微 分 方 程 式

11. 級 数 解 法

1．級数解法

線形同次微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

は定数係数でなければ求積法だけで解くことのは難しい。
そこで解を無限級数に展開することを考える。

1) 全部の項が求められる場合も多い
2) 初めの何項かが計算できたとすれば, 1 つの近似解を得る

微分方程式の解法に用いられる無限級数としては

整級数 $\sum a_n x^n$
フーリエ級数 $\sum a_n e^{inx}$

フーリエ級数については後期？

2. 解析的な関数と正則点

以下、用いる関数は $x = x_0$ の周りで解析的とする.

定義 関数 $a(x)$ が $x = x_0$ の周りで解析的とは
$x = x_0$ の近く $|x - x_0| < r$ において収束するべき級数が存在して
$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ と書き表されることをいう.

微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

の係数 $p(x), q(x)$ が点 $x = x_0$ において解析的であるとする.
このとき, 点 $x = x_0$ を正則点という.
変換 $x \to x - x_0$ を行い, 最初から $x_0 = 0$ としてよい.

仮定: $p(x)$, $q(x)$ は次の表示を持つ

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

3. 正則点のまわりの解

$x=0$ を正則点に持つ微分方程式 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ の係数が

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n,\quad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$$

と表されているとき、解析的な解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

を計算する. 微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \end{aligned}$$

4. 二つのべき級数の積

二つの解析的な関数

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

の積をべき級数で表すと

$$\begin{aligned} a(x)b(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right) x^n \end{aligned}$$

となる

5. 正則点のまわりの解

y, y', y'', p, q のべき級数を微分方程式に代入する：

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{m=0}^{n}(m+1)p_{n-m}a_{m+1} + \sum_{m=0}^{n} q_{n-m}a_m\right)x^n
\end{aligned}
$$

$x = 0$ の近傍で成立するので, x_n のすべての係数は$0.$

$$
\begin{aligned}
&2a_2 + p_0a_1 + q_0a_0 = 0, \\
&6a_3 + 2p_0a_2 + (p_1+q_0)a_1 + q_1a_0 = 0, \\
&(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{m=0}^{n}(m+1)p_{n-m}a_{m+1} + \sum_{m=0}^{n} q_{n-m}a_m = 0.
\end{aligned}
$$

初期条件 $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ より順に$a_2, a_3, \ldots$が求まる

例題. つぎの微分方程式の解を整級数を用いて表せ:

$$y'' - xy' - 2y = 0.$$

[解] $x = 0$ は正則点だから $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を代入すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+2)a_n\right] x^n \end{aligned}$$

したがって $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+2)a_n = 0$ より

$$(n+1)a_{n+2} = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

二つ飛びで数列が決まるので偶奇に分ける：

(1) $n = 2m\ (m = 0, 1, \cdots)$:

$$a_{2m+2} = \frac{1}{2m+1} a_{2m} = \cdots = \frac{1}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3\cdot 1} a_0$$

(2) $n = 2m - 1\ (m = 1, 2, \cdots)$:

$$a_{2m+1} = \frac{1}{2m} a_{2m-1} = \cdots = \frac{1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2} a_1$$

ここで階乗の部分を整理する

$$\frac{1}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{2^m m!}{(2m+1)!},$$

$$\frac{1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2} = \frac{1}{2^m m!}.$$

偶数部分をまとめると

$$a_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m m!}{(2m+1)!} a_0 x^{2m+2} = a_0 \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m m!}{(2m+1)!} x^{2m+2} \right).$$

奇数部分をまとめると

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} a_1 x^{2m+1} = a_1 x e^{x^2/2}.$$

指数関数のテイラー展開 $e^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m$ に $t = x^2/2$ を代入した

以上により一般解は

$$y = a_0 \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m m!}{(2m+1)!} x^{2m+2} \right) + a_1 x e^{x^2/2}.$$

6．ルジャンドル関数

$\nu \geqq 0$ を定数としてルジャンドルの微分方程式を考える：

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0$$

$x=0$ は正則点だから $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \nu(\nu+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= [2a_2 + \nu(\nu+1)a_0] + [6a_3 - 2a_1 + \nu(\nu+1)a_1]x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2a_n + \nu(\nu+1)a_n\right]x^n \\ &= [2a_2 + \nu(\nu+1)a_0] + [6a_3 - (1-\nu)(\nu+2)a_1]x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-\nu)(n+\nu+1)a_n\right]x^n \end{aligned}$$

よって $\quad a_{n+2} = \dfrac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{(n+2)(n+1)}a_n. \quad (n=0,1,2,\cdots)$

二つ飛びで数列が決まるので偶奇に分ける：

(1) $n = 2m-2$ $(m = 1, 2. \cdots)$:

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{(2m-2-\nu)(2m-1+\nu)}{2m(2m-1)} a_{2m-2} = \cdots \\ &= (-1)^m \frac{\nu(\nu-2)\cdots(\nu-2m+2)\cdot(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2m-1)}{(2m)!} a_0 \end{aligned}$$

(2) $n = 2m-1$ $(m = 1, 2, \cdots)$:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{(2m-1-\nu)(2m+\nu)}{2m(2m+1)} a_{2m-1} = \cdots \\ &= (-1)^m \frac{(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-2m+1)\cdot(\nu+2)(\nu+4)\cdots(\nu+2m)}{(2m+1)!} a_1 \end{aligned}$$

ここで $a_0 = 1, a_1 = 0$ とすると $a_{2m+1} = 0$ $(m = 1, 2, \cdots)$. この解を $u_\nu(x)$ とする

ここで $a_0 = 0, a_1 = 1$ とすると $a_{2m} = 0$ $(m = 1, 2, \cdots)$. この解を $v_\nu(x)$ とする

7. ルジャンドルの微分方程式の基本解

ルジャンドルの微分方程式 $(1-x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0$ の解

$$u_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\nu(\nu-2)\cdots(\nu-2m+2)\cdot(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$v_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-2m+1)\cdot(\nu+2)(\nu+4)\cdots(\nu+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

定理 $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$ は $|x| < 1$ で収束する.

これよりルジャンドルの微分方程式の一般解は

$$y = c_1 u_\nu(x) + c_2 v_\nu(x)$$

$\nu = 2m$ (偶数) ならば $a_{2k} = 0 \ (k \geqq m+1)$
$\nu = 2m+1$ (奇数) ならば $a_{2k+1} = 0 \ (k \geqq m+1)$
より、$u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$ は多項式となる

8. ルジャンドル多項式

ルジャンドルの微分方程式はνが非負整数の時に多項式が解

定義：ルジャンドル多項式

$$P_{2n}(x) := (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u_{2n}(x)$$

$$P_{2n+1}(x) := (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} v_{2n+1}(x)$$

ここで$u_{2n}(x)$, $v_{2n+1}(x)$の前に定数をかけた
これによって係数を少し綺麗に変形できる

$$u_{2n}(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{2n(2n-2)\cdots(2n-2m+2)\cdot(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$v_{2n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{2n(2n-2)\cdots(2n-2m+2)\cdot(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2m+1)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

9. ルジャンドル多項式の係数

$u_{2n}(x)$ の $2m$ 次の係数 a_{2m} について

$$a_{2m} = \frac{\mathbf{2n(2n-2)\cdots(2n-2m+2)}\cdot\mathbf{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2m-1)}}{(2m)!}$$

$$\mathbf{2n(2n-2)\cdots(2n-2m+2)} = 2^m n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{2^m n!}{(n-m)!}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2m-1)} &= \frac{(2n+2m)!}{(2n)!\cdot(2n+2)(2n+4)\cdots(2n+2m)} \\ &= \frac{(2n+2m)!}{2^m\cdot(2n)!\cdot(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \\ &= \frac{(2n+2m)!\cdot n!}{2^m\cdot(2n)!\cdot(n+m)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P_{2n}(x) &= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}u_{2n}(x) \\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(n!)^2(2n+2m)!}{(2m)!(2n)!(n-m)!(n+m)!}x^{2m} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(2n+2m)!}{(2m)!(n-m)!(n+m)!}x^{2m}.\end{aligned}$$

10. ルジャンドル多項式・その2

定理

$$P_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(2n+2m)!}{(2m)!(n-m)!(n+m)!} x^{2m},$$

$$P_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(2n+2m+1)!}{(2m+1)!(n-m)!(n+m)!} x^{2m+1}$$

もしくは

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n+2k)!} x^{n-2k}.$$

証明：奇数の場合も偶数と同じように証明できる
最後の式は丁寧に偶奇を分けて比較する（演習問題）

11. ロドリーグの公式

定理 ルジャンドル多項式 P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ は次の表示を持つ：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

証明：偶数の場合に示す

$$\frac{1}{2^{2n}(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2 - 1)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} (-1)^m x^{4n-2m}$$

ここで $\displaystyle\binom{2n}{m} = \frac{(2n)!}{m!(2n-m)!}$, $\displaystyle\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} x^{4n-2m} = \frac{(4n-2m)!}{(2n-2m)!} x^{2n-2m}$ より

$k = n - m$ と置くと

$$\frac{1}{2^{2n}(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2 - 1)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!} \sum_{m=0}^{\mathbf{n}} (-1)^m \frac{(2n)!}{m!(2n-m)!} \frac{(4n-2m)!}{(2n-2m)!} x^{2n-2m}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n+2k)!}{(2k)!(n-k)!(n+k)!} x^{2k}$$

となり, 前の表示と一致する. 奇数の場合も同様 □

12. 演習問題

級数を用いてつぎの微分方程式を解け,

(1) $y'' + xy' + y = 0.$

(2) $(1 - x)y'' + xy' - y = (1 - x)^2.$

(3) $y'' - xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$