ラプラス積分　$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

ラプラス変換の例

(1) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$.　(2) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$.　(3) $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$　$(\mathrm{Re}\, s > 0,\ \alpha > -1)$.

(4) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$.（$\mathrm{Re}\,(s-a) > 0$ のとき）

(5) $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.　(6) $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$.（$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき）

(7) $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$.　(8) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$.（$\mathrm{Re}\, s > |a|$ のとき）

(9) $\mathcal{L}\{\log t\} = -\dfrac{\log s + C}{s}$.（$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき）　ただし $C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n\right)$

(10) ヘビサイド関数　$Y(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$　$a \geqq 0$ のとき $\mathcal{L}\{Y(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$

ラプラス変換の性質

[線型性] $\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2\}$

[移動性] $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$.

[相似性] $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$,　$(\mathrm{Re}\, s > \alpha \cdot a)$.

[導関数] $f(+0)$ が存在すれば $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(+0)$

[積分] $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \dfrac{1}{s} F(s)$.

[t^n 倍] $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

[$1/t$ 倍] $\lim_{t\to+0} \dfrac{f(t)}{t}$ が存在するならば $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$.

[合成積]　$f * g(t) = \int_0^t f(s) g(t-s)\,ds \to \mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$.

[初期値定理] $\lim_{t\to+0} f(t) = a$ が存在すれば $\lim_{s\to\infty} sF(s) = a$.

[最終値定理] $\lim_{t\to\infty} f(t) = a$ が存在すれば $\lim_{s\to+0} sF(s) = a$.

[原関数の移動性] $a \geqq 0$ のとき $\mathcal{L}\{f(t-a)Y(t-a)\} = e^{-as} F(s)$.

[周期関数] $f(t)$ が周期 $\omega > 0$ の周期関数のとき $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1 - e^{-\omega s}} \int_0^\omega e^{-st} f(t)\,dt$

定理・部分分数分解　　n 次多項式 $P(s)$ が相異なる n 個の零点 $a_1, \ldots, a_n$ を持つとき

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(s)}{P(s)}\right\} = \sum_{k=1}^n \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)} e^{a_k t}.$$

双曲線函数 $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$,　$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$,　$\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$.

ガンマ函数　$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$　$(s > 0)$.

ベータ函数　$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$　$(p, q > 0)$.

(1) $\Gamma(s)$ は $s > 0$ で収束して $\Gamma(s) > 0$　(2) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(3) $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(n) = (n-1)!\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$　(4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

ガウス積分　$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$