ベクトル解析

11. ガウスの定理

グリーンの定理の別証

定理　D を xy 平面の有界な領域で, その境界 C は互いに交わらない有限個の区分的に C^1 級の単一閉曲線からなっているとする. そのとき D を含む開集合 で C^1 級の関数 $f(x,y), g(x,y)$ に対して

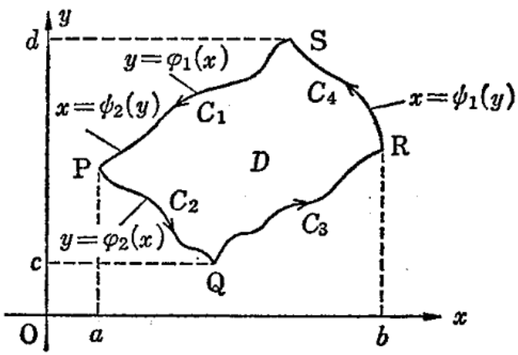
$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \int_C f\,dx + g\,dy$$

が成り立つ. ここで, C には D に対して正の向き をつけておく.

別証明

領域 D を座標軸に平行な直線で分割すれば, D として図のような形の領域と仮定して証明すれば十分である.
弧 RSP, PQR,QRS,SPQ の方程式をそれぞれ以下のように取る

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad x = \psi_1(y), \quad x = \psi_2(y)$$



重積分を求めると

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \right\} dx$$
$$= \int_a^b \{f(x,y)\}_{y=\varphi_2(x)}^{y=\varphi_1(x)}\,dx$$
$$= \int_a^b \left(f(x,\varphi_1(x)) - f(x,\varphi_2(x))\right)\,dx$$
$$= \int_{C_1+C_4} f\,dx - \int_{C_2+C_3} f\,dx = -\int_C f\,dx$$

同様にして

$$\iint_D \frac{\partial g}{\partial x}\,dxdy = \int_C g\,dx.$$

以上よりグリーンの定理を得る：

$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dxdy = \int_C f\,dx + g\,dy$$

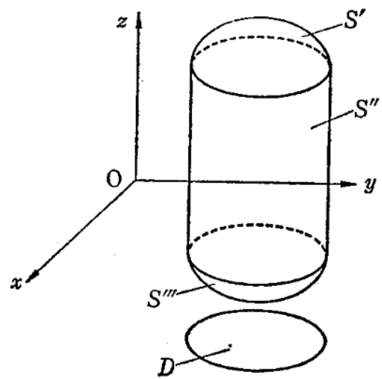
ガウスの定理

法線面積分と体積積分との間の関係がガウスの定理 である

縦線集合: C^1 級の 2 変数関数 $z=\psi(x,y), z=\phi(x,y)$ が有界閉集合 D (境界は有限個の C^1 級の単純閉曲線からなる) を含む開集合の上で $\phi(x,y) \leqq \psi(x,y)$ とする。
このとき

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y) \in D,\ \phi(x,y) \leqq z \leqq \psi(x,y) \right\}$$

で与えられる空間の閉領域 Ω を縦線集合という.



Gauss の発散定理

空間の閉領域 V がどの座標面についても Ω と同じ型の有限個の縦線集合に分割され, V の表面 S は区分的に滑らかな閉曲面であるとする. ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ は V を含む開集合で C^1 級とする.
$\boldsymbol{n}$ を S 上の V に対して外向きを正の向きにもつ単位法線ベクトルとすると

$$\iint_S \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dxdydz$$

証明

まずベクトル場 $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} = (0, 0, a(x, y, z))$ と仮定する.
仮定より V を前のページの Ω として証明すれば十分である.
S は D を底とする柱面の内部にあり, 柱面に接し, かつ 3 つの 部分 S', S'', S''' に分けられる
S', S''' の方程式をそれぞれ

$$S' :\ z = \psi(x, y), \quad S''' :\ z = \varphi(x, y) \quad (x, y) \in D$$

とする

$\boldsymbol{a} = (0, 0, a(x, y, z))$ より

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, dxdydz &= \iiint_V \frac{\partial a}{\partial z} \, dxdydz \\
&= \iint_D \left\{ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial a}{\partial z} \, dz \right\} dxdy \\
&= \iint_D \{a(x, y, \psi(x, y)) - a(x, y, \varphi(x, y))\} \, dxdy
\end{aligned}
$$

1) S' : $f(x,y,z)=z-\psi(x,y)=0$ 上では,
S' 上の正の向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の z 成分は正より

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+(\psi_x)^2+(\psi_y)^2}}\left(-\psi_x,-\psi_y,1\right)$$

2) S''' : $f(x,y,z)=\varphi(x,y)-z=0$ 上では,
正の向きの単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の z 成分は負より

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2}}\left(\varphi_x,\varphi_y,-1\right)$$

3) S'' 上での外向きの単位法線は z 軸と直交するので $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$
4) 以上によって

$$a_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=\begin{cases} a(x,y,z)\frac{1}{\sqrt{1+(\psi_x)^2+(\psi_y)^2}} & (S'\text{上で}) \\ 0 & (S''\text{上で}) \\ -a(x,y,z)\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi_x)^2+(\varphi_y)^2}} & (S'''\text{上で}) \end{cases}$$

面積分を各面ごとに考えよう：

$$\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{S'} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS + \iint_{S''} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS + \iint_{S'''} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS$$

S' : $f(x,y,z) = z - \psi(x,y) = 0$ 上では,

$$dS = \sqrt{1 + (\psi_x)^2 + (\psi_y)^2}\,dxdy$$

S''' : $f(x,y,z) = \varphi(x,y) - z = 0$ 上では,

$$dS = \sqrt{1 + (\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2}\,dxdy$$

より

$$\iint_{S'} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS = \quad \iint_D a(x,y,\psi(x,y))\,dxdy,$$

$$\iint_{S''} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS = 0,$$

$$\iint_{S'''} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS = -\iint_D a(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy.$$

以上のことから

$$\iint_S \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_D a(x,y,\psi(x,y))\, dxdy - \iint_D a(x,y,\varphi(x,y))\, dxdy.$$

他方で

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dxdydz = \iint_D \{a(x,y,\psi(x,y)) - a(x,y,\varphi(x,y))\}\, dxdy$$

だったので

$$\iint_S \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dxdydz.$$

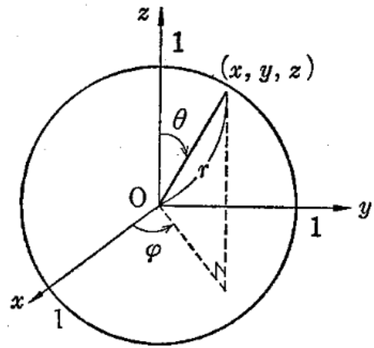
同様にして $\boldsymbol{a} = (a(x,y,z),0,0)$, $\boldsymbol{a} = (0,a(x,y,z),0)$ の場合も証明できる．ゆえにガウスの定理は証明された． $\square$

ガウスの発散定理を使えば，閉曲面上の面積分がそれで囲まれる領域上の体積積分に変形できる．ガウスの定理，ストークスの定理は微分形式を使用すれば統一的な形に記述できる．

これらは高次元にも拡張できる

例題

$\boldsymbol{a} = (x^3, 0, 3z^2)$, S を単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ とする. ガウスの発散定理を用いて, 法線面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{a_n}\, dS$ を求めよ.



極座標

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$$

$$(0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

[解]

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 3x^2 + 6z$. V を球の内部とするとガウスの定理より

$$\iint_S \boldsymbol{a_n}\,dS = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,dxdydz$$
$$= \iiint_V (3x^2 + 6z)\,dxdydz$$

極座標

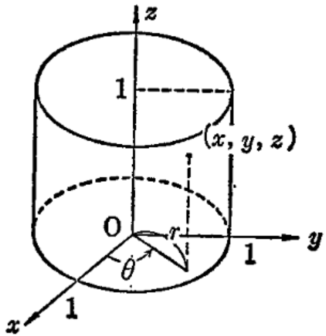
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$$
$$(0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で変数変換すれば

$$\iiint_V (3x^2 + 6z)\,dxdydz$$
$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [3(r\sin\theta\cos\varphi)^2 + 6r\cos\theta]\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$= \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\pi$$

例題

$\boldsymbol{a} = (x^3, 0, 3z^2)$, S を円柱 $x^2 + y^2 \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1$ の表面とする．法線面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\, dS$ を求めよ．



円柱座標

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

$$(0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

[解]

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 3x^2 + 6z$ であるから, V は円柱の内部とするとガウスの定理より

$$\iint_S \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\, dxdydz$$
$$= \iiint_V (3x^2 + 6z)\, dxdydz$$

円柱座標

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z \quad (0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で変数変換すれば

$$\iiint_V (3x^2 + 6z)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [3(r\cos\theta)^2 + 6z]\, r\, drd\theta dz$$
$$= \boldsymbol{\frac{15}{4}}\pi$$

問題

1. 閉曲面 S における法線面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{a_n}\,dS$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = (x^2, y^2, z^2)$, S: 立方体 $0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1$ の 表面

(2) $\boldsymbol{a} = (e^x, -ye^x, 3z)$, S: 円柱 $x^2 + y^2 \leqq 4, 0 \leqq z \leqq 3$ の表面

(3) $\boldsymbol{a} = (2x^3, 2y^3, 2z^3)$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2$

2. 閉曲線 C に対して次の等式が成り立つことを証明せよ. ただし $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル, f, g はスカラー場とする.

(1) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ (2) $\displaystyle\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$

3. S を閉曲面, f をスカラー場とするとき, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $\displaystyle\iint_S \nabla f \times \boldsymbol{n} dS = 0$ (2) $\displaystyle\iint_S f\nabla f \times \boldsymbol{n} dS = 0$

4. S が閉曲面で囲まれる領域 V に対して次の等式を証明せよ.

$$\iint_S |\boldsymbol{r}|^n \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} dS = (n+3) \iiint_V |\boldsymbol{r}|^n dxdydz$$

(n は負でない整数)

(1) 発散定理より

$$\iint_S \boldsymbol{a}_n dS = \iiint_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a} = 2x + 2y + 2z = 2(x+y+z)$$

$$\therefore\ 与式 = 2\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)\, dz = 2\times 3\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\, dx\, dy\, dz = 2\times 3\times \frac{1}{2}\times 1\times 1 = 3$$

(2) $\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} = e^z - e^z + 3 = 3$

$$\therefore\ \iint_S \boldsymbol{a}_n dS = \iiint_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz = 3\iiint_V dx\, dy\, dz = 3\times(3\times\pi\times 2^2) = 36\pi$$