微分方程式　まとめ 1

1　常微分方程式

独立変数 x の**未知関数** y に関して，その（高階）導関数に関する方程式 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ を n **階**の**（常）微分方程式**という．この方程式は，多くの場合，$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ の形にできる．これを**正規形**という．特に，1 階の正規形の方程式は $y' = f(x, y)$ の形の方程式である．

この 1 階正規形の方程式には，方向場という解釈を与えることができる (TEXT p.10 参照).

2　変数分離形の微分方程式

- **変数分離形**の微分方程式とは，$\underline{g(y)y' = f(x)}$ の形の微分方程式[*)]である．両辺を x で積分すると，

$$\int g(y)y'\,dx = \int f(x)\,dx$$

置換積分により，左辺は $\int g(y)\,dy$ となるので，両辺の積分を実行すると，

$$G(y) = F(x) + C$$

の形で（陰関数）解が得られる．(TEXT, p.12)　できれば，$y = H(x, C)$ の形（陽関数解）にしておくほうがよいが，グラフを描くなどの立場からは，陰関数解の方がよい場合もある．

例 1　$y' = 2x(1 + y^2)$ を解こう．この方程式は $\dfrac{1}{1+y^2}y' = 2x$ と変数分離形にできる．これより[†)]，$\displaystyle\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int x\,dx$. したがって，$\tan^{-1} y = x^2 + C$ [‡)]．これより，$y = \tan(x^2 + C)$.

TEXT, p.12–18 にある例を参考にすること．

[*)] この形に変形できるものも変数分離形と呼ぶことがある．

[†)] 形式的には $y'dx = \dfrac{dy}{dx}dx = dy$.

[‡)] 両辺にでてくる積分定数はまとめて右辺に 1 つ書いておけばよい．

- **変数変換**（未知関数の変換）．未知関数 y についての微分方程式があるとき，$y = \phi(x,u)$ なる変換式によって，新しい未知関数 u の微分方程式ができる．これが解ける方程式であれば，u が求まり，したがって y も求まる．一般には，ϕ を見つけるのは難しいが，試行錯誤で見つかる場合もあり，次で述べる同次形の微分方程式をはじめとして，ϕ が知られている場合もある．

- 同次形と呼ばれる方程式は，変数分離形に帰着できる．**同次形**の微分方程式とは，$y' = f(x,y)$ において，すべての a に対して $f(ax,ay) = f(x,y)$ となる方程式である．このとき，必ず $y' = g\bigl(\frac{y}{x}\bigr)$ の形に書ける．ここで，$\frac{y}{x} = u$ とおいて，未知関数を y から u に変換すると，u についての変数分離形の方程式になる（**必ず変数分離形になる**）．

  例 2　$y' = \dfrac{x+2y}{x}$ は同次形である．$\dfrac{y}{x} = u$ とおくと，$y = ux$. これより，$y' = u'x + u$. これらを元の方程式に代入して，$u'x + u = \dfrac{x+2ux}{x}$, すなわち $u' = \dfrac{u+1}{x}$. これは変数分離形の方程式である．これを解こう．$\dfrac{1}{u+1}u' = \dfrac{1}{x}$ より，$\log|u+1| = \log|x| + C_1$，$|u+1| = e^{\log|x|+C_1} = e^{C_1}|x|$，[§)] $u+1 = \pm e^{C_1}x$. ここで $\pm e^{C_1} = C$ とおくと，$u = Cx - 1$　（C は任意の実数[¶)]）．したがって，$y = Cx^2 - x$.

3　１階線形微分方程式

- $\underline{y' + f(x)y = r(x)}$ の形をした方程式を**１階線形微分方程式**という．$f(x)$ が定数のとき，**定数係数**と呼ぶ．また，$r(x) \equiv 0$ のとき[‖)]，**同次**と呼ぶ．

- **同次**方程式 $y' + f(x)y = 0$ の場合は，実は変数分離形である．解は必ず，$y = CG(x)$（C は任意の実数）の形になり，これですべての解である．これを**一般解**と呼ぶ[**)].
一般解に対して，任意定数を含まない特定の解を**特殊解**という．

---

§) $e^{\log a} = a$, または「$\log b = c \iff b = e^c$」 に注意.

¶) $C = \pm e^{C_1}$ ゆえ，$C \fallingdotseq 0$ のはずだが，$C = 0$ のとき $u = -1$ であり，これも解であることは直接確かめられるので，C は 0 でもよい．この授業では，こういう細かい考察については，あまり立ち入らない．

‖) $\equiv$ は,「恒等的に等しい（すべての x について成立する）」ことを表わす.

**) 教科書 (p.4) には，どんな微分方程式にも，一般解という言葉を使うような書き方がしてあるが，実を言うと，あいまいな定義しかできないタイプの方程式もあり，一般解という言葉をすべての微分方程式に対して使うのはよくない．線形微分方程式は解の型が決まっているので，明確に一般解を定義できる．

例 3 $y' - \dfrac{2y}{x} = 0$ は，$\dfrac{1}{y}y' = \dfrac{2}{x}$ と書け，変数分離形である．両辺を x で積分すると，$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = 2\int \frac{1}{x}\,dx$ より $\log|y| = 2\log|x| + C_1$．したがって，$|y| = e^{\log x^2 + C_1} = e^{C_1}x^2$．すなわち，$y = \pm e^{C_1}x^2$．$\pm e^{C_1} = C$ とおくと，$y = Cx^2$ （C は任意の実数）．（厳密には，例 2 の脚注 ¶) のような考察を加えるべきであろうが，同次 1 階線形微分方程式の場合は，解が必ず $y = CG(x)$（C は任意の実数）の形になり，これですべてであることが分かっているので，こういう考察を書かなくてもよい.）

解の公式は，$y = Ce^{-\int f(x)\,dx}$ である．ただし，$\displaystyle\int f(x)\,dx$ は積分定数を含まない 1 つの原始関数である[††]．

- **非同次**方程式 $y' + f(x)y = r(x)$ の場合は，まず対応する同次方程式 $y' + f(x)y = 0$ を解く．解を $y = CG(x)$ とするとき，非同次方程式の解は，$y = uG(x)$ によって未知関数を y から u に変換すると求まる（**定数変化法**）．u については必ず $u' = B(x)$ という形の最も簡単な微分方程式になり，最終的な解は，$y = A(x) + CG(x)$ の型になる．ここで，第 2 項の $CG(x)$ は，同次方程式の一般解そのものであり，第 1 項の $A(x)$ は，非同次方程式の特殊解である．これですべての解が求まり，これを**一般解**と呼ぶ[**]．

例 4 $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2\cos 3x$ を解こう．同次方程式は，例 3 であり，解は $y = Cx^2$ であった．そこで，$y = ux^2$ とすると，$y' = u'x^2 + u2x$．これらを元の方程式に代入すると，$u'x^2 + 2xu - \dfrac{2}{x}ux^2 = x^2\cos 3x$，すなわち，$u' = \cos 3x$．これより，$u = \dfrac{1}{3}\sin 3x + C$．したがって，$y = \dfrac{1}{3}x^2\sin 3x + Cx^2$（$C$ は任意の実数）．

解の公式は，

$$y = e^{-h(x)}\left\{\int e^{h(x)}r(x)\,dx + C\right\}, \quad h(x) = \int f(x)\,dx$$

である．ただし，ここでも，$\displaystyle\int \ldots dx$ は積分定数を含まない 1 つの原始関数である．

[††] 教科書ではこういう使い方をしているが，不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は，普通は積分定数を含んだものである．

4　完全微分方程式

関数 y の陰関数表示 $u(x,y)=0$ があるとき，これを x で微分すると，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)y'=0$$

となる．ある u によってこの形に書ける微分方程式を**完全微分方程式**という．例えば，$\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=2x$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=2y$ なので，$2x+2yy'=0$ は完全微分方程式である．完全微分方程式は，解の陰関数表示 $u(x,y)=0$ が容易に得られる（あるいは既に得られている）．

一般に $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ において[‡‡]，

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

が成り立つことが，**完全であるための必要十分条件**である．このとき，u を次のようにして求めることができる．

例 5　$xy'+y+4=0$ において，$\dfrac{\partial(y+4)}{\partial y}=\dfrac{\partial x}{\partial x}$ なので，完全微分方程式である．$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+4$ だから $u(x,y)=(y+4)x+C(y)$. $x=\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+C'(y)$ だから，$C'(y)=0$, $C(y)=C$ (定数). したがって，$u(x,y)=(y+4)x+C$. 元の方程式の解は $(y+4)x+C=0$, すなわち $y=-4-\dfrac{C}{x}$.

$M+Ny'=0$ が完全微分方程式でなくても， 適当な $F(x,y)$ をかけると $(FM)+(FN)y'=0$ が完全微分方程式になることがある．F は $\dfrac{\partial(FM)}{\partial y}=\dfrac{\partial(FN)}{\partial x}$ を満たせばよい．このときの $F(x,y)$ を**積分因子**と呼ぶ．積分因子はあるとすれば無数にある．F を見つけるのは一般には難しいが，簡単に見つかる場合もある．

例 6　$xy'-y=0$ は完全ではないが，F が y に依らないと仮定してみると，$\dfrac{\partial(Fx)}{\partial x}=\dfrac{\partial(-Fy)}{\partial y}$ は $F'x+F=-F$ となり，$xF'=-2F$ となる．これは変数分離形で $F=Cx^{-2}$ と解け，x^{-2} が積分因子である．このように，積分因子が x または y の一方のみの関数であると仮定して解ける場合がある．このとき，元の方程式に x^{-2} をかけると，$x^{-1}y'-yx^{-2}=0$ となる．$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-yx^{-2}$ より，$u=yx^{-1}+C(y)$. $x^{-1}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{-1}+C'(y)$ より，$C'(y)=0$, $C(y)=C$. したがって，$u=yx^{-1}+C$. ゆえに元の方程式の解は，$u=0$ すなわち $y=C'x$. $(C'=-C)$

以上．

[‡‡] 教科書にあるように，$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ と書くこともある．