ベクトル解析

3. ベクトル値関数

1 ベクトル値関数

I を実数軸上の区間とする. I を開区間 (a, b) または閉区間 $[a, b]$ としよう

t が区間 I 上を動くとき各 t に対して 1 つのベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ が定まるとする.

このとき, $\boldsymbol{a}(t)$ を区間 I 上で定義された**ベクトル値関数**という.

ベクトル値関数 $\boldsymbol{a}(t)$ の**成分表示**を

$$\boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$$

とする. ベクトル値関数を与えることは結局 t に関する 3 個の関数 $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ を与えることにほかならない.

定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して,

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}| = 0$$

が成り立つとき,

$$\lim_{t \to t_0} a(t) = \boldsymbol{a}$$

とかき t が t_0 に限りなく近づくとき $\boldsymbol{a}(t)$ は $\boldsymbol{a}$ に限りなく近づくという.

成分表示 $\boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t)), \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とする

$$\max(|a_1(t) - a_1|, |a_2(t) - a_2|, |a_3(t) - a_3|) \leqq |\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}|$$
$$\leqq |a_1(t) - a_1| + |a_2(t) - a_2| + |a_3(t) - a_3|$$

に注意すると,

$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}| = 0$ が成立する必要十分条件は次の 3 つの等式

$$\lim_{t \to t_0} a_1(t) = a_1,\ \lim_{t \to t_0} a_2(t) = a_2, \lim_{t \to t_0} a_3(t) = a_3$$

が同時に成り立つことである.

微分

次の極限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{a}(t_0)}{\Delta t}$$

が存在するとき, ベクトル値関数 $\boldsymbol{a}(t)$ は $t = t_0$ で**微分可能**という

この極限値を

$$\boldsymbol{a}'(t_0) \quad \text{or} \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t_0)$$

と記し, $t = t_0$ における**微分係数**という.

$\boldsymbol{a}(t)$ がある開区間 $I = (a, b)$ のすべての点で微分可能のとき I の各点 t にベクトル値関数 $\boldsymbol{a}'(t)$ を対応させると, 1つのベクトル値関数が得られる. これを $\boldsymbol{a}(t)$ の**導関数**という.

成分表示:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t)).$$

基本定理

定理　$\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)$ をベクトル値関数, c を定数とすると

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{b}(t)) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(c\boldsymbol{a}(t)) = c\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t)\times\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}(t)$$

定理　ベクトル値関数 $\boldsymbol{a}(t)$ の長さが一定であれば $\boldsymbol{a}(t)$ と $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)$ は直交する.

$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t))=\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\times\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{b}(t)$ の証明：

$\boldsymbol{a}(t)=(a_1(t),a_2(t),a_3(t))$, $\boldsymbol{b}(t)=(b_1(t),b_2(t),b_3(t))$ とおく

$\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)=(a_2(t)b_3(t)-a_3(t)b_2(t),a_3(t)b_1(t)-a_1(t)b_3(t),a_1(t)b_2(t)-a_2(t)b_1(t))$

より、x-成分を微分して

$$(a_2(t)b_3(t)-a_3(t)b_2(t))'=a_2'(t)b_3(t)+a_2(t)b_3'(t)-a_3'(t)b_2(t)-a_3(t)b_2'(t)$$

となって

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\times\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}(t)$$

の x 成分と等しい. 同様に y,z 成分も等しいことが示せるので, 証明できる.

曲線

定義　実数直線上の閉区間 $I = [a, b]$ から空間 $\mathbb{R}^3$ への連続写像

$$C : I \to \mathbb{R}^3$$

を**連続曲線**という.

以下、$t \in I$ に対応する $C(t)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とかく.
曲線のパラメタ表示:

$$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (t \in I)$$

最後の辺のように**成分表示** して

$$C : x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (t \in I)$$

と表わすこともある.

$\boldsymbol{r}(t)$ が n 階までの連続な導関数をもつとき, C^n **級の曲線**という
有限個の C^n 級の曲線を結んでできる連続曲線 C を
区分的に C^n **級の曲線**とよぶ

曲線の例

直 線

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + t\boldsymbol{a} \quad (t : \text{実数})$$

は**点 P_0 を通り $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ に平行な直線**を表わす.

円 $a > 0$ を定数とする.

$$\boldsymbol{r}(t) = r(t) = (a\cos t, a\sin t, 0) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

は原点を中心とし xy-**平面上にある半径** a **の円**を表わす.

常螺線（らせん） $a > 0,\ c \neq 0$ を定数とする.

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, ct) \quad (t : \text{実数})$$

は**円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 上にある螺線**を表わす.

接線ベクトル

$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ を C^1 級の曲線とし,

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

を $\boldsymbol{r}(t_0)$ における曲線 C の**接線ベクトル**という.

$\boldsymbol{r}'(t_0) = \boldsymbol{0}$ なる $r(t_0)$ を曲線 C の**特異点**という.
特異点では接線は定義されない.

[物理的な意味]

t: 時刻

$\boldsymbol{r}(t)$: 点の運動

$\boldsymbol{r}'(t)$: 運動 $\boldsymbol{r}(t)$ の**速度ベクトル**

$\boldsymbol{r}''(t)$: **加速度ベクトル**

曲線の長さ

C^1 級の曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$ において閉区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

に応じて曲線に内接する折れ線の長さは

$$\begin{aligned} L(\Delta) &= \sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{r}(t_j) - \boldsymbol{r}(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2 + (z(t_j) - z(t_{j-1}))^2} \end{aligned}$$

となる. あらゆる分割 Δ に対する $L(\Delta)$ **の上限** L を曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$ の**長さ**という.
L の値は次の**定積分**で定まる：

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

弧長によるパラメーター表示

$a \leqq t \leqq b$ として, 区間 $[a, t]$ に対応する曲線の長さを $s(t)$ とする:

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt$$

曲線上に特異点がなければ

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)| > 0$$

となり, $s = s(t)$ は単調増加関数より逆関数 $t = t(s)$ が存在する.
従って, 曲線のパラメタを s に変更して

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t(s))$$

と表示でき, これを曲線の**弧長によるパラメーター表示**という.

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{r}(t(s)) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

であるから , $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{r}(t(s))$ は曲線上の**単位接線ベクトル**になる

曲線の長さ

常螺線（らせん）

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t) \quad (0 \leqq t \leqq 6\pi)$$

の長さを求めよ.

[解] $\boldsymbol{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 2)$ より

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

であるから, 長さ L は

$$L = \int_0^{6\pi} \sqrt{5}\, dt = 6\sqrt{5}\pi.$$

となる.

曲線の長さ 続き

上の常螺線の**弧長による表示**を求めよ.

[解] 前ページで計算したように

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{5}$$

よって

$$s = \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = \int_0^t \sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}t.$$

よって

$$t = \frac{1}{\sqrt{5}}s$$

従って, 曲線の弧長によるパラメーター表示は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s\right) = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{5}}s, \sin\frac{1}{\sqrt{5}}s, \frac{2}{\sqrt{5}}s\right).$$

例題

次の曲線の長さを求めよ.

(1) $\boldsymbol{r} = (3t, 2t, 4t) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

(2) $\boldsymbol{r} = (t, t^2, t) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

(3) $\boldsymbol{r} = (\sqrt{2}\,t, e^{-t}, e^t) \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$

例題の答え

(2) $\boldsymbol{r}'(t) = (1, 2t, 1)$ より

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 4t^2}$$

であるから, 長さ L は

$$L = \int_0^1 \sqrt{2 + 4t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{2 + s^2}\, ds \quad (s = 2t)$$

となる．ここで $\sqrt{2 + s^2}$ の積分だが $\sqrt{2 + s^2} = x - s$ とおくと

$$s = \frac{x^2 - 2}{2x}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{x^2 + 2}{2x^2}, \quad s : 0 \to 2 \text{ のとき } x : \sqrt{2} \to 2 + \sqrt{6}$$

なので

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2+\sqrt{6}} \frac{x^2 - 2}{2x} \cdot \frac{x^2 + 2}{2x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2+\sqrt{6}} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} - \frac{\log 2}{2} + \log\left(2 + \sqrt{6}\right)\right). \end{aligned}$$

参考

一般に $a > 0$, Rを $x, \sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理関数として

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

の形の積分は $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおけば、t の有理関数の積分になる。

例：

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$