微 分 方 程 式2

2. ラプラス変換の存在

1. ラプラス変換の問題点

s がどんな実数であっても $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$ は発散する：

$$\mathcal{L}\{e^{t^2}\} = \int_0^\infty e^{-st+t^2}\,dt = e^{-s^2/4}\int_0^\infty e^{(t-s/2)^2}\,dt = +\infty$$

したがって, $f(t)$ に条件を付加しないとラプラス変換が存在しない

ある $T > 0$ に対して

$$|f(t)| \leqq Me^{\alpha t} \quad (T \leqq t < \infty)$$

が成立するような定数 M, α が存在するとき,
$f(t)$ は指数 α 位の関数という

定理　$f(t)$ は $0 < t < \infty$ において区分的に連続かつ指数 α 位の関数とする。$\mathcal{L}\{f(t)\}$ は $\mathrm{Re}\,s > \alpha$ を満足するすべての s に対して存在する

証明

$s = \sigma + i\tau$ (σ, τ は実数) とする $\mathrm{Re}\, s = \sigma > \alpha$ のとき, 任意の T_1, T_2 ($T \leqq T_1 \leqq T_2$) に対して

$$\begin{aligned} I = \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t)\, dt \right| &\leqq \int_{T_1}^{T_2} |e^{-st}|\, |f(t)|\, dt \\ &\leqq \int_{T_1}^{T_2} e^{-\sigma t} M e^{\alpha t}\, dt = M \int_{T_1}^{T_2} e^{-(\sigma-\alpha)t}\, dt \\ &= \frac{M}{\sigma-\alpha} \left(e^{-(\sigma-\alpha)T_1} - e^{-(\sigma-\alpha)T_2} \right). \end{aligned}$$

そこで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$T_0 = \max\left(T, -\frac{1}{\sigma-\alpha} \log \frac{(\sigma-\alpha)\varepsilon}{M} \right)$$

とおけば, 任意の T_1, T_2 ($T_0 \leqq T_1 \leqq T_2$) に対して I は有界

$$I \leqq \frac{M}{\sigma-\alpha} e^{-(\sigma-\alpha)T_1} < \varepsilon.$$

広義積分の存在定理

任意の $T > 0$ に対して $f(t)$ が $[0, T]$ で積分可能であるとき無限積分

$$\int_0^\infty f(t)\,dt$$

が収束するための必要十分な条件は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して T_0 を適当に選ぶと任意の T_1, T_2 $(T_0 \leqq T_1 \leqq T_2)$ に対して

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} f(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

が成立することである

なお, $0 < t < \infty$ で $f(t)$ が区分的に連続ならば $e^{-st} f(t)$ もそこで区分的に連続であり, 区分的に連続な関数は任意の有限区間 $[0, T]$ で積分可能である.

証明は微積分のやや難しい本を参照のこと

2. $\mathbf{Re}\, s$ が大きい時

定理　任意の $T > 0$ に対して $|f(t)|$ は区間 $[0, T]$ で積分可能とする. もし, 1 つの s_0 に対して $\mathcal{L}\{f(t)\}$ が存在するならば $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0$ を満足するすべての s に対して $\mathcal{L}\{f(t)\}$ が存在する.

証明

仮定により

$$F(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t)\, dt$$

が存在する. 任意の $t > 0$ に対して

$$g(t) = \int_0^t e^{-s_0 u} f(u)\, du$$

とおけば, $\lim\limits_{t \to \infty} g(t)$ が存在することにより $g(t)$ は $0 \leqq t < \infty$ において有界となるから $|g(t)| < K$ とおく.

任意の $T > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt &= \int_0^T e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t)\,dt \\ &= \left[e^{-(s-s_0)t} g(t)\right]_0^T + (s-s_0) \int_0^T e^{-(s-s_0)t} g(t)\,dt \\ &= e^{-(s-s_0)T} g(T) + (s-s_0) \int_0^T e^{-(s-s_0)t} g(t)\,dt.\end{aligned}$$

$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ のとき、$g(T)$ が有界なので

$$\lim_{T\to\infty} |e^{-(s-s_0)T} g(T)| = \lim_{T\to\infty} e^{-(\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0)T} |g(T)| = 0.$$

次に, 任意の T_1, T_2 $(T_1 < T_2)$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-(\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0)t} g(t)\,dt\right| &\leqq K \int_{T_1}^{T_2} e^{-(\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0)t}\,dt \\ &= \frac{K}{\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0} \left(e^{-(\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0)T_1} - e^{-(\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0)T_2}\right) \to 0.\end{aligned}$$

3. 収束座標

1 点 s_1 でラプラス変換が発散すれば $\mathrm{Re}\, s < \mathrm{Re}\, s_1$ を満足するすべての s に対して発散する

したがって, $\mathrm{Re}\, s > \alpha$ を満足するすべての s に対して収束し, $\mathrm{Re}\, s < \alpha$ を満足するすべての s に対して発散するような実数 α が存在するこの α を収束座標といい, 半平面 $\mathrm{Re}\, s > \alpha$ を収束半平面という

$\alpha = +\infty$ または $\alpha = -\infty$ をとり得るが, $\alpha = -\infty$ のときはすべての s に対して収束し, $\alpha = +\infty$ のときはすべての s に対して発散している.

3.1 収束座標の例 1

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t < 1) \\ \dfrac{1}{t^2} & (1 \leqq t < \infty) \end{cases}$$

の収束座標は 0 で, 直線 $\mathrm{Re}\, s = 0$ のすべての点で $\mathcal{L}\{f(t)\}$ は収束.

証明）
$s = 0$ に対しては

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1$$

であるから収束している.

直線 $\mathrm{Re}\, s = 0$ 上の点 $s = iy\,(y \neq 0)$ に対しては

$$\left|\int_0^\infty e^{-iyt} f(t)\, dt\right| \leqq \int_0^\infty |e^{-iyt} f(t)|\, dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1$$

であるから収束している．つまり, 直線 $\mathrm{Re}\, s = 0$ のすべての点で $\mathcal{L}\{f(t)\}$ は収束する.

$s = x(< 0)$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt = \int_1^\infty e^{-xt} \frac{dt}{t^2} = -x \int_{-x}^\infty e^z \frac{dz}{z^2}$$

は発散する。実際、十分大きい $T(> -x)$ に対して $e^t > t^2$ より

$$\int_{-x}^\infty e^z \frac{dz}{z^2} = \int_{-x}^T + \int_T^\infty > \int_T^\infty e^z \frac{dz}{z^2} > \int_T^\infty 1\, dz = +\infty$$

となるからである. したがって, 収束座標は 0 である. $\square$

3.2. 収束座標の例 2

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t < 1) \\ \dfrac{1}{t} & (1 \leqq t < \infty) \end{cases}$$

の収束座標は 0 であり，直線 $\mathrm{Re}\, s = 0$ 上において点 $s = 0$ で $\mathcal{L}\{f(t)\}$ は発散するが，その他の点では収束する．

証明）

直線 $\mathrm{Re}\, s = 0$ 上の点 $s = iy\,(y > 0)$ $(y < 0$ のときも同様$)$ とする。

この時

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_1^\infty e^{-iyt}\frac{1}{t}\,dt = \int_1^\infty \frac{\cos yt}{t}\,dt - i\int_1^\infty \frac{\sin yt}{t}\,dt$$
$$< \int_y^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau - i\int_y^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau.$$

任意の $p, q\,(p < q)$ に対して

$$\left|\int_p^q \frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau\right| = \left|\left[\frac{\sin\tau}{\tau}\right]_p^q + \int_p^q \frac{\sin\tau}{\tau^2}\,d\tau\right|$$

$$< \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \int_p^q \frac{1}{\tau^2}\,d\tau = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \left[-\frac{1}{\tau}\right]_p^q = \frac{2}{p}.$$

同様にして

$$\left|\int_p^q \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\right| < \frac{2}{p}$$

が成立する. したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $p_0 = 2/\varepsilon$ ととれば, $p, q > p_0$ を満足するすべての p, q に対して

$$\left|\int_p^q \frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau\right| < \varepsilon, \quad \left|\int_p^q \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\right| < \varepsilon$$

が成立する. よって, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ は収束である

一方, $s=0$ に対しては

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t} = \infty$$

であるから発散である. したがって, 収束座標は 0 である. $\square$

4. 絶対収束

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt$$

が収束するとき, $f(t)$ のラプラス変換は絶対収束するという

定理 1 点 $s = s_0$ で $f(t)$ のラプラス変換が絶対収束すれば, $\mathrm{Re}\, s_0 \leqq \mathrm{Re}\, s$ を満足するすべての s に対してそれは絶対収束する.

証明　$\mathrm{Re}\, s_0 \leqq \mathrm{Re}\, s$ のとき

$$|e^{-st}| = e^{-t\mathrm{Re}\, s} \leqq e^{-t\mathrm{Re}\, s_0} = |e^{-ts_0}|$$

であるから

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt \leqq \int_0^\infty |e^{-s_0 t} f(t)|\, dt$$

が成立し, 左側の積分の収束がわかる. □

4.1 絶対収束座標

前と同様に, $\mathrm{Re}\, s > \beta$ を満足するすべての s に対してラプラス変換が絶対収束し, $\mathrm{Re}\, s < \beta$ を満足するすべての s に対して絶 対収束しないような実数 β が存在する．この β をラプラス変換の絶対収束座標という

収束座標 α に対しては不等式

$$\alpha \leqq \beta$$

が成立する．$\alpha < \beta, \alpha = \beta$ のどちらになるか関数による。

5. s に関する一様収束性

[定理] $f(t)$ のラプラス変換が $s = s_0$ で絶対収束すれば, $\mathrm{Re}\, s_0 \leqq \mathrm{Re}\, s$ を満足するすべての s に対して一様収束する.

証明　$\mathrm{Re}\, s_0 \leqq \mathrm{Re}\, s$ であるとき, 任意の T_1, T_2 $(T_1 < T_2)$ に対して

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t)\, dt\right| \leqq \int_{T_1}^{T_2} \left|e^{-st} f(t)\right|\, dt \leqq \int_{T_1}^{T_2} \left|e^{-s_0 t} f(t)\right|\, dt$$

が成立する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $T = T(\varepsilon)$ を適当に選ぶと, $T < T_1 < T_2$ を満足 するすべての T_1, T_2 に対して

$$\int_{T_1}^{T_2} \left|e^{-s_0 t} f(t)\right|\, dt < \varepsilon$$

が成立する. したがって

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t)\, dt\right| < \varepsilon$$

となり, T は s に無関係であるから s に関して一様収束であることがわかる.　□

問題

$t \geqq 0$ で定まる、次の 2 つの関数に対して収束座標 α と $\mathrm{Re}\, s = \alpha$ 上での収束を調べよ.

(1) $\dfrac{1}{1+t}$　　(2) $\dfrac{1}{1+t^2}$