微 分 方 程 式 2

8. 有理関数の逆ラプラス変換

ラプラス変換と有理関数

これまで表れたラプラス変換の像としては

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad (\alpha > -1).$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}. \quad (\mathrm{Re}\,(s-a) > 0 \text{ のとき})$$

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}. \quad (\mathrm{Re}\,s > |a| \text{ のとき})$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}. \quad (\mathrm{Re}\,s > |a| \text{ のとき})$$

$$\mathcal{L}\{\log t\} = -\frac{\log s + C}{s}.$$

など、有理関数が多い.

またいずれも $s \to +\infty$ のときに 0 に収束する

有理関数の逆ラプラス変換

関数

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

・$Q(s)$ の次数 $< P(s)$ の次数

・$Q(s)$, $P(s)$ は共通因子を持たない

主定理・部分分数分解

n 次多項式 $P(s)$ が相異なる n 個の零点 $a_1, \ldots, a_n$ を持つとき

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(s)}{P(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)} e^{a_k t}.$$

証明のアイデア

1) 部分分数分解: $\displaystyle \frac{Q(s)}{P(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)} \frac{1}{s - a_k}.$

2) ラプラス変換: $\displaystyle \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

証明

[アイデア 1 の証明] $P(a_k) = 0$ より

$$\lim_{s \to a_k} \frac{P(s)}{s - a_k} = \lim_{s \to a_k} \frac{P(s) - P(a_k)}{s - a_k} = P'(a_k)$$

したがって、部分分数分解

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{c_1}{s - a_1} + \frac{c_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - a_n}$$

の両辺に $(s - a_1)$ をかけると

$$(s - a_1)\frac{Q(s)}{P(s)} = c_1 + (s - a_1)\left(\frac{c_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - a_n}\right)$$

となって、$s \to a_1$ の極限を取ると

$$\frac{Q(a_1)}{P'(a_1)} = c_1.$$

他の係数も同様に

$$c_k = \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)}.$$

証明・つづき

前ページより

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{c_1}{s-a_1} + \cdots + \frac{c_n}{s-a_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)} \frac{1}{s-a_k}.$$

★この公式はラプラス展開に関係なくいろんなところで役立つ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a_k}\right\} = e^{a_k t}$$

は直接積分で確認できるので

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(s)}{P(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a_k}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(a_k)}{P'(a_k)} e^{a_k t}.$$

証明終わり

$P(s)$ の零点が重複度を持っている場合

定理 2　$P(s)=0$ の相異なる解を $a_1,..,a_k$, その重複度をそれぞれ $m_1,...,m_k$ とする。部分分数分解

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{c_1^{(1)}}{s-a_1} + \frac{c_1^{(2)}}{(s-a_1)^2} + \cdots + \frac{c_1^{(m_1)}}{(s-a_1)^{m_1}}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{c_k^{(1)}}{s-a_k} + \frac{c_k^{(2)}}{(s-a_k)^2} + \cdots + \frac{c_k^{(m_k)}}{(s-a_k)^{m_k}}$$

とすると

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(s)}{P(s)}\right\} = e^{a_1 t}\left(c_1^{(1)} + c_1^{(2)}\frac{t}{1!} + \cdots + c_1^{(m_1)}\frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}\right)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ e^{a_k t}\left(c_k^{(1)} + c_k^{(2)}\frac{t}{1!} + \cdots + c_1^{(m_k)}\frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!}\right).$$

ここで係数は次のようにかける（★この式も役に立つ）

$$c_l^{(n)} = \frac{1}{(m_l-n)!}\left[\frac{d^{m_l-n}}{ds^{m_l-n}}\left((s-a_l)^{m_l}\frac{Q(s)}{P(s)}\right)\right]_{s=a_l}$$

証明

以下 a_1 だけ考えるので, 次のように置く

$$a_1 = a,\ c_1^{(j)} = C_j \quad (j = 1, 2....m_1),\ m_1 = m$$

さらに a_1 以外の項をひとまとめに $R(s)$ とおく

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{C_1}{s-a} + \frac{C_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{C_m}{(s-a)^m} + R(s)$$

両辺に $(s-a)^m$ をかけると

$$(s-a)^m \frac{Q(s)}{P(s)} = C_1(s-a)^{m-1} + C_2(s-a)^{m-2} + \cdots + C_{m-1}(s-a)^1 + C_m + (s-a)^m R(s)$$

となって、$s \to a$ の極限を取ると

$$C_m = \lim_{s \to a}(s-a)^m \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

証明・つづき

$$(s-a)^m \frac{Q(s)}{P(s)} = C_1(s-a)^{m-1}+C_2(s-a)^{m-2}+\cdots+C_{m-1}(s-a)^1+C_m+(s-a)^m R(s)$$

の両辺を 1 回微分して $s \to a$ とすれば

$$C_{m-1} = \left[\frac{d}{ds}\left((s-a)^m \frac{Q(s)}{P(s)}\right)\right]_{s=a}$$

同様に両辺を $m-k$ 回微分して $s \to a$ とすれば

$$C_k = \frac{1}{(m-k)!}\left[\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\left((s-a)^m \frac{Q(s)}{P(s)}\right)\right]_{s=a}.$$

他の解 $a_2, ..., a_k$ に関しても同様。最後に逆ラプラス変換

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^l}\right\} = e^{at}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \quad (l = 1, 2, ...)$$

は $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^l}\right\} = \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}$ と移動性 $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ からわかる

前回にやった例題・再び

$\dfrac{s+3}{s(s^2+4)}$ の逆ラプラス変換を求めよ

解　まず部分分数に分解する：

$$\frac{s+3}{s(s^2+4)} = \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{4-3s}{s^2+4} = \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+2^2}.$$

線型性から

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} - \frac{3}{4}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}$$

$$= \mathbf{\frac{3}{4}} + \mathbf{\frac{1}{2}}\sin \mathbf{2t} - \mathbf{\frac{3}{4}}\cos \mathbf{2t}$$

例

1) 関数 $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s+1)^3}$ の逆ラプラス変換を求めよ.

解)　部分分数分解して

$$F(s)=\frac{a_1}{s-1}+\frac{b_1}{s+1}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_3}{(s+1)^3}$$

とおく。

$$a_1=\lim_{s\to 1}(s-1)F(s)=\lim_{s\to 1}\frac{1}{(s+1)^3}=\frac{1}{8}$$

$$b_1=\lim_{s\to -1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left((s+1)^3F(s)\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\frac{2}{(s-1)^3}=-\frac{1}{8}$$

$$b_2=\lim_{s\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left((s+1)^3F(s)\right)=\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right)=\lim_{s\to -1}\left(-\frac{1}{(s-1)^2}\right)=-\frac{1}{4}$$

$$b_3=\lim_{s\to -1}(s+1)^3F(s)=\lim_{s\to -1}\frac{1}{s-1}=-\frac{1}{2}$$

前ページの結果をまとめて

$$F(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} =$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}$$

$$= \mathbf{\frac{1}{8}e^{t} - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t}t - \frac{1}{4}e^{-t}t^{2}}$$

例 2

2) 関数 $\dfrac{s+2}{s^2(s-1)^2}$ の逆ラプラス変換を求めよ.

解)　部分分数分解して

$$F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{b_1}{s-1} + \frac{b_2}{(s-1)^2}$$

とおく。

$$a_1 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left(s^2 F(s)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{(s-1)^2}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{-s-5}{(s-1)^3} = 5$$

$$a_2 = \lim_{s\to 0} s^2 F(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s+2}{(s-1)^2} = 2$$

$$b_1 = \lim_{s\to 1} \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left((s-1)^2 F(s)\right) = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\frac{-s-4}{s^3} = -5$$

$$b_2 = \lim_{s\to 1}(s-1)^2 F(s) = \lim_{s\to -1}\frac{s+2}{s^2} = 3$$

前ページの結果をまとめて

$$F(s) = 5\frac{1}{s} + 2\frac{1}{s^2} - 5\frac{1}{s-1} + 3\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \\
&\quad = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} \\
&\quad = \mathbf{5 + 2t - 5e^{t} + 3e^{t}t}
\end{aligned}$$

問題

次の関数の逆ラプラス変換を求めよ

(1) $\dfrac{s+2}{s^3(s-1)^2}$ (2) $\dfrac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$ (3) $\dfrac{s^3+5}{s^3(s+1)}$