微 分 方 程 式 特 論

1. 周期関数, 3角級数

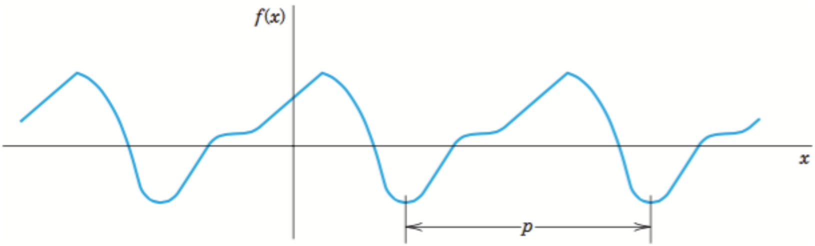
周期関数

関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して定義され,

$$\text{すべての } x \text{ に対して} \quad f(x+p) = f(x)$$

となる正の数 p が存在するとき, $f(x)$ は周期的であるという
数 p を $f(x)$ の周期という

長さ p の区間におけるグラフを周期的に繰り返せば，周期関数のグラフが得られる



例

例 定数関数 $f = c =$ 一定 という関数もすべての $p(> 0)$ に対して周期関数

例 正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ は周期 2π の周期関数

周期的でない関数の例
$x, x^2, x^3, e^x, \cosh x, \log x$ など多数ある

周期関数の性質　$f(x)$ を周期 p の関数とする．任意の整数 n に対して，

$$\text{すべての } x \text{ に対して} \quad f(x+np) = f(x).$$

$f(x+p) = f(x)$ より

$$f(x+2p) = f((x+p)+p) = f(x+p) = f(x)$$

などとなる．これを繰り返せば良い。
したがって $2p, 3p, 4p, \cdots$ も $f(x)$ の周期である

周期関数の性質・続き

線型性 $f(x)$, $g(x)$ が周期 p をもっているとき

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \qquad (\alpha, \beta \text{は定数})$$

も周期 p をもつ

・周期関数 $f(x)$ が最小周期 $p(> 0)$ をもつとき, p を $f(x)$ の基本周期という

例

・$\cos x$ と $\sin x$ の基本周期は 2π

・$\cos 2x$ と $\sin 2x$ の基本周期は π

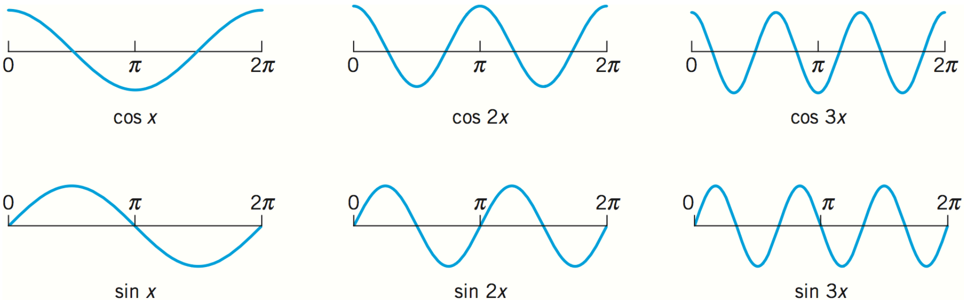
・定数函数は基本周期をもたないとする

3 角関数

周期 2π の種々の関数が簡単な関数

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

で表される. これらの関数は周期 2π をもち **3 角関数系** という



これらを加算してつくられる級数

$$a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$(a_0, a_l, a_2 \cdots, b_1, b_2, \cdots,$ は実定数）を **3 角級数**とよぶ

3 角級数

級数

$$S = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

のそれぞれの項は周期 2π をもつ
この級数が収束するならば，和 S も周期 2π の関数

逆に、任意の周期 2π の周期関数 f を表すために 3 角級数を使うことができる
この級数を f のフーリエ級数とよぶ

フーリエ係数

フーリエ級数

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に対して, フーリエ係数は次のように決まる

定理

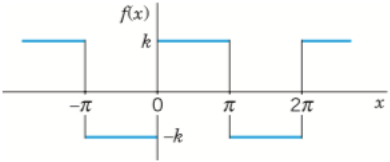
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

★周期性より積分区間は $-\pi \to \pi$ でも、$a \to a + 2\pi$ でもよい

例：方形波

周期 2π の周期関数 $f(x+2\pi)=f(x)$ として次の方形波を考える

$$f(x)=\begin{cases}-k & (-\pi<x<0),\\ k & (0<x<\pi).\end{cases}$$



フーリエ係数は

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0.$$

さらに $-\pi\to 0$ の積分で $x=-t$ と置換して

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}k\cos nx\,dx\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}k\cos nt\,dt+\int_{0}^{\pi}k\cos nx\,dx\right]=0\end{aligned}$$

方形波・続き

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} k\sin nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} k\sin nt\,dt + \int_{0}^{\pi} k\sin nx\,dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} k\sin nx\,dx = \frac{2k}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi).
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\cos n\pi = \begin{cases} -1 & (n:\text{奇数}), \\ 1 & (n:\text{偶数}). \end{cases}
$$

を用いて

$$
b_n = \begin{cases} \dfrac{4k}{n\pi} & (n:\text{奇数}), \\ 0 & (n:\text{偶数}). \end{cases}
$$

方形波のフーリエ展開

以上により $a_n = 0$ かつ

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \cdots$$

フーリエ級数は

$$S(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

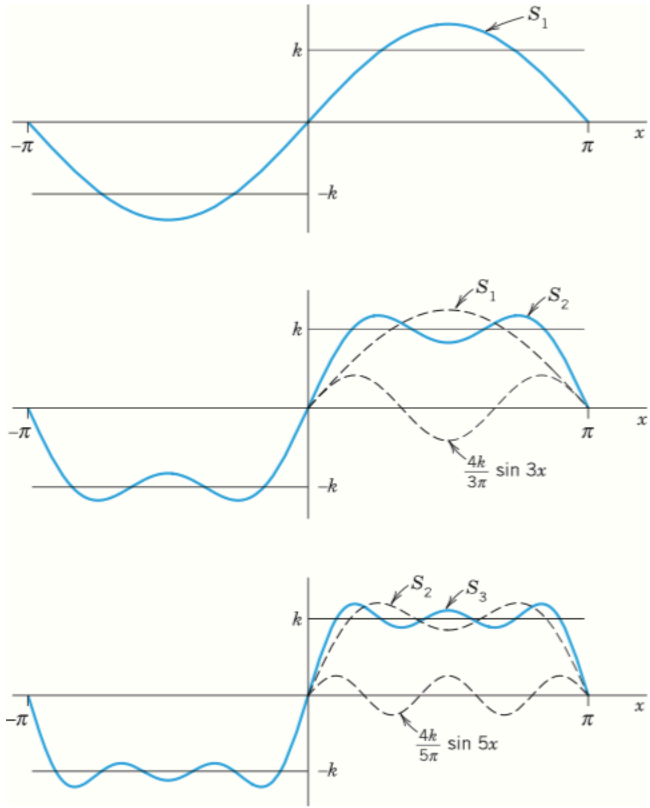
$S(0) = 0, S(\pi) = 0$ になる。また中間の $x = \pi/2$ では

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4k}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

したがって

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots}$$

最初の$\mathbf{3}$項まで： S_1, S_2, S_3



三角関数の直交性

フーリエ級数の証明のキーは次の定理である：

三角関数の直交性

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \qquad (n \neq m),$$
$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \qquad (n \neq m),$$
$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0.$$

証明 三角関数の積和公式を使う

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}\left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right)$$
$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}\left(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right),$$
$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}\left(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\right)$$

n, m が整数で $n \neq 0$ なら

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin mx\, dx = 0$$

なので積和公式から $n, m > 0$ かつ $n \neq m$ なら

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+m)x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)x\, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+m)x\, dx = 0$$

$n, m > 0$ なら

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n+m)x\, dx + \int_0^{2\pi} \sin(n-m)x\, dx = 0.$$

$\square$

$n = m$ の場合も考える。同様に積和公式から

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi.$$

フーリエ係数

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に対して（無限和と積分の順序交換はできるとして）

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{2\pi} a_0\,dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_n \cos nx\,dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} b_n \sin nx\,dx \\ &= 2\pi a_0\end{aligned}$$

したがって

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

$m > 0$ なら

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 \cos mx\,dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_n \cos nx \cos mx\,dx \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} b_n \sin nx \cos mx\,dx = \pi a_m\end{aligned}$$

したがって

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx, \quad m = 1, 2, ...$$

sin の係数について、$m > 0$ として

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 \sin mx\,dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_n \cos nx \sin mx\,dx$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} b_n \sin nx \sin mx\,dx = \pi b_m$$

したがって

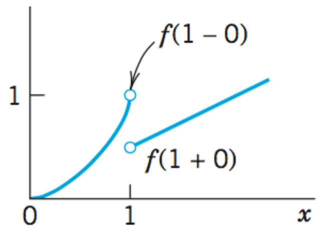
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx, \quad m = 1, 2, ...$$

フーリエ級数による表現

定理

周期関数 $f(x)$ は周期 2π をもち, $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の区間で区分的に連続であるとする．また, その区間内の各点で左微分係数と右微分係数をもつとする．このとき, フーリエ級数は収束して, 級数の和は $f(x)$ になる．ただし, $f(x)$ が不連続である点 x_0 では, 級数の和は左極限値と右極限値の平均値に等しい．

左極限 $f(x_0-0) = \lim_{h\to+0} f(x_0-h)$ 　　右極限 $f(x_0+0) = \lim_{h\to+0} f(x_0+h)$



$$\text{左微分係数 } f'_-(x_0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h}$$

$$\text{右微分係数 } f'_+(x_0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$$

定理の証明

1 階および 2 階導関数が連続である連続関数 $f(x)$ に対して，収束性を証明する．
a_n の右辺を部分積分すると

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \left[\frac{f(x)\sin nx}{n\pi}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

となる 右辺の第 1 項は 0 である．もう一度部分積分すると,

$$a_n = \left[\frac{f'(x)\cos nx}{n^2\pi}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos nx\,dx$$

となる $f'(x)$ の周期性と連続性から右辺の第 1 項は 0 である．
$f''(x)$ は積分区間で連続であるので 適当な定数 M に対して,

$$|f''(x)| < M$$

である さらに $|\cos nx| \leqq 1$ であるので,

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f''(x)\cos nx dx\right| \leqq \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} M\,dx = \frac{2M}{n^2}$$

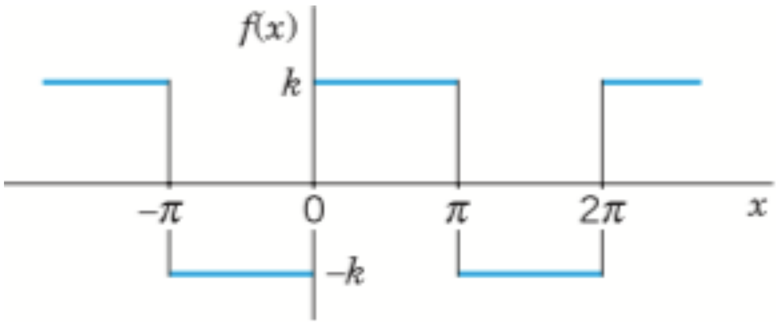
同様にすべての n に対して $|b_n| \leqq 2M/n^2$ となる．
したがって, $f(x)$ のフーリエ級数は, つぎの級数で上から抑えられる：

$$|a_0| + 2M\left(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

右辺の級数は収束するので, フーリエ級数も収束する． □

不連続点での収束性

方形波は $x=0$ で跳びをもつその左極限値は $-k$ で，右極限値は k である．
したがって これらの極限値の平均値は 0 である．
方形波のフーリエ級数の各項は $x=0$ で 0 であるのでフーリエ級数は収束する
同じことが他の跳びでも成立する．これは定理と一致する



まとめ

周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

オイラーの公式

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$f(x)$ が x で連続で 1 階微分可能ならば, フーリエ級数は値 $f(x)$ をとる
$f(x)$ の不連続点では，級数の値は $f(x)$ の左極限値と右極限値の相加平均に等しい

問題

1. つぎの関数の正の最小周期 p を求めよ

$\cos x,\quad \sin x,\quad \cos 2x,\quad \sin 2x,\quad \cos \pi x,\quad \sin \pi x,\quad \cos 2\pi x,\quad \sin 2\pi x$

2. つぎの関数の正の最小周期 p を求めよ

$\cos nx,\quad \sin nx,\quad \cos \dfrac{2\pi x}{k},\ \sin \dfrac{2\pi x}{k},\ \cos \dfrac{2\pi nx}{k},\ \sin \dfrac{2\pi nx}{k},$

3. (ベクトル空間) $f(x)$ と $g(x)$ が周期 p をもつならば．$h = af + bg$ (a, b は定数) も周期 p をもつことを示せ．このように周期 p のすべての関数はベクトル空間をつくる．

4. (周期の整数倍) p が $f(x)$ の周期であるならば，np ($n = 2, 3, \cdots$) も $f(x)$ の周期であることを示せ

5. (定数) p を任意の正の数とすると，関数 $f(x) =$ 一定は周期 p の周期関数であることを示せ

6. (尺度変換) $f(x)$ が周期 p の周期関数ならば $f(ax)$ ($a \neq 0$) は周期 p/a の周期関数であり，$f(x/b)$ ($b \neq 0$) は周期 bp の周期関数であることを示せ．これらの結果を $f(x) = \cos x$ ($a = b = 2$) について確かめよ

7. $-\pi < x < \pi$ では次式で与えられる周期 2π の周期関数 $f(x)$ を図示せよ

(1) $f(x) = x$　(2) $f(x) = x^2$　(3) $f(x) = |x|$

(4) $f(x) = \pi - |x|$　(5) $f(x) = |\sin x|$　(6) $f(x) = e^{-|x|}$

(7) $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$

(8) $f(x) = \begin{cases} -\cos^2 x & \text{if } -\pi < x < 0 \\ \cos^2 x & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$

8. 次の関数のフーリエ係数を求めよ。

(0) $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$　(1) $f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$

(2) $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$

(3) $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$　(4) $f(x) = x^2 \quad (0 < x < 2\pi)$

(5) $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{if } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$

(6) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$　(7) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi < x < 0 \\ x & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$

1. $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 1, 1, 1/2, 1/2$

2. $2\pi/n, 2\pi/n, k, k, k/n, k/n$

3. 4. 5. 6. 7. 略

8 (0) $f(x)$ は奇関数なので $a_n = 0$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right] \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n} + \frac{2}{n^2\pi}\left[\sin nx\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{n} & (n:\text{ 奇数}), \\ -\frac{2}{n} & (n:\text{ 偶数}). \end{cases}
\end{aligned}$$

よって　$S(x) = 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x - \cdots$

(1) $\pi - 8\dfrac{\cos x}{\pi} - \dfrac{8}{9}\dfrac{\cos 3x}{\pi} - \dfrac{8}{25}\dfrac{\cos 5x}{\pi} - \cdots$

(2) $\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

$+2\left(\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$

(3) $\dfrac{1}{3}\pi^2 - 4\left(\cos x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{9}\cos 3x - \cdots\right)$

(4) $\dfrac{4}{3}\pi^2 + 4\left(\cos x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + \cdots\right)$

$-4\pi\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right)$

(5) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

(6) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$

(7) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

$+\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$