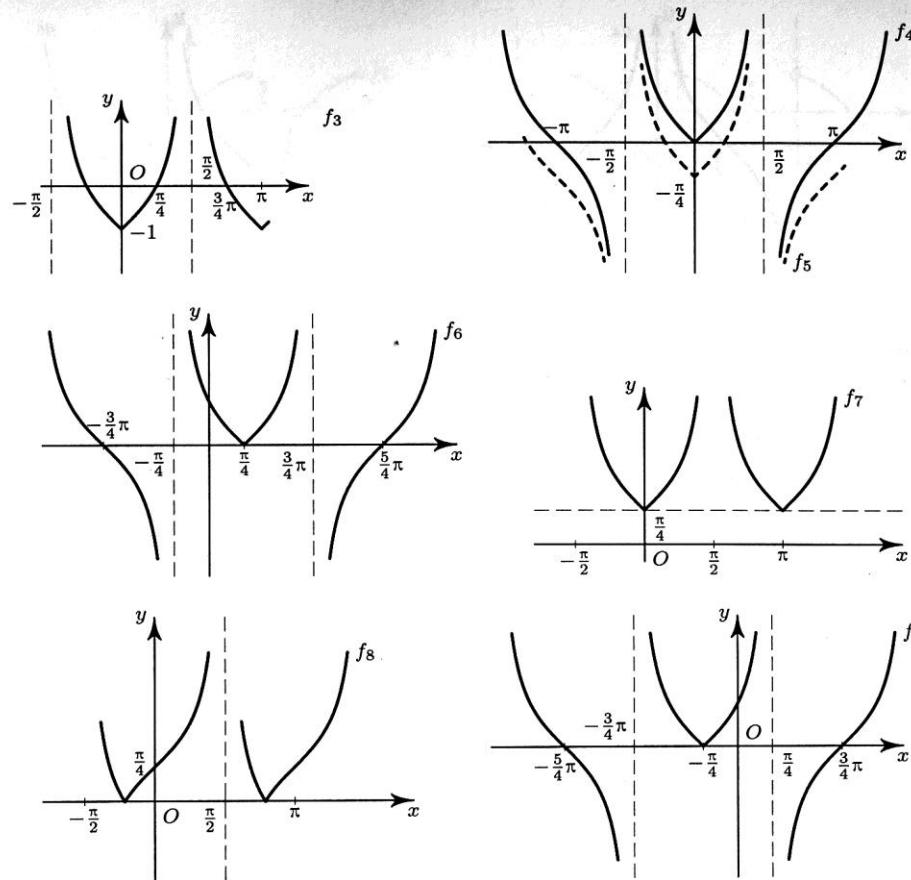
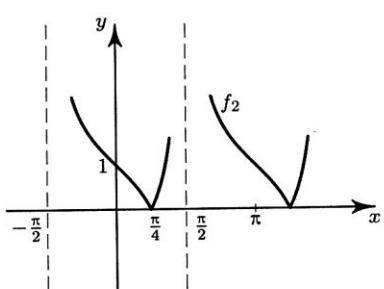
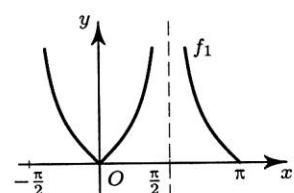
K řešení úlohy 32

33



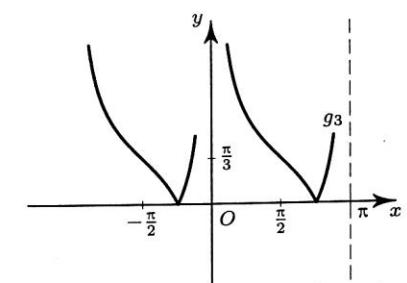
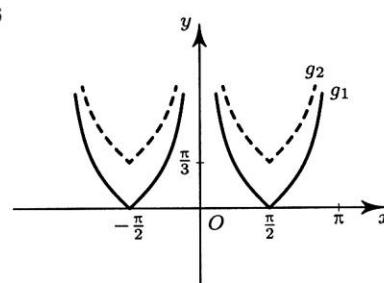
K řešení úlohy 33

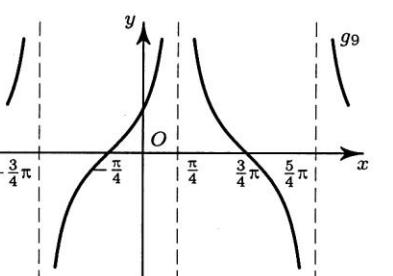
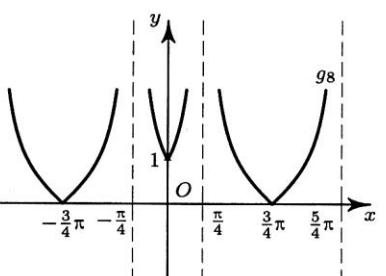
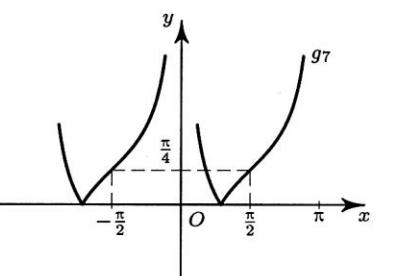
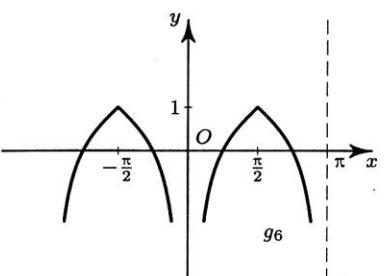
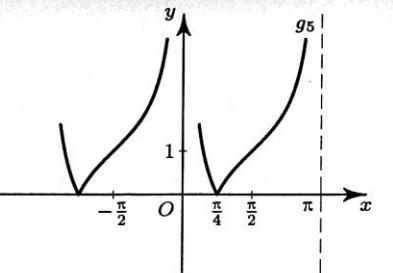
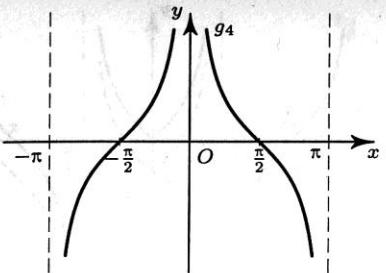
34



K řešení úlohy 34

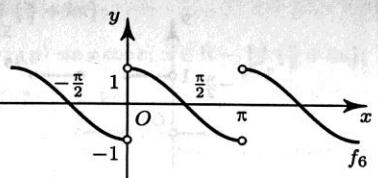
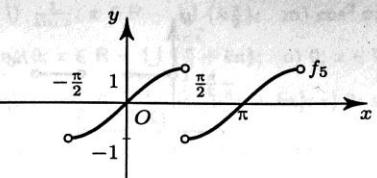
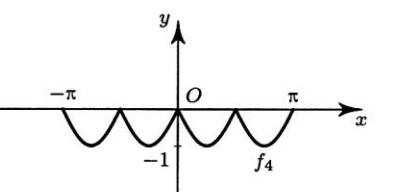
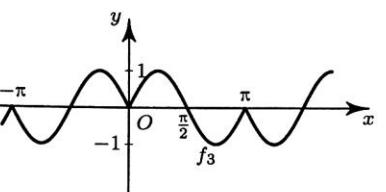
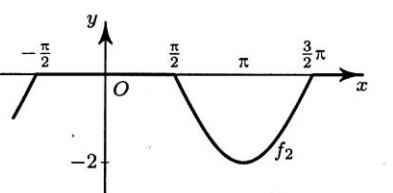
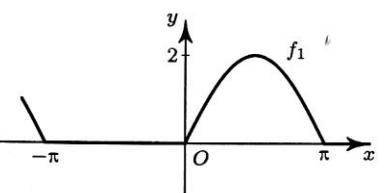
35





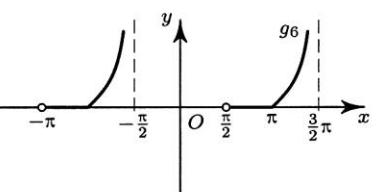
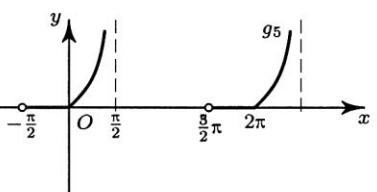
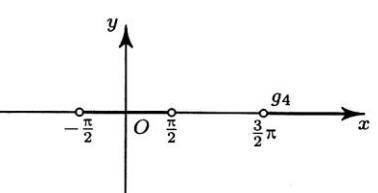
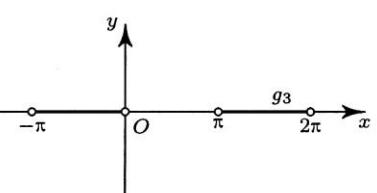
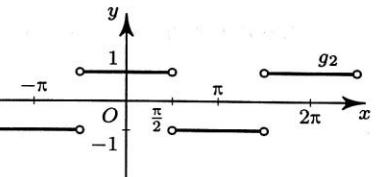
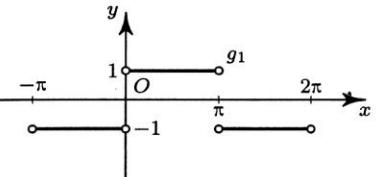
K řešení úlohy 35

36



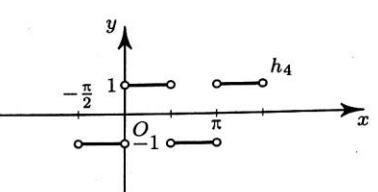
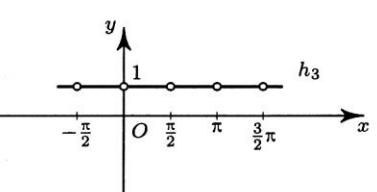
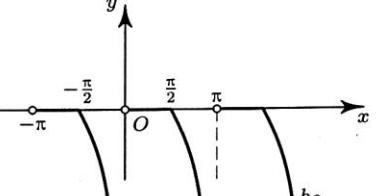
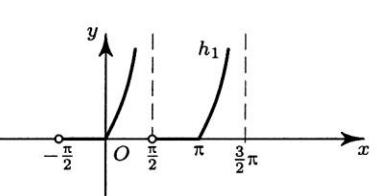
K řešení úlohy 36

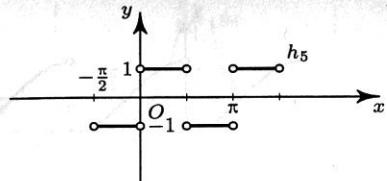
37



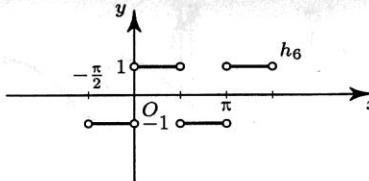
K řešení úlohy 37

38



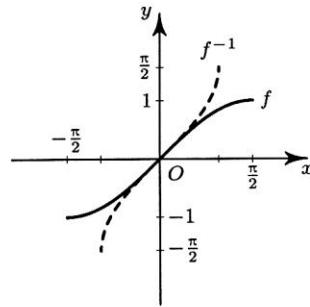


K řešení úlohy 38

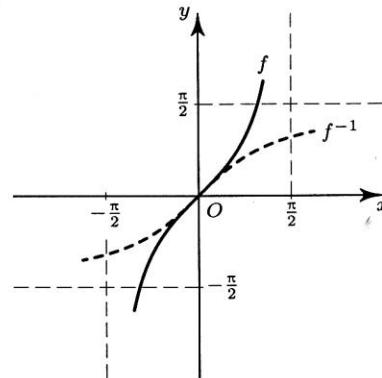


## 6.8 Cyklometrické funkce

39



41



43  $\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}; 0, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}; \frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{3}$ . 44  $24^\circ 50' \doteq 0,43$ ; není def.;  $154^\circ 09' \doteq 2,69$ ;  $138^\circ 35' \doteq 2,42$ ;  $88^\circ 22' \doteq 1,54$ ;  $-78^\circ 41' \doteq -1,37$ ;  $51^\circ 20' \doteq 0,90$ ;  $9^\circ 28' \doteq 0,17$ .

## Goniometrické vzorce

## 6.9 Základní vztahy mezi funkcemi

- 45 a)  $\sin x = \frac{3}{5}$ ;  $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ ;  $\operatorname{cotg} x = \frac{4}{3}$ ; b)  $\cos x = -\frac{5}{13}$ ;  $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$ ;  $\operatorname{cotg} x = \frac{5}{12}$ .  
 c)  $\sin x = \frac{15}{17}$ ;  $\cos x = \frac{8}{17}$ ;  $\operatorname{cotg} x = \frac{8}{15}$ ; d)  $\sin x = -\frac{24}{25}$ ;  $\cos x = \frac{7}{25}$ ;  $\operatorname{tg} x = -\frac{24}{7}$ .
- 46 a)  $\sin^2 x; x \in \mathbb{R}$ ; b)  $\sin x; x \in \mathbb{R}$ ; c) 1; d) 2; e) 1; f)  $\sin^2 x; x \in \mathbb{R}$ ; g) 1; h)  $\frac{2}{\cos x}; x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ; i)  $\frac{2}{\sin x}; x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$ ; j) 0; k) 1; l)  $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ;

- l)  $\frac{1}{\sin x}; x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\frac{\pi}{2}\}$ ; m)  $\cos^2 x; x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ; n) 0; o) 0; p)  $\sin x \cos x; x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ ; q) 0; r) 0; s)  $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$ .

47 Vždy upravíme levou stranu, pravou stranu a dokážeme, že  $L = P$ . U každé úlohy musíme uvést, kdy výrazy mají smysl.

- a)  $x \in \mathbb{R}$ ; b)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; c)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; d)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; e)  $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; f)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; g)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; h)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; i)  $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; j)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; k)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; l)  $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; m)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; n)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; o)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

- 48 a)  $L = P$  pro  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; b)  $L = P$  pro  $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

## 6.10 Vzorce pro dvojnásobný úhel

- 49 a)  $\sin 2x = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ,  $\cos 2x = -\frac{1}{8}$ ,  $\operatorname{tg} 2x = 3\sqrt{7}$ ,  $\sin 4x = \frac{3\sqrt{7}}{32}$ ,  $\cos 4x = -\frac{31}{32}$ ; b)  $\sin 2x = \frac{24}{25}$ ,  $\cos 2x = -\frac{7}{25}$ ,  $\operatorname{tg} 2x = -\frac{24}{7}$ ,  $\sin 4x = -\frac{336}{625}$ ,  $\cos 4x = -\frac{527}{625}$ ; c)  $\sin 2x = \frac{4}{5}$ ,  $\cos 2x = \frac{3}{5}$ ,  $\operatorname{tg} 2x = \frac{4}{3}$ ,  $\sin 4x = \frac{24}{25}$ ,  $\cos 4x = -\frac{7}{25}$ ; d)  $\sin 2x = -\frac{10\sqrt{2}}{27}$ ,  $\cos 2x = -\frac{23}{27}$ ,  $\operatorname{tg} 2x = \frac{10\sqrt{2}}{23}$ ,  $\sin 4x = \frac{460\sqrt{2}}{729}$ ,  $\cos 4x = \frac{329}{729}$ .

- 50 a)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $\cos x = \frac{\sqrt{14}}{4}$ ; b)  $\sin x = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2}}$ ,  $\cos x = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2}}$ .

- 51 a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b)  $\frac{1}{4}$ ; c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

52 Vždy upravíme levou stranu, pravou stranu a dokážeme, že  $L = P$ . U každé úlohy musíme uvést, kdy výrazy mají smysl.

- a)  $x \in \mathbb{R}$ ; b)  $x \in \mathbb{R}$ ; c)  $x \in \mathbb{R}$ ; d)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; e)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; f)  $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; g)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; x \neq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; h)  $x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; i)  $x \neq k\pi; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; j)  $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; k)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; l)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; m)  $x \in \mathbb{R}$ ; n)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; o)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; p)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; q)  $x \neq k\pi; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; r)  $x \neq k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$ ; s)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; t)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; u)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; v)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; w)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; z)  $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ .

- 53 a) 1; b) 1; c)  $-2\operatorname{cotg} x; x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; d)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}; x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ ; e) 1; f)  $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}; x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; g) 1; h)  $\cos 4x; x \in \mathbb{R}$ ; i)  $\frac{1}{2}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; j)  $-\operatorname{tg} x; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; k) 1; l)  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; x \neq \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

## 6.11 Součtové vzorce

- 54 a)  $\sin(x+y) = -\frac{19}{35}$ ,  $\cos(x-y) = -\frac{8\sqrt{6}}{35}$ ; b)  $\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos(x+y) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ .

55 Platí. 56 Platí  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- 57 a) až j) platí  $\forall x \in \mathbb{R}$ ; k), l) platí  $\forall x \in \mathbb{R} \wedge \forall y \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ . 58 a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b) -1.

- 59  $\sin 3x = \sin(2x+x)$  atd.

## 6.12 Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí

- 60 a)  $-\sin \alpha$ ; b)  $\cos \beta$ ; c)  $-\sqrt{2} \cos \gamma$ ; d)  $\cos x$ ; e) 0; f)  $\sqrt{2} \cos x$ .

- 63 a)  $\sqrt{2}$ ; b)  $\sqrt{3}$ . 64 a)  $\operatorname{tg} x; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ; b)  $-\operatorname{cotg} x; x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

### 6.13 Vzorce pro poloviční úhel

65 a)  $\sin \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ; b)  $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{26}}{26}$ ,  $\cos \frac{x}{2} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$ .

66 Návod: a)  $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6}$ ; b)  $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$ ; c)  $15^\circ = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ$ ; d)  $22^\circ 30' = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ$ .

67 Návod:

$$a) \sin x = \sin(2 \cdot \frac{x}{2}) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}) : \cos^2 \frac{x}{2}}{(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}) : \cos^2 \frac{x}{2}}$$

atd.  $x \neq \pi + 2k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ ;

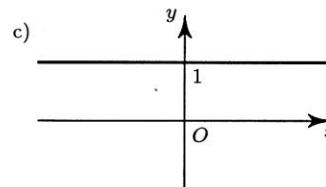
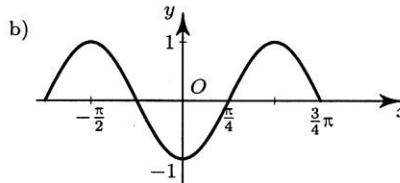
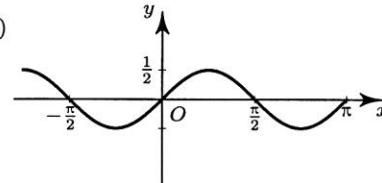
$$b) \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \text{ atd. } x \neq \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

68  $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ ;  $x \neq k\pi$ ;  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\operatorname{cotg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ ;  $x \neq k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

69 Platí. 70 Platí.

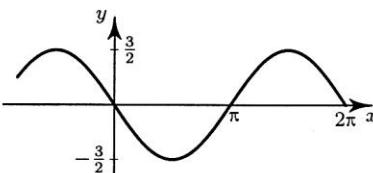
### 6.14 Grafy funkcí — užití vzorců

71

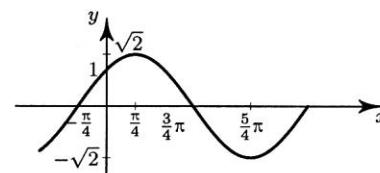


K řešení úlohy 71

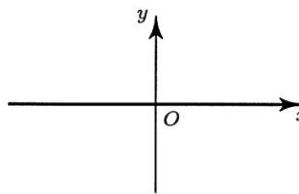
72



a)  $f_1 + f_2 = -\frac{3}{2} \sin x$



b)  $f_1 + f_2 = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$



K řešení úlohy 72

### 6.15 Vztahy pro úhly v trojúhelníku

73 Návod:  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ , potom  $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$  atd. e) Neplatí pro pravouhlý trojúhelník.

### 6.16 Sinová a kosinová věta

74 a)  $b = 6,3 \text{ cm}$ ,  $c = 11,3 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 84^\circ$ ; b)  $a = 10,0 \text{ cm}$ ,  $c = 7,1 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 42^\circ$ ;

c)  $a = 12,2 \text{ cm}$ ,  $b = 17,2 \text{ cm}$ ,  $\beta = 112^\circ 00'$ ; d)  $b = 4,82 \text{ cm}$ ,  $c = 4,07 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 78^\circ 41'$ .

75 a)  $b = 10,4 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 33^\circ 26'$ ,  $\beta = 106^\circ 34'$ ; b)  $\triangle ABC$  neex., úloha nemá řeš.

c)  $a_1 = 10,6 \text{ cm}$ ,  $\beta_1 = 46^\circ 25'$ ,  $\alpha_1 = 106^\circ 40'$ ;  $a_2 = 3,7 \text{ cm}$ ,  $\beta_2 = 133^\circ 35'$ ,  $\alpha_2 = 19^\circ 30'$ ;

d)  $c = 5,2 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

76 a)  $\alpha = 28^\circ 57'$ ,  $\beta = 46^\circ 34'$ ,  $\gamma = 104^\circ 29'$ ; b)  $\triangle ABC$  neex., úloha nemá řeš.

c)  $c = 3,6 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 42^\circ 48'$ ,  $\beta = 107^\circ 58'$ ; d)  $b = 16,9 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 20^\circ 06'$ ,  $\gamma = 36^\circ 04'$ .

77 a)  $a = 11,7 \text{ cm}$ ,  $b = 8,7$ ; b)  $b_1 = 13,8 \text{ cm}$ ,  $c_1 = 10,5 \text{ cm}$ ;  $b_2 = 3,2 \text{ cm}$ ,  $c_2 = 4,4 \text{ cm}$ ;

c)  $b = 6,8 \text{ cm}$ ; d)  $c = 7,6 \text{ cm}$ ,  $b = 11,1 \text{ cm}$ ;

e)  $b_1 = 11,4 \text{ cm}$ ,  $c_1 = 6,9 \text{ cm}$ ;  $b_2 = 3,4 \text{ cm}$ ,  $c_2 = 12,9 \text{ cm}$ ;

f)  $a = 7,4 \text{ cm}$ ,  $b = 9,0 \text{ cm}$ ,  $c = 4,2 \text{ cm}$ .

78  $\alpha = 48^\circ 11'$ .

79

$a$	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm	10 cm
počet řeš.	0	0	2	1	1
$\beta$	neex.	neex.	$41^\circ 49'$ ; $138^\circ 11'$	$30^\circ$	$23^\circ 35'$

80 a)  $\alpha = 43^\circ 17'$ ,  $\beta = 91^\circ 09'$ ,  $\gamma = 45^\circ 34'$ . 81 a)  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ .

82  $\alpha = 22^\circ 20'$ ,  $\beta = 49^\circ 27'$ ,  $\gamma = 108^\circ 13'$ .

83  $a : b : c = 2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : (\sqrt{6} + \sqrt{2})$ . 84 a)  $c_1 = 5,4 \text{ cm}$ ,  $c_2 = 1,7 \text{ cm}$ .

87 a)  $|BD| = 10,6 \text{ cm}$ ;  $v_a = 4,0 \text{ cm}$ ;  $v_b = 4,6 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 131^\circ 43'$ ;  $\beta = 48^\circ 17'$ ;  
b)  $|BC| = 9,2 \text{ cm}$ ;  $|BD| = 5,0 \text{ cm}$ ;  $|AC| = 19,4 \text{ cm}$ ;  $v_b = 4,9 \text{ cm}$ ;  $\beta = 152^\circ 49'$ .

88 a)  $\alpha = 85^\circ 28'$ ;  $\beta = 52^\circ 53'$ ;  $\gamma = 127^\circ 07'$ ;  $\delta = 94^\circ 32'$ .

89  $|KN| = 9,5 \text{ cm}$ ;  $|\angle NKL| = 96^\circ 00'$ .

90  $|AB| = 65,9 \text{ m}$ . 91  $31,2 \text{ m}$ . 92  $F = 100 \text{ N}$ ,  $|\angle F F_1| = 32^\circ$ . 93  $|\angle F_1 F_2| = 76^\circ$ .

94  $F_1 = 92 \text{ N}$ ,  $F_2 = 196 \text{ N}$ . 95  $|\angle F_1 F_2| = 55^\circ$ ,  $|\angle F_2 F_3| = 162^\circ$ ,  $|\angle F_1 F_3| = 143^\circ$ .

### 6.17 Vzorce pro obsah trojúhelníku, čtyřúhelníku

96  $S = 5 \text{ cm}^2$ ,  $v_b = 2,5 \text{ cm}$ . 97  $S = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ,  $v_a = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $v_b = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $v_c = \frac{6}{7}\sqrt{21} \text{ cm}$ .

98  $S = 10\sqrt{2} \text{ cm}^2$ ,  $S_1 = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ cm}^2$ . 99  $S = 8 \text{ cm}^2$ ,  $v_a = 1 \text{ cm}$ ,  $v_b = 4 \text{ cm}$ .

100  $S = 15\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . 101  $S = 16(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2 \doteq 6,6 \text{ cm}^2$ .

### 6.18 Vzorce pro poloměry kružnic trojúhelníku opsané a vepsané

102  $r = 3,0 \text{ cm}$ ,  $\varrho = 1,2 \text{ cm}$ . 103  $r = 2,5 \text{ cm}$ . 104  $\varrho = 2 \text{ cm}$ .

105  $\varrho_1 = 2,3 \text{ cm}$ ,  $\varrho_2 = 12,8 \text{ cm}$ ,  $\varrho_3 = 5,7 \text{ cm}$ .

### 6.19 Pravidelné mnohoúhelníky

106 a)  $a = 7,05 \text{ cm}$ ,  $o = 35,3 \text{ cm}$ ,  $S = 85,6 \text{ cm}^2$ . 107 a)  $a = 8,7 \text{ cm}$ ,  $o = 43,6 \text{ cm}$ ,  $S = 130,8 \text{ cm}^2$ .

108 a)  $r = 7,3 \text{ cm}$ ; b)  $\varrho = 6,9 \text{ cm}$ .

109 a)  $S_{A_1 A_2 \dots A_{12}} : S_{S_1 S_2 \dots S_{12}} = (8 - 4\sqrt{3}) : 1$ ; b)  $\frac{S_{A_1 A_2 \dots A_n}}{S_{S_1 S_2 \dots S_n}} = 1 : \cos^2 \frac{180^\circ}{n}$ ;

c)  $S_{\text{vepsaný}} : S_{\text{opsaný}} = \cos^2 \frac{180^\circ}{n}$ .

## 7 Goniometrické rovnice a nerovnice

### 7.1 Goniometrické rovnice

- 1** Základní typ. a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi; \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \pi + 2k\pi \right\}$ ; e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + k\pi \right\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}$ .
- 2** a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 240^\circ + k \cdot 360^\circ; 300^\circ + k \cdot 360^\circ \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 60^\circ + k \cdot 360^\circ; 300^\circ + k \cdot 360^\circ \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 45^\circ + k \cdot 180^\circ \right\}$ .
- 3** a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2k\pi \right\}$ .
- 4** a)  $\{750^\circ 58'; 284^\circ 02'\}$ ; b)  $\{91^\circ 38'; 271^\circ 38'\}$ ; c)  $\{51^\circ 51'; 231^\circ 51'\}$ .
- 5** a)  $\{1,41; 1,73\}$ ; b)  $\emptyset$ ; c)  $\{1,57; 4,72\}$ .
- 6** Substituce na základní typ. Např. v úloze d)  $a = 2x - \frac{\pi}{4}$ , podobně v ostatních případech.
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{40}\pi + \frac{1}{5}k\pi; \frac{7}{40}\pi + \frac{1}{5}k\pi \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{5}\pi + \frac{2}{5}k\pi \right\}$ ;
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{1}{2}\pi + k\pi \right\}$ ; e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{16}\pi + \frac{1}{4}k\pi \right\}$ ;
- g)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}$ ; h)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 1 + k\pi \right\}$ ; i)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{8}\pi + k\pi; \frac{5}{8}\pi + k\pi \right\}$ ; j)  $\emptyset$ .
- 7** Substituce na kvadratickou rovnici. Užijte, že  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ,  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ .
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}k\pi \right\}$ ;
- b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ ;
- c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\}$ ;
- e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + 2k\pi; \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ ; g)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}$ ;
- h)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi; \frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$ ; i)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi \right\}$ ; j)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \arctg 2 + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$ ;
- k)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\pi \right\}$ ; l)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi; \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ .
- 8** a) Dosadte  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ , potom dosadte  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  a udělejte substituci  $a = \sin^2 x$ ; b) analogicky; c) dosadte  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ; d) umocněte závorky, užijte  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ , nezapomeňte podmínky.
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; d)  $\mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}$ .
- 9** a) Nejdříve substitue  $5x = a$ , potom  $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ , další substituce  $\cos^2 a = b$  vede na kvadratickou rovnici.
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi; \frac{4}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2\pi + 6k\pi; 4\pi + 6k\pi \right\}$ ;
- c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{48}\pi + \frac{1}{4}k\pi; \frac{5}{48}\pi + \frac{1}{4}k\pi; \frac{1}{16}\pi + \frac{1}{4}k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \pm \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{3}k\pi; \pm \frac{1}{18}\pi + \frac{1}{3}k\pi \right\}$ .
- 10** Vždy převeďte na jednu stranu, vytkněte. Kdy se součin rovná nule? Úloha f) a dále je na postupné vytýkání.
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi; \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right\}$ ;
- c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi; \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ ;
- e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi; \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi; \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right\}$ ;
- g)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi; \arcsin \frac{2}{5} + 2k\pi; \pi - \arcsin \frac{2}{5} + 2k\pi \right\}$ ; h)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \pi + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{11}{6}\pi + k\pi \right\}$ ;
- i)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$ ; j)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \right\}$ .

- 11** Rovnici dělete  $\cos x$  a dosadte  $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ .
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{40}\pi + \frac{1}{10}k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + k\pi \right\}$ .
- 12** a) Rovnici dělete součinem  $\sin x \cdot \cos x$  a dosadte  $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ . Po substituci  $\operatorname{tg} x = a$  dostanete kvadratickou rovnici. b) Nejdříve dosadte  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ ; c) a dále: nejprve upravte pravou stranu  $2 \cdot 1 = 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$  atd.
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{arctg} 2 + k\pi; -\operatorname{arctg} 3 + k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$ ;
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{arctg} 3 + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$ ; e)  $\emptyset$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi; \operatorname{arctg} 5 + k\pi \right\}$ .
- 13** Užijte vzorec pro dvojnásobný úhel  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , potom v úlohách a), b) vytýkejte, v úlohách c), d) dosadte  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ .
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ ;
- c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$ .
- 14** Za součin  $2 \sin x \cos x$  dosadte  $\sin 2x$ . V úloze e) upravte  $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1^2 - \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$ . V úloze f) upravte  $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$  a rozložte podle vzorce  $A^3 + B^3$ , tj.  $(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 \cdot [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x] = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ .
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{12}\pi + k\pi; \frac{5}{12}\pi + k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\pi \right\}$ ;
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{4} \right\}$ ; e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ .
- 15** Užijte vzorec pro dvojnásobný úhel  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ . V úloze g) upravte  $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2$  a rozložte podle vzorce pro rozklad  $A^2 - B^2$ . Dostanete  $(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x)$  atd. V úloze h) upravte  $\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 - (\cos^2 x)^3$  a rozložte podle vzorce  $A^3 - B^3$  a dále podobně jako v úloze 14 f).
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \right\}$ ;
- c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \frac{7}{6}\pi + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right\}$ ;
- e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \pi + 2k\pi \right\}$ ; g)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ ; h)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$ .
- 16** Užijte vzorce pro dvojnásobný úhel.
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \pi - \operatorname{arctg} 2 + k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ ;
- c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi \right\}$ .
- 17** Bud' užijte substituce  $2x = a$ , nebo užijte  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ ,  $2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$ .
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{11}{24}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{12}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ;
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi \right\}$ ; e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{11}{24}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ;
- g)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \frac{1}{12}\pi + k\pi; \frac{5}{12}\pi + k\pi \right\}$ ; h)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ .
- 18** Bud' užijte substituci  $2x = a$ , nebo užijte  $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$ ,  $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ .
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{8}\pi + k\pi; \frac{7}{8}\pi + k\pi \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right\}$ ; c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{8}\pi + k\pi \right\}$ ;
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{6}\pi + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}$ ;
- f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; g)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ .
- 19** Substituce a), b)  $2x = a$ , v úloze c)  $10x = a$ , v úloze d)  $4x = a$  atd.
- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi; k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi; \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right\}$ ;
- c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{60}\pi + k\frac{\pi}{5}; \frac{1}{12}\pi + k\frac{\pi}{5}; \frac{3}{20}\pi + k\frac{\pi}{5} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{60}\pi + k\frac{\pi}{15} \right\}$ ;
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\frac{\pi}{4}; \frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{5}{16}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi \right\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{k\pi}{3}; \frac{1}{9}\pi + \frac{1}{3}k\pi; \frac{2}{9}\pi + \frac{1}{3}k\pi \right\}$ .

**20** Substituce  $\frac{\pi}{2} = a$ , v úloze d), f)  $\frac{\pi}{4} = a$ , v úloze e)  $\frac{\pi}{8} = a$  atd.

- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 4k\pi; \frac{7}{3}\pi + 4k\pi\};$  b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi; \frac{1}{3}\pi + 4k\pi; \frac{5}{3}\pi + 4k\pi\};$
- c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\pi + 2k\pi; \frac{7}{3}\pi + 4k\pi; \frac{11}{3}\pi + 4k\pi\};$  d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2\pi + 4k\pi; \frac{2}{3}\pi + 8k\pi; \frac{10}{3}\pi + 8k\pi\};$
- e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{28}{3}\pi + 16k\pi; \frac{44}{3}\pi + 16k\pi; 4\pi + 16k\pi\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{4\pi + \frac{16}{3}k\pi\};$
- f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{4k\pi; \frac{2}{3}\pi + 8k\pi; \frac{22}{3}\pi + 8k\pi\}.$

**21** Převedte na jednu stranu, užijte vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí např.

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ . V úloze e) nejdříve užijte, že  $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ . V úloze g) nejdříve sečtěte  $\sin x + \sin 2x = 2 \sin 2x \cos(-x)$ , potom vytkněte. Analogicky dále.

- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{14}\pi + \frac{2}{7}k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\};$  b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi + k\pi\};$  c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{6}k\pi; \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{4}\};$
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{-\frac{3}{7} + \frac{2}{7}k\pi; -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}k\pi\};$  e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{4}{7}k\pi; \frac{2}{5}\pi + \frac{4}{5}k\pi\};$  f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\};$
- g)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{k\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{2}{3}\pi; \frac{1}{2}\pi + k\pi; \pi + 2k\pi\};$
- h)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi; \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi; \frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{3}\pi + k\frac{\pi}{2}\};$
- i)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi; \frac{1}{12}\pi + k\pi; \frac{5}{12}\pi + k\pi\};$  j)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi; \frac{3}{10}\pi + \frac{2}{5}k\pi\}.$

**22** V úloze a) až f) užijte vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí, naopak v úlohách g) až h) užijte součtové vzorce, tj. např. v úloze g) nejprve upravte  $\sin(60^\circ - x) = \sin 60^\circ \cos x - \cos 60^\circ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$  atd.

- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\};$  b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\};$  c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi\};$
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi; \frac{1}{4}\pi + 2k\pi; \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\};$  e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi; 2k\pi\};$
- f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\};$  g)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\arctg \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi\};$  h)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{4}\pi + k\pi\};$
- i)  $\emptyset;$  j)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\};$  k)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\}.$

**23** K dané rovnici dopište rovnici  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , potom substituce  $\sin x = a$ ,  $\cos x = b$  a úlohu řešte jako soustavu. Jiný způsob: substituce  $x = 2a$ , potom užijte vzorce  $\sin 2a$ ,  $\cos 2a$  a dále viz úlohu 12.

- a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\};$  b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi; \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi\};$  c)  $\emptyset;$
- d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi; \pi + \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi\};$  e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi\};$
- f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \pi + \arcsin 0,8 + 2k\pi\};$  g)  $\emptyset;$  h)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + 2k\pi\}.$

**24** a) Užijte vzorce  $A^3 - B^3$ ,  $A^2 - B^2$ . Je-li  $\sin x - \cos x = 0$  dostanete první řešení. Je-li výraz  $\sin x - \cos x \neq 0$  lze závorkou dělit. Po dosazení  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  a postupném vytýkání dostanete další řešení.

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi; \frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\};$$

b) Vzorce  $A^3 + B^3$ ,  $A^2 - B^2$  a postupujte jako v úloze a);  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{4}\pi + k\pi; \pi + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\};$

c) Vzorec  $\cos 2x$ , rozložit;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\};$

d) Upravte  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \sin x \cos x$ , vzorec  $A^3 + B^3$ ;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\};$

e) Odstraňte zlomky, nezapomeňte na podmínky;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\};$

f)  $\sin^4 x + \cos^4 x$  upravte stejně jako v úloze 14 e);  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\};$

g)  $\sin^6 x + \cos^6 x$  upravte stejně jako v úloze 14 f);  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}\};$

h) Dosaděte za  $\tg x$ ,  $\cotg x$ ; nezapomeňte na podmínky;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{1}{12}\pi + k\pi; \frac{5}{12}\pi + k\pi\}.$

i) Odstraňte zlomek, převeďte na jednu stranu, vytkněte;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{1}{4}\pi + k\pi\};$

j) Odstraňte zlomek, potom viz úlohu 12;  $\emptyset;$

k) Odstraňte zlomek, potom viz úlohu 7;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\};$

l) Dosaděte za  $\tg x$ ,  $\sin 2x$ . Upravte  $1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$ . Nezapomeňte na podmínky;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\};$

m)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi; \frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\};$  n)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \frac{1}{4}\pi + k\pi\};$

o)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi; \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}\};$  p)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\};$

V q), s) odstraňte zlomky a dále postupujte jako v úloze 12;

q)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{4}\pi + k\pi; \arctg \frac{3}{2} + k\pi\};$  r)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi; \arctg 3 + k\pi\};$

s) Dosaděte za  $\tg x$ ,  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ . Je-li  $\cos x + \sin x = 0$  dostanete první řešení, je-li  $\cos x + \sin x \neq 0$  můžete dělit. Potom odstraňte zlomek a upravte  $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$ ;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{4}\pi + k\pi; \frac{1}{12}\pi + k\pi; \frac{5}{12}\pi + k\pi\};$

t)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{4}\pi + k\pi\};$  u)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi\};$

v) Užijte, že  $\tg(x + \frac{\pi}{2}) = -\cot x$ , dosaděte za  $\cot x$ ,  $\cos 2x$  a dostanete  $\sin x \cos x + \cos^2 x = 2 \sin^2 x$ . Dále viz úlohu 12;  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi; \pi - \arctg \frac{1}{2} + k\pi\}.$

**25** a) Ze druhé rovnice je  $x - y = \frac{\pi}{3} + k\pi$ , ze soustavy dopočítejte  $x$ , jen pozor, aby řešení bylo v požadovaném intervalu;  $[\frac{2}{3}\pi; \frac{1}{3}\pi];$

b) postup viz a)  $[\frac{17}{12}\pi; \frac{3}{4}\pi], [\frac{3}{4}\pi; \frac{1}{12}\pi], [\frac{7}{4}\pi; \frac{13}{12}\pi];$

c)  $x = \frac{5}{6}\pi - y$ , dosadit do druhé rovnice, součtový vzorec;  $[\frac{5}{6}\pi; 0], [\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{3}\pi];$

d) postup viz c)  $[\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{6}\pi];$

e) Substituji  $\sin x = a$ ,  $\cos x = b$ ;  $[\frac{1}{6}\pi; \frac{1}{2}\pi], [\frac{5}{6}\pi; \frac{1}{2}\pi];$

f) Substituji  $x + 2y = a$ ,  $2x + y = b \Rightarrow a, b$  atd.  $[\frac{8}{9}\pi; \frac{5}{9}\pi]; [\frac{10}{9}\pi; \frac{4}{9}\pi]; [\frac{14}{9}\pi; \frac{11}{9}\pi]; [\frac{16}{9}\pi; \frac{10}{9}\pi].$

## 7.2 Goniometrické nerovnice

**26** a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\};$  b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\};$  c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\};$

d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\};$  e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(\frac{1}{6}\pi + k\pi; \frac{1}{3}\pi + k\pi\};$

f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(\frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi)\}.$

**27** a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\};$  b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(-\frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{1}{4}\pi + k\pi\};$  c)  $R - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\};$

d) R; e)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(\frac{5}{12}\pi + k\pi; \frac{13}{12}\pi + k\pi\};$  f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(-\pi + 4k\pi; \pi + 4k\pi\}.$

**28** Znázorněte na grafu.

a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \frac{1}{4}\pi + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\rangle;$  b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\rangle;$

c)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(\frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi) \cup (\frac{3}{4}\pi + k\pi; \pi + k\pi)\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\rangle.$

**29** a), b) Kdy je součin kladný? Kdy je součin záporný? c) až f) nejprve upravte na součin.

a)  $(0; \frac{\pi}{2}) \cup (\pi; \frac{3}{2}\pi);$  b)  $(\pi; 2\pi) - \{ \frac{3}{2}\pi \};$  c)  $(\frac{\pi}{3}; \pi) \cup (\frac{5}{3}\pi; 2\pi);$  d)  $\{ \frac{\pi}{2} \} \cup (\pi; 2\pi);$

e)  $(0; \pi) \cup (\pi; 2\pi);$  f)  $(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi) \cup (\pi; 2\pi).$

**30** a), b)  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , po substituci kvadratická nerovnice.

a)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\rangle;$  b) R;

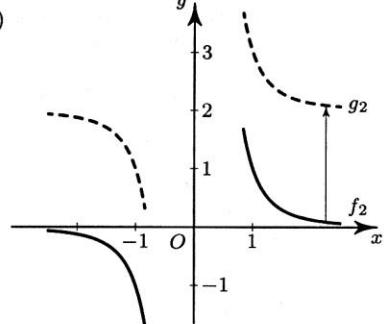
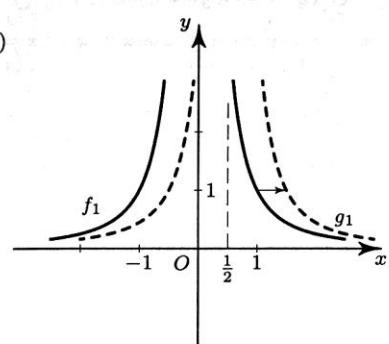
c)  $\cot g x = \frac{1}{\tg x}$ , po substituci kvadratická nerovnice.  $R - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\frac{\pi}{4}\};$

d) Upravte na  $1 + \sin 2x > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x > -\frac{1}{2}$ .  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7}{12}\pi + k\pi \rangle.$

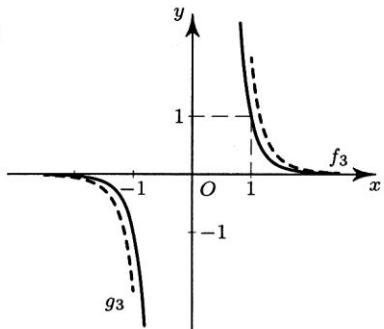
## 8 Mocninné funkce. Lineární lomená funkce

### 8.1 Grafy mocninných funkcí

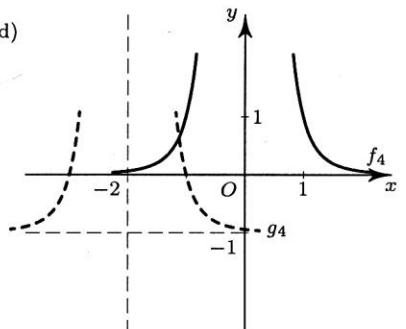
1



c)

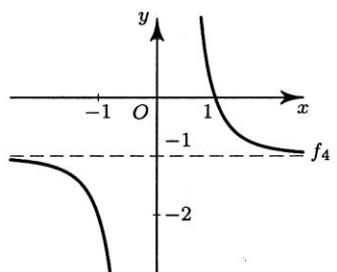
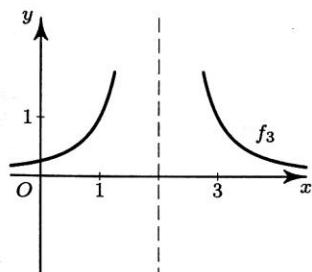
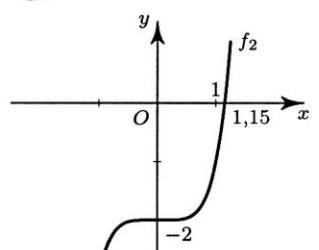
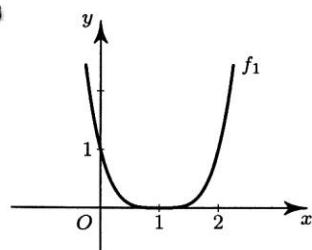


d)

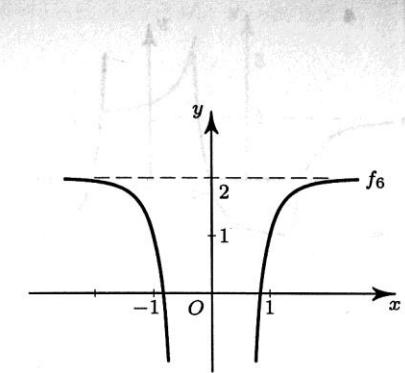
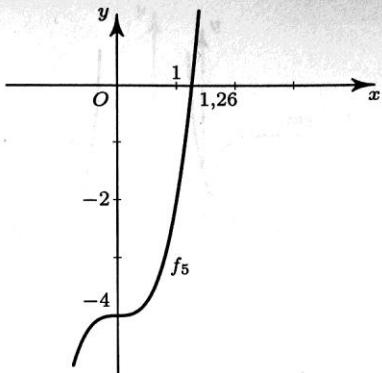


K řešení úlohy 1

2

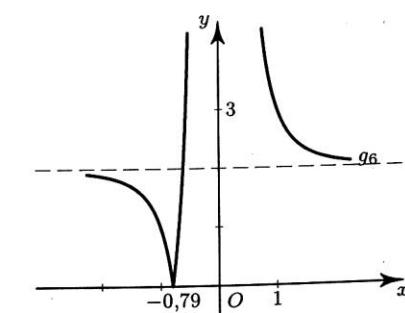
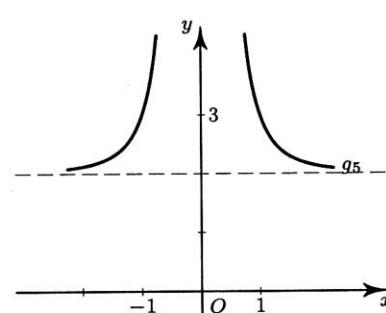
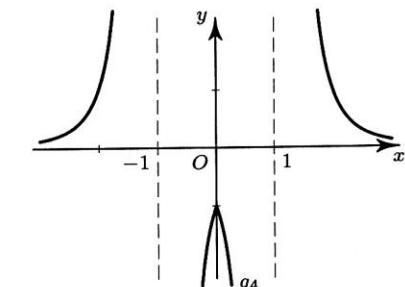
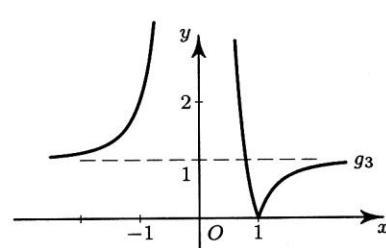
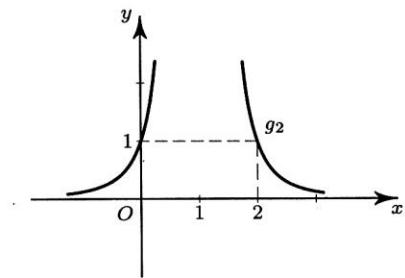
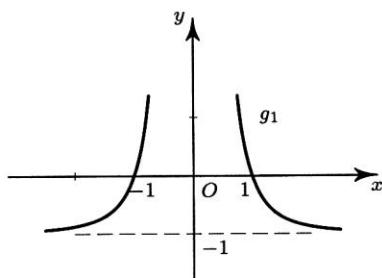


K řešení úlohy 1

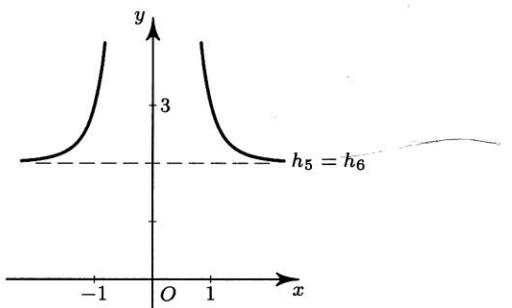
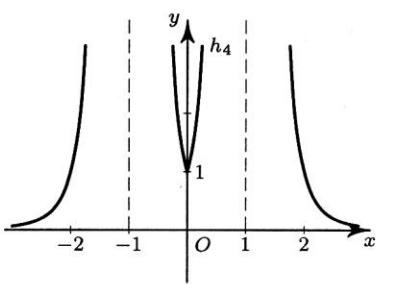
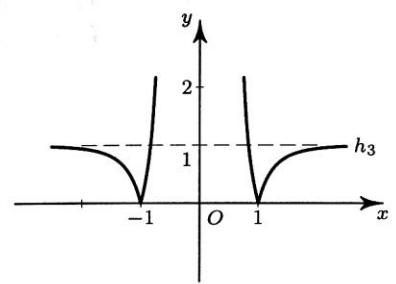
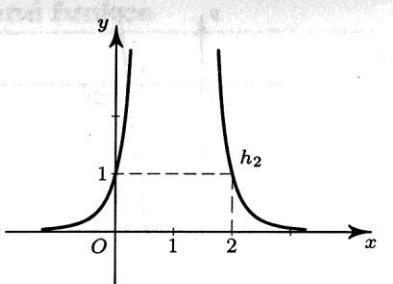
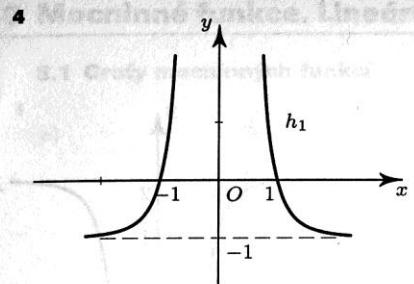


K řešení úlohy 2

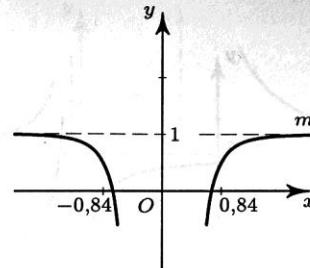
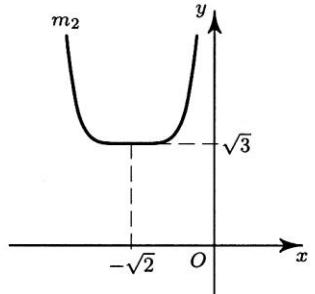
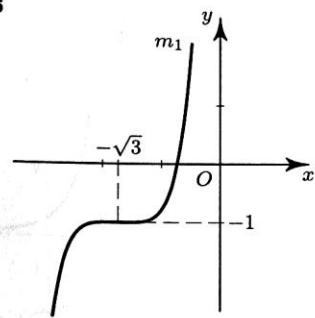
3



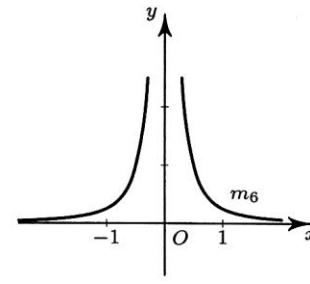
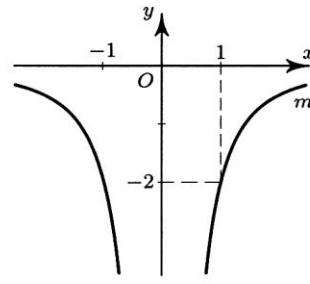
K řešení úlohy 3



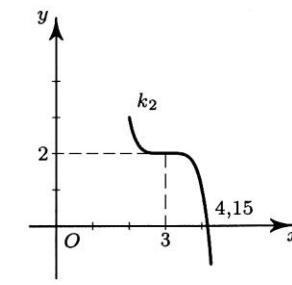
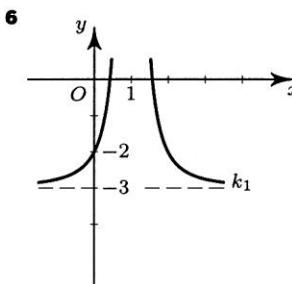
K řešení úlohy 4

**5**

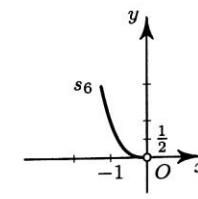
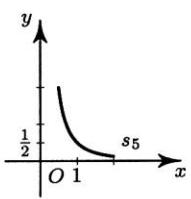
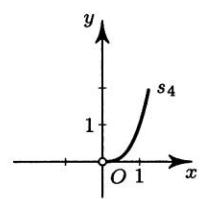
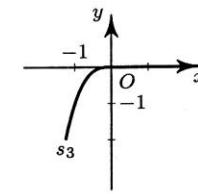
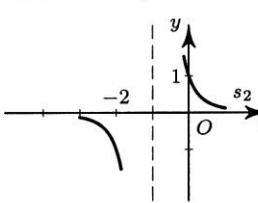
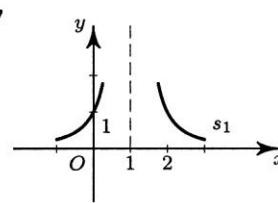
točení obecnou rovnici



K řešení úlohy 5



K řešení úlohy 6

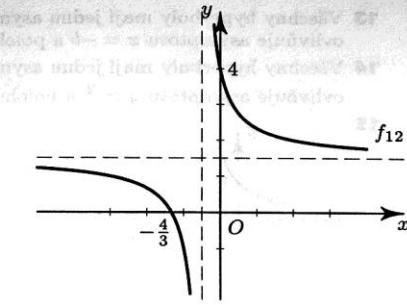
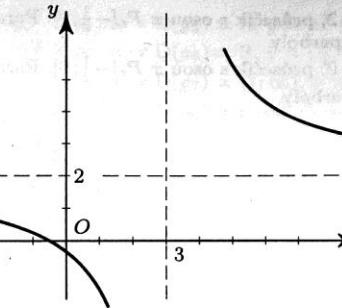
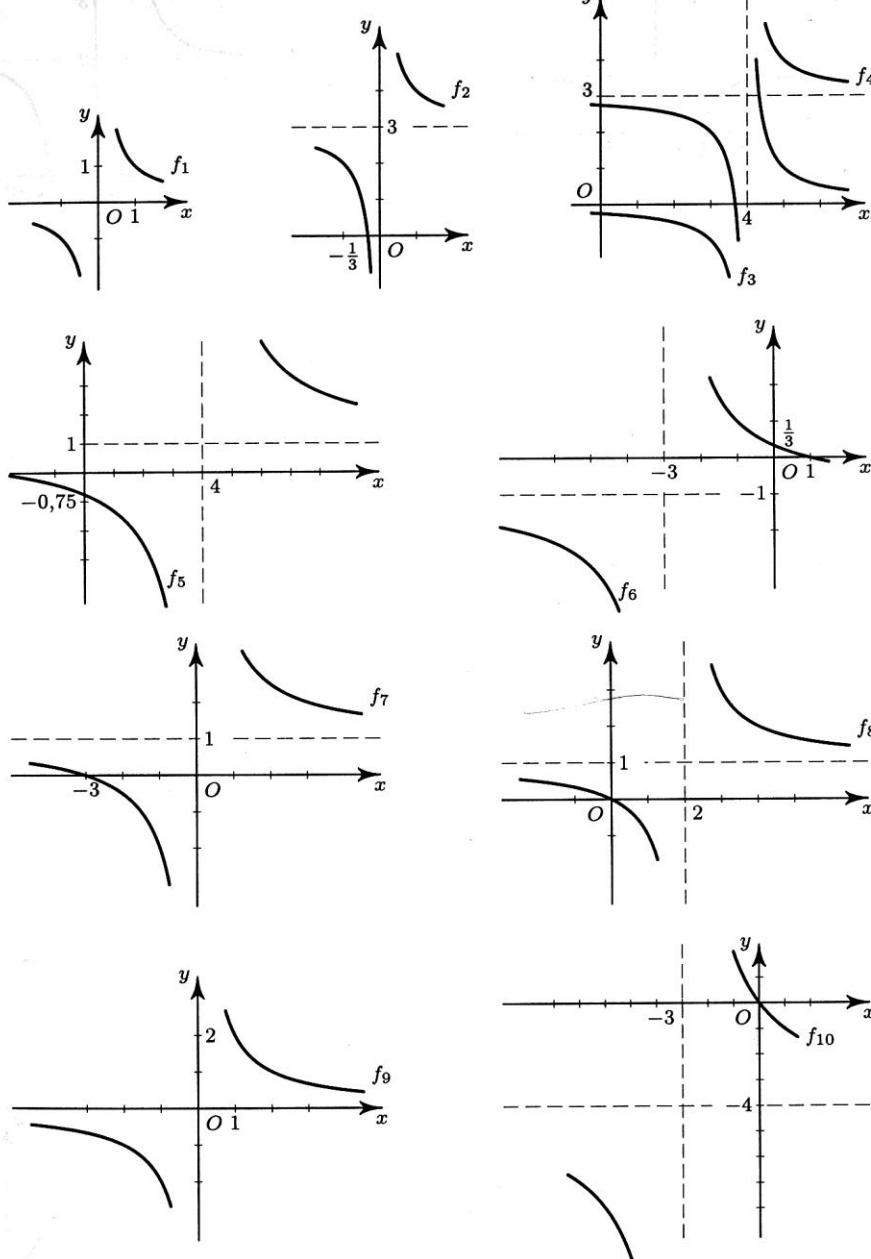


K řešení úlohy 7

- 8** a)  $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$ ; b)  $(-\infty; -1) \cup (0; \infty)$ ; c)  $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ ; d)  $(0; 1)$ ; e)  $(-\infty; 0)$ ; f)  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ ; g)  $(-\infty; -1)$ ; h)  $(-1; 0) \cup (0; \infty)$ .

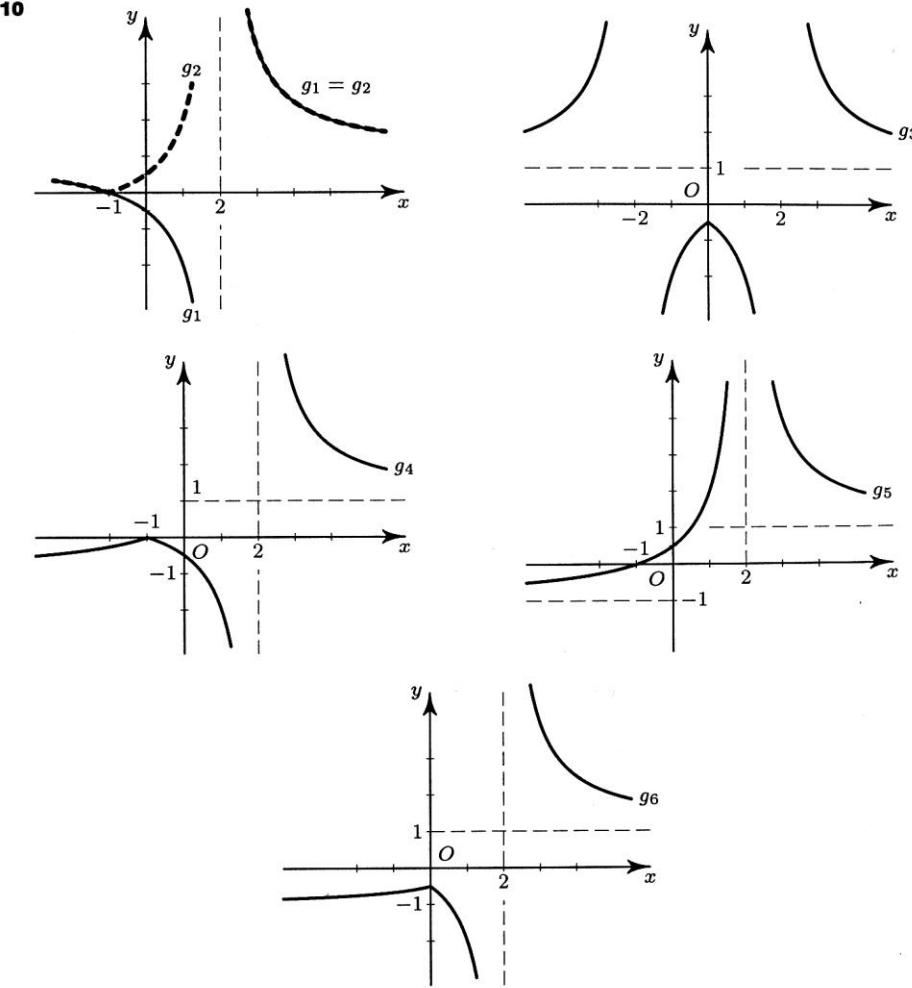
## 8.2 Grafy lineárních lomených funkcí

9



K řešení úlohy 9

10



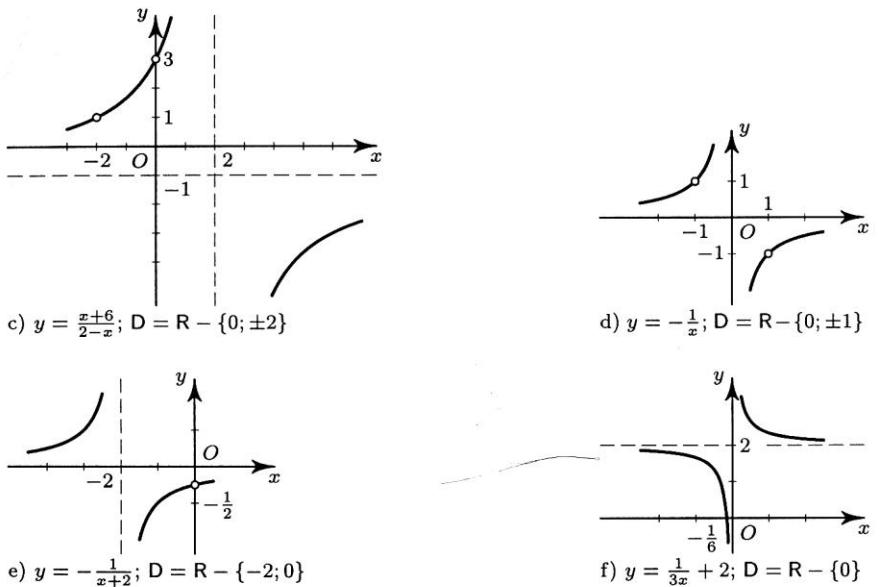
K řešení úlohy 10

11 a)  $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$ ; b)  $(-3; 2)$ ; c)  $(1; 2) \cup (2; 7)$ .

12  $\forall a \in \{-4; -3; -1; 0; 1; 2\}$  je grafem hyperbola. Střed  $S[1; 2]$ , asymptoty:  $x = 1$ ,  $y = 2$ . Parametr  $a$  ovlivňuje polohu větví hyperboly. Pro  $a = -2$  je daná funkce lineární  $y = 2$ .

**13** Všechny hyperboly mají jednu asymptotu  $y = 2$ , průsečík s osou  $x$   $P_x[-\frac{1}{2}; 0]$ . Parametr  $b$  ovlivňuje asymptotu  $x = -b$  a polohu větví hyperboly.

**14** Všechny hyperboly mají jednu asymptotu  $x = 0$ , průsečík s osou  $x$   $P_x[-\frac{1}{2}; 0]$ . Parametr  $c$  ovlivňuje asymptotu  $y = \frac{2}{c}$  a polohu větví hyperboly.



K řešení úlohy 15

### 8.3 Inverzní funkce k funkcím mocninným

- 16**  $f_1^{-1}$  k  $f_1$  ex. např. v  $\mathbb{R}_0^+$ ,  $y = \sqrt{x}$ ;  
 $f_2^{-1}$  k  $f_2$  ex. v  $D(f_2) = \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ;  
 $f_3^{-1}$  k  $f_3$  ex. např. v  $\mathbb{R}_0^+$ ,  $y = \sqrt[6]{x}$ ;  
 $f_4^{-1}$  k  $f_4$  ex. např. v  $\mathbb{R}^+$ ,  $y = \sqrt{x-1}$ ;  
 $f_5^{-1}$  k  $f_5$  ex. v  $D(f_5) = \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $y = \sqrt[3]{x-1}$ ;  
 $f_6^{-1}$  k  $f_6$  ex. např. v  $\mathbb{R}^+$ ,  $y = \sqrt[6]{x-1}$ ;  
 $f_7^{-1}$  k  $f_7$  ex. např. v  $(-2; \infty)$ ,  $y = \sqrt{x+1} - 2$ ;  
 $f_8^{-1}$  k  $f_8$  ex. např. v  $\mathbb{R}_0^+$ ,  $y = \sqrt{4-x}$ ;  
 $f_9^{-1}$  k  $f_9$  ex. v  $D(f_9) = \mathbb{R}$ ,  $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$ .

- 17**  $g_1^{-1}$  k  $g_1$  ex. v  $D(g_1) = \mathbb{R}_0^+$ ,  $y = x^2$ ;  
 $g_2^{-1}$  k  $g_2$  ex. v  $D(g_2) = (-2; \infty)$ ,  $y = x^2 - 2$ ;  
 $g_3^{-1}$  k  $g_3$  ex. v  $D(g_3) = (0; \infty)$ ,  $y = (x-2)^2$ ;  
 $g_4^{-1}$  k  $g_4$  ex. v  $D(g_4) = \mathbb{R}$ ,  $y = x^3$ ;

- $g_5^{-1}$  k  $g_5$  ex. v  $D(g_5) = \mathbb{R}$ ,  $y = x^3 + 2$ ;  
 $g_6^{-1}$  k  $g_6$  ex. v  $D(g_6) = \mathbb{R}$ ,  $y = (\frac{x}{2})^3 + 2$ ;  
 $g_7^{-1}$  k  $g_7$  ex. v  $D(g_7) = (1; \infty)$ ,  $y = (\frac{x-3}{2})^2 + 1$ ;  
 $g_8^{-1}$  k  $g_8$  ex. v  $D(g_8) = (-\infty; 1)$ ,  $y = 1 - (\frac{x}{2})^4$ ;  
 $g_9^{-1}$  k  $g_9$  ex. v  $D(g_9) = \mathbb{R}$ ,  $y = (x+1)^5$ .

### 8.4 Inverzní funkce k funkci lineární lomené

- 18**  $h_1^{-1}$ :  $y = \frac{1}{x}$ ;  $h_2^{-1}$ :  $y = \frac{1}{x+2}$ ;  $h_3^{-1}$ :  $y = \frac{1+2x}{x}$ ;  $h_4^{-1}$ :  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ;  $h_5^{-1}$ :  $y = \frac{x+3}{x-2}$ ;  
 $h_6^{-1}$ :  $y = \frac{x-4}{x+1}$ .

### Počítání s odmocninami a s mocninami

#### 8.5 Počítání s odmocninami

- 19** a) 6; b) 45; c) 2; d)  $-4 - 3\sqrt{15}$ ; e) 0; f) 6; g) 61; h)  $4 + 2\sqrt{10}$ ;  
i)  $-6 - 2\sqrt{15}$ .
- 20** a) 6; b) 2; c) 3; d)  $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ ; e)  $3\sqrt{3} - \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ ; f)  $\frac{1}{3}$ .
- 21** a) 2; b) 2; c) 24; d)  $1 + \sqrt[4]{54} - \sqrt[4]{24}$ ; e)  $2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2}$ ; f)  $\sqrt[4]{5} + 1$ .
- 22** a)  $8\sqrt{3}$ ; b)  $68\sqrt{2}$ ; c)  $2\sqrt{2}$ ; d)  $25\sqrt{2}$ ; e)  $4\sqrt{3}$ ; f)  $30\sqrt{3}$ .
- 23** a)  $9\sqrt[3]{2}$ ; b)  $4\sqrt[3]{5}$ ; c) 0; d)  $-\sqrt[3]{4}$ . **24** a)  $7\sqrt[4]{3}$ ; b)  $4\sqrt[4]{5}$ .
- 25** a)  $\sqrt{28}$ ; b)  $\sqrt{75}$ ; c)  $\sqrt[3]{128}$ ; d)  $\sqrt[4]{324}$ .
- 26** a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; b)  $2\sqrt{6}$ ; c)  $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{21}$ ; d)  $5 + 2\sqrt{5}$ ; e)  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ; f)  $\frac{\sqrt{7}-1}{6}$ ; g)  $10\sqrt{3} + 15$ ;  
h)  $\sqrt{2}$ ; i)  $\frac{4}{3} + \sqrt{2}$ ; j)  $\frac{19-5\sqrt{3}}{22}$ ; k)  $\sqrt{15} - 4$ ; l)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .
- 27** a)  $\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6} + \sqrt{3}$ ; b)  $1 + \sqrt{2}$ .
- 28** a)  $A_1 < B_1$ ; b)  $A_2 = B_2$ ; c)  $A_3 > B_3$ .
- 29**  $v(x_1) = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ ;  $v(x_2) = 2\sqrt{2}$ ;  $v(x_3) = \frac{41}{10}\sqrt{5}$ ;  $v(x_4) = \frac{13}{2} - \frac{11}{6}\sqrt{3}$ ;  
 $v(x_5) = -1 - 3\sqrt{2}$ ;  $v(x_6) = \frac{27}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{5}$ ;  $v(x_7) = 6\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ;  $v(x_8) = \frac{7}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{6}$ ;  
 $v(x_9) = \frac{5}{2} + \frac{9}{4}\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$ .
- 30** a)  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ ; b)  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ ; c)  $\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}$ ; d)  $\frac{1}{10}\sqrt[4]{1000}$ ; e)  $\frac{1}{10}\sqrt{10}$ ; f)  $\frac{1}{10}\sqrt[4]{10}$ ; g)  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ ;  
h)  $3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 3$ ; i)  $\frac{3}{10}\sqrt[3]{36} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{24} + \frac{3}{10}\sqrt[3]{16}$ .
- 31** a) 2; b) 3.
- 32** a)  $3 + 2\sqrt{2}$ ; b)  $81 - 30\sqrt{2}$ ; c)  $85 + 60\sqrt{2}$ ; d)  $37 - 30\sqrt{3}$ ; e)  $20 + 14\sqrt{2}$ ;  
f)  $20\sqrt{2} + 12\sqrt{6}$ ; g)  $9 + 4\sqrt{5}$ ; h)  $7 - 4\sqrt{3}$ ; i)  $7 + 5\sqrt{2}$ .
- 33** a)  $|a|$ ; b)  $10z^2|x^3y|$ ; c)  $|a+b|$ ; d) nelze odmocnit; e)  $|x-3|$ ; f)  $|0,5m+1|$ .
- 34** a)  $\frac{24}{5}\sqrt{5} - 5$ ; b)  $17 + 12\sqrt{3}$ ; c)  $-113 + 84\sqrt{2}$ .
- 35** a)  $2 + \sqrt{3}$ ; b)  $\frac{9}{2}$ ; c)  $3\sqrt{5} - 7$ ; d)  $6\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ ; e) 1; f)  $\frac{33}{4}$ ; g)  $\frac{41}{4}$ .
- 36** a) 1; b)  $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ .

#### 8.6 Počítání s mocninami s celým exponentem

- 37** a)  $2^5$ ; b)  $5^4$ ; c)  $2^{15}$ ; d)  $x^{15}$ ; e)  $x^{2n+2}$ ; f)  $a^3b^7$ .
- 38** a)  $4^2$ ; b)  $7^{n-1}$ ; c)  $2^{-n}$ ; d) 1; e)  $y^n$ ; f)  $(ab)^{1-k}$ .
- 39** a)  $8x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; b)  $\frac{9}{256}$ ; c)  $\frac{16}{3x}$ ,  $x \neq 0$ ; d)  $-x^{20}y^{-10}$ ,  $x, y \neq 0$ ; e)  $(\frac{y}{x})^{12}$ ,  $x, y \neq 0$ ;  
f)  $8x^{12}y^{11}$ ,  $x, y \neq 0$ .
- 40** a) 2; b) 1; c)  $x$ ; d) 2; e)  $\frac{1}{x}$ ; f) neurčitý výraz.
- 41** a) -1; b) -1; c) -1; d) 1; e) 1; f) -1.

42 a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $26\frac{1}{4}$ ; c)  $6\frac{1}{2}$ ; d)  $\frac{1}{36}$ ; e) 49; f)  $\frac{1}{4}$ ; g) 1250; h)  $-\frac{5}{16}$ .

43 a)  $\frac{x^4}{9}$ ,  $x \neq 0$ ; b)  $xy$ ,  $x, y \neq 0$ ; c)  $\frac{15}{8}b^2$ ,  $a, b \neq 0$ ; d)  $\frac{a^4c^6d}{b}$ ,  $a, b, x, y \neq 0$ ;  
e) 4,  $n \neq 0$ ; f)  $(\frac{m}{2})^7$ ,  $m \neq 0$ .

44 a)  $\frac{9}{5}$ ; b)  $5^3 \cdot 3^{4n}$ ; c)  $42^{3n} \cdot 5^{7-n}$ ,  $r, s \neq 0$ .

45 a)  $6 \cdot x^{3n-5} \cdot y^{8n-12}$ ,  $x, y \neq 0$ ; b)  $2^{-8}a^9b^{-13}$ ,  $a, b \neq 0$ ; c)  $3^{-4}r^{-4}s^{10n-2}$ ,  $r, s \neq 0$ .

46 a)  $x^2$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq -6$ ; b)  $y-1$ ,  $y \neq 0$ ,  $y \neq -1$ ; c)  $\frac{a^x+3}{a^x-3}$ ,  $a^x \neq \pm 3$ ,  $y \neq -1$ ; d)  
 $x^{n-1} + x^{-1}y^n$ ,  $x \neq 0$ ,  $x^n \neq y^n$ .

47 a)  $-3(x^{2-n} + x^{-n})$ ,  $x \neq 0$ ; b)  $-\frac{1}{4x^5}$ ,  $x \neq 0$ .

48 a) -25; b)  $\frac{27}{4}$ ; c) 4; d)  $\frac{2+3\sqrt{2}}{4}$ .

## 8.7 Počítání s mocninami s racionálním exponentem

49 a) 2; b) 5; c)  $\frac{1}{3}$ ; d) 4; e) 3; f) 0,001; g) 0,01; h) 0,125; i) 2; j) 1;  
k) -1; l) 0.

50 a)  $x^{\frac{1}{2}}$ ; b)  $x^{\frac{5}{3}}$ ; c)  $x^{\frac{3}{5}}$ ; d)  $x^{-\frac{1}{4}}$ ; e)  $2x^{-\frac{3}{5}}$ .

51 a)  $2^{\frac{11}{12}}$ ; b)  $2^{\frac{1}{4}}$ ; c)  $2^{\frac{3}{22}}$ ; d)  $2^{-\frac{1}{8}}$ ; e)  $2^{\frac{31}{8}}$ ; f)  $2^{\frac{37}{27}}$ .

52 a)  $x^{-\frac{3}{4}}$ ,  $x > 0$ ; b)  $y^{\frac{5}{3}}$ ,  $y > 0$ ; c)  $y^{\frac{1}{2}}$ ,  $y > 0$ ; d)  $x^{-\frac{19}{8}}$ ,  $x > 0$ ; e)  $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$ ,  $x, y > 0$ ;  
f)  $x^{\frac{1}{10}}y^{\frac{33}{10}}$ ,  $x, y > 0$ .

53 a)  $3^{\frac{3}{4}}$ ; b)  $2^{\frac{17}{8}}$ ; c)  $5^{\frac{5}{6}}$ ; d) 11; e)  $5^{\frac{11}{24}}$ ; f)  $7^{-\frac{7}{30}}$ ; g) 1; h)  $2^{\frac{23}{12}}$ .

54 a)  $x^{\frac{3}{4}}$ ,  $x \geq 0$ ; b)  $z^{\frac{17}{8}}$ ,  $z \geq 0$ ; c)  $k^{\frac{5}{6}}$ ,  $k \geq 0$ ; d)  $m, m \geq 0$ ; e)  $y^{\frac{11}{24}}$ ,  $y > 0$ ;

f)  $u^{-\frac{7}{30}}$ ,  $u > 0$ ; g) 1,  $a > 0$ ; h)  $b^{\frac{23}{12}}$ ,  $b > 0$ .

55 a)  $x = \pm 5$ ; b)  $x = \pm \frac{1}{2}$ ; c)  $x = 0,064$ ; d)  $x = 6561$ ; e)  $x = 4$ ; f)  $x = \pm 0,125$ ;  
g)  $x = 27$ ; h)  $x \in R_0^+$ .

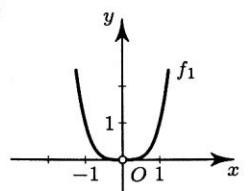
## 8.8 Úpravy výrazů obsahující mocniny a odmocniny

56 a)  $-3(x+4)$ ,  $x > 0 \wedge x \neq 4$ ; b)  $\frac{1}{1-x}$ ,  $x \geq 0 \wedge x \neq 1$ ; c) 8;  $x \geq 0 \wedge x \neq 1$ ;  
d) 1;  $x \geq 0 \wedge x \neq 7$ ; e)  $\frac{x+1}{x-1}$ ,  $x > 0 \wedge x \neq 1$ .

57 a)  $\frac{2x}{7x+10}$ ,  $x \neq -2; -\frac{10}{7}; 0$ ; b) 2;  $x \neq \pm 1; 0$ ; c)  $\frac{x-1}{x^2}$ ,  $x \neq -1; 0$ ; d)  $x^2 + x + 1$ ,  $x \neq 0; 1$ .

58 a)  $\frac{4\sqrt{a}}{1-a}$ ,  $a > 0 \wedge a \neq 1$ ; b)  $b-1$ ;  $b > 0 \wedge b \neq 1$ ; c)  $\frac{1}{c-1}$ ,  $c \neq \pm 1$ ;  
d)  $\sqrt{d}-1$ ;  $d > 0 \wedge d \neq 1$ ; e) 6; f)  $e > 0 \wedge e \neq 1; \frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ .

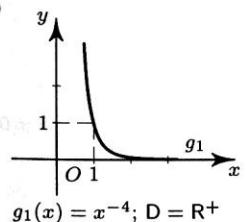
59



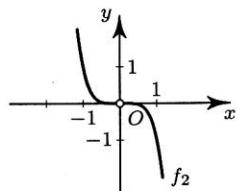
$f_1(x) = x^4$ ;  $D = R - \{0\}$

K řešení úlohy 59

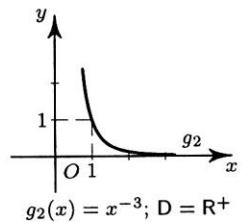
60



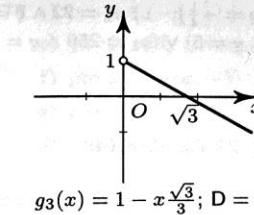
$g_1(x) = x^{-4}$ ;  $D = R^+$



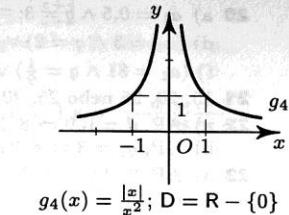
$f_2(x) = -x^5$ ;  $D = R - \{0\}$



$g_2(x) = x^{-3}$ ;  $D = R^+$



$g_3(x) = 1 - x \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $D = R$



$g_4(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ ;  $D = R - \{0\}$

K řešení úlohy 60

## 9 Posloupnosti a řady

### 9.1 Způsoby zadání posloupnosti

1 a) ..., 24, 28, 32, ...; b) ..., 36, 49, 64, ...; c) ..., -1, 1, -1, ...; d) ..., -9, -27, -81, ...; e)  $a_n = n^2$ ;

f) ...,  $a_n = (-1)^n$ ; g) ...,  $a_n = -3^{n-4}$ .

2 a)  $a_n = 2n$ ; b)  $a_n = 2n-1$ ; c)  $a_n = 11n$ ; d)  $a_n = 5n-4$ .

3 a) 3, 5, 7, 9, 11; b)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}$ ; c) 0, 2, 6, 12, 20; d)  $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ ;  
e) -4, -1, 4, 11, 20; f) 1, -2, 3, -4, 5.

4 a) 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...; b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...; c)  $a_n = n^2$ ;  
d) -1, 3, -1, 3, -1, 3, ...; e)  $a_n = 1 + (-1)^n \cdot 2$ .

5 a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...; b) 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...; c)  $a_n = 3^{n-1}$ ;  
d) -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...; e)  $a_n = 2n-5$ .

### 9.2 Vlastnosti posloupností

#### Posloupnost rostoucí, klesající

6 a) Roste; b) klesá; c) roste; d) klesá od 2. členu; e) roste; f) klesá;  
g) neroste, neklesá; h) roste.

#### Posloupnost omezená

7 a) Omez. zdola,  $a_n \geq 2$ ; b) omez.,  $-1 \leq a_n < 0$ ; c) omez. zdola,  $a_n \geq 0$ ;  
d) omez.,  $\frac{7}{2} \leq a_n < 5$ ; e) omez.,  $-1 \leq a_n \leq 1$ ; f) omez.,  $-5 \leq a_n < -1$ .

8 a) 0; b) 7; c)  $\frac{4}{3}$ ; d) 0; e) diverg.; f)  $\frac{1}{2}$ ; g) diverg.; h) diverg.; i) diverg.

### 9.3 Aritmetická, geometrická posloupnost

9 a) AP,  $a_1 = \frac{4}{5}$ ,  $d = \frac{1}{5}$ ; b) AP,  $a_1 = 0$ ,  $d = -1$ ; c) GP,  $a_1 = \frac{2}{9}$ ,  $q = \frac{2}{3}$ ;  
d) není AP, není GP.

10 a) 7, 10, 13, 16, 19, ...; b) 8, 16, 32, 64, 128, ...; c) 5, 3, 1, -1, -3, ...  
AP,  $a_n = 4 + 3n$ ; GP,  $a_n = 2^{n+2}$ ; AP,  $a_n = 7 - 2n$ .

11 a)  $d = \log \frac{1}{2}$ ; b)  $d = \frac{1}{2}$ ; c)  $d = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; d)  $d = 2a + 3$ .

12 a)  $q = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$ ; b)  $q = \frac{1}{2}$ ; c)  $q = \frac{1}{2 \sin x}$ ; d)  $q = b+1$ .

13  $d = \log q$ . 14  $x = 10 \Rightarrow a_1 = 4$ ,  $q = 3$ .

15 a)  $x_1 = -8 \Rightarrow 56, 36, 16$ ,  $x_2 = 1 \Rightarrow 2, 9, 16$ ; b)  $x = 2 \Rightarrow \log 3, \log 6, \log 12$ ;  
c)  $x_1 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

16 a)  $x = \log_2 6 \Rightarrow 1, 6, 36$ ; b)  $x_1 = 100 \Rightarrow -5, -5, 5$ ,  $x_2 = 10^{\frac{3}{14}} \Rightarrow \frac{10}{7}, \frac{15}{7}, \frac{45}{14}$ ;  
c)  $x_1 = \frac{1}{6}\pi + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}, 1, 2\sqrt{3}$ ,  $x_2 = \frac{5}{6}\pi + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1, -2\sqrt{3}$ .

17 a) 21. člen; b) nemá řešení.

18 12. člen.  
19 a)  $a_1 = 3$ ,  $d = 2$ ; b)  $a_1 = 3$ ,  $d = -2$ ; c)  $a_1 = 20$ ,  $d = -5$ ; d)  $a_1 \in \mathbb{R}$ ,  $d = -\frac{a_1}{4}$ ;  
e) nemá řešení; f)  $a_1 = 2$ ,  $d = 0, 1$ ; g)  $(a_1 = 3, d = -1) \vee (a_1 = 2, d = 1)$ ;  
h)  $a_1 = 10$ ,  $d = -2$ ; i)  $(a_1 = -19, d = 6) \vee (a_1 = 23, d = -6)$ .

- 20** a)  $a_1 = 0,5 \wedge q = 3$ ; b)  $(a_1 = 64 \wedge q = \frac{1}{4}) \vee (a_1 = -64 \wedge q = -\frac{1}{4})$ ; c)  $a_1 = 22 \wedge q = 2$ ;  
 d)  $(a_1 = 3 \wedge q = 2) \vee (a_1 = -3072 \wedge q = \frac{1}{2})$ ; e)  $(a_1 = 2 \wedge q = 5) \vee (a_1 = 250 \wedge q = \frac{1}{5})$ ;  
 f)  $(a_1 = 81 \wedge q = \frac{1}{9}) \vee (a_1 = \frac{1}{9} \wedge q = 9)$ .

**21** 15, 20, 25 nebo 25, 20, 15.

**22** a) AP,  $d = 160 \Rightarrow 8, 168, 328, 488, 648$ ;

b) GP,  $q_1 = 3 \Rightarrow 8, 24, 72, 216, 648$  nebo GP,  $q_2 = -3 \Rightarrow 8, -24, 72, -216, 648$ .

**23** a) AP, 2; 3; 4; 5; 6; 8; 8 nebo AP, 8; 6; 8; 5; 6; 4; 3; 2; 2.

b) GP, 2;  $2\sqrt[3]{4}$ ;  $2\sqrt[5]{16}$ ;  $4\sqrt[3]{2}$ ;  $4\sqrt[5]{8}$ ; 8 nebo GP, 8;  $4\sqrt[3]{8}$ ;  $4\sqrt[5]{2}$ ;  $2\sqrt[5]{16}$ ;  $2\sqrt[5]{4}$ ; 2.

**24** 3, 6, 12, 18 nebo 3,  $-\frac{9}{2}, \frac{27}{4}$ , 18. **25** 9, 6, 3,  $\frac{3}{2}$ .

**26** 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. **27**  $n = 22$ . **28**  $n = 10$ .

**29** 3, -6, 12 nebo 12, -6, 3. **30**  $\pm 9, \pm 6, \pm 3$  nebo  $\pm 3, \pm 6, \pm 9$ .

**31** 4, 16, 64 nebo 4, -8, 16. **32** 24 cm, 32 cm, 40 cm.

**33** 1 cm, 4 cm, 16 cm,  $S = 168 \text{ cm}^2$ .

**34**  $a_1 = \frac{1}{4}, d = -\frac{1}{2}, s_{10} = -20, a_{11} + \dots + a_{20} = -70$ . **35** Aspoň 11 členů.

**36**  $d \leq -\frac{2}{3}$ . **37**  $a_1 \geq \frac{5}{2}$ . **38**  $s_{58} = 1711$ . **39**  $s_{24} = 648$ . **40**  $s = 4905$ .

**41**  $a_1 = 1, a_n = 2n - 1, s_n = n^2$ . **42** a)  $a_1 = -6, d = 0,8$ ; b)  $a_1 = 8, d = 2$ ;

c)  $a_1 = 30, d = -3$ . **43**  $a_4 = 4, a_{21} = -30$ . **44**  $q \in \langle -3; 2 \rangle$ . **45**  $n = 5$ .

**46**  $a_1 \in \mathbb{R} - \{0\}, q = 2$ . **47**  $a_1 = 3, d = 4$ . **48**  $a_1 = 18, q = \frac{2}{3}, s_6 = \frac{1330}{27}$ .

**49** a) 2,  $\frac{46}{3}, \frac{86}{3}$ , 42; b) 2, 10, 18, 26, 34, 42.

**50** a) 16, 24, 36, 54, 81; b) 16, -24, 36, -54, 81.

**51** a) Návod:  $a_1 = 4, d = 2, a_n = x = 4 + (n-1) \cdot 2, s_n = 270 = \frac{n}{2}[4 + 4 + (n-1) \cdot 2] \Rightarrow n = 15 \Rightarrow x = 32$ ; b)  $x = 96$ ; c)  $x = 106$ ; d)  $x = 9$ ; e)  $x = 4096$ ; f)  $x = 2$ .

**52** a)  $\{26, 27, 28, \dots\}$ ; b)  $\{35, 36, 37, \dots\}$ ; c)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ; d)  $\{191, 192, \dots\}$ .

**53** a)  $\{45, 46, 47, \dots, 61\}$ ; b)  $\{4, 5, 6, \dots\}$ .

#### 9.4 Zápis y pomocí $\sum$

**54** a)  $\sum_{i=1}^{12} (2i+3)$ ; b)  $\sum_{i=1}^6 (\frac{1}{2})^i$ ; c)  $(-1) \cdot \sum_{i=1}^{19} (3i-1)$ ; d)  $\sum_{i=1}^{11} (-1)^i \cdot 2^{i-1}$ .

**55** a)  $1+2+3+\dots+16=136$ ; b)  $3+7+11+\dots+67=595$ ; c)  $40+42+44+\dots+60=550$ .

**56** a)  $L = 20 + 21 + \dots + 44 = \frac{25}{2}(20+44) = 800$ ,  $P = -20 + (1+2+\dots+40) = 800$ ;

b)  $L = P = 924$ . **57** a) 177 240; b)  $82 + 28\sqrt{2}$ .

**58** a)  $x = 50$ ; b)  $x = 48$ ; c)  $x = -50$ ; d)  $x = \frac{1}{2}$ ; e)  $x = 9$ ; f)  $x = 10$ .

#### 9.5 Užití geometrické posloupnosti

**59** a) 54 000 Kč; b) 53 400 Kč; c) 68 024,40 Kč; d) 65 051,20 Kč. **60** 2,3 %.

**61** Za 12 let. **62** 14 desek. **63** 17 638,40 Kč. **64** a) 65 233,30 Kč; b) 62 714,70 Kč.

**65** 486 752,00 Kč. **66** 87 385,10 Kč. **67** 250 938,40 Kč. **68** a) 229 500,00 Kč;

b) 257 732,40 Kč. **69** a) 10 765,00 Kč; b) 10 787,20 Kč; c) 10 792,40 Kč.

#### 9.6 Nekonečná geometrická řada

**70** a)  $\sum_{i=1}^{\infty} 3^i$ ; b)  $\sum_{i=1}^{\infty} x \cdot (\frac{1}{2})^{i-1}$ ; c)  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot 2^i$ ; d)  $\sum_{i=1}^{\infty} 3 \cdot (x)^{i-4}$ .

**71** a)  $x^2 + x^4 + x^6 + \dots \Rightarrow a_1 = x^2, q = x^2$ ; b)  $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots \Rightarrow a_1 = 4, q = \frac{1}{2}$ ;

c)  $\frac{5}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2} + \dots \Rightarrow a_1 = \frac{5}{x+1}, q = \frac{1}{x+1}$ ;

d)  $\frac{1}{5(x+1)} + \frac{1}{25(x+1)^2} + \dots \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5(x+1)}, q = \frac{1}{5(x+1)}$ .

**72** a)  $a_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}$ , konverg.,  $s = 3$ ; b)  $a_1 = -\frac{1}{3}, q = -\frac{1}{2}$ , konverg.,  $s = -\frac{2}{9}$ ;

c)  $a_1 = 1 + \sqrt{2}, q = \frac{1}{2}$  nebo  $a_1 = \sqrt{2}, q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , konverg.,  $s = 2 + 2\sqrt{2}$ ;

d)  $a_1 = 2, q = \frac{3}{2}$ , diverg., s neex.; e)  $a_1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}, q = \sqrt{5}$  diverg., s neex.;

f)  $a_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}$ , konverg.,  $s = \frac{1}{2}$ ; g)  $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, q = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , konverg.,  $s = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ;

h)  $a_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$ , konverg.,  $s = \frac{2}{3}$ ; i)  $a_1 = -\frac{2}{3}, q = -\frac{3}{2}$ , diverg., s neex.

**73** a) pro  $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  je  $s = \frac{2}{1-2x}$ ; b) pro  $x \in (-5; -3)$  je  $s = -\frac{x+4}{x+3}$ ;

c)  $q = 2$ , vždy diverg.; d) pro  $x \in (0; 1)$  je  $s = \frac{1-2x}{2x}$ ; e)  $q = x^2 + 7$ , vždy diverg.;

f) pro  $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; \infty)$  je  $s = \frac{x^2+8x+16}{x^3+12x^2+48x+63}$ ;

g) pro  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$  je  $s = \frac{1}{x^2-1}$ ; h) pro  $x \in (0,01; 0,1)$  je  $s = -\frac{2 \log x + 3}{2 \log x + 2}$ ;

i) pro  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi)$  je  $s = \frac{2 \sin x}{1 - 2 \sin x}$ .

**74** a)  $\{\frac{3}{10}\}$ ; b)  $\emptyset$ ; c)  $\{\frac{3\sqrt{100}}{10}\}$ ; d)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\}$ .

**75** a)  $\{\frac{3}{2}\}$ ; b)  $\{-\frac{3}{2}\}$ ; c)  $\{-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\}$ ; d)  $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ; e)  $\{\sqrt[4]{8}\}$ ; f)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$ .

**76** a)  $\frac{8}{9}$ ; b)  $\frac{10}{27}$ ; c)  $\frac{511}{495}$ ; d)  $\frac{2311}{90}$ . **77** a) např.  $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots$ ;

b) např.  $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ ; c) např.  $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \dots$ ; d) např.  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

**78** a) 25; b)  $\frac{3}{1+n}$ . **79**  $a = \frac{20}{3}, q = \frac{2}{3}$ . **80** 18π cm. **81** 9π cm. **82** 4π cm.

**83** 4 cm. **84**  $(12 + 6\sqrt{3})$  cm. **85**  $(21 + 3\sqrt{5})$  cm. **86**  $(4 + 4\sqrt{2})$  cm. **87**  $\frac{4}{3}\pi \text{ cm}^2$ .

**88**  $(9 + 9\sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>. **89**  $\frac{432(4+\sqrt{2})}{7}$  cm<sup>3</sup>. **90**  $\frac{288\pi(11+6\sqrt{3})}{13}$  cm<sup>3</sup>.

## 10 Geometrie — konstrukční úlohy

### 10.1 Základní typy bodových množin

**1** a)  $M_1 = k(A; 2 \text{ cm})$ ; b)  $M_2$  je sjednocení dvou kruhových úsečí; c)  $M_3$  je osa úsečky  $AB$ ; d)  $M_4$  je poločávka  $OA$ , kde o je osa úsečky  $AB$ .

**2** a)  $G_1$  je kolmice k  $AB$  v  $B$ , mimo  $B$ ; b)  $G_2$  je Thalet. kruž. nad  $AB$ ; c)  $G_3$  jsou dvě polopřímky mimo  $B$ ; d)  $G_4$  jsou dva kružníc. oblouky, mimo  $A, B$ ; e)  $G_5$  jsou dva kružnicové oblouky, mimo  $A, B$ ; f)  $G_6$  jsou dvě kruhové úseče, mimo  $A, B$ ; g)  $G_7$  je rovina bez dvou kruhových úsečí, mimo  $A, B$ ; h)  $G_8$  je rozdíl dvou kruhových úsečí, mimo  $A, B$ .

**3** Dvě rovnoběžky  $s$  p ve vzdálenosti  $m$ . **4** a) Osa pásu; b) osy úhlů, které  $p, q$  svírají.

### 10.2 Tečna z bodu ke kružnici

**5** Body dotyku jsou průsečíky kružnice  $k$  s Thaletovou kružnicí nad  $SM$ .

**6** Narýsujte libovolnou tětu délky 5 cm, její střed označte  $X$ . Narýsujte kružnici  $k_1(S; r = |SX|)$ . Potom sestrojte tečny z  $M$  ke  $k_1$ .

### 10.3 Konstrukce kružnic požadovaných vlastností

**7**  $S \in l_{1,2}(O; (4 \pm 1,5) \text{ cm}) \cap l_3(M; 1,5 \text{ cm})$ ; a) 2 řešení; b) 1 řešení; c) 0 řešení; d) 2 řešení.

**8**  $S \in l_{1,2}(O; (4 \pm 1,5) \text{ cm}) \cap p_{1,2}; p_{1,2} \parallel p \wedge |p_{1,2}p| = 1,5 \text{ cm}$ ; a) 6 řešení; b) 8 řešení.

**9** Poloměry hledaných kružnic jsou 2 cm. Středy leží na ose pásu a  $l(M; 2 \text{ cm})$ . Úloha má 2 řešení.

**10** a)  $S \in l_{1,2}(O_1; (5 \pm 1) \text{ cm}) \cap l_{3,4}(O_2; (2 \pm 1) \text{ cm})$ . Úloha má 6 řešení.

b)  $S \in l_{1,2}(O_1; (4 \pm 3) \text{ cm}) \cap l_{3,4}(O_2; (2 \pm 1) \text{ cm})$ . Úloha má 2 řešení.

**11** a)  $S \in l_{1,2}(O_1; (4 \pm 3) \text{ cm}) \cap l_{3,4}(O_2; |2 \pm 3| \text{ cm})$ . Úloha má 4 řešení.

b)  $S \in l_{1,2}(O_1; (4 \pm 3) \text{ cm}) \cap l_{3,4}(O_2; |2 \pm 3| \text{ cm})$ . Úloha má 4 řešení.

**12** Poloměry hledaných kružnic jsou 1,5 cm nebo 3,5 cm.

Středy leží na  $l_1(O_1; (2 + 1,5) \text{ cm})$  a na  $p_{1,2} \parallel p \wedge |p_{1,2}p| = 1,5 \text{ cm}$ .

Středy leží na  $l_2(O_2; (3,5 - 2) \text{ cm})$  a na  $p_{3,4} \parallel p \wedge |p_{3,4}p| = 3,5 \text{ cm}$ . Úloha má 4 řešení.

**13** Poloměry hledaných kružnic jsou 1,5 cm.  $S \in l_1(O; (2 + 1,5) \text{ cm}) \cap l_2(M; 1,5 \text{ cm})$ .

Poloměry hledaných kružnic jsou také 3,5 cm.  $S \in l_3(O; (3,5 - 2) \text{ cm}) \cap l_4(M; 3,5 \text{ cm})$ . Úloha má 4 řešení.

## 10.4 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

Vzhledem k tomu, že postup konstrukce může být u řady úloh různý, je uveden jen jeden krátký návod a počet různých trojúhelníků (čtyřúhelníků), které splňují podmínky úlohy.

- 14** a)  $A \in k(S_1; 2,5) \cap G_{45}$ , kde  $G_{45} = \{X \in \varrho; |\angle S_1 XB| = 45^\circ\}$ . Úloha má 1 řešení.  
 b) Těžiště  $T \in BS_1 \wedge |S_1 T| = 2$ ;  $S_{BC} \in k_1(T; \frac{7}{3}) \cap k_2(B; 2)$ . Úloha má 1 řešení.
- 15** a)  $p$  je kolmice bodem  $C_1$  na  $CC_1$ . Potom  $B \in p \cap G_{120}$ , kde  $G_{120} = \{X \in \varrho; |\angle CXC_1| = 120^\circ\}$ ;  $|BA| = 3$ . Úloha má 1 řešení.  
 b)  $S_{AB} \in p \cap k(C; 5,5)$ , kde  $p \perp C_1 C \wedge C_1 \in p$ .  $A \in p \cap G_{60}$ , kde  $G_{60} = \{X \in \varrho; |\angle CXC_1| = 60^\circ\}$ . Úloha má 2 řešení.
- 16** a)  $S \in k_1(A; 4) \cap k_2(B; 4)$ ,  $C \in p \cap l(S; 4)$ , kde  $p \parallel AB$  ve vzdálenosti 4 cm. Úloha má 2 řešení.  
 b)  $C \in p \cap k(S_{AB}; 4)$ , kde  $p \parallel AB$  ve vzdálenosti 3 cm. Úloha má 2 řešení.
- 17** a)  $C \in p \cap k$ , kde  $k$  je Thaletova kruž. nad  $AB$ ,  $p \parallel AB$  ve vzdálenosti 2,5 cm. 2 řešení.  
 b)  $C \in l(S_{AB}; 4) \cap k$ , kde  $k$  je Thaletova kružnice nad  $AB$ . Úloha nemá řešení.  
 c)  $A \mapsto CY \cap G_{60}$ , kde  $G_{60} = \{X \in \varrho; |\angle BXC| = 60^\circ\}$ ,  $\mapsto CY \perp BC$ . Úloha má 1 řešení.  
 d) V pravoúhlém trojúhelníku je  $t_c = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 5$ . Úloha má 1 řešení.  
 e) V pravoúhlém trojúhelníku je  $r = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 6$ . Úloha má 1 řešení.  
 f) V pravoúhlém trojúhelníku je  $r = \frac{c}{2} \Rightarrow$  pro dané hodnoty úloha nemá řešení.  
 g) Nejprve sestrojte pravý úhel, potom  $BC$ . Průsečík rovnoběžek s rameny úhlu ve vzdál. 2 cm je střed kruž. vepsané. Pomocí Thalet. kruž. vedete tečnu z  $B$  ke kruž. vepsané. Úloha má 1 řešení.  
 h) Nejprve sestrojte úhel  $\alpha$ . Průsečík rovnoběžek s rameny úhlu ve vzdál. 1,5 cm je střed  $S$  kruž. vepsané. Z bodu  $S$  sestrojte kolmici na jedno rameno úhlu, pata kolmice je bod  $X$ . Potom  $C \mapsto AX \wedge |CX| = 1,5$ . Úloha 1 řešení.
- 18** a) Umístíte  $AB$ ,  $|AB| = 6$ ;  $C \in k(B; 4,5) \cap \mapsto AX$ ;  $|\angle BAX| = 45^\circ$ . Úloha má 2 řešení.  
 b) Umístíte  $AC$ ,  $|AC| = 8$ ;  $B \in k(S_{AC}; 2,5) \cap \mapsto CY$ ;  $|\angle ACY| = 30^\circ$ . Úloha má 2 řešení.  
 c)  $\triangle ABC$  doplňte na rovnoběžník  $ABCD$ ; sestrojte  $\triangle ABD$ ,  $|AB| = 6$ ,  $|AD| = 3$ ,  $|BD| = 2t_b = 8$ . Úloha má 1 řešení.  
 d)  $\triangle ABS_{BC}$ ,  $|AB| = 3$ ,  $|BS_{BC}| = 2,5$ ,  $|AS_{BC}| = t_a = 4,5$ . Úloha má 1 řešení.  
 e) Označte  $T$  těžiště  $\triangle ABC$ ,  $|AB| = 5$ ,  $|AT| = \frac{2}{3}t_a = 4$ ,  $|BT| = \frac{2}{3}t_b = 2$ . Úloha má 1 řešení.  
 f) Označte  $T$  těžiště  $\triangle ABC$ .  $|BS_{AB}| = 3,5$ ,  $|BT| = \frac{2}{3}t_b = 4$ ,  $|TS_{AB}| = \frac{1}{3}t_c = 1,5$ . Úloha má 1 řešení.  
 g) Označte  $C_1$  patu výšky z  $C$  na  $AB$ ;  $\triangle CC_1 S_{AB}$ ,  $|CC_1| = v_c = 3,5$ ,  $|CS_{AB}| = t_c = 4$ ,  $|\angle CC_1 S_{AB}| = 90^\circ$ . Označte těžiště  $T$  v  $CS_{AB} \wedge |CT| = \frac{8}{3}$ .  $A \mapsto S_{AB} C_1 \cap k(T; \frac{8}{3}t_a = 4)$ . Úloha má 2 řešení.  
 h)  $\triangle ABC$  doplňte na rovnoběžník  $ABXC$ . Označte  $T$  těžiště  $\triangle ABC$ ,  $T_1$  označte těžiště  $\triangle BXC$ . Potom můžete sestrojit  $\triangle TBT_1$ ,  $|TB| = \frac{2}{3}t_b = 4,2$ ,  $|T_1B| = \frac{2}{3}t_c = 3,6$ ,  $|TT_1| = \frac{2}{3}t_a = 4$ . Úloha má 1 řešení.  
 i) Sestrojte dvě rovnoběžky  $p$ ,  $q$  ve vzdálenosti  $v_a = 6,5$ . Na  $p$  libovolně vyznačte bod  $A$ . Potom  $B \in q \cap k(A; 7)$ . Bod  $C$  je průsečík ramene úhlu  $\alpha$  a přímky  $q$ . Úloha má 2 řešení.  
 j) Sestrojte dvě rovnoběžky  $p$ ,  $q$  ve vzdálenosti  $v_a = 4,5$ . Na  $p$  libovolně vyznačte bod  $A$ . Potom  $B \in q \cap k(A; 5)$ .  $C \in q \wedge |BC| = 6$ . Úloha má 2 řešení.  
 k) Sestrojte dvě rovnoběžky  $p$ ,  $q$  ve vzdálenosti  $v_c = 3$ . Na  $p$  libovolně vyznačte bod  $A$ . Potom  $S_{AB} \in p \wedge |AS_{AB}| = \frac{c}{2} = 2$ ,  $C \in q \cap k(S_{AB}; 4,5)$ . Úloha má 2 řešení.  
 l) Sestrojte dvě rovnoběžky  $p$ ,  $q$  ve vzdálenosti  $v_a = 3$ . Na  $p$  libovolně vyznačte bod  $A$ . Potom  $B \in q \cap k(A; 4)$ ,  $S_{BC} \in q \cap l(A; 3,5)$ . Úloha má 2 řešení.  
 m) Sestrojte dvě rovnoběžky  $p$ ,  $q$  ve vzdálenosti  $v_a = 4$ . Na  $p$  libovolně vyznačte bod  $A$ . Potom  $B \in q \cap k(A; 5)$ ,  $C \in q \cap l(S_{AB}; 3,5)$ . Úloha má 2 řešení.  
 n) Sestrojte dvě rovnoběžky  $p$ ,  $q$  ve vzdálenosti  $v_a = 4$ . Na  $p$  libovolně vyznačte bod  $A$ . Potom  $B \in q \cap k(A; 5)$ ,  $C \in q \cap l$ , kde  $t \parallel AB$  ve vzdálenosti  $v_c = 3$ . Úloha má 2 řešení.  
 o)  $\triangle ABC$  doplňte na rovnoběžník  $ABXC$ . Sestrojte  $\triangle ABX$ ,  $|AB| = 3,5$ , výška na  $AB$  je  $v_c = 3$ ,  $|AX| = 2t_a = 4$ . Úloha má 2 řešení.  
 p) Sestrojte dvě rovnoběžky  $p$ ,  $q$  ve vzdálenosti  $v_a = 3,5$ . Na  $p$  libovolně vyznačte bod  $A$ . Potom  $B \in q \cap k(A; 6)$ . Sestrojte Thaletovu kružnici  $k$  nad  $AB$ ,  $B_1 \in l(B; 5,5) \cap k$ ,  $C \in \mapsto AB_1 \cap q$ . Úloha má 2 řešení.  
 q) Umístíte  $AB$ ,  $|AB| = 8$ ;  $C \in p \cap G_{120}$ , kde  $p \parallel AB$  ve vzdálenosti 1,5 cm,  $G_{120} = \{X \in \varrho; |\angle AXB| = 120^\circ\}$ . Úloha má 2 řešení.  
 r) Umístíte  $AB$ ,  $|AB| = 8$ ;  $C \in k(S_{AB}; 4,7) \cap G_{75}$ , kde  $G_{75} = \{X \in \varrho; |\angle AXB| = 75^\circ\}$ . Úloha má 2 řešení.

- s) Umístíte  $CS_{AB}$ ;  $|CS_{AB}| = t_c = 7,5$ . Na  $t_c$  vyznačte těžiště  $T$ ,  $|TC| = 4$ ;  $A \in k(T; \frac{2}{3}t_a = 5) \cap G_{45}$ , kde  $G_{45} = \{X \in \varrho; |\angle CXS_{AB}| = 45^\circ\}$ . Úloha má 2 řešení.  
 t) Umístíte  $CC_1$ ,  $|CC_1| = 4$ , sestrojte kolmici  $p$  bodem  $C_1$  na  $CC_1$ .  $A \in p \cap G_{60}$ , kde  $G_{60} = \{X \in \varrho; |\angle CXC_1| = 60^\circ\}$ .  $B \in p \cap G_{45}$ , kde  $G_{45} = \{X \in \varrho; |\angle CXC_1| = 45^\circ\}$ . Úloha má 1 řešení.  
 u)  $\triangle ABC$  doplňte na rovnoběžník  $AYBC$ . Umístíte  $CY$ ,  $|CY| = 2t_c = 8$ .  $A \in G_{60} \cap G_{105}$ , kde  $G_{60} = \{X \in \varrho; |\angle CXS_{CY}| = 60^\circ\}$ ,  $G_{105} = \{X \in \varrho; |\angle CXY| = 60^\circ + 45^\circ\}$ . Úloha má 1 řešení.  
 v) Nejprve sestrojte úhel  $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$ . Potom je úloha v) stejná jako úloha u). Úloha má 1 řešení.  
**19** a) Sestrojte  $k(S; 4)$ . Na  $k$  vyznačte libovolně bod  $A$ ,  $B \in k \cap l(A; 7,5)$ . Úloha má 4 řešení.  
 b) Sestrojte  $k(S; 4)$ . Na  $k$  vyznačte libovolně bod  $A$ ,  $B \in k \cap l(A; 7)$ . Sestrojte Thaletovu kružnici  $k_1$  nad  $AB$ .  $A_1 \in k_1 \cap l_1(A; 3)$ ,  $C \in \mapsto BA_1 \cap k$ . Úloha má 2 řešení.  
 c) Sestrojte  $k(S; 4)$ . Na  $k$  vyznačte libovolně bod  $A$ ,  $B \in k \cap l(A; 7,5)$ .  $C \in k \cap l_1(S_{AB}; 4,5)$ . Úloha má 2 řešení.  
 d)  $\triangle AA_1 C$ ,  $|AA_1| = 5$ ,  $|\angle ACA_1| = 45^\circ$ ,  $|\angle AA_1 C| = 90^\circ$ . Úloha má 1 řešení.  
**20** a) Umístíte  $AB$ , sestrojte úhel  $\alpha = 45^\circ$ . Střed kružnice vepsané leží na průsečíku rovnoběžek s rameny úhlu  $\alpha$  ve vzdálenosti 1,5. Pomocí Thalet. kruž. sestrojte tečny z bodu  $B$  ke kružnici vepsané. Úloha má 1 řešení.  
 b) Umístíte úhel  $\beta = 60^\circ$ . Střed kružnice vepsané leží na rovnoběžkách s rameny úhlu  $\beta$ . Rovnoběžka s jedním ramenem úhlu  $\beta$  ve vzdálenosti  $v_c = 4$  proti druhé rameně v bodě  $C$ . Pomocí Thalet. kruž. sestrojte tečny z bodu  $C$  ke kružnici vepsané. Úloha má 1 řešení.  
**21** a)  $\triangle ABS$ ,  $a = 6$ ,  $|\angle ASB| = 120^\circ$ ,  $|AB| = \frac{1}{2}v_a = 1,5$ . Úloha má 2 řešení.  
 b) Umístíte  $BD$ , bodem  $S_{BD}$  sestrojte přímku tak, aby svírala s  $BD$  úhel  $45^\circ$ .  $C \in p \cap k(B; 4)$ . Úloha má 1 řešení.  
**22** a) Umístíte  $AB$ .  $C \in p \cap k(B; 4)$ , kde  $p \parallel AB$  ve vzdálenosti 3 cm. Úloha má 2 řešení.  
 b)  $\triangle ABS$  ( $S$  je průsečík úhlopříček),  $|AS| = 3$ ,  $|BS| = 2$ ,  $|\angle ASB| = 90^\circ$ . Úloha má 1 řešení.  
**23** a)  $\triangle AXC$ ,  $|AX| = 8 + 3$ ,  $|CX| = |BD| = 7$ ,  $|AC| = 6$ ;  $B \in AX \wedge |AB| = 8$ . Bodem  $C$  vedete rovnoběžku s  $AB$ , bodem  $B$  vedete rovnoběžku s  $XC$ . Úloha má 1 řešení.  
 b)  $\triangle AXC$ ,  $|AX| = 6 + 4$ ,  $|AC| = 5$ ,  $|\angle ACX| = 120^\circ$ ;  $B \in AX \wedge |AB| = 6$ . Bodem  $C$  rovnoběžku s  $AB$ , bodem  $B$  rovnoběžku s  $XC$ . Úloha má 1 řešení.  
 c)  $\triangle AYD$ ,  $|AY| = 7 - 2$ ,  $|YD| = 4$ ,  $|AD| = 3$ . Úloha má 1 řešení.  
 d)  $\triangle ABD$ ,  $(6, 6, 4)$ ;  $C \in p \cap G_{120}$ , kde  $p \parallel AB \wedge D \in p$ ,  $G_{120} = \{X \in \varrho; |\angle BXD| = 120^\circ\}$ . Úloha má 1 řešení.  
**24** a)  $\triangle ABD$ ,  $|AB| = 7$ ,  $|BD| = 5$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ;  $C \in k(A; 8) \cap \mapsto DX$ ,  $|\angle ADX| = 150^\circ$ . Úloha má 2 řešení.  
 b)  $\triangle ABC$ ,  $|AC| = 6$ ,  $|BC| = 5$ ,  $|\angle BAC| = \alpha$ ;  $D \in k(C; 5) \cap l$ , kde  $l$  je Thalet. kruž. nad  $AC$ . Úloha má 2 řešení.  
 c)  $\triangle BCD$ ,  $|BC| = 6$ ,  $|CD| = 3$ ,  $|\angle BCD| = 30^\circ$ ;  $A \in k(C; 5) \cap G_{30}$ , kde  $G_{30} = \{X \in \varrho; |\angle BCD| = 30^\circ\}$ . Úloha nemá řešení, protože čtyřúhelník je nekonvexní.  
 d)  $\triangle ACD$ ,  $(4, 5, 6)$ .  $B \in l \cap p$ , kde  $l$  je Thaletova kružnice nad  $AC$ ,  $p \perp AC \wedge D \in p$ . Úloha má 1 řešení.

## 10.5 Konstrukce úseček

- 25**  $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ ,  $\sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}$ ,  $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$  atd.  
**26** a)  $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ ; b)  $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ ; c)  $\sqrt{24} = \sqrt{5^2 - 1^2}$ ; d)  $\sqrt{12} = \sqrt{4^2 - 2^2}$ .  
**27** Např. a)  $\sqrt{6} = \sqrt{3 \cdot 2}$ ; b)  $\sqrt{12} = \sqrt{6 \cdot 2}$ ; c)  $\sqrt{17} = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2}$ ; d)  $\sqrt{18} = \sqrt{6 \cdot 3}$ .  
**28** Užijte redukční úhel. **29** 2 řešení,  $|AX| = 1,5|AB|$ .  
**30** Úsečku 15 cm rozdělte v poměru 2 : 3 : 4.  
**31** a) Pyth. věta; b) Pyth. věta; c)  $x$  je úhlopříčka čtverce o straně  $a$ ; d)  $x$  dvojnásobná výška rovnostran.  $\triangle$  o straně  $a$ ; e) Euklid. věta; f) Euklid. věta; g) podobnost; h) podobnost.  
**32** Ve všech případech užijte podobnost.

## 10.6 Shodná zobrazení

- 33** Středová souměrnost;  $S(M)$ :  $p \rightarrow p'$ ;  $Y \in q \cap p'$ .

34 Osová souměrnost;  $O(q): p \rightarrow p'$ ;  $Y \in p \cap p'$ .

35 Otočení;  $R(M; \pm 60^\circ): q \rightarrow q'$ ;  $Y \in p \cap q'$ .

36 Posunutí;  $T(\mathbf{AB}): k \rightarrow k'$ ;  $Y \in p \cap k'$ . Nebo  $T(\mathbf{BA}): k \rightarrow k'_1$ ;  $Y \in p \cap k'_1$ .

37 Středová souměrnost;  $S(M): k \rightarrow k'$ ;  $C \in p \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.

38 Otočení;  $R(M; \pm 90^\circ): k \rightarrow k'$ ;  $C \in p \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.

39 Osová souměrnost;  $O(\leftrightarrow PM): k \rightarrow k'$ ;  $C \in p \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.

40 Otočení;  $R(M; \pm 60^\circ): k \rightarrow k'$ ;  $B \in p \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.

41 Posunutí;  $T(\mathbf{OM}): k \rightarrow k'$ ;  $L \in p \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.

42 Osová souměrnost;  $O(\leftrightarrow PM): k \rightarrow k'$ ;  $A \in p \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.

43 Otočení;  $R(A; \pm 60^\circ): \square KLMN \rightarrow \square K'L'M'N'$ ;  $B \in \square KLMN \cap \square K'L'M'N'$ . Úloha má 2 řešení.

44 Otočení;  $R(C; \pm 120^\circ): k_2 \rightarrow k'_2$ ;  $A \in k_1 \cap k'_2$ . Úloha má 2 řešení.

45 Otočení;  $R(T; \pm 120^\circ): k_1 \rightarrow k'_1$ ;  $B \in k_2 \cap k'_1$ . Úloha má 2 řešení.

46 Otočení. Sestrojte libovolnou tělivu  $KL$  délky 6 cm,  $A' \in \leftrightarrow KL \cap k(O; 3)$ ,  $R(O; \times A'OA): K \rightarrow X$ ,  $L \rightarrow Y$ : a) 2 řešení; b) 2 řešení.

47 Posunutí. V  $\triangle ABC$  vyznačte výšku  $CC_1$ ;  $O' \in CC_1 \cap m$ , kde  $m$  je kolmice z  $O$  na  $CC_1$ . Potom  $T(OO'): k \rightarrow k'$ ;  $X \in AC \cap k' \wedge Y \in BC \cap k' \Rightarrow p = \leftrightarrow XY$ . Úloha má 1 řešení.

### Užití středové a osové souměrnosti ke konstrukci trojúhelníků

48 Středová souměrnost;

a)  $k(C; 5)$ ;  $S(S_1): k \rightarrow k'$ ;  $B \in k' \cap l(C; 3,5)$ . Úloha má 1 řešení.

b)  $G_{30} = \{X \in \varrho; |\times CXS_1| = 30^\circ\}$ ;  $S(S_1): G_{30} \rightarrow G'_{30}$ ;  $B \in G'_{30} \cap G_{45}$ , kde  $G_{45} = \{X \in \varrho; |\times CXS_1| = 45^\circ\}$ . Úloha má 2 řešení.

c)  $k(C; 8)$ ;  $S(S_1): k \rightarrow k'$ ;  $B \in k' \cap G_{30}$ , kde  $G_{30} = \{X \in \varrho; |\times CXS_1| = 30^\circ\}$ . Úloha má 2 řešení.

d) Těžiště  $T \in CS_1$ ,  $|CT| = 2$ ;  $k(T; \frac{2}{3}t_b = 5)$   $S(S_1): k \rightarrow k'$ ;  $A \in k' \cap G_{30}$ , kde  $G_{30} = \{X \in \varrho; |\times CXS_1| = 30^\circ\}$ . Úloha má 2 řešení.

49 Osová souměrnost;

a)  $\triangle ABX$ ,  $|AB| = 5$ ,  $|BX| = a + b = 10$ , výška na  $BX$  je 3;  $C \in BX \cap o$ , kde  $o$  je osa strany  $AX$ . Úloha má 2 řešení.

b)  $\triangle XBC$ ,  $|XB| = b + c = 10$ ,  $|\times XBC| = \beta = 60^\circ$ ,  $|\times BXC| = \frac{\alpha}{2} = 22^\circ 30'$ . Potom  $A \in XB \cap o$ , kde  $o$  je osa strany  $XC$ . Úloha má 1 řešení.

c)  $\triangle XYC$ ,  $|XY| = b + c + a = 12$ ,  $|\times CYX| = \frac{\alpha}{2}$ ,  $|\times XYC| = \frac{\beta}{2}$ .  $A \in XY \cap o_1$ , kde  $o_1$  je osa strany  $XC$ ,  $B \in XY \cap o_2$ , kde  $o_2$  je osa strany  $YC$ . Úloha má 1 řešení.

d)  $\triangle KLC$ ,  $|KL| = b + a + c = 12$ ,  $C \in p \cap G_{120}$ , kde  $p \parallel KL$  ve vzdálenosti 3 cm,  $G_{120} = \{X \in \varrho; |\times KXL| = 120^\circ\}$ ; úhel  $KCL$  je  $120^\circ$ , protože  $|\times KCL| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2} = 120^\circ$ . Označme  $o_1, o_2$  osy stran  $KC, LC$ . Potom  $A \in o_1 \cap KL$ ,  $B \in o_2 \cap KL$ . Úloha má 2 řešení.

### 10.7 Skládání osových souměrností

50 Složením dostaneme:

- a) posunutí dané vektorem  $p = (4; 0)$ ; d) otočení, střed  $S[1; 1]$  o  $\alpha = -90^\circ$ ;
- b) posunutí dané vektorem  $p = (-4; 0)$ ; e) středovou souměrnost, střed  $S[2; 0]$ ;
- c) středovou souměrnost, střed  $S[1; 2]$ ; f) identitu.

### 10.8 Hledání minimálního součtu úseček

51 a)  $O(\leftrightarrow AB): K \rightarrow K'$ ; potom  $X \in AB \cap K'L$ .

b)  $O(\leftrightarrow BC): K \rightarrow K'$ ;  $O(\leftrightarrow AB): L \rightarrow L'$ ; potom  $X \in AB \cap K'L'$ ,  $Y \in BC \cap K'L'$ .

c)  $O(\leftrightarrow CD): K \rightarrow K'$ ;  $O(\leftrightarrow AB): L \rightarrow L'$ ; potom  $X \in AB \cap K'L'$ ,  $Y \in CD \cap K'L'$ .

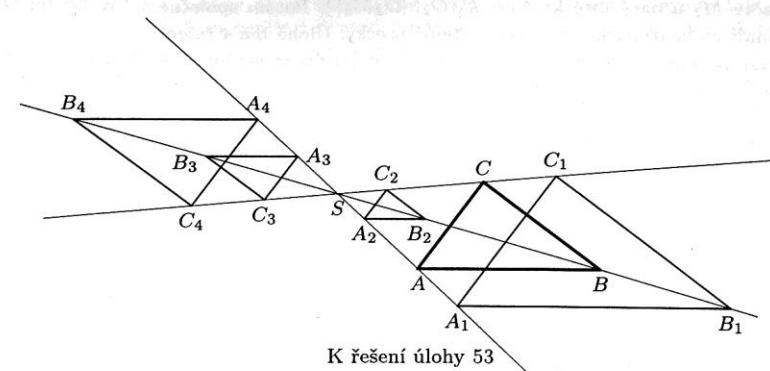
52 a) 4 řešení, postup jako v 51a), volba stěny — 4 možnosti.

b) 4 řešení, postup jako v 51b), volba dvojice stěn — 4 možnosti.

c) 2 řešení, postup jako v 51c), volba dvojice protilehlých stěn — 2 možnosti.

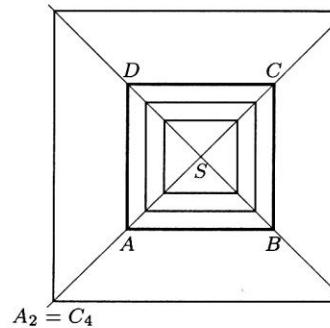
### 10.9 Stejnolehlost

53



K řešení úlohy 53

54



K řešení úlohy 54

55 Strany hledaného trojúhelníku tvoří střední příčky daného  $\triangle ABC$ .

- 56 a)  $k_a(S_1; 3 \text{ cm})$ ,  $S_1 \in SM \wedge |S_1M| = 3 \text{ cm}$ ;
- b)  $k_b(S_2; 2 \text{ cm})$ ,  $S_2 \in SM \wedge |S_2M| = 2 \text{ cm}$ ;
- c)  $k_c(S_3; 1 \text{ cm})$ ,  $S_3 \in SM \wedge |S_3M| = 1 \text{ cm}$ ;
- d)  $k_d(S_4; 2 \text{ cm})$ ,  $S_4 \in \leftrightarrow SM \wedge |S_4M| = 6 \text{ cm} \wedge |S_4M| = 2 \text{ cm}$ .

### Středy stejnolehlosti dvou úseček

- 57 a)  $S_1 \in \leftrightarrow AD \cap \leftrightarrow BC$ ,  $S_2 \in \leftrightarrow AC \cap \leftrightarrow BD$ , 2 středy stejnolehlosti;
- b)  $S \in AD \cap BC \vee S \in AC \cap BD$ , 1 střed stejnolehlosti.

58 Narýsujte libovolný  $\triangle K LX$ . Potom narýsujte dva podobné trojúhelníky:  $\triangle K LX \sim \triangle M NY$ ,  $\triangle K LX \sim \triangle NM Z$ .

Hledané středy leží:  $S_1 \in \leftrightarrow KM \cap \leftrightarrow XY$ ,  $S_2 \in \leftrightarrow KM \cap \leftrightarrow XZ$ .

### Středy stejnolehlosti dvou kružnic

- 59 Narýsujte dva libovolné rovnoběžné průměry  $AB$ ,  $CD$  daných kružnic. Potom narýsujte středy stejnolehlosti úseček  $AB$ ,  $CD$ .

- 60 a)  $\kappa = \frac{1}{4}$ ; b)  $\kappa = 4$ ; c)  $\kappa = -\frac{1}{4}$ ; d)  $\kappa = -4$ .

### Užití stejnolehlosti dvou kružnic v konstrukčních úlohách

- 61 Narýsujte středy stejnolehlosti  $S_1$ ,  $S_2$  daných kružnic, potom z bodů  $S_1$  a  $S_2$  vedte pomocí Thaletovy kružnice tečny ke kružnici  $k_1$  nebo ke  $k_2$ .

- 62** V kružnici  $k_1$  narýsujte libovolnou tětu délky 4 cm, její střed označte  $M_1$ . Narýsujte kružnici  $k'_1(O_1; |O_1M_1|)$ . Podobně vyznačte tětu dlouhou 4 cm v kružnici  $k_2$ , její střed označte  $M_2$  a narýsujte kružnici  $k'_2(O_2; |O_2M_2|)$ . Potom společné tečny kružnic  $k'_1, k'_2$  vytínají na kružnicích požadované stejné úsečky. Úloha má 4 řešení.
- 63** Narýsujte libovolnou kružnici  $l(L; r)$ , která se dotýká ramen úhlu  $AVB$ . Označte  $M_1, M_2$  průsečíky kružnice  $l$  s přímkou  $VM$ . Přímky vedené bodem  $M$  rovnoběžně s  $M_1L, M_2L$  protínají osu úhlu  $AVB$  v bodech  $S_1, S_2$ , což jsou středy hledaných kružnic.
- 64** Nemusí se užit stejnolehlosti. Jednodušší je bodem  $M$  vést kolmici na osu  $\angle AVB$ , průsečíky kolmice s rameny úhlu označte  $P, Q$ . Potom hledané kružnice jsou dvě, kružnice  $\Delta VPQ$  vepsaná a přípisaná.
- 65** Středem  $O$  sestrojte kolmici  $q$  k přímce  $p$ . Průsečíky kolmice  $q$  s kružnicí  $k$  označte  $X, Y$ .  $S_1 \in \leftrightarrow XT \cap k, S_2 \in \leftrightarrow YT \cap k$ . Body  $S_1, S_2$  jsou středy stejnolehlosti kružnice dané a hledané. Středy  $O_1, O_2$  hledaných kružnic leží na kolmici  $q$  k přímce  $p$  v bodě  $T$  a na osách úseček  $TS_1, TS_2$ . Poloměry jsou  $O_1S_1, O_2S_2$ .

### Konstrukce úsečky dělené daným bodem v určitém poměru

- 66**  $H(M; \kappa = -2)$ :  $(\rightarrow VA) \rightarrow (\rightarrow V'A'), Y \in \rightarrow VB \cap \rightarrow V'A'$ . Úloha má 1 řešení.
- 67** a) Bod  $X$  leží na obvodu čtverce  $ABCD$  a na obrazu čtverce  $ABCD$  ve stejnolehlosti  $H(M; \kappa = -\frac{3}{2})$ . Úloha má 2 řešení.  
b) Bod  $Y$  leží na obvodu čtverce  $ABCD$  a na obrazu čtverce  $ABCD$  ve stejnolehlosti  $H(M; \kappa = -2)$ . Úloha má 2 řešení.
- 68**  $H(M; \kappa = -\frac{1}{3})$ :  $k \rightarrow k', X \in k \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.
- 69** a)  $H(M; \kappa = \frac{3}{4})$ :  $k \rightarrow k', X \in k \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.  
b)  $H(M; \kappa = \frac{2}{3})$ :  $k \rightarrow k', Y \in k \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.
- 70**  $H(M; \kappa = \frac{1}{2})$ :  $k \rightarrow k', X \in k \cap k'$ . Úloha má 2 řešení.
- 71**  $H(M; \kappa = -\frac{1}{2})$ :  $k_1 \rightarrow k'_1, Y_1 \in k_2 \cap k'_1 \vee H(M; \kappa = -2)$ :  $k_1 \rightarrow k''_1, Y_2 \in k_2 \cap k''_1$ . Úloha má 2 řešení.

### Užití stejnolehlosti při konstrukci trojúhelníků

- 72** a) Pomocný  $\triangle A'B'C'$ :  $a' = 4, b' = 5, \gamma = 60^\circ$ . Vyznačte výšku  $v'_c$  v  $\triangle A'B'C'$ . Potom  $H(C; \kappa = \frac{v'_c}{v'_c})$ :  $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$ .  
b) Pomocný  $\triangle A'B'C'$ :  $b' = 7, c' = 6, \alpha = 45^\circ$ . Vyznačte výšku  $v'_c$  v  $\triangle A'B'C'$ . Potom  $H(C; \kappa = \frac{v'_c}{v'_c})$ :  $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$ .  
c) Pomocný  $\triangle A'B'C'$ :  $\alpha = 75^\circ, \gamma = 45^\circ$ . Sestrojte kružnici vepsanou  $\triangle A'B'C'$ . Vyznačte její střed  $S$  poloměr  $g'$ . Potom  $H(S; \kappa = \frac{g'}{g'})$ :  $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$ .  
d) Pomocný  $\triangle A'B'C'$ :  $\alpha = 60^\circ, \gamma = 60^\circ$ . Sestrojte kružnici vepsanou  $\triangle A'B'C'$ . Vyznačte její střed  $S$  poloměr  $r'$ . Potom  $H(S; \kappa = \frac{r'}{r'})$ :  $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$ .  
e) Pomocný  $\triangle A'B'C'$ :  $a' = 7, b' = 3, c' = 5$ . Vyznačte výšku  $v'_c$  v  $\triangle A'B'C'$ . Potom  $H(C; \kappa = \frac{v'_c}{v'_c})$ :  $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$ .  
f) Pomocný  $\triangle A'B'C'$ :  $a' = 4, b' = 3, c' = 5$ . Sestrojte kružnici vepsanou  $\triangle A'B'C'$ . Vyznačte její střed  $S$  poloměr  $r'$ . Potom  $H(S; \kappa = \frac{r'}{r'})$ :  $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$ .  
g) Pomocný  $\triangle A'B'C'$ :  $a' = 5, b' = 6, c' = 5$ . Sestrojte kružnici vepsanou  $\triangle A'B'C'$ . Vyznačte její střed  $S$  poloměr  $g'$ . Potom  $H(S; \kappa = \frac{g'}{g'})$ :  $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$ .  
h) Sestrojte úhel  $XA'Y, |\angle XA'Y| = \alpha = 45^\circ$ . Na jednom ramenu vyznačte úsečky délky  $|A'B_1| = 3, |B_1C'| = 4$ . Sestrojte kolmici na  $A'B_1$  bodem  $B_1$ , její průsečík s druhým ramenem označte  $B_2$ . Potom  $H(B_1; \kappa = \frac{u_b}{|B_1B_2|})$ :  $A' \rightarrow A, C' \rightarrow C, B \in \rightarrow AB_2 \cap p$ , kde  $p \parallel AB_1$  ve vzdálenosti  $v_b$ .

### Užití stejnolehlosti k vepisování útvarů

- 73** Narýsujte pomocný čtverec  $K_1L_1M_1N_1$  tak, aby  $K_1L_1 \parallel AB, M_1 \in BC \wedge N_1 \in AC$ . Potom  $K \in AB \leftrightarrow CK_1, L \in AB \leftrightarrow CL_1$ .  $KL$  je strana hledaného čtverce.
- 74** Střed úsečky  $AB$  označte  $S_1$ . Narýsujte pomocný čtverec  $K_1L_1M_1N_1$  tak, aby  $K_1L_1 \subset AB$  a střed úsečky  $K_1L_1$  byl v bodě  $S_1$ . Potom  $M \in \leftrightarrow S_1M_1 \cap k \wedge N \in \leftrightarrow S_1N_1 \cap k$ .  $MN$  je strana hledaného čtverce.
- 75** Narýsujte pomocný obdélník  $K_1L_1M_1N_1$  tak, aby platilo:  $K_1 \in BS, L_1 \in AS \wedge K_1L_1 \parallel AB \wedge |M_1L_1| = 2|K_1L_1|$ . Potom  $M \in \leftrightarrow SM_1 \cap k, N \in \leftrightarrow SN_1 \cap k$ .

### Konstrukce na omezené nákresné

- 76, 77, 78** Na papíře zvolte libovolný bod  $S$ , zvolte koeficient stejnolehlosti  $\kappa$ . Ve zvolené stejnolehlosti nakreslete obraz zadání (koeficient stejnolehlosti  $\kappa$  zvolte tak, aby nedostupný bod už byl na papíře.) Proveďte požadovanou konstrukci a výsledek zobrazte ve stejnolehlosti se středem  $S$  a koeficientem  $\frac{1}{\kappa}$ .

### 9.10 Skládání rotace a stejnolehlosti

- 79**  $R(M; \pm 90^\circ)$ :  $k \rightarrow k_1$ , potom  $H(M; \kappa = 2)$ :  $k_1 \rightarrow k_2$ .  $B \in p \cap k_2$ . Úloha má 2 řešení.
- 80**  $R(M; \pm 45^\circ)$ :  $k \rightarrow k_1$ , potom  $H(M; \kappa = \sqrt{2})$ :  $k_1 \rightarrow k_2, A \in p \cap k_2$ . Úloha má 2 řešení.

## 11 Geometrie — výpočty

### 11.1 Trojúhelníková nerovnost

- 1**  $c \in (2; 14)$ . **2**  $|AB| \in (0; 20)$ . **3**  $a \in (2; 14)$ .
- 4** Důkaz pro  $v_c$ . Použijte trojúhelníkovou nerovnost na  $\triangle ACC_1, \triangle BCC_1, C_1$  je pata výšky z  $C$  na  $AB$ , potom obě nerovnosti sečte.
- 5** Doplňte  $\triangle ABC$  na rovnoběžník  $AXBC$  a použijte trojúhelníkovou nerovnost na  $\triangle CAX$ .
- 6** Užijte trojúhelníkové nerovnosti na  $\triangle ABT, \triangle BCT, \triangle ACT$ , kde  $T$  je těžiště. Nerovnosti sečte. Potom doplňte  $\triangle ABC$  na rovnoběžník  $AXBC$ , užijte trojúhelníkovou nerovnost na  $\triangle CAX$ , doplňte  $\triangle ABC$  na rovnoběžník  $ABYC$ , užijte trojúhelníkovou nerovnost na  $\triangle ABY$ , doplňte  $\triangle ABC$  na rovnoběžník  $ABCZ$ , užijte trojúhelníkovou nerovnost na  $\triangle ABZ$ . Nerovnosti sečte.
- 7**  $\triangle ABC$  doplňte na rovnoběžník  $ABA_1C$ . Označte  $T$  těžiště  $\triangle ABC$ ,  $T_1$  těžiště  $\triangle BA_1C$ . Pro  $\triangle TT_1C$  platí trojúhelníková nerovnost, proto lze  $\triangle ABC$  sestrojit.
- 8** Z délek výšek odvodte poměr délek stran. Platí  $a : b : c = 10 : 5 : 4$ .  $\triangle ABC$  nelze sestrojit.

### 11.2 Úhly střídavé, souhlasné, vedlejší, vrcholové

- 9** a)  $\alpha = 70^\circ, \beta = \gamma = 65^\circ, \delta = 110^\circ$ ; b)  $\varphi = 100^\circ, \psi = 80^\circ, \vartheta = 120^\circ$ .

### 11.3 Úhly v trojúhelníku

- 10** Bodem  $C$  vede rovnoběžku se stranou  $AB$ . Vyznačte střídavé úhly s  $\alpha, \beta$ .
- 11** Dopočítejte  $|\angle BMC| = \frac{\beta}{2}$ . **12**  $60^\circ$ . **13**  $|\angle AOB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ .
- 14** Dopočítejte úhly v  $\triangle KLM$  ( $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ ).
- 15** Součet úhlů ve čtyřúhelníku např.  $ASDP$  je  $360^\circ$ .  $S$  je střed kružnice  $k$ ,  $P$  je průsečík tečen.
- 16**  $S_{AB}$  je střed přepony  $AB$ , bod  $C_1$  je pata kolmice z vrcholu  $C$  na  $AB$ , bod  $O$  je průsečík osy pravého úhlu s  $AB$ .  $|\angle CAB| = |\angle ACS_{AB}| = |\angle C_1CB| = \alpha$ . Proto  $|\angle C_1CO| = |\angle S_{AB}CO| = 45^\circ - \alpha$ .

### 11.4 Shodnost trojúhelníků

- 17**  $\triangle CAH \cong \triangle KAB$  podle věty  $sus$ ,  $s = b, u = \alpha + 60^\circ, s = c$ .
- 18**  $\triangle CBP \cong \triangle TBA$  podle věty  $sus$ ,  $s = a, u = \beta + 90^\circ, s = c$ .
- 19** a)  $sus, s = a, u = \alpha, s = b$ ; b)  $sus, s = b, u = \alpha + 90^\circ, s = a$ .
- 20** a)  $Ssu, S = |VM|$  (společná),  $s = |MX_1| = |MY_2|, u = 90^\circ$ ;  
b)  $usu, u = 90^\circ, s = |MX_1| = |MY_2|, uu$  — shodné vrcholové úhly.

### 11.5 Podobnost trojúhelníků

- 21** Platí a), c). Trojúhelníky jsou podobné podle věty  $uu$ .  $u = |\angle SAB| = |\angle SCD|, u = |\angle ABS| = |\angle CDS|$ . Neplatí b), protože je uvedeno nesprávné pořadí vrcholů.

**22**  $\triangle ABC \sim \triangle ASAB S_{AC} \sim \triangle S_{BC} S_{AC} S_{AB} \sim \triangle S_{AB} BS_{BC} \sim \triangle S_{AC} S_{BC} C$  (uu). Všechny trojúhelníky mají vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**23**  $\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$  podle věty uu  $\Rightarrow |A_1C| : |AC| = |B_1C| : |BC|$ ,  $\gamma$  je společný  $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ .

**24**  $x = a \cdot (2\sqrt{3} - 3)$ .

**25** 2 řešení:  $x_1 = \frac{1}{2}a \cdot (3 - \sqrt{3})$ ,  $y_1 = \frac{1}{4}a \cdot (3 - \sqrt{3})$ ;  $x_2 = \frac{1}{13}a \cdot (4\sqrt{3} - 3)$ ,  $y_2 = \frac{2}{13}a \cdot (4\sqrt{3} - 3)$ .

**26** Označte  $a_1$  ( $a_2$ ) délku strany šestiúhelníku vepsaného (opsaného)  $\Rightarrow a_2 : a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} : 1$ .

**27**  $|S_1 S_2| = 12$  cm.

**28**  $\triangle BCA \sim \triangle BLC_1 \sim \triangle C_1KA \sim \triangle C_1CL \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{|BL|}{|C_1L|} \wedge \frac{a}{b} = \frac{|C_1K|}{|AK|} \wedge \frac{a}{b} = \frac{|C_1L|}{|C_1K|} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{|BL|}{|C_1L|} \cdot \frac{|C_1K|}{|AK|} \cdot \frac{|C_1L|}{|C_1K|} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{|BL|}{|AK|}$ .

**29** Je-li  $a' : a = k$ , potom  $S_{\triangle A'B'C'} : S_{\triangle ABC} = k^2$ . **30**  $|AM| = (8 - 4\sqrt{2})$  cm.

**31** a)  $|p AB| = v \cdot (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ ; b)  $|CP| : |p AB| = (\sqrt{2} + 1) : 1$ .

**32** a)  $|SB_1| : |B_1C| = 9 : 16$ ; b)  $|SB_1| : |B_1C| = a^2 : 4b^2$ ; c)  $|AB| : |BC| = 2 : 1$ .

## 11.6 Pythagorova věta a Euklidovy věty

**33** a) Je pravoúhlý; b) není pravoúhlý; c) není trojúhelník.

**34** Ovězte platnost Pythagorovy věty.

**35**  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ = a^2 + b^2$ ;  $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos \alpha = c^2 + b^2 - 2cb \frac{b}{c} = c^2 - b^2$ ;  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - 2ac \frac{a}{c} = c^2 - a^2$ ; což je vždy Pythagorova věta.

**36**  $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ . **37**  $c = 16\frac{2}{3}$  cm,  $a = 13\frac{1}{3}$  cm.

**38** Ovězte platnost Pythagorovy věty pro  $\triangle CLS$ .

**39**  $a_1$ ,  $(S_1)$  strana (obsah) čtverce vepsaného,  $a_2$ ,  $(S_2)$  strana (obsah) čtverce opsaného. Potom  $a_1 : a_2 = \sqrt{2} : 2$ ,  $S_1 : S_2 = 1 : 2$ .

**40** Užijte Pythagorovu větu na  $\triangle EAK$ ,  $|\angle EAK| = 90^\circ$ .

**41** a)  $|BD| = 10$  cm; b)  $|DA_1| = 3,6$  cm; c)  $|BA_1| = 6,4$  cm; d)  $|AA_1| = 4,8$  cm; e)  $|A_1A_2| = 3,84$  cm.

**42** a)  $|MT_1| = 6\sqrt{2}$  cm; b)  $|T_1T_2| = 4\sqrt{2}$  cm; c)  $|S, T_1T_2| = 1$  cm.

**43** a)  $|T_1T_2| = 1,5$  cm; b)  $|T_1T_2| = 2\sqrt{15}$  cm;  $|T_3T_4| = 2\sqrt{7}$  cm.

**44**  $t_b = 2\sqrt{6}$  cm. **45** 2 řešení  $|DX_1| : |X_1C| = 1 : 4$ ;  $|DX_2| : |X_2C| = 4 : 1$ .

**46**  $|P_1P_2| = 3\sqrt{7}$  cm.

**47** Z bodu M sestrojte kolmici na AB a na BC. Užijte Pythagorovu větu na pravoúhlé trojúhelníky, které takto dostanete.

## 11.7 Středový a obvodový úhel

**48**  $75^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ . **49**  $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$ . **50** Platí. **51**  $60^\circ$ . **52** a)  $\alpha = 20^\circ, \gamma = 120^\circ, \delta = 40^\circ$ ; b)  $80^\circ$ . **53**  $\beta = 90^\circ, \delta = 112^\circ 30', \varepsilon = 90^\circ, \kappa = 67^\circ 30'$ . **54**  $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ .

## 11.8 Mocnost bodu ke kružnici

**55** a) Trojúhelníky jsou podobné podle věty uu; shodné obvodové úhly  $|\angle BAD| = |\angle BCD|$ , shodné vrcholové úhly  $|\angle APB| = |\angle CPD|$ .  
b) Poměry odpovídajících stran podobných trojúhelníků jsou stejné.

**56** a) Trojúhelníky jsou podobné podle věty uu; společný úhel u vrcholu M, shodné obvodové úhly  $|\angle MAD| = |\angle MCB|$ .  
b) Poměry odpovídajících stran podobných trojúhelníků jsou stejné.

**57** a) Označte  $|\angle BAT| = \alpha$ , potom  $|\angle BST| = 2\alpha \Rightarrow |\angle STB| = 90^\circ - \alpha$ . Protože  $|\angle STM| = 90^\circ$ , musí být  $|\angle BTM| = \alpha$ .  
b) Trojúhelníky jsou podobné podle věty uu.  
c) Z podobnosti podle b) plyne:  $|MA| : |MT| = |MT| : |MB|$ .

## 11.9 Aritmetický a geometrický průměr

**58** Aritmetický průměr:  $\frac{a+b}{2} = 5$ , geometrický průměr:  $\sqrt{ab} = 4$ .

**59** a)  $|SC| = t_c = \frac{c}{2} = \frac{c_a + c_b}{2}$ ; b) Euklidova věta o výšce...  $|CC_1| = \sqrt{c_a \cdot c_b}$ .

**60** a)  $|MS| = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$ ; b) Mocnost bodu ke kružnici...  $|MT|^2 = |MA| \cdot |MB| = a \cdot b$ .

## 12 Stereometrie

### 12.1 Vzájemná poloha dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, tří rovin

**1** a) Mimoběžky; b) různoběžky; c) různé rovnoběžky; d) mimoběžky.

**2** a) Přímka je různoběžná s rovinou; b) přímka je rovnoběžná s rovinou,  $p \cap \varrho = \emptyset$ ; c) přímka leží v rovině; d) přímka leží v rovině.

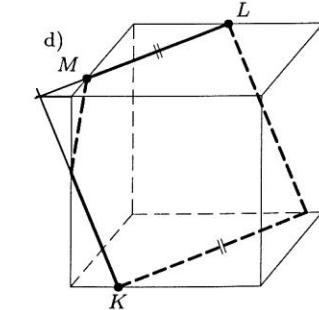
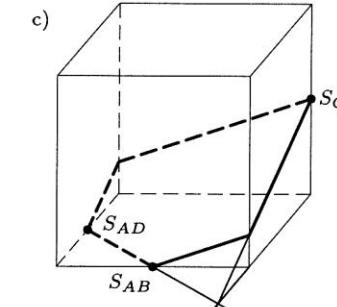
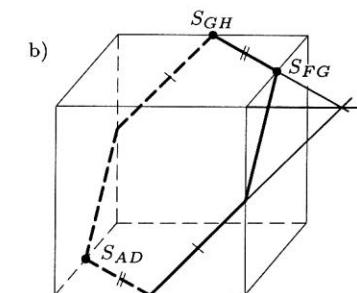
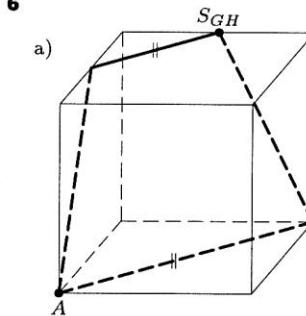
**3** a) Různoběžné roviny; b) různé rovnoběžné roviny; c) různoběžné roviny; d) shodné roviny.

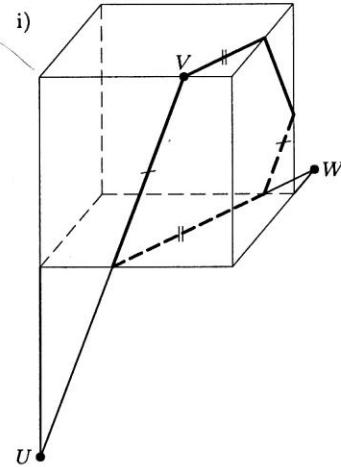
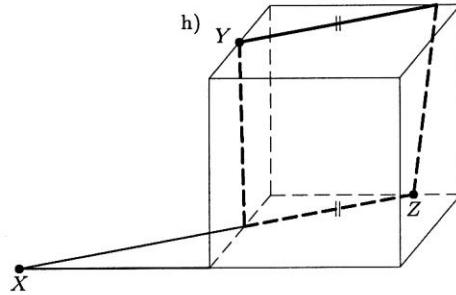
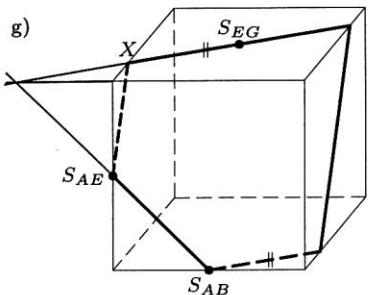
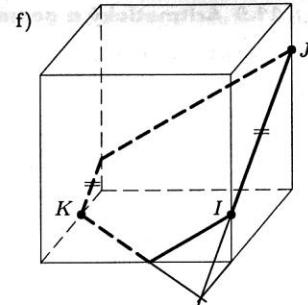
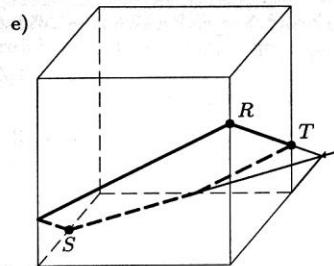
**4** a) Tři různoběžné roviny, společný jeden bod (střed krychle), tři roviny; b) tři různoběžné roviny, společná přímka  $S_B S_C H$ , svazek rovin; c) tři různoběžné roviny, žádný společný bod, průsečnice jsou navzájem rovnoběžné; d) dvě rovnoběžné roviny protínají rovinu třetí.

**5** a) Různoběžky; b) přímka je různoběžná s rovinou; c) různé rovnoběžné roviny; d) tři různoběžné roviny, společný bod, tři roviny.

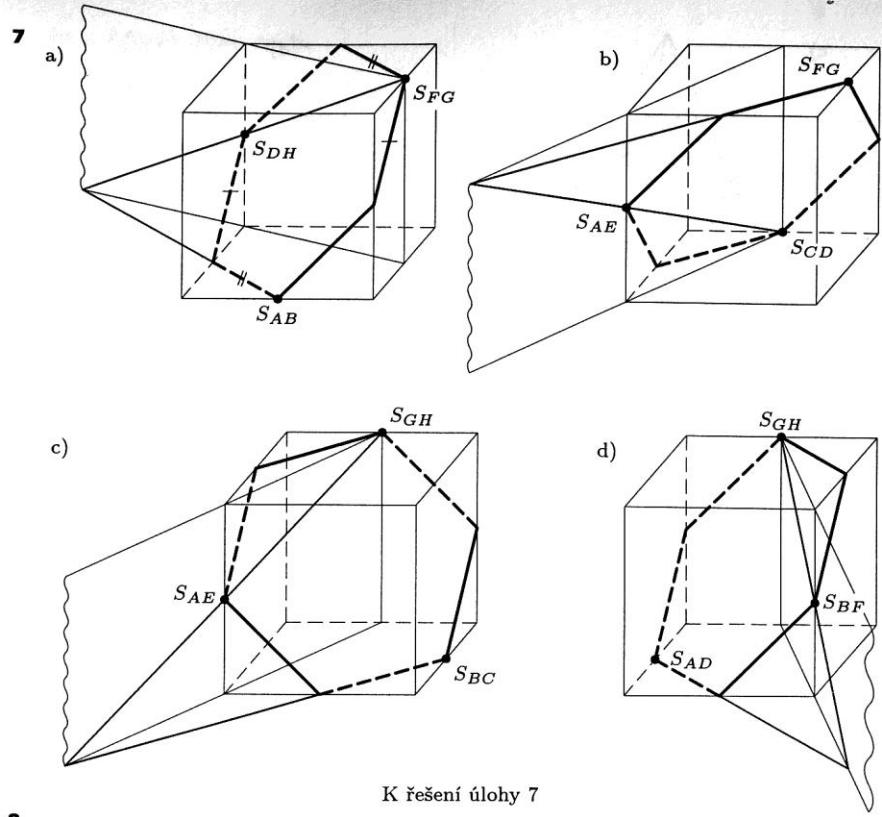
### 12.2 Řezy

**6**

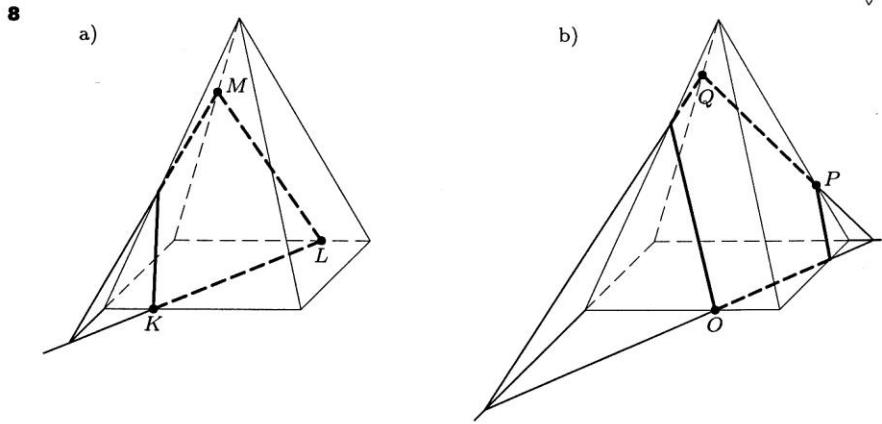


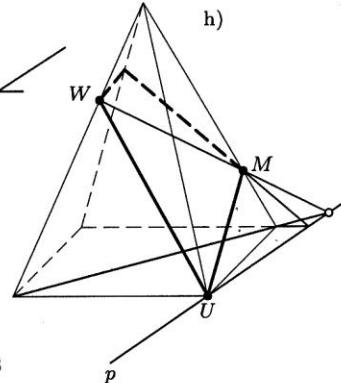
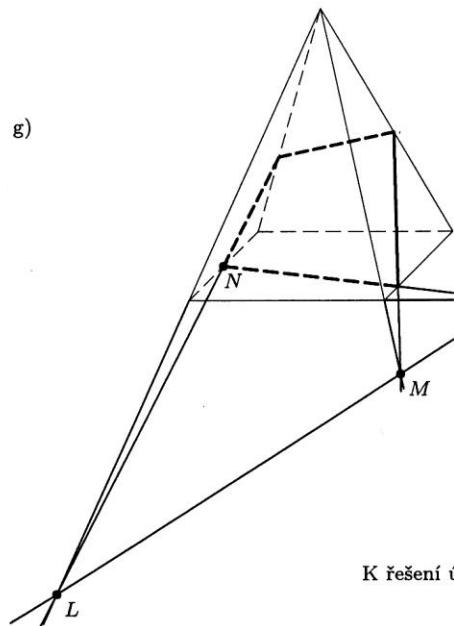
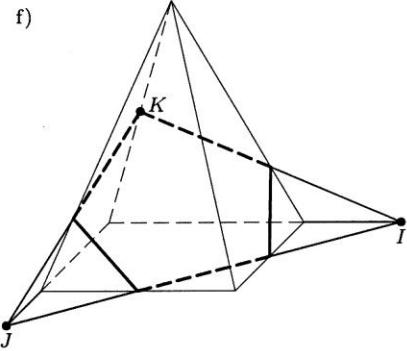
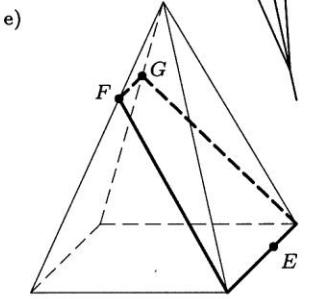
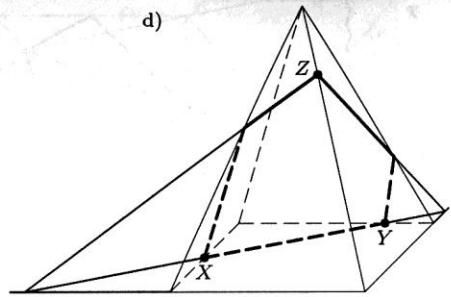
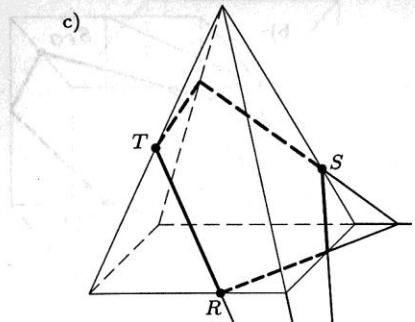


K řešení úlohy 6

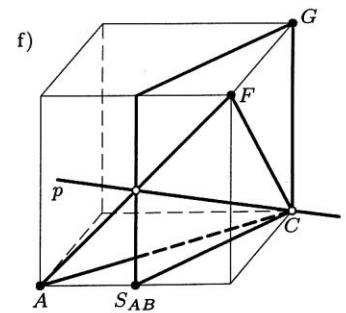
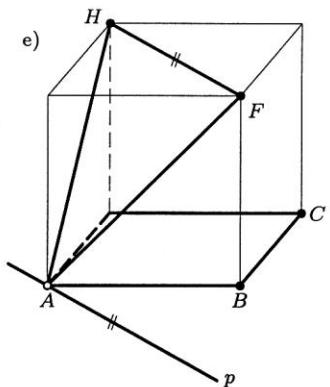
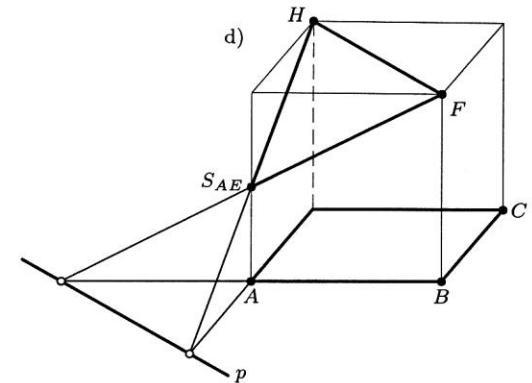
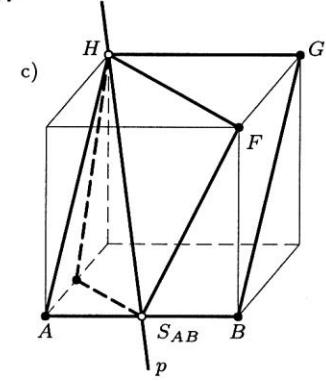
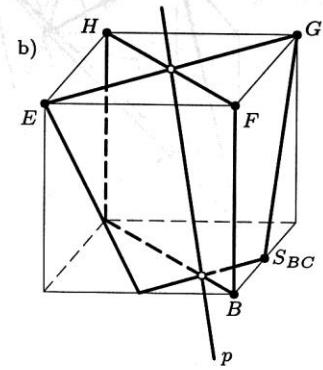
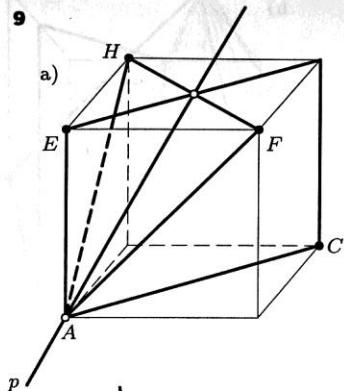


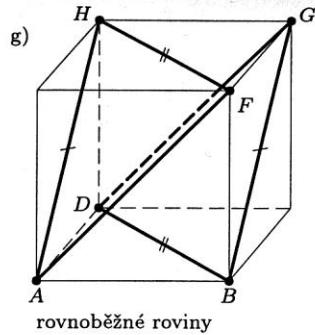
K řešení úlohy 7



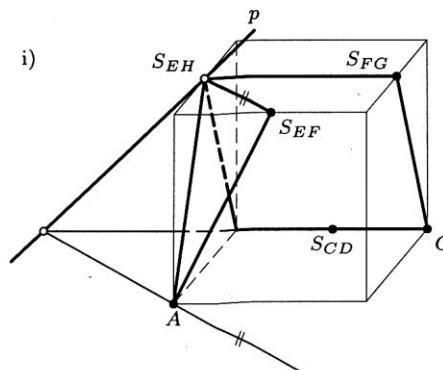
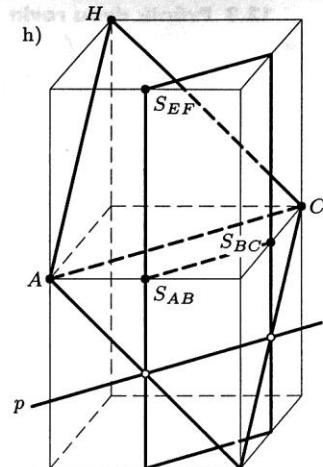


K řešení úlohy 8

**12.3 Průnik dvou rovin**

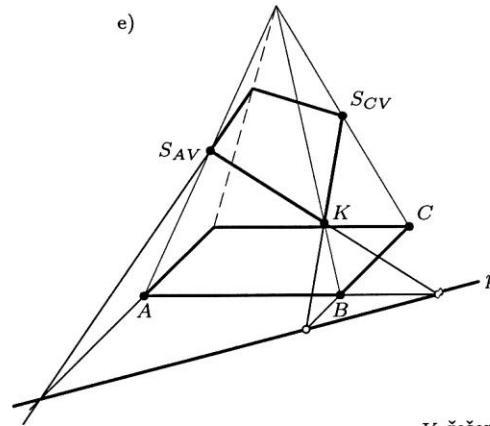
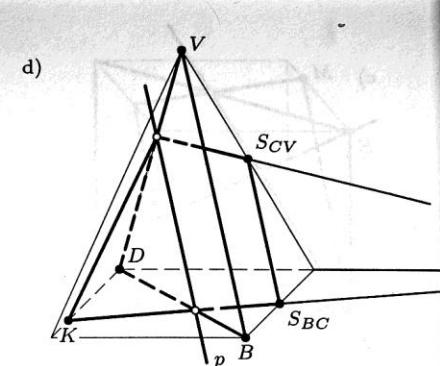
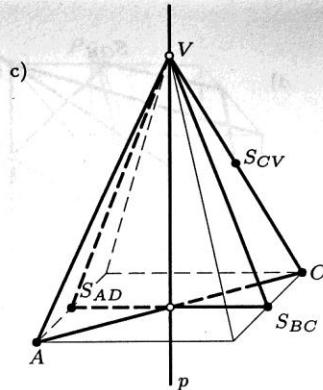
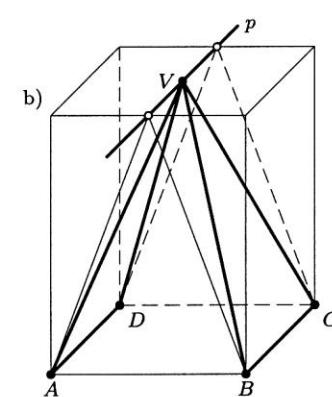
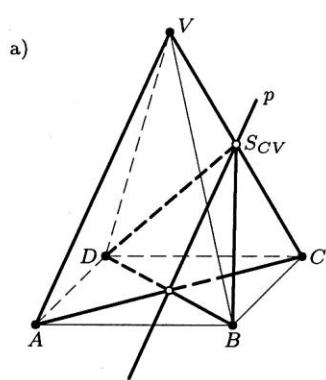


rovnoběžné roviny



K řešení úlohy 9

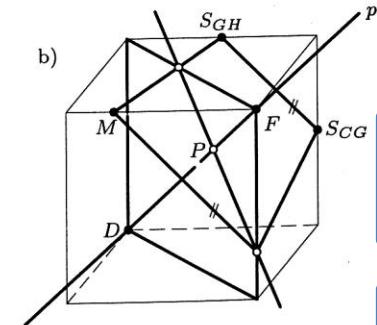
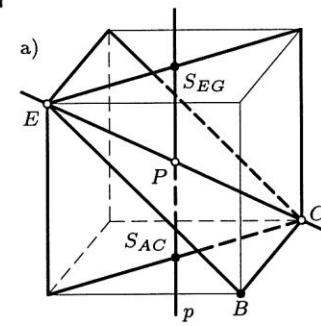
10



K řešení úlohy 10

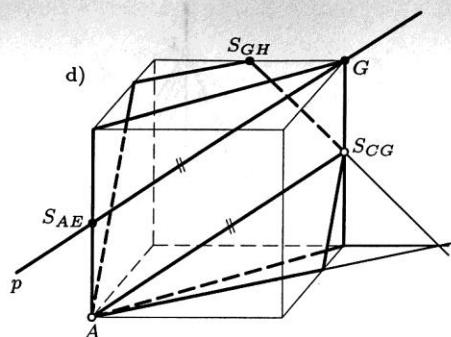
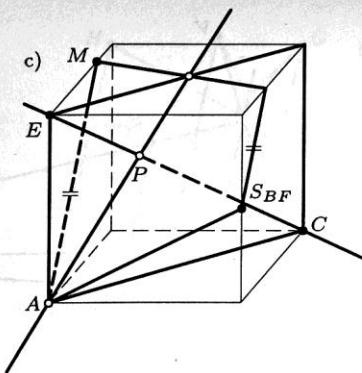
#### 12.4 Průnik přímky s rovinou

11



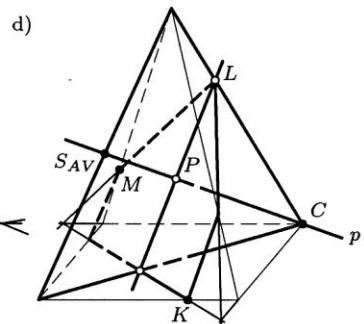
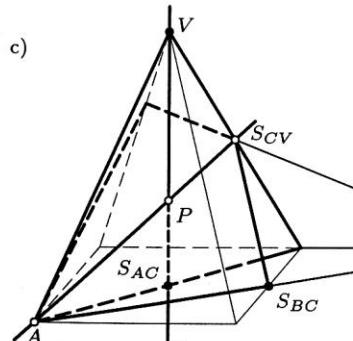
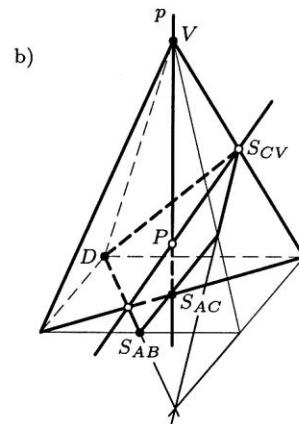
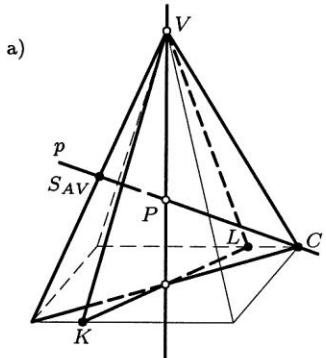
ZPĚT

OBSAH



přímka je rovnoběžná s rovinou

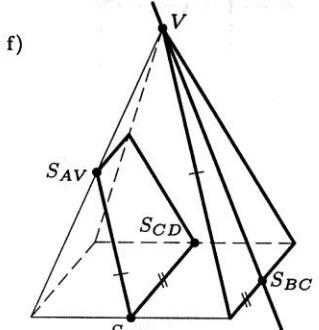
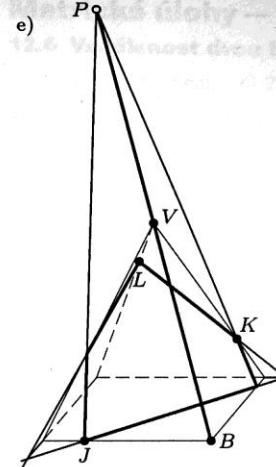
12



K řešení úlohy 11

## 12.4 Vzdálenost – výpočty vzdáleností

### 12.6 Vzdálosť dvou bodů

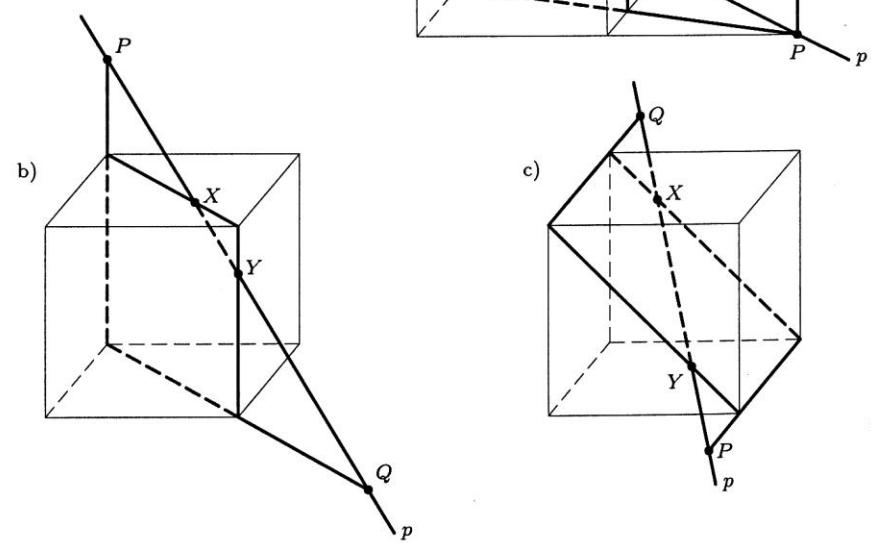
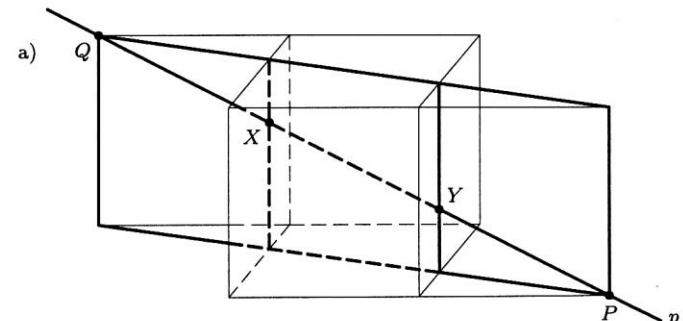


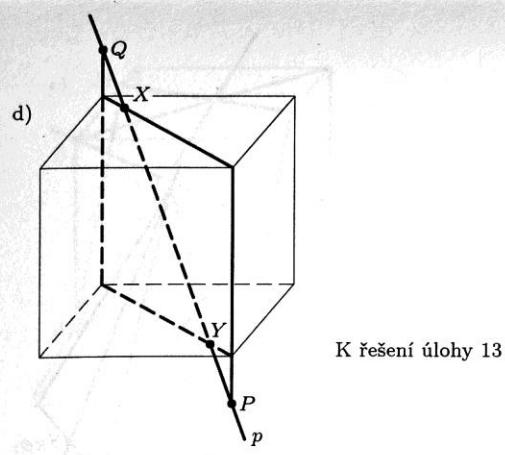
přímka je rovnoběžná s rovinou

K řešení úlohy 12

## 12.5 Průnik přímky s povrchem tělesa

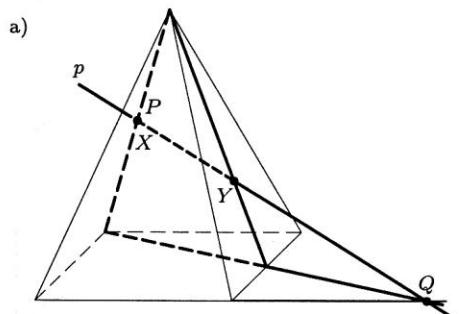
13



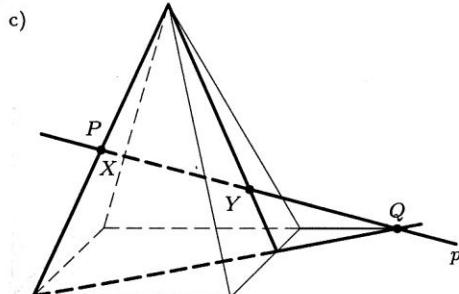
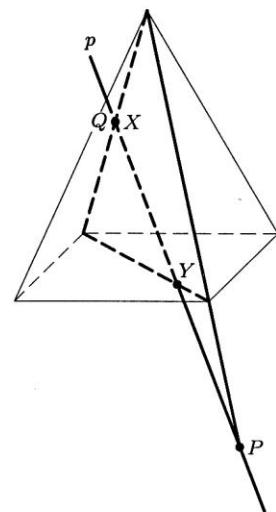


K řešení úlohy 13

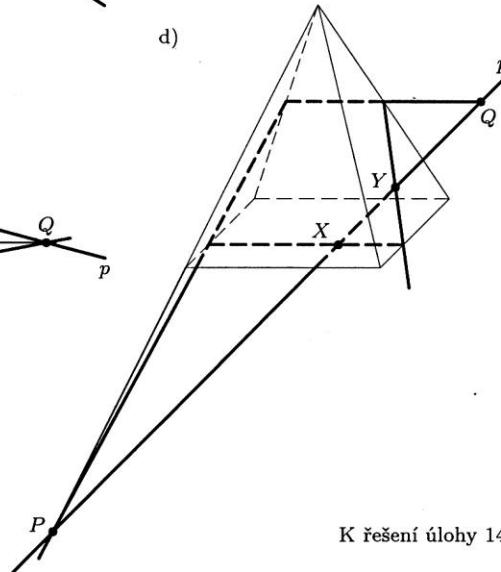
14



a)



d)



K řešení úlohy 14

## Metrické úlohy — výpočty vzdáleností

### 12.6 Vzdálenost dvou bodů

- 15 a)  $4\sqrt{3}$  cm; b) 6 cm; c)  $2\sqrt{6}$  cm; d)  $2\sqrt{6}$  cm; e)  $2\sqrt{3}$  cm; f)  $2\sqrt{2}$  cm.

- 16 a)  $2\sqrt{11}$  cm; b)  $2\sqrt{10}$  cm; c)  $3\sqrt{3}$  cm; d)  $\sqrt{19}$  cm; e)  $\sqrt{11}$  cm; f)  $\sqrt{19}$  cm.

### 12.7 Vzdálenost bodu od přímky

- 17 a) 4 cm; b)  $2\sqrt{6}$  cm; c)  $4\sqrt{2}$  cm; d)  $2\sqrt{6}$  cm; e)  $\frac{4}{3}\sqrt{6}$  cm; f)  $2\sqrt{6}$  cm; g) 4 cm; h)  $3\sqrt{2}$  cm; i)  $\sqrt{22}$  cm.

- 18  $\triangle ABH \cong \triangle CBH \cong \triangle DHB \cong \triangle EHB \cong \triangle FBH \cong \triangle GHB \Rightarrow v = \frac{4}{3}a\sqrt{6}$  cm.

- 19 a)  $2\sqrt{10}$  cm; b)  $\frac{12}{11}\sqrt{22}$  cm; c)  $\frac{6}{11}\sqrt{22}$  cm; d)  $\sqrt{11}$  cm; e)  $\sqrt{17}$  cm; f)  $3\sqrt{2}$  cm.

### 12.8 Vzdálenost rovnoběžných přímek

- 20 a)  $4\sqrt{2}$  cm; b)  $2\sqrt{6}$  cm; c)  $\frac{1}{3}\sqrt{30}$  cm. 21 a)  $3\sqrt{2}$  cm; b)  $\frac{2}{11}\sqrt{110}$  cm; c)  $\frac{6}{11}\sqrt{22}$  cm.

### 12.9 Vzdálenost mimoběžek

- 22 a) 4 cm; b) 4 cm; c)  $\frac{2}{3}\sqrt{6}$  cm. 23 a) 2 cm; b) 3 cm; c)  $\frac{6}{11}\sqrt{22}$  cm.

### 12.10 Vzdálenost bodu od roviny

- 24 a)  $2\sqrt{2}$  cm; b)  $\frac{4}{3}\sqrt{3}$  cm; c)  $\frac{8}{5}\sqrt{5}$  cm; d)  $\sqrt{2}$  cm; e)  $2\sqrt{2}$  cm; f)  $\frac{8}{5}\sqrt{5}$  cm.

- 25 a) 3 cm; b)  $\frac{3}{5}\sqrt{10}$  cm; c) 3 cm; d)  $\sqrt{2}$  cm.

- 26 a)  $\frac{4}{3}\sqrt{6}$  cm; b)  $\frac{4}{3}\sqrt{6}$  cm;  
c)  $\frac{2}{3}\sqrt{6}$  cm; d)  $\frac{4}{9}\sqrt{6}$  cm.

- 27 a)  $2\sqrt{3}$  cm; b) 3 cm; c) 6 cm; d) 6 cm.

### 12.11 Vzdálenost rovnoběžných rovin

- 28 a)  $\frac{4}{3}\sqrt{3}$  cm; b)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$  cm; c)  $\frac{4}{5}\sqrt{5}$  cm.

## Metrické úlohy — výpočty odchylek

### 12.12 Odchylka dvou přímek

- 29 a)  $60^\circ$ ; b)  $35^\circ 16'$ ; c)  $70^\circ 32'$ ; d)  $90^\circ$ ; e)  $54^\circ 44'$ ; f)  $54^\circ 44'$ ; g)  $90^\circ$ ; h)  $90^\circ$ ; i)  $90^\circ$ . 30 a) Přibližně  $71^\circ$ ; b) přibližně  $51^\circ$ ; c) přibližně  $48^\circ$ . 31 a)  $35^\circ 06'$ ; b)  $50^\circ 29'$ ; c)  $90^\circ$ ; d)  $72^\circ 27'$ ; e)  $90^\circ$ ; f)  $90^\circ$ ; g)  $77^\circ 05'$ ; h)  $70^\circ 32'$ ; i)  $70^\circ 32'$ .

- 32 a) Přibližně  $72^\circ$ ; b) přibližně  $77^\circ$ ; c)  $90^\circ$ .

### 12.13 Odchylka přímky od roviny

- 33 a)  $35^\circ 16'$ ; b)  $35^\circ 16'$ ; c)  $35^\circ 16'$ ; d)  $35^\circ 16'$ ; e)  $24^\circ 06'$ ; f)  $24^\circ 06'$ ; g)  $35^\circ 16'$ ; h)  $54^\circ 44'$ ; i)  $0^\circ$ .

- 34 a)  $90^\circ$ ; b)  $18^\circ 26'$ ; c)  $64^\circ 46'$ ; d)  $34^\circ 54'$ ; e)  $35^\circ 16'$ ; f)  $35^\circ 16'$ .

### 12.14 Odchylka dvou rovin

- 35 a)  $90^\circ$ ; b)  $54^\circ 44'$ ; c)  $90^\circ$ ; d)  $26^\circ 34'$ ; e)  $35^\circ 16'$ ; f)  $60^\circ$ .

- 36 a)  $71^\circ 34'$ ; b)  $36^\circ 52'$ ; c)  $18^\circ 26'$ ; d)  $84^\circ 16'$ ; e)  $90^\circ$ ; f)  $63^\circ 26'$ .

- 37 a)  $60^\circ$ ; b)  $60^\circ$ ; c)  $51^\circ 19'$ ; d)  $82^\circ 49'$ .

## 12.15 Další úlohy

- 38 a) cesta  $S_EKX$ , kde  $K \in EF \wedge |KF| = 1\frac{2}{3}$  cm, délka cesty je  $d = \sqrt{37}$  cm;  
 b) cesta  $YLX$ , kde  $L \in FG \wedge |LG| = 1$  cm, délka cesty je  $d = 4\sqrt{2}$  cm.
- 39 a) cesta  $CXS_{AV}$ , kde  $X \in BV \wedge |VX| = \frac{12}{11}\sqrt{11}$  cm, délka cesty je  $d = \frac{21}{11}\sqrt{11}$  cm;  
 b) cesta  $DYT_{\Delta BCV}$ , kde  $Y \in CV \wedge |VY| = \frac{116}{99}\sqrt{11}$  cm, délka cesty je  $d = \frac{2}{33}\sqrt{7579}$  cm.
- 40 a)  $|AC| = |CH| = |AH| = |AF| = |HF| = |CF|$ ; b)  $\sqrt{2}$  cm;  
 c)  $AF \perp CH \wedge AH \perp CF \wedge AC \perp FD$ ;  
 d)  $\frac{1}{2}\sqrt{6}$  cm; e)  $\sqrt{2}$  cm; f)  $60^\circ$ ; g)  $70^\circ 32'$ .
- 41 a)  $51^\circ 19'$ ; b)  $57^\circ 25'$ ; c)  $73^\circ 54'$ ; d)  $\sqrt{39}$  cm.
- 42 a)  $2\sqrt{11}$  cm; b)  $6\sqrt{3}$  cm; c)  $64^\circ 46'$ ; d)  $71^\circ 34'$ ; e) 12 cm.

## 12.16 Obsah řezu

- 43 a)  $o = 4\sqrt{17}$  cm,  $S = 12\sqrt{2}$  cm $^2$ ; b)  $o = (6\sqrt{2} + 4\sqrt{5})$  cm,  $S = 18$  cm $^2$ ; c)  $o = 12\sqrt{2}$  cm,  $S = 12\sqrt{3}$  cm $^2$ .
- 44 a)  $o = (6 + 2\sqrt{19})$  cm,  $S = 9\sqrt{2}$  cm $^2$ ; b)  $o = (\sqrt{19} + \sqrt{11} + 2\sqrt{5})$  cm,  $S = \sqrt{46}$  cm $^2$ ;  
 c)  $o = (2\sqrt{19} + \frac{2}{3}\sqrt{35})$  cm,  $S = \frac{4}{3}\sqrt{34}$  cm $^2$ . 45  $o = (6 + 4\sqrt{10})$  cm,  $S = 3\sqrt{39}$  cm $^2$ .

## 12.17 Objemy a povrchy těles

- 46 a)  $3\sqrt{2}$  cm; b)  $54\sqrt{2}$  cm $^3$ ; c)  $108$  cm $^2$ . 47 a)  $8x$ ; b)  $4x$ . 48 O 52 %.
- 49  $S = 16\sqrt[3]{4}(1 + 2\sqrt{2})$  cm $^2$ . 50  $V = 15\sqrt{3}$  cm $^3$ .
- 51  $V = 144\sqrt{3}$  cm $^3$ ,  $S = (48\sqrt{3} + 144)$  cm $^2$ . 52  $a \doteq 3,9$  cm. 53  $S \doteq 125,8$  cm $^2$ .
- 54  $S = \frac{27}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$  cm $^2$ ,  $V = 40,5$  cm $^3$ . 55  $V = \frac{32}{3}\sqrt{6}$  cm $^3$ ,  $S = 16(1 + \sqrt{7})$  cm $^2$ .
- 56  $V = \frac{20}{3}\sqrt{15}$  cm $^3$ ,  $S = 60$  cm $^2$ . 57  $V = \frac{64}{3}$  cm $^3$ .
- 58  $V = 10$  cm $^3$ ,  $S = (\frac{57}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{41})$  cm $^2$ . 59  $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$ ,  $S = a^2 \cdot \sqrt{3}$ .
- 60  $V = \frac{76}{3}\sqrt{6}$  cm $^3$ ,  $S = (52 + 20\sqrt{7})$  cm $^2$ . 61  $V = \frac{76}{3}\sqrt{3}$  cm $^3$ ,  $S = 92$  cm $^2$ .
- 62  $|DX| = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$ . 63  $V = \frac{125}{3}\sqrt{2}$  cm $^3$ ,  $S = 50\sqrt{3}$  cm $^2$ .
- 64  $V = 1000\pi$  cm $^3$ ,  $S = 100\pi(3 + 2\sqrt{3})$  cm $^2$ .
- 65  $V = \frac{8}{3}\pi\sqrt{3}$  cm $^3$ ,  $S = 12\pi$  cm $^2$ . 66  $V_1 : V_2 = a : b$ .
- 67 a)  $\varrho = 2\sqrt[3]{4}$  cm; b)  $|VX| : |XS| = \sqrt[3]{4} : (2 - \sqrt[3]{4})$ . 68  $V_1 : V_2 : V_3 = 19 : 7 : 1$ .
- 69 a)  $\varrho = \sqrt[3]{36}$  cm  $\doteq 3,3$  cm; b)  $v_1 : v_2 = (\sqrt[3]{36} - 2) : (4 - \sqrt[3]{36}) \doteq 1,185$ .
- 70  $S = 6\sqrt[3]{\pi}$  dm $^2$ . 71  $r_{\text{kužel}} = R_{\text{půlkruh}} = s$ . 72  $r = 1$  cm,  $V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$  cm $^3$ .
- 73 Část mezikruží z výšeče, kde  $r_1 = 50$  cm,  $r_2 = 25$  cm,  $\varphi = 216^\circ$ .
- 74  $v = r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$  dm. 75  $V = 160\pi\sqrt{5}$  cm $^3 \doteq 1,1$  litru. 76  $S = \frac{75}{2}\pi$  cm $^2$ .
- 77  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$  dm,  $v = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$  dm. 78 2730 m.

- 79 a) 39,8 %; b) 51,9 %; c) 8,3 %; d) 16,8 %.
- 80  $S \doteq 13\ 300\ 000$  km $^2$ , což je 2,6 %. 81  $V \doteq 61,2$  cm $^3$ ,  $S \doteq 65,3$  cm $^2$ .
- 82  $S = 12\pi$  cm $^2$ . 83  $V_{\text{krychle}} : V_{\text{jehlan}} : V_{\text{kužel}} = 12 : 4 : \pi$ .
- 84  $V_1 : V_2 : V_3 = 3\pi\sqrt{3} : 6 : \pi$ . 85  $r = 3\sqrt{2}$  cm,  $v = 6\sqrt{2}$  cm, 53 %.
- 86 a)  $r = 3\sqrt{3}$  cm,  $v = 9$  cm, 28 %; b)  $r = 6\sqrt{3}$  cm,  $v = 18$  cm, 44 %.
- 87  $r = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$  cm,  $V_{\text{kužel}} \doteq 2V_{\text{koule}}$ .
- 88  $r = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$  cm,  $V_{\text{jehlan}} \doteq 2,6V_{\text{koule}}$ . 89  $a = 2\sqrt{6}$  cm, 26 %.
- 90  $r = \sqrt{3}$  cm,  $v = 2\sqrt{6}$  cm,  $V_{\text{kužel}} : V_{\text{čtyřstěn}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} : 1 \Rightarrow V_k \doteq \frac{3}{5}V_c$ .

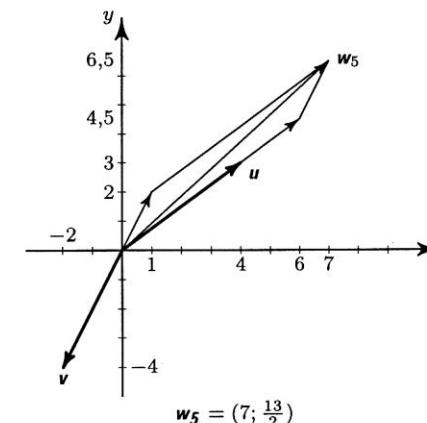
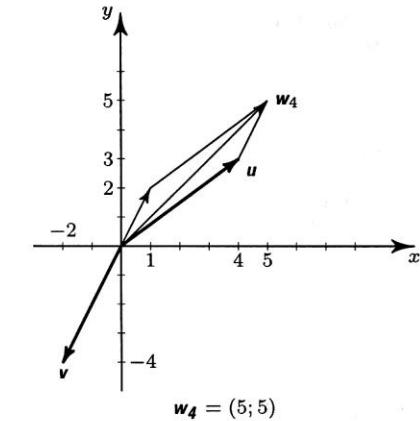
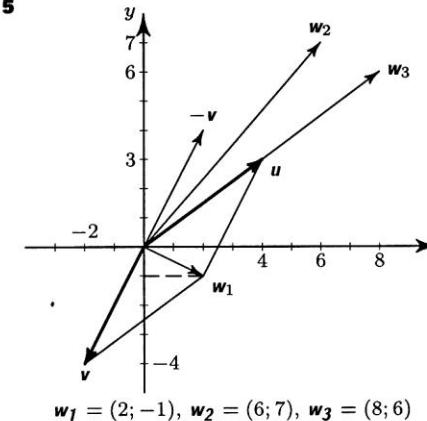
## 13 Vektory

### 13.1 Vektor, souřadnice vektoru

- 1 a)  $\mathbf{u} = (3; -2)$ ; c)  $X[0; -4]$ ; d)  $\mathbf{u}_1 = (-3; 2)$ . 2 a)  $\mathbf{z} = (1; 2; 4)$ ; b)  $Z[1; 2; 4]$ .  
 3 a)  $X[9; -6]$ ; b)  $X[-5; 8]$ ; c)  $X[-3; 2]$ . 4  $C[5; 1; -2]$ ,  $C_1[8; 7; 1]$ ,  $B_1[6; 2; 5]$ ,  $D_1[7; 8; 0]$ .

### 13.2 Sčítání a odčítání vektorů, násobek vektoru

5



- 6 a)  $A, B, C$  leží na přímce; b)  $y_D = 0$ .

- 7 a) např.  $K - L \neq k \cdot (K - M)$ ; b)  $R[0; \frac{13}{5}; \frac{18}{5}]$ ,  $S[-4; 5; 6]$ .

### 13.3 Lineární kombinace vektorů

- 8  $\mathbf{z} = 3\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ . 9  $\mathbf{z} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}$ . 10 a)  $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ; b)  $\mathbf{w}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ;  
 c)  $\mathbf{w}_3 = -\frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$ . 11  $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ . 12  $\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{z} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ .  
 13 a), b) Platí. 14 a)  $x_1 = \mathbf{e}_2$ ,  $x_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ ,  $x_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ,  $x_4 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_3$ ,  
 $x_5 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ ; b)  $x_1 = i$ ,  $x_2 = -k$ ,  $x_3 = i + k$ ,  $x_4 = i - \frac{1}{2}k$ ,  $x_5 = 2i - 2j + k$ .

### 13.4 Lineárně závislé a lineárně nezávislé vektory

- 15 Lin. závislé,  $2\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$ .  
 16 a) Lin. závislé,  $\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 = \mathbf{o}$ ; b) lin. nezávislé; c) lin. závislé,  $2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - 2\mathbf{w}_3 = \mathbf{o}$ .

### 13.5 Velikost vektoru

- 17**  $|u| = 2\sqrt{5}$ . **18**  $|u| = 5\sqrt{2}$ . **19**  $y_{1,2} = \pm 8$ . **20**  $v_1 = (7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ ,  $v_2 = (-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$ . **21** a)  $c_1 = (3; 4) \Rightarrow |c_1| = 5$ ; b)  $c_2 = (5; 0) \Rightarrow |c_2| = 5$ ; c)  $c_3 = (-1; 7) \Rightarrow |c_3| = 5\sqrt{2}$ . **22**  $m_1 = -2$ ,  $m_2 = 6$ . **23**  $q_1 = -12$ ,  $q_2 = -6$ .

### 13.6 Skalární součin dvou vektorů $u \cdot v$

- 24** a)  $\varphi = 45^\circ \Rightarrow u \cdot v = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 3$ ; b)  $u \cdot v = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3$ .

### Úhel dvou vektorů

- 25** a)  $\varphi = 45^\circ$ ; b)  $\varphi = 135^\circ$ ; c)  $\varphi = 90^\circ$ ; d)  $\varphi = 150^\circ$ . **26** a)  $\varphi = 60^\circ$ ; b)  $\varphi = 40^\circ 22'$ ; c)  $\varphi = 174^\circ 14'$ ; d)  $\varphi = 90^\circ$ . **27** a)  $\alpha = 59^\circ 02'$ ,  $\beta = 78^\circ 41'$ ,  $\gamma = 42^\circ 17'$ ; b)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ; c)  $\alpha = 128^\circ 40'$ ,  $\beta = 35^\circ 32'$ ,  $\gamma = 15^\circ 48'$ ; d)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ . **28**  $v_1 = (0; -4)$ ,  $v_2 = (2\sqrt{3}; 2)$ .

- 29** a)  $X_{1,2}[2 \pm 5\sqrt{2}; 0; 0]$ , b)  $X_{1,2}[2 \pm 5\sqrt{3}; 0; 0]$ . **30**  $x_1 = (1; 0; 1)$ ,  $x_2 = (0; 1; 1)$ .

### Kolmost vektorů

- 31**  $u \cdot v = 0$ . **32**  $m = -\frac{9}{2}$ . **33**  $p = 4$ .

- 34** a) Např.  $b_1 = (3; -1)$ ; b)  $b_{21} = (3; -1) \vee b_{22} = (-3; 1)$ ; c)  $b_k = (3k; -k)$ ,  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

- 35**  $f_1 = (8; -4)$ ,  $f_2 = (-8; 4)$ . **36**  $M_1[4; 4]$ ,  $M'_1[2; 0]$ . **37**  $C_1[2; 7]$ ,  $D_1[-1; 4]$ ,

$C_2[8; 1]$ ,  $D_2[5; -2]$ . **38**  $B[7; 0]$ ,  $C[8; 3]$ ,  $D[5; 4]$ . **39**  $D[\frac{5}{2}; \frac{19}{2}]$ ,  $B[\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}]$ .

- 40**  $M_1[7; \frac{10}{3}]$ ,  $N_1[3; \frac{19}{3}]$ ,  $M_2[5; \frac{2}{3}]$ ,  $N_2[1; \frac{11}{3}]$ . **41**  $X[2; 0]$ . **42** a)  $T_1[0; 0]$ ,  $T_2[2; 0]$ ;

b)  $T[0; -5]$ ; c)  $T_1[0; 0]$ ,  $T_2[3; 3]$ . **43**  $|FG| = |EF| = 3$ ,  $|\star EFG| = 90^\circ$ .

- 44** a)  $O_{1,2}[3 \pm 4\sqrt{2}; \pm 4 - 2\sqrt{2}]$ ; b)  $O_{1,2}[\pm 4\sqrt{2} - 1; \pm 4 + 2\sqrt{2}]$ ; c)  $O_{1,2}[1 \pm 2\sqrt{2}; \pm 2]$ .

### 13.7 Vektorový součin dvou vektorů $u \times v$

- 45** a)  $u \times v = (0; 0; -1)$ ; c)  $|u \times v| = 1$ ; d)  $\varphi = 45^\circ$ ,  $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \varphi = 1$ ; e)  $v \times u = (0; 0; 1)$ ; f)  $z_1 = -z_2$ , není komutativní.

- 46** a)  $(-10; -7; 9)$ ; b)  $(2; 3; -1)$ ; c)  $(0; 0; 0)$ , protože  $u \parallel v$ ; d)  $u \times v$  v rovině není def.

- 47** a)  $N[5; 3; -1]$ ,  $S = 4\sqrt{2}$ ; b) abychom mohli užít vektorový součin, musíme převést úlohu do prostoru např. tak, že u všech bodů doplníme souřadnici  $z = 0$ .  $N[3; 2]$ ,  $S = 5$ .

- 48** a)  $S_\Delta = 5\sqrt{6}$ ; b)  $S_\Delta = 1$ ; c)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  leží na přímce; d)  $S_\Delta = 4\sqrt{10}$ .

- 49**  $o = 9\sqrt{2}$ ,  $S_\Delta = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ . **50**  $m_1 = -1$ ,  $m_2 = -\frac{1}{5}$ .

- 51**  $Y_{1,2}[0; 1 \pm 2\sqrt{10}; 0]$ . **52**  $X_1[\frac{5}{2}; 0]$ ,  $X_2[\frac{11}{2}; 0]$ . **53**  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 5$ .

- 54**  $z_{1,2} = (\pm \frac{\sqrt{10}}{10}; \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}; 0)$ .

### 13.8 Smíšený součin tří vektorů $(u \times v) \cdot w$

- 55** a)  $C[1; 8; 7]$ ,  $B_1[4; 5; -4]$ ,  $C_1[2; 9; 0]$ ,  $D_1[0; 5; -1]$ ; b)  $V = 110$ .

- 56** a) 108; b) 108; c) Objemy těles z úlohy a) i b) jsou stejné, protože oba rovnoběžnostěny mají stejný obsah podstavy i stejnou tělesovou výšku.

- 57** 5. **58** 8. **59** a)  $\frac{13}{2}$ ; b)  $X_1[15; 0; 0]$ ,  $X_2[-9; 0; 0]$ . **60**  $Z_1[0; 0; -7]$ ,  $Z_2[0; 0; 17]$ .

## 14 Analytická geometrie v rovině

### 14.1 Rovnice přímky

parametrická rovnice	obecná rovnice	směrnicový tvar	úsekový tvar
a) $x = 4 + 2t$ , $y = 2 - t$ , $t \in \mathbb{R}$	$x + 2y - 8 = 0$	$y = -\frac{1}{2}x + 4$	$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$
b) $x = 2 + 2t$ , $y = 3t$ , $t \in \mathbb{R}$	$3x - 2y - 6 = 0$	$y = \frac{3}{2}x - 3$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$
c) $x = 2 + t$ , $y = 3 + 2t$ , $t \in \mathbb{R}$	$2x - y - 1 = 0$	$y = 2x - 1$	$\frac{x}{0,5} + \frac{y}{-1} = 1$
d) $x = 3t$ , $y = t$ , $t \in \mathbb{R}$	$x - 3y = 0$	$y = \frac{1}{3}x$	neexistuje
e) $x = 3$ , $y = -2 + t$ , $t \in \mathbb{R}$	$x - 3 = 0$	neexistuje	neexistuje
f) $x = 1 + t$ , $y = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}t$ , $t \in \mathbb{R}$	$\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$	$y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{3\sqrt{3}} = 1$
g) $x = -2 + t$ , $y = 4 + 2t$ , $t \in \mathbb{R}$	$2x - y + 8 = 0$	$y = 2x + 8$	$\frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$
h) $x = 3 + 3t$ , $y = 2t$ , $t \in \mathbb{R}$	$2x - 3y - 6 = 0$	$y = \frac{2}{3}x - 2$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$

- 2** a)  $p = \{[3 + 5t; -2t]; t \in \mathbb{R}\}$ ; b)  $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$ . **3**  $k = -1 \wedge \varphi = 135^\circ$ .

- 4** p:  $x = t$ ,  $y = 4t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . **5**  $x + 2y = 0$ . **6**  $m \in \{-\frac{1}{2}; 1\}$ . **7**  $5x - 2y + 26 = 0$ .

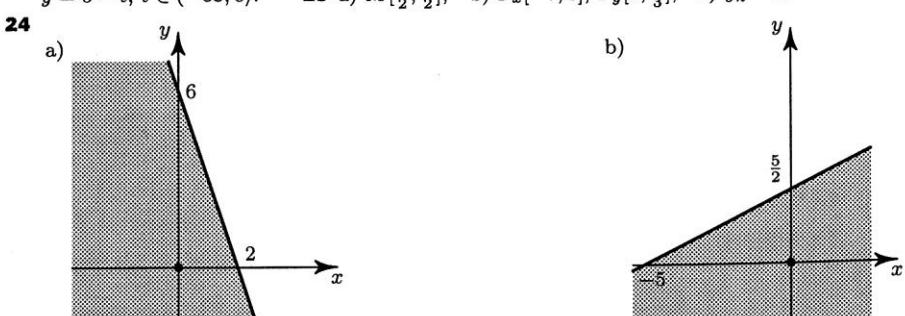
- 8**  $2x + y + 7 = 0$ . **9**  $y_M = -10$ . **10**  $5x + y - 14 = 0$ . **11** a)  $x = 3 - 3t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $2x + 3y - 3 = 0$ ; b)  $x = 3 + t$ ,  $y = -1 - 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $2x + y - 5 = 0$ ; c), d)  $x = 3 + t$ ,  $y = -1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y + 1 = 0$ . **12** a)  $x = 1 + t$ ,  $y = 4 - 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; b)  $x = -4 + 3k$ ,  $y = -6 + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ; c)  $x = 2 + 6l$ ,  $y = 1 + 7l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ; d)  $x = 2 + 3t$ ,  $y = 1 + t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; e)  $x = -\frac{1}{2} + k$ ,  $y = -4 - 3k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ; f)  $x = 1 + 3l$ ,  $y = 4 + l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ .

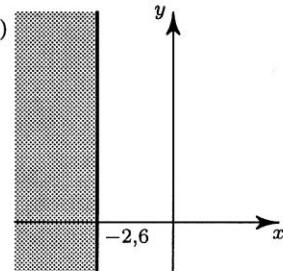
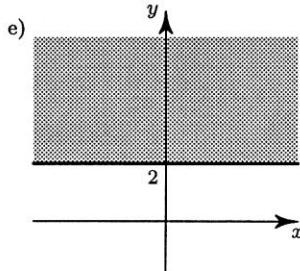
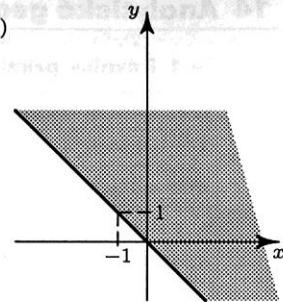
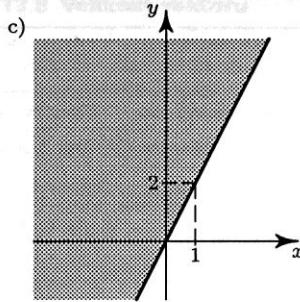
- 13** a)  $2x - 12y + 7 = 0$ ; b)  $x - 6y - 15 = 0$ . **14** o<sub>AB</sub>:  $x - y = 0$ , o<sub>BC</sub>:  $y - \frac{3}{2} = 0$ , o<sub>AC</sub>:  $4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow S[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ . **15** t<sub>a</sub>:  $5x + 4y - 26 = 0$ , t<sub>b</sub>:  $x + 2y - 8 = 0$ , t<sub>c</sub>:  $2x + y - 9 = 0 \Rightarrow T[\frac{10}{3}; \frac{7}{3}]$ . **16** v<sub>a</sub>:  $y - 4 = 0$ , v<sub>b</sub>:  $2x - 3y - 2 = 0$ , v<sub>c</sub>:  $x - y - 3 = 0 \Rightarrow V[7; 4]$ . **17** V<sub>-4; 4</sub>, T<sub>-10/3; 2/3</sub>, S<sub>-3; -1</sub>, V, T, S: p:  $5x + y + 16 = 0$ .

- 18**  $\frac{x}{11} + \frac{y}{-\frac{11}{3}} = 1$ , P<sub>x</sub>[11; 0], P<sub>y</sub>[0; -11/3], S<sub>Δ</sub> =  $\frac{121}{6}$ . **19** S<sub>Δ</sub> =  $\frac{25}{4}$ . **20** p<sub>1</sub>:  $8x - y - 4 = 0$ , p<sub>2</sub>:  $2x - y + 2 = 0$ . **21** a)  $x + y - 5 = 0$ ; b)  $x - y + 1 = 0$ ; c)  $3x + y - 9 = 0$ ; d)  $x + 2y - 8 = 0$ ; d)  $3x + 2y - 12 = 0$ .

### 14.2 Úsečka, polopřímka, polorovina

- 22** a)  $x = -2 + t$ ,  $y = 5 - t$ ,  $t \in (0; 6)$ ; b)  $x = -2 + k$ ,  $y = 5 - k$ ,  $k \in (0; \infty)$ ; c)  $x = -2 + t$ ,  $y = 5 - t$ ,  $t \in (-\infty; 6)$ . **23** a) M<sub>1</sub>[7/2; 7/2]; b) P<sub>x</sub>[-7; 0], P<sub>y</sub>[0; 7/3]; c) y<sub>k</sub> = 2.





K řešení úlohy 24

25 M neleží.

26  $p \in (-11; \infty)$ .

27 Protíná, body A, B leží v opačných poloprovincích.

28  $c \in (-\infty; -17) \cup (24; \infty)$ .29  $c \in (-\infty; -\frac{2}{9}) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$ .

### 14.3 Vzájemná poloha přímek

- 30 a)  $p \parallel q \wedge p \neq q$ ; b)  $P[-2; \frac{13}{2}]$ ; c)  $P[1; 2]$ ; d)  $p = q$ ; e)  $P[-5; 11]$ ; f)  $P[2; -3]$ ; g)  $p = q$ ; h)  $p \parallel q \wedge p \neq q$ . 31  $P[-1; -3]$ . 32  $2x - y - 8 = 0$ .  
 33  $4x - 3y - 19 = 0$ . 34  $x = 4 - t$ ,  $y = 3 + t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . 35  $A[1; -3]$ ,  $B[2; 5]$ ,  $C[-2; 3]$ .  
 36  $A_1[-6; 0]$ ,  $B_1[0; -2]$ ,  $C_1[2; 6]$ . 37 a) Např. pro  $a = 2$ ,  $b = -\frac{1}{3}$ ,  $c = -1$ ; b) např. pro  $a = 2$ ,  $b = -\frac{1}{3}$ ,  $c \neq -1$ ; c)  $a = -\frac{8}{5}$ ,  $b \neq \frac{13}{6}$ ,  $c = 5$ . 38  $a = -2$ ,  $b = -1$ .  
 39  $m = -3$ . 40  $a = -1$ ,  $b = 2$ . 41  $a = \frac{15}{2}$ ,  $c = -\frac{45}{2}$ . 42  $m \in (11; \infty)$ .  
 43  $a \in (-18; -\frac{23}{4})$ . 44  $m \in \{-1; \frac{1}{2}\}$ . 45  $u_1 \cap u_2 = \emptyset$ . 46  $m = 6$ .

### 14.4 Odchylka dvou přímek

- 47 a)  $45^\circ$ ; b)  $90^\circ$ ; c)  $36^\circ 52'$ ; d)  $73^\circ 44'$ ; e)  $30^\circ$ ; f)  $90^\circ$ ; g)  $56^\circ 19'$ ; h)  $56^\circ 19'$ .  
 48 a)  $98^\circ 08'$ ; b)  $81^\circ 52'$ ; c)  $26^\circ 34'$ ; d)  $140^\circ 43'$ . 49 a)  $a = -2$ ; b)  $a \in \{3; -\frac{1}{3}\}$ .  
 50  $p_1: x - y - 5 = 0$ ,  $q_1: x + y - 5 = 0$ ,  $p_2: x - 7y + 1 = 0$ ,  $q_2: 7x + y + 7 = 0$ .  
 51  $M_{1,2}[1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}; 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}]$ . 52  $k \in \{0; \sqrt{3}\}$ . 53  $y = 3x$ ,  $y = -\frac{1}{3}x$ .

### 14.5 Výpočty vzdáleností

#### Vzdálenost dvou bodů

- 54  $o = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ . 55  $Y_1[0; 0]$ ,  $Y_2[0; 6]$ . 56  $X_{1,2}[6 \pm 2\sqrt{10}; 0]$ . 57  $Y[0; -\frac{5}{2}]$ .  
 58  $C[\frac{1}{2}; \frac{7}{2}]$ . 59  $C[-\frac{11}{4}; \frac{11}{2}]$ . 60  $M_1[-1; 0]$ ,  $M_2[-13; 12]$ . 61  $S[-\frac{5}{3}; -1]$ .

#### Vzdálenost bodu od přímky

- 62  $v = 3\sqrt{5}$ . 63  $v = 2$ .

### Vzdálenosti — další úlohy

- 64  $Y_1[0; 14]$ ,  $Y_2[0; -6]$ . 65  $M_1[35; -11]$ ,  $M_2[-43; 15]$ . 66  $c_{1,2} = \pm 4\sqrt{5}$ . 67  $p_1: 3x - 4y + 27 = 0$ ,  $p_2: 3x - 4y - 3 = 0$ . 68  $v = \frac{3}{5}$ .  
 69  $|rp| : |rq| = 1 : 3$ . 70 o:  $8x + 12y - 17 = 0$ . 71 p1:  $7x + y + 20 = 0$ ,  
 $p_2: x - y - 4 = 0$ . 72  $y = 0$ ,  $3x - 4y = 0$ . 73  $x - y + 1 = 0$ ,  $x - y + 13 = 0$ .  
 74  $M_1[\frac{14}{5}; \frac{32}{5}]$ ,  $M_2[-\frac{6}{5}; -\frac{28}{5}]$ ,  $M_3[-2; -4]$ ,  $M_4[2; 8]$ .  
 75  $O_1[1; 1]$ ,  $O_2[-1; 1]$ ,  $O_3[-2; -2]$ ,  $O_4[-2; 2]$ .  
 76  $x + y - 10 = 0$ ,  $2x - y - 2 = 0$ . 77 o:  $x + y + 2 = 0$ .  
 78 a)  $v_a = 2\sqrt{5}$ ,  $v_b = 2\sqrt{10}$ ,  $v_c = 2\sqrt{10}$ ; b)  $t_a = 2\sqrt{5}$ ,  $t_b = 5\sqrt{2}$ ,  $t_c = 5\sqrt{2}$ ; c)  $s_a = 2\sqrt{5}$ ,  
 $s_b = \sqrt{10}$ ,  $s_c = \sqrt{10}$ ; d)  $o = 4\sqrt{10} + 4\sqrt{5}$ ,  $S_\Delta = 20$ .  
 79 a)  $o = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ ; b)  $s = 3\sqrt{2}$ ; c)  $v = \sqrt{2}$ ; d)  $S_\Delta = 6$ .

### 14.6 Zobrazení v analytické geometrii

- 80  $A'[-9; 4]$ . 81  $C'[-9; 2]$ . 82 a)  $p': 2x + y + 5 = 0$ ; b)  $p': 2x + y + 13 = 0$ .  
 83 a)  $3x + y + 6 = 0$ ; b)  $3x + y - 6 = 0$ ; c)  $x - 3y + 4 = 0$ ; d)  $3x + y - 30 = 0$ .  
 84  $3x - y + 28 = 0$ . 85  $O[-1; 6]$ . 86  $O[1; 2]$ ,  $x + 2y - 5 = 0$ .

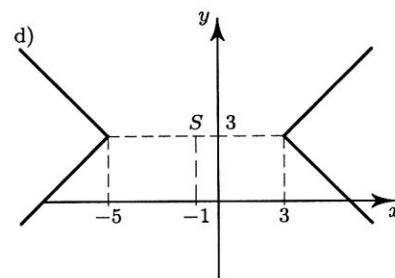
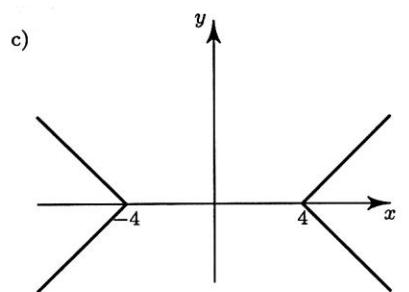
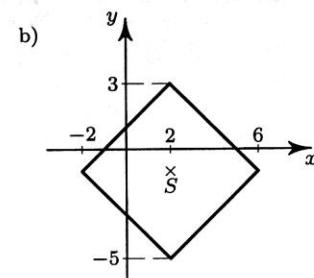
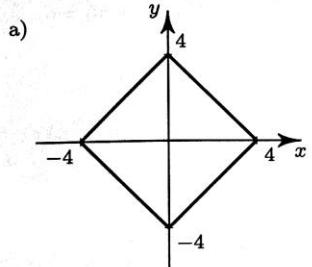
### 14.7 Další úlohy

- 87 Např.  $u_1 = B - A$ ,  $u_2 = C - A$  jsou lin. nezávislé. Jinak: platí trojúhelníková nerovnost.  
 88  $|AC| = |BC| = \sqrt{26}$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ . 89  $C_1[9; 5]$ ,  $C_2[-7; -1]$ . 90  $C[2; -1]$ .  
 91  $C_{1,2}[\pm 3 + 3\sqrt{3}; \pm 9 + \sqrt{3}]$ . 92  $B[-5; -6]$ ,  $C[-3; 0]$ . 93  $A[-2; 1]$ ,  $B[4; 3]$ ,  $C[10; -25]$ .  
 94  $A[-1; 1]$ ,  $B_1[-6; -4]$ ,  $B_2[4; 6]$ ,  $C_1[15; -11]$ ,  $C_2[-17; 13]$ . 95  $B[-19; 10]$ ,  $C[-1; 4]$ .  
 96  $A[\frac{2}{5}; \frac{12}{5}]$ ,  $B[-14; 9]$ . 97  $C[2; -6]$ . 98  $B[-10; -2]$ ,  $C[3; -6]$ .  
 99  $A[-5; 12]$ ,  $B[11; -4]$ ,  $C[-1; -2]$ . 100  $C_1[6; 7]$ ,  $C_2[1; \frac{9}{2}]$ .  
 101 a, b:  $x \pm \sqrt{3}y - 8 = 0$ , c:  $x = 0$ ,  $A[0; -\frac{8}{3}\sqrt{3}]$ ,  $B[0; \frac{8}{3}\sqrt{3}]$ .  
 102  $\alpha = \gamma = 100^\circ 18'$ ,  $\beta = \delta = 79^\circ 42'$ ,  $\omega = 47^\circ 44'$ .  
 103  $B[3; 1]$ ,  $D[1; -3]$ . 104  $C_1[0; 0]$ ,  $D_1[-1; -2]$ ,  $C_2[\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}]$ ,  $D_2[\frac{5}{5}; -\frac{5}{5}]$ .  
 105  $A[-2; 6]$ ,  $D[-6; 8]$ . 106  $C_1[6; -2]$ ,  $D_1[3; -6]$ ,  $C_2[-2; 4]$ ,  $D_2[-5; 0]$ .  
 107  $B[5; 12]$ ,  $C[-4; 11]$ ,  $D[-3; 2]$ . 108  $B[0; 7]$ ,  $D[-2; -1]$ .  
 109  $B[9; 8]$ ,  $C_1[23; 4]$ ,  $D_1[19; -10]$ ,  $C_2[-5; 12]$ ,  $D_2[-9; -2]$ .  
 110  $A[-4; -2]$ ,  $B[4; -4]$ ,  $C[6; 4]$ ,  $D[-2; 6]$ .  
 111  $A_1[2; 4]$ ,  $B_1[6; -2]$ ,  $C_1[12; 2]$ ,  $D_1[8; 8]$ ,  $A_2[1; -1]$ ,  $B_2[7; 3]$ ,  $C_2[11; -3]$ ,  $D_2[5; -7]$ .  
 112  $B_1[2; -2]$ ,  $C_1[2; 3]$ ,  $D_1[-3; 3]$ ,  $B_2[0; 2]$ ,  $C_2[4; -1]$ ,  $D_2[1; -5]$ .  
 113  $A[-8; -4]$ ,  $C[8; 4]$ ,  $D[-4; 8]$ . 114  $A[5; 3]$ ,  $B[-1; 5]$ ,  $C[-3; -1]$ ,  $D[3; -3]$ .  
 115  $A[0; 0]$ ,  $B[-3; -1]$ ,  $C[-2; -4]$ ,  $D[1; -3]$ . 116  $A[-2; 0]$ ,  $B[-4; -10]$ ,  $C[6; -12]$ ,  $D[8; -2]$ .  
 117  $A[10; 14]$ ,  $B[-6; 2]$ ,  $C[6; -14]$ ,  $D[22; -2]$ . 118  $A[-1; -1]$ ,  $B[0; 2]$ ,  $C[-3; 3]$ ,  $D[-4; 0]$ .  
 119  $C_1[3; -4]$ ,  $B_1[2; -6]$ ,  $D_1[5; -5]$ ,  $C_2[1; -8]$ ,  $B_2[2; -6]$ ,  $D_2[3; -9]$ .  
 120  $B[-8; 0]$ ,  $C[-2; -2]$ ,  $D[0; 4]$ . 121  $A[-8; -12]$ ,  $C[4; 12]$ ,  $D[-8; 3]$ .  
 122  $A_1[10; 0]$ ,  $C_1[3; 6]$ ,  $A_2[2; 4]$ ,  $C_2[11; 2]$ . 123  $B[-9; 7]$ ,  $C[-9; 5]$ ,  $D[1; 5]$ .  
 124  $C[-3; 14]$ ,  $D[5; 12]$ . 125  $B_1[0; 6]$ ,  $D_1[-4; 8]$ ,  $B_2[-\frac{8}{5}; \frac{46}{5}]$ ,  $D_2[-\frac{12}{5}; \frac{24}{5}]$ .

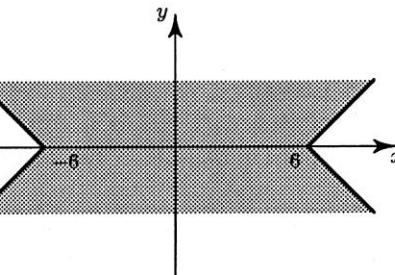
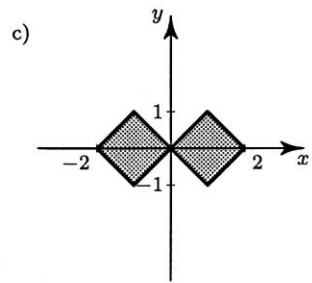
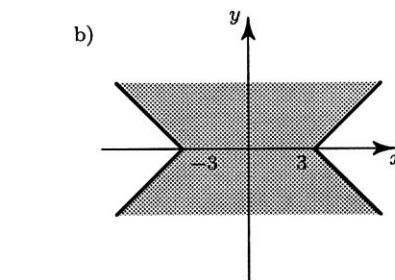
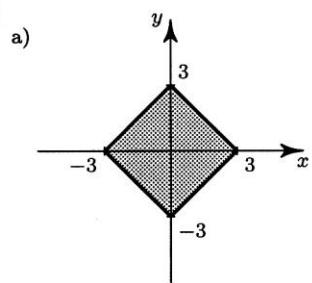
### 14.8 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

- 126 Osa úsečky AB:  $3x - 4y + 31 = 0$ . 127 X leží na úsečce  $u_X = \{[-2t; 1+4t], t \in \langle 0; 1 \rangle\}$ .  
 128 Osa pásu o:  $2x - y = 0$ . 129 p1:  $2x - y - 1 = 0$ ,  $p_2: 2x - y - 9 = 0$ . 130 Středy  
 $leží na přímce 2x - 2y + 3 = 0$ . 131 Dvě přímky  $o_1: 6x + 1 = 0$ ,  $o_2: 8y + 1 = 0$ .  
 132 Dvě rovnoběžné přímky  $m_1: 3x + y - 11 = 0$ ,  $m_2: 3x + y + 9 = 0$ . 133 Těžiště leží na  
 $polopřímce q = \{[\frac{1}{3}t; t], t \in (0; \infty)\}$ . 134 Těžiště leží na přímce  $3y - 4 = 0$  kromě bodu  
 $[\frac{17}{3}; \frac{4}{3}]$ . 135 Body X leží na přímce  $x - 2y - 9 = 0$  kromě bodu  $V[3; -3]$ .

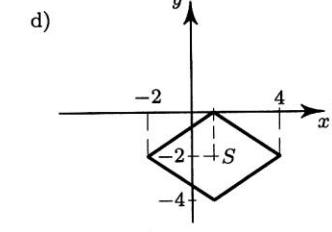
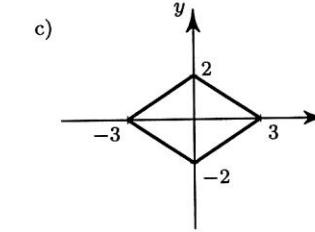
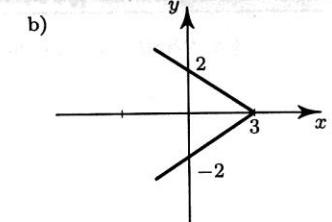
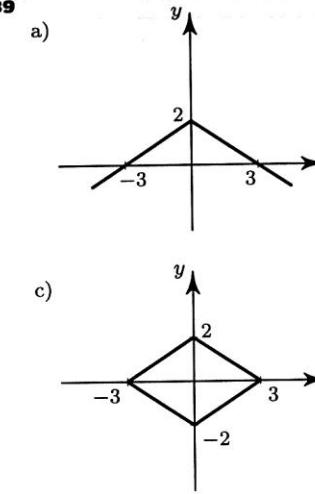
- 136** Zvolíme-li souřadnicovou soustavu tak, aby souřadnicové osy byly totožné s danými přímkami  $p, q$ , potom lze výsledky psát: a) čtverec s vrcholy  $[\pm 5; 0], [0; \pm 5]$ ; b) 8 polopřímek  $y = \pm x \pm 5 \wedge x \in (-\infty; -5) \cup (0; \infty)$ ,  $y = \pm x \mp 5 \wedge x \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty)$ ; c) 4 přímky  $y = \pm \frac{1}{5}x$ ,  $y = \pm 5x$ .

**137**

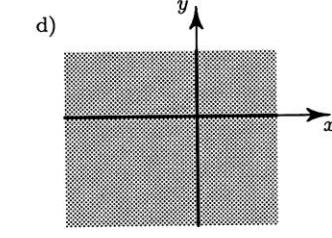
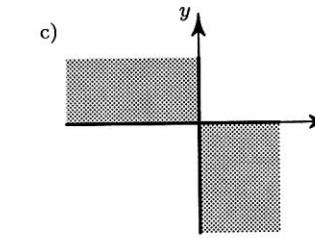
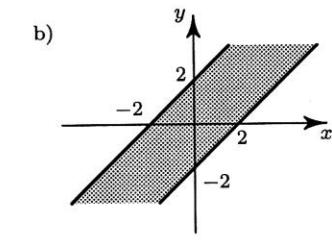
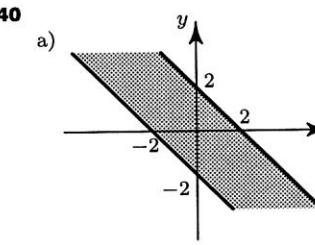
K řešení úlohy 137

**138**

K řešení úlohy 138

**139**

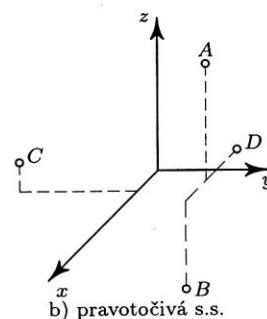
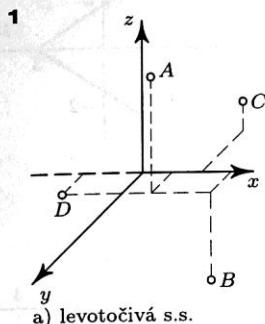
K řešení úlohy 139

**140**

K řešení úlohy 140

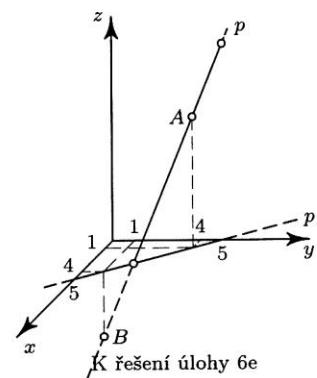
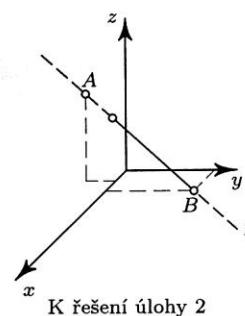
## 15 Analytická geometrie v prostoru

### 15.1 Přímka v prostoru



K řešení úlohy 1

2  $p: x = 1 + t, y = -1 + 4t, z = 3 - 3t, t \in \mathbb{R}, P_{xy}[2; 3; 0], P_{xz}[\frac{5}{4}; 0; \frac{9}{4}], P_{yz}[0; -5; 6]$ .



3 a)  $C \notin p, D \in p$ ; b)  $E[9; -10; -3]$ .

4 a)  $K \notin \leftrightarrow AB, L \in \leftrightarrow AB$ ; b)  $M[\frac{3}{2}; 3; -\frac{3}{4}]$ .

5  $P_{xz}[2; 0; 4], P_{xy}[2; 1; 0], P_{yz}$  neexistuje.

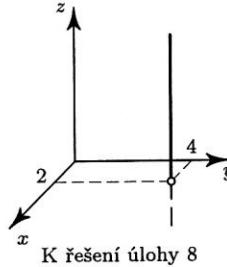
6  $x = 1 + t, y = 4 - t, z = 6 - 3t$ , a)  $t \in \mathbb{R}$ ; b)  $t \in \langle 0; 3 \rangle$ ; c)  $t \in (-\infty; 3)$ ; d)  $x = 1 + k, y = 4 - k, z = 0, k \in \mathbb{R}$ .

7  $x = k, y = 4 - k, z = 5 + 5k, k \in \mathbb{R}$ .

8  $x = 2, y = 4, z = 1 + k, k \in \mathbb{R}$ .

9  $x = 1, y = -2 - 2t, z = 3 + 3t, t \in \mathbb{R}$ .

10  $x = k, y = 0, z = 0, k \in \mathbb{R}$ .



### 15.2 Vzájemná poloha přímek v prostoru

11 a)  $p, q$  různoběžky,  $P[-4; 5; 4]$ ; b)  $p, q$  různé rovnoběžky; c)  $p = q$ ; d), e)  $p, q$  mimoběžky; f)  $p, q$  různoběžky,  $P[2; 4; 3]$ .

12 a)  $p, q$  mimoběžky; b)  $p, q$  různé rovnoběžky.

13 Pro  $m = -2$  je průsečík  $P[5; -3; 4]$ .

14 Pro  $a = -13$  je  $p = q$ , pro  $a \neq -13$  jsou  $p, q$  různé rovnoběžky.

15 Pro  $m = 2$  jsou  $p, q$  různoběžky,  $P[3; 2; -1]$ , pro  $m \neq 2$  jsou  $p, q$  mimoběžky.

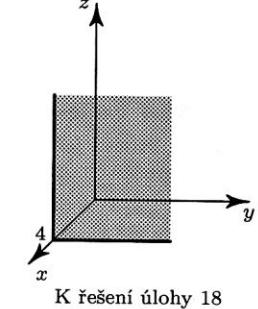
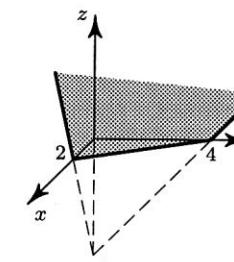
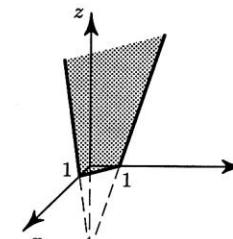
### 15.3 Rovina

#### Parametrické rovnice roviny

16 Např.  $x = 2 - t + k, y = 1 - t - 3k, z = 6 - 6t - 6k, t, k \in \mathbb{R}$ ; a)  $P_x[1; 0; 0], P_y[0; 1; 0], P_z[0; 0; -3]$ ; c)  $K$  leží v rovině,  $L$  neleží v rovině; d)  $z = -6$ .

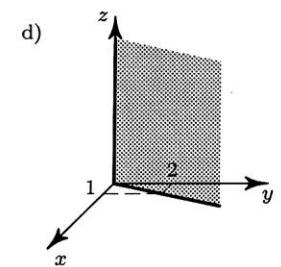
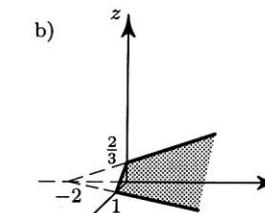
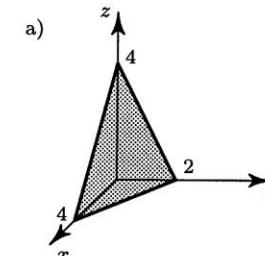
17 a)  $P_x[2; 0; 0], P_y[0; 4; 0], P_z[0; 0; -4]$ ;

b)  $p_{xy} = \{[2+t; -2t; 0], t \in \mathbb{R}\}, p_{xz} = \{[2+k; 0; 2k], k \in \mathbb{R}\}, p_{yz} = \{[0; 4+m; m], m \in \mathbb{R}\}$ .



#### Obecná rovnice roviny

19 a)  $x + 2y + z - 4 = 0$ ; b)  $2x - y + 3z - 2 = 0$ ; c) Body  $A, B, C$  leží na přímce, rovinu neurčují; d)  $2x - y = 0$ .



K řešení úlohy 19

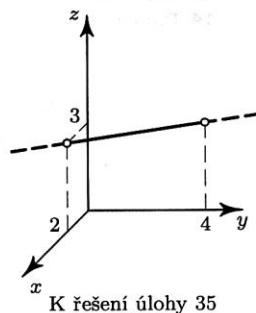
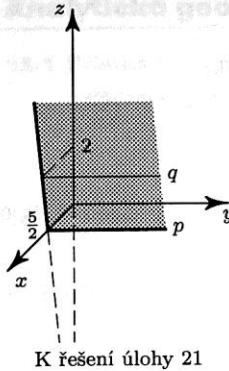
20 a)  $x + 5y - 2z + 15 = 0$ ; b)  $x - 2y + 6 = 0$ ; c)  $6x + 3y + 2z - 12 = 0$ .

21  $4x - z - 10 = 0$ . 22  $2y - z - 1 = 0$ . 23  $2x - y - z = 0$ . 24  $x + y + z - 4 = 0$ .

25  $\varrho: 2x - y - 4 = 0$ . 26  $\sigma: x - z + 2 = 0$ . 27  $\psi: 2x - y = 0$ .

28  $\tau: x - 4 = 0$ . 29  $\varrho: x + 3y + 3z - 11 = 0$ . 30  $\tau: 3x + y + 5z - 35 = 0$ .

31 a)  $3x + 2y + z - 6 = 0$ ; b)  $2x - y + 2z - 4 = 0$ ; c)  $5x + 10y - 2z - 10 = 0$ ; d)  $x + y - 3 = 0$ ; e)  $x + 2z - 2 = 0$ ; f)  $2x - 3y = 0$ ; g)  $y - 4 = 0$ ; h)  $z = 0$ ; i)  $x - 2 = 0$ .

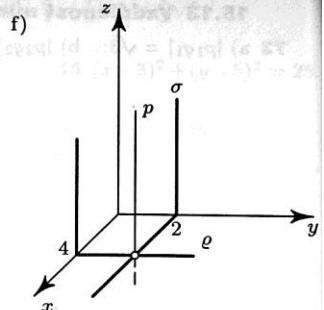
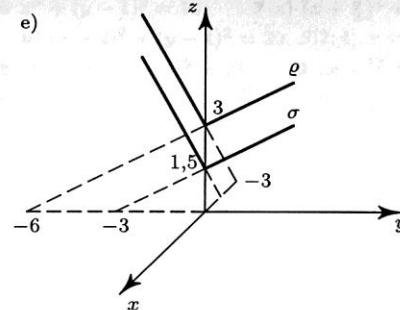
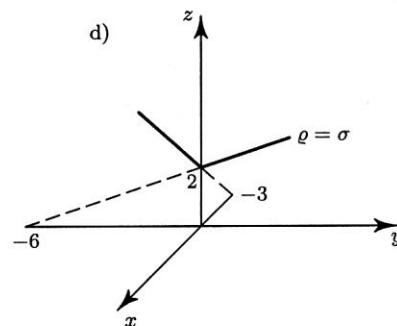
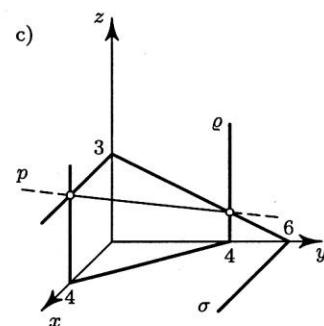
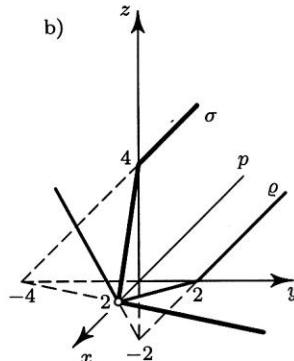
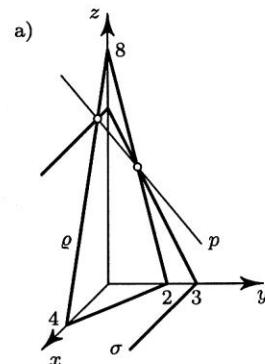


#### 15.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

- 32 a) Přímka je různoběžná s rovinou,  $P[0; -1; 3]$ ; b)  $p \parallel \varrho \wedge p \cap \varrho = \emptyset$ ; c) přímka leží v rovině. 33 Přímka je různoběžná s rovinou,  $P[4; \frac{3}{2}, \frac{13}{2}]$ . 34  $p \parallel \sigma \wedge p \cap \sigma = \emptyset$ .  
 35  $p \parallel \varrho_{xy}$ . 36 a)  $p$  je různoběžná s  $\varrho \Leftrightarrow b \neq -\frac{1}{2} \wedge a \in \mathbb{R}$ ; b)  $p \subset \varrho \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \wedge a = 10$ ; c)  $p \parallel \varrho \wedge p \cap \varrho = \emptyset \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \wedge a \neq 10$ .

#### 15.5 Vzájemná poloha dvou rovin

- 37 a) Různoběžné roviny,  $p = \{[t; 1-t; 4+2t], t \in \mathbb{R}\}$ ; b) různoběžné roviny,  $p = \{[2; t; t], t \in \mathbb{R}\}$ ; c) různoběžné roviny,  $p = \{[-2+2t; 6-2t; t], t \in \mathbb{R}\}$ ; d)  $\varrho = \sigma$ ; e) různoběžné roviny; f) různoběžné roviny  $p = \{[4; 2; t], t \in \mathbb{R}\}$ .



K řešení úlohy 37

38 Roviny jsou totožné.

39 a)  $\varrho \parallel \sigma \Leftrightarrow a = -1 \wedge b = -4$ ; b)  $\varrho \times \sigma \Leftrightarrow a \neq -1 \vee b \neq -4$ ; c)  $\varrho \perp \sigma \Leftrightarrow a = 1 - 4b$ .

#### 15.6 Vzájemná poloha tří rovin

- 40 a) Tři různoběžné roviny, společný bod  $P[1; -1; 2]$ ; b) tři různoběžné roviny, žádný společný bod; c) tři různoběžné roviny, společná přímka  $p = \{[t; -1-t; -t], t \in \mathbb{R}\}$ ; d) dvě různoběžné roviny, třetí je s nimi různoběžná.

#### 15.7 Odchylka dvou přímek

- 41 a)  $\varphi = 30^\circ$ ; b)  $\varphi = 90^\circ$ ; c)  $\varphi = 0^\circ$ ; d)  $\varphi = 45^\circ$ . 42 a)  $\alpha = 135^\circ$ ; b)  $|\angle ACD| = 45^\circ$ . 43 a)  $\alpha = 53^\circ 58'$ ; b)  $\beta = 78^\circ 41'$ ; c)  $\gamma = 38^\circ 20'$ ; d) platí. 44 a)  $M[\frac{7}{2}; \frac{1}{2}; -3]$ ; b)  $M_1[2; 2; -3]$ ,  $M_2[5; -1; -3]$ . 45  $\varphi = 54^\circ 44'$ .  
 46  $a = \frac{1}{2} \wedge b = -\frac{1}{2}$ . 47  $p = \{[\frac{1}{2} - 2t; 1 - 2t; 2 + t], t \in \mathbb{R}\}$ .

#### 15.8 Odchylka přímky od roviny

- 48 a)  $\varphi = 45^\circ$ ; b)  $\varphi = 90^\circ$ ,  $p \perp \varrho$ ; c)  $\varphi = 0^\circ$ ,  $p \parallel \varrho$ ,  $p \cap \varrho = \emptyset$ ; d)  $\varphi = 0^\circ$ ,  $p \subset \varrho$ .  
 49  $\varphi = 19^\circ 28'$ . 50  $\varphi = 30^\circ$ . 51 a)  $a = 1$ ; b)  $a = -2$ ; c)  $a_{1,2} = -8 \pm 3\sqrt{6}$ .

#### 15.9 Odchylka dvou rovin

- 52 a)  $\varphi = 60^\circ$ ; b)  $\varphi = 90^\circ$ ; c)  $\varphi = 0^\circ$ ; d)  $\varphi = 45^\circ$ . 53  $\varphi = 70^\circ 32'$ .  
 54 a)  $a = 5$ ; b)  $a = -1$ .

#### 15.10 Vzdálenost dvou bodů v prostoru

- 55  $o = 10 + 4\sqrt{3}$ . 56  $X[\frac{1}{8}; 0; 0]$ . 57  $Y_1[0; 6; 0]$ ,  $Y_2[0; 2; 0]$ . 58  $C[0; 0; 2]$ .  
 59  $M_1[\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{7}{3}]$ ,  $M_2[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{11}{3}]$ .

#### 15.11 Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

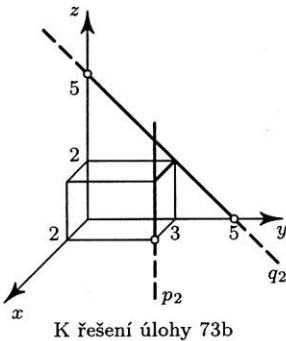
- 60 a)  $|Ap| = \sqrt{3}$ ; b)  $|Ap| = 6$ ; c)  $|Ap| = 0$ ,  $A \in p$ ; d)  $|Ap| = 2$ . 61  $|v_a| = 3\sqrt{2}$ .  
 62  $X[3 \pm \sqrt{6}; 0; 0]$ . 63  $M_1[-1; 2; -3]$ ,  $M_2[\frac{17}{3}; 2; \frac{11}{3}]$ . 64  $\frac{1}{2}\sqrt{14}$ .  
 65  $M_1[6; -3; 4]$ ,  $M_2[-2; 5; 4]$ ,  $M_3[-2; -3; -4]$ ,  $M_4[-10; 5; -4]$ .

#### 15.12 Vzdálenost bodu od roviny

- 66  $|A\varrho| = 2$ . 67  $Z_1[0; 0; -16]$ ,  $Z_2[0; 0; 14]$ . 68  $2\sqrt{2}$ . 69  $|\varrho\sigma| = \frac{2}{3}$ . 70  $M_1[1; 4; 6]$ ,  $M_2[25; 28; 102]$ . 71  $M_1[10; -1; 7]$ ,  $M_2[-18; 6; -7]$ . 72  $z_M = 13$ ,  $z_M = -17$ .

### 15.13 Vzdálenost mimoběžek

73 a)  $|p_1 q_1| = \sqrt{3}$ ; b)  $|p_2 q_2| = 2$ .



### 15.14 Souměrnosti v prostoru

74  $A'[-17; 5; 6]$ . 75  $A'[0; 11; -2]$ . 76  $C'[0; -1; 0]$ . 77  $M'[-3; 8; 6]$ .

78 a)  $p' = \{-2 - 2t; -1 - t; -3 + 2t\}, t \in \mathbb{R}$ ; b)  $p' = \{6 - 2t; -3 - t; 3 + 2t\}, t \in \mathbb{R}$ .

79 a)  $p' = \{1 - 13t; -1 + 11t; 3 - 2t\}, t \in \mathbb{R}$ ; b)  $p' = \{4 + t; -7 - 2t; t\}, t \in \mathbb{R}$ ;

c)  $p' = \{5 + t; -9 + 2t; -1 + t\}, t \in \mathbb{R}$ . 80  $\varrho': x - 2y + z + 4 = 0$ ;  $\sigma_1: 3x - 3y + 2z + 4 = 0$ .

81 Bod odrazu je  $[3; 2; 6]$ .

### 15.15 Další úlohy

82  $|AB| = |BC| = |CD| = 3$ ,  $AB \perp BC \wedge AB \perp AD$ , body  $A, B, C, D$  leží v jedné rovině. 83 Body  $K, L, M, N$  neleží v jedné rovině. 84  $CD \parallel AB \wedge |AB| = 2|CD|$ .

85  $\triangle KLM$  je pravoúhlý, pravý úhel je u vrcholu  $K$ ,  $X[0; 1; -2]$ . 86  $m = 3$ .

### 15.16 Úlohy na tělesech

87  $X_1 \in \leftrightarrow AE$ ,  $|AX_1| = 5\frac{3}{5}$ ,  $X_2 \in AB$ ,  $|X_2B| = \frac{1}{2}$ ,  $X_3 \in CG$ ,  $|CX_3| = 2\frac{2}{5}$ .

88  $X_1 \in AV$ ,  $|AX_1| = \frac{1}{7}\sqrt{11}$ ,  $X_2 \in \leftrightarrow VB$ ,  $|BX_2| = \frac{3}{5}\sqrt{11}$ ,  $X_3 \in CV$ ,  $|CX_3| = \frac{9}{11}\sqrt{11}$ .

89  $|P_1 P_2| = \frac{1}{3}\sqrt{29}$ . 90  $|ST| = \frac{1}{3}\sqrt{67}$ . 91 a) Průminka  $AG$  je rovnoběžná s rovinou  $KLM$ ; b)  $|DP| : |PF| = 5 : 3$ , kde  $P \in FD \cap \leftrightarrow KLM$ . 92  $X$  leží tak, že  $S_1$  je střed úsečky  $XS_2$ . 93  $\frac{2}{5}\sqrt{145}$ . 94  $3\sqrt{2}$ . 95  $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ .

96 a)  $\varphi = 78^\circ 54'$ ; b)  $\varphi = 15^\circ 48'$ ; c)  $\varphi = 45^\circ$ .

97 a)  $v = \frac{9}{17}\sqrt{34}$ ; b)  $\varphi = 69^\circ 46'$ ; c)  $\varphi = 18^\circ 04'$ ; d)  $\varphi = 46^\circ 41'$ .

98 a)  $\varphi = 90^\circ$ ; b)  $\varphi = 90^\circ$ ; c)  $\varphi = 70^\circ 32'$ . 99  $v = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ . 100  $v = \frac{3}{5}\sqrt{10}$ .

## 16 Kuželosečky

### 16.1 Kružnice

1 a)  $S[0; 0], r = 3$ ; b)  $S[1; 0], r = 4$ ; c)  $S[-2; 3], r = \sqrt{2}$ . 2  $x^2 + y^2 = 2$ .

3  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ ,  $P_{x_{1,2}}[2 \pm 2\sqrt{6}; 0], P_{y_{1,2}}[0; 1 \pm \sqrt{21}]$ . 4  $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 5$ .

5 a)  $(x + 1)^2 + y^2 = 20$ ; b)  $x^2 + (y + \frac{1}{3})^2 = \frac{130}{9}$ ; c)  $(x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{125}{8}$ ;

d)  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$ ; e)  $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 100$ ;

f) nekonečně mnoho řešení  $(x + 3b + 1)^2 + (y - b)^2 = 10b^2 + 20b + 20$ .

6  $x^2 + (y - 1)^2 = 10$ . 7 a)  $(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$ ,  $S[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}], r = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ ;

b)  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$ ,  $S[2; 4], r = 2\sqrt{5}$ .

8  $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$ . 9  $(x - \frac{13}{3})^2 + (y + 4)^2 = \frac{169}{9}$ . 10  $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ .

11  $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$ ,  $(x - 52)^2 + (y + 29)^2 = 25$ .

12  $(x - 7)^2 + y^2 = 20$ ,  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$ . 13  $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 36$ .

14  $(x - 9)^2 + (y - 10)^2 = 100$ ,  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ . 15  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ,  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ . 16  $(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ .

17  $(x - 15)^2 + (y + 15)^2 = 225$ ,  $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ . 18  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ,  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ . 19  $(x - 13)^2 + (y + 14)^2 = 225$ ,  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ .

20  $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{4}{2}$ . 21  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8$ ,  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$ .

22  $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{9}{2})^2 = \frac{25}{2}$ ,  $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ . 23  $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 1$ .

24  $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$ ,  $(x + \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{2}$ . 25 a)  $(x + 2)^2 + (y - 11)^2 = 9$ ; b)  $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 9$ ; c)  $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = \frac{9}{4}$ ; d)  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$ .

### 16.2 Ellipsa

26 a)  $S[0; 0], a = 3, b = 2, e = \sqrt{5}, F_{1,2}[\pm\sqrt{5}; 0]$ ;

b)  $S[0; 0], a = 10, b = 2, e = 4\sqrt{6}, F_{1,2}[0; \pm 4\sqrt{6}]$ ;

c)  $S[1; -3], a = 1, b = \frac{\sqrt{2}}{2}, e = \frac{\sqrt{2}}{2}, F_{1,2}[1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; -3]$ .

27  $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ . 28  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$ . 29  $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$ .

30  $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ . 31  $\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ . 32  $\frac{(x+\frac{1}{4})^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y+\frac{1}{4})^2}{\frac{25}{4}} = 1$ .

33 a)  $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ ; b)  $\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ . 34  $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ .

35  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ . 36  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$ . 37  $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

38  $\frac{(x+3)^2}{400} + \frac{(y-1)^2}{100} = 1$ . 39  $\frac{(x+2)^2}{100} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ . 40  $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ .

### 16.3 Hyperbola

41 a)  $S[0; 0], a = 3, b = 2, e = \sqrt{13}, F_{1,2}[\pm\sqrt{13}; 0], y = \pm\frac{2}{3}x$ ;

b)  $S[0; 0], a = 2, b = 3, e = \sqrt{13}, F_{1,2}[\pm\sqrt{13}; 0], y = \pm\frac{3}{2}x$ ;

c)  $S[0; 0], a = 3, b = 2, e = \sqrt{13}, F_{1,2}[0; \pm\sqrt{13}], y = \pm\frac{3}{2}x$ ;

d)  $S[0; 0], a = 2, b = 2, e = 2\sqrt{2}, F_{1,2}[\pm 2\sqrt{2}; 0], y = \pm x$ ;

e)  $S[1; -2], a = 4, b = 2, e = 2\sqrt{5}, F_{1,2}[1 \pm 2\sqrt{5}; -2], y + 2 = \pm\frac{1}{2}(x - 1)$ ;

f)  $S[0; 3], a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = 1, e = \frac{\sqrt{6}}{2}, F_{1,2}[\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; 3], y - 3 = \pm\sqrt{2}x$ .

42  $\frac{(x-8)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . 43  $\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$ . 44  $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$ .

45  $\frac{(x-4)^2}{50} - \frac{(y-2)^2}{50} = 1$ . 46  $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$ .

47 a)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ ; b)  $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{1} = 1$ .

48 a)  $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1$ ; b)  $\frac{(y-\frac{9}{5})^2}{\frac{9}{5}} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ . 49  $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{60} = 1$ .

50  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ . 51  $\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ . 52  $\frac{x^2}{40} - \frac{(y-1)^2}{360} = 1$ .

53 Dvě řešení,  $\frac{y^2}{80} - \frac{x^2}{20} = 1$ ,  $\frac{(x-5)^2}{5} - \frac{(y-10)^2}{20} = 1$ .

54 a)  $\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(y-3)^2}{27} = 1$ ; b)  $\frac{(y-4)^2}{12} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$ .

55 a) 2; b). 56 a)  $a = b = \sqrt{2}, e = 2, F_{1,2}[\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2}]$ .

**16.4 Parabola**

- 57** a)  $V[0; 0], F[\frac{5}{2}; 0]$ , d:  $x = -\frac{5}{2}$ ; b)  $V[0; 0], F[0; 1]$ , d:  $y = -1$ ; c)  $V[0; 0], F[-\frac{3}{2}; 0]$ , d:  $x = \frac{3}{2}$ ; d)  $V[0; 0], F[0; -\frac{1}{8}]$ , d:  $y = \frac{1}{8}$ . **58** a)  $y^2 = 8x$ ; b)  $y^2 = -6x$ ; c)  $x^2 = -48y$ ; d)  $x^2 = y$ . **59** a)  $y^2 = 4x$ ; b)  $x^2 = -12y$ ; c)  $y^2 = -32x$ ; d)  $x^2 = 44y$ .
- 60** a)  $(y+5)^2 = -8(x-2)$ ; b)  $(y+5)^2 = 20(x-2)$ ; c)  $(x-2)^2 = -40(y+5)$ ; d)  $(x-2)^2 = 4(y+5)$ . **61** a)  $(x-3)^2 = -12(y-2)$ ; b)  $(x-3)^2 = 4(y+2)$ ; c)  $(y+1)^2 = -8(x-5)$ ; d)  $(y+1)^2 = 4(x-2)$ . **62** a)  $x^2 = 2y$ ; b)  $x^2 = -\frac{2}{3}y$ .
- 63** a)  $y^2 = -\frac{1}{4}x$ ; b)  $y^2 = 4x$ . **64**  $(y+4)^2 = -16(x-4)$ . **65**  $(x-2)^2 = y-1$ .
- 66** a)  $(y+2)^2 = \frac{16}{3}(x+4)$ ; b)  $(x+4)^2 = \frac{9}{4}(y+2)$ . **67** a)  $(x-1)^2 = 4(y+4)$ ; b)  $(y+4)^2 = -9(x-1)$ . **68**  $(x-3)^2 = 4(y-1)$ . **69**  $(x-2)^2 = -16(y-4)$ .
- 70** Dvě řešení,  $(y+2)^2 = \pm 4(x \pm 1)$ . **71**  $(y-2)^2 = 4(x+6)$ . **72**  $(x+3)^2 = -2(y-5)$ .
- 73** Dvě řešení,  $(y-\frac{7}{2})^2 = 6(x+\frac{1}{24})$ ,  $(x-2)^2 = y$ .

**16.5 Obecná rovnice kuželosečky****Kružnice**

- 74** a) Kružnice  $S[1; -2]$ ,  $r = 3$ ; b) bod  $[2; 3]$ ; c) neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici; d) kružnice  $S[-3; \frac{1}{2}]$ ,  $r = \frac{1}{2}$ ; e) kružnice  $S[0; 2]$ ,  $r = \frac{5}{2}$ ; f) kružnice  $S[\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{6}]$ ,  $r = \frac{1}{3}$ .

**Elipsa**

- 75** a) Elipsa  $S[1; 2]$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $e = \sqrt{5}$ ,  $F_{1,2}[1 \pm \sqrt{5}; 2]$ ; b) bod  $[3; -1]$ ; c) neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici; d) elipsa  $S[2; 1]$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{3}$ ,  $e = \frac{\sqrt{5}}{6}$ ,  $F_{1,2}[2 \pm \frac{\sqrt{5}}{6}; 1]$ ; e) elipsa  $S[\frac{1}{2}; 0]$ ,  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $F_{1,2}[\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ; f) elipsa  $S[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $e = \sqrt{3}$ ,  $F_{1,2}[-\sqrt{2}; \sqrt{2} \pm \sqrt{3}]$ .

**Hyperbola**

- 76** a) Hyperbola  $S[0; 1]$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $e = \sqrt{13}$ ,  $F_{1,2}[\pm \sqrt{13}; 1]$ ,  $a_{1,2}: y-1 = \pm \frac{2}{3}x$ ; b) hyperbola  $S[0; 1]$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $e = \sqrt{13}$ ,  $F_{1,2}[0; 1 \pm \sqrt{13}]$ ,  $a_{1,2}: y-1 = \pm \frac{3}{2}x$ ; c) hyperbola  $S[0; -1]$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $e = \sqrt{13}$ ,  $F_{1,2}[\pm \sqrt{13}; -1]$ ,  $a_{1,2}: y+1 = \pm \frac{3}{2}x$ ; d) hyperbola (rovnoosá)  $S[0; 0]$ ,  $a = b = 1$ ,  $e = \sqrt{2}$ ,  $F_{1,2}[\pm \sqrt{2}; 0]$ ,  $a_{1,2}: y = \pm x$ ; e) dvě přímky  $p_1: x-2y=0$ ,  $p_2: x+2y+4=0$ , průsečík  $[-2; -1]$ ; f) hyperbola  $S[-2; -\frac{1}{2}]$ ,  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $F_{1,2}[-2 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{1}{2}]$ ,  $a_{1,2}: y + \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}(x+2)$ .

**Parabola**

- 77** a) Parabola  $V[1; 0]$ ,  $F[1; 1]$ , d:  $y = -1$ ; b) parabola  $V[-2; 1]$ ,  $F[-2; \frac{1}{2}]$ , d:  $y = \frac{3}{2}$ ; c) parabola  $V[2; 1]$ ,  $F[\frac{11}{4}; 1]$ , d:  $x = \frac{5}{4}$ ; d) parabola  $V[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$ ,  $F[0; \frac{1}{2}]$ , d:  $x = \frac{1}{2}$ ; e) parabola  $V[3; 0]$ ,  $F[\frac{49}{16}; 0]$ , d:  $x = \frac{47}{16}$ ; f) parabola  $V[\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}]$ ,  $F[\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$ , d:  $y = -2$ .

**Další úlohy**

- 78** a) Elipsa  $S[-3; 1]$ ,  $a = \sqrt{6}$ ,  $b = 2$ ,  $e = \sqrt{2}$ ,  $F_{1,2}[-3 \pm \sqrt{2}; 1]$ ; b) parabola  $V[1; 0]$ ,  $F[2; 0]$ , d:  $x = 0$ ; c) bod  $[-2; 3]$ ; d) hyperbola  $S[-2; 3]$ ,  $a = 3$ ,  $b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,  $e = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ,  $F_{1,2}[-2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{6}; 3]$ ,  $a_{1,2}: y-3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$ ; e) parabola  $V[1; \frac{1}{5}]$ ,  $F[1; \frac{29}{20}]$ , d:  $y = -\frac{21}{20}$ ; f) kružnice  $S[0; 1]$ ,  $r = 2$ ; g) neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici; h) hyperbola  $S[1; 0]$ ,  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $e = \sqrt{10}$ ,  $F_{1,2}[1 \pm \sqrt{10}; 0]$ ,  $a_{1,2}: y = \pm \frac{1}{3}(x-1)$ ; i) parabola  $V[\frac{4}{3}; 0]$ ,  $F[\frac{7}{12}; 0]$ , d:  $x = \frac{25}{12}$ ; j) hyperbola  $S[\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}]$ ,  $a = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,  $e = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ ,  $F_{1,2}[\frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{6}}{4}]$ ,  $a_{1,2}: y + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{3}{2})$ ; k) kružnice  $S[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}]$ ,  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; l) dvě různoběžné přímky  $p_1: x-y+1=0$ ,  $p_2: x+y=0$ , průsečík  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .

**Obecná rovnice kuželosečky s parametrem**

<b>79</b> a)	$p > -\frac{1}{4}$	kružnice $S[-\frac{1}{2}; 0]$ , $r = \sqrt{p+0,25}$
	$p = -\frac{1}{4}$	bod $[-\frac{1}{2}; 0]$
	$p < -\frac{1}{4}$	souřadnice žádného bodu rovnici nesplňují
b)	$p < 8$	elipsa $S[2; 1]$ , $a = \sqrt{8-p}$ , $b = \frac{\sqrt{8-p}}{2}$
	$p = 8$	bod $[2; 1]$
	$p > 8$	souřadnice žádného bodu rovnici nesplňují
c)	$p > 3$	hyperbola $S[1; -1]$ , $a = \sqrt{p-3}$ , $b = \frac{\sqrt{p-3}}{2}$ , $F_{1,2}[1 \pm \frac{\sqrt{5p-15}}{2}; -1]$
	$p = 3$	dvě přímky $y+1 = \pm \frac{1}{2}(x-1)$
	$p < 3$	hyperbola $S[1; -1]$ , $a = \frac{\sqrt{p-3}}{2}$ , $b = \sqrt{p-3}$ , $F_{1,2}[1; -1 \pm \frac{\sqrt{5p-15}}{2}]$
d)	$\forall p \in \mathbb{R}$ parabola, $V[\frac{p}{2}; \frac{p^2}{16}]$ , $F[\frac{p}{2}-1; \frac{p^2}{16}]$ , d: $y = \frac{p}{2} + 1$ .	
e)	$p \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$	kružnice $S[-p; -2]$ , $r = \sqrt{p^2-4}$
	$p = \pm 2$	bod $[-p; -2]$
	$p \in (-2; 2)$	souřadnice žádného bodu rovnici nesplňují
f)	$p \neq 0$	elipsa $S[0; -\frac{p}{2}]$ , $a = \frac{ p }{2}$ , $b = \frac{ p \sqrt{2}}{4}$ , $F_{1,2}[0; -\frac{p}{2} \pm \frac{ p \sqrt{2}}{4}]$
	$p = 0$	bod $[0; -\frac{p}{2}]$
g)	$p = 0$	dvě přímky $x = \pm 2\sqrt{5}$
	$p = 1$	kružnice $S[0; 0]$ , $r = 2\sqrt{5}$
	$p = -1$	rovnoosá hyperbola $S[0; 0]$ , $a = b = 2\sqrt{5}$
	$p = 5$	elipsa $S[0; 0]$ , $a = 2\sqrt{5}$ , $b = 2$
	$p = -5$	hyperbola $S[0; 0]$ , $a = 2\sqrt{5}$ , $b = 2$

**16.6 Vnitřní (vnější) oblast kuželosečky**

- 80** a) D vnitřní, A, B vnější; b) A, C vnitřní, B vnější, D leží na elipse; c) C, D vnitřní, A, B vnější; d) B vnitřní, C, D vnější, A leží na hyperbole; e) A, C, D vnitřní, B vnější; f) B vnitřní, A, D vnější, C leží na parabole.

**16.7 Kuželosečka a přímka**

- 81** a)  $p$  je sečna elipsy,  $P_1[2; 2]$ ,  $P_2[1; 4]$ ; b)  $p$  je vnější přímka hyperbolu; c)  $p$  je tečna paraboly  $T[2; 1]$ ; d)  $p$  je asymptotická přímka hyperbolu  $P[-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}]$ .
- 82** a) sečna  $P_1[4; 6]$ ,  $P_2[1; -3]$ ; b) společný jeden bod  $P_1[4; 6]$ ; c) společný jeden bod  $P_1[1 + \sqrt{5}; 2 - 2\sqrt{5}]$ .
- 83** a)  $|k| < \sqrt{2}$  sečna,  $|k| = \sqrt{2}$  tečna,  $|k| > \sqrt{2}$  vnější přímka; b)  $|k| < \sqrt{5} \wedge |k| \neq \pm 1$  sečna,  $|k| = \sqrt{5}$  tečna,  $|k| > \sqrt{5}$  vnější přímka,  $|k| = \pm 1$  asymptotická přímka; c)  $|k| < \frac{\sqrt{3}}{3}$  sečna,  $|k| = \frac{\sqrt{3}}{3}$  tečna,  $|k| > \frac{\sqrt{3}}{3}$  vnější přímka; d)  $k = 0$  tečna,  $k \neq 0$  sečna.
- 84** a)  $|c| < 2$  sečna,  $|c| = 2$  tečna,  $|c| > 2$  vnější přímka; b)  $c < 16$  sečna,  $c = 16$  tečna,  $c > 16$  vnější přímka; c)  $|c| < 3$  sečna,  $|c| = 3$  tečna,  $|c| > 3$  vnější přímka; d)  $c = 0$  asymptota,  $c \neq 0$  asymptotická přímka.
- 85**  $|a| < 2$  sečna,  $|a| = 2$  tečna,  $|a| > 2$  vnější přímka. **86**  $r = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . **87**  $p = -\frac{1}{2}$ .
- 88**  $m = \frac{1}{2}$ . **89**  $n = -1$ .

## 16.8 Tečna v bodě kuželosečky

- 90 a)  $5x + y - 10 = 0$ ; b)  $x - 2y - 10 = 0$ ; c)  $4x + y + 6 = 0$ ; d)  $x - 1 = 0$ .

## 16.9 Tečna z bodu ke kuželoseče

- 91 a) Nelze; b) lze; c), d) lze. 92 a)  $y = -x$ ,  $T[2; -2]$ ,  $y = \frac{1}{5}x$ ,  $T[\frac{10}{3}; \frac{2}{3}]$ ; b)  $y = -1$ ,  $T[2; -1]$ ,  $y = \frac{4}{5}x - 1$ ,  $T[\frac{6}{5}; \frac{3}{5}]$ ; c)  $y = 0$ ,  $T[0; 0]$ ,  $y = \frac{3}{4}(x+3)$ ,  $T[-\frac{3}{5}; \frac{9}{5}]$ ; d)  $y = x - 2$ ,  $T[3; 1]$ ,  $y = -x$ ,  $T[3; -3]$ . 93 a)  $90^\circ$ ; b)  $60^\circ$ ; c)  $90^\circ$ ; d)  $120^\circ$ .

## 16.10 Tečna rovnoběžná s danou přímkou

- 94 a)  $y = -x - 2$ ; b)  $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{5}{3}$ ; c)  $y = 2x$ ,  $y = 2x - 15$ ; d)  $y = 4x - 1$ ,  $y = 4x - 7$ ; e) neexistuje; f) neexistuje.

## 16.11 Tečna kolmá k dané přímce

- 95 a)  $y = -\frac{x}{2}$ ,  $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ ; b)  $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{5}{3}$ ; c)  $y = -x \pm 3$ ; d)  $y = 4$ .

## 16.12 Tečna daným směrem

- 96 a)  $y = x \pm 3$ ; b)  $y = -x + 3$ ; c)  $y = \sqrt{3}x \pm \frac{1}{2}$ ; d)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \pm 2\sqrt{10}$ .

- 97 a)  $y = 2x - 5$ ; b)  $y = 2x - 10$ ; b)  $y = -3x - \frac{1}{6}$ .

## 16.13 Další úlohy

- 98 a) 16; b)  $4\sqrt{2}$ ; c)  $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ ; d)  $4\sqrt{2}$ . 99  $A[0; 0]$ ,  $B[4; -4]$ ,  $C[8; 0]$ ,  $D[4; 4]$ ,  $a = 4\sqrt{2}$ .  
 100  $x^2 = \pm\sqrt{2}y$ . 101  $A[0; 0]$ ,  $B[12; -4\sqrt{3}]$ ,  $C[12; 4\sqrt{3}]$ ,  $a = 8\sqrt{3}$ . 102  $K[-3; -3]$ ,  $L[3; -3]$ ,  $M[3; 3]$ ,  $N[-3; 3]$ ,  $a = 6$ . 103  $K_{1,2}[\pm 6; 0]$ ,  $L[0; -2\sqrt{3}]$ ,  $M[0; 2\sqrt{3}]$ ,  $a = 4\sqrt{3}$ .  
 104  $K_1[0; 2\sqrt{3}]$ ,  $L_1[-\frac{18}{5}; -\frac{8}{5}\sqrt{3}]$ ,  $M_1[\frac{18}{5}; -\frac{8}{5}\sqrt{3}]$ ,  $a = \frac{36}{5}$ ;  $K_2[0; -2\sqrt{3}]$ ,  $L_2[-\frac{18}{5}; \frac{8}{5}\sqrt{3}]$ ,  $M_2[\frac{18}{5}; \frac{8}{5}\sqrt{3}]$ ,  $a = \frac{36}{5}$ . 105  $t_{1,2}: y = \pm\frac{1}{2}x \mp 1$ . 106  $t_{1,2}: y = x \pm 3$ ,  $t_{3,4}: y = -x \pm 3$ .  
 107  $t_{1,2}: y = \pm 2x \mp 5$ ,  $t_{3,4}: y = \pm\frac{1}{2}x \pm \frac{5}{2}$ . 108  $P_1[2; -4]$ ,  $P_2[-1; -1]$ ,  $x + y + 2 = 0$ .

## 16.14 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

- 109 Kružnice,  $S[1; -2]$ ,  $r = 2\sqrt{5}$ . 110 Parabola,  $y = x^2$ . 111 a) Elipsa,  $8x^2 + 9y^2 = 72$ . b) Neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici. c) Jedna větev hyperboly  $12x^2 - 4y^2 = 3 \wedge x \geq \frac{1}{2}$ . d) Jedna větev hyperboly  $12x^2 - 4y^2 = 3 \wedge x \leq -\frac{1}{2}$ .  
 112 a) Kružnice,  $S \in \mapsto AB$ ,  $|AS| = 8$  cm,  $r = 4$  cm. b) Kruh,  $S \in \mapsto AB$ ,  $|AS| = 8$  cm,  $r = 4$  cm. c) Rovina bez vnitřku kruhu z úlohy b).  
 113 a) Parabola, ohnisko v bodě  $M$ , řídící přímka — daná přímka  $p$ . b) Elipsa, střed  $S$  leží na kolmici k  $p$  bodem  $M$ ,  $S \in \mapsto pM$ ,  $|Sp| = 8$  cm,  $a = 4$  cm,  $b = 2\sqrt{3}$  cm,  $F_1 = M$ . c) Hyperbola, střed  $S$  leží na kolmici k  $p$  bodem  $M$ ,  $|Sp| = 2$  cm, body  $S, M$  leží v opačných poloprovodních s hraniční přímou  $p$ ,  $a = 4$  cm,  $b = 4\sqrt{3}$  cm,  $F_1 = M$ .  
 114 a) Kružnice, střed kružnice je průsečík daných přímek,  $r = \frac{3}{2}$  cm. b) Elipsa, střed elipsy je průsečík daných přímek,  $a = 2$  cm,  $b = 1$  cm. 115 Hyperbola,  $y = \frac{1}{x}$ .  
 116 Elipsa,  $S_{\text{elipsa}} = S_{\text{kružnice}}$ ,  $a = 8$  cm,  $b = 2$  cm, vedlejší poloosa leží na přímce  $p$ .  
 117 Parabola, ohnisko v bodě  $M$ , řídící přímka — daná přímka  $p$ . 118 Středy leží na elipse: střed elipsy leží ve středu úsečky  $SM$ ,  $a = 2,5$  cm,  $b = 2$  cm,  $F_1 = S$ ,  $F_2 = M$ .  
 119 Středy leží na hyperbole: střed hyperboly leží ve středu úsečky  $SM$ ,  $a = 1$  cm,  $b = 2\sqrt{2}$  cm,  $F_1 = S$ ,  $F_2 = M$ . 120 a) Parabola, vrchol v bodě dotyku tečny,  $F = S$ . b) Vnitřek poloprovodníků opačné k poloprovodníku  $TS$ , kde  $T$  je bod dotyku tečny  $t$ .

## 17 Komplexní čísla

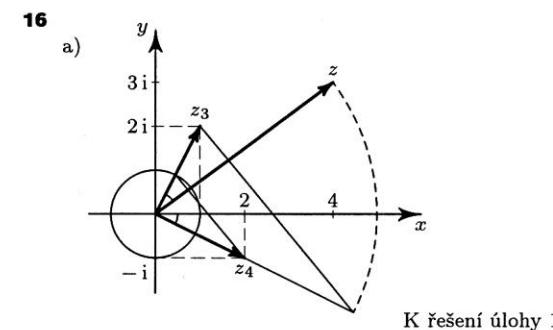
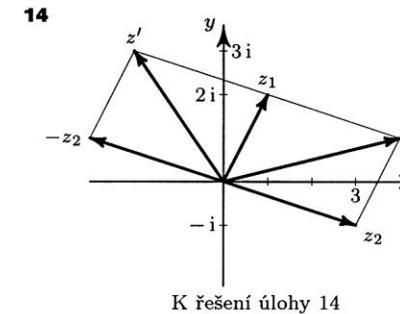
### 17.1 Algebraický tvar komplexního čísla

- 1 a)  $23 - 2i$ ; b)  $1 - 6i$ ; c)  $(\sqrt{6} - 4)i$ ; d)  $-5 + 15i$ ; e)  $-5 + 4i$ . 2 a)  $1 + i$ ; b)  $12 - 16i$ ; c)  $-i$ ; d)  $4 - i$ ; e)  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; f)  $1 + 4\sqrt{3}i$ . 3 a)  $3i$ ; b)  $1$ ; c)  $1 - i$ ; d)  $1 + 8i$ ; e)  $-\frac{1}{2}i$ .  
 4  $L = P$ . 5 a)  $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$ . b)  $z_1 = z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0i$ .  
 6  $i$ . 7  $z = i \cdot \frac{2p}{p^2 + 9}$ ,  $p = 3$ . 8 a)  $b \in \{0; \frac{7}{6}\}$ ; b)  $b \in \mathbb{R} - \{0; \frac{7}{6}\}$ ; c)  $b \in \{2; 4\}$ .  
 9  $k = \pm\sqrt{3}$ . 10  $x \in \{-7; 1\}$ .

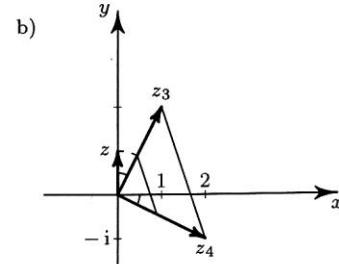
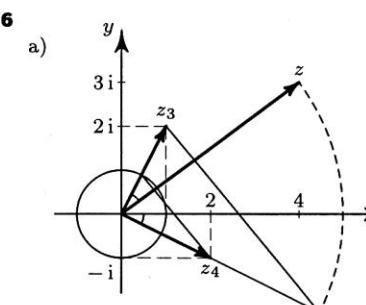
### 17.2 Močniny imaginární jednotky $i$

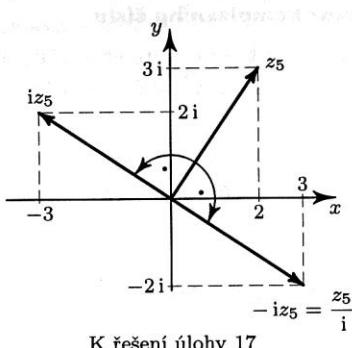
- 11 a)  $-1$ ; b)  $1$ ; c)  $-1$ ; d)  $-i$ ; e)  $1$ ; f)  $0$ ; g)  $-5 - 15i$ .  
 12 a)  $1$ ; b)  $0$ ; c)  $1 - i$ ; d)  $1$ ; e)  $-i$ ; f)  $-1$ . 13 a)  $2i$ ; b)  $-2i$ ; c)  $-\frac{1}{2}i$ ; d)  $\frac{1}{2}i$ ; e)  $-2 + 2i$ ; f)  $-2 - 2i$ ; g)  $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ ; h)  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ ; i)  $-4$ ; j)  $-4$ ; k)  $-\frac{1}{4}$ ; l)  $-\frac{1}{4}$ .  
 14 a)  $z' = z_1 z_2$ ; b)  $z_1 = z_2$ ; c)  $z_1 = \frac{1}{2}z_2$ ; d)  $z_1 = 2z_2$ .  
 15 a)  $z' = z_1 z_2$ ; b)  $z_1 = z_2$ ; c)  $z_1 = \frac{1}{2}z_2$ ; d)  $z_1 = 2z_2$ .  
 16 a)  $z_3 = z_1 z_2$ ; b)  $z_3 = z_1 z_2$ ; c)  $z_3 = z_1 z_2$ ; d)  $z_3 = z_1 z_2$ .  
 17 a)  $z_3 = z_1 z_2$ ; b)  $z_3 = z_1 z_2$ ; c)  $z_3 = z_1 z_2$ ; d)  $z_3 = z_1 z_2$ .

### 17.3 Znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině



K řešení úlohy 16





K řešení úlohy 17

## 17.4 Čísla komplexně sduzená

18  $\bar{z}_1 = 2 - i$ ,  $\bar{z}_2 = 7 + 3i$ ,  $\bar{z}_3 = -4i$ ,  $\bar{z}_4 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$ ,  $\bar{z}_5 = \sqrt{3} + 1 + 7i$ ,  $\bar{z}_6 = \sqrt{10} - i - \sqrt{2}i$ .

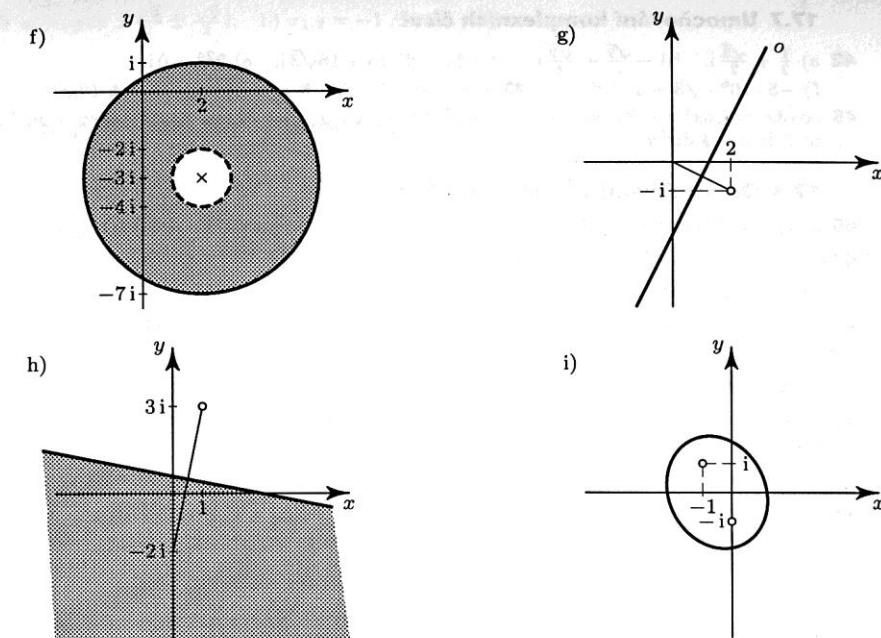
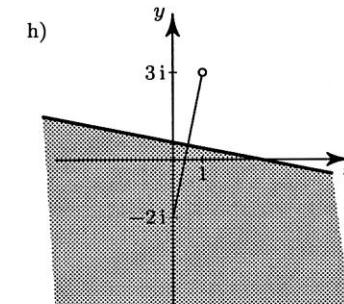
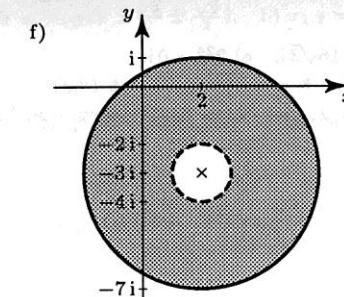
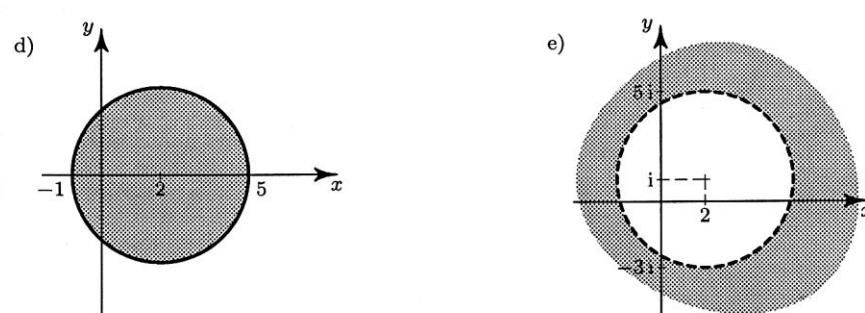
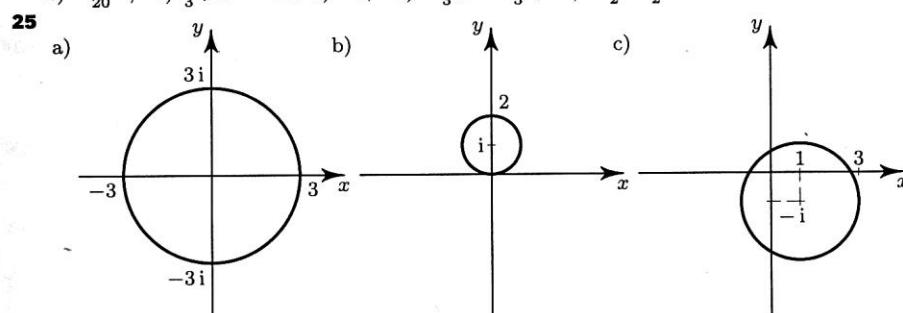
19  $\bar{w}_1 = 7 - i$ ,  $\bar{w}_2 = -1 - 2i$ ,  $\bar{w}_3 = -2 + 4i$ . 20 a)  $3 + 0i$ ; b)  $6 + 11i$ ; c)  $1 - 5i$ ;

d)  $1 - 5i$ ; e)  $16 - 30i$ ; f)  $16 - 30i$ . 21 a)  $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ ; b)  $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ ; c)  $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ .

## 17.5 Absolutní hodnota komplexního čísla

22 a)  $2\sqrt{10}$ ; b)  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ; c)  $3\sqrt{2}$ ; d)  $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ . 23 a)  $25\sqrt{2}$ ; b)  $\sqrt{2}$ ; c)  $\frac{5}{3}$ ; d)  $\sqrt{2}$ ;

e)  $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$ ; f)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ . 24 a)  $-3$ ; b)  $-\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}i$ ; c)  $-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$ .



K řešení úlohy 25

## Komplexní jednotka

26 a) až f) platí, protože  $|z| = 1$ . 27 Jednotková kružnice se středem v počátku.

28  $\forall k \in \mathbb{R}$  je abs. hodnota 1. 29 a)  $x \in \{\pm \frac{2}{3}\}$ ; b)  $x \in \emptyset$ ; c)  $x \in \{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\}$ ;  
d)  $x \in \{-1; 0\}$ ; e)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$ ; f)  $x \in \{3\}$ .

## 17.6 Goniometrický tvar komplexního čísla

30  $z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$ ,  $z_2 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$ ,  $z_3 = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ ,  $z_4 = 4(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$ ,  $z_5 = 2(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$ ,  $z_6 = 10\sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$ ,  $z_7 = 7\sqrt{2}(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$ ,  $z_8 = 1(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi)$ ,  $z_9 = \sqrt{2} - \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$ .

31  $z_1 = 6,71(\cos 26^\circ 34' + i \sin 26^\circ 34')$ ,  $z_2 = 5,77(\cos 104^\circ 02' + i \sin 104^\circ 02')$ ,  
 $z_3 = 9,85(\cos 336^\circ 02' + i \sin 336^\circ 02')$ .

32  $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -5$ ,  $z_4 = 1 + i$ .

33  $z_1 = -1,67 + 2,49i$ ,  $z_2 = -4,58 - 5,29i$ .

34 a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ ; b)  $1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ ; c)  $\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$ ;  
d)  $0,25(\cos 0 + i \sin 0)$ . 35  $|z_1| = 5 \wedge \varphi = 120^\circ$ ,  $|z_2| = 2 \wedge \varphi = \frac{4}{3}\pi$ . 36  $k = 8$ .

37 a), b)  $\cos -x + i \sin -x$ ; c)  $\cos x + i \sin x$ ; d)  $\cos -2x + i \sin -2x$ .

## Počítání s komplexními čísly v goniometrickém tvaru

38 a)  $z_1 \cdot z_2 = 8(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = 4\sqrt{3} - 4i$ ,  $z_1 : z_2 = 0,5[\cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ)] = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ ; b)  $z_1 \cdot z_2 = 8(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi) = 4\sqrt{3} - 4i$ ,  $z_1 : z_2 = 0,5(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi) = -0,5i$ . 39 a)  $z_1 = \frac{8}{5}\sqrt{10} - \frac{6}{5}\sqrt{10}i$ ; b)  $z_2 = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ ;  
c)  $z_3 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{20}\sqrt{10}} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{20}\sqrt{10}}$ .

40 a)  $z_1 \cdot z_2 = 7\sqrt{3} + 7i = 14(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ ; b) stejně, jen postup jiný.

41 Návod:  $z_1 = \cos x + i \sin x$ ,  $z_2 = \cos y + i \sin y$ . Počítejte  $z_1 \cdot z_2$  dvěma způsoby; a) jednak roznásobte závorky, jednak užijte, že  $z_1 \cdot z_2 = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$ ; b) jednak roznásobte závorky, jednak užijte, že  $z_1 : z_2 = \cos(x-y) + i \sin(x-y)$ .

## 17.7 Umocňování komplexních čísel

- 42** a)  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; b)  $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ; c)  $-8i$ ; d)  $16 + 16\sqrt{3}i$ ; e)  $2^{24} + 0i$ ;  
f)  $-5 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot 10^6 i$ . **43**  $n = 12k + 1 \wedge k \in \mathbb{N}$  nebo  $k = 0$ . **44** Platí.  
**45**  $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ ,  $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ .

## 17.8 Odmocňování komplexních čísel

- 46** a)  $z_{1,2} = 2(\cos k\pi + i \sin k\pi)$ ,  $k \in \{0; 1\}$ ; b)  $z_{1,2} = 2[\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) + i \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)]$ ,  $k \in \{0; 1\}$ .  
**47** a)  $z_{1,2,3,4} = \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ ;  
b)  $z_{1,2,3,4} = \sqrt[8]{2}[\cos(\frac{7}{16}\pi + \frac{k\pi}{2}) + i \sin(\frac{7}{16}\pi + \frac{k\pi}{2})]$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ . **48**  $z_{1,2,3,4,5} = 2(\cos \frac{2}{5}k\pi + i \sin \frac{2}{5}k\pi)$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ . **49** 0. **50** 0.

## 17.9 Rovnice v množině komplexních čísel

- 51** a)  $x = 2 \wedge y = -3$ ; b)  $x = 3 \wedge y = 1$ ; c)  $(x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = 3 \wedge y = 1)$ ;  
d)  $x = 0 \wedge y = -3$ . **52** a)  $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ ; b)  $z = -1 - i$ ; c)  $z = -3i$ ; d)  $z = i$ .  
**53** a)  $z = 1 - i$ ; b)  $z = 13 - 39i$ ; c)  $z_1 = -1 - 2i$ ,  $z_2 = 2 - 2i$ ; d)  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = 3 - 2i$ .  
**54** a)  $x = 0 \wedge y = -\frac{1}{2}$ ; b)  $x = 3 - 2i$ ,  $y = 3 + 2i$ . **55** a)  $z = \frac{3}{2} - 2i$ ; b)  $z = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}i$ ;  
c)  $z = 2 - 4i$ ; d)  $z = 1 - 3i$ . **56** a)  $z = 2 + 3i \wedge w = -4 + 2i$ ; b)  $z = 1 - i \wedge w = 3 + 2i$ .

## Rovnice v množině komplexních čísel s parametrem

- 57**  $a = -i$ . **58** a)  $a = \frac{1}{2} + i$ ; b)  $a = 1 + \frac{1}{2}i$ ; c)  $a = -\frac{1}{2}i$ .

## 17.10 Kvadratická rovnice v množině komplexních čísel

- 59** a)  $t \in (-2; 1)$ ; b)  $t \in (0; \infty)$ ; c)  $t \in \emptyset$ ; d)  $t \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$ .  
**60** a)  $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; b)  $x_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i$ ; c)  $\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$ ; d)  $x_{1,2} = \pm 2 + 2i$ ;  
e)  $x_{1,2} = \pm \sqrt{3} + 3i$ ; f)  $x_{1,2} = 3i$ ; g)  $x_{1,2} \in \{-1 + 2i; -1 - i\}$ ; h)  $x_{1,2} \in \{-4i; i\}$ ;  
i)  $x_{1,2} \in \{\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i; -(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2})\}$ ; j)  $x_{1,2} \in \{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i; -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\}$ ; k)  $x_{1,2} \in \{2 + i; 1 - i\}$ ;  
l)  $x_{1,2} \in \{3 - i; -4 + 2i\}$ .

## Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

- 61** a)  $k(x^2 - 6x + 10) = 0$ ,  $k \in \mathbb{C} - \{0\}$ ; b)  $k[x^2 - (5 + 2i\sqrt{3})x + 3 + 5i\sqrt{3}] = 0$ ,  $k \in \mathbb{C} - \{0\}$ ;  
c)  $k[x^2 - (2 + 2i)x + 2i] = 0$ ,  $k \in \mathbb{C} - \{0\}$ ; d)  $k(x^2 - xi) = 0$ ,  $k \in \mathbb{C} - \{0\}$ .  
**62** a)  $k(x^2 - 6x + 10) = 0$ ,  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; b)  $k(x^2 + 25) = 0$ ,  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; c)  $k(x^2 - x + 1) = 0$ ,  
 $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; d)  $k(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4) = 0$ ,  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ .  
**63**  $x_2 = -2 \wedge q = -4 + 2i$ . **64**  $x_2 = -3 - 2i\sqrt{3} \wedge p = 6$ . **65**  $x_1 = x_2 = -3 + 2i \wedge$   
 $\wedge k = 5 - 12i$ . **66** a)  $i$ ; b)  $1$ ; c)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ . **67** a)  $(x+1+i)(x+1-i)$ ;  
b)  $(x-2+i)(x-2-i)$ ; c)  $2(x-1+2i)(x-1-2i)$ ; d)  $(x+\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ ;  
e)  $(2x+i)(2x-i)$ ; f)  $(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$ .

## 17.11 Binomické rovnice

- 68** a)  $x_{1,2,3} = 3(\cos \frac{2}{3}k\pi + i \sin \frac{2}{3}k\pi)$ ,  $k \in \{0; 1; 2\}$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ;  
b)  $x_{1,2,3,4} = 2[\cos(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi) + i \sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi)]$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ ,  $x_{1,2} = \pm \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ,  $x_{3,4} =$   
 $= \pm \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ ; c)  $x_{1,2,3,4,5,6} = 1(\cos \frac{1}{3}k\pi + i \sin \frac{1}{3}k\pi)$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ ,  $x_{1,2} = \pm 1$ ,  
 $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $x_{5,6} = \pm \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;  
d)  $x_{1,2,3} = 4[\cos(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi) + i \sin(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi)]$ ,  $k \in \{0; 1; 2\}$ ,  $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3} + 2i$ ,  $x_3 = -4i$ .  
**69** a)  $x_{1,2,3} = \sqrt[6]{2}[\cos(\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi) + i \sin(\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi)]$ ,  $k \in \{0; 1; 2\}$ ;  
b)  $x_{1,2,3,4,5,6} = \sqrt[6]{2}[\cos(\frac{5}{18}\pi + \frac{1}{3}k\pi) + i \sin(\frac{5}{18}\pi + \frac{1}{3}k\pi)]$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ ;  
c)  $x_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{2}[\cos(\frac{5}{24}\pi + \frac{1}{2}k\pi) + i \sin(\frac{5}{24}\pi + \frac{1}{2}k\pi)]$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ ;  
d)  $x_{1,2,3,4,5} = 1 \cdot [\cos(\frac{1}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi) + i \sin(\frac{1}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi)]$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ .

**70** a)  $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ; b)  $x_{1,2} = -1 \pm 2i$ .

## 18 Kombinatorika a binomická věta

### 18.1 Faktoriál čísla — n!

- 1** a) 3; b) 32; c) 726. **2** a) 1680; b) 840; c) 70; d) 420. **3** a)  $\frac{5}{21}$ ; b)  $\frac{1}{29}$ ;  
c)  $\frac{11}{7}$ . **4** a)  $\frac{20}{13!}$ ; b)  $\frac{1}{16!}$ ; c)  $\frac{1}{42}$ . **5** a)  $n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ ; b)  $n^2 - n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $n \geq 2$ ; c)  $n^2 + n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; d)  $\frac{1}{n-99}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 100$ ; e)  $n^2 + 7n + 12$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq -2$ ;  
f)  $\frac{1}{n^2 - 5n + 6}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ ; g)  $2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; h)  $3n - 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . **6** a)  $\frac{1}{(n+1)!}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  
 $n \geq 0$ ; b)  $\frac{3}{(n-3)!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ ; c)  $\frac{1}{(n+1)!}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq -1$ , pro  $n = -2$  je výsledek 0;  
d)  $0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ .

**7** a)  $\frac{7n+4}{12n^2+12n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; b)  $\frac{1}{12n^2+12n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; c)  $2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq -1$ ; d)  $(2n-1)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**8** a)  $A > B$ ; b)  $A > B$ . **9** a) Platí; b) platí.

**10** a) 12 nul; b) 24 nul; c) 124 nul. **11** a), b), c), d), e) platí.

**12** a)  $\{3\}$ ; b)  $\{4\}$ ; c)  $\{4\}$ ; d)  $\{92\}$ . **13** a)  $\{5\}$ ; b)  $\{2\}$ ; c)  $\{5\}$ ; d)  $\{11\}$ .

**14** a)  $\{8, 9, 10, 11, \dots\}$ ; b)  $\{3, 4, 5, \dots\}$ ; c)  $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ ; d)  $\{4, 5, 6, \dots\}$ .

**15** a)  $x \in \{2, 3, 8, 9, 10, \dots\}$ ; b)  $x \in \{4, 5\}$ ; c)  $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ ; d)  $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ .

### 18.2 Kombinační číslo, vlastnosti kombinacích čísel

**16** a), b), c) 10, 1, 21, 21. **17** a)  $L = P = 792$ ; b)  $L = P = 94500$ ; c)  $L = P = 325$ .

**18**  $M = 10N$ . **19** a)  $K < L$ ; b)  $K > L$ . **20** Největší je  $\binom{100}{50}$ .

**21** a) Platí  $\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$ ; b) platí  $\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$ ; c), d) platí  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**22** a)  $\binom{18}{9}$ ; b)  $\binom{12}{5}$ ; c)  $\binom{12}{2}$ ; d)  $\binom{4}{3}$ ; e)  $\binom{7}{4}$ ; f)  $\binom{24}{21}$ .

**23** a) 2002; b) 3003; c) 1001; d) 3003.

**24** a)  $\binom{n+1}{k}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq k$ ; b)  $\binom{n+2}{r}$ ,  $n, r \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq r \geq 2$ .

### 18.3 Rovnice a nerovnice s kombinacemi čísly

- 25** a)  $\{4\frac{2}{5}\}$ ; b)  $\{4\}$ ; c)  $\{\pm 3\}$ ; d)  $\{-1; 2\}$ ; e)  $\{6\}$ . **26** a)  $\{3; 5\}$ ; b)  $\{2; 3\}$ ;  
c)  $\{2; 8\}$ . **27** a)  $\{5\}$ ; b)  $\{4, 5, 6, \dots\}$ ; c)  $\{5\}$ ; d)  $\{0; 5\}$ ; e)  $\{5\}$ ; f)  $\{5\}$ ;  
g)  $\{5\}$ ; h)  $\{5\}$ . **28** a)  $\{12, 13, \dots\}$ ; b)  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 16\}$ ; c)  $\{6, 7, 8, \dots\}$ ;  
d)  $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$ ; e)  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ ; f)  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . **29** a)  $\{2\}$ ;  
b)  $x = \frac{k}{3} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 5$ . **30** a)  $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ ; b)  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ ; c)  $\{4\}$ ; d)  $\{6\}$ .

**31** a)  $[x, y] = [6, 3]$ ; b)  $[x, y] = [8, 6]$ ; c)  $[x, y] = [8, 5]$ ; d)  $[x, y] = [6, 4]$ .

### 18.4 Pravidlo kombinatorického součinu

**32** 15. **33** 1088 párů, 19 h 38 min 35 s. **34** a) 21; b) 63; c) 252.

**35** 182 dvojic; 5,5 roku. **36** Když si Martin vezme rohlík ( $72 > 70$ ).

### 18.5 Variace

**37** 120, 24, 72. **38** 2160, 840, 360, 1560. **39** 216. **40** 120. **41** 332 640.

**42**  $\frac{30!}{2} \doteq 1,326 \cdot 10^{32}$ . **43** 336. **44** 32. **45** 115. **46** 40.

**18.6 Permutace**

- 47**  $20! = 2432902008176640000$ .    **48**  $15! = 1307674368000$ .  
**49**  $10! \cdot 5! = 435456000$ .    **50**  $32! = 263130836933693530167218012160000000$ .  
**51** 362880.

**18.7 Kombinace**

- 52** a) 45; b) 31.    **53** a) 120; b) 100.    **54** a) 455; b) 400.    **55** a) 4736;  
b) 2048.    **56** a) 142208; b) 28416.    **57**  $\frac{n(n-3)}{2}$ .    **58** 27405.    **59** 56.  
**60**  $\frac{1}{2} \cdot \binom{12}{6} = 462$ .    **61** 420.    **62**  $\binom{200}{10}^3 \doteq 1,13 \cdot 10^{49}$ .    **63** 225.    **64** a) 50388;  
b) 75582; c) 18564; d) 82212; e) 107406; f) 43758.    **65** a) 21; b) 105; c) 126;  
d) 105; e) 231; f) 126.    **66** 38798760.    **67** 45.    **68** 6.    **69** 21.

**18.8 Variace, kombinace — rovnice**

- 70** a)  $x = 8$ ; b)  $x = 5$ ; c)  $x = 9$ ; d)  $x \in \{6, 7\}$ ; e)  $x = 11$ ; f)  $x = 8$ .

**18.9 Variace, permutace, kombinace s opakováním**

- 71** 30.    **72** 7776.    **73** 12600.    **74** 21.    **75** 495.

**18.10 Binomická věta**

- 76** a)  $41 + 29\sqrt{2}$ ; b)  $97 - 708\sqrt[3]{3} - 516\sqrt[3]{9}$ ; c)  $x^4 + 4x^3\sqrt{x} + 6x^3 + 4x^2\sqrt{x} + x^2$ ;  
d)  $y^5 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{5}{2}y - \frac{5}{4}y + \frac{5}{16}y^3 - \frac{1}{32}y^5$ ; e)  $a^4 - 9a^2\sqrt[3]{a^2} + 27a\sqrt[3]{a} - 27$ ;  
f)  $\sqrt{mn}\left(\frac{m^2}{n^3} - \frac{5m}{n^2} + \frac{10}{n} - \frac{10}{m} + \frac{5n}{m^2} - \frac{n^2}{m^3}\right)$ .  
**77** a)  $\frac{113}{2}$ ; b)  $-160a^2 - \frac{80}{a^4} - \frac{2}{a^{10}}$ .    **78** a)  $8 - 8i$ ; b)  $64i$ ; c)  $-512 - 512i\sqrt{3}$ .  
**79**  $x$  dosadit.    **80** 21 členů.    **81**  $A_5 = 210y^4$ .    **82**  $A_{10} = 320320a^6b^9$ .  
**83**  $x = \sqrt[3]{2}$ .    **84**  $z = \pm\frac{1}{2}$ .    **85** 5. člen.    **86** 6. člen.    **87** 10. člen.  
**88** a) 3. člen;  $A_3 = 295245$ ; b) člen bez  $a$  neexistuje.    **89** a) 5. člen;  $A_5 = 1025024y^{-3}$ ;  
b) 8. člen;  $A_8 = 439296x^{-21}$ .    **90** a) 4 členy,  $A_1 = 125$ ,  $A_3 = 375$ ,  $A_5 = 75$ ,  $A_7 = 1$ ;  
b) racionalní členy neex.; c) 3. člen,  $A_3 = 91x^3$ ,  $x \in \mathbb{Q}$ .    **91** a) 9 racionalních členů:  
1., 7., 13., 19., 25., 31., 37., 43., 49.; b) 3 racionalní členy: 1., 25., 49.  
**92** a)  $n = 9$ ; b)  $n = 6$ ; c)  $n = 10$ ; d)  $n = 10$ ; e)  $n = 14$ ; f)  $n = 18$ ; g)  $n = 7$ .  
**93**  $n = 8$ .    **94**  $n = 12$ .    **95**  $n = 6$ .    **96**  $n = 18$ .    **97**  $n = 7$ .  
**98** a)  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ ,  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ ; b)  $\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x +$   
 $+ 16 \sin^5 x$ ,  $\cos 5x = 5 \cos x - 20 \cos^3 x + 16 \cos^5 x$ .    **99** Návody: a)  $2^n = (1+1)^n$ ;  
b)  $0 = (1-1)^n$ ; c)  $(-1)^n = (1-2)^n$ ; d)  $5^n = (4+1)^n$ ; e)  $5^n = (1+4)^n$ .  
**100** Návody: a)  $4^{2n} = 16^n = (15+1)^n$ ; b)  $4^n = (3+1)^n$ .

**18.11 Důkaz matematickou indukcí**

Úlohy **101–110** řešíme takto:

- Dokážeme platnost věty (vzorce) pro  $n = 1$ ;
- za předpokladu, že věta (vzorec) platí pro  $n = k$ , dokážeme, že platí také pro  $n = k+1$ ;  
závěr: věta (vzorec) platí pro  $n = 1$  podle prvního kroku, tedy podle druhého kroku platí i pro  $n = 2$ . Platí-li pro  $n = 2$ , musí podle druhého kroku platit i pro  $n = 3$ . Platí-li pro  $n = 3$ , musí podle druhého kroku platit i pro  $n = 4$ , atd., tedy platí  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**19 Diferenciální a integrální počet****Limita funkce****19.1 Limita funkce ve vlastním bodě**

- 1** a)  $\frac{8}{7}$ ; b) 0; c) -1; d) -1; e) 1; f) 1.    **2** a) 4; b)  $\frac{2}{3}$ ; c) -24; d) 0; e)  $-\frac{8}{3}$ ;  
f) 0.    **3** a) -1; b) -4; c)  $\frac{5}{7}$ ; d)  $\frac{7}{5}$ ; e)  $-\frac{5}{2}$ ; f)  $\frac{4}{3}$ ; g)  $\frac{7}{9}$ ; h)  $\frac{7}{4}$ ; i)  $\frac{1}{4}$ ; j)  $\frac{3}{2}$ .  
**4** a)  $\frac{1}{4}$ ; b)  $\frac{5}{6}$ ; c)  $\frac{5}{6}$ ; d) -3.    **5** a) 49; b) 11; c)  $\frac{1}{2}$ ; d)  $-\frac{3}{5}$ .    **6** a) 4; b) 6; c) -8;  
d)  $-\frac{1}{4}$ ; e)  $\frac{1}{6}$ ; f)  $-\frac{2}{9}$ ; g)  $\frac{3}{2}$ ; h)  $\frac{4}{3}$ ; i)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; j)  $-\frac{1}{2}$ .    **7** a)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; c) 1;  
d) 3; e) 1; f) 2; g) 2; h) 0; i)  $-\sqrt{2}$ ; j) -1.    **8** a) 1; b)  $4\sqrt{3}$ ; c) -1; d)  $-2\sqrt[4]{2}$ ;  
e)  $-\frac{1}{16}$ ; f) 4.    **9** a) 2; b) 8; c)  $\frac{2}{3}$ ; d)  $\frac{1}{4}$ ; e) 4; f) 6; g)  $\frac{1}{2}$ ; h) -1; i) 2.  
**10** a) 2; b) -1; c)  $\frac{1}{2}$ ; d) 8; e)  $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ; f) 1; g) 1; h)  $\sqrt{2}$ ; i) 2.

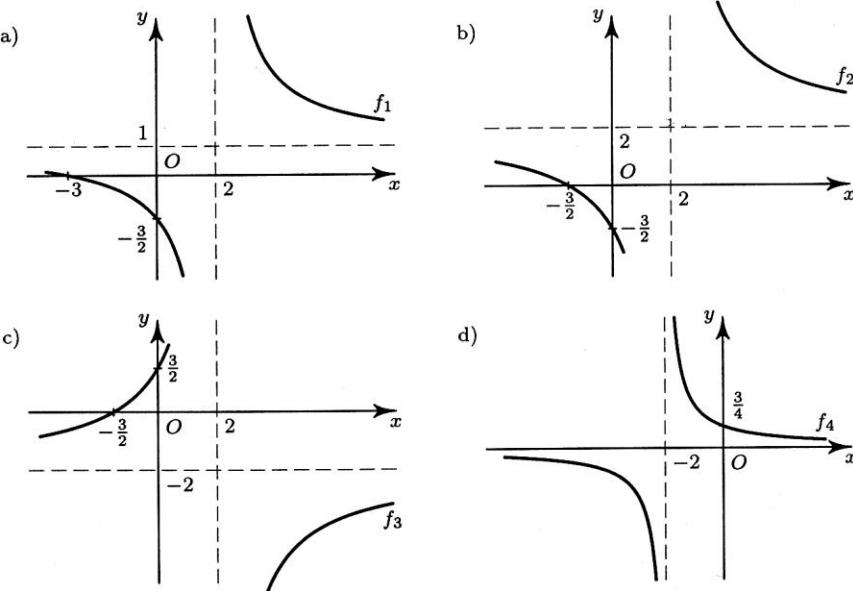
**19.2 Limita funkce v nevlastním bodě**

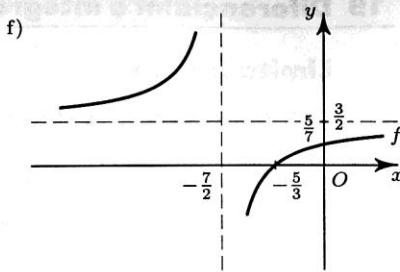
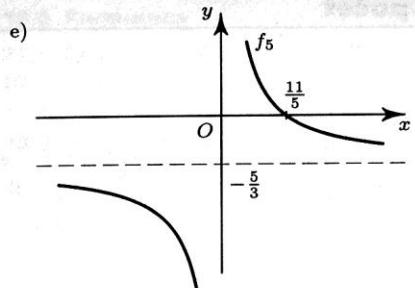
- 11** a)  $\frac{1}{3}$ ; b) 3; c)  $-\frac{4}{7}$ ; d)  $\frac{2}{5}$ ; e) 16; f)  $\frac{1}{3}$ .    **12** a)  $\infty$ ; b) 0; c) 0; d)  $\infty$ ; e)  $\infty$ ;  
f) 0.    **13** a)  $\sqrt{2}$ ; b)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; d)  $\sqrt{2}$ ; e) 1; f) 1; g)  $\frac{3}{2}$ ; h) 1; i)  $-\frac{3}{4}$ ; j)  $\frac{1}{2}$ .

**19.3 Jednostranné limity**

- 14** a)  $\infty$ ; b)  $-\infty$ ; c) neex.; d)  $\infty$ ; e)  $-\infty$ ; f)  $-\infty$ ; g)  $\infty$ ; h)  $-\infty$ ; i)  $-\infty$ .

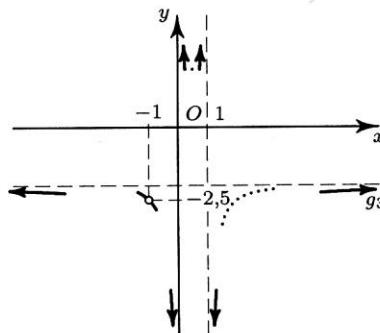
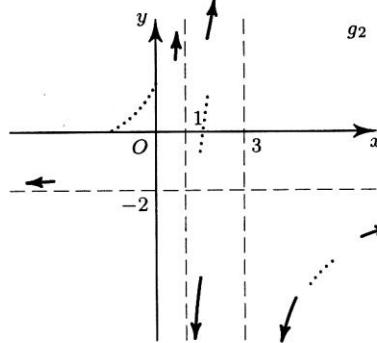
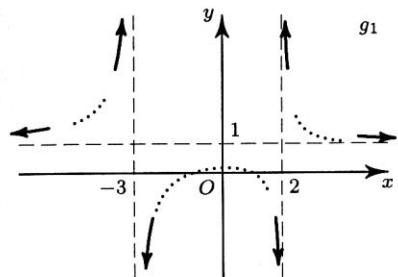
**15**





K řešení úlohy 15

16



K řešení úlohy 16

## Derivace funkce

### 19.4 Definice derivace funkce

- 17  $f'_1(3) = 6$ ,  $f'_2(1) = -2$ ,  $f'_3(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f'_4(2) = 12$ ,  $f'_5(4) = -\frac{1}{16}$ ,  $f'_6(-1) = 0$ ,  $f'_7(0) = 1$ ,  
 $f'_8(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $f'_9(\frac{\pi}{2}) = -1$ ,  $f'_{10}(-2) = -\frac{3}{25}$ .
- 18  $g'_1(x_0) = 2x_0$ ,  $g'_2(x_0) = 3x_0^2$ ,  $g'_3(x_0) = \cos x_0$ ,  $g'_4(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ .

### 19.5 Pravidla pro výpočet derivace

- 19  $f'_1(x) = 2x + 3x^2$ ,  $D(f_1) = D(f'_1) = R$ ;  $f'_2(x) = 8x - 1$ ,  $D(f_2) = D(f'_2) = R$ ;  
 $f'_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\frac{1}{x^3}$ ,  $D(f_3) = R^+$ ,  $D(f'_3) = R^+$ ;  
 $f'_4(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ,  $D(f_4) = R$ ,  $D(f'_4) = R - \{0\}$ ;  
 $f'_5(x) = -2x^{-3} - 12x^{-4}$ ,  $D(f_5) = D(f'_5) = R - \{0\}$ ;

$$\begin{aligned} f'_6(x) &= -2x^{-2} - \frac{2}{35}x^{-\frac{3}{5}}, \quad D(f_6) = D(f'_6) = R - \{0\}; \\ f'_7(x) &= 2 \cos x - 3 \sin x, \quad D(f_7) = D(f'_7) = R; \\ f'_8(x) &= 7x^6 + 7 \sin x, \quad D(f_8) = D(f'_8) = R; \\ f'_9(x) &= \frac{6}{x} - \frac{9}{x \cdot \ln 10}, \quad D(f_9) = R^+, \quad D(f'_9) = R - \{0\}; \\ f'_{10}(x) &= 3^x \ln 3 + 2e^x, \quad D(f_{10}) = D(f'_{10}) = R; \\ f'_{11}(x) &= 2 + \cos x, \quad D(f_{11}) = D(f'_{11}) = R; \\ f'_{12}(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{11}{\sin^2 x}, \quad D(f_{12}) = D(f'_{12}) = R - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\frac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

20  $g'_1(x) = x^3 + 2x$ ,  $g'_2(x) = -\frac{1}{6\sqrt[6]{x^7}}$ ,  $g'_3(x) = 2x - 1$ ,  $g'_4(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x^2}$ ,  $g'_5(x) = 2x - 5$ ,  
 $g'_6(x) = 2x - 2$ ,  $g'_7(x) = -\sin x + \cos x$ ,  $g'_8(x) = -\sin x + \cos x$ .

21  $h'_1(x) = \sin x + x \cos x$ ,  $h'_2(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x - \cos x$ ,  $h'_3(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ,  
 $h'_4(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$ ,  $h'_5(x) = \frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2}$ ,  $h'_6(x) = \frac{-2}{1-\sin 2x}$ .

22  $f'_1(x) = 12x(x^2 + 1)^5$ ,  $f'_2(x) = \frac{12x^2-1}{2\sqrt{4x^3-x}}$ ,  $f'_3(x) = \frac{24x^2(\sqrt{2x^3-1}+2)^7}{\sqrt{2x^3-1}}$ ,  
 $f'_4(x) = \frac{-10(12x^3+2x)}{(3x^4+x^2)^{11}}$ ,  $f'_5(x) = \frac{2\sqrt{5x+5}}{4\sqrt{5x^2+5x}\sqrt{5x}}$ ,  $f'_6(x) = -2 \sin(2x+4)$ ,  $f'_7(x) = \sin 2x$ ,  
 $f'_8(x) = 2x \cos 2x$ ,  $f'_9(x) = \frac{-3 \cos x}{\sin^4 x}$ ,  $f'_{10}(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ ,  $f'_{11}(x) = \frac{2-2 \sin 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(\cos 2x+2x)^2}}$ ,  $f'_{12} = \frac{3}{\cos^2(3x-\frac{\pi}{4})}$ ,  $f'_{13}(x) = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x+5}}$ ,  $f'_{14}(x) = \frac{1}{x+2}$ ,  $f'_{15}(x) = \frac{3 \cos x}{3 \sin x - 8}$ ,  
 $f'_{16}(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$ .

23  $g'(0) = 2$ ,  $g'(1) = 5$ ,  $g'(-2) = 14$ .

24 a)  $x \in \{\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\}$ ; b)  $x \in \{\pm 1\}$ ; c)  $x \in \emptyset$ ; d)  $x \in \{-3\}$ .

### 19.6 Tečna ke grafu funkce

- 25  $k = 6$ . 26 a)  $6x - y - 16 = 0$ ; b)  $y + 6 = 0$ ; c)  $16x + y - 12 = 0$ ; d)  $3x - y + 11 = 0$ ;  
e)  $2x - y = 0$ ; f)  $y = 0$ ; g)  $3x - y + 3 = 0$ ; h)  $2x + 2y - \pi - 2 = 0$ . 27 a)  $T[1; 2]$ ;  
b)  $T[\frac{\sqrt{3}-1}{4}; -\frac{3}{4}]$ ; c)  $T[-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}]$ ; d) nemá řešení; e)  $T[0; -1]$ ; f)  $T[-\frac{1}{6}; -\frac{10}{9}]$ .

28  $2x - y + 17 = 0$ . 29  $T[-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}]$ . 30  $T_1[1; -1]$ ,  $T_2[-\frac{1}{3}; \frac{5}{27}]$ . 31  $V[\frac{1}{6}; -\frac{11}{12}]$ .

- 32  $y + 9 = 0$ . 33 a)  $63^\circ 26'$ ,  $116^\circ 33'$ ; b)  $0^\circ$ ; c)  $14^\circ 02'$ ; d)  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ; e)  $135^\circ$ ,  $45^\circ$ ;  
f)  $45^\circ$ ; g)  $45^\circ$ ; h)  $45^\circ$ ; i)  $23^\circ 29'$ . 34 a)  $T[\frac{3}{4}; \frac{15}{8}]$ ; b)  $T[1 + \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{13}{8}]$ ; c)  $V[1; 2]$ ;  
d)  $T[\frac{5}{4}; \frac{15}{8}]$ ; e) tečna neexistuje. 35  $80^\circ 32'$ . 36  $28^\circ 04'$ .

37  $t_1: x - 9y - 3 = 0$ ,  $t_2: x - y - 3 = 0$ .

### 19.7 Funkce rostoucí, klesající

- 38  $f_1$  roste v  $(-\infty; -1)$ ,  $f_1$  klesá v  $(-1; \frac{4}{3})$ ,  $f_1$  roste v  $(\frac{4}{3}; \infty)$ .  
 $f_2$  klesá v  $(-\infty; -\frac{2}{3})$ ,  $f_2$  roste v  $(-\frac{2}{3}; 1)$ ,  $f_2$  klesá v  $(1; \infty)$ .  
 $f_3$  klesá v  $(-\infty; -1)$ ,  $f_3$  roste v  $(-1; 0)$ ,  $f_3$  klesá v  $(0; 2)$ ,  $f_3$  roste v  $(2; \infty)$ .  
 $f_4$  roste v  $(-\infty; -1)$ ,  $f_4$  klesá v  $(-1; 0)$ ,  $f_4$  roste v  $(0; 3)$ .  
 $f_5$  roste v  $(-\infty; -\sqrt{2})$ ,  $f_5$  klesá v  $(-\sqrt{2}; 0)$ ,  $f_5$  roste v  $(0; \sqrt{2})$ ,  $f_5$  klesá v  $(\sqrt{2}; \infty)$ .  
 $f_6$  klesá v  $(-\infty; 2)$ ,  $f_6$  roste v  $(2; \infty)$ .

- 39  $g_1$  roste v  $(-\infty; -1)$ ,  $g_1$  klesá v  $(-1; 0)$ ,  $g_1$  klesá v  $(0; 1)$ ,  $g_1$  roste v  $(1; \infty)$ .  
 $g_2$  roste v  $(-\infty; 0)$ ,  $g_2$  roste v  $(0; \infty)$ .  
 $g_3$  klesá v  $(-\infty; -1)$ ,  $g_3$  roste v  $(-1; 0)$ ,  $g_3$  roste v  $(0; 1)$ ,  $g_3$  klesá v  $(1; \infty)$ .  
 $g_4$  roste v  $(0; \infty)$ .  
 $g_5$  roste v  $(-\infty; -\sqrt{2})$ ,  $g_5$  klesá v  $(-\sqrt{2}; 0)$ ,  $g_5$  klesá v  $(0; \sqrt{2})$ ,  $g_5$  roste v  $(\sqrt{2}; \infty)$ .  
 $g_6$  roste v  $(-\infty; -4)$ ,  $g_6$  klesá v  $(-4; -1)$ ,  $g_6$  klesá v  $(-1; 2)$ ,  $g_6$  roste v  $(2; \infty)$ .  
 $g_7$  klesá v  $(-\infty; -3)$ ,  $g_7$  klesá v  $(-3; \infty)$ .  
 $g_8$  roste v  $(-\infty; 0)$ ,  $g_8$  klesá v  $(0; \infty)$ .  
 $g_9$  klesá v  $(-\infty; -1)$ ,  $g_9$  roste v  $(-1; 0)$ ,  $g_9$  klesá v  $(0; 1)$ ,  $g_9$  roste v  $(1; \infty)$ .  
 $g_{10}$  roste v  $(1; \infty)$ .  
 $g_{11}$  klesá v  $(4; 6)$ .  
 $g_{12}$ :  $D(g_{12}) = \emptyset$ , tedy nemá smysl zkoumat, zda funkce roste nebo klesá.

### 19.8 Druhá derivace funkce

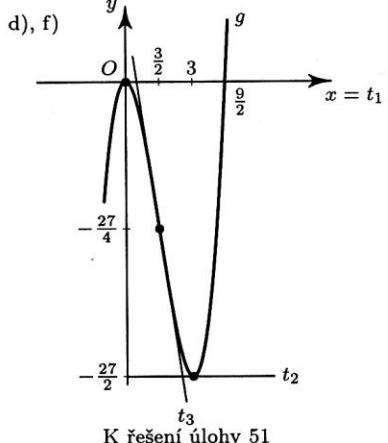
- 40  $f_1''(x_0) = 6$ ,  $f_2''(x_0) = 2 + \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0^2} + \frac{2}{x_0^3}$ ,  $f_3''(x_0) = -\frac{2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x_0}}{9x_0^2} + \frac{5 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{x_0^3}}{16x_0^3}$ ,  
 $f_4''(x_0) = -4 \sin x_0 - 2 \cos x_0$ ,  $f_5''(x_0) = \frac{8}{x_0^3} - \frac{24}{x_0^5}$ ,  $f_6''(x_0) = \frac{-2}{(x_0+1)^3}$ .  
41  $g(-1) = 7$ ,  $g'(-1) = -17$ ,  $g''(-1) = 20$ .    42  $L = P$ .    43  $L = P$ .

### 19.9 Maximum, minimum funkce

- 44  $f_1: M_a[-4; 32], M_i[0; 0]$ ;  $f_2: M_a[-1; 5], M_i[3; -27]$ ;  $f_3: M_i[0; 3], M_{a1}[1; 4], M_{a2}[-1; 4]$ ;  
 $f_4: M_i[2; -7], M_a[-2; 25]$ ;  $f_5: M_i[-3; -27]$ ;  $f_6: M_i[0; 0], M_a[-8; 8192]$ .  
45  $g_1: M_a[-6; -12], M_i[0; 0]$ ;  $g_2: M_i[0; -\frac{1}{2}]$ ;  $g_3: M_i[4; 3]$ ;  $g_4: M_a[2; 2]$ ;  
 $g_5: M_i[2; 2\sqrt{2}]$ ;  $g_6: M_i[0; -1]$ ,    46  $h_1: M_a[\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}], M_i[\frac{5}{4}\pi; -\sqrt{2}]$ ;  
 $h_2: M_i: h_2(0) = h_2(\pi) = h_2(2\pi) = -2$ ,  $M_a: h_2(\frac{\pi}{2}) = h_2(\frac{3}{2}\pi) = 1$ ;  
 $h_3: M_i[\frac{\pi}{2}; -1], M_a: h_3(\frac{7}{6}\pi) = h_3(\frac{11}{6}\pi) = \frac{5}{4}$ ;  
 $h_4: M_i[\pi; -\frac{3}{2}], M_a: h_4(\frac{\pi}{3}) = h_4(\frac{5}{3}\pi) = \frac{3}{4}$ ;  
 $h_5: M_i: h_5(\frac{5}{8}\pi) = h_5(\frac{13}{8}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $M_a: h_5(\frac{\pi}{8}) = h_5(\frac{9}{8}\pi) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 $h_6: M_i[\frac{5}{6}\pi; -\frac{\sqrt{3}}{3}], M_a[\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}]$ .  
47  $\forall x \in D: y' \neq 0 \Rightarrow$  neexistuje extrém.    48  $a = \frac{1}{4} \wedge b = -1 \Rightarrow h(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 5$ .  
49  $p = 8 \wedge q = -43 \Rightarrow m(x) = x^2 + 8x - 43$ .    50  $b = -3 \wedge d = 9 \Rightarrow g(x) = x^3 - 3x^2 + 9$ ,  
 $M_a[0; 9]$ .

### 19.10 Průběh funkce

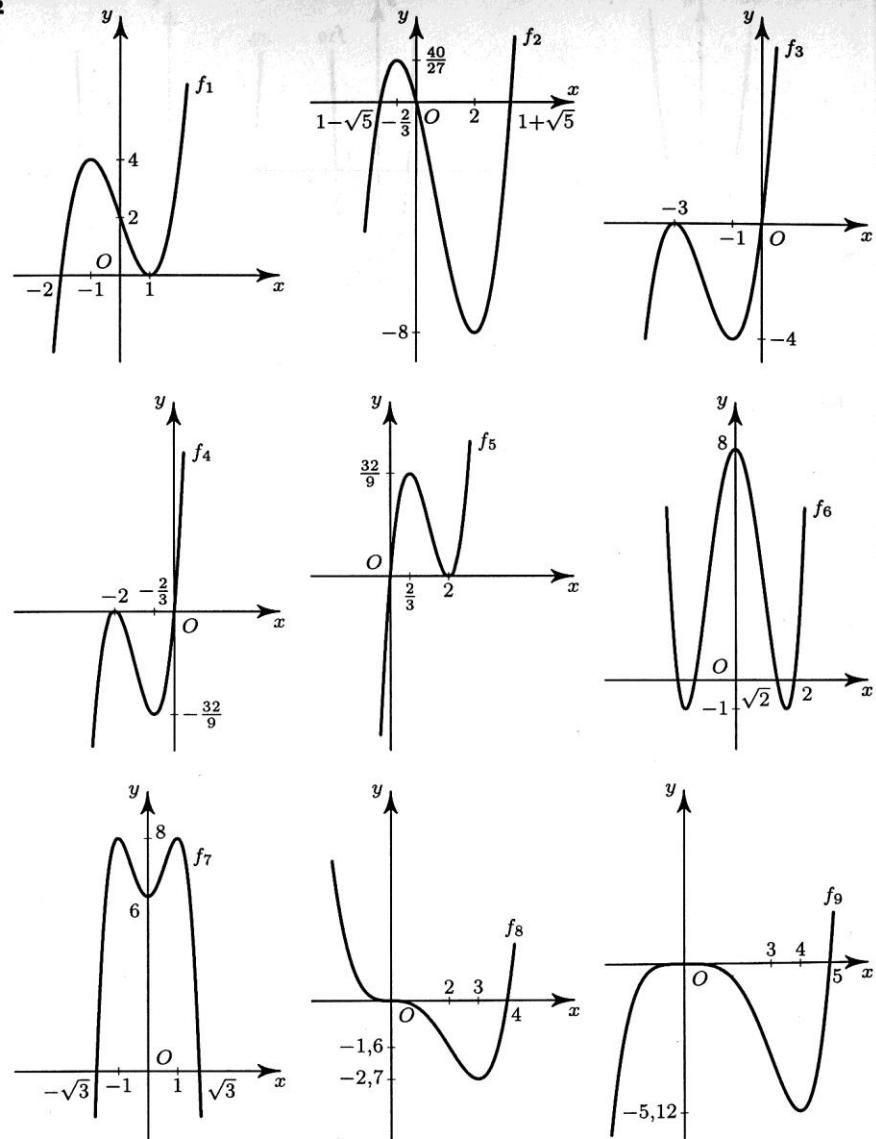
- 51 a)  $g$  roste v  $(-\infty; 0)$ ,  $g$  klesá v  $(0; 3)$ ,  $g$  roste  $(3; \infty)$ ;    b)  $M_a[0; 0], M_i[3; -\frac{27}{2}]$ ;  
c)  $P_{x_1}[0; 0], P_y[0; 0], P_{x_2}[4\frac{1}{2}; 0]$ ;

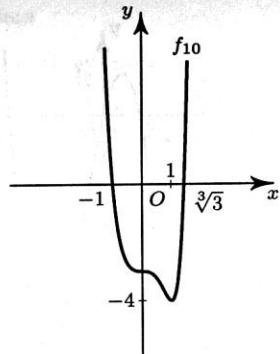


K řešení úlohy 51

e)  $t_1: y = 0$ ,  $t_2: y = -\frac{27}{2}$ ,  $t_3: 54x + 8y - 27 = 0$ .

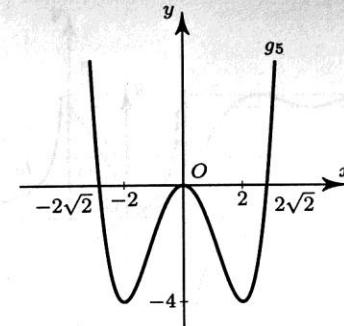
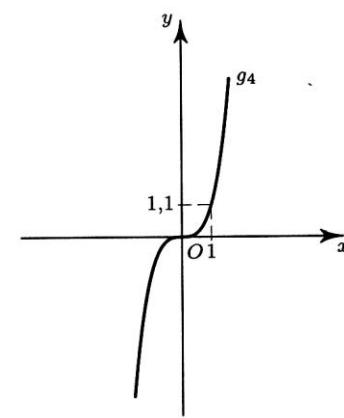
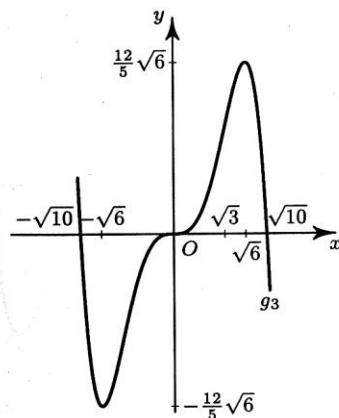
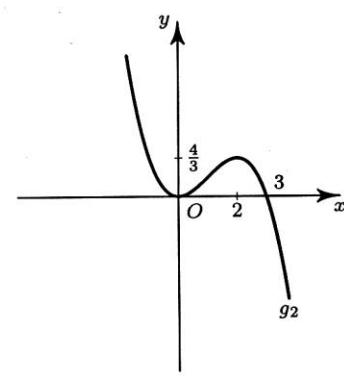
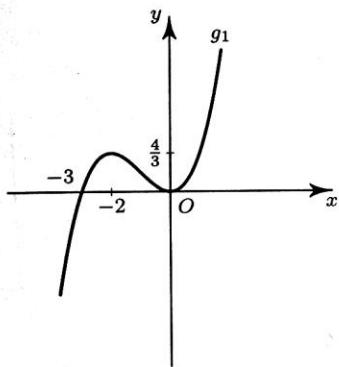
52





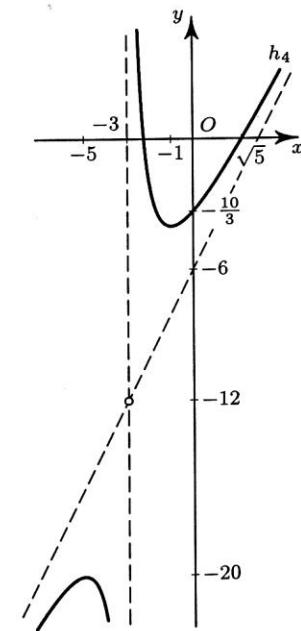
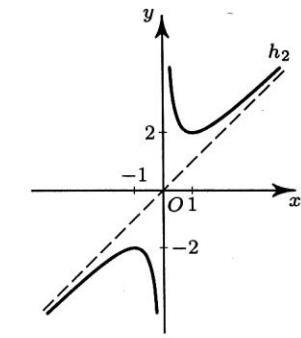
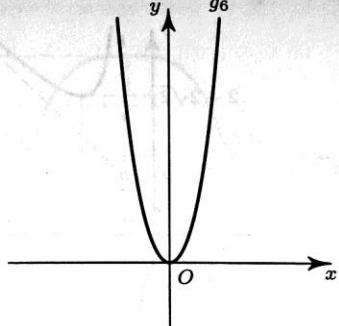
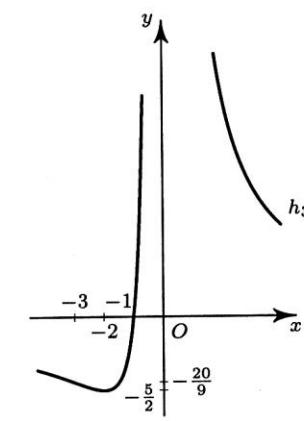
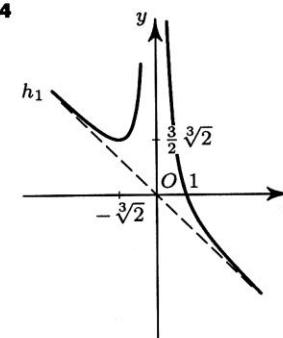
K řešení úlohy 52

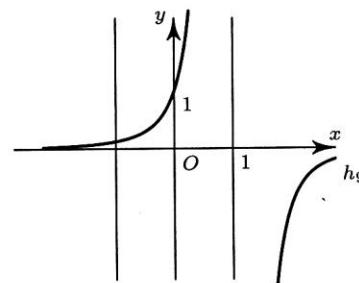
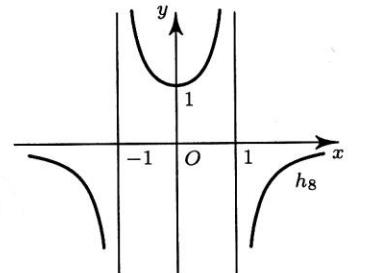
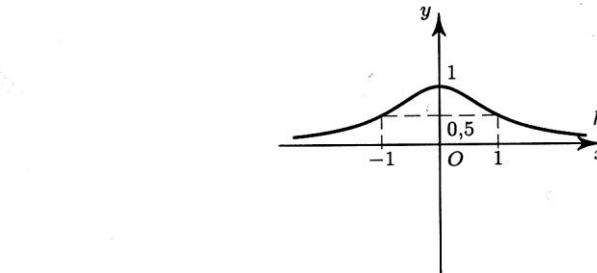
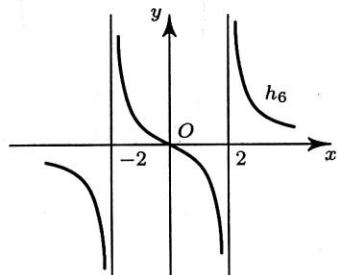
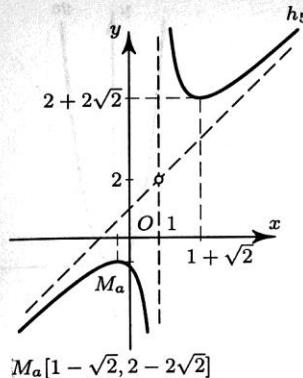
53



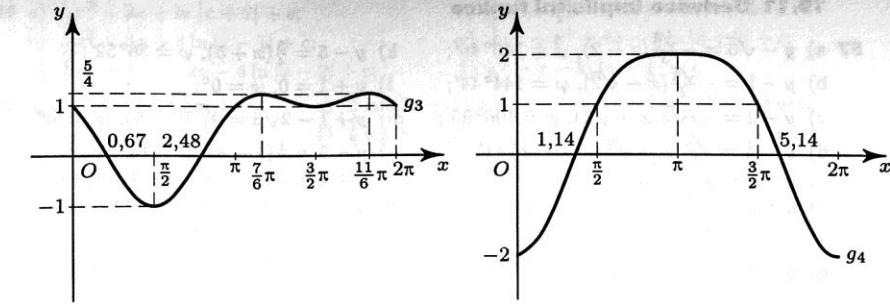
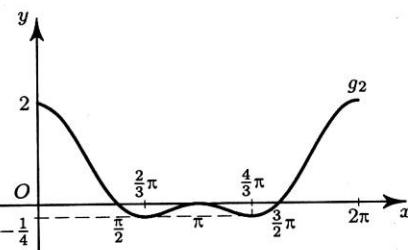
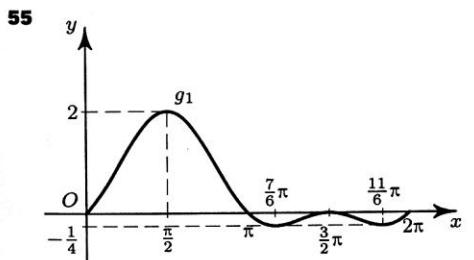
K řešení úlohy 53

54



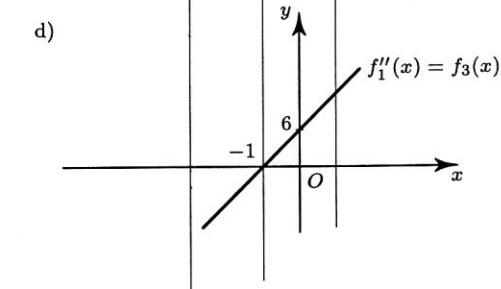
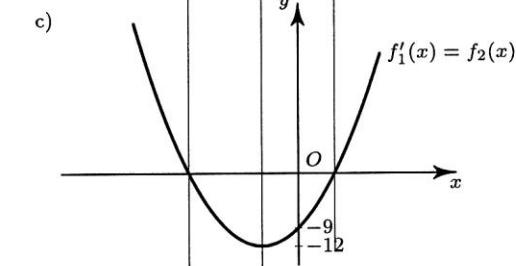
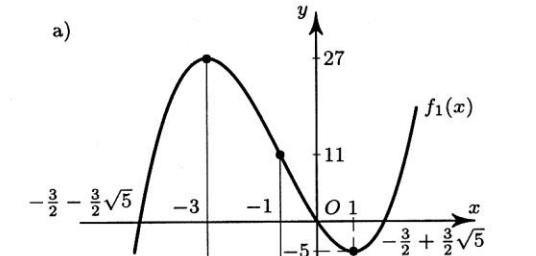


K řešení úlohy 54



K řešení úlohy 55

- 56 b)  $T_1: y + 5 = 36(x + 5)$ ,  $T_2: y = 27$ ,  $T_3: y - 11 = -12(x + 1)$ ,  $T_4: y = -9x$ ,  $T_5: y = -5$ ,  
 $T_6: y - 2 = 15(x - 2)$ .



K řešení úlohy 56

## 19.11 Derivace implícitní funkce

- 57** a)  $y - \sqrt{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3}(x - 2)$ ,  $\varphi \doteq 140^\circ 46'$ ; k)  $y - 5 = \frac{3}{4}(x + 5)$ ,  $\varphi \doteq 36^\circ 52'$ ; l)  $y + 1 = 0$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ; m)  $y + 1 - 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 9)$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ; n)  $y - 5 = \frac{1}{4}(x - 8)$ ,  $\varphi \doteq 14^\circ 02'$ ; o)  $y + 4 = -2(x - 1)$ ,  $\varphi \doteq 116^\circ 34'$ ; p)  $y - 6 = -\frac{3}{4}(x - 2)$ ,  $\varphi \doteq 143^\circ 08'$ ; q)  $x - 4 = 0$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ; r)  $y + 1 = -\frac{1}{2}(x + 4)$ ,  $\varphi \doteq 153^\circ 26'$ ; s)  $y - 3 = \frac{2\sqrt{5}}{3}(x - 2\sqrt{5})$ ,  $\varphi \doteq 56^\circ 09'$ ; t)  $y - 4 = \frac{1}{4}(x - 9)$ ,  $\varphi \doteq 14^\circ 02'$ .
- 58**  $T_1[1 + \frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{2}{5}\sqrt{5}], T_2[1 - \frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{2}{5}\sqrt{5}]$ . **59**  $T[3; -2]$ . **60**  $\varphi \doteq 12^\circ 32'$ .

## 19.12 Derivace funkce a výpočet limity

- 61** a) 12; b)  $\frac{1}{3}$ ; c)  $\frac{5\sqrt{3}}{15}$ ; d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; e) 0; f) -1; g) 1; h) 1; i) 1.
- 62** a)  $\frac{5}{3}$ ; b) 4; c) 1; d)  $\frac{1}{3}$ ; e) 2; f)  $\frac{5}{2}$ ; g) 0; h) 8; i) 0; j) 1; k) 1; l) 1.

## 19.13 Slovní úlohy řešené pomocí derivací

- 63**  $x = 6\frac{2}{3}$  cm. **64**  $x = 1$  cm. **65**  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$  dm  $\doteq 6,8$  cm,  $v = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$  dm  $\doteq 13,7$  cm.
- 66**  $r = v = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$  dm  $\doteq 8,6$  cm. **67**  $r = \sqrt{6}$  cm,  $v = 2\sqrt{3}$  cm. **68**  $r = 2\sqrt{2}$  cm,  $v = 4$  cm.
- 69**  $rv = 4$  cm,  $vv = 1$  cm. **70**  $rv = 1$  cm,  $vv = 4$  cm.
- 71**  $r = 3\sqrt{2}$  cm,  $v = 12$  cm. **72**  $a = 3\sqrt{2}$  cm,  $b = 2\sqrt{2}$  cm. **73**  $a = b = 4$  cm.
- 74**  $a = b = 5$  cm. **75**  $a = 4$  cm,  $b = 2$  cm. **76**  $a = 3\sqrt{7}$  cm,  $b = \frac{7}{2}$  cm.

## Integrální počet

### 19.14 Primitivní funkce

- 77**  $F'(x) = f(x)$ . **78** a)  $F'_1(x) = F'_2(x) = \sin 2x$ ,  $F_2(x) - F_1(x) = \frac{5}{2}$ ; b)  $F'_1(x) = F'_2(x) = -2\sin 2x$ ,  $F_2(x) - F_1(x) = 5$ ; c)  $F'_1(x) = F'_2(x) = 2\cos 2x$ ,  $F_2(x) - F_1(x) = 1$ ; d)  $F'_1(x) = F'_2(x) = \frac{1}{2x-4}$ ,  $F_2(x) - F_1(x) = \ln \sqrt{2} - 3$ . **79** Platí. **80** Platí.

- 81** a)  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + c$ ; b)  $\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$ ; c)  $-x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} + c$ ; d)  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{5}{2}} + c$ ; e)  $\frac{1}{16}x^4 + \frac{2}{x^2} + c$ ; f)  $\frac{10}{3}x\sqrt{x} + \frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$ ; g)  $\frac{7}{5}\sqrt{5x} + c$ ; h)  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c$ ; i)  $\frac{1}{5}x^5 + 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 + c$ ; j)  $x + 3x^2 + 4x^3 + 2x^4 + c$ ; k)  $\frac{10}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} + c$ ; l)  $\frac{5}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} + c$ ; m)  $\frac{2}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} + 5x + c$ ; n)  $-\frac{2}{3x\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + c$ ; o)  $\frac{6}{7}x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{6}{11}x \cdot \sqrt[6]{x^5} + c$ ; p)  $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 3x + c$ ; q)  $\frac{1}{2}x^2 - x + c$ ; r)  $\frac{1}{2}x^2 - 2x + c$ ; s)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{3x\sqrt{x}} + c$ ; t)  $\frac{4}{7}x \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} + c$ ; u)  $\frac{2}{5}x^2 \sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c$ .
- 82** a)  $4x + \ln|x| + c$ ; b)  $\ln|x+1| + c$ ; c)  $\frac{1}{5}\ln|x+5| + c$ ; d)  $\frac{1}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + c$ ; e)  $-\frac{5}{3}\ln|3x-1| + c$ ; f)  $\frac{1}{2}x^2 + 3\ln|x| + c$ ; g)  $x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + c$ ; h)  $6 \cdot \sqrt[3]{x} + 3\ln|x| + c$ ; i)  $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\ln|x| - \frac{1}{x} + c$ .
- 83** a)  $\frac{1}{2}x^2 - 2x + c$ ; b)  $\frac{1}{3}x^3 - x + c$ ; c)  $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$ ; d)  $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + c$ ; e)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + c$ ; f)  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + c$ ; g)  $\frac{1}{2}x^2 - 2x + c$ ; h)  $\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$ ; i)  $\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + c$ .

- 84** a)  $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \ln|x+2| + c$ ; b)  $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\ln|x-1| + c$ ; c)  $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x - 4\ln|x-2| + c$ ; d)  $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 4\ln|x+1| + c$ ; e)  $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8\ln|x+2| + c$ ; f)  $x^2 - x - \ln|x+\frac{1}{2}| + c$ .

- 85** a)  $-\cos x - 2\sin x + c$ ; b)  $-\frac{\cos 2x}{2} + c$ ; c)  $\frac{1}{4}\sin 4x + c$ ; d)  $-\frac{1}{2}\cos 6x + c$ ; e)  $\frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$ ; f)  $\frac{1}{3}\sin 3x + x + c$ ; g)  $\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{3}{2}x^2 + x + c$ ; h)  $\sin 3x + x + c$ ; i)  $-2\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + c$ ; j)  $-2\cos\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}x + c$ ; k)  $-\frac{\pi}{2}\cos\frac{x}{2} + c$ ; l)  $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + c$ .

- 86** a)  $x + c$ ; b)  $-\frac{1}{2}\sin 2x + c$ ; c)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$ ; d)  $-2\operatorname{cotg} x - 3\tg x + c$ ; e)  $\operatorname{tg} x - x + c$ ; f)  $-\operatorname{cotg} x - x + c$ ; g)  $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c$ ; h)  $\sin x - \cos x + c$ ; i)  $x + \cos x + c$ ; j)  $x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$ ; k)  $-x + c$ ; l)  $-2\operatorname{cotg} x - x + c$ .

- 87** a)  $\frac{1}{2}x - \frac{\sin x}{2} + c$ ; b)  $\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + c$ ; c)  $\frac{1}{2}x + \frac{\sin x}{2} + c$ ; d)  $\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + c$ ; e)  $\frac{1}{2}x - \frac{\sin 10x}{20} + c$ ; f)  $\frac{1}{2}x + \frac{\sin 12x}{24} + c$ .

- 88** a)  $\ln|1+x^3| + c$ ; b)  $\frac{1}{3}\ln|1+x^3| + c$ ; c)  $\frac{5}{3}\ln|1+x^3| + c$ ; d)  $\ln|2+\sin x| + c$ ; e)  $\ln|1-\cos x| + c$ ; f)  $\frac{1}{2}\ln|2\sin x-1| + c$ ; g)  $-\ln|\cos x| + c$ ; h)  $\ln|\sin x| + c$ ; i)  $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$ .

- 89** a)  $\frac{1}{6}(x^2+4)^6 + c$ ; b)  $\frac{3}{14}(x^2-1)^7 + c$ ; c)  $\frac{1}{15}(4+x^3)^5 + c$ ; d)  $-\frac{1}{24}(1+4x^3)^{-2} + c$ ; e)  $\frac{1}{6}(2x^2-1)^{\frac{3}{2}} + c$ ; f)  $\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(x^3-2)^4} + c$ ; g)  $\frac{1}{6}\sqrt{(2x^2-8)^3} + c$ ; h)  $\frac{1}{3}\sqrt{(5+2x)^3} + c$ ; i)  $2\sqrt{x^2+3} + c$ ; j)  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{(x^3+10)^2} + c$ ; k)  $\frac{1}{3}(\sin x+7)^3 + c$ ; l)  $-\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x+\frac{\pi}{2})^3} + c$ .

- 90** a)  $\sin x - x \cos x + c$ ; b)  $\cos x + x \sin x + c$ ; c)  $e^x(x-1) + c$ ; d)  $x \ln x - x + c$ ; e)  $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$ ; f)  $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$ ; g)  $\frac{1}{2}e^2x^2 + x + c$ ; h)  $x^2(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}) + c$ ; i)  $2x \sin x - (x^2-2) \cos x + c$ ; j)  $e^x(x^2-2x+2) + c$ ; k)  $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + c$ ; l)  $\frac{1}{2}\ln^2 x + c$ .

- 91** a)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{2}{3}$ ; b)  $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x + 1$ .

### 19.15 Určitý integrál

- 92** a) 6; b) -30; c)  $16\frac{2}{3}$ ; d) 21; e) 1; f) 0; g)  $\frac{4}{3}$ ; h)  $\ln\sqrt{2}$ ; i)  $18\frac{2}{3}$ ; j)  $e - \frac{1}{e}$ ; k)  $\ln 2$ ; l)  $\ln\sqrt{5}$ . **93** c = 2. **94** a = 3  $\wedge$  b = 1. **95** a = 2  $\wedge$  b = -3  $\wedge$  c = 1.

- 96** a = 2  $\wedge$  b = 1. **97** a) a = 1; b) a = 4. **98** a = 1  $\wedge$  b = -2.

- 99** (a = -4  $\wedge$  b = -1)  $\vee$  (a = 1  $\wedge$  b = 4).

### 19.16 Obsah rovinného obrazce

- 100** a)  $\frac{8}{3}$ ; b)  $\frac{10}{3}$ ; c)  $\frac{16}{3}$ ; d)  $\ln 10 \doteq 2,30$ ; e) 2; f) 2; g)  $e-2 \doteq 0,72$ ; h) 1.

- 101** a)  $\frac{32}{3}$ ; b)  $\frac{8}{3}$ ; c)  $4\frac{1}{2}$ ; d) 9. **102** a) 16; b)  $\pi$ . **103** a)  $\frac{1}{6}$ ; b)  $\frac{32}{3}$ ; c)  $4\frac{1}{2}$ ; d)  $4\frac{1}{2}$ ; e)  $\frac{32}{3}$ ; f)  $\frac{8}{3}$ ; g) 4; h) 0; i)  $\frac{1}{3}$ ; j)  $\frac{4}{3}$ ; k)  $\frac{3}{2} - \ln 4 \doteq 0,11$ ; l)  $\frac{4}{3}$ .

- 104** a)  $2\sqrt{2}$ ; b)  $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \doteq 0,68$ ; c) 8; d) 0. **105** a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{128}{15}$ . **106** a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{1}{2}$ . **107** a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\ln 4 \doteq 1,39$ ; c) 4. **108**  $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ . **109** 2.

- 110** a)  $\frac{32}{3}$ ; b)  $\frac{\pi^2}{8} - 1 \doteq 0,23$ . **111** a)  $\frac{16}{3}$ ; b)  $\frac{16}{3}$ ; c)  $\frac{16}{3}$ . **112** a)  $\frac{1}{12}$ ; b)  $\frac{9}{4}$ .

- 113** a = 12. **114** a =  $\pm\frac{1}{12}$ . **115** b =  $\pm 6$ . **116** a =  $-\frac{1}{9}$   $\wedge$  b = 4.

- 117**  $y = \pm\frac{4}{3}(x^2 - 6x)$ . **118**  $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x$ . **119**  $y = \frac{4}{9}x^2 - 4$ . **120** a =  $\pm 10$ .

- 121**  $y = 2\sin x + 1$ . **122** a = b = 3. **123** b =  $\frac{\pi}{2}$ . **124** b =  $\frac{\pi}{4}$ .

- 125** a =  $e^{-5} \doteq 0,007$ . **126** m =  $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{18} \doteq 1,747$ . **127** k =  $\frac{\pi}{3}$ .

**19.17 Objem rotačního tělesa**

- 128** a)  $\frac{8}{3}\pi$ ; b)  $\frac{7}{3}\pi$ ; c)  $\frac{7}{3}\pi$ ; d)  $\frac{32}{5}\pi$ ; e)  $\frac{412}{15}\pi$ ; f)  $\frac{16}{15}\pi$ ; g)  $18\pi$ ; h)  $2\pi$ ; i)  $\pi$ ; j)  $\frac{9}{5}\pi$ ; k)  $\frac{1}{2}\pi^2$ ; l)  $\frac{9}{2}\pi^2$ . **129** a)  $\frac{32}{3}\pi$ ; b)  $\frac{4}{3}\pi$ ; c)  $\frac{8}{3}\pi$ ; d)  $\frac{16}{3}\pi$ . **130** a)  $\frac{5}{3}\pi$ ; b)  $\frac{41}{24}\pi$ ; c)  $\frac{472}{3}\pi$ ; d)  $\frac{43}{30}\pi$ ; e)  $2\pi$ ; f)  $8\pi$ ; g)  $\frac{4}{3}\pi$ ; h)  $\frac{28}{3}\pi$ . **131**  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . **132**  $\pi r^2 v$ .  
**133**  $\frac{1}{3}\pi r^2 v$ . **134**  $\frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ . **135** a)  $\frac{4}{3}\pi b^2 a$ ; b)  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ . **136** a)  $\frac{384}{5}\pi$ ; b)  $12\pi$ . **137**  $k = \pm 3$ . **138**  $p = \frac{5}{2\pi}$ . **139**  $p = \frac{3}{2}$ . **140**  $(\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2})\pi$ .

**20 Pravděpodobnost a statistika****20.1 Definice pravděpodobnosti, vlastnosti pravděpodobnosti, binomické rozdělení**

- 1** a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{1}{2}$ . **2** a)  $\frac{1}{6}$ ; b)  $\frac{1}{2}$ ; c)  $\frac{5}{6}$ ; d) 0. **3** a)  $\frac{1}{36}$ ; b)  $\frac{1}{4}$ ; c)  $\frac{3}{4}$ ; d)  $\frac{1}{9}$ ; e)  $\frac{1}{6}$ .  
**4** a)  $\frac{3}{4}$ ; b)  $\frac{1}{4}$ ; c)  $\frac{5}{36}$ ; d)  $\frac{1}{12}$ . **5** a)  $\frac{5}{18}$ ; b)  $\frac{11}{36}$ ; c)  $\frac{35}{36}$ ; d)  $\frac{25}{36}$ . **6** a)  $\frac{25}{72}$ ; b)  $\frac{125}{216}$ ; c)  $\frac{25}{27}$ ; d)  $\frac{91}{216}$ . **7** Pravděpodobnost výhry obou hráčů je stejná  $p = \frac{27}{216}$ . **8**  $\frac{1}{24}$ .  
**9**  $\frac{7}{8}$ . **10** a)  $\frac{1}{4}$ ; b)  $\frac{3}{4}$ . **11** a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{1}{2}$ . **12**  $\frac{3}{8}$ . **13** Alespoň 4×. **14** Alespoň 8×.  
**15** Alespoň 58×. **16** Alespoň 25×. **17** Alespoň 10×. **18** 0,161. **19** 0,013.  
**20** 0,225. **21** a) 0,0006; b) 0,9999. **22** 0,0022. **23** Pravděpodobnější je, že při 4 hodech padne právě jedna šestka ( $0,386 > 0,182$ ). **24** 0,083. **25** 0,618. **26** 0,003.  
**27** 0,247. **28** 0,959. **29** a) 0,333; b) 0,242; c) 0,091; d) 0,576. **30** a) 0,066; b) 0,505; c) 0,286; d) 0,220. **31** a) 0,920; b) 0,080; c) 0,846; d) 0,999.  
**32** a) 0,992; b) 0,896; c) alespoň 3×. **33** a) 0,08; b) 0,44; c) 0,48; d) 1. **34** 0,950.  
**35** a) 0,723; b) 0,978; c) 0,958. **36** 0,779. **37** 0,99 (0,999). **38** a) 0,5; b) 0,2.  
**39** a) 0,297; b) 0,051; c) 0,352; d) 0,100. **40** a) 0,678; b) 0,978. **41** a) 0,16; b) 0,12; c) 0,04; d) 0,24. **42** a) 0,167; b) 1; c) 1. **43** 0,5. **44** 0,167.  
**45** a) 0,375; b) 0,375; c) 0,125; d) 0,125; e) 1. **46** a)  $2,259 \cdot 10^{-10}$ ; b) 1; c) 0,9996.  
**47** a) 0,625; b) 0,625. **48** 0,475. **49** 0,398. **50** a) 0,0526; b) 0,3947; c) 0,5526; d) 1.  
**51** a) 0,708; b) 0,183. **52** a) 0,140; b) 0,154; c) 0,462.  
**53** a)  $\forall n \in \mathbb{N}: \binom{n}{2} : \binom{2^n}{2} < \frac{1}{4}$ ; b)  $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 : \binom{2^n}{2} > \frac{1}{2}$ . **54** a) 0,017; b) 0,154; c) 0,846. **55** a) 0,010; b) 0,049. **56** a) 0,002; b) 0,118; c) 0,882.  
**57** a) 0,0002; b) 0,170. **58** 0,008. **59** 0,106. **60** a) 0,137; b) 0,363; c) 0,863; d) 0,886. **61** 0,137. **62** 0,0035. **63** 0,677. **64** 0,999. **65** a) 0,271; b) 0,788.

**Statistika****20.2 Arithmetický průměr, modus, medián, směrodatná odchylka, variační koeficient**

- 66** a)  $\bar{v} = 170\frac{2}{3}$  cm, modus: 167 cm, medián: 172 cm. **67**  $\bar{v} = 85,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .  
**68**  $\bar{x} = 2,6$ , modus: 2, medián: 2,5. **69**  $\bar{x} = 249,7$  g,  $s_x = 1,55$  g,  $v_x = 0,62\%$ .  
**70**  $\bar{x} = 7500$  Kč, modus: 5 000 Kč, medián: 7 000 Kč,  $s_x = 3900$  Kč.

**Použité matematické symboly a značky**

N	množina všech přirozených čísel
Z	množina všech celých čísel
R	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina všech nezáporných reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina všech kladných reálných čísel
$\mathbb{R}^-$	množina všech záporných reálných čísel
C	množina všech komplexních čísel
$a \in A, a \notin A$	a je prvkem množiny A, a není prvkem množiny A
$A = \{a, b, c\}$	množina A je dána výčtem prvků
$\{x \in A; V(x)\}$	množina všech prvků množiny A, které mají vlastnost $V(x)$
$A \subset B$	množina A je podmnožinou množiny B
$A \cap B, A \cup B$	průnik množin A, B, sjednocení množin A, B
$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$	sjednocení všech množin $A_k$ , kde $k \in \mathbb{Z}$
$A - B$	rozdíl množin A, B
$\emptyset$	prázdná množina
$\neg p$	negace výroku p
$p \wedge q, p \vee q$	konjunkce, p a zároveň q, disjunkce, p nebo q
$p \Rightarrow q$	p implikuje q, z p plyne q
$p \Leftrightarrow q$	p je ekvivalentní s q, p právě když q
$\forall x \in \mathbb{R}$	pro každé x z množiny R platí
$\exists x \in \mathbb{R}$	existuje x z množiny R, pro které platí
e, $\pi$	Eulerovo číslo e = 2,718 28..., Ludolfov číslo $\pi = 3,141 59\dots$
i	imaginární jednotka
$ a $	absolutní hodnota čísla a
$a^n, \sqrt[n]{a}$	n-tá mocnina čísla a, n-tá odmocnina z čísla a
$a   b$	číslo a dělí číslo b
$y = f(x), x \in M$ resp. $f: y = f(x), x \in M$	funkce, jejímž definičním oborem je množina M
$f(x)$	hodnota funkce f v bodě x
$D(f), H(f)$	definiční obor funkce, obor hodnot funkce
$f^{-1}$	funkce inverzní k funkci f
$g \circ f$ resp. $y = g(f(x))$	funkce složená z funkcí f, g
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limita funkce f v bodě a
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	limita funkce f v bodě a zprava
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	limita funkce f v bodě a zleva
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	limita funkce f v nevlastním bodě $\infty$
$f'$	derivace funkce f
$F(x) = \int f(x) dx$	primitivní funkce k funkci f
$\int_a^b f(x) dx$	určitý integrál funkce f od a do b
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$	nekonečná posloupnost
$a_n$	n-tý člen posloupnosti
$s_n$	součet prvních n členů posloupnosti

## Seznam použité literatury

- [1] Antonov N. – Vygotskij M.: *Sbornik zadač po elementarnoj matematike*. Izdatelstvo fyziko-matematičeskoj literatury Moskva 1962.
- [2] Benda P. a kol.: *Sbírka maturitních příkladů*. SPN Praha 1983.
- [3] Boček L.: *Matematika pro gymnázia — rovnice a nerovnice*. Prometheus Praha 1994.
- [4] Bušek I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. SPN Praha 1985.
- [5] Bušek I. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. SPN Praha 1987.
- [6] Bušek I. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. SPN Praha 1991.
- [7] Bušek I. – Boček L. – Calda E.: *Matematika pro gymnázia — základní poznatky z matematiky*. Prometheus Praha 1992.
- [8] Calda E.: *Matematika pro gymnázia — komplexní čísla*. Prometheus Praha 1994.
- [9] Calda E. – Dupač V.: *Matematika pro gymnázia — kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Prometheus Praha 1993.
- [10] Grošek O. – Volauš P.: *Příklady z matematiky na přijímacie pohovory*. SNTL Bratislava 1988.
- [11] Hlaváček A.: *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky*. SPN Praha 1965.
- [12] Jirásek F. – Kriegelstein E. – Tichý Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky*. SNTL Praha 1990.
- [13] Kočandrle M. – Boček L.: *Matematika pro gymnázia — analytická geometrie*. Prometheus Praha 1995.
- [14] Kubát J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. SPN Praha 1986.
- [15] Kuščenko V.: *Sbornik konkursnych zadač po matematike*. Izd. Sudostrojenije Leningrad 1967.
- [16] Materiály vysokých škol o přijímacích zkouškách z matematiky v roce 1996 a jejich požadavky k přijímacím zkouškám z matematiky.
- [17] Odvárko O. *Matematika pro gymnázia — funkce*. Prometheus Praha 1993.
- [18] Odvárko O. *Matematika pro gymnázia — goniometrie*. Prometheus Praha 1994.
- [19] Odvárko O. *Matematika pro gymnázia — posloupnosti a řady*. Prometheus Praha 1995.
- [20] Parízek B. – Horniaček H. – Galan A. – Kollár D. *Matematické úlohy*. Slovenské pedagogické nakladatelstvo Bratislava 1978.
- [21] Pomykalová E. *Matematika pro gymnázia — planimetrie*. Prometheus Praha 1993.
- [22] Pomykalová E. *Matematika pro gymnázia — stereometrie*. Prometheus Praha 1995.
- [23] Smida J. – Boček M. – Odvárko O. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. SPN Praha 1986.
- [24] Smida J. – Šedivý J. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. SPN Praha 1985.
- [25] Vejsada F. – Talafous F. *Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ*. SPN Praha 1969.

$d$	diference aritmetické posloupnosti
$q$	kvocient geometrické posloupnosti
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	nekonečná řada
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$	vektory
$X[x; y]$	bod $X$ o souřadnicích $x, y$
$\mathbf{v} = (x; y)$	vektor $\mathbf{v}$ má souřadnice $x, y$
$ \mathbf{v} $	velikost vektoru $\mathbf{v}$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	vektorový součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$
$p = \{[a_1 + s_1 t; a_2 + s_2 t], t \in \mathbb{R}\}$	zápis přímky dané parametrickými rovnicemi $x = a_1 + s_1 t, y = a_2 + s_2 t, t \in \mathbb{R}$
$n!$	$n$ -faktoriál
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo $n$ nad $k$
$V(k, n)$	počet $k$ -členných variací bez opakování z $n$ prvků
$P(n)$	počet permutací bez opakování z $n$ prvků
$K(k, n)$	počet $k$ -členných kombinací bez opakování z $n$ prvků
$\leftrightarrow AB$	přímka $AB$
$\mapsto AB$	polopřímka $AB$
$AB$	úsečka $AB$ (úsečka s krajními body $A, B$ )
$S_{AB}$	střed úsečky $AB$
$ AB $	délka úsečky $AB$
$AB \cong CD$	úsečka $AB$ je shodná s úsečkou $CD$
$\not\propto AVB$	úhel $AVB$
$ \not\propto AVB $	velikost úhlu $AVB$
rad	radian
$^\circ, ', ''$	úhlový stupeň, úhlová minuta, úhlová vteřina
$\Delta ABC$	trojúhelník $ABC$
$\Delta ABC \cong \Delta KLM$	trojúhelník $ABC$ je shodný s trojúhelníkem $KLM$
$\Delta ABC \sim \Delta KLM$	trojúhelník $ABC$ je podobný trojúhelníku $KLM$
$t_a$	těžnice trojúhelníku $ABC$ vedená vrcholem $A$
$v_a$	výška trojúhelníku $ABC$ vedená ke straně $a$
$k(S; r)$	kružnice $k$ se středem $S$ a poloměrem $r$
$p \parallel q$	přímka $p$ je rovnoběžná s přímkou $q$
$p \perp q$	přímka $p$ je kolmá k přímce $q$
$ Ap $	vzdálenost bodu $A$ od přímky $p$
$ pq $	vzdálenost rovnoběžných přímek $p, q$
$ A\rho $	vzdálenost bodu $A$ od roviny $\rho$
$o, S$	obvod rovinného obrazce, obsah rovinného obrazce
$S, V$	povrch tělesa, objem tělesa
$Z: X \rightarrow X'$	bod $X'$ je obrazem bodu $X$ v zobrazení $Z$
$O(o)$	osová souměrnost s osou souměrnosti $o$
$S(S)$	středová souměrnost se středem souměrnosti $S$
$R(S, \alpha)$	otočení se středem $S$ a úhlem otočení $\alpha$
$T(A \mapsto A')$	posunutí určené bodem $A$ a jeho obrazem $A'$
$H(S, \varkappa)$	stejnolehlost se středem $S$ a koeficientem $\varkappa$