最近の研究

私はこれまで代数的サイクルに関連する諸問題を多角的かつ有機的に研究してきた．代数的サイクルとはスキーム上の既約閉部分スキームの整数係数の有限和である．この全体のなす群を有理同値で割った群はChow群と呼ばれる．Chow群の研究の歴史は長く，その重要性は代数幾何のみならず整数論においても深く認識されている．たとえば，19世紀の複素関数論の重要な研究対象であったリーマン面の因子類群や，整数論の重要な研究対象である代数体イデアル類群はChow群の一種である．以下，最近の研究を4つの項目に分けて説明するが，これらは互いに有機的に関連し合っている.

I. 高次元類体論

類体論はフェルマーとガウスの偉業を源とし 20 世紀前半に高木貞治と E. Artin により完成された整数論の礎で，大域体 (有限次代数体あるいは有限体上の一変数関数体) の最大アーベル拡大のガロア群を，その体に内在的な情報 (例えばイデアル類群) のみを用いて統制する理論である．類体論の高次元化とはこの理論を，有限生成体 (素体上高い超越次数を持つ関数体) へ拡張する理論である．これはスキーム論を用いて数論幾何学的問題として定式化される．整数環または有限体上有限型スキームを 数論的スキームと言う．これは有限生成体の幾何学化である．基本的問題は，数論的スキーム U のアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(U)$ を U に内在的な幾何学的情報を用いて記述することである (スキームのアーベル基本群とは Grothendieck による代数的基本群のアーベル化である)．1980 年代の加藤和也氏との共同研究において，代数的 K 理論を用いて上の問題へ 1 つの解答を与えることができた．最近の研究 [KeS] において，加藤-斎藤の高次元類体論を本質的に改良する新たな進展をもたらした．代数的 K 理論のかわりにモデュラス付き Chow 群を用いて $\pi_1^{ab}(U)$ を記述し，その帰結として Drinfeld-Deligne が提出した有限体上の多様体上の ℓ-進層の存在予想の部分的 (層の階数が 1 の場合) 解決を与えた．Drinfeld-Deligne の予想は 高次元類体論の非アーベル化 を与えるものである．現在，Abbes-斎藤毅の高次元分岐理論を用いて [KeS] の手法を拡張し，Drinfeld-Deligne の予想を解決する研究を進めている．以下これらについてもう少し詳しく解説する．さらに詳しい解説が [Sa] にあるので興味のある方はこちらも参照されたい．

まず Drinfeld-Deligne による有限体上の滑らかな多様体 U 上の ℓ-進層の存在予想を説明する．U 上の滑らかな ℓ-進層 $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ にたいしその semi-simplification が等しいとき同値であるとする．自然数 r にたいし階数 r の U 上の滑らかな ℓ-進層の同値類の集合を $\mathcal{S}_r(U)$ であらわす．U 上滑らかな ℓ-進層は U の代数的基本群の ℓ-進表現に同値であり，$\mathcal{S}_r(U)$ の理解は U の代数的基本群の理解につながる重要な問題である． U が 1 次元 (つまり曲線) の場合には，Lafforgue が完成した Langlands プログラム対応により $\mathcal{S}_r(U)$ は $\mathrm{GL}_r(\mathbf{A}_K)$ ($\mathbf{A}_K$ は U の関数体 K のアデール環) の保型表現により理解される．そこで $\mathcal{S}_r(U)$ の理解を 1 次元の場合に帰着できればその効用は大きい．このために骸骨層 (skeleton sheaf) を導入する．U 上の曲線の正規化全体の集合を $Cu(U)$ で表す．U 上の曲線上の ℓ-進層の系:

$$\mathcal{V} = (V_C)_{C \in Cu(U)} \quad (V_C \in \mathcal{S}_r(C))$$

で自然な整合条件 (閉点のフロベニウス作用の固有多項式たちが等しいという条件) を満たすものを U 上の骸骨層と呼び，その全体を $\mathcal{S}k_r(U)$ で表す．U 上の ℓ-進層を U 上の曲線の正規化に制限することで写像

$$\tau(U) : \mathcal{S}_r(U) \to \mathcal{S}k_r(U)$$

が生ずる．チェボタレフの密度定理により $\tau(U)$ がは単射であることがわかる．よって $\tau(U)$ の像を記述すること，つまり U 上の骸骨層がいつ U 上の ℓ-進層に貼り合うかを知ることが問題である．このために U のコンパクト化 $j : U \hookrightarrow X$ (X は固有的正規な多様体，j は開埋め込み) を固定する．U と交わらない X 上の有効カルティエ因子 D にたいし 「U 上の骸骨層 $\mathcal{V}$ の分岐が D 以下である」 という性質が分岐理論を用いて定義される．そのような骸骨層全体を $\mathcal{S}k_r(X, D)$ で表す．

予想：(Deligne) $\mathrm{Image}(\tau(U)) = \bigcup_{D\subset X} \mathcal{S}k_r(X,D) \ \subset \mathcal{S}k_r(U)$.

ここで和は U と交わらない X 上の有効カルティエ因子 D 全体をわたる.

Drinfeld は D が被約のとき $\mathcal{S}k_r(X,D) \subset \mathrm{Image}(\tau(U))$ を示した. [KeS] において次が示された.

定理 1：基礎体の標数が 2 でないとき, Deligne 予想は $r=1$ の場合に正しい.

定理 1 は, モデュラス付き Chow 群を用いて $\pi_1^{ab}(U)$ を記述する高次元類体論 (定理 2) から導かれる. X の 0 次元 Chow 群 $\mathrm{CH}_0(X)$ とは, X 上のゼロサイクル (X の閉点の整数係数の有限和) 全体の群を有理同値関係で割った群である. [KeS] において $\mathrm{CH}_0(X)$ を一般化する D **をモデュラスとする** 0 **次元** *Chow* **群** $\mathrm{CH}_0(X,D)$ が, ゼロサイクルの群をモデュラス付きの有理同値関係で割った群として定義された. これを用いて U の高次元イデール類群

$$C(U) = \varprojlim_{D} \mathrm{CH}_0(X,D)$$

が定義される. ここで逆極限は U と交わらない X 上の有効カルティエ因子 D 全体をわたる. さらに高次元相互写像

$$\rho(U) : C(U) \to \pi_1^{ab}(U)$$

が定義される. $\dim(U) = 1$ のとき $\rho(U)$ は古典的類体論における Artin の相互写像に一致する. よって次の定理は古典的類体論の高次元化である.

定理 2：([KeS]) 基礎体 k の標数が 2 でないとき, $\rho(U)$ は副有限群の同型

$$C(U)^0 \xrightarrow{\cong} \pi_1^{ab}(U)^0$$

を誘導する. ここで $C(U)^0$ は次数 0 のゼロサイクルのなす $\mathrm{CH}_0(X,D)$ の部分群の逆極限で, $\pi_1^{ab}(U)^0$ は射 $U \to \mathrm{Spec}(k)$ が誘導する写像 $\pi_1^{ab}(U) \to \pi_1^{ab}(\mathrm{Spec}(k))$ の核である.

定理 3 の証明では加藤和也と松田茂樹による高次元分岐理論 (非完全な剰余体をもつ完備離散付置体のアーベル拡大の分岐理論) が本質的な役割を果たす. 加藤-松田はそのようなアーベル拡大の暴分岐を統制する Artin 導手の理論を構成した. 定理 3 の証明の要は, これを代数的サイクルを用いて精密化する**サイクル論的** *Artin* **導手**を構成することである. A.Abbes と斎藤毅は加藤-松田の理論の非アーベル化を構築した. これを用いて定理 3 の証明の手法を改良し, サイクル論的 Artin 導手の非アーベル化を構成することにより Deligne 予想を解決するプログラムの構築を現在進めている.

これとは別に項目の (IV) で解説するモチーフの理論の一般化の枠組みにおいて定理 2 の拡張を与えることも考えている. これについては (IV) を参照されたい.

参考文献

[KeS] M. Kerz and S. Saito, *Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory*, arxiv.org/abs/1304.4400.

[Sa] 斎藤秀司, 高次元類体論の現在-非アーベル化への展望と高次元 *Hasse* 原理, 日本数学会「数学」 **88** (2014).

II. 高次元ハッセ原理とモチフィックコホモロジーの有限性

Hasse 原理とは，有理数体上の 2 次形式に対する局所大域原理 (Hasse-Minkowski の定理) が源で，これを一般化した大域体上の中心的単純環 (あるいはブラウアー群) にたいする局所大域原理は古典的類体論で重要な役割を果たす．1985 年に加藤和也はこれを高次元化する予想を提出した．数論的スキーム[1] X と自然数 a, n にたいし加藤ホモロジー $KH_a(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ (次数 a，係数 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$) が定義される (詳しい定義は [Sa, §8] を参照されたい)．加藤ホモロジーは数論的スキームの数論幾何的性質を反映する重要な不変量である．大域体上の中心的単純環にたいするの Hasse 原理は,「$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ ($\mathcal{O}_K$ は有限次代数体 K の整数環) あるいは有限体上固有的で滑らかな曲線 X にたいして $KH_1(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ である」という主張に同値である．加藤和也氏はこの事実を高次元化する次の予想を提出し，これを $\dim(X) = 2$ の場合に示した ([Ka]).

予想 1：X を有限体上固有的で滑らかな多様体，あるいは整数環上固有的で正則なスキームとすると，全ての自然数 $a, n > 0$ にたいし $KH_a(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ である.

これまでの研究で有限体上の多様体にたいする加藤予想の標数と素な部分を解決することに成功した:

定理 1：([JS1], [KeS1]) X を有限体 k 上の滑らかで固有的な多様体とする．n が k の標数と互いに素なら全ての $a > 0$ にたいし $KH_a(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ である.

以下，加藤予想についての他の進展を紹介する．最近，Thuillier が Berkovich 空間を用いて有限体上の多様体にたいする加藤予想の標数部分の証明を発表した (論文は未発表)．これにより定理 1 において「n が k の標数と互いに素」という付加的な条件が取り除かれることになる．今後はこれらの結果を用いて 整数環上のスキームにたいする加藤予想を解決することを考えている．まず Jannsen[J] の結果により問題は局所体の整数環上のスキームの場合に帰着される．有限体上の場合の証明の鍵となったのは Bertini の定理と Affine Lefschetz 定理 (体上の affine 多様体のコホモロジーの消滅定理) である．これらを局所体の整数環上のスキームに拡張し，有限体上の場合の議論を踏襲して問題を解決する．局所体の整数環上の Bertini の定理については [JS2] で応用上十分な成果が挙がっている．局所体の整数環上のスキーム X にたいする Affine Lefschetz 定理については，X の p-進消滅サイクル層の詳しい計算が必要となる．X が整数環上の半安定還元を持つ場合にはこの計算は兵頭治氏により行われており，これを用いて必要な Affine Lefschetz 定理が示される．しかし我々の目標にとっては，X が半安定還元を持たない場合にも Affine Lefschetz 定理が必要となるので兵頭氏の結果を一般化する必要がある．これについては [KSS] において研究が進められている.

高次元ハッセ原理の応用

定理 1 は様々な応用を持つ：

- モチフィックコホモロジーの有限性,
- 有限体上の多様体のゼータ関数の特殊値問題への応用,
- 高次元類体論のモチフィックコホモロジーによる高次化,

[1] 整数環または有限体上有限型スキーム

- 特異点論とくに McKay 原理 (McKay 対応の背後にある原理) への応用 ([KeS2]).

これらは [Sa] で解説されているので興味の或る方は参照されたい．以下，モチフィックコホモロジーへの応用について簡単に解説する．

モチフィックコホモロジー とは，代数多様体あるいはデデキント環上有限型なスキームにたいし定義される重要な不変量である．これは代数体の整数環のイデアル類群や単数群，代数多様体の Chow 群などを一般化した重要な研究対象である．1970 年代に Grothendieck が，さまざまなコホモロジー理論の背後に存在する普遍的コホモロジー理論としてその存在を予見していた．1980 年代に S.Bloch は，代数多様体 X の Chow 群 $\mathrm{CH}^r(X)$ を一般化する**高次 *Chow* 群** $\mathrm{CH}^r(X,q)$ を定義し[2]，

$$H^i_M(X,\mathbf{Z}(r)) = \mathrm{CH}^r(X, 2r-i)$$

とすれば，正則な X にたいしてはこれがモチフィックコホモロジーに期待される性質をもつことを示した．たとえば $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ ($\mathcal{O}_K$ は有限次代数体 K の整数環) にたいしては $H^1_M(X,\mathbf{Z}(1))$ は K の単数群，$H^2_M(X,\mathbf{Z}(1))$ は K のイデアル類群に同型である．

私が研究の対象とするのは次の予想である．

予想 2： 正則な数論的スキーム X にたいし $H^i_M(X,\mathbf{Z}(r))$ は有限生成アーベル群である．

予想 2 は，代数体のイデアル類群が有限であること (Minkowski の定理)，代数体の整数環の単数群が有限生成であること (Dirichlet の定理)，代数体上のアーベル多様体の有理点のなす群が有限生成であること (Mordell-Weil の定理) の一般化である．モチフィックコホモロジーについて国際的に活発な研究が行われてきた理由のひとつは，数論的スキームのゼータ関数の特殊値の予想 (Tate 予想，Beilinson 予想，Bloch-加藤予想) で中心的役割を果たすことにある．予想 2 はゼータ関数の特殊値予想の大きな部分を占める重要な未解決問題で，Mordell-Weil の定理と 1 次元の場合 (代数体の整数環あるいは有限体上の曲線の場合) の Quillen による結果を除いては殆ど結果は知られていなかった．定理 1 から有限体上滑らかな多様体のモチフィックコホモロジーの有限性の新たな結果が導かれる．

定理 2：X を有限体上 k 上の滑らかな多様体とする．r,n を自然数とし次を仮定する：

- $r \geq \dim(X)$,
- n が k の標数と素.

このときすべての $i \in \mathbf{Z}$ にたいし $H^i_M(X,\mathbf{Z}(r))/n$ と $H^i_M(X,\mathbf{Z}(r))[n]$ はともに有限である[3]．また $\dim(X) \leq 4$ なら n が k の標数と素という仮定は不要である．

現在進めている整数環上のスキームにたいする加藤予想の証明が成功すれば，X がが整数環上有限型な正則なスキームにたいしても上と同様なモチフィックコホモロジーの有限性定理が得られる．[KelS] では，Voevodsky のモチーフの理論を用いて定理 2 を拡張し，有限体上の (固有的とも滑らかとも限らない) スキームのモチフィックホモロジー (高次 Chow 群の一般化) の有限性定理が示されている．

[2] $\mathrm{CH}^r(X,0) = \mathrm{CH}^r(X)$ である

[3] アーベル群 M にたいし M/n と $M[n]$ は M 上の n 倍写像の余核と核を表す

参考文献

[J] U. Jannsen, *Hasse principles for higher dimensional fields*, http://arxiv.org/abs/0910.2803.

[JS1] U. Jannsen and S. Saito, Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields, http://arxiv.org/abs/0910.2815.

[JS2] U. Jannsen and S. Saito, *Bertini theorems and Lefschetz pencils over discrete valuation rings, with applications to higher class fileld theory*, J. of Algebraic Geometry **21** (2012), 683–705.

[Ka] K. Kato, *A Hasse principle for two dimensional global fields*, J. für die reine und angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[KeS1] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology of arithmetic schemes*, Publ. Math. IHES **115** (2012), 123–183.

[KeS2] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and resolution of quotient singularities*, New York J. Math. **19** (2013), 597–645.

[KelS] Kelly and S. Saito, *Weight homology of motives and motivic homology*, preprint.

[KSS] K. Kato, S. Saito and K. Sato, *P-adic vanishing cycles and p-adic 'etale Tate twists on generalized semistable families*, preprint.

[Sa] 斎藤秀司，高次元類体論の現在-非アーベル化への展望と高次元 *Hasse* 原理 , 日本数学会「数学」 **88** (2014).

III. 局所体上の Chow 群のリジッド解析幾何による研究

項目 (II) で述べたモチフィックコホモロジーの有限性予想の特別な場合として次の予想が重要である．

予想 1：(Bloch-Beilinson) X を代数体上の滑らかな射影的多様体とする．X 上の次元 r の代数的サイクルの有理同値類のなす Chow 群 $\mathrm{CH}_r(X)$ は有限生成アーベル群である．

この予想は，$r = \dim(X) - 1$ の場合は Mordell-Weil の定理から従う．それ以外に知られている結果はごく僅かである．この問題に迫るために，まず X が局所体上の多様体の場合に $\mathrm{CH}_r(X)$ の構造を調べることは自然な発想である．この場合一般には $\mathrm{CH}_r(X)$ は有限生成でないことが知られている．その一方で次の予想 (弱 Mordell-Weil 定理の類似) が重要である．

予想 2：(Colliot-Thélène) X は局所体 k 上滑らかな射影的多様体とする．自然数 $n > 0$ にたいし $\mathrm{CH}_0(X)/n$ は有限である．また $\mathrm{CH}_0(X)$ のねじれ部分 は有限である．

これまでの研究で予想 2 の前半を条件付きで解決することに成功した．

定理 1：([SS]) n が k の剰余体の標数と互いに素なら $\mathrm{CH}_0(X)/n$ は有限である．

一方 [AS] において $\mathrm{CH}_0(X)$ のねじれ部分が無限である例が構成し，予想 2 の反例を与えた．ここでは局所体上の多様体の代数的サイクルの研究に 混合 Hodge 加群の理論が本質的に用いられた．

予想 1 への応用のためには，定理 1 において n が k の剰余体の標数と互いに素という仮定を除くことが重要である．現在これにむけた新しいアプローチを展開している．基本的な構想は，高次 Chow 群の理論をリジッド解析空間にまで拡張し解析的手法を用いて問題に迫ることである．これを簡単に説明するために高次 Chow 群の定義を思い出そう．まず位相空間 X の特異ホモロジー群

$$H_q(X, \mathbb{Z}) := H_q(s(X, \bullet))$$

を復習しておこう．ここで $s(X, \bullet)$ は特異チェイン複体と呼ばれるアーベル群の複体

$$\cdots \to s(X, q) \xrightarrow{\partial} s(X, q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} s(X, 0)$$

で，その次数 q の項は

$$s(X, q) = \bigoplus_{\Gamma} \mathbb{Z}[\Gamma] \quad (\Gamma \text{ はすべての連続写像 } \Delta^q_{top} \to X \text{ をわたる})$$

で与えられる．ここで

$$\Delta^q_{top} = \Big\{(x_0, x_1, \cdots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\Big|\; \sum_{0 \leqq i \leqq q} x_i = 1,\ x_i \geqq 0\Big\}$$

は位相的特異単体で，境界写像 ∂ は Δ^q_{top} の面への制限写像の交代和である．

Bloch の高次チャウ群の定義は位相空間の特異ホモロジーの代数的類似を辿る．ここでは X は体 k 上分離的有限型なスキームとする[1]．位相的特異単体 Δ^q_{top} の代数的類

[1] Dedekind 環上有限型なスキームにたいしても定義されるが少々複雑になる．

似は

$$\Delta^q = \mathrm{Spec}\bigl(k[t_0,\cdots,t_q]/(\sum_{i=0}^{q} t_i - 1)\bigr)$$

で，$\Delta^s = \{t_{i_1} = \cdots = t_{i_{q-s}} = 0\} \subset \Delta^q$ がその面である．$s(X,q)$ の類似は $X \times \Delta^q$ 上の代数的サイクルの空間たち

$$z_r(X,q) = \bigoplus_{\Gamma \subset X \times \Delta^q} \mathbb{Z}[\Gamma]$$

である．ここで r は固定された自然数，Γ は $X \times \Delta^q$ 上の次元 $r+q$ の閉部分整スキームで，すべての面 $\Delta^s \subset \Delta^q$ と正しく交わるもの全体をわたる[2]．これから位相空間の特異チェイン複体の代数的類似である**サイクル複体**

$$z_r(X,\bullet)\ :\ \cdots \to z_r(X,q) \xrightarrow{\partial} z_r(X,q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} z_r(X,0),$$

が生じる．Bloch の高次チャウ群は，サイクル複体のホモロジー群

$$\mathrm{CH}_r(X,q) := H_q\bigl(z_r(X,\bullet)\bigr)$$

として定義される．

さて基礎体 k が局所体であるとし，実数 $\rho \geq 1$ にたいし $B(0,\rho)$ を原点を中心とする半径ρの 1 次元閉球とする．k 上のリジッド解析空間 $\mathfrak{X}$ にたいし，**半径 ρ のサイクル複体** $z_r(\mathfrak{X}/\rho,\bullet)$ が $\mathfrak{X} \times B(0,\rho)^n$ 上の解析的サイクルを用いて上と同様に定義される．$\mathfrak{X}$ **の半径 ρ の高次** *Chow* **群** $\mathrm{CH}_r(\mathfrak{X}/\rho,n)$ がこの複体の n 次ホモロジー群と定義される．また $\mathrm{CH}_r(\mathfrak{X}/\rho) = \mathrm{CH}_r(\mathfrak{X}/\rho,0)$ とおく．

すでに基本的な関手性や moving lemma に加え次の結果が示されている: X を局所体 k 上滑らかな射影的多様体とし，$\mathfrak{X} = X^{an}$ を X に付随するリジッド解析空間とする．$Z_0(X)^+$ を X 上の有効ゼロサイクル (閉点の非負整数を係数とする有限和) 全体のモノイドとする．このとき次が成り立つ．以下，p は k の剰余体の標数を表す．

- $Z_0(X)^+$ 上の擬距離 $d(\ ,\ )$ が定義され，

  $$F^\rho \mathrm{CH}_0(X) := \{[\alpha]-[\beta] \mid \alpha,\beta \in Z_0(X)^+,\ d(\alpha,\beta) \leq \rho^{-1}\}$$

  とおく ($[\alpha]$ は $\alpha \in Z_0(X)^+$ の $\mathrm{CH}_0(X)$ での類)．このとき次の同型が成り立つ．

  $$\mathrm{CH}_0(X^{an}/\rho) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}_0(X)/F^\rho\mathrm{CH}_0(X).$$

- 自然数 $n>0$ にたいし ρ を十分大きくとれば $F^\rho\mathrm{CH}_0(X) \subset p^n\mathrm{CH}_0(X)$ が成り立つ．特に $\mathrm{CH}_0(X^{an}/\rho)$ が有限なら $\mathrm{CH}_0(X)/p^n$ は有限である．

以上により，$\mathrm{CH}_0(X)/p^n$ の有限性は $\mathrm{CH}_0(X^{an}/\rho)$ の有限性に帰着されたわけである．これを示すための基本方針は以下のとおりである． 以下，$d=\dim(X)$ とする．

[2]位相空間の特異ホモロジーの類似として，スキームの射 $f:\Delta^q \to X$ のグラフを考えれば $X \times \Delta^q$ 上の代数的サイクルと見れるが，これらだけからは正しいものを生み出すことはできない．スキームの射のグラフだけでは十分でないのである．

Step1： 同型

$$\mathrm{CH}_0(X^{an}/\rho) \xrightarrow{\cong} H^{2d}(X^{an}, \mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho})$$

を示す．ここで $\mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho}$ はリジッド・モチフィック複体とよばれる X^{an} 上の許容位相に関する層の複体で，X^{an} のサイクル複体 $z_0(X^{an}/\rho, \bullet)$ を用いて定義される．この同型は，Bloch の高次 Chow 群にたいする Zariski 降下と呼ばれる性質のリジッド解析的類似である．

Step2： 同型

$$H^{2d}(X^{an}, \mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho}) \xrightarrow{\cong} H^d(X^{an}, \mathcal{K}^M_{d,X^{an}/\rho})$$

を示す．ここで $\mathcal{K}^M_{d,X^{an}/\rho}$ はミルナー K 群の層のリジッド解析版である (詳しい説明は省略)．すでに右辺のコホモロジー群の有限性がすでに示されている (この点がリジッド幾何を使う利点で，この代数的類似を示すのは非常に困難である)．この主張は $\mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho}$ のコホモロジー層にたいする次の主張から従う．

$$\mathcal{H}^n(\mathbb{Z}(d)_{X^{an}/\rho}) \cong \begin{cases} \mathcal{K}^M_{d,X^{an}/\rho} & \text{for } n = d \\ 0 & \text{for } n > d \end{cases}$$

Bloch のサイクル複体にたいしこれに対応する主張は示されている．

参考文献

[AS] M. Asakura and S. Saito, *Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles*, Algebra and Number Theory **1** (2008), 163–181.

[SS] S. Saito and K. Sato, *A finite theorem for zero-cycles over p-adic fields*, Annals of Mathematics **172** (2010), 593–639.

IV. モチーフ理論の一般化

モチーフ理論とは，モチフィックコホモロジーのコホモロジー論的定義を与えるもので，モチフィックコホモロジーをあるアーベル圏 (**モチーフの圏**と呼ばれる) における高次の拡大群として捉えることを目的とする (項目 (II) において，正則スキームにたいしては Bloch の高次 Chow 群がモチフィックコホモロジーとして期待される性質を持つと述べたが，これを定義としてはコホモロジー論的手法が適用できない)．1970 年代に Grothendieck がその構想を打ち出して以来，モチーフ理論は哲学的指導原理として多くの優れた研究を導いてきた (例えば Deligne の Weil 予想の解決や混合 Hodge 構造の理論，ゼータ関数の特殊値についての Beilinson 予想)．モチーフの圏自体の構成はいまだ未解決であるが，Voevodsky はモチーフの圏の導来圏にあたる三角圏を構成し，これが望まれた基本的性質を持つことを証明した (例えば高次 Chow 群がこの圏の射のなす群として表されることを示した)．この業績が，彼にフィールズ賞が与えられた理由のひとつとなったことからもモチーフ理論がいかに重要視されてきたかがわかる．Voevodsky が構成したモチーフの三角圏は，ホモトピー不変性を満たす層 (**ホモトピー不変層**) を基本的構成要素として用いる．ホモトピー不変性とは，もともと位相幾何で用いられる基本的概念で，Voevodsky はその代数的類似をモチーフの圏に要請した．しかしこれは Voevodsky の理論に本質的な制約を課す．例えば，代数幾何で重要な微分形式の層や代数群はホモトピー不変性を満たさない．またガロア表現では暴分岐が重要な研究対象であるが，暴分岐はホモトピー不変性を満たさない．よって Voevodsky のモチーフ理論は応用上いまだ未完成な理論であるともいえる．モチーフ理論を一般化する試みはこれまでもいくつかなされてきた (Deligne の 1-motive の Laumon による拡張，Bloch-Esnault による加法的高次 Chow 群など) が，特殊な場合に限られていた．最近の研究 [KSY] において，ホモトピー不変性層を拡張する**相互層**を新たに導入し，Voevodsky が示したホモトピー不変層にたいする基本定理を相互層にまで拡張することに成功した．現在は相互層を用いて Voevodsky のモチーフ圏を拡張する 相互モチーフの圏を構成し，さらに応用を与えることを考えている．

新たなモチーフ理論がもたらす波及効果は計り知れないと感じている．まず新たなモチフィックコホモロジーの理論が展開される．Bloch の高次 Chow 群や Bloch-Esnault の加法的高次 Chow 群の自然な一般化が生じる．私はこの一般化を **モデュラス付き高次 *Chow* 群**として定義し，その研究を [BS] において進めている．また項目 (I) で解説した [KeS] の結果を，新たなモチーフ理論において再解釈し一般化することができるはずである．実際，そこで本質的な役割を果たしたモデュラス付き 0 次 Chow 群 $\mathrm{CH}_0(X, D)$ はモデュラス付き高次 Chow 群の特別な場合である．[KeS] の主結果は**相互モチーフ理論における双対定理**のごく特別な場合として解釈できるはずで，新たなモチーフ理論の研究が進展すれば [KeS] の主結果のモチーフ論的な一般化を得ることが期待される．これは新たなモチーフ理論の暴分岐ガロア表現への応用と考えられる．また暴分岐ガロア表現が不確定特異点型 D-加群の数論的類似であることに鑑みれば，後者への応用も期待される．

参考文献

[BS] F. Binda and S. Saito, *Motivic complex with moduli and regulator maps*, preprint.

[KSY] B. Kahn, S. Saito and T. Yamazaki, *Reciprocity sheaves, I*, http://arxiv.org/abs/1402.4201.

[KeS] M. Kerz and S. Saito, *Chow group of 0-cycles with modulus and higher dimensional class field theory*, arxiv.org/abs/1304.4400.

III. リジッド解析空間の K 理論

以下，$(K, |-|)$ を完備非アルキメデス付値体とし，$K^\circ = \{x \in K | \ |x| \le 1\}$ とする．また $|\pi| < 1$ なる $\pi \in K$ を固定する．$S = \mathrm{Spec} K^\circ$ 上の有限型なスキームあるいは形式的スキーム $\mathcal{X}$ にたいしその**連続的** K**-群** を

$$K_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) = \text{“}\lim_n\text{”}\, K_i(\mathcal{X}_n) \quad (i \ge 0)$$

で定義する．ここで $\mathcal{X}_n = \mathcal{X} \otimes_{K^\circ} K^\circ/(\pi^{n+1})$ である．一般にスキーム Z にたいし $K_i(Z)$ は Quillen の高次代数的 K-群である．特に $K_0(Z)$ は Z 上のベクトル束全体の Grothendieck 群である．また “$\lim\limits_n$” は (アーベル群の) 逆系を表し，アーベル群としての逆極限は

$$\widehat{K}_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) = \varprojlim_n K_i(\mathcal{X}_n) \quad (i \ge 0)$$

で表しこれと区別する．これらの不変量に興味を持つ背景の一つとして変動的ホッジ予想がある．これを簡単に復習する．

k を標数 0 の体とし $K = k((t))$，$K^\circ = k[[t]]$ の場合を考える．$\mathcal{X}$ は $S = \mathrm{Spec} K^\circ$ 上の射影的で滑らかなスキームとし，$Y = \mathcal{X}_1$ をその特殊ファイバーとする．$K_0(Y)$ から Y のドラームコホモロジーへのチャーン特性類写像

$$\mathrm{ch} : K_0(Y)_{\mathbb{Q}} \to H_{DR}^*(Y/k) = \bigoplus_i H_{DR}^{2i}(Y/k)$$

を考える．ここで $K_0(Y)_{\mathbb{Q}} = K_0(Y) \otimes \mathbb{Q}$ である．以下よく知られた同型

$$\Phi : H_{DR}^*(\mathcal{X}/S)^{\nabla=0} \xrightarrow{\cong} H_{DR}^*(Y/k)$$

を用いる．ここで ∇ はガウス - マニン接続による変数 t についての微分である．また $F^i H_{DR}^*(\mathcal{X}/S) \subset H_{DR}^*(\mathcal{X}/S)$ はホッジフィルトレーションを表す．

Conjecture 0.1. $\xi \in K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ にたいし次は同値である．

(i) ある $\tilde{\xi} \in K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ が存在して $\mathrm{ch}(\tilde{\xi}_{|Y}) = \mathrm{ch}(\xi)$.

(ii) $\Phi^{-1}(\mathrm{ch}(\xi)) \in \bigoplus\limits_i F^i H_{DR}^{2i}(\mathcal{X}/S)$.

この予想は Grothendieck によるもので**無限小変動的ホッジ予想**とよばれる．**変動的ホッジ予想**とよばれる類似の予想も存在し，両者は本質的に同値であるがこの説明は省略する．よく知られた**ホッジ予想**は (無限小) 変動的ホッジ予想を導く．逆に (全ての) アーベル多様体にたいしての (無限小) 変動的ホッジ予想はホッジ予想と同値である．最近，無限小変動的ホッジ予想に大きな進展が為された．予想の $(i) \Rightarrow (ii)$ は自明である．予想のポイントは，条件 (ii) を用いて与えられた $\xi \in K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ の $K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ への持ち上げを構成することである．写像の分解

$$K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} \to \widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} \to K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$$

を用いてこの持ち上げのプロセスを 2 段階に分けることができる．始めの $K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ から $\widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ への持ち上げの問題を「無限小変形持ち上げ」とよび，次の $\widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ から $K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ への持ち上げを「代数化」とよぶ．Bloch-Esnault-Kerz[BEK] と Morrow[Mor] は，最初の問題をほぼ一般的な状況で解決することに成功した．

変動的ホッジ予想の「無限小変形持ち上げ」部分がほぼ解決された今，次の重要な問題は「代数化」である．つまり条件 (ii) を用いて

$$\hat{\xi} = (\xi_n)_{n\geq 0} \in \widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) = \varprojlim_n K_i(\mathcal{X}_n)$$

を $K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ に持ち上げることである．各 ξ_n が $\mathcal{X}_n$ 上の直線束の類である場合にはこの問題は Grothendieck の偉業「形式的存在定理」により肯定的に解決されている．一方，[BEK] において写像 $K_0(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} \to \widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ は一般には全射からはほど遠いことが示されている．つまり最初の $K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ から $\widehat{K}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ への段階で持ち上げを上手に選ぶ必要があるわけである．現在のところこの問題にたいする解決の糸口は見つかっていない．

この状況に触発され私は M. Kerz 氏と G. Tamme 氏との共同研究 [KST] において，$K_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})$ をリジッド幾何を用いて解析する新しい理論を構成した．以下，$p\mathbf{SSet}_*$ で基点付き単体的集合の逆系のなす圏とする．$p\mathbf{SSet}_*$ の対象 $K = (K_i)_{i\in I}$ にたいしその j 次ホモトピー群がアーベル群の逆系

$$\pi_j(K) = \text{“}\lim_i\text{”}\, \pi_j(K_i)$$

として定義される．ここで $\pi_j(K_i)$ は K_i の幾何学的実現のホモトピー群を表す．[KST] の主定理の一つは以下のとおりである．

Theorem 0.2. $\mathrm{Rig}_{/\mathrm{K}}$ を K 上の準コンパクトかつ分離的なリジッド空間の圏とすと，半共変的関手

$$KV^\flat : \mathrm{Rig}_{/\mathrm{K}} \to p\mathbf{SSet}_*$$

が存在して次の性質を持つ．X を $\mathrm{Rig}_{/\mathrm{K}}$ の対象とし，$\mathcal{X}$ を X の K° 上の形式的モデルで正則なものとする．また $Y = \mathcal{X}_1$ を $\mathcal{X}$ の特殊ファイバーとする．このとき自然なアーベル群の逆系の長完全系列が存在する．

$$\begin{aligned}\cdots \to K_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) \to KV_i^\flat(X) \to G_{i-1}(Y) \to K_{i-1}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) \to KV_{i-1}^\flat(X) \to \cdots\\ \cdots \to K_1^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) \to KV_1^\flat(X) \to G_0(Y) \to K_0^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X}) \to KV_0^\flat(X) \to 0.\end{aligned}$$

ここで $G_i(Y)$ は Y の G 群 (K 群の類似で Y 上のベクトル束の代わりに連接層の圏を用いて定義される) で，$KV_i^\flat(X) = \pi_i KV^\flat(X)$ $(i \geq 0)$ である．

簡単に言うと $KV_i^\flat(X)$ は $G_i(Y)$ の差を除いて $K_i^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})$ を記述する力を持つわけである．特に変動的ホッジ予想において重要だった $K_0^{\mathrm{cont}}(\mathcal{X})$ を理解するには $KV_0^\flat(X)$ を理解すればよいことになる．これにより変動的ホッジ予想の解決にリジッド幾何学の手法が応用できることが期待される．

参考文献

[BEK] S. Bloch, H. Esnault and M. Kerz, *Deformation of algebraic cycle classes in characteristic zero*, arxiv.org/abs/1310.1773.

[Mor] M. Morrow, *A case of the deformational Hodge conjecture via a pro Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem*, http://arxiv.org/abs/1310.1900

[KST] M. Kerz, S. Saito and G. Tamme, *K-theory of rigid analytic spaces*, in preparation.