微 分 方 程 式

12. 解の存在と一意性

1. 解の存在と一意性

解の存在と一意性は微分方程式の理論的な基礎

定理 $f(x,y)$ は閉領域 $D=\{(x,y)\,;\,|x-x_0|\leqq a, |y-y_0|\leqq b\}$ で連続かつ $|f(x,y)|\leqq M$ とする. さらに, 正定数 L が存在して, D の任意の 2 点 $(x,y),(x,z)$ に対して不等式

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leqq L|y-z|$$

が成立するものとする (この条件をリプシッツ条件という).
このとき, 初期値問題

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

の解が区間

$$|x-x_0|\leqq \min\left(a,\frac{b}{M}\right)$$

において存在し, その解はただ 1 通りに決定される.

証明

以下の方法を逐次近似法といい，微分方程式の解の存在を示すのによく用いられる手法である

区間 $|x - x_0| \leqq \alpha = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ において関数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ をつぎのように定義する:

$$\varphi_0(x) = y_0,\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt\ (n = 1, 2, \cdots)$$

このとき，関数 $\{\varphi_n(x)\}$ は $|x - x_0| \leqq \alpha$ で定義された連続関数列であり，$|\varphi_n(x) - y_0| \leqq b$ であることが帰納法によって証明される：$f(x, y)$, $\varphi_{n-1}(x)$ が D で連続であれば積分によって定まる $\varphi_n(x)$ も連続関数。$\varphi_{n-1}(x)$ が $|x - x_0| \leqq \alpha$ で $|\varphi_{n-1}(x) - y_0| \leqq b$ を満たせば

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqq \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt\right| \leqq M|x - x_0| \leqq b.$$

リプシッツ条件で $|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|$ を上から押さえる:

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \leqq \frac{ML^{n-1}|x-x_0|^n}{n!}.$$

$x>x_0$ とする、帰納法によって n のとき正しいとする

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} \left(f(t,\varphi_n(t)) - f(t,\varphi_{n-1}(t))\right) dt\right| \\
&\leqq \int_{x_0}^{x} \left|f(t,\varphi_n(t)) - f(t,\varphi_{n-1}(t))\right|\, dt \\
&\leqq L\int_{x_0}^{x} \left|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\right|\, dt \\
&\leqq L\int_{x_0}^{x} \frac{ML^{n-1}(x-x_0)^n}{n!}\, dt \\
&\leqq \frac{ML^n(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

関数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ の収束

任意の自然数 m, n $(m < n)$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| &\leqq |\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)| + |\varphi_{m+1}(x) - \varphi_{m+2}(x)| \\
&\qquad\qquad + \cdots + |\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)| \\
&\leqq \frac{ML^m|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{ML^{m+1}|x - x_0|)^{m+2}}{(m+2)!} \\
&\qquad\qquad + \cdots + \frac{ML^{n+1}|x - x_0|^n}{n!} \\
&\leqq \frac{M}{L}\left(\frac{(L\alpha)^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{(L\alpha)^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots + \frac{(L\alpha)^n}{n!}\right).
\end{aligned}
$$

が成立するから $\{\varphi_n(x)\}$ はコーシー列になって,

$|x - x_0| \leqq \alpha$ で一様収束する.

極限関数 を $\varphi(x)$ とする

極限 $\{\varphi(x)\}$ が解になること

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt$$

で $n \to \infty$ とすると $|x - x_0| \leqq \alpha$ で

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

となる。さらに $\varphi(x_0) = y_0$ であり、両辺を微分すると

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

すなわち $\{\varphi(x)\}$ が解 $\square$

グロンウォール(Gronwall)の不等式

$u(t), f(t), K(t)$ は $a \leqq t \leqq b$ で連続かつ $K(t) \geqq 0$ とする. $u(t)$ が不等式

$$u(t) \leqq f(t) + \int_a^t K(s)u(s)\,ds, \quad a \leqq t \leqq b$$

を満足しているならば,

$$u(t) \leqq f(t) + \int_a^t K(s)f(s)\exp\left(\int_s^t K(\tau)\,d\tau\right)ds, \quad a \leqq t \leqq b$$

が成立する.

［証明］ $\varphi(t)=\int_a^t K(s)u(s)\,ds$ とおく．$\varphi'(t)=K(t)u(t)$ より

$$u(t)\leqq f(t)+\int_a^t K(s)u(s)\,ds=f(t)+\varphi(t)$$

の両辺に $K(t)$ を掛けると $\varphi'(t)-K(t)\varphi(t)\leqq K(t)f(t)$ をえる．
両辺に $\exp\left(-\int_a^t K(\tau)\,d\tau\right)$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\varphi(t)e^{-\int_a^t K(\tau)\,d\tau}\right)&=(\varphi'(t)-K(t)\varphi(t))e^{-\int_a^t K(\tau)\,d\tau}\\&\leqq K(t)f(t)e^{-\int_a^t K(\tau)\,d\tau}\end{aligned}$$

となり，両辺を a から t まで積分し，$\varphi(a)=0$ を用いると

$$\varphi(t)e^{-\int_a^t K(\tau)\,d\tau}\leqq\int_a^t K(s)f(s)e^{-\int_a^s K(\tau)\,d\tau}\,ds$$

$$\therefore\varphi(t)=\int_a^t K(s)u(s)\,ds\leqq\int_s^t K(s)f(s)e^{\int_s^t K(\tau)\,d\tau}\,ds.$$

以上により、元の不等式と合わせると

$$u(t) \leqq f(t) + \varphi(t) \leqq f(t) + \int_s^t K(s)f(s)e^{\int_s^t K(\tau)\,d\tau}\,ds.$$

となって定理を得る

一意性の証明

「$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$」の2つの解を $y = \varphi(x), \psi(x)$ とすると

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x) - \psi(x)| &\leqq \left| \int_{x_0}^{x} (f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)))\, dt \right| \\
&\leqq L \int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \psi(t)|\, dt
\end{aligned}
$$

$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha$ のとき, $u = |\varphi(x) - \psi(x)|, f(t) = 0, K = L$ としてグロンウォールの不等式を用いると $|\varphi(x) - \psi(x)| \leqq 0$ が成立し, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ でなければならない. □

注意

f が偏微分可能で $|\partial f/\partial y| \leqq L$ （定数）ならば

$$
|f(x,y) - f(x,z)| = |f_y(x,\eta)||y - z| \leqq L|y - z|
$$

となるからリプシッツ条件が成立する.

一意性について注意

I) リプシッツ条件が成立しないとき解の一意性が保証されない．
たとえば，$y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$ は解として

$$y \equiv 0$$

および

$$y = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x \leqq c) \\ (x-c)^2 & (c \leqq x < \infty) \end{cases}$$

をもっている．

II) リプシッツ条件は解の一意性を保証するための十分条件であって必要条件ではない．

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (|y| \leqq |x|) \\ 0 & (|y| > |x|), \end{cases} \quad y(0) = 0$$

の解は $y = x/2$ ただ一つである