微 分 方 程 式

7. 線形常微分方程式

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = R(x)$$

を n 階線形微分方程式といい，$R(x) \equiv 0$ のとき同次（斉次)，$R(x) \neq 0$ のとき非同次（非斉次）という．

1．2階線形同次微分方程式

2階線形同次微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

において微分作用素

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x)$$

を導入すると，線形同次微分方程式はつぎのように表される：

$$Ly = 0$$

2. 線形同次微分方程式の性質

$$L(y) = y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

重ね合わせの原理

同次微分方程式の 2 つの解を $y_1(x), y_2(x)$ とする。任意の定数 c_1, c_2 に対して $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ もまた解.

［証明］ $y_1(x), y_2(x)$ が同次微分方程式の解であるから $L(y_1) = 0, L(y_2) = 0$. したがって,

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = 0$$

3. 一次独立性

$$L(y) = y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

区間 I で定義された 2 つの関数 $u_1(x), u_2(x)$ の 1 次結合について $c_1u_1(x) + c_2u_2(x) = 0$ が I に属するすべての x に対して成立するのは $c_1 = c_2 = 0$ のときに限るとき，2 つの関数 $u_1(x), u_2(x)$ は I において**1 次独立**であるといい，その他の場合には**1 次従属**であるという.

1 次従属の必要条件

$u_1(x), u_2(x)$ が 1 次従属ならば,

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

が恒等的に成立する.

［証明］

1次従属のときは定義から少なくとも1つが0でない定数 c_1, c_2 が存在して，関係

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = 0$$

が恒等的に成立する．これを x について微分すると

$$c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) = 0$$

も恒等的に成立する．この二つの方程式を c_1, c_2 を未知数とする連立**1**次方程式であると考えたとき，解 $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ をもつための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

が恒等的に成立することである．$\square$

［注意］ 上の定理の逆は成立しない。反例：

$$u_1 = x^2, \quad u_2 = x|x|$$

$$u_1'(x) = 2x, \quad u_2'(x) = \begin{cases} 2x & (x \geqq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$$

より行列式 $= 0$ が恒等的に成立するが，$u_1(x), u_2(x)$ が 1 次独立である．実際，次式を解いて $(c_1, c_2) = (0, 0)$ を得る．

$$c_1 x^2 + c_2 x^2 = 0 \ (x > 0), \quad c_1 x^2 - c_2 x^2 = 0 \ (x < 0)$$

［定義］ 2 つの関数 $u_1(x), u_2(x)$ からつくった行列式

$$W(u_1, u_2)(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}$$

をロンスキアン（**Wronskian**）という．

4. 同次微分方程式の解のロンスキアン

［定理］同次微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の 2 つの解を $y_1(x), y_2(x)$ とすれば，ロンスキアン $W(y_1, y_2)(x)$ は

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(t)\, dt \right)$$

したがって，ある 1 点 x_0 で $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ ならばすべての点で $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, 　また $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ ならば $W(y_1, y_2)(x) \equiv 0$ が成立する.

［証明］ $$\frac{d}{dx}W(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$
$$= y_1(-P y_2' - Q y_2) - (-P y_1' - Q y_1) y_2$$
$$= -P(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -PW(y_1, y_2).$$

$u = W(y_1, y_2)$ は一階線形方程式 $u' = -Pu$ の解なので変数分離法で解いて定理を得る

【系】同次微分方程式の2つの解 $y_1(x), y_2(x)$ が1次独立ならば $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ である

［証明］ 次の補題はあとで証明するので今は認めることにする：
［補題］ $P(x)$, $Q(x)$ が区間 I で連続な関数とする。初期値として $y(x_0) = a, y'(x_0) = b$ をもつ $(*)$ の解は I で一意に存在する。

$W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ とすると

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0, c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0$$

を満たす $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ が存在する。

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

とおくと $y(x)$ は線型方程式の解であって $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$ なので解の一意性から $y \equiv 0$ となる. したがって、$y_1(x), y_2(x)$ は1次従属。対偶をとって1次独立なら $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ □

5. 基本解

定義　同次微分方程式

$$(*) \qquad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

の 1次独立な 2 つの解 $y_1(x), y_2(x)$ の組を基本解という

[定理] (1) 2階同次微分方程式 $(*)$ は1次独立な 2 つの解をもつ.
(2) $(*)$ の任意の解は1次独立な 2 つの解の 1次結合としてただ 1 通りに表される.

5. 基本解・続き

［証明］　補題より

・初期条件 $y(x_0)=1, y'(x_0)=0$ を満足する解 $y_1(x)$,

・初期条件 $y(x_0)=0, y'(x_0)=1$ を満足する解 $y_2(x)$

が一意に存在することが分る

$y_1(x)$, $y_2(x)$ は1次独立な解である．なぜなら x_0 を含むある範囲で

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$$

が成立したとすれば，そこで

$$c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)=0$$

も成立する．このとき $x=x_0$ とおけば

$$c_1\cdot 1+c_2\cdot 0=0, \quad c_1\cdot 0+c_2\cdot 1=0$$

より $c_1=c_2=0$ となるからである．よって(1)が示された。

5. 基本解・続き 2

(2) $y_1(x)$, $y_2(x)$ は $(*)$ の基本解，$y(x)$ を $(*)$ の任意の解とする．
ロンスキアン $W(y_1, y_2) \neq 0$ より連立方程式

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0), \quad c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

を満足する定数 c_1, c_2 が存在する．重ね合わせの原理から $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ も $(*)$ の解であり，$y(x)$ と同じ初期値 $y(x_0), y'(x_0)$ をもつから 2 つの解は一致する, すなわち,

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

次に **2 通りの表し方**があったとすると
$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = d_1y_1(x) + d_2y_2(x)$ から

$$(c_1 - d_1)y_1(x) + (c_2 - d_2)y_2(x) = 0.$$

$W(y_1, y_2) \neq 0$ より $c_1 - d_1 = 0, c_2 - d_2 = 0$. □

6. 線型方程式の解の全体

同次微分方程式

$$(*) \qquad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

の 1 次独立な 2 つの解を $y_1(x), y_2(x)$ とする。

$y_1(x), y_2(x)$ の 1 次結合

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

全体 $(c_1, c_2$ は定数）が $(*)$ の一般解を与えている.

7. 例題

例題 1. (1) $1, x$ は 1次独立である,

(2) $\cos x, \sin x$ は1次独立である.

(3) x, x^2 は1次独立であるが, $\log x, \log x^2$ は1次従属.

［証明］

$$W(1,x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$W(x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0$$

$c_1 \log x + c_2 \log x^2 = (c_1 + 2c_2) \log x$ より $c_1 = 2, c_2 = -1$ に対して成立しているから1次従属である.

8. 問題

問題 つぎの関数は1次独立であることを証明せよ.

(1) $1, x, ..., x^n$.

(2) $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}$.

(3) $a_1, a_2, ...a_n$ が異なる実数であるとき $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, ..., e^{a_n x}$.