局所大域原理について

～諸例と Brauer-Manin 障害の紹介～

植松 哲也

東京大学大学院数理科学研究科

2011 年 8 月 30 日 / 玉原セミナーハウス (群馬)

セルフイントロダクション

名前 植松 哲也
所属 博士課程 2 年
指導教官 宮岡洋一先生 (斎藤秀司先生)
専門 整数論 (数論幾何) 局所大域原理，不定方程式
趣味 読書，自転車

局所大域原理とは

局所大域原理 (Local-Global principle)

局所的な情報の統合によって
大域的な情報が得られること.

いくつかの例

- 日常的な例
    - 会議において，各人の賛成から，会議としての決議を出す．(全会一致)
- 数学的な例
    - $\mathbb{C}$ 上の有理型関数は特異点周りの様子で決まる．
    - 曲面の曲率形式から Euler 標数が求まる (Gauss-Bonnet).
    - 臨界点での指数から多様体の homotopy 型が得られる (Morse).

    etc...

局所体と大域体

- 大域体:
    - $\mathbb{Q}$ の有限次拡大,
    - $\mathbb{F}_p(T)$ の有限次拡大 (p は素数)
- 局所体:
    - $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,
    - $\mathbb{F}_q((T))$(q は p ベキ)

以下，大域体としては $\mathbb{Q}$ を，
局所体としては $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R} =: \mathbb{Q}_\infty$ のみを扱う.

局所大域原理

環 (体)R に関する性質 $P(R)$ が与えられたとき,

Definition (P に対する局所大域原理)

$$\forall p \text{ に対して } P(\mathbb{Q}_p) \text{ が成立} \Rightarrow P(\mathbb{Q}) \text{ が成立.}$$

Remark

$\forall$ でなく,「ほとんどすべての」ということもある.

Remark

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ のかわりに, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ ということもある.

簡単な成立例

Example (整数環の単数群)

- $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$ ($p = \infty$ に対しては，$\mathbb{R}$ を取る)
- $a \in \mathbb{Z}$ に対し，$P(R)$: $a \in R^*$.

Helmut Hasse (1898-1979)

picture: cited from "Mathematics Gallery" in the site of University of Connecticut.

(http://www.math.uconn.edu/MathLinks/Mathematicians_gallery.php)

Example (2 次形式 (Hasse-Minkowski の定理))

- $R = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$
- a, b, $c \in \mathbb{Q}$ に対し, $P(R)$:
  $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$ は非自明な解を R において持つ.

Remark

3 変数以上でも成り立つ. 3 変数の場合の証明が本質的.

Remark

4 元数環と密接な関係がある:

$$\left(\frac{a, b}{R}\right) \cong M(2, R) \Leftrightarrow ax^2 + by^2 = 1 \text{ は } R \text{ に解を持つ.}$$

さらに，一般化することができる：

Example (中心的単純環)

- $R = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p$
- $\mathbb{Q}$ 上の中心的単純環 A に対し，$P(R)$:

$$\exists n \in \mathbb{Z} \ s.t. \ A \otimes_{\mathbb{Q}} R \cong M(n, R)$$

Remark

これは次のようにも言い表すことができる：

$$\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) \to \prod_p \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \text{ は単射.}$$

実は，より強く，次の結果が成り立つ：

Theorem (Hasse の相互法則)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \bigoplus_p \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}_p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は完全系列.

2 次形式との比較

Example (2 次形式 (Hasse-Minkowski の定理))

- $R = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$
- a, b, $c \in \mathbb{Q}$ に対し, $P(R)$:

  $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$ は非自明な解を R において持つ.

それでは,

- 次数をあげるとどうか？
- 変数を増やすとどうか？

反例および問題提起

Counterexample (Selmer, 1954)

$3X^3 + 4Y^3 + 5Z^3 = 0$ は局所大域原理を満たさない.

したがって,

Problem

1. 局所大域原理の反例構成
2. どのような方程式のクラスに対して，局所大域原理は成立するのか？

を考えることに関心がある.

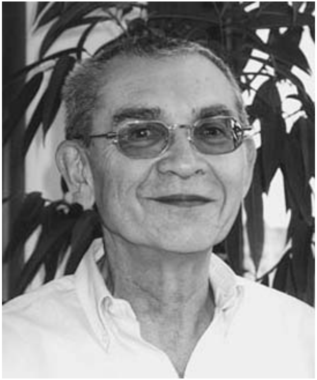
Brauer-Manin 障害とは？

Yu. I. Manin(1970):
国際数学者会議における講演で，

- $F(X) = F(X_1, \ldots, X_n)$:$\mathbb{Q}$ 係数斉次多項式
- $P(R)$:$F(X) = 0$ が R で非自明な解を持つ
- $\forall p\ P(\mathbb{Q}_p)$ と仮定する．

$\Rightarrow P(\mathbb{Q})$ が成り立たないための十分条件を与える量を構成．

この有理数解存在の障害といえる量が，今日，Brauer-Manin 障害と呼ばれているもの．



Yuri Ivanovich Manin(1937-)

picture: cited from “The MacTutor History of Mathematics archive” in the site of University of St. Andrews

(http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Manin.html)

- (射影) スキーム: 有限個の斉次方程式の共通零点
- 単位的可換環 $R \rightsquigarrow$ スキーム $\operatorname{Spec} R$

K を体，X を K 係数斉次方程式 F から定まるスキームとし，L/K を拡大体とする.

Definition (有理点)

$$X(L) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}ch_K}(\operatorname{Spec} L, X)$$

を X の L 有理点という.

このとき，次が成り立つ:

Proposition (有理点と解の対応)

$$X(L) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{F \text{ の } L \text{ における解}\}.$$

Brauer 群

スキーム X に対し, X の (cohomological) Brauer 群とよばれる群

$$\mathrm{Br}(X) := H^2_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m},X})$$

が定まる (体の Brauer 群の一般化).

Proposition

1. $\mathrm{Br} : (\mathit{Sch}) \to (\mathit{Ab}); X \rightsquigarrow \mathrm{Br}(X)$ は反変函手.
2. 体 K に対し, $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}\, K)$ は通常の Brauer 群 $\mathrm{Br}(K)$ と自然に同型.

アデール点

X を $\mathbb{Q}$ 上のスキームとするとき,

Definition (アデール点)

$$X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = \prod_p X(\mathbb{Q}_p) (\text{制限直積})$$

なる集合が定義される.
$\forall p\ X(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$ のとき, $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ は空ではない.
とくに X が射影スキームのとき,

$$X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = \prod_p X(\mathbb{Q}_p)$$

である.

Brauer-Manin 集合

このとき，次のペアリングが定義できる:

Definition (Brauer-Manin ペアリング)

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \times \mathrm{Br}(X) &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((x_p), \mathcal{A}) &\mapsto \sum_p \mathrm{inv}_p(x_p^* \mathcal{A}) \end{aligned}$$

Definition (Brauer-Manin 集合)

X の Brauer-Manin 集合 $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}}$ を次で定める:

$$\{(x_p) \in X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) | \forall \mathcal{A} \in \mathrm{Br}(X)\ \langle (x_p), \mathcal{A} \rangle = 0\}.$$

Brauer-Manin 障害

Theorem (Hasse の相互法則)

$$0 \to \mathrm{Br}(\mathbb{Q}) \to \bigoplus_p \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}_p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

は完全系列.

を用いると，次のことが示せる:

Theorem (Manin,1970)

$$X(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}).$$

Corollary (Brauer-Manin 障害)

$$X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}} = \emptyset \Rightarrow X(\mathbb{Q}) = \emptyset.$$

いくつかの注意，関連する話題

- この Brauer-Manin 障害を用いることで，多くの反例が構成されている．
- $X(\mathbb{Q})$ と $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}}$ の間にどれくらいのギャップがあるのかが問題である．一般には，ギャップは存在する (A. Skorobogatov, 1999). 一方で次のような予想もある:

Conjecture (J.-L. Colliot-Thélène, 1993)

幾何学的有理な非特異射影代数多様体に対しては，Brauer-Manin 障害が有理点非存在の唯一の障害であろう．

- Brauer-Manin 障害は，今では，descent obstruction とよばれる障害の特別な場合として解釈することができる．

ご清聴ありがとうございました.