微分方程式

2. 同次型

1 復習・変数分離形

正規形（$y' = \cdots$ の形）の 1 階常微分方程式

$$y' = F(x, y)$$

を考えている

変数分離形の常微分方程式とは

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

の形のものをいう。このとき次のように変数を分離して

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

一般解は

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C, \quad (C : \text{定数})$$

で与えられる.

2 同次形

正規形の 1 階常微分方程式

$$y' = F(x, y)$$

で、右辺 $F(x, y)$ が y/x の関数になっているとき、すなわち

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形の微分方程式を同次形という.

同次形の場合には原則として変数変換

$$\boxed{u = \frac{y}{x}}$$

を行うことにより変数分離形に帰着させることができる.

3 同次形の解き方

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

において

$$u = \frac{y}{x}$$

とおくと $y = xu$ なので

$$(\text{左辺}) : \quad y' = (xu)' = u + xu'$$
$$(\text{右辺}) : \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = f(u)$$

したがって

$$u + xu' = f(u)$$

よって

$$xu' = f(u) - u \quad \Longrightarrow \quad u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

という変数分離形の常微分方程式に変形される.

3 同次形の解き方・続き

変数分離形の常微分方程式

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

は変数分離形の解き方に従うと

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \log|x| + C$$

左辺を積分したものを

$$g(u) = \int \frac{du}{f(u) - u}$$

と表すと一般解は次で与えられる

$$g\left(\frac{y}{x}\right) = \log|x| + C$$

4 同次形の解き方・注意

同次形の方程式

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

変数分離形の解き方と同様に

$$f(u) - u = 0$$

を満たす 値 $u = m$ が存在するとき問題が起こる。

$u = y/x$ なので $y = mx$ （直線）となる。実際にこのとき

$$y' = m, \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = f(m) = m$$

となって $y = mx$ は同次形の方程式の解になっている。

多くの場合は $y = mx$ は一般解の中に含まれる

5 同次形・例

例 1．　$y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

右辺は分子分母を x^2 で割って $\dfrac{x^2+y^2}{2xy} = \dfrac{1+(y/x)^2}{2y/x}$ となるので同次形である。

$u = \dfrac{y}{x}$ とおくと $y = xu$ より $y' = xu' + u$, 右辺は $\dfrac{1+u^2}{2u}$ より

$$xu' + u = \frac{1+u^2}{2u} \Longrightarrow u' = \frac{1-u^2}{2xu} = \frac{u^2-1}{2u} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

変数分離形の解き方で

$$\int \frac{2u\,du}{u^2-1} = -\int \frac{dx}{x} + C$$

したがって

$$\log|u^2-1| = -\log|x| + C \Rightarrow \log|x(u^2-1)| = C \Rightarrow x(u^2-1) = \pm e^C$$

5 同次形・例（つづき）

$$x(u^2-1)=\pm e^C$$

において、$D=\pm e^C$ とおくと $D\neq 0$ で　$x(u^2-1)=D.$
$u=y/x$ を代入すれば $y^2-x^2=Dx.$

変数分離形の解き方で分母になる $u^2-1=0$ のとき、すなわち $u=\pm 1$ のときが問題になる.

$u=\pm 1$ のときは $y=\pm x$ となり, もとの微分方程式を満足しており, さきほどの一般解で抜けていた $D=0$ に対応している.

以上により、求める一般解は $y^2-x^2=Dx.$

5 同次形に帰着できる方程式

同次形の方程式

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

よくでてくる同次形として $(A, B, a, b$ は定数$)$

$$y' = f\left(\frac{Ax + By}{ax + by}\right) = f\left(\frac{A + By/x}{a + by/x}\right)$$

同次形でない方程式 $(A, B, C, a, b, c$ は定数$)$

$$y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right)$$

この方程式は同次形に変換できる

5 同次形に帰着できる方程式 2

同次形でない方程式 $(A, B, C, a, b, c$ は定数)

$$y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right)$$

もし $C = 0$, $c = 0$ であれば同次形になる:

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{Ax + By}{ax + by}\right) \\ &= f\left(\frac{A + B\,y/x}{a + b\,y/x}\right) \end{aligned}$$

したがって元の方程式を変形して同次形になるようにする

ここで変数変換 $x = X + x_0, y = Y + y_0$ を行うと

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

(定数だけずらしても微分は変わらない)

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right)$$

の文字を変えると

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dX} &= f\left(\frac{A(X + x_0) + B(Y + y_0) + C}{a(X + x_0) + b(Y + y_0) + c}\right)\\ &= f\left(\frac{AX + BY + (Ax_0 + By_0 + C)}{aX + bY + (ax_0 + by_0 + c)}\right)\end{aligned}$$

ここで, 定数項が消えるようにうまく x_0, y_0 を選ぶ

5 同次形に帰着できる方程式2・続き

0) x_0, y_0 に関する連立 1次方程式

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$
$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

を満たす x_0, y_0 が存在すれば, 次の同次形を得る:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{AX + BY}{aX + bY}\right)$$

連立方程式は解が一意に定まるとき・不能・不定の 3 通りある

1) 一意 $A/a \neq B/b$ のときは一意に解を持つ

5 同次形に帰着できる方程式2・続き

2) 不能 $A/a = B/b \neq C/c$ のときはは解がない

元の方程式に立ち返って $A/a = B/b = k$ とおくと

$$y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right) = f\left(\frac{k(ax + by) + C}{ax + by + c}\right)$$

$u = ax + by$ と置くと $u' = a + by'$ より $y' = (u' - a)/b$. したがって

$$\frac{1}{b}(u' - a) = f\left(\frac{ku + C}{u + c}\right)$$

と x の入らない方程式

$$u' = bf\left(\frac{ku + C}{u + c}\right) + a$$

になるので変数分離形になっている

5 同次形に帰着できる方程式2・続き

3) 不定 $A/a = B/b = C/c$ のときは解を無数に持つ

$A = ka, B = kb, C = kc$ を元の方程式に代入すると

$$y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right) = f\left(\frac{kax + kby + kc}{ax + by + c}\right) = f(k)$$

と実は右辺は定数になっているので

$$y = f(k)x + D$$

(D は定数）が解

6 まとめ

(I) 同次形の微分方程式

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

は、$u = y/x$ と置いて変数分離形にできる

(II) 同次形ではないが

$$y' = f\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right)$$

は連立方程式

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + C &= 0 \\ ax_0 + by_0 + c &= 0 \end{aligned}$$

を解いて同次形にできる

7 同次形・演習問題

(1) $(3x^2+y^2)y'-2xy=0.$ (2) $y'=\dfrac{2x+y-3}{x+2y-5}.$

[追加問題 3.1]

(1) $x+yy'=2y$ (2) $(x+y)+(x-y)y'=0$

(3) $y^2+x^2y'=xyy'$ (4) $xy^2y'=x^3+y^3$

(5) $2xy-(3x^2+y^2)y'=0$

(6) $\left(x\cos\dfrac{y}{x}+y\sin\dfrac{y}{x}\right)y=\left(y\sin\dfrac{y}{x}-x\cos\dfrac{y}{x}\right)xy'$

[追加問題 3.2]

(1) $(5x-7y)-(x-3y+4)y'=0$ (2) $(3x+y-5)-(x-3y-5)y'=0$

(3) $(4x-6y-1)-(2x-3y+2)y'=0$

(4) $(6x-2y-7)-(3x-y+4)y'=0$

(5) $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y+1}\right)^2$ (6) $y'=\left(\dfrac{x-y+3}{x-y+1}\right)^2$

演習問題解説

(1) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2+y^2}$ より同次形なので $y=xu$ とおくと $y'=xu'+u$. よって $xu'+u=\dfrac{2u}{3+u^2}$.
u' について解くと $u' = -\dfrac{u\left(u^2+1\right)}{x(u^2+3)}$. 変数分離形なので $\displaystyle\int \frac{u^2+3}{u(u^2+1)}\,du = -\int \frac{dx}{x}$.
よって $\log\left|\dfrac{u^3}{(u^2+1)}\right| = -\log|x|+C$. となるので $\log\left|\dfrac{xu^3}{(u^2+1)}\right| = C$ より $\dfrac{u^3}{(u^2+1)} = \dfrac{D}{x}$ (ただし $D=\pm e^C$ とおいた）．$u=y/x$ だったので $\dfrac{y^3}{(xy^2+x^3)} = \dfrac{D}{x}$

(2) $y' = \dfrac{2x+y-3}{x+2y-5}$ において $x=X+a, y=Y+b$ とおくと $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{2X+Y+2a+b-3}{X+2Y+a+2b-5}$.
ここで連立一次方程式 $2a+b-3=0, a+2b-5=0$ をといて $a=1/3, b=7/3$.
以下では $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{2X+Y}{X+2Y}$ を考える. $Y=Xu$ とおいて $Xu'+u = \dfrac{2+u}{1+2u}$ より $u' = \dfrac{1}{X}\cdot\dfrac{2-2u^2}{1+2u}$
と変数分離形になる.

$$\int \frac{1+2u}{2-2u^2}\,du = \int\left(-\frac{3}{4(u-1)} - \frac{1}{4(u+1)}\right)du = -\frac{3}{4}\log|u-1| - \frac{1}{4}\log|u+1|$$

より $-\dfrac{3}{4}\log|u-1| - \dfrac{1}{4}\log|u+1| = \log|x|+C$ となるので $x^4(u-1)^3(u+1)=D$ となる。
ただし $D=\pm e^{-4C}$. $u=Y/X=(y-7/3)/(x-1/3)$ を代入して y,x の陰関数
$\dfrac{27x^4(x-y+2)^3(8-3x-3y)}{(1-3x)^4} = D$ を得る。

[問題] $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y-1}{x+y+3}$

[解説] $x = X + a, y = Y + b$ とおくと $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{X - Y + (a-b-1)}{X + Y + (a+b+3)}$.
連立方程式 $a - b - 1 = 0, a + b + 3 = 0$ をといて $a = -1, b = -2$. ここで $u = Y/X$ とおくと

$$u + Xu' = \frac{1-u}{1+u}.$$

正規系に直して

$$u' = \frac{1}{X} \cdot \left(\frac{1-u}{1+u} - u \right) = \frac{1}{X} \cdot \frac{1 - 2u - u^2}{1+u}$$

これは変数分離形なので

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2}\, du = \int \frac{1}{X}\, dX$$

よって

$$-\frac{1}{2} \log |u^2 + 2u - 1| = \log |X| + D$$

となって $\log |X^2(u^2 + 2u - 1)| = -2D$ より $X^2(u^2 + 2u - 1) = \pm e^{-D}$.
$C = \pm e^{-D}$ とおき、$u = Y/X$ より $Y^2 + 2XY - X^2 = C$.
ここで $a = -1, b = -2$ なので

$$(y+2)^2 + 2(x+1)(y+2) - (x+1)^2 = C.$$