# 微 分 方 程 式 2

## 6. デルタ関数

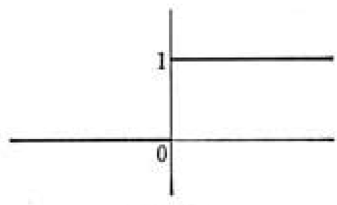
# ヘビサイド関数



定義　次の関数

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

をヘビサイド関数 (単位階段関数) という．




ヘビサイド関数のラプラス変換：

$$\mathcal{L}\{Y(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \mathbf{\frac{1}{s}}$$

$a \geqq 0$ に対して $Y(t-a)$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{Y(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st} Y(t-a)\,dt \\
&= \int_0^a e^{-st}\cdot 0\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt \\
&= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^\infty = \mathbf{\frac{e^{-as}}{s}}
\end{aligned}$$

# 原関数の移動性



定理　$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ とする。$a \geqq 0$ のとき

$$\mathcal{L}\{f(t-a)Y(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

証明

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)Y(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)Y(t-a)\,dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\,d\tau \quad (\tau = t-a) \\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau = e^{-as}F(s).
\end{aligned}$$

## 例題

次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $Y(t-a)\cos\omega(t-a)$, (2) $Y(t-a)(t-a)^2$

略解 (1)

$$\mathcal{L}\left\{Y(t-a)\cos\omega(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{\cos\omega t\right\} = \frac{e^{-as}s}{s^2+\omega^2}$$

(2)

$$\mathcal{L}\left\{Y(t-a)(t-a)^2\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2e^{-as}}{s^3}$$

問題 次の関数のラプラス変換を求めよ.

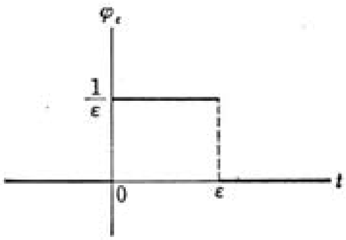
(1) $Y(t-a)(t-a)$, (2) $Y(t-a)\sin\omega(t-a)$

# デルタ関数



ヘビサイド関数の「微分」を考える：

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{Y(t) - Y(t-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$$




しかし、$\varepsilon \to 0$ の極限は $t = 0$ では考えられない

## $\varepsilon \longrightarrow 0$ の極限



### $\varphi_\varepsilon(t)$ の性質

1. 積分すると 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(t)\,dt = 1.$$

2. 連続関数 $f(t)$ との組み合わせ極限

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\varepsilon(t)\,dt = \int_0^{\varepsilon} f(t)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(t)\,dt \to f(0).$$

そこで $\varepsilon \to 0$ の極限 デルタ関数

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(t)$$

を形式的に考え、次の性質を満たす「関数」と考える

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0).$$

# デルタ関数の性質



1. 基本的性質

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0).$$

1.5 $f(x)$ を連続関数として

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a).$$

2. $a > 0$ として

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

3. ヘビサイド関数の形式的導関数

$$\delta(t) = Y'(t), \quad Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt$$

# 形式的計算



前のページの性質を利用して形式的な計算を行う

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d}{dt}Y(t-a)\,dt \\
&= [f(t)Y(t-a)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)Y(t-a)\,dt \\
&= f(\infty) - \int_{a}^{\infty} f'(t)\,dt = f(\infty) - [f(t)]_{a}^{\infty} \\
&= f(\infty) - (f(\infty) - f(a)) = f(a).
\end{aligned}
$$

# 極限がデルタ関数になりうる関数



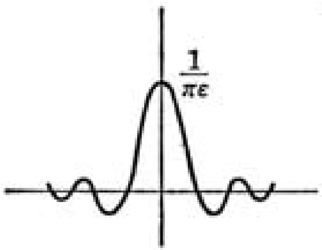
次の関数の $(-\infty, +\infty)$ における積分を計算せよ $(\varepsilon > 0)$.

1) $\dfrac{\sin(t/\varepsilon)}{\pi t}$.

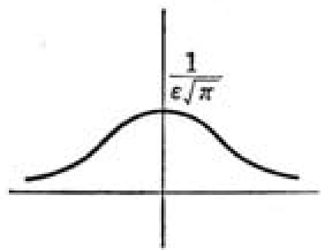
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t/\varepsilon)}{\pi t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

2) $\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-t^2/\varepsilon^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-t^2/\varepsilon^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau = 1.$$




(1)




(2)

# 周期関数のラプラス変換



$f(t)$ は $0 < t < \infty$ で区分的に連続とする

以下、$f(t)$ は周期 $\omega > 0$ の周期関数、すなわち

$$f(t+\omega) = f(t)$$

定理

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-\omega s}} \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)\, dt \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

証明

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} e^{-st} f(t)\, dt$$

において, $f(t)$ の周期性を用いると

$$\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{\omega} e^{-s(\tau+n\omega)} f(\tau+n\omega)\, d\tau = e^{-n\omega s} \int_0^{\omega} e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

# 証明続き



$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} e^{-st} f(t)\,dt = e^{-n\omega s} \int_{0}^{\omega} e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau.$$

$\mathrm{Re}\,s > 0$ のときは $|e^{-n\omega s}| = e^{-\omega \mathrm{Re}\,s} < 1$ であるから等比数列の和の公式より

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\omega s} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\omega s}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\omega s}}$$

したがって

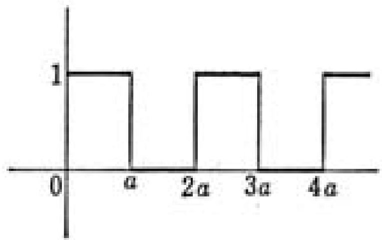
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\omega s} \int_{0}^{\omega} e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{1 - e^{-\omega s}} \int_{0}^{\omega} e^{-st} f(t)\,dt.$$

# 例題



次の関数のラプラス変換を求めよ. $a > 0,\ n = 0, 1, 2, \dots$ とする.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (2na < t < (2n+1)a) \\ 0 & ((2n+1)a < t < (2n+2)a) \end{cases}$$




グラフより $f(t)$ は周期 $2a$ の周期関数。定理より

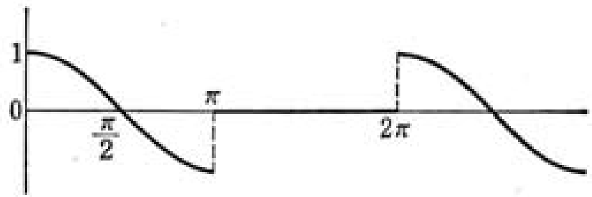
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{a} e^{-st} \cdot 1\,dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2as}} \frac{1}{s}(1-e^{-as}) = \frac{1}{s(1+e^{-as})}. \end{aligned}$$

# 例題



次の関数のラプラス変換を求めよ. $a > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする.

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & (2n\pi < t < (2n+1)\pi) \\ 0 & ((2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi) \end{cases}$$




グラフより $f(t)$ は周期 $2\pi$ の周期関数。定理より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \cos t\, dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \frac{s}{s^2+1} (1+e^{-\pi s}) = \frac{s}{(s^2+1)(1+e^{-\pi s})}. \end{aligned}$$

# 問題



次の関数のラプラス変換を求めよ．$a > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする．

(1)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (2na < t < (2n+1)a) \\ -1 & ((2n+1)a < t < (2n+2)a) \end{cases}$$

(2)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & (2n\pi < t < (2n+1)\pi) \\ 0 & ((2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi) \end{cases}$$