微 分 方 程 式 2

11. 連立線形微分方程式 (2)

連立線形微分方程式

函数 $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t),\ b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)$ に対して

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

とおく。また $n \times n$ 行列 A を

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

とおく。このとき

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$$

を連立線形微分方程式という. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の時, 斉次という

方程式を解く戦略

1) 連立線形微分方程式の解の構造を調べる
2) 斉次の場合の解法を調べる
3) 一般の場合の解法を調べる

斉次の場合（$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき）
$i = 1, 2, .., m$ に対して

$$\boldsymbol{y}_i = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{bmatrix}$$

とおく
定理 $\boldsymbol{y}_i$ がすべて $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y}$ の解であれば

$$C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + C_m\boldsymbol{y}_m$$

も $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y}$ の解(ただし、$C_1, C_2, ..., C_m$ は定数)

一次独立性

定義 $i = 1, 2, .., m$ に対して

$$\boldsymbol{y}_i = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{bmatrix}$$

とおく. このとき、定数 $C_1, C_2, ..., C_m$ に対して

$$C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + C_m\boldsymbol{y}_m = \mathbf{0}$$

となるのは

$$C_1 = 0, C_2 = 0, ..., C_m = 0$$

のときに限るときに、m 個のベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_m$ は一次独立 という

★この定義は線形代数のときの定義と同じ。成分が数から関数に変わった

一次独立性・続

n 個のベクトル値関数が一次独立でないときは

$$C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + C_n\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{0}$$

がなりたつような全ては 0 でない $C_1, C_2, ..., C_n$ が存在する。
$C_1, C_2, ..., C_n$ の連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \ldots & y_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

の解だと思うと係数行列の行列式が 0 になる

基本解と行列式

定理　斉次連立微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y}$$

は n 個の一次独立な解 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots., \boldsymbol{y}_n$ をもち、一般解は

$$\boldsymbol{y} = C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + C_n\boldsymbol{y}_n$$

と表される.　（この $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots., \boldsymbol{y}_n$ を基本解という）

証明（略）

次の行列式 $\Delta(t) \neq 0$ になる：

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \ldots & y_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$\Delta(t)=0$ となる t は存在しない

$\Delta(t)$ を微分して

$$\Delta'(t)=\Delta_1(t)+\Delta_2(t)+\cdots+\Delta_n(t)$$

ここで $\Delta_j(t)$ は第 j 行目を微分した行列式

$$\Delta_j(t)=\begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y'_{j1}(t) & y'_{j2}(t) & \ldots & y'_{jn}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

ここで

$$y'_{jk}(t)=\sum_{l=1}^{n} a_{jl}(t)y_{lk}(t)$$

より（続く）

$$\Delta_j(t) = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^n a_{jl}(t)y_{l1}(t) & \sum_{l=1}^n a_{jl}(t)y_{l2}(t) & \dots & \sum_{l=1}^n a_{jl}(t)y_{ln}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{jj}(t)y_{j1}(t) & a_{jj}(t)y_{j2}(t) & \dots & a_{jj}(t)y_{jn}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= a_{jj}(t)\Delta(t).$$

(続く)

$\Delta(t) \neq 0$ ・続き

以上によって

$$\Delta'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t)\Delta(t).$$

これは $\Delta(t)$ に対する一階線形微分方程式なので

$$\Delta(t) = C \exp\left(\int^{t} \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(s)\, ds\right)$$

となるので

$\Delta(t)$ は恒等的に 0 になるか決して 0 にならないかどちらか

一次独立であれば $\Delta(t) = 0$ となる t は存在しない.

斉次でない場合

連立 1 階線形微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$$

の一つの解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0$ をとる。このとき $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}_0$ とおくと

$$\dot{\boldsymbol{z}} + \dot{\boldsymbol{y}}_0 = A(t)\boldsymbol{z} + A(t)\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{b}$$

より

$$\dot{\boldsymbol{z}} = A(t)\boldsymbol{z}$$

すなわち、$\boldsymbol{z}$ は斉次方程式を満たす

斉次方程式

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y}$$

の n 個の一次独立な解を $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots., \boldsymbol{y}_n$ とすると

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + C_n\boldsymbol{y}_n$$

すなわち、非斉次方程式の解は「特解＋斉次方程式の一般解」

定数変化法

斉次方程式

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y}$$

の n 個の一次独立な解 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots., \boldsymbol{y}_n$ がわかっているとする。

$$\boldsymbol{y} = c_1(t)\boldsymbol{y}_1(t) + c_2(t)\boldsymbol{y}_2(t) + \cdots + c_n(t)\boldsymbol{y}_n(t)$$

が非斉次方程式の解になっているとする：

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{y}}(t) &= \sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\boldsymbol{y}_k(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\boldsymbol{y}_k'(t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\boldsymbol{y}_k(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)A\boldsymbol{y}_k = \sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\boldsymbol{y}_k(t) + A\boldsymbol{y} \\
&= A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\boldsymbol{y}_k(t) = \boldsymbol{b}$$

定数変化法・続き

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\boldsymbol{y}_k(t) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

を $c_j'(t)$ $(j = 1, .., n)$ の連立方程式と思って解いて

$$c_j'(t) = g_j(t)$$

これを積分して

$$c_j(t) = \int g_j(t)\, dt + C_j$$

より

$$\boldsymbol{y} = \left(\int g_1(t)\, dt + C_1 \right) \boldsymbol{y}_1(t) + \cdots + \left(\int g_n(t)\, dt + C_n \right) \boldsymbol{y}_n(t)$$

非斉次の場合2

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$$

の解が $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1}$,

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}$$

の解が $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_2}$ であれば

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}$ は $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ の解

これによって非斉次の場合は分割して解くことが可能

例

$y' = z,\ z' = -y$ の一次独立な解として

$$(y, z) = (\sin t, \cos t), \quad (y, z) = (\cos t, -\sin t)$$

がとれる。このことを用いて、次の方程式を解け

$$y' = z + \cos t,\ z' = -y + \sin t.$$

解 $y = u_1 \sin t + u_2 \cos t,\ z = u_1 \cos t - u_2 \sin t$ とおくと

$$u_1' \sin t + u_2' \cos t = \cos t,\ u_1' \cos t - u_2' \sin t = \sin t.$$

これを解いて

$$u_1' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t,\ u_2' = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

したがって

$$u_1 = \int \sin 2t\, dt = -\frac{1}{2} \cos 2t + C_1,\ u_2 = \int \cos 2t\, dt = \frac{1}{2} \sin 2t + C_2$$

以上により

$$
\begin{aligned}
y &= u_1 \sin t + u_2 \cos t \\
&= C_1 \sin t + C_2 \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \cos t \\
&= \mathbf{C_1} \sin \mathbf{t} + \mathbf{C_2} \cos \mathbf{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sin \mathbf{t}, \\
z &= u_1 \cos t - u_2 \sin t \\
&= C_1 \cos t - C_2 \sin t - \frac{1}{2} \cos 2t \cos t - \frac{1}{2} \sin 2t \cos t \\
&= \mathbf{C_1} \cos \mathbf{t} - \mathbf{C_2} \sin \mathbf{t} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cos \mathbf{t},
\end{aligned}
$$

問題

次の微分方程式を解け

(1) $y' = z + t,\ z' = -y + t^2 + 1$

(2) $y' = z + e^t(1 - t),\ z' = -y + e^t(t + 2)$

(1) 解 $y = u_1 \sin t + u_2 \cos t,\ z = u_1 \cos t - u_2 \sin t$ とおくと

$$u_1' \sin t + u_2' \cos t = t,\ u_1' \cos t - u_2' \sin t = t^2 + 1.$$

これを解いて

$$u_1' = \left(t^2 + 1\right) \cos t + t \sin t,\ u_2' = t \cos t - \left(t^2 + 1\right) \sin t.$$

したがって

$$u_1 = t(t \sin t + \cos t) + C_1,\ u_2 = t(t \cos t - \sin t) + C_2$$

以上により $y = C_1 \sin t + C_2 \cos t + t^2, z = C_1 \cos t - C_2 \sin t + t$

(2) まったく同様にして

$y = C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t, z = C_1 \cos t - C_2 \sin t + te^t$