微 分 方 程 式2

4. ラプラス変換の性質2

1. $t^n f(t)$ の変換

仮定　$f(t)$: $0 < t < \infty$ で区分的に連続かつ指数α位の関数

定理　$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > \alpha)$ ならば

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > \alpha,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

【証明】 $n = 1$ の時に示せばあとは繰り返せば良い.

$$\frac{F(s+h) - F(s)}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} f(t)\, dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h} \right) e^{-st} f(t)\, dt$$

に注意すると $h \to 0$ のとき () 内は $-t$ に収束する。厳密な評価は略すると

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\, dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$$

となって、$n = 1$ のときは証明できた。 $\square$

例

1. $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$.

[解説] $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$ より

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

2. $\mathcal{L}\left\{t\sin\omega t\right\} = \dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$.

[解説] $\mathcal{L}\left\{\sin\omega t\right\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ より

$$\mathcal{L}\left\{t\sin\omega t\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

演習問題

次の関数のラプラス変換を求めよ

(1) $t\cos\omega t$ (2) $t\cosh at$ (3) $t\sinh at$

(4) $\displaystyle\int_0^t \tau\sin\omega\tau\,d\tau$ (5) $\displaystyle\int_0^t \tau\cos\omega\tau\,d\tau$

例 2

次の 2 つの関数のラプラス変換を求めよ (ただし, $s > 0, \omega > 0.$).

$$t^n \cos \omega t, \qquad t^n \sin \omega t$$

解説

$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}=\dfrac{1}{s-a}$ より, $\mathrm{Re}\,(s-a)>0$ のとき

$$\mathcal{L}\left\{t^n e^{at}\right\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s-a}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

が成立する. ここで

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2},\quad \sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}.$$

を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^n\cos\omega t\right\}&=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{t^n e^{i\omega t}\right\}+\mathcal{L}\left\{t^n e^{-i\omega t}\right\}\right),\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(s-i\omega)^{n+1}}+\frac{n!}{(s+i\omega)^{n+1}}\right),\\\mathcal{L}\left\{t^n\sin\omega t\right\}&=\frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left\{t^n e^{i\omega t}\right\}-\mathcal{L}\left\{t^n e^{-i\omega t}\right\}\right),\\&=\frac{1}{2i}\left(\frac{n!}{(s-i\omega)^{n+1}}-\frac{n!}{(s+i\omega)^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

ここで $s+i\omega = re^{i\theta}$ $(r>0, 0<\theta<\pi/2)$ とおく。
複素共役をとって $s-i\omega = re^{-i\theta}$ となるので

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^n \cos\omega t\right\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(s-i\omega)^{n+1}} + \frac{n!}{(s+i\omega)^{n+1}}\right) \\
&= \frac{n!}{2}\frac{1}{r^{n+1}}\left(e^{i(n+1)\theta} + e^{-i(n+1)\theta}\right) \\
&= \frac{n!\cos(n+1)\theta}{r^{n+1}}, \\
\mathcal{L}\left\{t^n \sin\omega t\right\} &= \frac{1}{2i}\left(\frac{n!}{(s-i\omega)^{n+1}} - \frac{n!}{(s+i\omega)^{n+1}}\right) \\
&= \frac{n!}{2i}\frac{1}{r^{n+1}}\left(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}\right), \\
&= \frac{n!\sin(n+1)\theta}{r^{n+1}}.
\end{aligned}$$

□

ラゲールの多項式

$L_n(t)$ を以下で定める：

$$L_0(t) \equiv 1,\ L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)\ (n = 1, 2, \cdots)$$

とするとき $L_n(t)$ は n 次多項式である.

1. ラプラス変換を求めよ.

2. 上で求めたものの逆ラプラス変換を求めることによって $L_n(t)$ を書き下せ.

[解説]

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$$

$f(t)=e^{-t}t^n\ (n=1,2,\cdots)$ とおけば

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\}&=s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=s^n\mathcal{L}\left\{e^{-t}t^n\right\}\\&=s^n(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{n!s^n}{(s+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

したがって

$$\mathcal{L}\left\{e^t\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)\right\}=\mathcal{L}\left\{e^t\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\}=\frac{n!(s-1)^n}{s^{n+1}}.$$

$$\mathcal{L}\left\{L_n(t)\right\}=\frac{1}{n!}\mathcal{L}\left\{e^t\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\}=\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}.$$

[解説 つづき]

逆ラプラス変換はまだ習っていないが

$$\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} = \frac{1}{s^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k s^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{s^{k+1}}$$

となり $\mathcal{L}\left\{t^k\right\} = \dfrac{k!}{s^{k+1}}$ より

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{s^{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^{k+1}} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!} t^k. \end{aligned}$$

問題

$L_n(t)$ は微分方程式

$$ty'' + (1-t)y' + ny = 0,\ \ y(0) = 1, y'(0) = -n$$

の解である。このことから

$$\mathcal{L}\left\{L_n(t)\right\} = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

となることを証明せよ.

答え

$$\mathcal{L}\left\{ty'' + (1-t)y' + ny\right\} = 0$$

となるが, $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y\right\}$ とおくと

$$\mathcal{L}\left\{ty''\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{y''\right\} = -\frac{d}{ds}\left(s^2\mathcal{L}\left\{y\right\} - y(0)s - y'(1)\right) = -2sY(s) - s^2Y'(s) + 1,$$

$$\mathcal{L}\left\{y'\right\} = sY(s) - 1, \quad \mathcal{L}\left\{ty'\right\} = -\frac{d}{ds}\left(s\mathcal{L}\left\{y\right\} - y(0)\right) = -Y(s) - sY'(s)$$

などより

$$(s - s^2)Y'(s) + (1 + n - s)Y(s) = 0.$$

これを解いて $Y(s) = C\dfrac{(s-1)^n}{s^{n+1}}.$

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{-st}y(t)\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}y(t)\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}y'(t)\,dt = \frac{y(0)}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\}$$

$y'(t)$ は多項式なので $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} = 0$ となり、

$$y(0) = \lim_{s\to+\infty} sY(s) = C\frac{(s-1)^n}{s^n} = C$$

より $C = 1$ を得る $\square$