ベクトル解析

6. ベクトル場の回転と発散

1 ベクトル場の回転

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$: 開集合 D 上で定義された C^1 級のベクトル場

定義　$\boldsymbol{a}$ の回転 rot $\boldsymbol{a}$ を

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

で定める。 curl $\boldsymbol{a}$ とも書く

rot $\boldsymbol{a}$ の行列式表示

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

微分演算子ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いて

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a}$$

公式

公式　C^2 級のスカラー場 f に対して $\mathrm{rot}\,(\,\mathrm{grad}\ f) = 0.$

証明　$\mathrm{grad}\ f = (f_x, f_y, f_z)$ より

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) = (0,0,0).$$

$\square$

例題　$\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ に対して $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}$ を求めよ

答

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = (0,0,0).$$

渦なしベクトル場

定義

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = 0$ をみたすベクトル場 $\boldsymbol{a}$ を渦なしベクトル場という．

- $\mathrm{grad}\ f$ は渦なしベクトル場
- $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ は渦なしベクトル場

定義

ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ が, あるベクトル場 $\boldsymbol{b}$ を用いて

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$$

と表わされるとき, $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ のベクトルポテンシャルという．

発散

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$: 開集合 D 上で定義された C^1 級のベクトル場

定義　$\boldsymbol{a}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ を

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

で定める。$\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ はスカラー場である。

$\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ は ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いて

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}$$

例題

ベクトル場 $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r^3}(x, y, z) \quad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ を求めよ.

解 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^3}\right)$. しかるに

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} - \frac{3}{2}\frac{x \cdot 2x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5} = \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5}x^2$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5}y^2, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5}z^2$$

より

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0.$$

div と rot

C^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に対して

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

証明

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

より

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) \\ &= [(a_3)_{yx} - (a_2)_{zx}] + [(a_1)_{zy} - (a_3)_{xy}] + [(a_2)_{xz} - (a_1)_{yz}] = 0.\end{aligned}$$

勾配, 回転, 発散に関する諸公式

f, g をスカラー場, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をベクトル場, α, β を定数

公式

線型性

$$\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{grad} f + \beta \operatorname{grad} g$$

$$\operatorname{rot}(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \beta \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$$

$$\operatorname{div}(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \beta \operatorname{div} \boldsymbol{b}$$

積の **grad, rot, div**

$$\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g$$

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f \times \boldsymbol{a} + f \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$$

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{a} + f \operatorname{div} \boldsymbol{a}$$

公式続き

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の rot, div, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ の grad:

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$$

$$\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})$$

$\mathbf{rot}^2$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \nabla(\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}. \quad (\nabla^2 = \Delta)$$

$$(\ \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{a}\ )$$

grad: スカラー場 $f \to$ ベクトル場 ∇f

rot: ベクトル場 $\boldsymbol{a} \to$ ベクトル場 $\nabla \times \boldsymbol{a}$

div: ベクトル場 $\boldsymbol{a} \to$ スカラー場 $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}) = 0.$$

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0$$

証明

線型性は明らか。

積の中で $\mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{a}) = \mathrm{grad}\,f \times \boldsymbol{a} + f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ を示す。

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とおく。左辺の x 成分

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(fa_3) - \frac{\partial}{\partial z}(fa_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}a_3 + f\frac{\partial a_3}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z}a_2 + f\frac{\partial a_2}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}a_3 - \frac{\partial f}{\partial z}a_2\right) + f\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

となり、右辺の x 成分 に等しい。y, z 成分についても同様。

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とおく。 各項の x 成分を見る

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

より

$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$: $\dfrac{\partial}{\partial y}(a_1b_2 - a_2b_1) - \dfrac{\partial}{\partial z}(a_3b_1 - a_1b_3)$

$(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$: $\left(b_1\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial}{\partial y} + b_3\dfrac{\partial}{\partial z}\right)a_1 - \left(a_1\dfrac{\partial}{\partial x} + a_2\dfrac{\partial}{\partial y} + a_3\dfrac{\partial}{\partial z}\right)b_1$

$(\mathrm{div}\,\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$: $\left(\dfrac{\partial b_1}{\partial x} + \dfrac{\partial b_2}{\partial y} + \dfrac{\partial b_3}{\partial z}\right)a_1 - \left(\dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y} + \dfrac{\partial a_3}{\partial z}\right)b_1$

以上を全部展開して比較すれば証明できる

問題

1　次のベクトル場の $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = (z - y, x - z, y - x)$　(2) $\boldsymbol{a} = (xy - z^3, -x^2, 3xz)$

(3) $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r^3}(x, y, z)$　$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

2　次のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = (z - y, x - z, y - x)$　(2) $\boldsymbol{a} = (\sin x, \sin y, \sin z)$

(3) $\boldsymbol{a} = (x^2 y, y^3 z^2, x^2 z^2)$