半直積を知ろう

真中遥道
@GirlwithAHigoi

最終更新：2023 年 7 月 23 日

本稿では半直積について初歩的なことの解説と，ガロア理論で登場する半直積の紹介を行う．半直積の導入の仕方には色々と方法があるが，今回は群の直積分解に着目し，その拡張として半直積を導入する．

1　直積分解と半直積

まず直積には次のような特徴があった．

命題 1.

群 G とその部分群 N, H について，次は同値.

(1). $G \cong N \times H$.

(2). $G \trianglerighteq N, H$ かつ $N \cap H = \{1\}$ かつ $NH = G$.

証明. (2) のとき $NH \ni (n, h) \mapsto nh \in G$ が同型になる．逆は明らか．□

具体的な使い方を見てみよう．

問題 2.

m, n を互いに素な自然数とする．位数 mn の群 G が位数 m, n の正規部分群 N, H を持つとする．このとき，$G \cong N \times H$ となることを示せ.

（解答） $N \cap H \leq N, H$ ゆえ $|N \cap H|$ は m, n の約数．m, n 互いに素より $|N \cap H| = 1$ ゆえ $N \cap H = \{1\}$．$N, H \leq NH$ ゆえ，$|NH|$ は m, n の倍数．m, n 互いに素ゆえ $|NH| = mn$ より $NH = G$．$N, H \trianglelefteq G$ であるので，$G \cong N \times H$．□

このように，二つの部分群が良い性質を持っていたら，それらの直積に分解することができる．しかしもちろん，二つの部分群があっても条件を満たしていなければ直積に分解はできない．例えば次のような場合だ.

例 3. 二面体群 $D_{2n} (n \geq 3)$ について考える．D_{2n} は位数 2 の元 τ と位数 n の元 σ を用いて

$\{\sigma^i\tau^j \mid i=0,\cdots,n-1,\, j=0,1\}$ と表せる．（ただし τ,σ は $\tau\sigma\tau=\sigma^{-1}$，$D_{2n}=\langle\tau,\sigma\rangle$ なる元である）$\langle\tau\rangle=H, \langle\sigma\rangle=N$ とおくと，$D_{2n}=NH$ であり，$N\cap H=\{1\}$ である．また，N は指数 2 の部分群ゆえ正規である．しかし，H は正規部分群ではない．実際 $\sigma\tau\sigma^{-1}=\sigma^2\tau\notin H$ である．よって $D_{2n}\not\cong N\times H$

このように $D_{2n}(n\geq 3)$ は上のように N,H では直積分解できない．しかし満たしていない条件は H が正規であるという条件のみであり，かなり惜しい気がする．では実際に何が問題になっているのか，見てみよう．命題 1 で $G\cong N\times H$ を示す際には $N\times H\ni(n,h)\mapsto nh\in G$ が同型を見た．同じように写像 $f:N\times H\to D_{2n}$ を $f(x,y)=xy$ としてみると，

$$f(\sigma^i,\tau^j)f(\sigma^k,\tau^l)=\sigma^i\tau^j\sigma^k\tau^l=\sigma^{i-k}\tau^{j+l},$$
$$f((\sigma^i,\tau^j)(\sigma^k,\tau^l))=f(\sigma^{i+k},\tau^{j+l})=\sigma^{i+k}\tau^{j+l}$$

となり，一般には $f((x,y)(z,w))=f(x,y)f(z,w)$ が成立しない．このために f は準同型にすらなっていないのだ．この原因は何かと考えると，$N\times H$ の積が $(x,y)(z,w)=(xz,yw)$ と定義されていることだ．そこで，f が積を保つように，$N\times H$ の積の定義を変えてみよう．上の計算結果を見ると

$$(\sigma^i,\tau^j)(\sigma^k,\tau^l)=(\sigma^{i-k},\tau^{j+l})$$

となれば f は積を保つようになる．$\sigma^{i-k}=\sigma^i(\tau^j\sigma^k\tau^{-j})$ であることに注目して，次のように定義を変える．

命題 4.

集合 $N\times H$ に積 ”$\cdot$” を $(a,x)\cdot(b,y)=(a(xbx^{-1}),xy)$ と定める．$(N\times H,\cdot)$ は群となり，G と同型である．

証明. はじめにこの演算により群となっていることを確認する．まず N は正規部分群なので $x(yzy^{-1})\in N$ ゆえ，積の定義は well-defined である．

$$(a,x)\cdot(1,1)=(a(x1x^{-1}),x1)=(a,x),$$
$$(1,1)\cdot(a,x)=(1(1a1^{-1}),1x)=(a,x)$$

より $(1,1)$ が単位元である．

$$(a,x)\cdot(x^{-1}a^{-1}x,x^{-1})=(a(x(x^{-1}a^{-1}x)x^{-1}),xx^{-1})=(1,1),$$
$$(x^{-1}a^{-1}x,x^{-1})\cdot(a,x)=(x^{-1}a^{-1}x(x^{-1}ax),x^{-1}x)=(1,1)$$

より (a,x) の逆元 $(x^{-1}a^{-1}x,x^{-1})$ が存在する．また

$$((a,x)\cdot(b,y))\cdot(c,z)=(a(xbx^{-1}),xy)\cdot(c,z)=(axbx^{-1}(xyc(xy)^{-1}),xyz)$$
$$(a,x)\cdot((b,y)\cdot(c,z))=(a,x)\cdot(bycy^{-1},yz)=(a(xbycy^{-1}x^{-1}),xyz)$$

となり，結合的である．

次に G と同型であることを見る．いま定めた群 $(N \times H, \cdot)$ を $N \rtimes H$ と書くことにする．演算を変えたため，先ほどの写像 $f : N \rtimes H \to G$ は準同型になっている．f の像は $NH = G$ ゆえ全射である．また，

$$f(n,h) = nh = 1 \implies n = h^{-1} \in N \cap H \implies (n,h) = (1,1)$$

より $\operatorname{Ker} f = \{1\}$ ゆえ f は単射．よって f は同型となる． □

このように命題 1 の条件のうち片方の部分群の正規性のみ満たしていないときには，直積には分解できないものの，直積の演算を少し捻ってあげることによって，直積のようなものに分解できるのだ．このような直積の演算を少し捻ったものを半直積と呼ぼう．（以下 N, H は一般の群を表す）

定義 5. 半直積（その 1）

N を群 G の正規部分群，H を群 G の部分群であって，$NH = G, N \cap H = \{1\}$ を満たすものとする．集合 $N \times H$ に

$$(a,x)(b,y) = (a(xbx^{-1}), xy).$$

と演算を定めると，これは群となる．[*1] この群を N, H の半直積[*2] と呼び $N \rtimes H$ と書く．[*3] N を正規因子，H を作用因子と呼ぶ．[*4] $G \cong N \rtimes H$ となる．

これが群となり $G \cong N \rtimes H$ となることの証明は，実は命題 4 の証明で済んでいる．なぜなら命題 4 の証明では N, H が D_{2n} の部分群であるということは使っておらず，定義 5 にある N, H の条件だけを使っているからだ．

この半直積が直積の（もしくは半直積分解が直積分解の）一般化になっていることを見ておこう．

例 6. 群 G に対して，$N, H \trianglelefteq G$ が，$N \cap H = \{1\}, NH = G$ を満たしているとする．このとき $n \in N, h \in H$ に対して N, H の正規性より

$$hnh^{-1}n^{-1} = h(nh^{-1}n^{-1}) \in H, \quad hnh^{-1}n^{-1} = (hnh^{-1})n \in N$$

ゆえ $hnh^{-1}n^{-1} \in N \cap H = \{1\}$ であり $hnh^{-1} = n$ である．よって

$$(n_1, h_1) \cdot_{N \rtimes H} (n_2, h_2) = (n_1 h_1 n_2 {h_1}^{-1}, h_1 h_2) = (n_1 n_2, h_1 h_2) = (n_1, h_1) \cdot_{N \times H} (n_2, h_2)$$

となり $N \rtimes H$ と $N \times H$ の演算は一致するので，$N \rtimes H = N \times H$ である．

これで直積分解から着想し，直積の一般化である半直積をとりあえずは定義できたのものの，状況はあまり嬉しくない．というのも半直積が，ある群の正規部分群と部分群に対してしか定められ

[*1] 成分を入れ替えて $H \ltimes N$ も同様に定義できるが，そのときには演算を $(x,y)(z,w) = (xy, z^{-1}yzw)$ と定める．第二成分を $zyz^{-1}w$ とすると結合律が保たれなくなる．

[*2] のちほどわかると思うが，これは半直積のうち内部半直積と呼ばれるものである．

[*3] $N \trianglelefteq G$ なので $N \rtimes H$ と $\times$ の H 側に縦線を書く．

[*4] 正規因子，作用因子という用語がどれほど一般的かはわからないが，これを意味する他の用語は見当たらなかった．

ないからだ．そこで次は，ある群の部分群として与えられているとは限らない，一般の群 N, H に対して半直積 $N \rtimes H$ を定めることを目指そう．

2　一般の半直積

まず，先の半直積 $N \rtimes H$ の演算がどのように定義されていたか観察してみよう．

$$(a, x)(b, y) = (a(xbx^{-1}), xy).$$

作用成分については，普通の直積と同じで，正規成分の方は，直積のときは a と b をかけたが，半直積では a と b を x で"捻った"xbx^{-1} をかけている，と見ることができる．この b を x で捻る方法が xbx^{-1} のままだと，正規因子と作用因子が同じ群の部分群になっているときにしか定義できない．逆にいえばこの捻り方を一般の群でも定義できれば良いわけである．そこでこの捻り方について考えていこう．

まず b を x で捻るとはどういうことかというと，$x \in H$ に依存して $b \in N$ を別の元 $b' \in N$ に変えることだ．[*5] b' を $\phi_x(b)$ と書くことにすると，捻り方とは $x \in H$ ごとに決められた写像 $\phi_x : N \to N$ のことだと言えるだろう．これをさらに言い換えると，**捻り方とは写像 $\phi: H \to \mathrm{Map}(N, N)$ のことである**，となる．（ただし $\mathrm{Map}(N, N)$ は N から N への写像全体の集合である）つまり群 N, H に対して，うまく $\phi: H \to \mathrm{Map}(N\,N)$ を定めることで，$N \rtimes H$ の"捻った演算"を

$$(a, x)(b, y) = (a\phi_x(b), xy)$$

と定められるだろう，ということだ．

では ϕ に何を要請すれば良いか考えていこう．まず $(1, 1)$ が単位元になるだろうという予想のもとで計算すると，

$$(1, 1)(a, x) = (\phi_1(a), x)$$

となるので，$\phi_1 = \mathrm{id}_N$ でなければならない．次に (a, x) の逆元について考えるとそれは (b, x^{-1}) という形で，

$$(a, x)(b, x^{-1}) = (a\phi_x(b), 1) \tag{1}$$

となるので，$a \in N, x \in H$ に対して $\phi_x(b) = a^{-1}$ となる $b \in N$ が存在しなければならない．N の任意の元はある元の逆元であるので，つまり ϕ_x は全射でなければならない．また $\phi_x(b) = \phi_x(b')$ であるとき，

$$(1, x)(b, 1) = (\phi_x(b), x) = (\phi_x(b'), x) = (1, x)(b', 1)$$

より $b = b'$，つまり任意の $y \in N$ で ϕ_y は単射でなければならない．最後に結合律について考えてみよう．結合律が成り立つなら，任意の $x \in H, a, b \in N$ について

$$((1, x)(a, 1))(b, 1) = (\phi_x(a), x)(b, 1) = (\phi_x(a)\phi_x(b), x),$$
$$(1, x)((a, 1)(b, 1)) = (1, x)(a\phi_1(b), 1) = (1, x)(ab, 1) = (\phi_x(ab), x)$$

[*5] もちろん $b = b'$ でも良い．

より $\phi_x(a)\phi_x(b) = \phi_x(ab)$ が成り立たなければならない．ここまでを踏まえると任意の $x \in H$ に対して $\phi_x : N \to N$ は同型でなければならず，$\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ である．さらに結合律が成り立つなら，任意の $x, y \in H, a \in N$ に対して

$$((1,x)(1,y))(a,1) = (1,xy)(a,1) = (\phi_{xy}(a), xy),$$
$$(1,x)((1,y)(a,1)) = (1,x)(\phi_y(a), y) = (\phi_x(\phi_y(a)), xy)$$

より $\phi_{xy}(a) = \phi_x(\phi_y(a))$ が成り立たなければならず，a の任意性からこれは $\phi_{xy} = \phi_x \circ \phi_y$ を意味する．つまり**捻り方 ϕ は準同型 $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ でなければならない**．実は条件はこれで十分であるので，これを定義に採用し，実際に群となることを証明しよう．

定義 7. 半直積（その 2）

N, H を群，$\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を準同型とする．集合 $N \times H$ に積を

$$(a,x)(b,y) = (a\phi_x(b), xy)$$

と定めるとこれは群になる．この群を ϕ で捻った[*6] N, H の半直積とよび $N \rtimes_\phi H$ と書く．N を正規因子，H を作用因子と呼ぶ．[*7][*8]

証明. 上の $N \rtimes_\phi H$ が群であることを示す．

$$(a,x)(1,1) = (a\phi_x(1), x) = (a,x), \quad (1,1)(a,x) = (\phi_1(a), x) = (a,x)$$

より単位元 $(1,1)$ が存在する．任意の (a,x) に対して，

$$(a,x)(\phi_{x^{-1}}(a^{-1}), x^{-1}) = (a\phi_x(\phi_{x^{-1}}(a^{-1})), 1) = (aa^{-1}, 1) = (1,1),$$
$$(\phi_{x^{-1}}(a^{-1}), x^{-1})(a,x) = (\phi_{x^{-1}}(a^{-1})\phi_{x^{-1}}(a), 1) = (\phi_{x^{-1}}(a^{-1}a), 1) = (1,1)$$

より逆元 $(\phi_{x^{-1}}(a^{-1}), x^{-1})$ が存在する．任意の $(a,x), (b,y), (c,z)$ に対して，

$$\begin{aligned}((a,x)(b,y))(c,z) =& (a\phi_x(b), xy)(c,z) \\ =& (a\phi_x(b)\phi_{xy}(c), xyz) \\ =& (a\phi_x(b)\phi_x(\phi_y(c)), xyz) \\ =& (a\phi_x(b\phi_y(c)), xyz) \\ =& (a,x)(b\phi_y(c), yz) \\ =& (a,x)((b,y)(c,z))\end{aligned}$$

より結合律が成り立つ．　□

[*6] 「ϕ で捻った」という言い方は一般的ではない．

[*7] N が $N \rtimes_\phi H$ の正規部分群になるので正規因子と呼び，ϕ により H が N に作用しているので H を作用因子と呼ぶ．

[*8] N, H を入れ替えて $H \ltimes N$ とするときには，$\mathrm{Aut}(N)$ の積を $\phi\psi = \psi \circ \phi$ と定めて作用 $H \curvearrowright N$ を右作用にし $(x,a)(y,b) = (xy, \phi_y(a)b)$ と定める．

例 8. 定義 7 が定義 5 の一般化になっていることを確認しよう．N を群 G の正規部分群，H を群 G の部分群であって，$NH = G, N \cap H = \{1\}$ を満たすものとする．$\iota : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を内部自己同型を導く写像，即ち $\iota(h) : n \mapsto hnh^{-1}$ なるものとする．$\iota(h)$ を ι_h と書くことにする．

$$\iota_x \circ \iota_y(a) = \iota_x(yay^{-1}) = xyay^{-1}x^{-1} = (xy)a(xy)^{-1} = \iota_{xy}(a)$$

より ι は準同型である．定義 7 の意味で ϕ で捻った $N \rtimes_\iota H$ の演算は

$$(a, x)(b, y) = (a\iota_x(b), xy) = (a(xbx^{-1}), xy)$$

であり，定義 5 の意味での半直積の演算と一致し，$N \rtimes H = N \rtimes_\iota H$ である．

例 9. 具体的な半直積を考えてみよう．$\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 1 \mapsto (n \mapsto -n) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ なる準同型 ϕ がある．この ϕ で捻った $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の半直積を考える．（$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の演算が”+”で書かれることに注意）

$$(a, 0)(0, x) = (a + 0, 0 + x) = (a, x)$$

ゆえ，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \{0\})(\{0\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ である．よって $\sigma = (1, 0), \tau = (0, 1)$ とおくと $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は $\{\sigma, \tau\}$ で生成される．σ, τ の位数は $n, 2$ であり，

$$\tau\sigma\tau = (0, 1)(1, 0)(0, 1) = (0, 1)(1, 1) = (-1, 1 + 1) = (-1, 0) = \sigma^{-1}$$

より $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$．よって全射準同型 $\langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が存在する．定義域は D_{2n} と同型ゆえ位数 $2n$．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の位数も $2n$ であるので，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong D_{2n}$．

上の例では半直積を既知の群に書き換えることができた．しかし半直積それ自体が新しい群を作る方法であるので，半直積自体が既知の群になっていたり直積などを用いて簡単な形に書き直せることはあまりない．（それ故に半直積を定義したとも言える）ゆえに半直積を他の形に書き換えることに挑戦するより，そのもの自体をうまく捉え扱えるよになる方が良いだろう．そこで半直積の基本的な性質をいくつか確認しよう．

命題 10.

H, N を群，$\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を準同型とする．半直積 $N \rtimes_\phi H$ に対して以下が成り立つ．

(1). H は $N \rtimes_\phi H$ の部分群である．
(2). N は $N \rtimes_\phi H$ の正規部分群である．
(3). 作用因子への射影 $N \rtimes_\phi H \ni (a, x) \mapsto x \in H$ は準同型である．
(4). 正規因子への射影 $N \rtimes_\phi H \ni (a, x) \mapsto a \in N$ は準同型**とは限らない**．
(5). $NH = N \rtimes_\phi H$ である．（左辺は部分群同士の積）

証明. (1). 正確な主張は $H \cong \{1\} \times H \leq N \rtimes_\phi H$ である．$\{1\} \times H \neq \emptyset$ であり，任意の $x, y \in H$ について

$$(1, x)(1, y^{-1}) = (1\phi_x(1), xy^{-1}) = (1, xy^{-1}) \in \{1\} \times H$$

よりこれ部分群．同型は明らか．

(2). 正確な主張は $N \cong N \times \{1\} \trianglelefteq N \rtimes_\phi H$ である．$f : N \rtimes_\phi H \ni (a,x) \mapsto x \in H$ とすると，

$$f(a,x)f(b,y) = xy = f(a\phi_x(b), xy) = f((a,x)(b,y))$$

よりこれは準同型で，その核は $N \times \{1\}$ ゆえこれは正規部分群．同型は明らか．

(3). (2) で示した．

(4). 例 9 で扱った $D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の $n \geq 3$ の場合を考える．正規成分への射影を p とおくと

$$p((1,1)(1,0)) = p(1+\phi_1(1), 1+0) = 1 + (-1) = 0 \neq 2 = 1+1 = p(1,1) + p(1,0)$$

となり，p は準同型とはならない．（半直積が直積なら射影は準同型になる．逆に射影が準同型になるならば，H が射影の核，つまり正規部分群になるので，半直積は直積である）

(5). $(a,1)(1,x) = (a\phi_1(1), 1x) = (a,x)$ より $NH = N \rtimes_\phi H$.

□

3　ガロア理論と半直積

ガロア理論で登場する半直積を紹介する．ガロアの基本定理の一部に次のような主張がある．

定理 11. ガロアの基本定理（一部）

L/K を有限次ガロア拡大とし，M, M_1, M_2 を中間体とする．

(1). M/K がガロア拡大である $\iff \mathrm{Gal}(L/M) \trianglelefteq \mathrm{Gal}(L/K)$.

(2). $M_1 \cdot M_2$ に対応する部分群は $\mathrm{Gal}(L/M_1) \cap \mathrm{Gal}(L/M_2)$.

(3). $M_1 \cap M_2$ に対応する部分群は $\langle \mathrm{Gal}(L/M_1), \mathrm{Gal}(L/M_2) \rangle$.

これより，次が成り立つ．

命題 12.

L/K を体の拡大，M_1, M_2 をその中間体とする．$M_1/K, M_2/K$ が有限次ガロア拡大[*9]，$L = M_1 \cdot M_2, K = M_1 \cap M_2$ であるとき，$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(L/M_1) \times \mathrm{Gal}(L/M_2)$.

証明. $G = \mathrm{Gal}(L/K), N = \mathrm{Gal}(L/M_1), H = \mathrm{Gal}(L/M_2)$ とおく．$L/M_1, L/M_2$ がガロア拡大ゆえ $N, H \trianglelefteq G$．これと $K = M_1 \cap M_2$ より

$$NH = \langle N, H \rangle = \mathrm{Gal}(L/M_1 \cap M_2) = G.$$

$L = M_1 \cdot M_2$ より

$$N \cap H = \mathrm{Gal}(L/M_1 \cdot M_2) = \mathrm{Gal}(L/L) = \{1\}.$$

[*9] L/K が有限次ガロア拡大という条件は実は不要．

よって命題 1 より $G \cong N \times H$. $\square$

上の状況で M_2/K がガロア拡大という条件のみ満たさない場合を考える.

命題 13.

L/K を体の拡大，M_1, M_2 をその中間体とする．$L/K, M_1/K$ が有限次ガロア拡大，$L = M_1 \cdot M_2, K = M_1 \cap M_2$ であるとする.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
& L \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\mathrm{Gal}"'] & \\
M_1 \arrow[dr, "\mathrm{Gal}"'] & & M_2 \arrow[dl] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

このとき，$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(L/M_1) \rtimes \mathrm{Gal}(L/M_2)$.

証明. $G = \mathrm{Gal}(L/K), N = \mathrm{Gal}(L/M_1), H = \mathrm{Gal}(L/M_2)$ とおく．L/M_1 がガロア拡大ゆえ $N \trianglelefteq G$．これと $K = M_1 \cap M_2$ より

$$NH = \langle N, H \rangle = \mathrm{Gal}(L/M_1 \cap M_2) = G.$$

$L = M_1 \cdot M_2$ より

$$N \cap H = \mathrm{Gal}(L/M_1 \cdot M_2) = \mathrm{Gal}(L/L) = \{1\}.$$

よって定義 5 より $G \cong N \rtimes H$. $\square$

推進定理を使うと $\mathrm{Gal}(L/M_2) \cong \mathrm{Gal}(M_1/K)$ より，さらに $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(L/M_1) \rtimes \mathrm{Gal}(M_1/K)$ となる．最後に具体的な問題を見て終わりにしよう.

問題 14.

多項式 $X^7 - 11$ の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を $K \subseteq \mathbb{C}$ とする．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の同型類を特定せよ.（参考：京大院　理・数学　2018 年度　院試 [3]）

（解答）（疲れたので丁寧な解答は気が向いたら書く）$\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/7)$ とおく．$K = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[7]{11}), \mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}) = \mathbb{Q}$ である．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta)) \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ であり $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大ゆえ，これは $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の正規部分群．$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11})) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$．以上と命題 13 より，$\underline{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$.

参考文献

[1] 北窓．“京都大学数学・数理解析専攻院試過去問”．`https://github.com/Seasawher/graduate_exam/blob/master/graduate_exam.pdf`（2023 年 7 月 21 日閲覧）

[2] よしいず．“半直積”．MATHEMATICS.PDF．https://mathematics-pdf.com/pdf/semiproduct.pdf．（2023 年 7 月 21 日閲覧）

[3] 雪江明彦．代数学 2　環と体とガロア理論．日本評論社．2010.

[4] “過去の入試問題”．京都大学大学院理学研究科／理学部数学教室．https://www.math.kyoto-u.ac.jp/files/master_exams/2013math_kiso2.pdf