微 分 方 程 式2

5. ラプラス変換の性質3

$\lim\limits_{\mathbf{Re}\, s \to \infty} \mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}$ について

$f(t)$ が $0 < t < \infty$ で区分的に連続かつ指数 α 位の関数のとき, 次の結果を証明せよ.

1) $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, s \to \infty} \mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = 0.$

(1) 仮定から $|f(t)| \leqq Me^{\alpha t}$ $(0 < t < \infty)$ を満足する定数 M が存在する.

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\infty} e^{-st} t^n f(t) dt \right| &\leqq \int_0^{\infty} \left| e^{-st} \right| t^n \left| f(t) \right| dt \\
&\leqq \int_0^{\infty} e^{-t\mathrm{Re}\, s} t^n M e^{\alpha t} dt = M \int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{Re}\, s - \alpha)t} t^n\, dt \\
&= \frac{K\, n!}{(\mathrm{Re}\, s - \alpha)^{n+1}} \to 0 \qquad (\mathrm{Re}\, s \to \infty)
\end{aligned}$$

$f(t)/t$ の変換

定理　$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(t)$ とする。$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t}$ が存在するならば

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma.$$

証明

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma &= \int_s^\infty d\sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t}f(t)\,dt = \int_0^\infty f(t)\,dt\int_s^\infty e^{-\sigma t}d\sigma \\ &= \int_0^\infty f(t)\left[-\frac{e^{-\sigma t}}{t}\right]_{\sigma=s}^\infty dt = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}.\end{aligned}$$

例題

1. $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$.

まず

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}-e^{-bt}\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{-bt}\right\}=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$$

に注意する。

$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}=b-a$ は存在するので

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{1}{\sigma+a}-\frac{1}{\sigma+b}\right)d\sigma=\left[\log\frac{\sigma+a}{\sigma+b}\right]_s^\infty=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

2. $\dfrac{\sin\omega t}{t}$.

まず $\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ に注意する。

$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\sin\omega t}{t} = \omega$ は存在

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{\omega}{\sigma^2+\omega^2}\,d\sigma = \left[\tan^{-1}\frac{\sigma}{\omega}\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{\omega}.$$

複合例

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > a)$, $\lim_{t \to +0} \dfrac{f(t)}{t}$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ はともに存在なら

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma.$$

証明

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \frac{1}{s}\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma.$$

1. 次の関数のラプラス変換を求めよ

(1) $\dfrac{1-\cos at}{t}$ (2) $\dfrac{\sinh at}{t}$ (3) $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin a\tau}{\tau}\,d\tau \quad (a>0)$

2. 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$$

3. 次の各式を証明せよ

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-\cos bt}{t}\right\} = \log\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{s-a}.$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin^2\tau}{\tau}\,d\tau\right\} = \frac{1}{2s}\log\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}.$$

合成積（たたみ込み）

$t > 0$ で定義された2つの関数 $f(t), g(t)$ に対して積分

$$f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds$$

が存在するとする。このとき $f * g$ を f と g との合成積（たたみ込み）という

合成積の性質

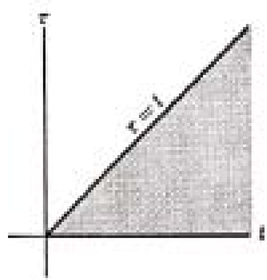
(1) [交換法則] $f * g = g * f$
(2) [分配法則] $f * (g + h) = f * g + f * h$
(3) [結合法則] $(f * g) * h = f * (g * h)$

(1) の証明 $\sigma = t - s$ と変数変換して

$$f * g = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t f(t-\sigma)g(\sigma)\,d\sigma = g * f$$

(3) の証明

$$
\begin{aligned}
(f*g)*h &= \int_0^t \left(\int_0^s f(\sigma)g(s-\sigma)\,d\sigma \right) h(t-s)\,ds \\
&= \int_0^t ds \int_0^s f(\sigma)g(s-\sigma)h(t-s)\,d\sigma \\
&= \int_0^t d\sigma \int_\sigma^{\mathbf{t}} f(\sigma)g(s-\sigma)h(t-s)\,ds \\
&= \int_0^t f(\sigma)\,d\sigma \int_\sigma^t g(s-\sigma)h(t-s)\,ds \quad (s-\sigma=s_1) \\
&= \int_0^t f(\sigma)\,d\sigma \int_0^{t-\sigma} g(s_1)h(t-\sigma-s_1)\,ds_1 = f*(g*h).
\end{aligned}
$$



合成積のラプラス変換

[定理] $\mathcal{L}\{f\} = F(s), \mathcal{L}\{g\} = G(s)$ とすれば

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s).$$

[証明]

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du \int_0^\infty e^{-sv} g(v)\,dv = \iint e^{-s(u+v)} f(u)g(v)\,dudv$$

ここで変数変換 $t = u+v, \tau = v$ をほどこすと $u > 0, v > 0$ は $\{(t,\tau)\,|\,t > \tau > 0\}$ に移る：

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \right) dt = \mathcal{L}\{f * g\} \end{aligned}$$

□

例

次の積分のラプラス変換を求めよ.

(1) $I(t) = \int_0^t \sin a(t-\tau)\cos b\tau \, d\tau$

(2) $J(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \sinh \omega\tau \, d\tau$

[解] (1)

$$\mathcal{L}\left\{I\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\sin at\right\}\mathcal{L}\left\{\cos bt\right\} = \frac{a}{s^2+a^2}\frac{s}{s^2+b^2}$$

(2)

$$\mathcal{L}\left\{J\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}\mathcal{L}\left\{\sinh \omega t\right\} = \frac{1}{s+a}\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$$

問 次の積分のラプラス変換を求めよ.

(1) $\int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cos \omega\tau \, d\tau$ (2) $\int_0^t e^{-a(t-\tau)t} \cosh \omega\tau \, d\tau$

初期値定理

【定理】 $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$, $\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t) = a$ が存在すれば

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = a.$$

【証明】

$$\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \left[e^{-st}f(t)\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty se^{-st}f(t)dt = sF(s) - f(+0)$$

ここで $s \to +\infty$ の極限をとると、 $f'(t)$ の性質がよければ左辺は 0 に収束するので, 定理を得る。 □

注意 逆に $\displaystyle\lim_{s\to\infty} sF(s)$ が存在しただけでは $\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t)$ が存在するとは限らない

最終値定理

【定理】 $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = a$ が存在すれば

$$\lim_{s\to+0} sF(s) = a.$$

【証明】

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty s e^{-st} f(t)dt = sF(s) - f(+0)$$

ここで $s \to +0$ の極限をとると、 $f'(t)$ の性質がよければ左辺は

$$\lim_{s\to+0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \int_0^\infty f'(t)dt = a - f(+0)$$

となるので定理を得る □

注意 $f(t) = \sin t$ は $F(s) = 1/(s^2+1)$ となるので

$\lim_{s\to+0} sF(s) = 0$ だが $\lim_{t\to\infty} f(t)$ は存在しない例である

例

$\omega > 0$ の時、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{t}\,dt$ の値を求めよ

[解] $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin\omega\tau}{\tau}\,d\tau$ とおく. p.4 より

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{\omega}{\sigma^2+\omega^2}\,d\sigma = \left[\tan^{-1}\frac{\sigma}{\omega}\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{\omega}$$

だったので

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{\omega}\right).$$

したがって

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{t}\,dt = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to+0} sF(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{\omega}\right) = \frac{\pi}{2}.$$