微 分 方 程 式

6. 高階常微分方程式

1．階数降下法

逐次積分

(I) $y^{(n)} = f(x)$.
一回積分して

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + c_1'$$

さらに積分を繰り返すと**一般解**：

$$y = \int dx \int dx \cdots \int f(x)\,dx + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n$$

初期条件

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

が与えられているとき一回積分して

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0^{(n-1)}$$

積分を繰り返すと求める解は

$$
\begin{aligned}
y(x) \;&=\; \int_{x_0}^{x} dt_n \int_{x_0}^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_{x_0}^{t_2} f(t_1)\,dt_1 \\
&\quad + y_0^{(n-1)} \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + y_0^{(n-2)} \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + y_0' \frac{x-x_0}{1!} + y_0
\end{aligned}
$$

補題（演習とする）$n = 1, 2, 3, \ldots$ のとき

$$
\int_{x_0}^{x} dt_n \int_{x_0}^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_{x_0}^{t_2} f(t_1)\,dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt
$$

$y, y', ..., y^{(m-1)}$ を含まない微分方程式

(II) $F(x, y^{(m)}, ..., y^{(n)}) = 0$ $(n > m \geqq 1)$ のときは $p = y^{(m)}$ とおく.

$$F(x, p, ..., p^{(n-m)}) = 0$$

となり, $n - m$ 階常微分方程式が得られる. これを解いて一般解 $p = f(x, c_1, ..., c_{n-m})$ が求められた後、(I) の方法により m 回積分すればよい.

例 $F(x, y', y'') = 0$ と y を含まない2階方程式は $p = y'$ とおいて

$$F(x, p, p') = 0$$

とすれば1階になるので今まで習った求積法が使えるかもしれない

x を含まない微分方程式

$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ に対して $p = y'$ とおくと

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx} = \left[\frac{d^2p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right]p$$

より

$$\begin{aligned} &F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \\ &= F\left(y, p, \frac{dp}{dy}p, \left[\frac{d^2p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right]p, \dots\right) \\ &= G(y, p, p', y'', \dots, p^{(n-1)}) \end{aligned}$$

となり，**階数が 1 だけ下がった微分方程式**となる．

同次形

$$f(x, \lambda y, \lambda y', ..., \lambda y^{(n)}) = \lambda^\alpha f(x, y, y', ..., y^{(n)})$$

のときは、 $y = e^u$ とおくと

$$y' = e^u u',\ y'' = e^u(u'' + (u')^2)$$

だから

$$f(x, e^u, e^u u', e^u(u'' + (u')^2), ...) = e^{\alpha u} f(x, 1, u', (u'' + (u')^2), ...)$$

となり, $u' = v$ とおくことにより, 階数を 1 だけ下げることができる

同次形 2

$$f(\lambda x, y, \frac{1}{\lambda}y', \frac{1}{\lambda^2}y'', \dots, \frac{1}{\lambda^n}y^{(n)}) = \lambda^\alpha f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

のときは、 $x = e^t$ とおくと, $t = \log x$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \dots$$

だから

$$\begin{aligned} f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &= f(e^t, y, e^{-t}\frac{dy}{dt}, e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \dots) \\ &= e^{\alpha t} f(1, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}, \dots) \end{aligned}$$

となり, 独立変数 t を含まない形になるので, 階数を 1 だけ下げることができる

同次形 3

$$f(\lambda x, \lambda^\beta y, \lambda^{\beta-1}y', \lambda^{\beta-2}y'', \ldots, \lambda^{\beta-n}y^{(n)}) = \lambda^\beta f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

のときは、 $x = e^t$, $y = e^{\beta t}u$ とおくと, $t = \log x$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}(e^{\beta t}u) = e^{(\beta-1)t}\left(\frac{du}{dt} + \beta u\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{(\beta-2)t}\left(\frac{d^2u}{dt^2} + (2\beta-1)\frac{du}{dt} + \beta(\beta-1)u\right)$$

だから

$$\begin{aligned}
& f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) \\
&= f\left(e^t, e^{\beta t}u, e^{(\beta-1)t}\left(\frac{du}{dt} + \beta u\right), e^{(\beta-2)t}\left(\frac{d^2u}{dt^2} + (2\beta-1)\frac{du}{dt} + \beta(\beta-1)u\right), \ldots\right) \\
&= e^{\beta t} f\left(1, u, \frac{du}{dt} + \beta u, \frac{d^2u}{dt^2} + (2\beta-1)\frac{du}{dt} + \beta(\beta-1)u, \ldots\right)
\end{aligned}$$

となり, 独立変数 t を含まない形になるので, 階数を 1 だけ下げることができる

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = \frac{d}{dx}g(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

のとき

$$g(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = C$$

となって階数を下げることができる.

その他の解法

(1) $y'' = f(y)$ のとき.

両辺に $2y'$ を掛けると $2y''y' = 2f(y)y'$. x について積分すると

$$(y')^2 = 2\int f(y)y'\,dx + c_1 = 2\int f(y)dy + c_1$$

より

$$y' = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + c_1}$$

と**変数分離形**になるので一般解は

$$\pm\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + c_1}} = x + c_2$$

その他の解法2

(2) $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$ のときは $u = y^{(n-1)}$ とおいて一階方程式 $u' = f(u)$ になる。

(3) $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$ のときは $u = y^{(n-2)}$ とおいて2階方程式 $u'' = f(u)$ になるので両辺に $2u'$ をかけて積分すればよい

演習問題

1. つぎの微分方程式を解け.

(1) $y'' = \dfrac{1}{x^2},\ y(1) = 0, y'(1) = 0\ (x > 0)$

2回積分すると

$$y' = -\frac{1}{x} + c_1, y = -\log x + c_1 x + c_2.$$

初期条件より $-1 + c_1 = 0,\ c_1 + c_2 = 0.$ よって

$$y = -\log x + x - 1.$$

(2) $y'' = \dfrac{x}{1-x^2}y' + \dfrac{1}{1-x^2}$

$u = y'$ とおくと一階線形になる

(3) $yy'' + (y')^2 = 1$

[完全微分] $(yy')' = yy'' + (y')^2$ に注意して積分すると $yy' = x + c_1$. 2 倍すると $(y^2)' = 2yy' = 2x + 2c_1$. もう一度積分すると

$$y^2 = x^2 + 2c_1 x + c_2.$$

(4) $\sqrt{y}y'' = 1.$

[その他(1)] 両辺に $2y'/\sqrt{y}$ を掛けると $2y'y'' = \dfrac{2y'}{\sqrt{y}}.$

書き直して $((y')^2)' = 4(\sqrt{y})'.$ 積分すると

$$(y')^2 = 4\sqrt{y} + 4c_1$$

となって変数分離型 $y' = \pm 2(\sqrt{y} + c_1)^{1/2}$ になるので

$$\int \frac{dy}{(\sqrt{y} + c_1)^{1/2}} = \pm(x + c_2)$$

左辺の積分は

$$\frac{4}{3}(\sqrt{y} + c_1)^{1/2}(\sqrt{y} - 2c_1) = \pm(x + c_2)$$

答: $(\sqrt{y} + c_1)(\sqrt{y} - 2c_1)^2 = \dfrac{9}{4}(x + c_2)^2$

(5) $yy'' - (y')^2 - xy^2 = 0.$

[同次形] $y = e^u$ とおいて $y' = e^u u',\ y'' = e^u(u'' + (u')^2)$ を代入

$$e^{2u}[u'' + (u')^2] - e^{2u}(u')^2 - xe^{2u} = 0.$$

よって $u'' - x = 0.$
2 回積分すると

$$u = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

より

$$y = \exp\left(\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\right)$$

問 つぎの微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' = 2x,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2.$

(2) $xy'' + y' = x^2$

(3) $xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}$

(4) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0.$

(5) $yy'' - (y')^2 = 4y^2 \log y.$

(6) $xyy'' + x(y')^2 + yy' = 0.$

(7) $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{2y(y')^2}{y^2 + 1} = 0.$

(8) $xyy'' + yy' + (1 - y^2)x(y')^2 = 0.$