# 微 分 方 程 式

## 10. 記号解法 2

# 1. 簡便法



微分方程式

$$f(D)y = R(x)$$

の特殊解 $y = \dfrac{1}{f(D)}R(x)$ を逆作用素で計算するのは容易ではない

$R(x)$ が特殊な形の場合には個別に簡単に計算する方法がある.

(i) $R(x)$ が $k$ 次多項式のとき.

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-m}D^m, \quad (a_{n-m} \neq 0)$$

とする。$\dfrac{1}{f(D)}$ を次のように計算する

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(D)} &= \frac{1}{a_{n-m}D^m + a_{n-m}D^{m-1} + \cdots + a_1 D^{n-1} + D^n} \\
&= \frac{1}{a_{n-m}D^m}\frac{1}{1 + \dfrac{a_{n-m-1}}{a_{n-m}}D + \cdots + \dfrac{a_1}{a_{n-m}}D^{n-m-1} + \dfrac{1}{a_{n-m}}D^{n-m}}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+\frac{a_{n-m-1}}{a_{n-m}}D+\cdots+\frac{a_1}{a_{n-m}}D^{n-m-1}+\frac{1}{a_{n-m}}D^{n-m}}$$

の部分を等比級数の和と思って計算する。

つまり形式的に $D$ が $\mathbf{0}$ に近いとして

$$N=\frac{a_{n-m-1}}{a_{n-m}}D+\cdots+\frac{a_1}{a_{n-m}}D^{n-m-1}+\frac{1}{a_{n-m}}D^{n-m}$$

とおくと、$N$ も 0 に近いと思える。そこで

$$\frac{1}{1+N}=1-N+N^2-N^3+\cdots$$

と整級数に展開して, $R(x)$ が $k$ 次多項式であることに注意すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(D)}R(x) &= \frac{1}{a_{n-m}D^m}(1+b_1D+b_2D^2+\cdots+b_kD^k+b_{k+1}D^{k+1}+\cdots)R(x)\\ &= \frac{1}{a_{n-m}D^m}(1+b_1D+b_2D^2+\cdots+b_kD^k)R(x)\end{aligned}$$

例題

微分方程式 $(D^2-2D-3)y=x^2$ の特殊解を求めよ.

[解]

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2-2D-3}x^2 &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}D-\frac{1}{3}D^2} \\ &= -\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}D-\frac{1}{3}D^2\right)+\left(\frac{2}{3}D-\frac{1}{3}D^2\right)^2-\cdots\right)x^2\end{aligned}$$

ここで $D^3$ 以上は切り捨てていいので

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2-2D-3}x^2 &= -\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2+\frac{4}{9}D^2\right)x^2 \\ &= -\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}D+\frac{7}{9}D^2\right)x^2 \\ &= \mathbf{-\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{14}{9}\right)}.\end{aligned}$$

(ii) $R(x) = ke^{ax}$ ($k, a$ は定数) のとき. 

$$f(D) = (D-a)^m g(D), \quad (g(a) \neq 0)$$

とすれば 次が成り立つ：

$$\frac{1}{(D-a)^m g(D)} ke^{ax} = \frac{ke^{ax}}{g(a)} \frac{x^m}{m!}.$$

証明 $De^{ax} = ae^{ax}, \cdots, D^k e^{ax} = a^k e^{ax}$ だから 次が成り立つ：

$$f(D)e^{ax} = f(a)e^{ax}$$

まず $m = 0$ のときを示す。もし，$f(a) \neq 0$ ならば

$$f(D)\left(\frac{1}{f(a)}e^{ax}\right) = \frac{1}{f(a)} f(D)e^{ax} = \frac{1}{f(a)} f(a)e^{ax} = e^{ax}$$

なので $\dfrac{1}{f(D)}e^{ax} = \dfrac{1}{f(a)}e^{ax}$.

次に $f(D)=(D-a)^m g(D), \quad (g(a)\neq 0)$ とすると

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^m}\frac{1}{g(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^m}\frac{1}{g(a)}e^{ax}.$$

そこで $\dfrac{1}{(D-a)^m}e^{ax}$ を求める。$m=1$ のときは

$$\frac{1}{D-a}R(x)=e^{ax}\int e^{-ax}R(x)\,dx$$

であったことを思い出すと

$$\frac{1}{D-a}e^{ax}=e^{ax}\int e^{-ax}e^{ax}\,dx=e^{ax}x$$

一般には $m$ 回積分になる：

$$\frac{1}{(D-a)^m}e^{ax}=e^{ax}\int dx\cdots\int e^{-ax}e^{ax}\,dx=e^{ax}\frac{x^m}{m!}.$$

例題　つぎの微分方程式の特殊解を求めよ．

$$(D-2)(D^2-1)y = e^{2x}.$$

解答

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(D-2)(D^2-1)}e^{2x} &= \frac{1}{D-2}\left(\frac{1}{D^2-1}e^{2x}\right) \\
&= \frac{1}{D-2}\left(\frac{1}{2^2-1}e^{2x}\right) \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{D-2}e^{2x} \\
&= \mathbf{\frac{1}{3}xe^{2x}}
\end{aligned}$$

(iii) 公式

$$f(D)\left(e^{ax}R(x)\right) = e^{ax}f(D+a)R(x)$$

$$\frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}R(x)\right) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}R(x)$$

$f(D) = D$ のとき

$$D\left(e^{ax}R(x)\right) = ae^{ax}R(x) + e^{ax}DR(x) = e^{ax}(D+a)R(x)$$

となり成り立っている

$f(D) = D^n$ のとき, ライプニッツの法則より

$$D^n\left(e^{ax}R(x)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k e^{ax}D^{n-k}R(x) = e^{ax}(D+a)^n R(x)$$

一般に $f(D)$ が $D$ の多項式の時も項別に考えると

$$f(D)\left(e^{ax}R(x)\right) = e^{ax}f(D+a)R(x)$$

次に

$$\frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}R(x)\right)=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}R(x)$$

を示す．そのためには

$$f(D)\left[e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}R(x)\right]=e^{ax}R(x)$$

を示せばいい。公式 $f(D)\left(e^{ax}R(x)\right)=e^{ax}f(D+a)R(x)$ より

$$\begin{aligned} f(D)\left[e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}R(x)\right] &= e^{ax}f(D+a)\frac{1}{f(D+a)}R(x) \\ &= e^{ax}R(x) \end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}R(x)\right)=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}R(x)$$

(iv) $R(x) = e^{ax}P_k(x)$ ($P_k(x)$ は $k$ 次多項式）のとき．



前の公式

$$\frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}R(x)\right) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}R(x)$$

より

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}P_k(x) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}P_k(x).$$

よって $\dfrac{1}{f(D+a)}P_k(x)$ の部分は (i) の方法で求めることができる

例題 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ.

(1) $(D-1)y = \sin x$.

［解］　次の公式を思い出す

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

$\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix}$ なので $\dfrac{1}{D-1}e^{ix}$ の虚数部分を取る

$$\begin{aligned}\frac{1}{D-1}e^{ix} &= \frac{1}{i-1}e^{ix} = \frac{i+1}{-2}(\cos x + i\ \sin x) \\ &= -\frac{1}{2}(\cos x - \sin x) - \frac{i}{2}(\sin x + \cos x)\end{aligned}$$

より特殊解は

$$\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\sin \mathbf{x} + \cos \mathbf{x})$$

(2) $(D^2 + D + 1)y = e^x x.$ 

[解]

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D^2+D+1}e^x x &= e^x \frac{1}{(D+1)^2+(D+1)+1}x \\
&= e^x \frac{1}{3+3D+D^2}x \\
&= e^x \frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(D+\frac{1}{3}D^2\right)}x \\
&= e^x \frac{1}{3}\left(1 - D\cdots\right)x \\
&= \mathbf{\frac{e^x}{3}\left(x-1\right)}
\end{aligned}
$$

(3) $(D-1)y = xe^x \cos x$. 

［解］ $\cos x = \mathrm{Re}\, e^{ix}$ より $xe^x e^{ix}$ の実数部を取る

$$\frac{1}{D-1}(xe^x e^{ix}) = \frac{1}{D-1} xe^{(1+i)x} = e^{(1+i)x} \frac{1}{(D+1+i)-1} x$$

$$\begin{aligned} &= e^{(1+i)x} \frac{1}{D+i} x = e^{(1+i)x} \frac{1}{i} \frac{1}{1-iD} x \\ &= -ie^{(1+i)x}(1 + iD + \cdots)x = -ie^{(1+i)x}(x+i) \\ &= -ie^x(\cos x + i \sin x)(x+i) \\ &= e^x(\cos x + x \sin x) - ie^x(x \cos x - \sin x) \end{aligned}$$

であるから，実数部を取ると求める特殊解は

$$\mathbf{e^x(\cos x + x \sin x)}$$

問 つぎの微分方程式の特殊解を求めよ. 

(1) $D(D^2-5D+6)y=x^2$

(2) $(D-1)^2(D+1)y=e^x$

(3) $(D^2+1)y=\cos x$

(4) $(D-2)y=x^2e^x\sin x$