微 分 方 程 式 2

12. 連立線形微分方程式 (3)

定数係数の場合

定数係数の場合には高階の線形微分方程式のときと同様に解を求めることができる

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

として定数係数斉次連立線形微分方程式を考える：

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A\boldsymbol{y}(t)$$

もし

$$y_1(t) = C_1 e^{\rho t}, y_2(t) = C_2 e^{\rho t}, \dots, y_n(t) = C_n e^{\rho t}$$

が解だったと仮定する

固有多項式

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} C_1\rho\, e^{\rho t} \\ C_2\rho\, e^{\rho t} \\ \vdots \\ C_n\rho\, e^{\rho t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\, e^{\rho t} \\ C_2\, e^{\rho t} \\ \vdots \\ C_n\, e^{\rho t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} C_1\, e^{\rho t} \\ C_2\, e^{\rho t} \\ \vdots \\ C_n\, e^{\rho t} \end{bmatrix}$$

$C_j \neq 0$ とすると

$$|A - \rho I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

この行列式は A の固有多項式

固有値 ρ を取れば $\boldsymbol{y}$ が解になっている。

定理

定数係数斉次連立線形微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A\boldsymbol{y}(t)$$

において ρ を A の固有値、

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

を ρ に対応する固有ベクトルとする: $A\boldsymbol{p} = \rho\,\boldsymbol{p}$.

(1) このとき, 次のベクトルは連立線形微分方程式の解になる.

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C_1\,e^{\rho t} \\ C_2\,e^{\rho t} \\ \vdots \\ C_n\,e^{\rho t} \end{bmatrix} = e^{\rho t}\boldsymbol{p}$$

定理続き

(2)　A の固有値 $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ は相異なるとする。このとき ρ_j に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_j$ とする： $A\boldsymbol{p}_j = \rho_j \boldsymbol{p}_j$. このとき

$$e^{\rho_1 t}\boldsymbol{p}_1, e^{\rho_2 t}\boldsymbol{p}_2, ..., e^{\rho_n t}\boldsymbol{p}_n$$

は連立線形微分方程式の基本解になる

解説　この基本解から作られる行列の行列式は

$$\left| e^{\rho_1 t}\boldsymbol{p}_1 \ e^{\rho_2 t}\boldsymbol{p}_2 \ \cdots \ e^{\rho_n t}\boldsymbol{p}_n \right| = e^{(\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_n)t} \left| \boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n \right|$$

となるが「相異なる固有値の固有ベクトルは一次独立」という線型代数の定理より

$$\left| \boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n \right| \neq 0$$

となるので

$$e^{\rho_1 t}\boldsymbol{p}_1, e^{\rho_2 t}\boldsymbol{p}_2, ..., e^{\rho_n t}\boldsymbol{p}_n$$

は一次独立となって, 基本解になっている　□

固有値が複素数の場合

a_{jk} はすべて実数とする。

(1) 固有値 ρ が実数ならば固有ベクトルも実数なので実数解を得る

(2) ρ を実行列 A の固有値で虚数とする。複素共役 $\bar{\rho}$ も A の固有値であり

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \vdots \\ \bar{C}_n \end{bmatrix}$$

が $\bar{\rho}$ に対応する固有ベクトルになる: $A\bar{\boldsymbol{p}} = \bar{\rho}\,\bar{\boldsymbol{p}}$.
このとき $e^{\rho t}\boldsymbol{p}$, $e^{\bar{\rho}t}\bar{\boldsymbol{p}}$ は解になるが複素ベクトルである。
一次結合を取ることで、二つの実数値解を得る：

$$\frac{1}{2}\left(e^{\rho t}\boldsymbol{p} + e^{\bar{\rho}t}\bar{\boldsymbol{p}}\right), \quad \frac{1}{2i}\left(e^{\rho t}\boldsymbol{p} - e^{\bar{\rho}t}\bar{\boldsymbol{p}}\right)$$

問題

ρ を実行列 A の虚数固有値、対応する固有ベクトルを

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

とおく。

$$\rho = \mu + i\,\nu, \quad C_j = \alpha_j + i\,\beta_j \ (j = 1, ..., n)$$

と実部と虚部に分解したとき

$$\frac{1}{2}\left(e^{\rho t}\boldsymbol{p} + e^{\bar{\rho} t}\bar{\boldsymbol{p}}\right), \quad \frac{1}{2i}\left(e^{\rho t}\boldsymbol{p} - e^{\bar{\rho} t}\bar{\boldsymbol{p}}\right)$$

を $\mu, \nu, \alpha_j, \beta_j$ を用いて書け。さらに $e^{\rho t}\boldsymbol{p}$ の実部と虚部になっていることを確認せよ。

重解の時

ρ を固有多項式の m 重解とする．この ρ に対して

$$\boldsymbol{y}_k = e^{\rho t}\begin{bmatrix} P_{1k}(t) \\ P_{2k}(t) \\ \vdots \\ P_{nk}(t) \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, ..., m-1)$$

の形の互に一次独立な解が存在する。ここで $P_{jk}(t)$ は k 次の多項式である。特に $P_{10}(t), P_{20}(t), \cdots, P_{n0}(t)$ は定数である。

（証明は省略）

問題

$$y' = y + 2z, \quad z' = -y + 4z$$

解　係数行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

の固有値は 2,3. 対応する固有ベクトルの一つは、それぞれ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となるので一般解は

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

基本解行列の形で書くと $\begin{bmatrix} 2e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix}$.

$$y' = y + z, \quad z' = -y + z.$$

解　係数行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値は $1 \pm i$. 対応する固有ベクトルの一つは複号同順で $\begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$. したがって、次のベクトルが解になる：

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} \\ ie^{(1+i)t} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} e^{(1-i)t} \\ -ie^{(1-i)t} \end{bmatrix}.$$

実数値解として $\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2), \frac{1}{2i}(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)$ をとると一般解は

$$\boldsymbol{y} = C_1 \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ -e^t \sin t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix}.$$

$$y' = 3y - z, \quad z' = y + z.$$

解　係数行列 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値は 2（重解）. 対応する固有ベクトルの一つは、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ なので $\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$ が解になる。

もう一つの解は $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(A_1 + A_2 t) \\ e^{2t}(B_1 + B_2 t) \end{bmatrix}$ とおいて代入すると

$$e^{2t}(2A_1 + 2A_2 t + A_2) = e^{2t}(3A_1 + 3A_2 t - B_1 - B_2 t),$$
$$e^{2t}(2B_1 + 2B_2 t + B_2) = e^{2t}(A_1 + A_2 t + B_1 + B_2 t).$$

係数比較して

$$2A_1 + A_2 = 3A_1 - B_1,\ 2A_2 = 3A_2 - B_2,$$

$$2B_1 + B_2 = A_1 + B_1,\ 2B_2 = A_2 + B_2$$

続き

$$2A_1 + A_2 = 3A_1 - B_1,\ 2A_2 = 3A_2 - B_2,$$

$$2B_1 + B_2 = A_1 + B_1,\ 2B_2 = A_2 + B_2$$

第二式、第四式より $A_2 = B_2$, 第一式、第三式に代入して $A_1 = A_2 + B_1$.
たとえば $A_2 = B_2 = 1$ とすると $A_1 = 1 + B_1$ なので $A_1 = 1, B_1 = 0$ が解。よって

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(1+t) \\ e^{2t}t \end{bmatrix}$$

が解の一つになる。一般解は

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{2t}(1+t) \\ e^{2t}t \end{bmatrix}.$$

問題

(1) $y' = 2y - z,\ z' = 3y - 2z$

(2) $y' = y - 2z,\ z' = y + 3z$

(3) $y' = z,\ z' = -y + 2z$

(4) $y' = 2y + z + e^t,\ z' = 2y + 3z + 5e^t$

(5) $y' = z + w,\ z' = y + w,\ w' = y + z$

連立高階線形微分方程式

$f_{ij}(t)$ $(i.j = 1.\cdots .n)$ は定数を係数とする t の多項式
n 個の未知関数 $x_1, .., x_n$ に関する連立線形常微分方程式を考える:

$$
\begin{aligned}
f_{11}(D)x_1 + f_{12}(D)x_2 + \cdots + f_{1n}(D)x_n &= F_1(t), \\
f_{21}(D)x_1 + f_{22}(D)x_2 + \cdots + f_{2n}(D)x_n &= F_2(t), \\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{n1}(D)x_1 + f_{n2}(D)x_2 + \cdots + f_{nn}(D)x_n &= F_n(t).
\end{aligned}
$$

行列式

$$
\Delta(D) = \begin{vmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) & \ldots & f_{1n}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) & \ldots & f_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(D) & f_{n2}(D) & \ldots & f_{nn}(D) \end{vmatrix}
$$

を通常の行列式と同じように作る

クラメルの公式の一般化

クラメルの公式と全く同じ事をするが割り算ができないので

$$\Delta(D)x_1 = \begin{vmatrix} F_1(t) & f_{12}(D) & \ldots & f_{1n}(D) \\ F_2(t) & f_{22}(D) & \ldots & f_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n(t) & f_{n2}(D) & \ldots & f_{nn}(D) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(D)x_2 = \begin{vmatrix} f_{11}(D) & F_1(t) & \ldots & f_{1n}(D) \\ f_{21}(D) & F_2(t) & \ldots & f_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(D) & F_n(t) & \ldots & f_{nn}(D) \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta(D)x_n = \begin{vmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) & \ldots & F_1(t) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) & \ldots & F_2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(D) & f_{n2}(D) & \ldots & F_n(t) \end{vmatrix}.$$

ただし、関数と微分作用素の積は微分作用素を関数に作用させる

解き方

1. $\Delta(D)$ が D を含むときは単独線型方程式として既知の方法で解くことで、$x_1, x_2, ..., x_n$ を求めることができる.

この場合には $x_1, x_2, ..., x_n$ に含まれる任意定数は互いに独立でないことがあるから，得られた $x_1, x_2, ..., x_n$ をもとの微分方程式に代入してから相互の関係を求め，余分の任意定数を消去しておかなければならない.

II. $\Delta(D)$ が D を含まない 0 でない定数ならば，積分することなく $x_1, x_2, ..., x_n$ を求めることができる.

III. $\Delta(D) = 0$ ならば，右辺もすべて $= 0$ のときには任意の関数 $x_1, x_2, ..., x_n$ が解である. もし，右辺の少なくとも 1 つが $\neq 0$ ならば解をもたない.

例題

$$\begin{aligned} Dx - (2D-3)y &= 0, \\ (D-4)x - \qquad\qquad 3y &= 0. \end{aligned}$$

答え

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D & -(2D-3) \\ D-4 & -3 \end{vmatrix} = 2(D-1)(D-6)$$

だから $2(D-1)(D-6)x = 0, \quad 2(D-1)(D-6)y = 0.$ よって

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{6t}, \quad y = d_1 e^t + d_2 e^{6t}$$

これらをもとの方程式へ代入すると,

$$(c_1 + d_1)e^t + 3(2c_2 - 3d_2)e^{6t} = 0, \quad 3(c_1 + d_1)e^t - (2c_2 - 3d_2)e^{6t} = 0.$$

これらが恒等的に成立するためには

$$c_1 + d_1 = 0, \quad 2c_2 - 3d_2 = 0$$

よって

$$c_1 + d_1 = 0, \quad 2c_2 - 3d_2 = 0$$

をといて

$$d_1 = -c_1, \quad d_2 = \frac{2}{3}c_2$$

求める解は

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{6t}$$
$$y = -c_1 e^t + \frac{2}{3}c_2 e^{6t}$$

例題

$$Dx + 2y = \cos t,$$
$$x - Dy = \sin t.$$

答え

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D & 2 \\ 1 & -D \end{vmatrix} = -(D^2+2)$$

だから

$$-(D^2+2)x = \begin{vmatrix} \cos t & 2 \\ \sin t & -D \end{vmatrix} = -\sin t.$$

よって

$$(D^2+2)x = \sin t$$

この方程式をといて

$$x = c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t + \sin t.$$

そこで

$$x = c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t + \sin t.$$

をもとの方程式の第一式へ代入すると,

$$y = \frac{1}{2}(\cos t - Dx) = \frac{\sqrt{2}}{2}(c_1 \sin\sqrt{2}t - c_2 \cos\sqrt{2}t)$$

よって，求める一般解は

$$x = c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t + \sin t,$$
$$y = \frac{1}{2}(\cos t - Dx) = \frac{\sqrt{2}}{2}(c_1 \sin\sqrt{2}t - c_2 \cos\sqrt{2}t)$$

問題

(1)

$$\begin{aligned}(D^2+2)x + Dy + Dz &= 0,\\ Dx + \quad y \qquad\quad &= 0,\\ 2x - Dy - Dz &= 0.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(D+1)x + (D^2+D+1)y &= 0,\\ Dx + \qquad (D^2+1)y &= 0.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(D^2-2)x + \qquad\qquad Dy &= \cos t,\\ Dx + (D^2-2)y &= e^t \sin t.\end{aligned}$$