微分方程式

1. 変数分離形

0. 微分方程式とは

独立変数 x とその関数 $y(x)$, 導関数 $y' = y'(x)$ に関する等式

$$F(x, y, y') = 0$$

を微分方程式という．多くの場合

$$y' = F(x, y)$$

と y' について解いた形を用いる．

例． $y' = ky$

微分方程式 $F(x, y, y') = 0$ に対して $y = y(x)$ を代入したとき

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

が恒等的になりたつとき, $y = y(x)$ を微分方程式 $F(x, y, y') = 0$ の解という

例． $y = e^{kx}$ は $y' = ky$ の解

一般解・初期値問題

微分方程式の解は一般には任意定数を含む解を持つ．そのような解を一般解という．

例．　C を任意定数として $y = Ce^{kx}$ は $y' = ky$ の一般解

一般解に対して初期条件

$$y(a) = b$$

与えると，解が（一般には）一意に定まる．
初期条件を満たす解を求める問題を初期値問題という

例．　初期値問題 $y(0) = 2$ を満たす $y' = ky$ の解は $y = 2e^{kx}$

例題

k を定数, C を任意定数とする. 関数 $y = Ce^{kx}$ は微分方程式

$$y' - ky = 0$$

の一般解であることを確かめよ. また初期値問題

$$y(0) = y_0, \quad y_0 = \text{定数}$$

を満たす解を求めよ.

解説 $y = Ce^{kx}$ とすると

$$y' - ky = Cke^{kx} - kCe^{kx} = 0.$$

となるので $y = Ce^{kx}$ は $y' - ky = 0$ の一般解.

初期条件を考えると $y(0) = C = y_0$ なので, 初期値問題の解は

$$y = y_0 e^{kx}$$

補足・解の一意性

$y = Ce^{kx}$ 以外の解は存在しない.

なぜならば $y = y(x)$ が $y' - ky = 0$ の解とすると両辺に e^{-kx} をかけると

$$y'(x)e^{-kx} - ky(x)e^{-kx} = \frac{d}{dx}[y(x)e^{-kx}] = 0$$

となるので, 微分して **0** になる関数は定数 $^{*)}$ だから, この定数を C とおくと $y(x)e^{-kx} = C$. したがって

$$y(x) = Ce^{kx}$$

$^{*)}$ 平均値の定理を用いる

例 [人口増加の方程式]

「人口の増える速さはそのときの人口に比例する」とすると, 人口を $p(t)$ とすると

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

となる（k は比例定数）. これをとくと

$$p(t) = p_0 e^{kt}$$

と指数関数的に爆発的に人口が増える

陰関数の場合

C を任意定数とする. 陰関数

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2$$

で定まる x の関数 y は微分方程式

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0$$

の一般解になる. さらに初期条件

$$y(1) = -3$$

を満たす解を求めよ.

解説 $(x-C)^2+y(x)^2=C^2$ の両辺を x で微分すると

$$2x-2C+2yy'=0.$$

となるので x をかけて $2x^2-2Cx+2xyy'=0$. 他方で元の式は $x^2-2xC+y^2=0$ なので $-2xC$ の項を消去して

$$x^2-y^2+2xyy'=0.$$

初期条件 $y(1)=-3$ を考えると $(-1-C)^2+(-3)^2=C^2$ より $1-2C+9=0$. よって $C=5$. したがって

$$(x-5)^2+y^2=5^2$$

となり $y=\pm\sqrt{5^2-(x-5)^2}$ となるが, $y(1)=-3$ なので

$$y=-\sqrt{10x-x^2}$$

問題

1. 関数$y = Cx^2$ は微分方程式$xy' - 2y = 0$ の一般解であることを確かめよ．また初期値問題$y(1) = -1$ を満たす解を求めよ．

2. Cを任意定数とする．$(x+y)^3 = C(x-y)$ で定まる x の関数$= y(x,C)y$ は微分方程式

$$(2x - y)y' = -x + 2y$$

の一般解になることを確かめよ．さらに初期条件$y(1) = 0$ を満たす解を求めよ．

3. 関数$y = \dfrac{1}{C - x}$ は微分方程式$y' - y^2 = 0$ の一般解であることを確かめよ．さらに初期条件$y(0) = 2$ を満たす解を求めよ．

1 変数分離形

正規形（$y' = \dots$ の形）の1階常微分方程式

$$y' = F(x, y)$$

を考えている

変数分離形の常微分方程式とは

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

の形のものをいう．このとき次のように変数を分離して

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

一般解は

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C, \quad (C : \text{定数})$$

で与えられる．

変数分離の解説

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

に対して, まず, $g(y) \neq 0$ とする. このとき

$$\frac{1}{g(y)}y' = f(x)$$

となるが, y の関数

$$\int \frac{1}{g(y)}y' \, dy$$

と $y = y(x)$ とを合成した x の関数を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int \frac{1}{g(y)} \, dy = \frac{1}{g(y)}y'$$

となる.

したがって

$$\frac{d}{dx}\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \frac{1}{g(y)}y' = f(x)$$

となる. この式を x で積分して

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C, \quad (C : \text{定数})$$

☆　最後の式を得るためだけなら変数を分離して

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

と書き直して, 積分するとよい.

☆　$g(y_0) = 0$ となるときには $y \equiv y_0$ (定数関数) が解になる.

例 1

微分方程式 $y' = y^2$ をとけ

解説　$f(x) = 1, g(y) = y^2$ とみて変数分離形である．
はじめに, $y \neq 0$ としよう．

$$\frac{1}{y^2} y' = 1$$

となるが左辺は y の関数 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2} dy$ と $y = y(x)$ との合成関数を x で微分したものなので

$$\frac{d}{dx} \int \frac{1}{y^2} dy = 1.$$

したがって

$$-\frac{1}{y} = x - C$$

y について解いて

$$y = \frac{1}{x - C}$$

$y = 0$ のときは $y \equiv 0$ (定数関数) は解になっている.
したがって答えは

$$y = \frac{1}{x - C}, \quad 0$$

例 2

微分方程式 $y' = 2xy$ をとけ

解説　$f(x) = 2x, g(y) = y$ とみて変数分離形である．
はじめに, $y \neq 0$ としよう．

$$\frac{y'}{y} = 2x$$

となるが左辺は y の関数 $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \log|y|$ と $y = y(x)$ との合成関数を x で微分したものなので

$$\frac{d}{dx}\int \frac{1}{y}dy = \frac{d}{dx}\log|y| = 2x.$$

したがって $\log|y| = x^2 + C_1$. y について解いて

$$y = \pm e^{C_1 + x^2}$$

よって, $C = \pm e^{C_1}$ と置き直して $y = 0$ のときは $y \equiv 0$ (定数関数) は解になっており, $C = 0$ になっている.
したがって答えは

$$y = Ce^{x^2}, \quad C : \text{任意定数}$$

例 3

微分方程式 $y' = y(1-y)$ をとけ

解説　はじめに, $y \neq 0, 1$ としよう.

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

を形式的に書き直して

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dx$$

として両辺を積分する. 部分分数分解により

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{(B-A)y + A}{y(1-y)}$$

とおくと $A = 1, B - A = 0$ より, $A = B = 1$. したがって

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \int dx$$

より

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C_1$$

したがって

$$\frac{y}{1-y} = \pm e^{C_1+x}$$

よって, $C = \pm e^{C_1}$ と置き直して $y = (1-y)Ce^x$. これより

$$y = \frac{Ce^x}{1+Ce^x}.$$

$y = 0, 1$ のときは $y \equiv 0, 1$ (定数関数) は解になっており, $y = 0$ のときは $C = 0$ の場合にになっているが, $y = 1$ は含まれない.
したがって答えは

$$y = \frac{Ce^x}{1+Ce^x}, \quad (C : \text{任意定数}); \quad 1$$

2 演習問題

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ

(1) $yy' + x = 0$ (2) $y^3 + x^6 y' = 0$

(3) $y' \sin x = y \cos x$ (4) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$

(5) $x^{-2}y' + y^2 + 1 = 0$ (6) $y' = e^{x+y} + 2xe^{x^2+y}$

(7) $xy' + 1 = y^2$ (8) $(1 - x^2)y' + (1 - y^2) = 0$

2. 次の初期値問題を解け

(1) $(x^2 + 1)yy' = 1, \quad y(0) = -3$

(2) $y' = y^{3/2}, \quad y(0) = 1$

(3) $y' = 2e^x y^3, \quad y(0) = 1/2$

(4) $y' x \log x = y, \quad y(2) = \log 4$

2 演習問題の略解

1.(1) $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ (2) $y = \pm\dfrac{x^{5/2}}{\sqrt{Cx^5 - \frac{2}{5}}}$

(3) $y = C\sin x$ (4) $y^2 = \dfrac{Cx^2 - 1}{x^2 + 1}$

(5) $y = \tan(C - x^3/3)$ (6) $y = -\log(C - e^{x^2} - e^x)$

(7) $y = \dfrac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$ (8) $y = \dfrac{x - c}{cx - 1}$

2. (1) $y = -\sqrt{2\tan^{-1} x + 9}$ (2) $y = \dfrac{4}{(x-2)^2}$

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 4e^x}}$ (4) $y = 2\log x$