微分方程式　まとめ 2　（金曜２限，萬代担当）

1　２階線形微分方程式

- **２階線形**微分方程式とは,

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x) \tag{1.1}$$

の形の微分方程式である．未知関数とその導関数 y, y', y'' に関して，１次式であることが重要である．左辺を $L[y]$ と書くと,

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], \qquad L[ky] = kL[y] \quad (k \text{ は定数}) \tag{1.2}$$

なる**線形性**を持っている．

- 係数 $f(x)$, $g(x)$ が定数のとき，**定数係数**と呼ぶ．また，$r(x) \equiv 0$ のとき，**同次**と呼ぶ．すなわち，(1.1) に対応した同次方程式は

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \tag{1.3}$$

- **同次の場合**，(1.3) の一般解は，$y = C_1F(x) + C_2G(x)$ の形をしていて，これですべての解が表わされている*)．このとき，$\{F(x), G(x)\}$ を (1.1) の**基本解系**と呼ぶ．本来は，**解の基本形**と呼ぶべきだが，基本解系という言葉が定着している．**解空間の基底**ということもある．

　（実は，$F(x) = CG(x)$ や $G(x) = CF(x)$ とはなっていないような２つの解 $F(x)$, $G(x)$ を見つければ，これが自動的に基本解系を作る，ということが分かっている.）

非同次の場合，(1.1) の解は，ひとつの特殊解 $A(x)$ さえ見つかれば，$y = A(x) + C_1F(x) + C_2G(x)$ が一般解（すべての解）となる．ここで，第2,3項の $C_1F(x) + C_2G(x)$ は，対応する同次方程式 (1.3) の一般解である．

　一般には，$F(x)$, $G(x)$, $A(x)$ を見つけるのは難しいが，**定数係数**の場合には，分かっている．特に，基本解系 $\{\, F(x), G(x) \,\}$ は容易に分かる．

- ２階の場合の**初期値問題**は，$y(x_0) = A$, $y'(x_0) = B$ と，２つ条件を与える．線形微分方程式の場合は，必ずこの条件で解が１つに決まる．

---

*) 決して当たり前のことではなく，緻密な議論がいる．

2　２階定数係数線形微分方程式

- **定数係数同次方程式**

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.1}$$

に対して，２次方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を**特性方程式**という．$y = e^{\lambda x}$ が解であるとしたとき[†]に定数 λ が満たすべき条件である．この２次方程式の解で，次のように (2.1) の基本解系がわかる．

特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解	同次方程式 (2.1) の基本解系
．相異なる２実数解 λ_1, λ_2 をもつとき（$a^2 - 4b > 0$ のとき）	$\{\, e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \,\}$
．相異なる２虚数解 $\lambda = p \pm qi$ (p, q は実数) をもつとき（$a^2 - 4b < 0$ のとき）	$\{\, e^{(p+iq)x}, e^{(p-iq)x} \,\}$ または $\{\, e^{px}\cos qx, e^{px}\sin qx \,\}$(実数形) [‡]
．重解 λ_0 をもつとき（$a^2 - 4b = 0$ のとき）	$\{\, e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x} \,\}$

- **非同次**の

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{2.2}$$

の場合，とにかく１つの特殊解 $A(x)$ さえ見つければ，一般解がわかる．

$A(x)$ の見つけ方としては，１階の場合と同様の**定数変化法**があり，原理的には必ず見つけることができるが，計算がかなり手間である．

$r(x)$ が**特殊な形をしている場合**には，もう少し簡単な**未定係数法**がある．

- **定数変化法**.　非同次方程式 (2.2) に対して，まず対応する同次方程式 (2.1) の一般解 $y = C_1F(x) + C_2G(x)$ を求める．これに対応して，(2.2) の解を

$$y = uF(x) + vG(x) \tag{2.3}$$

の形で求める (u, v を求める).

(2.3) を微分すると，$y' = u'F(x) + uF'(x) + v'G(x) + vG'(x)$ となるが，ここで，$u'(x)$, $v'(x)$ がからむ部分について

$$\boxed{u'F(x) + v'G(x) = 0} \tag{2.4}$$

[†]関数 $y = e^{\lambda x}$ は，微分するという作用 D に対して極めて単純な変化: $D[y] = \lambda y$ をする関数であり，フーリエ解析やラプラス解析などでも重要な働きをする関数である．

[‡]$e^{(p\pm iq)x} = e^{px}\cos qx \pm ie^{px}\sin qx$ なので，$C_1e^{(p+iq)x} + C_2e^{(p-iq)x} = (C_1+C_2)e^{px}\cos qx + i(C_1 - C_2)e^{px}\sin qx = C_1'e^{px}\cos qx + C_2'e^{px}\sin qx$ に注意．

という**余分な条件を設定するところがミソ**．このとき

$$y' = uF'(x) + vG'(x)$$

となるので，これをさらに微分して，

$$y'' = u'F'(x) + uF''(x) + v'G'(x) + vG''(x)$$

となる（余分な条件 (2.4) を設定したおかげで u'', v'' が出てこないことに注意）．これらを (2.2) に代入して $F''(x)+aF'(x)+bF(x) = G''(x)+aG'(x)+bG(x) = 0$ を使うと，u, v のからむ項は必ずキャンセルして，

$$\boxed{u'F'(x) + v'G'(x) = r(x)} \tag{2.5}$$

となる．

(2.4) と (2.5) から，連立１次方程式を解いて，u', v' が求まる．具体的に計算すると，

$$u' = \frac{-r(x)G(x)}{W(x)}, \qquad v' = \frac{r(x)F(x)}{W(x)}. \tag{2.6}$$

ここで，$W(x) := F(x)G'(x) - F'(x)G(x) = \begin{vmatrix} F(x) & G(x) \\ F'(x) & G'(x) \end{vmatrix}$. この $W(x)$ は，$F(x)$ と $G(x)$ の**ロンスキアン**または**ロンスキ行列式**と呼ばれる[§)]．(2.6) を積分すると，u, v が求まり，y が求まる．

以上をまとめて公式にすると，

$$y = F(x)\int \frac{-r(x)G(x)}{W(x)}dx + G(x)\int \frac{r(x)F(x)}{W(x)}dx$$

となる．積分に積分定数を入れると一般解が求まる．

例： $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$. 同次方程式を解くと，特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$ ゆえ，$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. そこで，$y = u \cos x + v \sin x$ の形で特殊解を求めよう．

$y' = u' \cos x - u \sin x + v' \sin x + v \cos x$ となる．ここで，

$$u' \cos x + v' \sin x = 0 \text{ —— } (1)$$

[§)] $\{\, F(x), G(x) \,\}$ が (2.1) の基本解系であれば，必ず $W(x) \neq 0$ であることがわかっている．

とすると，$y' = -u\sin x + v\cos x$. これより，$y'' = -u'\sin x - u\cos x + v'\cos x - v\sin x = -u'\sin x + v'\cos x - y$. したがって，

$$-u'\sin x + v'\cos x = \frac{1}{\cos x} \text{ —— } (2)$$

このように，必ず，u, v は消えて，u', v' のみが残る．

(1), (2) より，$u' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $v' = 1$ となる.（このように必ず u', v' が求まり，積分するだけで u, v が求まる.）これを積分すれば，$u = \log|\cos x| + C_1$, $v = x + C_2$. すなわち，一般解は，$y = (\cos x)\log|\cos x| + x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$.

- **未定係数法**. $r(x)$ が次のような特殊な形の時は，解の形を決めてしまうことで，特殊解が求まる場合がある．これは，１階線型方程式でも定数係数なら使える方法である．

  i) $r(x) = Ae^{px}$ のとき，$y = ke^{px}$ の形の解を探す.（k を決める.）

  ii) $r(x) =$[n 次式] のとき，$y =$[n 次式] の形の解を探す.（n 次式の係数を決める.）

  iii) $r(x) = e^{px}(A\sin qx + B\cos qx)$ のとき，$y = e^{px}(k\sin qx + l\cos qx)$ の形で探す.（k, l を決める.）たとえ $r(x)$ が cos,sin の一方のみでも，解は両方入った形で探す.

  iv) 上記の形の関数の和の場合は，それぞれ対応する形の和の形で求めればよい.（別々に求めて足してもよい.）

いずれも，うまくいかない場合もある．特性方程式の解が，i) では $\lambda = p$, ii) では $\lambda = 0$，iii) では $\lambda = p + \pm iq$，になっている場合，うまくいかない．この場合は，さらに x または x^2 をかけた形にするとうまくいく．詳細・例などは TEXTp.100–101 を参照.

例： $y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$.

$y = kx + l + me^{3x}$ の形で１つの解（特殊解）を求めよう．$y' = k + 3me^{3x}$, $y'' = 9me^{3x}$ ゆえ，$9me^{3x} - 3k - 9me^{3x} + 2kx + 2l + 2me^{3x} = 4x + e^{3x}$. ゆえに，$2m = 1$, $2k = 4$, $-3k + 2l = 0$. これより，$m = \dfrac{1}{2}$, $k = 2$, $l = 3$. すなわち，$y = 2x + 3 + \dfrac{1}{2}e^{3x}$. （一般解は，$y = 2x + 3 + \dfrac{1}{2}e^{3x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.）

$y'' - 3y' + 2y = 4x$ の特殊解 $y = 2x + 3$ と，$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ の特殊解 $y = \dfrac{1}{2}e^{3x}$ を別々に求めて，足してもよい.

以上.