微 分 方 程 式 特 論

3. 複素フーリエ級数

1. 複素フーリエ級数

フーリエ級数

$$a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の複素形式を考察する。複素形式は計算を簡単にすることもある

Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Euler の公式で $x = nx, -nx$ とおくと

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$$

これより

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

を代入して整理しよう：

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{1}{2} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i} b_n (e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \end{aligned}$$

したがって $c_0 = a_0,\ c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2},\ k_n = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ とおくと

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

c_n, k_n は積分でかける：

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \\
k_n &= \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx
\end{aligned}
$$

したがって $k_n = c_{-n}$ とおくと, **複素 Fourier 級数**をえる：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.
\end{aligned}
}
$$

周期 $2L$ の関数に対して, **複素 Fourier 級数**は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$
$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx.$$

複素 Fourier 級数の例

$$f(x) = e^x \ (-\pi < x < \pi), \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

[解説] $e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm \sin n\pi = (-1)^n$ に注意すると

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1-in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}(e^{\pi}\cdot e^{-in\pi} - e^{-\pi}\cdot e^{in\pi}) = \frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^n}{1-in}(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

分母を実数にして

$$\frac{1}{1-in} = \frac{1+in}{(1-in)(1+in)} = \frac{1+in}{(1+n)^2}$$

また双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

を用いると

$$e^\pi - e^{-\pi} = 2\sinh\pi.$$

以上により

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^n}{1-in}(e^\pi - e^{-\pi}) = (-1)^n \frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{1+in}{(1+n^2)}.$$

したがって複素 Fourier 級数は

$$e^x = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{1+in}{(1+n^2)} e^{inx}, \quad (-\pi < x < \pi).$$

複素 Fourier 級数から実 Fourier 級数へ

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて実 Fourier 級数に書き直す

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{(1+n^2)} e^{inx}, \quad (-\pi < x < \pi).$$

において、複素数がでてくるのは

$$\begin{aligned}(1+in)e^{inx} &= (1+in)(\cos nx + i \sin nx) \\ &= (\cos nx - n \sin nx) + i(n \cos nx + \sin nx)\end{aligned}$$

第 n 項と第 $(-n)$ 項を組み合わせると良い. $n \to -n$ として

$$(1-in)e^{-inx} = (\cos nx - n \sin nx) - i(n \cos nx + \sin nx)$$

となり、二つを足すと虚部が相殺して、足すと実部が2倍になる.
$n = 0$ のときは1. $-\pi < x < \pi$ での実 Fourier 級数は

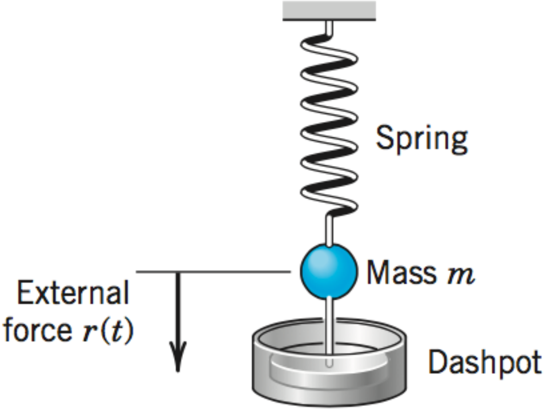
$$e^x = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2}(\cos 2x - 2 \sin 2x) - \cdots \right).$$

2. 強制振動

常微分方程式への応用を考える.
ばね定数 k のばねにつながれた質量 m の物体の強制振動:

$$my'' + cy' + ky = r(t)$$

$y = y(t)$: 平衡点からの変位
c : 減衰定数
$r(t)$: 時間 t に依存する外力

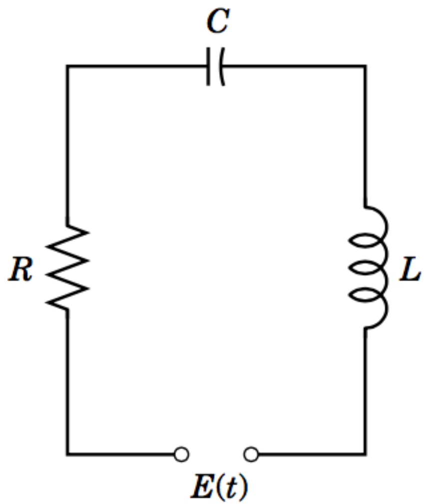


RLC 回路

力学のモデルである強制振動と数学的には同じ方程式は次のような **RLC 回路**になる

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

R: 抵抗 (resistance)
L : 誘導係数 (inductance)
C : 静電容量 (capacitance)



定常解

以下では強制振動の方程式を考える

$$my'' + cy' + ky = r(t)$$

この方程式の解は斉次方程式の解＋特解になっていた。

I) 外力 $r(t)$ が正弦もしくは余弦関数のとき

定常解 y も外力と同じ振動数を持つ調和振動になる

$r(t) = R\cos nt$ ならば $y = A\cos nt + B\sin nt$ の形になる

$r(t) = R\sin nt$ でも $y = A'\cos nt + B'\sin nt$ の形になる

II) 外力 $r(t)$ が任意の周期関数のとき

定常解 y はさまざまな振動数を持つ調和振動 (**Fourier** 級数)

y の調和振動は r の振動数かその整数倍の振動数

振動数の一つが系の固有振動数に近い時、一番強く応答する

例．非正弦的周期外力による強制振動

$$my'' + cy' + ky = r(t)$$

において $m = 1$, $c = 0.02$, $k = 25$ とする:

$$y'' + 0.02y' + 25y = r(t).$$

斉次方程式 $y'' + 0.02y' + 25y = 0$ の特性解は

$$\lambda = -\frac{1}{100} \pm i\sqrt{24.9999}$$

であり、固有振動数は5に極めて近い.

外力は周期 2π の周期関数で

$$r(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & (-\pi < t < 0) \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

として、定常解を求めよう

$$r(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & (-\pi < t < 0) \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

の Fourier 級数は次のようになる（演習問題）

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right)$$

そこで $r(t) = r_1(t) + r_3(t) + \cdots$ と考え

$$r_n(t) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

定常解としては、以下の解 $y_n(t)$ をまず求める：

$$y_n'' + 0.02y_n' + 25y_n = r_n(t) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \quad (n = 1, 3, \ldots)$$

$$y_n'' + 0.02y_n' + 25y_n = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

の解として

$$y_n = A_n\cos nt + B_n\sin nt$$

の形のものを考える。微分方程式に代入して

$$\begin{aligned}-n^2(A_n\cos nt + B_n\sin nt) + 0.02n(-A_n\sin nt + B_n\cos nt)&\\ +25(A_n\cos nt + B_n\sin nt) &= \frac{4}{n^2\pi}\cos nt\end{aligned}$$

したがって, $\cos nt, \sin nt$ ごとに整理して係数比較して

$$\begin{aligned}-n^2A_n + 0.02nB_n + 25A_n &= \frac{4}{n^2\pi},\\ -n^2B_n - 0.02nA_n + 25B_n &= 0.\end{aligned}$$

前ページの連立方程式

$$-n^2A_n + 0.02nB_n + 25A_n = \frac{4}{n^2\pi},$$
$$-n^2B_n - 0.02nA_n + 25B_n = 0.$$

を解いて

$$A_n = \frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D_n},\ B_n = \frac{0.08}{n\pi D_n}, \quad (D_n = (25-n^2)^2 - (0.02n)^2)$$

したがって方程式

$$y'' + 0.02y' + 25y = r(t) = r_1(t) + r_3(t) + \cdots$$

の解は $y_n'' + 0.02y_n' + 25y_n = r_n(t)$ の解 y_n を足し合わせた

$$y = y_1(t) + y_3(t) + \cdots\ ,$$
$$y_n = \frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D_n}\cos nt + \frac{0.08}{n\pi D_n}\sin nt.$$

解の振幅

y_n の振幅は,

$$Cn = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{n^2\pi\sqrt{D_n}}$$

実際の数値は

$$C_1 = 0.0530$$
$$C_3 = 0.0088$$
$$\mathbf{C_5 = 0.5100}$$
$$C_7 = 0.0011$$
$$C_9 = 0.0003$$

$n = 5$ のときは $D_5 = 0.01$ と非常に小さいので振幅 C_5 が大きくなる。よって y_5 が主要な項になる. 定常運動はほとんど調和振動とみてよく, その振動数は外力の振動数の 5 倍に等しい

$r(t)$ と $y(t)$: