ベクトル解析

10. ストークスの定理

1 ストークスの定理

S: C^2 級の曲面

$\boldsymbol{n}$: S 上の正の向きの単位法線ベクトル

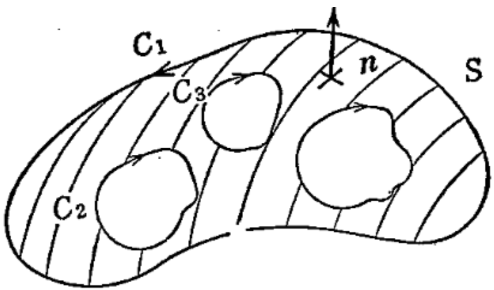
C: S の境界

互いに交わらない有限個の C^1 級の単一閉曲線からなる

C の正の向きは, それにそってC 上を進むとき

S の表側が左側に見えるように定める

$\boldsymbol{a}$: S を含む開集合で C^1 級とするベクトル場

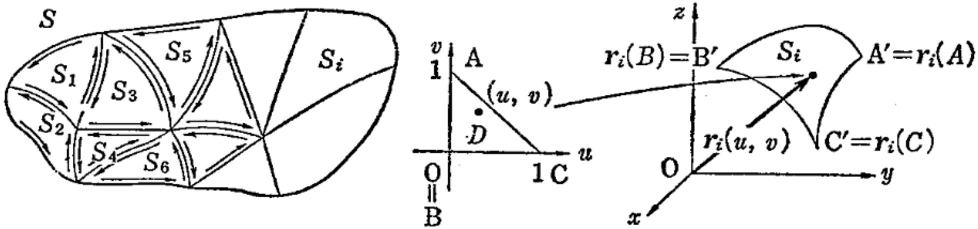


このとき、次の式が成り立つ（ストークスの定理）

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\, dS$$

証明

曲面 S を次のような小曲面 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ に分割する:



D は uv 平面内の $A(0,1), B(0,0), C(1,0)$ を頂点とする三角形の内部

各 S_i は次のパラメタパラメーター表示をもつ：

$$S_i \ : \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i(u,v) \quad ((u,v) \in D)$$

このような三角形分割 はつねに可能だが、証明は難しいので省略。

ストークスの定理を各 S_i について証明すれば十分である:

$$\int_{C'} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{S_i} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\, dS$$

単位法線ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\
&= \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)
\end{aligned}$$

$$dS = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| du dv$$

であったので、外積の長さの部分はキャンセルする

$\boldsymbol{a} = (a(x,y,z),0,0)$ の場合に示す

$\boldsymbol{a} = (0,b(x,y,z),0), \boldsymbol{a} = (0,0,c(x,y,z))$ の場合も同様。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \left(0, \frac{\partial a}{\partial z}, -\frac{\partial a}{\partial y}\right)$$

なので

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}} = \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

したがって

$$\int_{S_i} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_D \left\{\frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\} dudv$$

ここで面積分を計算する時は

$$a(\boldsymbol{r}(u,v)) = a(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

と u,v の関数に引き戻して考えている.

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial z}$$
$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial z}$$

の第一式に $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ を、第二式に $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ をかけて差をとると

$$\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial a}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{\partial a}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$
$$= -\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial a}{\partial z}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

したがって

$$\int_{S_i} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_D \left\{\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right\} dudv$$

D は 三角形 $A(0,1), B(0,0), C(1,0)$ の内部だった

$$D = \{(u,v)\,|\,0 \leqq u \leqq 1-v, 0 \leqq v \leqq 1\}$$
$$= \{(u,v)\,|\,0 \leqq v \leqq 1-u, 0 \leqq u \leqq 1\}$$

したがって

$$\iint_D \left\{ \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right\} dudv = \iint_D \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\,dudv - \iint_D \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\,dudv$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-v} \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\,du \right\} dv - \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-u} \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} dv \right\} du$$

部分積分を行なうと

$$\int_0^{1-v} \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\,du = \left[a\frac{\partial x}{\partial v} \right]_{u=0}^{u=1-v} - \int_0^{1-v} a\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\,du$$

$$\int_0^{1-u} \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\,dv = \left[a\frac{\partial x}{\partial u} \right]_{v=0}^{v=1-u} - \int_0^{1-u} a\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\,du$$

したがって

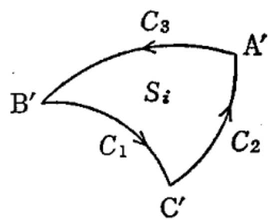
$$\int_{S_i} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_0^1 \left\{ \left[a\frac{\partial x}{\partial v} \right]_{u=0}^{u=1-v} \right\} dv - \int_0^1 \left\{ \left[a\frac{\partial x}{\partial u} \right]_{v=0}^{v=1-u} \right\} du$$

$$= \int_0^1 \left\{ a(1-v,v)\frac{\partial x}{\partial v}(1-v,v) - a(0,v)\frac{\partial x}{\partial v}(0,v) \right\} dv$$

$$- \int_0^1 \left\{ a(u,1-u)\frac{\partial x}{\partial v}(u,1-u) - a(u,0)\frac{\partial x}{\partial v}(u,0) \right\} du$$

次に線積分 $\displaystyle\int_{C'} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ を考える

C' は三角形ABCの像である。 BC, CA, AB の像をそれぞれ $C_1, C_2,$
とおく. B(0, 0), C(1, 0), A(1, 0) である



$(C'=C_1+C_2+C_3)$

線積分を順に考える

$$\int_{C'} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_3} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$$

ここで $\boldsymbol{a} = (a(u,v),0,0)$, $\boldsymbol{r} = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と

$$\begin{aligned}
C_1&: \quad (u,0), && 0 \leqq u \leqq 1\\
-C_2&: \quad (u,1-u), && 0 \leqq u \leqq 1\\
-C_3&: \quad (0,v), && 0 \leqq v \leqq 1
\end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 a(u,0)\frac{\partial x}{\partial u}(u,0)\,du\\
\int_{C_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_1^0 a(u,1-u)\frac{dx}{du}(u,1-u)\,du\\
&= -\int_0^1 a(u,1-u)\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,1-u) - \frac{\partial x}{\partial v}(u,1-u)\right)\,du\\
\int_{C_3} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= -\int_0^1 a(0,v)\frac{\partial x}{\partial v}(0,v)\,dv
\end{aligned}$$

ここで、前に計算した

$$\int_{S_i} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_0^1 \left\{ a(1-v,v)\frac{\partial x}{\partial v}(1-v,v) - a(0,v)\frac{\partial x}{\partial v}(0,v) \right\} dv$$
$$- \int_0^1 \left\{ a(u,1-u)\frac{\partial x}{\partial v}(u,1-u) - a(u,0)\frac{\partial x}{\partial v}(u,0) \right\} du$$

と比較すれば

$$\int_{S_i} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_{C'} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を得る。

同様にして $\boldsymbol{a} = (0, b(x,y,z), 0), \boldsymbol{a} = (0, 0, c(x,y,z))$ の場合にも証明することでストークスの定理を得る。 [証明終]

ストークスの定理を用いれば 閉曲線上の線積分をそれを周にもつ曲面上の面積分に直すことができる.

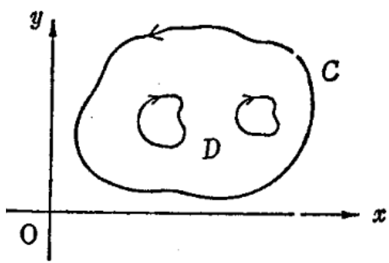
グリーンの定理

ストークスの定理の特別な場合として、曲面が xy 平面内にあるときグリーンの定理が成り立つ.

定理　D を xy 平面の有界な領域で, その境界 C は互いに交わらない有限個の区分的に C^1 級の単一閉曲線からなっているとする. そのとき D を含む開集合 で C^1 級の関数 $f(x,y), g(x,y)$ に対して

$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\, dxdy = \int_C f\,dx + g\,dy$$

が成り立つ. ここで, C には D に対して正の向き (D の内部が左手になるように進む向き) をつけておくものとする.



証 明

曲面 S として xy 平面内の領域 D をとり S 上の正の方向の単位法線ベクトルとして, $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ をとる.

$$\boldsymbol{a} = (f(x, y), g(x, y), 0)$$

とおく. ストークスの定理より

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}\,dS = \int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

であるが

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} &= \left(-\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \left(0, 0, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

より,

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{n} = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

S は xy 平面内にあるので $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ である
したがって

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\,dS = \int_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)\,dxdy$$

また

$$\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C f\,dx + g\,dy$$

よりグリーンの定理を得る. [証明終]

問題 1

任意の単一閉曲線 C に対して,

$$\int_C xdx + ydy + zdz = 0$$

を示せ.

[解] C を境界とする曲面を S とする. $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ とおくと

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

であるから，ストークスの定理により

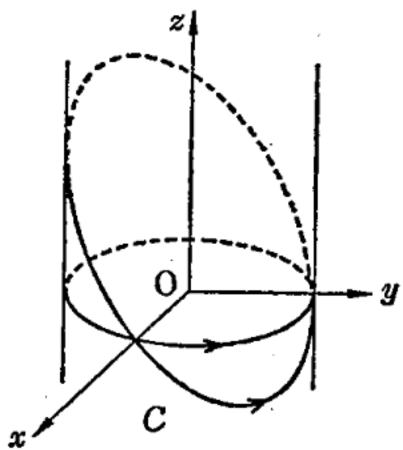
$$\int_C xdx + ydy + zdz = \int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}} dS = 0$$

問題2

ストークスの定理を用いて，線積分

$$\int_C x^5dx + x^3dy + z^6dz$$

を求めよ．ただし C は円柱 $x^2 + y^2 = 1$ と平面 $3x + 2y + z = 2$ との交線であり，C には図のように xy 平面の反時計まわりに対応する向きをつけてある．



[解]

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

として，曲面 S は

$$S : \boldsymbol{r} = (x, y, 2 - 3x - 2y), \quad (x, y) \in D$$

で $\boldsymbol{a} = (x^5, x^3, z^6)$ とすると

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = (0, 0, 3x^2)$$

となる．ストークスの定理より

$$\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{n} dS.$$

平面 $3x + 2y + z = 2$ の正の向きの単位法線ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1)$$

となるから，

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{n} = \frac{3}{\sqrt{14}}x^2$$

また $dS = \sqrt{1+(-3)^2+(-2)^2}\,dxdy = \sqrt{14}\,dxdy$

以上のデータをまとめて

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}} dS \\ &= \iint_D \frac{3}{\sqrt{14}} x^2 \sqrt{14}\,dxdy \\ &= \iint_D 3x^2\,dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3(r\cos\theta)^2\,r\,drd\theta \\ &= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\pi\end{aligned}$$

(最後の二重積分は極座標に変換した)

問題　閉曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.　

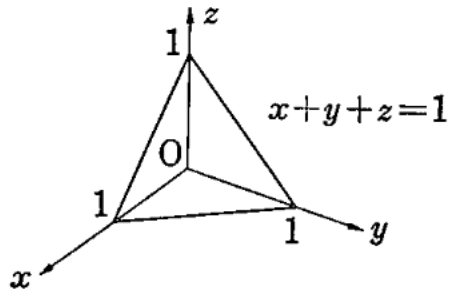
(1) $\boldsymbol{a}=(z,0,y)$, C : 3 点 $(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)$ をこの順に結んでできる三角形の周.

(2) $\boldsymbol{a}=(y,3z,5x)$. C: 円柱 $x^2+y^2=1$ と平面 $z=x+1$ の交線で向きは原点から見て時計まわり

(3) $\boldsymbol{a}=(y,2z,-y)$. C: 球面 $x^2+y^2+z^2=6z$ と平面 $z=x+3$ との交線で向きは原点から見て時計まわり

(1) ストークスの定理より

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_S (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_n dS$$



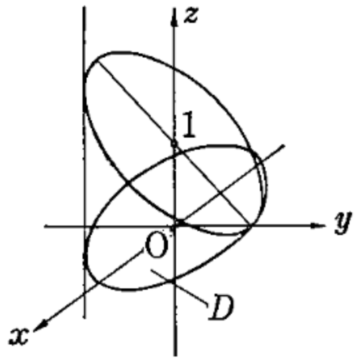
$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}=(1,1,0),\quad \boldsymbol{n}=(1,1,1)/\sqrt{3}$$

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_n=\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \iint_S (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_n dS=\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\,dx\,dy=2\int_0^1\Big[y\Big]_0^{1-x}dx$$

$$=2\int_0^1(1-x)\,dx=2\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1$$

(2) $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}=\left(\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3z & 5x\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & 5x\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ y & 3z\end{vmatrix}\right)=(-3,\ -5,\ -1)$



$\boldsymbol{n}=(-1,\ 0,\ 1)/\sqrt{2}$ $\qquad$ $(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_n=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}$ $\qquad$ $D=\{x^2+y^2\leqq 1\}$

$\therefore\ \iint_S(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_n dS=\iint_D\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy=2\cdot\pi=2\pi$

(3) $\boldsymbol{a}=(y,\ 2z,\ -y)$

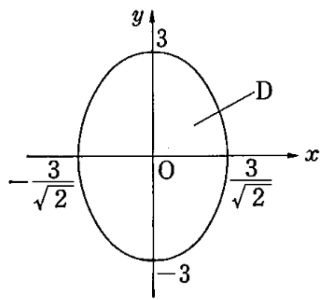
$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}=\left(\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2z & -y\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -y\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ y & 2z\end{vmatrix}\right)=(-3,\ 0,\ -1)$$

$\boldsymbol{n}=(-1,\ 0,\ 1)/\sqrt{2}$ $\quad (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_n=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$x^2+y^2+(z-3)^2=3^2,\quad z-3=x \quad \therefore\ 2x^2+y^2=3^2 \quad \therefore\ \frac{x^2}{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

$$D=\left\{\frac{x^2}{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{3^2}\leqq 1\right\}$$



$$\therefore\ \iint_S(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})_n dS=\iint_D\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\ dx\,dy$$

$$=2\iint_D dS=2\times\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\times 3\right)\pi=9\sqrt{2}\pi$$