微 分 方 程 式

5. クレーローの微分方程式など

クレーロー (Clairaut) の微分方程式

$$(C) \qquad y = xy' + f(y')$$

$y' = p$ とおけば $y = xp + f(p)$. 両辺を x について微分すると

$$p = p + xp' + f'(p)p'.$$

したがって

$$p'(x + f'(p)) = 0.$$

1) $p' = 0$ のとき $p = c$ (定数) だから (C) へ代入して

$$y = cx + f(c)$$

が一般解である．これは直線の式であることに注意

1. クレーローの微分方程式・つづき

(2)　$x + f'(p) = 0$ のとき
連立方程式

$$x + f'(p) = 0,$$
$$y = xp + f(p)$$

から p を消去すると特異解を得る。

あるいは

$$\begin{aligned} x &= -f'(p), \\ y &= -f'(p)p + f(p) \end{aligned}$$

と書き直して、p を純粋にパラメタと思って曲線のパラメタ表示と考えても良い

2. 包絡線

次に述べるように特異解は曲線族

$$y = cx + f(c)$$

の包絡線になっている:

定義 c をパラメタとする曲線の族

$$y = f(x, c)$$

に対して連立方程式

$$y = f(x, c),$$
$$0 = f_c(x, c)$$

から c を消去して得られる曲線を包絡線という

一般解 $y = cx + f(c)$ の包絡線が特異解になっている

例題 つぎの微分方程式を解け $(y' = p)$.

$$y = px + p - p^2$$

解　$f(p) = p - p^2$ であり、クレーローの方程式である。

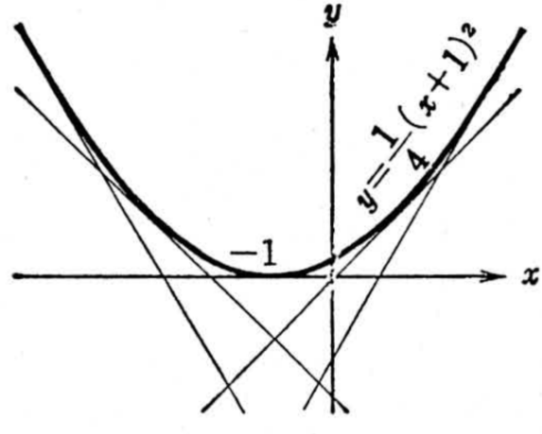
一般解は $y = cx + c - c^2$.

$x = -f'(c) = 2c - 1$ より

$$c = \frac{x+1}{2}$$

なので c を消去すると

$$y = \frac{1}{4}(x+1)^2.$$



3. ラグランジュの微分方程式

クレーローの微分方程式より一般的な

$$y = xg(y') + f(y')$$

の形の微分方程式を**ラグランジュ (Lagrange) の微分方程式**
[あるいはダランベール(d'Alembert)の微分方程式]

※ $g(y') = y'$ のときがクレーローの微分方程式.

$y' = p$ とおけば

$$y = xg(p) + f(p)$$

両辺を x について微分すると

$$p = g(p) + xg'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

したがって

$$p - g(p) = [xg'(p) + f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

1) $p - g(p) \neq 0$ のとき

$$\frac{dx}{dp} = \frac{g'(p)}{p - g(p)}x + \frac{f'(p)}{p - g(p)}$$

p を独立変数, x を従属変数と考えた 1 階線形微分方程式と考える
この解 $x = \varphi(p, C)$ をもとめて

$$\begin{aligned} x &= \varphi(p, C), \\ y &= \varphi(p, C)g(p) + f(p) \end{aligned}$$

が p をパラメタとする曲線と思った時の一般解である.

2) $p - g(p) = 0$ のときを満たす実根 p_0 が存在するとき

$p = p_0$ が定数になるというのは y' が一定だから直線

$$y = g(p_0)x + f(p_0)$$

が解の候補になる

ラグランジュの方程式 $y = xg(y') + f(y')$ に代入すると

$$y = g(p_0)x + f(p_0), \quad xg(y') + f(y') = xg(p_0) + f(p_0) = g(p_0)x + f(p_0)$$

と確かに方程式を満たすことが分かる

この解が一般解に含まれているか, 含まれていない (特異解) かについては, 個別に調べる必要がある.

例題 つぎの微分方程式を解け $(y' = p)$.

$$y = 2px - p^2$$

両辺を x について微分すると

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

より

$$p + 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} = 0$$

1) $p \neq 0$ のとき

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + 2$$

この方程式を定数変化法で解いて

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}$$

よって一般解

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}, \\
y &= 2px - p^2 = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2c}{p}
\end{aligned}
$$

特異解は $p = 0$ のとき。もとの方程式 $y = 2px - p^2$ に代入して $y = 0$ となる。$y = 0$ は解であるが上の表示からは得られない特異解である.

4. 数値計算

微分方程式を求積法によって解くことはほとんど不可能

計算機を使って数値計算する
誤差解析等むずかしい点が多い
存在定理・解の一意性定理が背景にある

微分方程式

$$y' = f(x, y), y(a) = y_0$$

の解 $y(x)$ が区間 $[a, b]$ においてただ 1 つ存在しているとする,
区間 $[a, b]$ を n 等分し,

$$h = \frac{b-a}{n},\ x_0 = a,\ x_k = a + kh,\ y(x_k) = y_k$$

とおく.

5. オイラー法

テイラーの定理により

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(\xi)}{2}h^2$$

となるから, $y(x+h)$ の近似値として

$$y(x+h) \sim y(x) + y'(x)h = y(x) + f(x, y(x))h$$

を用いるとつぎの漸化式が考えられる:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

これをオイラーの近似公式という

６．改良オイラー法

テイラーの定理をすすめて

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi)}{3!}h^3$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2 - \frac{y'''(\eta)}{3!}h^3$$

より

$$y(x+h) - y(x-h) = 2y'(x)h + \left[\frac{y'''(\xi)}{3!} + \frac{y'''(\xi)}{3!}\right]h^3$$

したがって漸化式

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(x_k, y_k)\ (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

を改良されたオイラーの近似公式といい, 誤差は $O(h^3)$

ただし, y_1 はオイラーの近似公式をなどを用いて, 前もって計算する（出発値）．

7. ルンゲ・クッタ法

計算が比較的簡単かつ精度がよい実用的な方法として**ルンゲ・クッタ (Runge-Kutta) の公式**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n),\ k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2),\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

誤差の大きさは $O(h^5)$ である.

8. 演習問題

1. つぎの微分方程式を解け．（解は曲線のパラメタ表示の形でもよい）

(1) $y = px + \sqrt{1+p^2}$

(2) $y = px - \log p$

(3) $y = px + \dfrac{1}{p}$

(4) $y = p^2x + p^2 - 2p$

(1) 一般解は $y = cx + \sqrt{1+c^2}$. 特異解を求めるために両辺を c で微分して $x + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} = 0$. これを解いて $c = \pm\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ となるが x と c とは符号が異なる必要があるので $c = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ になる。c を消去して特異解 $y = \sqrt{1-x^2}$ をえる.

(2) 一般解は $y = cx - \log c$. c で微分して $x = 1/c$ より 特異解 $y = \log x + 1$

(3) 一般解は $y = cx + \dfrac{1}{c}$. c で微分して $x = 1/c^2$ より 特異解 $y^2 = 4x$

(4) 両辺を x で微分して $p = p^2 + 2pxp' + (2p-2)p'$. x を p の函数と考えれば $\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{2}{p-1}x = -\dfrac{2}{p}$. これを解いて

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^2 + 4p - 2\log p + C\right).$$

この式と

$$y = px + \frac{1}{p} = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left(-p^2 + 4p - 2\log p + C\right) + p^2 - 2p.$$

によって一般解が得られる。また $y = 0$, $y = x - 1$ が特異解。