


分離公理の反例まとめ

更新日: 2016年01月30日



じゅー2さん

0

お気に入り

545

view

お気に入り追加

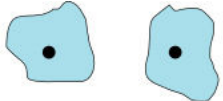
分離公理の周辺で、反例となる空間をまとめました。
分離公理は、日本語版Wikiに従って、以下の通りとします。
(英語だと完全ハウスドルフとウリゾーンが逆だったりします)

- T0 ; 異なる 2 点のうちの少なくとも一方が他方を含まない近傍を持つ。
- T1 ; 異なる 2 点は他方を含まない近傍を持つ
- ハウスドルフ ; 異なる 2 点は交わらない近傍を持つ
- ウリゾーン ; 異なる 2 点は交わらない閉近傍を持つ
- 完全ハウスドルフ ; 異なる 2 点は関数で分離される

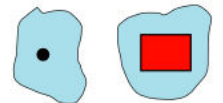
- 正則 ; 任意の閉集合とそれに含まれない一点が交わらない近傍を持つ
- 完全正則 ; 任意の閉集合とそれに含まれない一点が関数で分離される
- 正規 ; 任意の交わらない閉集合が交わらない近傍を持つ
- 全部分正規 ; 二つの集合は一方の閉包が他方と交わらないとき交わらない近傍を持つ
- 完全正規 ; 任意の交わらない閉集合が関数でちょうど分離される

分離公理 - Wikipedia

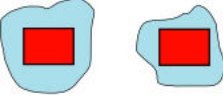
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%88%86%E9%9B%A2%E5%85%AC%E7%90%86
分離公理 出典: フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia) 』 移動: 案内、 検索 経済学における「分離定理」とは異なります。いくつかの分離公理の図示。青い領域は開集合を、赤い四角は閉集合を、黒い点は空間の点を意味する。数学の 位相空間論 周辺分野において、考えたい種類の 位相空間 を割り出すための様々な制約条件が知られている。そういった制約のうちのいくつかが 分離公理 ...



Hausdorff



Regular



Normal

成立する事実を確認しておきます。
まずT1空間においては
・完全正規⇒全部分正規⇒正規⇒完全正則⇒正則,完全ハウスドルフ⇒ウリゾーン⇒ハウスドルフ
となります。
必ずしもT1でないと
・完全正規⇒全部分正規⇒正規
・完全正則⇒正則
・完全ハウスドルフ⇒ウリゾーン⇒ハウスドルフ⇒T1⇒T0
が成立します。

T0でない例、T0であるがT1でない例

これはWikiにたくさん載っています。



じゅー2さん

じゅーです

関連まとめ

- 

結局、微分・積分って何なの？その初歩の初歩
- 

黄金比・白銀比・青銅比...デザインの参考になる数学的比...
- 

【究極の天才】ジョン・フォン・ノイマン
- 

高校数学を本気で学ぶための参考書と問題集まとめ
- 

92%が解けないと話題の計算問題！「7÷7÷7÷7×...

PRまとめ

- 


過去には1ヵ月待ち...じわりと話題の「幻のシャンプー」
- 

これ行ってみたい...！親子で楽しめる「異文化体験ツアー」...
- 

なんだコレ。。薬局がめっちゃアピってる謎の化粧品
- 

新キャラ登場...？グリーンダカラのCMにまさかの展開
- 

「二の腕のブツブツ」って放っておくと悪化するらしい...

  話題の動画をまとめよう

コルモゴロフ空間 - Wikipedia

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B3%E3%83%AB%E3%83%A2%E3%82%B4%E3%83%AD%E3%83%95%E7%A9%BA%E9%96%93>

コルモゴロフ空間 出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』 移動: 案内、 検索 数学 の 位相空間論 関連分野における コルモゴロフ空間（コルモゴロフくうかん、英：Kolmogorov space）あるいは T 0 -空間 は、任意の二点に対して少なくともその一方が他方を含みぬ 開近傍 を持つような 位相空間 である。この条件は 分離公理 と呼ばれるものの一種...

T1空間 - Wikipedia

<http://ja.wikipedia.org/wiki/T1%E7%A9%BA%E9%96%93>

T1空間 出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』 移動: 案内、 検索 この記事のほとんどまたは全てが唯一の出典 にのみ基づいています。他の出典の追加 も行い、記事の正確性・中立性・信頼性の向上にご協力ください。（2010年6月） 数学 の 位相空間論 周辺分野における T 1 -空間（T 1 -くうかん、英：T 1 space）は、相異なる二点を...

少し取り上げると以下のようなものがあります。

密着空間 - Wikipedia

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AF%86%E7%9D%80%E7%A9%BA%E9%96%93>

密着空間 出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』 移動: 案内、 検索 数学 の 位相空間論 周辺分野における 密着空間（みっちゃくくうかん、英：indiscrete space）は、直観的にはその空間の全ての点が「一塊に密着」していてどの点の 位相的な意味で区別できない ような 位相空間 である。密着空間の位相は、開集合系が 空集合 と空間全体のみからなる ...

2点以上ある空間に密着位相を入れれば明らかにT_0ではありません。

Overlapping interval topology - Wikipedia, the free encyclopedia

http://en.wikipedia.org/wiki/Overlapping_interval_topology

Overlapping interval topology From Wikipedia, the free encyclopedia Jump to: navigation , search Not to be confused with Interlocking interval topology . In mathematics , the overlapping interval top...

重複区間位相とは、実数の区間 [-1,1] に入る位相で、 [-1,a) , (b,1] (b<0<a) と書けるもの全体を開基として生成された位相です。この位相を入れた空間 [-1,1] の開集合は [-1,a) , (b,a) , (b,1] (b<0<a) と書けるもので全てです。この空間は T0 ですが、任意の開集合が 0 を含むため T1 ではありません。

Particular point topology - Wikipedia, the free encyclopedia

http://en.wikipedia.org/wiki/Particular_point_topology

Particular point topology From Wikipedia, the free encyclopedia Jump to: navigation , search In mathematics , the particular point topology (or included point topology) is a topology where sets are ...

$$f(t) = \begin{cases} x & t = 0 \\ p & t \in (0,1) \\ y & t = 1 \end{cases}$$

特異点位相とは、集合 X から一点 p を選んで、 p を含む部分集合全体を開集合と定めた位相のことです。特に X = {0,1} に特異点位相を入れたものはシェルピンスキー空間と言います。これは T1 でない T0 空間です。似たものに除外点位相というものがあります。
http://en.wikipedia.org/wiki/Excluded_point_topology.

ハウスドルフでないT1空間

補有限 - Wikipedia

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%A3%9C%E6%9C%89%E9%99%90>

補有限 出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』 移動: 案内、 検索 数学 において、 集合 X の 部分集合 A が 補有限（ほゆうげん、英：cofinite；余有限）であるとは、 A の X における 補集合 が 有限集合 であることをいう。すなわち、補有限集合 A は「 X の 有限個の例外を除く全ての元を含む」ような X の部分集合である。補集合...

補有限位相とは、集合Xの任意の有限部分集合の補集合を開とする位相です。これはT1空間ですが、Xが無限集合の場合には明らかにハウスドルフでない空間となります。特にザリスキー位相 (<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B6%E3%83%AA%E3%82%B9%E3%82%AD%E3%83%BC%E4%BD%8D%E7%9B%B8>)はハウスドルフでない空間を定めます。

ハウスドルフであってウリゾーンでない例

Hausdorff space not completely Hausdorff | planetmath.org

<http://planetmath.org/hausdorffspacenotcompletelyhausdorff>



じゅー2さん

じゅーです

関連まとめ



結局、微分・積分って何なの？その初歩の初歩



黄金比・白銀比・青銅比...デザインの参考になる数学的比...



【究極の天才】ジョン・フォン・ノイマン



高校数学を本気で学ぶための参考書と問題集まとめ



92%が解けないと話題の計算問題！「7÷7÷7÷7×...」

PRまとめ



過去には1ヵ月待ち...じわりと話題の「幻のシャンプー」



これ行ってみよう...！親子で楽しめる「異文化体験ツアー」...



なんだコレ。。薬局がめっちゃアピってる謎の化粧品



新キャラ登場...？グリーンダカラのCMにまさかの展開



「二の腕のブツブツ」って放っておくと悪化するらしい...



話題の動画をまとめよう

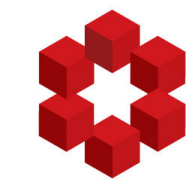
$S(a,b) = a+b\mathbb{Z} = \{ a+kb \mid k \in \mathbb{Z} \}$ とおきます。整数の集合 \mathbb{Z} に $S(a,b)$ ($b \neq 0, \gcd(a,b)=1$) 全体を開基として生成される位相を考えます。
 \mathbb{Z} の異なる二点 m,n については、 $\gcd(m,t)=\gcd(n,t)=1$ なる $t > |m-n|$ をとれば $S(m,t) \cap S(n,t) = \emptyset$ なのでハウスドルフです。

ウリゾーンでないことは次のように示されます。 $S(a,b)$ の閉包を $T(a,b)$ とおきます。
 $b \in S(a,b)$ でないことは $(a,b)=1$ からわかります。
 $(t,b)=1$ となると、互除法により $tx-by=a-bk$ なる $x,y \in \mathbb{Z}$ が存在します。
従って $(bk,t)=1$ なる任意の k について $S(bk,t) \cap S(a,b) \neq \emptyset$ となり、
 kb の任意の近傍は $S(a,b)$ と交わるので、 $b\mathbb{Z} \subset T(a,b)$ がわかります。
さて、 m,n の近傍 U_m, U_n を取ると、 $m \in S(m,a) \subset U_m, n \in S(n,b) \subset U_n$ となる $S(m,a), S(n,b)$ が存在します。
 $ab \in T(m,a), T(n,b)$ なので $T(m,a) \cap T(n,b) \neq \emptyset$ となり、ゆえに \mathbb{Z} はウリゾーン空間でないことがわかります。

ウリゾーンでない正則空間(T1でない)

general topology - Regular space which is not Hausdorff - Mathematics Stack Exchange

http://math.stackexchange.com/questions/428567/regular-space-which-is-not-hausdorff
current community chat blog Mathematics Mathematics Meta your communities Sign up or log in to customize your list.
more stack exchange communities Stack Exchange sign up log in tour help Tour Start ...



4点からなる集合 $X = \{0,1,2,3\}$ に $\tau = \{ \emptyset, \{0,1\}, \{2,3\}, X \}$ により位相を定めると、これはウリゾーンでない正則空間の例となります。
これは完全ハウスドルフでない正則空間の例でもあります。

完全ハウスドルフでも正則でもないウリゾーン空間

$S = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{Q}, 0 < p,q < 1, p \neq 1/2\}$
 $X = S \cup \{(0,0)\} \cup \{(1/2,r\sqrt{2}) \mid r \in \mathbb{Q}, 0 < r\sqrt{2} < 1\}$
とします。 X に基本近傍系を次のように定めて位相を入れます。
・ S の点の近傍は $(0,1) \times (0,1)$ に含まれる程度に十分小さい $(\mathbb{R}^2$ の標準位相での) 開球
・ $(0,0)$ の近傍は $U_n(0,0) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \mid 0 < x < 1/4, 0 < y < 1/n\}$
・ $(1,0)$ に近傍は $U_n(1,0) = \{(1,0)\} \cup \{(x,y) \mid 3/4 < x < 1, 0 < y < 1/n\}$
・ $(1/2,r\sqrt{2})$ の近傍は $U_n(1/2,r\sqrt{2}) = \{(x,y) \mid 1/4 < x < 3/4, |y-r\sqrt{2}| < 1/n\}$
 X の部分空間としての S には \mathbb{R}^2 の標準位相から誘導された位相と同じ位相が入っています。
このとき X は明らかにウリゾーン空間です。
また、 S の点で x 座標が $1/4$ であるもの全体は閉集合で、これと $(0,0)$ は明らかに近傍で分離できず、よって正則でないです。
完全ハウスドルフでないことは、次のように示されます。

A の閉包を $CL(A)$ と書くことにします。
連続関数 $f: X \rightarrow I = [0,1]$ で $f(0,0)=0, f(1,0)=1$ となるものが存在したとします。
 I の開集合 $[0,1/4), (3/4,1]$ の f による逆像は点 $(0,0), (1,0)$ の開近傍なのである $n,m \in \mathbb{N}$ が存在し $U_m(0,0) \subset f^{-1}([0,1/4)), U_n(1,0) \subset f^{-1}((3/4,1])$ となります。
 $r\sqrt{2} < \min\{1/m, 1/n\}$ となる $r \in \mathbb{Q}$ をとります。 $f(1/2,r\sqrt{2})$ が $[0,1/4), (3/4,1]$ の両方に含まれることはないの
で、 $[0,1/4)$ に含まれないとしても一般性を失わない。
 $f(1/2,r\sqrt{2})$ の開近傍 U で、 $CL(U) \cap CL([0,1/4)) = \emptyset$ となるものをとると、
 $CL(U)$ と $CL([0,1/4))$ の f による逆像はそれぞれ $(1/2,r\sqrt{2})$ と $(0,0)$ の交わらない開近傍です。
しかし $r\sqrt{2} < \min\{1/m, 1/n\}$ より、任意の k について $U_m(0,0)$ と $U_k(1/2,r\sqrt{2})$ の閉包は交わるのでこれは矛盾。
よってそのような連続写像は存在しないことがわかります。

ウリゾーンであって正則であるが完全ハウスドルフでない空間



じゅー2さん

じゅーです

関連まとめ



結局、微分・積分って何なの？ その初歩の初歩



黄金比・白銀比・青銅比... デザインの参考になる数学的比...



【究極の天才】ジョン・フォン・ノイマン



高校数学を本気で学ぶための参考書と問題集まとめ



92%が解けないと話題の計算問題！「7+7÷7+7×...

PRまとめ



過去には1ヵ月待ち...じわりと話題の「幻のシャンプー」



これ行ってみたい...！親子で楽しめる「異文化体験ツアー」...



なんだコレ。。薬局がめっちゃアピってる謎の化粧品



新キャラ登場...？グリーンダカラのCMにまさかの展開



「二の腕のブツブツ」って放っておくと悪化するらしい...



話題の動画をまとめよう



Tychonoff Corkscrewというものがあります。

Ω を最小の非可算順序数、 ω を最小の無限順序数とし、 $A=(\Omega+1)\times(\omega+1)-\{p\}$ (ただし $p=(\Omega,\omega)$) とします。これは順序位相を入れて考えた積空間の相対位相を入れます (チコノフの板)。
Aをコピーして、 $A(n), B(n), n \in \mathbb{Z}$ とします。これらを次のように貼り合わせてできる空間をSとします；

- ・ $A(n)$ の辺 $(\Omega+1)\times\{\omega\}-\{p\}$ と $B(n)$ の辺 $(\Omega+1)\times\{\omega\}-\{p\}$ の対応する点を同一視
- ・ $B(n)$ の辺 $(\omega+1)\times\{\Omega\}-\{p\}$ と $A(n+1)$ の辺 $(\omega+1)\times\{\Omega\}-\{p\}$ の対応する点を同一視

さて、S は上下に無限にのびる螺旋状の空間となります。そこで S の最上点と呼ばれる点 a と最下点と呼ばれる点 b を付け加え $X=S \cup \{a,b\}$ とします。X の位相は

- ・ S の点 x の近傍は x を含む S の開集合
- ・ a の近傍は $V(a;i) = \{a\} \cup (\cup_{n>i} (A(n) \cup B(n)))$
- ・ b の近傍は $V(b;i) = \{b\} \cup (\cup_{n<i} (A(n) \cup B(n)))$

として定義される基本近傍系によって生成します。

この空間をTychonoff Corkscrewと言います。

Xの開集合Fについて、aを含まなければあるiにより $n>i \Rightarrow F \cap V(a;n) = \emptyset$ となることから、Xの正則性がわかります。

完全ハウスドルフでないことを示すためには、次のことに注意せねばなりません；A上の連続関数 $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、ある $\alpha < \Omega, \beta < \omega$ があって、 $f|_{\{\alpha,\Omega\} \times [\beta,\omega]-\{p\}}$ 上で定数関数。これは、 $\Omega+1$ 上の連続関数が十分大きいところで定数となることから従います。

では、 $f:X \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の連続関数とします。 $A(n)$ 上の (α,β) を $(\alpha,\beta;a,n)$ などと書くこととすれば、先に述べた事実から、各nに対してある $\alpha < \Omega$ があって $f|_{\{\beta,\omega;a,n\} \times [\alpha,\beta]-\{p\}}$ 上で一定の値cをとります。これはまた $B(n)$ の辺でもありますから、先に述べた事実から、ある $\gamma < \omega$ があって $f|_{\{\Omega,\beta;a,n\} \times [\gamma,\beta]-\{p\}}$ 上で値cをとります。

こうして、各 $A(n), B(n)$ の辺を媒介することで、 $f(a)=f(b)=c$ となることがわかります。

従って、この空間の点a,bは関数で分離できないので完全ハウスドルフでないことがわかります。

完全ハウスドルフであるが正則でない空間



出典 www.taisei-steel.co.jp

アレクサンドロフの板というのがあります。

Ω を最小の非可算順序数とし、 $[0,\Omega]$ と $[-1,1]$ に順序位相を入れます。 $X=[0,\Omega] \times [-1,1]$ に積位相を入れて位相空間 (X,τ) を考えます。 $U(\alpha,n) = \{(\Omega,0)\} \cup (\alpha,\Omega] \times (0,1/n)$ とし、 $\sigma = \tau \cup \{U(\alpha,n) \mid \alpha < \Omega, n \in \mathbb{N}\}$ とすれば、 (X,σ) は位相空間となります。

これは完全ハウスドルフです。なぜなら異なる二点 $(a,b), (c,d)$ で $a < c$ なら $x \leq a$ の部分を $0, c \leq x$ の部分を1とする関数、 $b < d$ でも同様の関数を考えれば、二点が関数で分離できることがわかります。

一方これは正則ではありません。 $\{(x,0) \mid x < \Omega\}$ はXの開集合で $(0,\Omega)$ を含みませんが、これらの任意の近傍は交わります。



じゅー2さん

じゅーです

関連まとめ



結局、微分・積分って何なの？ その初歩の初歩



黄金比・白銀比・青銅比...デザインの参考になる数学的比...



【究極の天才】ジョン・フォン・ノイマン



高校数学を本気で学ぶための参考書と問題集まとめ



92%が解けないと話題の計算問題！
「 $7+7 \div 7+7 \times \dots$ 」

PRまとめ



過去には1カ月待ち...じわりと話題の「幻のシャンプー」



これ行ってみたい...！親子で楽しめる「異文化体験ツアー」...



なんだコレ。。薬局がめっちゃアピってる謎の化粧水



新キャラ登場...？グリーンダカラのCMにまさかの展開



「二の腕のブツブツ」って放っておくと悪化するらしい...





結局、微分・積分って何なの？その初歩の初歩

2014年03月18日 | 450907 view



黄金比・白銀比・青銅比...デザインの参考になる数学的比率

2013年11月27日 | 608379 view



【究極の天才】ジョン・フォン・ノイマン

2014年03月07日 | 581629 view

関連まとめ



なんだコレ。。薬局がめっちゃアピってる謎の化粧水

2015年03月20日 | 3225708 view



「二の腕のブツブツ」って放っておくと悪化するらしい...

2015年05月18日 | 3988667 view



マジで？マッサージは肩こりを悪化させるらしい...

2016年04月20日 | 253387 view

PRまとめ

カテゴリー一覧

総合

旬のまとめをチェック

ガールズ

ファッション, 美容, コスメ, 恋愛

ニュース・ゴシップ

事件, ゴシップ, スポーツ, 海外ニュース

エンタメ・カルチャー

映画, 音楽, 本, マンガ, アニメ

おでかけ・グルメ

旅行, アウトドア, デート, カフェ, ランチ

暮らし・アイデア

インテリア, ライフハック, 家事, 節約

レシピ

おかず, お弁当, おつまみ, 簡単レシピ

カラダ

エクササイズ, ダイエット, 肩こり, 健康

ビジネススキル

キャリア, 転職, プレゼン, 英語

IT・ガジェット

Webサービス, スマートフォン, アプリ

デザイン・アート

クリエイティブ, 写真, イラスト, 建築

雑学

トリビア, 不思議, 名言, 逸話

おもしろ

ユーモア, ネタ, 癒し, 動物, びっくり

定番

過去の人気まとめをチェック

お気に入り追加 0

会社概要 | 利用規約 | プライバシー | ヘルプ | NAVERまとめ公式ブログ



じゅー2さん

じゅーです

関連まとめ



結局、微分・積分って何なの？その初歩の初歩



黄金比・白銀比・青銅比...デザインの参考になる数学的比率



【究極の天才】ジョン・フォン・ノイマン



高校数学を本気で学ぶための参考書と問題集まとめ



92%が解けないと話題の計算問題！
「 $7+7\div7+7\times\ldots$ 」

[内容について運営スタッフに連絡](#)

PRまとめ



過去には1カ月待ち...じゅー2さんの話題の「幻のシャンプー」



これ行ってみたい...！親子で楽しめる「異文化体験ツアー」



なんだコレ。。薬局がめっちゃアピってる謎の化粧水



新キャラ登場...？グリーンダカラのCMにまさかの展開



「二の腕のブツブツ」って放っておくと悪化するらしい...



話題の動画をまとめよう