ベクトル解析

7. 線積分と面積分

1 線積分

$\boldsymbol{a} = (a_1(x, y, z), a_2(x, y, z), a_3(x, y, z))$

　: 空間の開集合 D 上の連続ベクトル場

D 内の C^1 級の曲線

$$C : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (a \leqq t \leqq b)$$

定義　ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の曲線 C に沿う線積分

$$\int_C a_1dx + a_2dy + a_3dz$$

とは、次の積分のことを言う：

$$\begin{aligned}&\int_C a_1dx + a_2dy + a_3dz \\ &\quad = \int_a^b [a_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\qquad\qquad + a_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt\end{aligned}$$

記号

線積分を位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を用いて

$$\int_C a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz = \int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

とも書く.

曲線 C の弧長によるパラメーター表示による線積分：
$t = t(s)$ とし，置換積分をおこなうと

$$\int_a^b [a_1 x'(t) + a_2 y'(t) + a_3 z'(t)] dt = \int_0^L \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{t} \, ds$$

ここで，L は C の長さ，$\boldsymbol{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$.

$\boldsymbol{t}$ は単位接ベクトルなので，ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の曲線 C 上の接線積分という.

公式

k: 定数

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: ベクトル場

$C = C_1 + C_2$: 二つの異なる曲線 C_1, C_2 を結んだもの

[公式]

$$\int_C (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_C \boldsymbol{b} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\int_C k\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = k \int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

例：仕事量・電位差・環流量

[1] 質点 m が力の場 $\boldsymbol{F}$ の作用を受けて曲線 C 上をPからQまで運動するとき，質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とおけば，線積分 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ は質点が C に沿って P から Q まで変位する間に力の場 $\boldsymbol{r}$ のなす仕事量を表わす.

同様に電界 $\boldsymbol{E}$ の場合は電位差を表わす.

[2] 流体の速度ベクトル場を $\boldsymbol{v}$ で表わす. 更に C を閉曲線とするとき，接線積分

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}d\boldsymbol{s}$$

は U の閉曲線C に関する環流量とよばれる.

例：保存力場のなす仕事量

質点 m が保存力場 $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, f$ の作用を受けて P から Q まで曲線 C に沿って変位する間に $\boldsymbol{F}$ のなす仕事量を求める

C のパラメーター表示 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)\,(a \leqq t \leqq b)$

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\tilde{f}(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

とおけば

$$\tilde{f}'(t) = \mathrm{grad}\, f \cdot \boldsymbol{r}'(t)$$

より

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int_a^b (-\mathrm{grad}\, f) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \tilde{f}(a) - \tilde{f}(b)$$

に等しい．保存力場 $\boldsymbol{F}$ がなした仕事量は始点と終点だけで決まり変位経路に無関係である．

例

ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (y+z, z+x, x+y)$ の次の曲線に沿う線積分を求めよ.

$C : x = t, y = 2t, z = 3t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

解

$$
\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz \\
&= \int_0^1 \left[(y(t)+z(t))\frac{dx}{dt} + (z(t)+x(t))\frac{dy}{dt} + (x(t)+y(t))\frac{dz}{dt} \right] dt \\
&= \int_0^1 [(2t+3t)\cdot 1 + (3t+t)\cdot 2 + (t+2t)\cdot 3]dt \\
&= \int_0^1 22t\,dt = [11t^2]_{t=0}^{t=1} = \mathbf{11}
\end{aligned}
$$

例

ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (y+z, z+x, x+y)$ の次の曲線に沿う線積分を求めよ: $C : x = \cos t, y = \sin t, z = t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

解

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz \\
&= \int_0^{2\pi} \left[(\sin t + t)\frac{d\cos t}{dt} + (t + \cos t)\frac{d\sin t}{dt} + (\cos t + \sin t)\frac{dt}{dt} \right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-\sin^2 t + \cos^2 t - t\sin t + t\cos t + \cos t + \sin t] dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(\cos 2t + \cos t + \sin t) + t\cos t - t\sin t]\, dt.
\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{2\pi} (\cos 2t + \cos t + \sin t)\, dt = \left[\frac{\sin 2t}{2} + \sin t - \cos t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} t \cos t\, dt = [t \sin t]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} t \sin t\, dt = [t(-\cos t)]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos t)\, dt = -2\pi$$

となるので

$$\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} [(\cos 2t + \cos t + \sin t) + t \cos t - t \sin t]\, dt = \mathbf{2}\pi$$

1　ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ の次の各曲線に沿う線積分を求めよ.

(1) $C : x = t, y = 2t, z = t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

(2) $C : x = t^2, y = t, z = t^3 \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

2　次のベクトル場 $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ の次の各曲線に沿う線積分を求めよ.

(1) $C : x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(2) C は xy 平面上の正方形 $|x| + |y| = 1$ を正の方向にまわる.