ベクトル解析

2. 内積・外積

1 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き

定義　3つのベクトルの組 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ は行列式

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

が正 (または負) のとき正系 (または負系) または右手系 (または左手系) であるという.

注意： $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が一次独立ではない時は上の行列式は 0 になる.

注意： 正系 (負系) の 2つのベクトルの組は一方の組を一次独立性をくずさずに連続的に変化させて, 他の一方の組と一致させることができることが証明できる. (空間の向きの概念)

例： $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ は正系.
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が正系であるとは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手の親指, 人差し指, 中指と同じ方向をもつことと同じ.

命題　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq 0$ の時 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ は正系

証明

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= ||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

以上より、ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は
大きさが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しく,
向きは平行四辺形のつくる平面に垂直で, $\boldsymbol{a}$, から $\boldsymbol{b}$ の方向に右ねじをまわすとき (回転角は 180° より小さい角), ねじの進む方向と同じである.

軸 ℓ のまわりに剛体 P が回転しているとする.

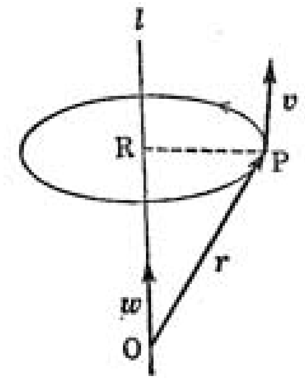
ω : 回転角の時間に関する変化率

$\boldsymbol{\omega}$: 角速度ベクトルまたは回転ベクトル

右ねじがℓ 軸に沿って剛体の回転の方向に進む方向を
向きにもち大きさがω のベクトル

点 P の速度 $\boldsymbol{v}$ は, 向きが $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ と同じ方向で, 大きさは

$$\mathrm{RP} \cdot \omega = \omega \cdot \mathrm{OP} \sin \angle \mathrm{POR} = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}|$$



より $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$.

力のモーメント

力を表わすベクトルを $\boldsymbol{F}$ として, 力の作用線上の1点Pの点Oに対する位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。外積 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を力 $\boldsymbol{F}$ の点Oのまわりのモーメントという.

スカラー **3** 重積

3 つのベクトル $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ に対して, スカラー

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

をスカラー **3** 重積とよぶ.

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3),\ \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ として

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

スカラー 3 重積の幾何学的意味

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ とのなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおく．定義より

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos\theta$$

$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を2辺とする平行四辺形の面積

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ は θ が鋭角のとき $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を **3** 辺とする平行 **6** 面体の体積．

θ が鈍角のとき平行面体の体積に負の符号をつけたもの．

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を3辺とする平行6面体の体積は $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$．

問題

7. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が次のとき $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3),\ \boldsymbol{b} = (1, 3, 4)$

(2) $\boldsymbol{a} = (2, -3, 5),\ \boldsymbol{b} = (-1, 4, 1)$

8. ベクトル $\boldsymbol{a} = (-1, 2, 3),\ \boldsymbol{b} = (-3, 6, 9)$ が平行であることを証明せよ

9. 次の頂点をもつ 4 面体の体積を求めよ.

$$(2, 1, 8),\ (2, 1, 4),\ (3, 2, 9),\ (3, 3, 10)$$

10. 次の関係式を示せ

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

直線のパラメータ表示

直線・平面の方程式

直線 ℓ 上に相異なる 2 点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ をとり $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ とする．

直線 ℓ は

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \lambda \boldsymbol{a}$$

となるような点 P の軌跡になる（λ は実数）．

O を原点として位置ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = (x_0, y_0, z_0),\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (x_1, y_1, z_1),\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, z)$$

をとると $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ より直線のパラメーター表示をえる:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + \lambda\boldsymbol{a} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + \lambda(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}) \\ &= (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\end{aligned}$$

成分で表わせば

$$\ell : \begin{cases} x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \\ z = (1-\lambda)z_0 + \lambda z_1 \end{cases}$$

(λ は実数).

平面のパラメータ表示

平面 Π の上に同一直線上にない 3 点、$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ が与えられた時

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} = \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

とする.

3 点が同一直線上にないことから $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は一次独立で、平面 Π は

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$$

となるような点 P の軌跡になる（λ, μ は実数）.

これから平面のパラメータ表示を得る：

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$$

と表わされる.

成分表示

$P=(x,y,z)$, $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ とおけば 平面 Π は次のように成分表示される

$$\Pi:\begin{cases} x=x_0+\lambda a_1+\mu b_1\\ y=y_0+\lambda a_2+\mu b_2\\ z=z_0+\lambda a_3+\mu b_3\end{cases}$$

11. 2 直線

$$\ell:\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},\quad \ell':\frac{x-x_1'}{a'}=\frac{y-y_1'}{b'}=\frac{z-z_1'}{c'}$$

が同一平面上にあるためには

$$\begin{vmatrix} x_1'-x_1 & y_1'-y_1 & z_1'-z_1\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}=0$$

が成り立つことが必要十分条件であることを証明せよ.