微分方程式

3. 一階線形微分方程式

1. 一階線形微分方程式

正規形（$y' = \dots$ の形）の 1 階常微分方程式

$$y' = F(x, y)$$

において、右辺が y の一次式のもの、すなわち

$$y' = a(x)y + b(x)$$

のときに一階線形微分方程式という

以下

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の形で考える。

$Q(x) = 0$ のとき **1** 階斉次常微分方程式といい、$Q(x) \neq 0$ のとき非斉次という。

2. 一階線形微分方程式の解き方

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の解を求める。まず $Q(x) \equiv 0$ の場合,

変数分離形 $\displaystyle\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ であることに注意する。

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

を変数分離形の解法に従って解くと

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx \Longrightarrow \log|y| = D - \int^x P(x)\,dx$$

$$y = C\exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right)$$

ただし $C = \pm e^D$.

3. 定数変化法

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

の解は

$$y = C \exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right)$$

であった．ここで

$$\boxed{\text{定数変化法: 定数 } C \text{ を関数 } C(x) \text{ と思う}}$$

$$y = C(x) \exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right)$$

を元の方程式に代入する：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

3. 定数変化法（つづき）

$y = C(x)\exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right)$ を $y' + P(x)y = Q(x)$ に代入:

$$\begin{aligned} y' &= C'(x)\exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right) - C(x)P(x)\exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right) \\ &= C'(x)\exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right) - P(x)y \end{aligned}$$

より

$$y' + P(x)y = C'(x)\exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right) = Q(x)$$

したがって

$$C'(x) = \exp\left(\int^x P(x)\,dx\right)\cdot Q(x)$$

となるから、両辺を積分すると

$$C(x) = \int \exp\left(\int^x P(x)\,dx\right)\cdot Q(x)\,dx + D$$

4. 定数変化法・まとめ

一階線形微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ の解き方

1) 斉次方程式 $y' + P(x)y = 0$ を変数分離法で解いて

$$y = C\exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right)$$

2) ここで定数 C を関数と思う（定数変化法）。

$y = C(x)\exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right)$ を元の方程式に代入して

$$C'(x) = Q(x)\exp\left(\int^x P(x)\,dx\right)$$

3) $C'(x)$ を積分して, 代入する

$$\boxed{y = \exp\left(-\int^x P(x)\,dx\right)\left[\int^x Q(x)\exp\left(\int^x P(x)\,dx\right)\,dx + D\right].}$$

5. 定数変化法・初期値問題

$y' + P(x)y = Q(x)$ の解で $y(a) = y_0$ となるものを求めよ。

積分因子 の考えを用いる。$y' + P(x)y$ に $\exp\left(\int_a^x P(s)\,ds\right)$ をかけ

$$(y' + P(x)y)\exp\left(\int_a^x P(s)\,ds\right) = \frac{d}{dx}\left[y(x)\exp\left(\int_a^x P(s)\,ds\right)\right]$$

したがって

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)\exp\left(\int_a^x P(s)\,ds\right)\right] = Q(x)\exp\left(\int_a^x P(s)\,ds\right)$$

なので両辺を x 変数で $a \to x$ まで積分すると $y(a) = y_0$ より

$$y(x)\exp\left(\int_a^x P(s)\,ds\right) = y_0 + \int_a^x \left[Q(t)\exp\left(\int_a^t P(s)\,ds\right)\right] dt$$

よって

$$\boxed{y(x) = \exp\left(-\int_a^x P(s)\,ds\right)\left\{y_0 + \int_a^x \left[Q(t)\exp\left(\int_a^t P(s)\,ds\right)\right] dt\right\}}$$

5.1. 一階線形方程式の解法2

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

に対して

$$P(x) = \int p(x)\,dx$$

とおき、両辺に $e^{P(x)}$ をかける。$(e^{P(x)})' = p(x)\ e^{P(x)}$ に注意する

$$e^{P(x)} \cdot \frac{dy}{dx} + p(x)e^{P(x)} \cdot y = e^{P(x)} \cdot q(x).$$

左辺は $(e^{P(x)} \cdot y)'$ に等しいので

$$(e^{P(x)} \cdot y)' = e^{P(x)} \cdot q(x).$$

両辺を積分して

$$e^{P(x)}\,y = \int e^{P(x)}\ q(x)\,dx + C$$

となり、一般解を得る。

6. 一階線形方程式に帰着できる場合

$\alpha \neq 0, 1$ とする. ベルヌーイの微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

は

$$\boxed{\text{変換 } y^{1-\alpha} = u}$$

によって線形微分方程式に帰着される.

解説)
$u = y^{1-\alpha}$ を x について微分すると $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$
もとの方 程式を y^{α} で割ると

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x).$$

ここで $y^{-\alpha}y' = u'/(1-\alpha)$ を代入すれば

$$u' + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x).$$

すなわち, 線形微分方程式となる.

ベルヌーイの微分方程式・その2

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

に対して

$$P(x) = \int p(x)\,dx$$

とおき、両辺に $e^{P(x)}$ をかける:

$$e^{P(x)} \cdot y' + p(x)e^{P(x)} \cdot y = e^{P(x)} \cdot q(x)y^\alpha$$

左辺は $(e^{P(x)} \cdot y)'$ に等しいので

$$(e^{P(x)} \cdot y)' = e^{P(x)} \cdot q(x)y^\alpha = q(x)e^{(1-\alpha)P(x)}(e^{P(x)} \cdot y)^\alpha$$

したがって $z = e^{P(x)} \cdot y$ とおくと

$$z' = q(x)e^{(1-\alpha)P(x)}z^\alpha$$

という変数分離形になる。

リッカチの微分方程式

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

は, その 1 つの解 $y_0(x)$ がわかると変換 $y = u + y_0(x)$ によってベルヌーイの微分方程式 の $\alpha = 2$ の場合に帰着される.

解説)
$y = u + y_0(x)$ を代入して

$$\begin{aligned} u' + \mathbf{y_0'} &= P(x)(u+y_0)^2 + Q(x)(u+y_0) + R(x) \\ &= P(x)u^2 + (2P(x)y_0 + Q(x))u + \mathbf{P(x)y_0^2 + Q(x)y_0 + R(x)} \end{aligned}$$

$y_0(x)$ は 1 つ の 解 だ か ら

$$y_0' = P(x)y_0^2 + Q(x)y_0 + R(x)$$

を代入してベルヌーイの微分方程式をえる

$$u' = P(x)u^2 + (2P(x)y_0 + Q(x))u$$

8. 演習問題

1. つぎの微分方程式を解け.

(1) $(1+x^2)y' = 2xy + 1$ (2) $y' + \dfrac{1}{x}y = x^2 + 1$

(3) $(2x+y)y' = 1.$ (4) $y' + y = xy^3.$

2. リッカチの微分方程式 $y' = (y-1)(2xy - y - 2x)$ は $y = 1$ が 1 つの特殊解であることを知ってとけ

[追加問題 4.1]

(1) $y' + y = x^2$ (2) $y' - xy = x$ (3) $2xy' = 2x^2 - y$

(4) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ (5) $xy' + y = x\log x$ (6) $y' - 3y = e^{3x} - e^{-3x}$

[追加問題 4.2]

(1) $x^2y' = xy + y^2$ (2) $y' + y = xy^3$ (3) $xy' + y = xy^2\log x$

(4) $y' - y\tan x = y^4/\cos x$ (5) $y' + y^3e^{-x^2} = xy$ (6) $y' + \dfrac{y}{x} = 2y^2\log x$

[追加問題 4.3]

(1) $y' = (1 + x + 2x^2\cos x) - (1 + 4x\cos x)y + 2y^2\cos x$ は解 $y = x$ をもつことを知ってこれを解け

演習問題解説

1. (1) 斉次方程式 $(1+x^2)y' = 2xy$ の解は $y = C(1+x^2)$. 定数変化法で $(1+x^2)^2C'(x) = 1$.
これを積分して $y = C(1+x^2) + \frac{1}{2}[x + (1+x^2)\tan^{-1}x]$.

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ (\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}$$

より両方足して $\left(\frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1}x\right)' = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ より

(2) 斉次方程式 $y' + \frac{1}{x}y = 0$ の解は $y = C/x$. 定数変化法で求める解は $y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{4}$.

(3) $y = y(x)$ の逆関数 $x = x(y)$ を考えると逆関数の微分の公式 $x'(y) = 1/y'(x)$.
したがって $(2x+y)y' = 1$ より $2x + y) = x'$ となって $x(y)$ に関する一階線形方程式になる.
これをといて $x = -\frac{1}{4} - \frac{y}{2} + Ce^{2y}$. ($y = \ldots$ という逆関数は簡単には書けない)

(4) ベルヌーイの微分方程式なので $y = u^{-1/2}$ とおくと一階線形方程式 $u' - 2u + 2x = 0$ をえる. これを解いて $u = \frac{1}{2} + x + Ce^{2x}$. したがって $y = \pm\left(\frac{1}{2} + x + Ce^{2x}\right)^{-1/2}$.

2. $y = 1 + u$ とおくと u はベルヌーイの微分方程式 $u' = -u + (2x-1)u^2$ を満たす。そこで $u = 1/v$ とおくと v は一階線形方程式 $v' = -v + 1 - 2x$ をみたすので $v = 1 + 2x + Ce^x$.
あとは代入していって $y = 1 + \frac{1}{1+2x+Ce^x}$.