微 分 方 程 式 特 論

2. 任意の周期 $p = 2L$ をもつ関数・偶関数および奇関数

1. 任意の周期 $p = 2L$ をもつ関数

第 1 回目と違って, 一般任意の周期 $p = 2L$ をもつ関数を扱う
周期 $p = 2\pi$ から周期 $p = 2L$ への移行は簡単で
座標軸の尺度の伸縮で解決できる

周期 $p = 2L$ の関数がフーリエ級数をもつならば,
この級数は,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

となり，一般に **3** 角級数ともいう.

オイラーの公式

$f(x)$ のフーリエ級数はオイラーの公式

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えられる．

[証明]　前回の結果（周期 2π の場合）に帰着させる。
$v = \pi x/L$ とおき

$$g(v) = f(x) = f(Lv/\pi)$$

と定めると, $g(v)$ は周期 2π の周期関数である．

証明続き

したがって、前回の結果より周期 2π の周期関数 $g(v)$ はつぎのようなフーリエ級数をもつ

$$g(v) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \sin nv)$$

フーリエ係数は次のように決まる

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\,dv,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\cos nv\,dv, \quad n = 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\sin nv\,dv, \quad n = 1, 2, ...$$

ここで $v = \pi x/L$ と変数変換すると $g(v) = f(x)$ であり,

$$dv = \frac{\pi}{L}\,dx$$

となって積分区間は $v : -\pi \to \pi$ が $x : --L \to L$ になるので前ページの結果を得る. □

例

注意 積分区間について

フーリエ係数の積分区間は長さ $p = 2L$ の任意の区間でおきかえられ, 区間 $0 \le x \le 2L$ で積分してもよい

周期的方形波 つぎの関数のフーリエ級数を求めよ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-2 < x < -1), \\ k & (-1 < x < 1), \\ 0 & (1 < x < 2) \end{cases} \qquad (p = 4, L = 2)$$

Euler の公式を用いて

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\,dx = \frac{k}{2},$$
$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

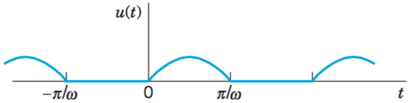
n が偶数の時は $a_n = 0$, n が奇数の時は

$$a_{4m+1} = \frac{2k}{(4m+1)\pi}, \quad a_{4m-1} = -\frac{2k}{(4m-1)\pi}.$$

$f(x)$ は偶関数なので $b_n = 0$
したがって、

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - \cdots\right)$$

半波整流器 正弦波電圧 $E\sin\omega t$ が半波整流器を通ると，波の負の部分が除去される.
ここで t は時間である



この関数を式で表すと

$$v(t) = \begin{cases} 0 & (-L < t < 0), \\ E\sin\omega t & (0 < t < L), \end{cases} \qquad (p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}, L = \frac{\pi}{\omega})$$

Fourier 級数を求める

Fourier 級数

$-L < t < 0$ で $u = 0$ であるので

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\,\sin\omega t\,dt = \frac{E}{\pi}.$$

$n > 0$ のときは

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\,\sin\omega t\cos n\omega t\,dt \\
&= \frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\left[\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t\right]\,dt \\
&= \frac{E}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)\omega t}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\omega t}{1-n}\right]_{t=0}^{t=\pi/\omega} \\
&= \begin{cases} 0 & n: \text{奇数} \\ \dfrac{E}{2\pi}\left(\dfrac{2}{1+n} + \dfrac{2}{1-n}\right) = -\dfrac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} & n: \text{偶数} \end{cases}
\end{aligned}$$

他方 b_n については

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\,\sin\omega t\sin n\omega t\,dt = \begin{cases} 0 & n>1 \\ \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/\omega} E\,\sin^2\omega t\,dt = \dfrac{E}{2} & n=1 \end{cases}$$

となるので

$$S(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \cdots\right)$$

偶関数および奇関数，半区間展開

p.4-5 での例 1 の関数は偶関数であり，フーリエ級数は余弦項だけをもち正弦項は存在しない．これが偶関数の典型である．

偶関数と奇関数

関数 $y = g(x)$ がすべての x に対して，

$$g(-x) = g(x)$$

を満たすとき, $g(x)$ を偶関数という．そのグラフは y-軸について対称である

関数 $y = h(x)$ がすべての x に対して，

$$h(-x) = -h(x)$$

を満たすとき, $h(x)$ を奇関数という.

例

関数 $\cos nx$ は偶関数, $\sin nx$ は奇関数

命題

1. $g(x)$ が偶関数ならば

$$\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} g(x)\,dx$$

2. $h(x)$ が奇関数ならば

$$\int_{-L}^{L} h(x)\,dx = 0$$

3. 偶関数 $\times$ 奇関数 $=$ 奇関数, 偶関数 $\times$ 偶関数 $=$ 偶関数,
   奇関数 $\times$ 奇関数 $=$ 偶関数.

この命題より, $f(x)$ が偶関数のとき, Euler の公式の被積分関数 $f(x)\sin(n\pi x/L)$ は奇関数であり $b_n = 0$.

同様に $f(x)$ が奇関数のとき $f(x)\cos(n\pi x/L)$ は奇関数であり, $a_n = 0$.

定理 [フーリエ余弦級数, フーリエ正弦級数]

周期 $2L$ の偶関数のフーリエ級数はフーリエ余弦級数である:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

係数は

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

周期 $2L$ の奇関数のフーリエ級数はフーリエ正弦級数である:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

係数は

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

周期 2π のとき

周期 2π の偶関数に対して定理を用いると

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

周期 2π の奇関数に対して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

係数は

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

定理 [線型性]

・和 $f_1 + f_2$ のフーリエ係数は，f_1 と f_2 のフーリエ係数の和である．

・c を定数とするとき、cf のフーリエ係数は f のフーリエ係数の c 倍である

例 1 方形パルス 周期 2π の関数

$$f^*(x) = \begin{cases} 2k & (-\pi < x < 0), \\ 0 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

は、前回計算した方形波

$$f(x) = \begin{cases} k & (-\pi < x < 0), \\ -k & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

と定数関数 k との和である: $\quad f^* = f + k.$

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

だったので

$$f^*(x) = k + \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

例 **2** 鋸歯状波 次の、周期 2π の関数のフーリエ級数を求めよ

$$f(x) = x + \pi \quad (-\pi < x < \pi)$$

[解] つぎのように書ける:

$$f = f_1 + f_2 \quad (\text{ただし}, f_1 = x,\ f_2 = \pi)$$

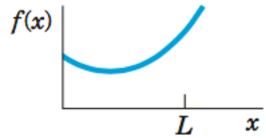
f_2 のフーリエ級数は，最初の項が π でそれ以外は 0 である．
f_1 のフーリエ級数は，前回の問題 8(0) で示したように

$$f_1(x) = 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x - \cdots$$

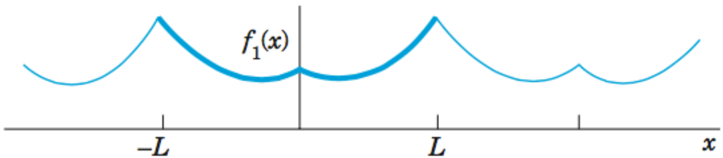
したがって，定理から f のフーリエ係級数は

$$f(x) = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \cdots\right)$$

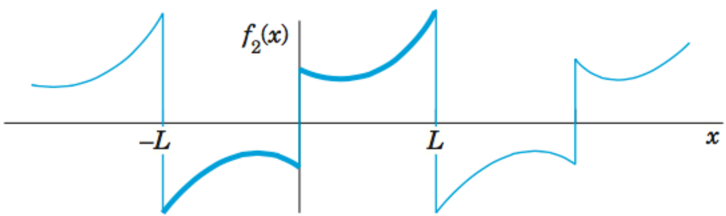
半区間展開



(0) The given function $f(x)$



(a) $f(x)$ continued as an ***even*** periodic function of period $2L$



(b) $f(x)$ continued as an ***odd*** periodic function of period $2L$

無限区間への延長

前ページのようにある区間 $0 \leqq x \leqq L$ だけで与えられている関数 f に対して, フーリエ級数を与えたい.
例としては、長さ L の弦の振動、長さ L の金属棒の温度変化などがあり、いずれも偏微分方程式の解として求めることができる

有限区間で定義された関数を周期函数として延長すればよい
延長の仕方としては周期 $2L$ の偶周期関数に延長するか、奇周期関数に延長すると、単純に周期 L の周期関数に延長するよりも計算が楽になる.

半区間展開

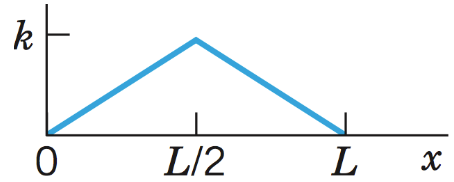
区間 $0 \leqq x \leqq L$ で与えられている関数 f を、まず偶関数として y に関して対称に $-L \leqq x \leqq L$ に延長したあと周期 $2L$ の偶周期関数 f_1 に伸した関数の Fourier 級数を f の偶周期的展開という

奇関数として原点に関して対称に $-L \leqq x \leqq L$ に延長したあと周期 $2L$ の奇周期関数 f_1 に伸した関数の Fourier 級数を f の奇周期的展開という

例 3．3角パルスとその半区間展開

次の関数の偶周期展開と奇周期展開を求めよ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & (0 < x < \frac{L}{2}), \\ \dfrac{2k}{L}(L-x) & (\frac{L}{2} < x < L) \end{cases}$$



1）偶周期的拡張

$$a_0 = \frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\,dx\right] = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right], \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

a_n の最初の積分を部分積分で行うと

$$\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$
$$= \frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

a_n の第 2 項の積分を部分積分で行うと

$$\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{L}{n\pi}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\Big|_{L/2}^{L} + \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= 0 - \frac{L}{n\pi}\left(L-\frac{L}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

となる．よって

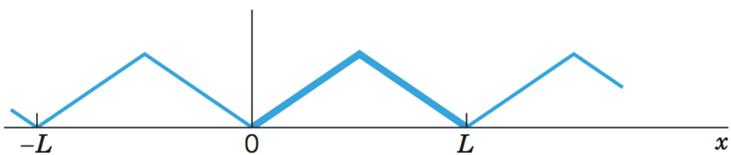
$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)$$

具体的に書くと, $n \neq 2+4k$ のとき $a_n = 0$ かつ

$$a_2 = -\frac{16k}{2^2\pi^2},\ a_6 = -\frac{16k}{6^2\pi^2},\ a_{10} = -\frac{16k}{10^2\pi^2},\ldots$$

したがって偶周期展開は

$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{\pi}{L}x + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L}x + \frac{1}{10^2}\cos\frac{10\pi}{L}x + \cdots\right)$$



2）奇周期的拡張

偶周期展開と同様にして

$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

したがって奇周期展開は

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x - \cdots\right)$$