ベクトル解析

9．面積分 2

法線面積分

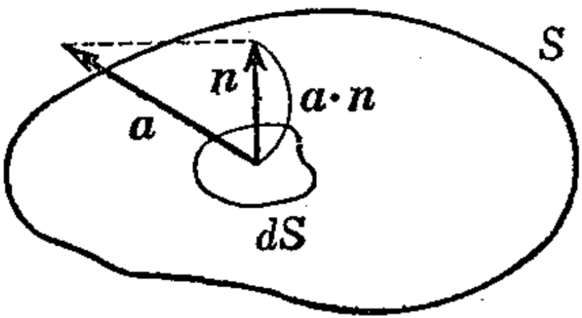
ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ において, 向きづけられる曲面 S 上の正の方向の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とするとき, 面積分

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を曲面 S に関する $\boldsymbol{a}$ の法線面積分という

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ を簡単に $a_{\boldsymbol{n}}$ とかけば法線面積分は以下のようにもかける

$$\iint_S a_{\boldsymbol{n}}\,dS$$



電気力束

流体の速度ベクトル場を $\boldsymbol{v}$ とするとき, S の微小部分 ΔS を通過する単位時間あたりの流出量は $\boldsymbol{v_n}\Delta S$ である.
よって S を通過する単位時間あたりの流出量は

$$\iint \boldsymbol{v_n}\, dS$$

である.
$\boldsymbol{E}$ が電場の場合

$$\iint \boldsymbol{E_n}\, dS$$

を曲面 S を通る電気力束という

例題

S: $x^2+y^2+z^2=1$ のとき, 面積分 $\iint_S z^2\,dS$ を求めよ.

[解]　単位球面 S のパラメーター表示は

$$\boldsymbol{r}=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u)\quad(0\leqq u\leqq\pi, 0\leqq v\leqq 2\pi)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,-\sin u),\ \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=(-\sin u\sin v,\sin u\cos v,0).$$

したがって

$$E=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=(\cos u\cos v)^2+(\cos u\sin v)^2+(\sin u)^2=1,$$

$$F=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=-(\cos u\cos v\cdot\sin u\sin v)+(\cos u\sin v\cdot\sin u\cos v)+0=0,$$

$$G=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=(\sin u\sin v)^2+(\sin u\cos v)^2+0^2=\sin^2 u.$$

より

$$\iint_S z^2\,dS=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\cos u)^2\sqrt{1\cdot\sin^2 u-0^2}\,dudv=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos^2 u\sin u\,dudv,$$

$$=\int_0^{2\pi}dv\int_0^\pi\cos^2 u\sin u\,du=2\pi\int_0^\pi\cos^2 u\sin u\,du$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{3}\cos^3 u\right]_0^\pi=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$$

例題

平面 $2x+y+z=2$ と x, y, z 軸 との交点を A,B,C とする. A,B,C を頂点とする三角形を S とするとき, 面積分 $\displaystyle\iint_S (x+z)\,dS$ を求めよ.

[解]　S の方程式は

$$z = g(x,y) = 2-2x-y \quad (x,y) \in D = \{(x,y)\,|\,x,y \geqq 0, 2x+y \leqq 2\}$$

で与えられる.

$$\begin{aligned}
\iint_S (x+z)\,dS &= \iint_S (2-x-y)\sqrt{1+(g_x)^2+(g_y)^2}\,dxdy \\
&= \iint_S (2-x-y)\sqrt{1+(-2)^2+(-1)^2}\,dxdy, \\
&= \sqrt{6}\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2-x-y)\,dy = \sqrt{6}\int_0^1 dx \left[(2-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-2x} \\
&= \sqrt{6}\int_0^1 (2-2x)\,dx = \boldsymbol{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

例題:法線面積分

S を単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(x,y,0)$ の S に関する法線面積分を求めよ．ただし 球面の外方向の法線方向を S の表側とする．

[解]　S のパラメーター表示は

$$\boldsymbol{r}=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u)\quad(0\leqq u\leqq\pi,0\leqq v\leqq 2\pi)$$

S 上の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.
よって P において $\boldsymbol{a_n}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=x^2+y^2=1-z^2$ より

$$\iint_S \boldsymbol{a_n}\,dS=\iint_S(1-z^2)\,dS$$

面積の計算ですでに求めたように

$$E=1,\quad F=0,\quad G=\sin^2 u.$$

より [単位球面では $dS=\sin u\,dudv$]

$$\begin{aligned}\iint_S(1-z^2)\,dS&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 u)\sqrt{EG-F^2}\,dudv\\&=\int_0^{\pi}du\int_0^{2\pi}(\sin u-\cos^2 u\sin u)\,dv\\&=2\pi\int_0^{\pi}(\sin u-\cos^2 u\sin u)\,du=2\pi\left[-\cos u+\frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\pi\end{aligned}$$

例題:法線面積分 2

平面 $2x+2y+3z=6$ と x, y, z 軸との交点を A, B, C とし, A , B , C を頂点とする三角形を S とする. ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ の S に関する法線面積分を求めよ. ただし, S の単位法線ベクトルの正の向きは原点のある側から他の側に向かってひくものとする.

[解]　S の方程式は

$$z=g(x,y)=2-\frac{1}{3}(2x+2y) \quad (x,y)\in D=\left\{(x,y)\,|x,y \geqq 0, \frac{1}{3}(2x+2y)\leqq 2\right\}$$

S の法線ベクトルの一つは $(2,2,3)$ であり、外向きの単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$

したがって $\boldsymbol{a_n}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{17}}(2x+2y+3z)=\frac{6}{\sqrt{17}}.$

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{a_n}\,dS &= \iint_D \frac{6}{\sqrt{17}}\sqrt{1+(g_x)^2+(g_y)^2}\,dxdy \\ &= \iint_D \frac{6}{\sqrt{17}}\sqrt{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2}\,dxdy \\ &= \int_0^3 dx\int_0^{3-x} 2\,dy \\ &= \int_0^3 (6-2x)\,dx = \mathbf{9}\end{aligned}$$

問題

次の場合の面積分 $\displaystyle\iint_S f dS$ を求めよ.

(1) S: 平面 $6x+3y+2z=6$ が3つの平面 $x=0, y=0, z=0$ によって切り取られる三角形の領域

$$f(x,y,z)=x+z$$

(2) S: 立方体 $0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1$ の表面:

$$f(x,y,z)=(2x+y)z$$

(3) S: 円柱面 $x^2+y^2=R^2, \quad 0 \leqq z \leqq h, \quad f(x,y,z)=x^2$

(4) S: $z^2=x^2+y^2,\ 0 \leqq z \leqq 1$: $\quad f(x,y,z)=x^2+2y$

(5) S: $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x \geqq 0$

$$f(x,y,z)=x^2$$

次の法線面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\,dS$ を求めよ.

(1) S: 平面 $x+2y+2z=2$ が 3 つの平面 $x=0, y=0, z=0$ で 切り取られる部分で原点のある側を負側とする.

$$\boldsymbol{a}=(2z,x,-y)$$

(2) S: 円柱面 $x^2+y^2=R^2, \quad 0 \leqq z \leqq h,$ で円柱の側面の正の単位法線ベクトルは内部から外部に向かってひくものとする.

$$\boldsymbol{a}=(2,0,0)$$

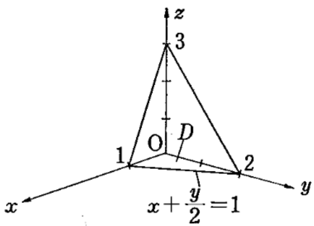
(3) S: 上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z \geqq 0,$ 球面の正の単位法線ベクトルは内部から外部に向かってひくものとする.

$$\boldsymbol{a}=(x,y,0)$$

(1) $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$

S の方程式は

$$z=g(x,y)=3-3x-\frac{3}{2}y \quad (D\text{上})$$



$$\therefore \iint_S (x+z)\,dS=\iint_D\left(3-2x-\frac{3}{2}y\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\iint_D\left(3-2x-\frac{3}{2}y\right)\sqrt{1+(-3)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{1+9+\frac{9}{4}}\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}\left(3-2x-\frac{3}{2}y\right)dy$$

$$=\sqrt{\frac{49}{4}}\int_0^1\left[(3-2x)(2-2x)-\frac{3}{4}2^2(1-x)^2\right]dx$$

$$=\frac{7}{2}\int_0^1\{2(3-2x)(1-x)-3(1-x)^2\}\,dx$$

$$=\frac{7}{2}\int_0^1\{2(1-x)+4(1-x)^2-3(1-x)^2\}\,dx=\frac{7}{2}\int_0^1\{2(1-x)+(1-x)^2\}\,dx$$

$1-x=t$ とおく. $dx=-dt,\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$

$$=\frac{7}{2}\int_1^0(2t+t^2)(-dt)=\frac{7}{2}\int_0^1(2t+t^2)\,dt$$

$$=\frac{7}{2}\left\{\left[\frac{2t^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\right\}=\frac{7}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$$

(3) $S: x=R\cos\theta,\ \ y=R\sin\theta,\ \ 0\leqq z\leqq h,\ \ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$

$\boldsymbol{r}=(R\cos\theta,\ \ R\sin\theta,\ \ z),\ \ D=\{0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ \ 0\leqq z\leqq h\}$

$$E=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=(-R\sin\theta,\ \ R\cos\theta,\ \ 0)\cdot(-R\sin\theta,\ \ R\cos\theta,\ \ 0)=R^2$$

$$F=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}=(-R\sin\theta,\ \ R\cos\theta,\ \ 0)\cdot(0,0,1)=0$$

$$G=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}=(0,0,1)\cdot(0,0,1)=1$$

$\therefore\ EG-F^2=R^2-0=R^2$

$$\therefore\ \iint_S x^2dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h(R\cos\theta)^2R\,dz=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^h R^3dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\int_0^h R^3dz=\left[\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi}R^3h=R^3h\pi$$

(3) S のパラメーター表示は

$$\boldsymbol{r} = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u) \quad (0 \leqq u \leqq \pi/2, 0 \leqq v \leqq 2\pi)$$

S 上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n} = (x/R, y/R, z/R)$.
よって P において $a_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = x^2 + y^2 = R^2 - z^2$ より

$$\iint_S a_{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_S (R^2 - z^2)\, dS$$

p.5 の計算と同様にして

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 u.$$

より

$$\begin{aligned}
\iint_S (R^2 - z^2)\, dS &= R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 u)\sqrt{EG - F^2}\, dudv \\
&= R^4 \int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} (\sin u - \cos^2 u \sin u)\, dv \\
&= 2\pi R^4 \int_0^{\pi} (\sin u - \cos^2 u \sin u)\, du = 2\pi R^4 \left[-\cos u + \frac{\cos^3 u}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\pi \mathbf{R^4}
\end{aligned}$$