SGC ライブラリ- 52

理工系のための
トポロジー・圏論・微分幾何

双対性の視点から

谷村　省吾 著

サイエンス社

まえがき

本書はトポロジー・圏（カテゴリー）論・微分幾何学に関する入門書である．理工系の大学院生なら十分読めるであろうし，学部生にも読んでもらえるような平易な解説書にすることを目指した．さらには，これらの数理の話題を通して，世界の深くて普遍的な本質を捉える「まなざし」のようなものを読者に伝えたいと思った．その基本となる視点が「双対性」である．私が本当に伝えたかったのは，双対性という，ものの見方・思考の仕方・世界のあり方である．双対性は，一度気がつき始めると，ここにもあそこにもあることが見えてくるような普遍的な概念なのだが，それが埋め込まれている文脈や状況から引き剥がしてしまうと，認識も説明も不可能な概念なのである．そこで，トポロジー・微分幾何学・線形代数という舞台を借りて，位相空間・多様体・ベクトル空間という人物たちの動きを読者に見てもらい，彼らが語る言葉を読者に聞いてもらうことによって，双対性の何たるかを読者に感じてもらおうとした，と言った方が，この本の性格の描写として適当である．

私の専門は理論物理で，私自身は，学部では固体物理を中心に勉強し，大学院では素粒子論を専攻した人間である．もちろん数学の勉強もしたが，自分自身が数学者だと思ったことはないし，誰も私のことを数学者だとは思っていない．にもかかわらず私が数学の解説書を書くのはなぜだろうか．

一つには，現代の理論物理にはトポロジーや微分幾何学の方法が普及してきており，私もそれをよく利用している研究者であり，今後，学生や研究者がこれらの数学にもっと親しみを持って，これらの数学を使ってもらえたらよいと思うからである．また，圏論は情報科学の分野でも使われるようになっていると聞く．ただし，あまりナイーブに「トポロジーや微分幾何学は物理に使える，応用できる」と言ってしまうと，過度の期待や失望を招きかねない．実際，多くの物理学者は微分幾何学がなくても困らない，困っていない，というのも事実である．むしろそれらの使い道は自分で考えていくものなのである．例えば，ニュートンやライプニッツが発明した微分積分は，使ってみたら便利で，使い道がたくさんあったから広まったのであって，発明以前から人々が微分積分学の出現を待ち望んでいたわけではない．同様のことがトポロジーにも圏論にも微分幾何学についても言えると思う．私は，トポロジーや圏論や微分幾何学は，素人には近寄りがたい「高級な数学」ではなく，この世界に生起する出来事を語るためのとても自然な言語であり，これらを自分の言葉として活用できるようにしておくと，いろいろなことが生き生きと見えてきて楽しいですよ，ということを伝えたいのである．

もう一つには，正規の数学者ではない私の方が数学の解釈や意味を多くの読者に伝えやすいだろうと思うからである．由緒正しい数学書では，定義・定理・証明を整然と書くというスタイルが確立している．しかし，そうやっていると，平易な言葉で説明するところまで手が回らないものである．私は数学者ではない身上の気楽さから，証明などそっちのけで，この数学を通して数学者や物理学者は何を語りたかったのか，何を見ようとしているのか，という本音や意味論，心意気みたいなこ

とを議論できる立場にいる．数学も物理学も人の営みである．人の営みである以上，作った人が何に注意を払ったか，何を大事だと思ったか，という意思の働きが必ずその学問に吹き込まれている．数学を学ぶということは，そこに込められた意思や視点まで汲み取って学ぶことだと思う．人まねをしようと言うつもりはないが，先人が注意深く考えたことは知っておく価値がある．

もう一つ理由を挙げると，私は双対性というものの見方がとても面白いと思うし，大切だと思うし，これを他の人たちに教えたいと思うからである．また，そうすることは，双対性の意味を私に教えてくれた人たちに感謝を示すことにもなると思うからである．礼を言うなら，真っ先に言うべき相手は古結明男（こけつあきお）氏である．古結氏は私の学生時代以来の親友で，数学科の学生であった氏は，さまざまな分野にわたって数学を私に教えてくれた．「私は古結に数学を教わった」と言ってもよいくらいのものである．とりわけ双対性は彼にとっても最も意義深いテーマであったらしく，「双対性とスペクトル理論」は彼の一連の講義の中でも最も力の入ったテーマであった．また，近年，再び双対性の意義を私に認識させてくれた小嶋泉氏の影響は大きい．とくに小嶋氏が唱え，定式化した「ミクロ・マクロ双対性」についての氏との議論を通して，何度も繰り返し姿形を変えながら物理学の中に双対性が現れてくることに気づかされる．21 世紀の物理学では双対性の意義がもっと認識されてほしいと思う．

ここでこういう話を持ち出すのは的外れと思われるかもしれないが，最近の生態心理学のアフォーダンスという理論は，生物個体と環境の主客反転・図地反転の双対性を通して生物の行動を布置しようとする試みのように思われる．「人は地面を歩く」と言う代わりに「地面は歩くことをアフォードする」と言い，「人は泳ぐ」と言う代わりに「水は泳ぐことをアフォードする」と言う．空気は呼吸をアフォードするが，水は呼吸をアフォードしない．水は流す・洗う・溶かす・飲む・冷やすことをアフォードする，という言い方をする．無思慮に何でも双対性に見えればよいというものではないが，双対性はまだまだこれから世界のいろいろな場面に見い出されることと思う．なお，双対性についての議論を存分に展開しようと思ったら，ぜひとも表現論と呼ばれる数学をやるべきなのだが，本書では表現論についてはまったく触れられなかったことが残念である．

本書の構成を概観しておく．第 1 章では基本的な数学用語である集合論の解説をする．集合は，ある意味，きわめて原始的な存在であるが，この原始段階においてすでに外延と内包の双対性が仕込まれていることに気づいてもらいたい．そしてこの原初の外延と内包の双対性が，あたかも遠い祖先の遺伝子のように，後々の数学的な進化を遂げた各段階でその場面ごとに異なった表現で立ち現れてくることになる．

第 2 章では位相空間論の基本事項を解説する．集合論では個々の要素間の関係はいったん完全に断ち切られ，集合はバラバラの個の群集として認識される．それら要素間に遠近感という関係性を導入するのが位相という構造である．すべての関係を取り払った更地に，位相という新たな関係を構築しようとするのだから，位相の導入のしかたにはとてつもなく大きな自由度がある．ときには，非ハウスドルフ空間のような常識を逸脱した構造物ができてしまうこともある．位相空間を常識の範囲内に収めようとすると，いろいろな条件を付加して，ある意味，おとなしい位相空間にしてやらなくてはならない．かといって，規制をあまり強くしすぎると，何もやれることがないか，何でもできて当たり前のような面白味のない空間になる．むしろ規制を少しずつ設けることによって規則の階層性や意味が見えてくることになるだろう．それでも位相空間はあまりにもたくさんできて

しまうので，この位相空間とあの位相空間は同類なのか，それとも別物なのか，いったい位相空間は何種類あるのか，という分類・整理をしたくなるのは当然のなりゆきである．分類には，何と何を同じと見なすかという基準が必ず必要である．そこで，連続写像で互いに移り合える位相空間は同相とする，という基準を設ける．ところが連続写像は無数に存在するので，この定義どおりに連続写像をかたっぱしから調べて同相写像があるかないか見きわめることは（とくに同相写像がないと結論することは）到底不可能である．そこで位相空間 X に対して何か $\mu(X)$ という測定値を出すような装置を作って，位相空間 X と Y が同相ならば $\mu(X)=\mu(Y)$ となることが保証されていれば使いようがある．もし測定値が $\mu(X)\neq\mu(Y)$ となれば，X と Y は同相ではない，ということだけは断言できる．このような測定装置 μ を位相不変量という．一般には，1 種類の測定結果が一致しただけでは同相とは断定できないので，なるべくたくさんの種類の位相不変量を用意して，位相空間を見分ける能力を向上したくなる．

第 3 章と第 4 章は位相不変量の具体例であるホモトピー群とホモロジー群についての解説である．位相空間に対して不変量を測るという役割から見ると，ホモロジーの方が可換な加群という数を扱うので，演算が容易な，素直な不変量だと言える．しかし，加群の理論についてかなりの準備をしておいてからでないとホモロジー群の定義を述べることすらできないので，これは後回しの第 4 章とした．それに対して，ホモトピーの方は非可換性の強い群を扱うので，計算という面ではやや面倒である．それでもホモトピーの方が人間の視覚的直観に訴えやすく，さしあたって定義は図を見ればわかるようなものなので，ホモトピーを先に第 3 章で取り組むことにした．

第 5 章は圏論の基礎についての解説である．逆説的だが，不変量というのは，世の中に変化があってこそ，その存在が浮き上がって来るものである．変化のネットワークの記述が圏論の使命である，と私は思う．流転変化する一つの世界が圏(けん)であり，一つの世界で起きている変化を別の世界での変化に写し取る操作が関手(かんしゅ)である．このとき，一方の世界で不変なものは，他方の世界でも不変なものに写し取られる．また，他者との関わりのネットワークに身を置くと，各自固有の個性だと思っていた性質が，結局，他者との関わりによって完全に特徴づけられる性質だということがわかってくる．こうして集合論の基本路線であった集合の外延的列挙構成は，圏論においては他者との関わりを通した内包的規定に取って代わられる．圏論は，まだ数学者以外の方にはなじみの薄い分野のように思われるが，今後，少なくとも理論物理においては，群論並か，それ以上に圏論の意義が認められていくことになると思う．

第 6 章は微分幾何学の初歩的・標準的な解説である．微分幾何学も非常に豊富な内容を持つ数学なので，限られた紙数の中では何かに焦点を絞ることを考えねばならない．そこで本書では可積分条件という話題を目標にした．可積分条件は，微分方程式という内包的法則と，解曲線という外延的現象の間の架け橋だと思われるからである．

第 7 章では微分幾何学の物理への応用を議論する．そういうテーマなら，ハミルトン力学や，一般相対性理論，ゲージ理論など広範な話題を扱うべきだと思うのだが，いかんせん，残された紙数はわずかという段階でこの章に突入してしまった．申し訳程度であるが，電磁気学を微分幾何学的に記述するやり方を解説する．また，拘束系の運動学と，調和振動子の力学を扱って，可積分・非可積分という数学的性質が物理的にどういう現象となって現れるか議論しよう．

本書では，定義と定理は述べるが，証明については，簡単で教育的だと思われる証明だけ書いて，

ほとんどの場合，証明は書かない．定義を与えるときも，いきなり抽象的な定義を与えるのではなく，2 次元程度の具体的な絵を描ける例をいじってみて感触を得てから，そこに埋め込まれていた概念を抽出するために一般的な定義を整備する，というアプローチをとる．

本書にはたくさん図を描いた．図は具体的で見た目にわかりやすいという利点があるのだが，具体的・個別的すぎてしまって，注目してほしくない細部まで目についてしまい，気づかぬうちに読者に誤解を吹き込む恐れがつねにある．また，図に引きずられて，読者の想像力の範囲が知らぬ間に狭められる恐れがある．だからこそ正統派の数学書には図はめったに描かれていない．本書の図を見るときは，あくまでガイド役として見るだけにしてほしい．数学を読むということは，感覚をあてにせず言葉と理性の力だけを使用するという挑戦的な態度と，可能な限りすべてのことを想像しようという途方もない想像力と，論理的に許されない線をどこで踏み超えるかに気づく注意力が要求されることなのである．それは私が読者に押し付ける要求ではなく，私自身に課せられた課題でもある．

私が数学についてある程度一貫した理解を得たのは，古結明男氏の講義や彼との議論を通してのことである．石橋明浩氏も私の議論の相手となって，私の数学・物理に対する理解を鍛えてくれた友人である．また，私は大学院生時代に，中原幹夫氏の著作 “Geometry, Topology and Physics” を読んで，微分幾何・トポロジーと物理の面白い関連を知ることができた．中原氏とは，その後，量子コンピュータの分野において共同研究者の間柄となり，微分幾何学・ゲージ理論の知識を活用して一緒に研究させてもらっている．小嶋泉氏は深い洞察の人で，物理のどの分野のことでも議論すれば必ず私が見落としていたことへの気づきを促してくれる．古結明男氏，工藤和恵さん，伊藤秀行君には本書の原稿を読んでもらい，数々の有用なコメントをいただいた．おかげで初稿に比べればずいぶん原稿を改めることができた．また，数理科学編集部の平勢耕介氏，伊崎修通氏には月刊誌「数理科学」の仕事でもたびたびお世話になっており，今回 SGC ライブラリの一冊を執筆することを誘っていただいた．応用のための微分幾何・位相幾何というテーマについての執筆の依頼であったが，すでに類書が，しかも優れた書物が多いこの分野に私が一冊書き加えることにどの程度意味があるかと迷った．それならば，標準的な内容を題材にしながら，双対性を紹介しようと考えて書いたのがこの作品である．編集部の狙いに沿ったか心もとないが，また，双対性の一面しか紹介できなかったが，普通の題材を扱っているわりに，独特の視点を力説する本にはなったと思う．いろいろな方から教わったことが，私の中で，私自身の考えとない交ぜになってしまい，どこまでが人の話の受け売りで，どこからが私自身が考えたことなのか，その境目はおぼろげになってしまった．これは誰から教わったことか，これは誰の言葉か，といったことは明確に書けないことを許してほしい．それでも双対性の考え方にいちおうの形を与えて世に出せることは私の喜びであるし，お世話になった方々への感謝の証でもある．

2006 年 7 月

谷村　省吾

目　次

第 1 章
外延と内包の双対性

1.1 集合と写像

記法の確認も兼ねて，集合論に関する基本概念を一通り解説しておく．数学を専門にする人にとっては当たり前とされていることについても，数学を専門としない人のために，ところどころで立ち止まって，なぜこんな考え方をするのだろうかということを議論しよう．

ここでは素朴に「ものの集まり」のことを**集合** (set) と呼ぶ.「もの」というのは物理的な実体でもよいし，数や関数やベクトルなど，抽象的なものでもよい．もの x が集合 X に含まれるとき，x は集合 X の**元**あるいは**要素** (element) であるといい，このことを $x \in X$ と書く．また，x が X に含まれていないことを $x \notin X$ と書く．2 つの集合 X, Y について，X の元はすべて Y の元であり，かつ Y の元はすべて X の元となっているとき，集合 X と Y は等しいといい，$X = Y$ と書く．

集合は，その元を列挙することによって規定されるが,「$\cdots$ の全体」という言葉がついているか，ついていないかという点には注意してほしい．例えば $\{2, 4, 6\}$ は偶数の集合であるが，$\{10, 100\}$ も偶数の集合である.「偶数全体の集合」と言えば $\{\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\}$ といった可能な限りのすべての偶数の集合のことである．たんに「偶数の集合」と言っただけでは，集合は一意的に定まらない．

また，集合を規定する方法として，その元が満たすべき条件を列挙するやり方もある．例えば，集合 X を

$$X = \{x \,|\, x \text{ は整数で, 1 以上, 100 以下で, 6 と 8 で割り切れる }\}$$

と規定してもよい．結果的には $X = \{24,\ 48,\ 72,\ 96\}$ である．このように集合 X の元 x が満たすべき命題関数 $P(x)$ を使って

$$X = \{x \,|\, P(x)\} = \{x\,;\, P(x)\}$$

のように，括弧 $\{\quad\}$ の内側を縦棒，あるいはセミコロン（;）で仕切って，仕切りの右に条件式を書く．$P(x)$ は x に関する条件文であり，この条件を満たす x 全体のなす集合が $X = \{x \mid P(x)\}$ である．たいていの場合は，大きな集合 U があらかじめ用意されていて，U の元 x で条件 $P(x)$ を満たすもの全体の集合という意味で

$$X = \{x \in U \mid P(x)\}$$

と書く．

1.1.1　論理記号

よく使われる論理記号について簡単に説明しておく．2 重線の矢印で 2 つの命題をつないだ式「$P \Rightarrow Q$」は「P ならば Q」あるいは「P は Q の十分条件」と読まれる．例えば「x が 6 で割り切れる $\Rightarrow$ x が 3 で割り切れる」というふうに書く.「$Q \Leftarrow P$」と書いても内容は同じであり,「Q は P の必要条件」と読んでもよい．さらに,「$P \Leftrightarrow Q$」は「P ならば Q，かつ，Q ならば P」とか「P は Q の必要十分条件である」と読まれる．

等号にコロンをつけた「:=」という記号を定義子といい，ただの等号「=」を相等子という．例えば，実数 $s > 1$ に対して

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

はゼータ関数の定義式である．もちろん右辺の無限級数が収束してある実数値を定めるということを確認した上で，これを $\zeta(s)$ の値と定めるのである．他方，

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$$

は $\zeta(2)$ と $\dfrac{1}{6}\pi^2$ という別々に定義されたものがじつは等しいという関係式である．

定義文「:⇔」と必要十分条件「⇔」もコロンの有無で区別する．例えば，

$$\text{三角形 ABC は BC を底辺とする二等辺三角形である} \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$

という文は，右辺をもってして左辺を定義している．辺の長さが等しいとはどういうことかはすでにわかっているものとして,「底辺」とか「二等辺三角形」という言葉を定義しているのである．それに対して，

$$\text{三角形 ABC において，} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \ \Leftrightarrow \ \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$$

という命題は，二等辺三角形であることは二等角三角形であるための必要十分条件である，という主張である．これが本当に必要十分条件であることはもちろん証明されるべきことである．

$\forall$ は，all あるいは any ないし arbitrary の頭文字 A を逆さにした記号で，全称記号と呼ばれ,「すべての」,「任意の」を意味する.「$\forall x\, P(x)$」は「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」と読まれる．$P(x)$ は x に関する命題関数である．

例えば $P(x) = \langle x$ は 2 で割り切れる $\rangle$ といった文をあてはめる．元 x を選ぶ範囲を集合 X に限定するときは「$\forall x \in X\, P(x)$」と書き,「集合 X の任意の元 x に対して $P(x)$ が成り立つ」と読む．

$\exists$ は，exist の頭文字の E を逆さにした記号で，存在記号と呼ばれる．意味的には英語の a, some, certain に近く,「存在する」,「ある」という意味を表す.「$\exists x\, P(x)$」は「ある x に対して $P(x)$ が成り立つ」と読む．また,「$\exists x \in X\, P(x)$」は「集合 X の元 x で $P(x)$ を満たすものが存在する」と読む．

例題として，自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$[*1] に対して次の命題の意味するところを考えて，この命題が真か偽か判定してみてほしい．

$$\forall x \in \mathbb{N}\,(\exists y \in \mathbb{N}\,(x < y)), \tag{1.1}$$

$$\exists x \in \mathbb{N}\,(\forall y \in \mathbb{N}\,(y \leq x)). \tag{1.2}$$

(1.1) は「任意の自然数 x に対して $x < y$ となるような自然数 y が存在する」という主張である．これは正しい．例えば，おのおのの x に対して $y = x + 1$ という y を選べばよい．(1.2) は「ある自然数 x があって，任意の自然数 y に対して $y \leq x$ が成立する」と読まれる．つまり，どんな自然数よりも大きな「最大の自然数 x」が存在するという主張である．これは偽である[*2]．どのように x を選んでもそれより大きな自然数 $y = x + 1$ が存在しているので，x が最大であるという主張は成り立たない．これらの命題を自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の代わりに集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ で考えたら真偽はどう変わるか考えてみてほしい．

1.1.2　部分集合と集合演算

集合 A, X について，$a \in A$ ならば $a \in X$ が成り立つとき，A は X の**部分集合** (subset) であるといい，$A \subset X$ と書く[*3]．$X \supset A$ と書いてもよい．論理記号で書くと

$$A \subset X \ :\Leftrightarrow\ \forall a \in A\,(a \in X)$$

である．A が X の部分集合でないとは，$a \in A$ だが $a \notin X$ であるような元 a が存在することである．このとき $A \not\subset X$ と書く．

a と書くのと $\{a\}$ と書くのでは意味が違うことに注意してほしい．例えば

$$X = \{a, b, c\}$$

という集合に対しては，$a \in X$ であり，$\{a\} \subset X$ である．a は元であり，$\{a\}$ は集合である．とくに $a \in \{a\}$ と書いてよい．しかし，$\{a\} \notin X$ である．ちょっ

*1)　0 を自然数に含める流儀もあるが，本書では 0 を自然数に含めないでおく．

*2)　(1.2) は (1.1) の否定命題である．

*3)　A が X の部分集合であることを，A は X に含まれるともいう．$a \in X$ を「X は a を元として含む」といい，$A \subset X$ を「X は A を部分集合として含む」というように使い分けた方がよいのかもしれないが，本書ではどちらも「含む」で済ませることにする．

と奇妙な感じがするかもしれないが，

$$Y = \{a, b, \{a\}, \{b, c\}\}$$

などというものも 1 つの集合である．この場合 Y は a と b と $\{a\}$ と $\{b, c\}$ という 4 つの元からなる集合だ．この Y に対しては $\{a, b\} \subset Y$ だが $\{a, b\} \notin Y$ であるし，$\{b, c\} \in Y$ だが $\{b, c\} \not\subset Y$ である．また，

$$Z = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d, e\}\}$$

のように各元が集合であるような集合を集合族と呼ぶこともある．素朴には「集合の集合」と呼びたくなるが,「集合の集合」や「何々という条件を満たす集合全体の集合」という概念を不用意に用いるとパラドクスが導かれる危険があるので,「集合の集合」という言い方を避けて「集合の族」というふうに言い方を変えているのだ．

ある集合 X を固定しておいて，X を全体集合と呼び，X のさまざまな部分集合を考えることがある．部分集合 $A \subset X$ に対して

$$A^c := \{x \in X \mid x \notin A\} \tag{1.3}$$

はまた X の部分集合になるが，A^c を X に対する A の**補集合** (complementary set) という．$x \notin A^c$ とは $x \in A$ のことだから，$(A^c)^c = A$ である．

X の部分集合 A, B について $A \subset B$ かつ $A \supset B$ ならば $A = B$ が言える．また，

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}, \tag{1.4}$$

$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ または } x \in B\} \tag{1.5}$$

で定義される集合 $A \cap B$ を A と B の**交わり** (intersection)，$A \cup B$ を A と B の**合併集合** (union) あるいは**和集合** (sum) という．また，

$$A - B := \{x \in A \mid x \notin B\} \tag{1.6}$$

を A と B の**差集合** (difference set) という．とくに，

$$A^c = X - A \tag{1.7}$$

である．

複数個の部分集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$ を考えることもある．これらのことを $\{A_k\}_{k=1}^n$ と書くこともある．番号づけられた集合たちという概念をさらに一般化して，集合 $\varGamma$ の元 γ ごとに集合 $A_\gamma \subset X$ が指定されているとき，$\{A_\gamma\}_{\gamma \in \varGamma}$ を $\varGamma$ を添え字集合とする集合族という．このとき，集合族の交わりが

$$\bigcap_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma := \{x \mid \forall \gamma \in \varGamma \, (x \in A_\gamma)\} \tag{1.8}$$

で定義され，合併が

$$\bigcup_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma := \{x \mid \exists \gamma \in \varGamma \, (x \in A_\gamma)\} \tag{1.9}$$

で定義される．実数全体の集合を $\mathbb{R}$ として，

$$\mathit{\Gamma} = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid 0 < \gamma < 1\}$$

とおき，$\gamma \in \mathit{\Gamma}$ に対して

$$A_\gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - \gamma \leq x < 2 + \gamma\}$$

とおけば，$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \mathit{\Gamma}}$ の交わりおよび合併は，それぞれ

$$\bigcap_{\gamma \in \mathit{\Gamma}} A_\gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\},$$

$$\bigcup_{\gamma \in \mathit{\Gamma}} A_\gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$$

となる．等号の有無に注意してほしい．

部分集合に関して次のような関係が成り立つ：

$$A \subset C,\ B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C, \tag{1.10}$$

$$C \subset A,\ C \subset B \Rightarrow C \subset (A \cap B). \tag{1.11}$$

ここで 1 行目に「$A \subset C$, $B \subset C$」と書いたのは「$A \subset C$ かつ $B \subset C$」の意味である．このことを「$A, B \subset C$」とも書く．関係式 (1.10) は次のように証明される：$x \in A \cup B$ と仮定すると，集合の合併の定義より $x \in A$ または $x \in B$ である．さらに $A \subset C$ かつ $B \subset C$ を仮定すると，部分集合の定義より $x \in C$ が導かれる．したがって，$x \in A \cup B$ ならば $x \in C$ だと言えたので，$(A \cup B) \subset C$ である．関係式 (1.11) も同様に証明できる．

関係式 (1.10) は「集合 A と B の両方を含む集合は必ず $A \cup B$ も含む」ということであり,「集合 A よりも大きく，かつ B よりも大きい，最小の集合は $A \cup B$ である」と読むことができる．これは合併集合の定義としても使える特徴づけである．同様に，関係式 (1.11) は「集合 A よりも小さく，かつ B よりも小さい，最大の集合は $A \cap B$ である」と読むことができる．

元が 1 つもない集合のことを**空集合** (empty set) といい，$\varnothing = \{\ \}$ で表す[*4]．誰も住んでいない村のことを「村」と呼ぶのは奇妙な（怖い？）感じがするように，空っぽの集合のことを「集合」と呼ぶのには抵抗を覚えるかもしれないが，元が 1 つもない集合もあえて集合の特別な場合に含めておいた方が便利なのである．例えば

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \qquad C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

という集合においては，$A \cap B = \{1, 3, 5\}$ であるが，$B \cap C$ には該当する要素がない．かといって「$B \cap C$ という集合はない」と言うのも面倒で，この場合は「$B \cap C$ は空集合になる」と言ってしまう方がすっきりする．「空っぽ」と

*4) 空集合を表す記号 $\varnothing$ はギリシャ文字の ϕ（ファイ）ではなく，数字の 0 にスラッシュ（斜線）をつけた記号である．

いう例外的事態に対して「空集合」という名前を与えて一般的事態に取り込み，記号の運用範囲を広げることは，数学の基本的な手法である．

なお，空集合 $\varnothing$ は任意の集合 X の部分集合である．つまり，$\varnothing \subset X$ と書いてよい．部分集合の定義によれば,「$\varnothing \subset X$」を言うためには,「$a \in \varnothing$ ならば $a \in X$」が言えればよい．空集合に対しては $a \in \varnothing$ が成立するような元 a が存在しないので,「$a \in \varnothing$ ならば」という前件が決して成立せず，したがって，後件の「$a \in X$」は問われることがなく,「$a \in \varnothing$ ならば $a \in X$」は形式的に真だと言える．したがって，X がどんな集合であっても，$\varnothing \subset X$ が成立する．

X を全体集合とするとき $X^c = \varnothing$, $\varnothing^c = X$ が成り立つ．また，部分集合 $A \subset X$ に対して，$A \cap A^c = \varnothing$, $A \cup A^c = X$ が成り立つ．

1.1.3　写像

集合 X の元 x ごとに集合 Y の元 $f(x)$ を対応させるとき，f は集合 X から集合 Y への**写像** (mapping) であるという．このことを記号で

$$\begin{aligned} f &: X \to Y \\ &\quad x \mapsto f(x) \end{aligned} \tag{1.12}$$

と書く．本書では，集合から集合への矢印 $\to$ と，集合の元から集合の元への矢印 $\mapsto$ とを区別して用いることにする．2 つの写像 $f_1 : X \to Y$, $f_2 : X \to Y$ があって，任意の $x \in X$ に対して $f_1(x) = f_2(x)$ が成り立つとき，2 つの写像は等しいといい，$f_1 = f_2$ と書く．

写像 $f : X \to Y$ に対して

$$\operatorname{Im} f := \{f(x) \mid x \in X\} \tag{1.13}$$

は Y の部分集合になるが，$\operatorname{Im} f$ を f による X の**像** (image) という．また，X を f の**定義域** (domain) という．写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $A \subset X$ が与えられたとき，A の各元 a に Y の元 $g(a) := f(a)$ を対応させる写像 $g : A \to Y$ を，$f|_A$ と書き，f の A 上への**制限** (restriction) という．また，このとき

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \tag{1.14}$$

は Y の部分集合になり，f による A の像と呼ばれる．反対に，$A \subset X$ 上の写像 $g : A \to Y$ が与えられているとき，写像 $f : X \to Y$ で $f|_A = g$ なるものがあれば，f を g の**拡張** (extension) という．

また，写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $S \subset Y$ に対して，

$$f^{-1}(S) := \{x \in X \mid f(x) \in S\} \tag{1.15}$$

は X の部分集合となるが，$f^{-1}(S)$ を S の**逆像** (inverse image) という．ときには $f^{-1}(S) = \varnothing$ ということもあり得る．

部分集合 $A, B \subset X$ や $S, T \subset Y$ と写像 $f : X \to Y$ に関して次のような関

係が成り立つ：

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B), \tag{1.16}$$

$$S \subset T \Rightarrow f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T), \tag{1.17}$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \tag{1.18}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), \tag{1.19}$$

$$f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T), \tag{1.20}$$

$$f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T), \tag{1.21}$$

$$f^{-1}(f(A)) \supset A, \tag{1.22}$$

$$f(f^{-1}(S)) \subset S. \tag{1.23}$$

とくに (1.19) の関係式で $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ は成立するが $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ は成り立たないような例は図 1.1 のような状況である．

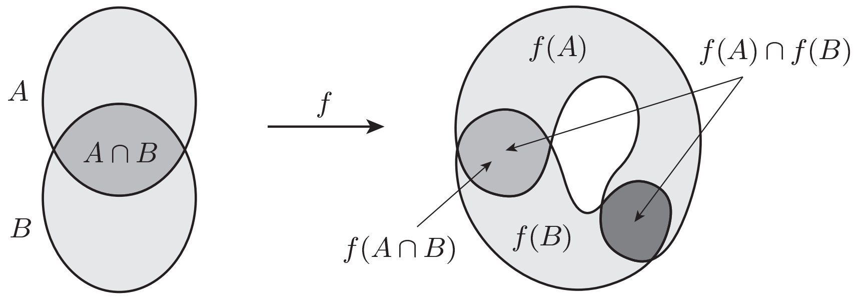


図 1.1　集合の交わりの像 $f(A \cap B)$ と像の交わり $f(A) \cap f(B)$.

もちろんこのような図を描いたところで (1.19) が証明されたわけではない．(1.19) は以下のように証明される：

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B\,(f(x) = y) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in X\,(x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } f(x) = y) \\
&\Rightarrow \exists x \in A\,(f(x) = y) \text{ かつ } \exists x' \in B\,(f(x') = y) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ かつ } y \in f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B).
\end{aligned}$$

証明の 3 行目に一方通行の矢印 $\Rightarrow$ があることに注意してほしい．他の関係式の証明は各自考えてほしい．関係式 (1.22) の $f^{-1}(f(A)) \supset A$ は成立するが $f^{-1}(f(A)) = A$ は成立しない例を自分で作ってみてほしい．同様に，(1.23) において等号が成立しない例を考えてみてほしい．また，(1.16), (1.17), (1.22), (1.23) の結果として，

$$f(f^{-1}(f(A))) = f(A), \qquad f^{-1}(f(f^{-1}(S)) = f^{-1}(S) \tag{1.24}$$

が成り立つことが証明できる．当然，

$$f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) = f^{-1}(f(A)) \tag{1.25}$$

が成り立つ．(1.22) で見たように $f^{-1}(f(A))$ は A を膨らませたものだが，この操作を繰り返してもこれ以上は膨らまないという事実を上の式は示している．

集合 X, Y, Z があって，写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ があるとき，各元 $x \in X$ に対して $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ を対応させる写像 $g \circ f : X \to Z$ を f, g の**合成写像** (composite) という．さらに写像 $h : Z \to W$ があれば，合成写像 $h \circ (g \circ f) : X \to W$ が定義される．このとき

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.26}$$

が成立する．とくに集合 X から X 自身への写像

$$\mathrm{id}_X : X \to X, \qquad x \mapsto \mathrm{id}_X(x) := x \tag{1.27}$$

は，与えられた元をそのまま返すだけの写像であるが，これを X の**恒等写像** (identity mapping) という．任意の写像 $f : X \to Y$ に対して

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \qquad \mathrm{id}_Y \circ f = f \tag{1.28}$$

が成り立つ．また，写像 $f : X \to Y$ に対して

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{1.29}$$

を満たす写像 $g : Y \to X$ が存在すれば，g を f の**逆写像** (inverse mapping) という．与えられた写像 $f : X \to Y$ に対して逆写像が存在するとは限らないが，もし存在すればそれはただ 1 つである．つまり，条件式 $g' \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g' = \mathrm{id}_Y$ を満たす g' が見つかったとしたら，それは g と等しい（証明は後ほど圏論のところで与える）．f の逆写像のことを $g = f^{-1}$ と書く*5)．また，$(f^{-1})^{-1} = f$ が成り立つ．

集合 X の部分集合 $A \subset X$ が与えられたとき，写像

$$i_A : A \to X, \qquad a \mapsto a \tag{1.30}$$

が定義される．これを**包含写像** (inclusion mapping) という．これは A の元 a が X の元でもあることを確認するという写像である．とくに $i_X = \mathrm{id}_X$ である．また，$f : X \to Y$ に対して $f \circ i_A = f|_A$ が成り立つ．

写像 $f : X \to Y$ について，任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つとき，写像 f は**単射** (injection) あるいは**一対一写像** (one-to-one mapping) であるという．単射の定義の対偶は，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ だということである．単射のことを $f : X \hookrightarrow Y$ と書くことも

*5) f^{-1} という記号は「f のマイナス 1 乗」と読むよりは “inverse of f” と読むか，そのまま「f の逆写像」と読む方がよい．一般の写像 $f : X \to Y$ に対しては，合成写像としての「f の 2 乗 $f \circ f$」,「f の 3 乗 $f \circ f \circ f$」が定義できないことの方が普通なので，f^{-1} を「マイナス 1 乗」と呼ぶのはあまり適切ではない．

ある．$f : X \hookrightarrow Y$ という記法の背景には，$X \subset Y$ という気持ちがある（もちろん正確には $f(X) \subset Y$ と書くべき）．集合 X が一対一写像 f によってすっぽりそのまま Y の中に入って行って Y の部分集合として現れるという様子を $f : X \hookrightarrow Y$ という記法で表している．とくに，包含写像は単射である．

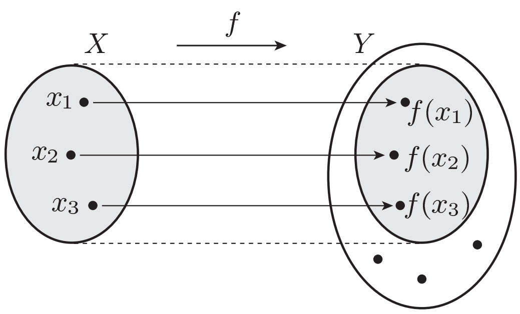


図 1.2　写像 $f : X \to Y$ が単射 $:\Leftrightarrow \forall x_1, \forall x_2 \in X\,(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

写像 $f : X \to Y$ について，任意の $y \in Y$ に対して，$f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在するとき，写像 f は**全射** (surjection) あるいは**上への写像** (onto-mapping) であるという．全射のことを $f : X \twoheadrightarrow Y$ と書くこともある．全射であるとは，$\mathrm{Im}\, f = Y$ だということである．

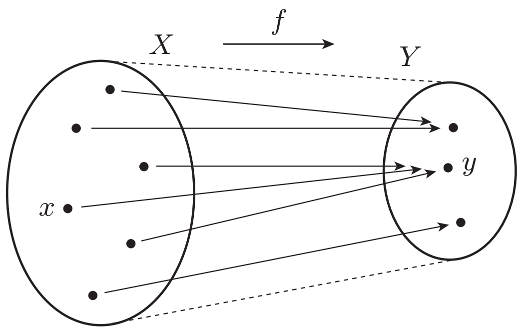


図 1.3　写像 $f : X \to Y$ が全射 $:\Leftrightarrow \forall y \in Y\,(\exists x \in X\,(f(x) = y))$.

写像 $f : X \to Y$ が，全射かつ単射であるとき，f は**全単射** (bijection) であるという．全単射のことを $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ と書くこともある．写像 f が全単射であることは，f の逆写像が存在するための必要十分条件である．とくに，恒等写像は全単射であり，それ自身が逆写像になっている．

1.2　集合の大小

集合 X, Y に対して，全単射 $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ が存在するとき，集合 X, Y は**対等** (equipotent) であるという．あるいは，X と Y は等しい**濃度**[*6] (potency) を持

*6）「濃度」という言葉は，日常的な意味では，例えば水に食塩がどれだけ溶けているかと

つ，または等しい**基数** (cardinal number) を持つともいう．このことを $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{Y}}$ と書く．濃度とは，素朴に言えば，集合に含まれる元の個数のことであり，対等であるとは，2 つの集合に含まれる元の個数が等しいということである．集合

$$\mathbf{0} = \varnothing = \{\,\}, \qquad \mathbf{1} = \{\mathbf{0}\}, \qquad \mathbf{2} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \qquad \mathbf{3} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$$

などを定義すれば，例えば $X = \{a, b, c\}$ に対して $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{\mathbf{3}}}$ である．つまり有限集合 X に対して $\bar{\bar{X}}$ は 0 または自然数を定める．

集合 X, Y に対して，単射 $i : X \hookrightarrow Y$ が存在するとき，X の濃度は Y の濃度を超えないという．このことを $\bar{\bar{X}} \leq \bar{\bar{Y}}$ と書く．

単射 $i : X \hookrightarrow Y$ は存在するが，全単射 $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ は存在しないとき X の濃度は Y の濃度より小さい，あるいは Y の濃度は X の濃度より大きいという．このことを $\bar{\bar{X}} < \bar{\bar{Y}}$ と書く．

集合の元の個数の大小を比較することが当たり前でなくなってくるのは，元の個数が無限の場合である．代表的な無限集合として，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$，実数全体の集合 $\mathbb{R}$，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$，単位閉区間 $I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ などがある．これらの濃度については

$$\bar{\bar{\mathbb{N}}} = \bar{\bar{\mathbb{Z}}} = \bar{\bar{\mathbb{Q}}} < \bar{\bar{\mathbb{R}}} = \bar{\bar{\mathbb{C}}} = \bar{\bar{I}} \tag{1.31}$$

という関係が成り立つ．$\bar{\bar{\mathbb{N}}} = \bar{\bar{\mathbb{Z}}}$ であることは，次の対応が全単射であることからすぐ認められるであろう：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{N} & = & \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots & \} \\ & & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ \mathbb{Z} & = & \{ & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & \cdots & \}. \end{array} \tag{1.32}$$

$\bar{\bar{\mathbb{N}}} = \bar{\bar{\mathbb{Q}}}$ であることは次のように確かめられる．有理数は $n \in \mathbb{N}$ と $m \in \mathbb{Z}$ を用いて $\dfrac{m}{n}$ という分数で表示できるので，すべての分数を図 1.4 のように格子状に並べることができる．適当な順序で格子点を巡って番号をつけていけば，自然数と全単射対応がつくことがわかるだろう．なお，$\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \cdots$ のように同値な分数は，既約分数だけに番号をつけておけばよい．

$\bar{\bar{\mathbb{N}}} < \bar{\bar{\mathbb{R}}}$ であることを初めて証明したのはカントールである．ここではカントールの流儀に従って $\bar{\bar{\mathbb{N}}} < \bar{\bar{I}}$ を証明しよう．つまり，$f : \mathbb{N} \to I$ という全単射は存在しないことを証明しよう．ある写像 $f : \mathbb{N} \to I$ が全単射でないことを確認しても，全単射 $f : \mathbb{N} \to I$ が決して存在しないことの証明にはならない．$f : \mathbb{N} \to I$ という写像をどのように工夫して作っても全単射にすることは絶対にできないということを，あらゆる写像 $f : \mathbb{N} \to I$ に通用するようなやり方で

いう「濃さ」を表す言葉だが，ここでは「集合の元の個数」を表す用語として使われている．無限集合の場合は，素朴な「元の個数」という概念が通用しなくなるので，あえて非日常的な言葉づかいを用いて注意を喚起しているのであろう．

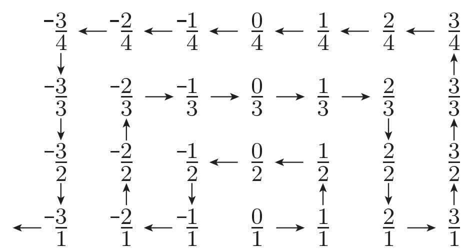


図 1.4　すべての分数に $1, 2, 3, \cdots$ と番号をつける．

一網打尽に証明しなければならない．

その証明をしよう．写像 $f : \mathbb{N} \to I$ があったと仮定する．区間 I の元は 0 以上 1 以下の実数であるから，10 進法で小数表示ができる．写像 $f(n)$ に $n = 1, 2, 3, \cdots$ を代入していくと，順に 1 番目の小数，2 番目の小数を得る．例えば,

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0.\mathbf{7}413678\cdots, \\
f(2) &= 0.2\mathbf{5}41025\cdots, \\
f(3) &= 0.30\mathbf{9}1172\cdots,
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

といった具合である．ここで次のような観察をする．$f(1)$ の小数点以下第 1 位の値は 7 である，$f(2)$ の小数点以下第 2 位の値は 5 である，$f(3)$ の小数点以下第 3 位の値は 9 である．このように (1.33) の対角線上に現れる数を並べて

$$y = 0.7593081\cdots$$

という小数を作る．これに対して次のような「あまのじゃく数」z を作る[*7)]．z の小数点以下第 1 位の値は 7 以外の数，例えば 8 にする．z の小数点以下第 2 位の値は 5 以外の数，例えば 6 にする．z の小数点以下第 3 位の値は 9 以外の数，例えば 0 にする．こういう手順で実数

$$z = 0.8604192\cdots \tag{1.34}$$

を定めると，この z に対しては $f(n) = z$ となるような $n \in \mathbb{N}$ は存在しない．なぜなら，z の作り方からいって，各自然数 n に対して

$$f(n) \text{ の小数点以下第 } n \text{ 位の数 } \neq z \text{ の小数点以下第 } n \text{ 位の数}$$

である．もし，$f(n_0) = z$ となるような自然数 n_0 があったとしたら，上の式の n に n_0 を代入すると

$$z \text{ の小数点以下第 } n_0 \text{ 位の数 } \neq z \text{ の小数点以下第 } n_0 \text{ 位の数}$$

となってしまう．これは矛盾なので，$f(n_0) = z$ となるような自然数 n_0 は存在

*7)　あまのじゃくとは，日本の神話に出てくる神で，人の心の内を読んで人の意に逆らう，ひねくれた神である．ここでは「7」を見れば「8」と言い,「5」を見れば「6」と言う，何でも答えをずらしてしまう数としてあまのじゃく数を規定する．

し得ない．したがって f は全射ではない．つまり，いかなる写像 $f:\mathbb{N}\to I$ も全射ではないことが示された．このような論法を，(1.33) 式の特徴から対角線論法という．以上より全単射 $f:\mathbb{N}\to I$ は存在しない．単射 $i:\mathbb{N}\hookrightarrow I$ が存在することはすぐに示せるので（具体的に作ってみよ），$\bar{\bar{\mathbb{N}}}<\bar{\bar{I}}$ が結論される．

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は無限集合であり，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ も無限集合である．しかし，それらの元の個数は全単射で対応がつかないくらい違っており，実数は自然数よりも本質的に多いのである．無限にも，より大きな無限，小さな無限といった，大小の比較が可能であり，階層があるのである．$\mathbb{N}$ と対等な集合を**可算集合** (countable set) といい，$\mathbb{R}$ と対等かそれ以上の濃度を持つ集合を**非可算集合** (uncountable set) という．また，(1.31) に $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ と I が等しい濃度を持っていると書いてあることに注意してほしい．とくに複素平面という 2 次元の集合が，実数直線という 1 次元の集合と等しい濃度を持っていることは不思議であろう．本書ではそのことの証明はしないが，巻末の参考文献（遠山氏の本など）を見てほしい．

それでは，$\mathbb{R}$ よりも大きな集合はあるだろうか？ じつはある．いかなる集合 X に対しても $\bar{\bar{X}}<\bar{\bar{Y}}$ なる集合 Y の存在が言えるのである．無限の階層は，無限に続いているのである．このことを次の節で見ることにする．

1.3 写像集合

集合 X,Y が与えられたとき，X から Y への写像全体のなす集合を

$$Y^X:=\{\,f:X\to Y\,\} \tag{1.35}$$

と書く．X,Y が有限集合ならば，元の個数を数えることにより，

$$\overline{\overline{Y^X}}=\left(\bar{\bar{Y}}\right)^{\bar{\bar{X}}} \tag{1.36}$$

が成り立つことがわかるだろう．この式の左辺は，X から Y への写像の個数であり，右辺は Y の元の個数の X の元の個数による通常の自然数の意味での累乗である．

空集合 $\varnothing$ と，空でない集合 X に対して，写像 $f:X\to\varnothing$ を定めようとしても，元 $x\in X$ の対応先 $f(x)$ を空集合の中に選ぶことはできないので，写像 $f:X\to\varnothing$ は存在できない．したがって $\varnothing^X=\varnothing$ である．

一方で，写像 $f:\varnothing\to\varnothing$ は，矢の尾や頭に来るような元を持たないが，形式的にただの矢印 $\mapsto$ としてその存在を認めることにする．しかし写像 $f:\varnothing\to\varnothing$ が 2 つ以上存在するとも言えないので，$\varnothing^\varnothing=\mathbf{1}$ と約束する．ここで，$\mathbf{1}$ とは元がただ 1 つの集合 $\mathbf{1}=\{*\}$ のことであり，**一者集合** (one-point set) ともいう[*8)]．同様に，写像 $f:\varnothing\to Y$ の矢 $\mapsto$ も始点に置かれる元を持たないが，入

*8） 一者集合 $\{*\}$ に記してある星印 $*$ は，数でも文字でも人でも何でもよいが，何か 1 つの元を指している．

力待ちの状態の写像が 1 つ存在していると見なせるので，$Y^{\varnothing} = \mathbf{1}$ である．

一者集合に対しては，写像 $f : \mathbf{1} \to Y$ は，Y の元を 1 つ指定するのと同じことなので，$Y^{\mathbf{1}} = Y$ である．このような写像 $f : \mathbf{1} \to Y$ を**指差し写像** (pointing map) という．さらに $\mathbf{1}^X$ がどんな集合になるかは，読者に考えてもらいたい．

集合 $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ を真理値集合とか二値集合とか**判断集合** (judgment set) と呼ぶ．集合 X の部分集合 A が与えられたとき，各元 $x \in X$ に対して

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.37}$$

を対応させる写像 $\chi_A : X \to \mathbf{2}$ を，A の**特性関数** (characteristic function) という．逆に，X 上の二値関数 $\xi : X \to \mathbf{2}$ が与えられたとき，$\{1\}$ の逆像を

$$S_\xi = \xi^{-1}(1) := \{x \in X \mid \xi(x) = 1\} \tag{1.38}$$

とおくことにより，X の部分集合 S_ξ が定まる．このとき，

$$S_{(\chi_A)} = A, \qquad \chi_{(S_\xi)} = \xi \tag{1.39}$$

が成り立つ．この式が何を言っているのかしばらく考えてほしい．部分集合 A が特性関数 χ_A を定め，特性関数 χ_A が部分集合 $S_{(\chi_A)}$ を定めるが，それはもとの A と一致しているというのが第 1 式 $S_{(\chi_A)} = A$ の主張である．出発点を転じて，二値関数 ξ から部分集合 S_ξ が定まり，部分集合 S_ξ から特性関数 $\chi_{(S_\xi)}$ が定まるが，それはもとの ξ と一致するというのが第 2 式 $\chi_{(S_\xi)} = \xi$ の主張である．特性関数は部分集合を規定しているとも言えるし，部分集合が特性関数を規定しているともとれる．この，規定するものと規定されるものの相互関係については双対性の節でもう少し踏み込んだ議論をしよう．

いまの $A \mapsto \chi_A, \xi \mapsto S_\xi$ という対応により，X の部分集合と，X 上の二値関数は一対一に対応する．したがって，X の部分集合全体のなす集合を写像集合 $\mathbf{2}^X$ と同一視してよい．$\mathbf{2}^X$ を X の**ベキ集合** (power set) という．

例えば，$X = \{a, b, c\}$ の部分集合 $A = \{a, b\}$ に対する特性関数は

$$\chi_A(a) = 1, \qquad \chi_A(b) = 1, \qquad \chi_A(c) = 0$$

である．X の部分集合全体は

$$\mathbf{2}^X = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

であり，濃度は $\overline{\overline{\mathbf{2}^X}} = 2^{\bar{\bar{X}}} = 2^3 = 8$ であることが確認できる．

ベキ集合の重要な性質として

$$\bar{\bar{X}} < \overline{\overline{\mathbf{2}^X}} \tag{1.40}$$

という関係式を証明しよう．つまり，いかなる集合 X に対しても部分集合全体のなす集合 $\mathbf{2}^X$ は X よりも濃度が大きいのである．このことを証明するには，$i : X \to \mathbf{2}^X$ という単射は存在するが，$f : X \to \mathbf{2}^X$ という全単射は存在しないことを示せばよい．まず，写像 $f : X \to \mathbf{2}^X$ が任意に与えられたとする．つ

まり $x \in X$ ごとに $f(x) \subset X$ が定められたとする．このとき

$$z_f(x) := \begin{cases} 1 & (x \notin f(x) \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in f(x) \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.41}$$

という特性関数を用いて X の部分集合 Z_f を

$$Z_f := \{x \mid z_f(x) = 1\} = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \tag{1.42}$$

と定める．

このように定めた Z_f に対して $f(x_0) = Z_f$ となるような $x_0 \in X$ は存在しない．なぜなら，そのような x_0 があったとすると，$x_0 \in Z_f$ か $x_0 \notin Z_f$ のどちらかが成り立つはずである．$x_0 \in Z_f$ だとすると，Z_f の定義から $x_0 \notin f(x_0)$ である．$f(x_0) = Z_f$ を要請したのだから，これは $x_0 \notin Z_f$ を意味する．結局，$x_0 \in Z_f$ という仮定から $x_0 \notin Z_f$ が導かれてしまったので，矛盾を生じた．

次に，$x_0 \notin Z_f$ だとすると，Z_f の定義から $x_0 \in f(x_0)$ である．$f(x_0) = Z_f$ を要請したから，これは $x_0 \in Z_f$ を導く．これは矛盾である．

どちらにしても矛盾に行き着くのだから，初めの「$f(x_0) = Z_f$ となるような x_0 があったとする」仮定は誤りである．つまり，$f(x_0) = Z_f$ となるような $x_0 \in X$ は存在し得ない．これは f が全射でないことを示している．

$i : X \to \mathbf{2}^X$ については，例えば $i(x) = \{x\}$ とおけば，これが単射であることはすぐわかる．以上で $\bar{\bar{X}} < \overline{\overline{\mathbf{2}^X}}$ が証明された．

上の議論がわかりにくかったら，例えば，集合 $X = \{a, b, c\}$ について，写像 $f : X \to \mathbf{2}^X$ を

$$f(a) = \{a, c\}, \qquad f(b) = \{\ \}, \qquad f(c) = \{b\}$$

ととってみて，上の手続きどおりに Z_f を作ってみてみるとよい．$a \in f(a)$ であることを 1 と書き，$b \notin f(a)$ を 0 書き，といった調子でこれらの数を表に並べると，図 1.5 のようになる．表の対角線に並ぶ数は $(1, 0, 0)$ であり，これに対するあまのじゃく数列は $(0, 1, 1)$ となり，あまのじゃく特性関数 $z_f(x)$ は

$$z_f(a) = 0,$$
$$z_f(b) = 1,$$
$$z_f(c) = 1$$

となる．これをもとに集合 $Z_f = \{b, c\}$ が作られる．この作り方から言って，

	a	b	c
$f(a)$	1	0	1
$f(b)$	0	0	0
$f(c)$	0	1	0

図 1.5　対角線論法．

Z_f は $f(a)$ と一致しない．$a \in f(a)$ であるが $a \notin Z_f$ だからだ．同様に，Z_f は $f(b)$ とも一致しない．$b \notin f(b)$ であるが $b \in Z_f$ だからだ．同様に，Z_f は $f(c)$ とも一致しない．結局，$Z_f = f(x_0)$ となるような $x_0 \in \{a,b,c\}$ はない．Z_f の構成方法はカントールの対角線論法に似ていることがわかるだろう．

1.4 派生する集合

前節で解説したように，集合 X が与えられるとベキ集合 $\mathbf{2}^X$ が作られたし，集合 X, Y が与えられたときには写像集合 Y^X が作られた．ここでは，集合が与えられたときそれから派生して別の集合を作る操作をもっといろいろ考えよう．

元 a, b があったとき，それらの組 (a,b) を作る．同様に元 c, d の組 (c,d) を作る．$(a,b) = (c,d)$ とは，$a = c$ かつ $b = d$ のことであると約束する．したがって，$a \neq b$ ならば $(a,b) \neq (b,a)$ である．このような組 (a,b) のことを a と b の**順序対** (ordered pair) という．また，(a,b) のことを $\binom{a}{b}$ と縦に並べて書くこともある．2 つの集合 X, Y が与えられたとき，X の元と Y の元の順序対全体のなす集合

$$X \times Y := \{(x,y) \,|\, x \in X,\ y \in Y\} \tag{1.43}$$

を X と Y の**直積集合** (direct product set) という．有限集合の直積集合の濃度については，

$$\overline{\overline{X \times Y}} = \bar{\bar{X}} \times \bar{\bar{Y}} \tag{1.44}$$

という関係が成り立つ．左辺は直積集合の濃度であり，右辺は自然数の積である．

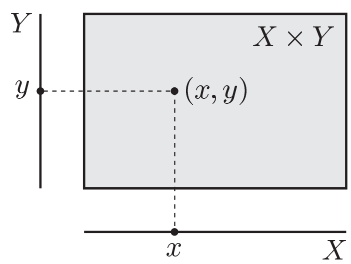


図 1.6　直積集合．

3 つの集合 X, Y, Z に対しても 3 つの元の順序づけられた組を作ることにより直積集合

$$X \times Y \times Z := \{(x,y,z) \,|\, x \in X,\ y \in Y\ z \in Z\} \tag{1.45}$$

が定義される．$((x,y),z)$ と $(x,(y,z))$ と (x,y,z) を互いに対応づけることによって，これらの集合は同一視される：

$$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = X \times Y \times Z. \tag{1.46}$$

同じ集合どうしの直積も定義される．例えば，

$$X \times X := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \in X,\ x_2 \in X\} \tag{1.47}$$

である．考えてみると，順序対 (x_1, x_2) は写像

$$f : \{1, 2\} \to X, \quad k \mapsto x_k \tag{1.48}$$

と同一視できる．したがって，直積集合 $X \times X$ は写像集合 $X^{\boldsymbol{2}}$ と同一視できる．n 個の元からなる集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ のことを $\boldsymbol{n}$ と書けば，

$$\begin{aligned} X^{\boldsymbol{n}} &= X \times X \times \cdots \times X \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : k \in \{1, 2, \cdots, n\} \mapsto x_k \in X\} \end{aligned} \tag{1.49}$$

は写像集合と見なしてもよいし，直積集合と見なしてもよい．

空集合 $\varnothing$ に対して $X \times \varnothing$ を定義しようとすると，順序対 (x, y) を形成する元 $y \in \varnothing$ がないため，$X \times \varnothing = \varnothing$ となる．

一者集合 $\mathbf{1} = \{*\}$ に対しては，$x \in X$ と組んで作られる順序対は $(x, *)$ しかないので，$X \times \mathbf{1} = X$ となる．$X \times \boldsymbol{n}$ がどんな集合になるかは各自考えてほしい．

集合 X, Y について $X \cap Y = \varnothing$ のとき，X と Y は**互いに素** (disjoint) であるという．このとき，合併集合 $X \cup Y$ のことを $X + Y$ あるいは $X \amalg Y$ と書き，X と Y の**直和集合** (disjoint union) という．$X + \varnothing = X$ となることは明らかだろう．

直和と直積と写像集合に関して次の関係が成り立つ：

$$Z^{X \times Y} = (Z^Y)^X = (Z^X)^Y, \tag{1.50}$$

$$Z^{X+Y} = Z^X \times Z^Y, \tag{1.51}$$

$$(Y \times Z)^X = Y^X \times Z^X. \tag{1.52}$$

関係 (1.50) は，写像 $f : X \times Y \to Z$，すなわち $x \in X$, $y \in Y$ を変数とする 2 変数写像 $f(x, y)$ は，$x \in X$ を固定すれば $y \in Y$ を変数とする 1 変数写像 $\phi_x(y) = f(x, y)$ と見なせるし，$y \in Y$ を固定すれば $x \in X$ を変数とする 1 変数写像 $\psi_y(x) = f(x, y)$ と見なせる，ということを言っている．

関係 (1.51) は，集合 X と Y が互いに素ならば，元 $(f, g) \in Z^X \times Z^Y$ すなわち写像 $f : X \to Z$ と写像 $g : Y \to Z$ から写像 $h : X + Y \to Z$ を

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & (a \in X \text{ のとき}) \\ g(a) & (a \in Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めることができるし，逆に任意の写像 $h : X + Y \to Z$ からは，X 上と Y 上への制限を $f = h|_X$, $g = h|_Y$ とおいて写像 $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ が定められる，という対応によって全単射対応 $Z^{X+Y} = Z^X \times Z^Y$ が成り立つことを言っている．このような写像 $h : X + Y \to Z$ を f と g の直和写像といい，$h = f \amalg g$ と書くこともある．

関係式 (1.52) の内容については，各自考えよ．ヒントとして，写像 $X \to (Y \times Z)$ は $(y(x), z(x))$ と書けると言っておけばわかるだろうか．

集合 $X \times Y$ 上の特性関数 R のことを X, Y 上の**関係** (relation) という．つまり 2 つの元 $x \in X$, $y \in Y$ に対して $R(x, y) = 1$ ならば x は y に関係 R を持つといい，xRy と書く．$R(x, y) = 0$ ならば x は y に関係 R を持たないといい，$x \not R y$ と書く．xRy のように 2 つの元にはさまれた記号 R のことを関係子ともいう．例えば実数 $x, y \in \mathbb{R}$ について x が y より小さいことを $x < y$ と書くが，この不等号 $<$ は関係子である．

集合 $X \times X$ の上の関係 E が次の 3 条件を満たしているとき，E を X 上の**同値関係** (equivalence relation) という：

(i) 反射律：任意の $x \in X$ について xEx,

(ii) 対称律：$x_1 E x_2$ ならば $x_2 E x_1$,

(iii) 推移律：$x_1 E x_2$ かつ $x_2 E x_3$ ならば, $x_1 E x_3$.

同値関係 E が与えられたとき，元 $x \in X$ に対して

$$[x] := \{y \in X \mid xEy\} \tag{1.53}$$

を x を**代表元** (representative element) とする**同値類** (equivalence class) という．$x_1 E x_2$ ならば $[x_1] = [x_2]$ である．また，$[x_1] \cap [x_2] \neq \varnothing$ ならば $[x_1] = [x_2]$ である．つまり，任意の元 $x_1, x_2 \in X$ に対して，$[x_1] = [x_2]$ か $[x_1] \cap [x_2] = \varnothing$ のいずれか一方が成り立つ．こうして集合 X は，適当な添え字 λ で区別された互いに素な部分集合の族 $\{\, [x_\lambda] \,\}_\lambda$ に分割される．この部分集合族 $\{\, [x_\lambda] \,\}_\lambda$ を，同値関係 E に関する集合 X の**類別** (classification) という．また，同値類全体のなす集合

$$X/E := \{\, [x] \mid x \in X \,\} \tag{1.54}$$

を X の E に関する**商集合** (quotient set) という．元 $x \in X$ に同値類 $[x] \in X/E$ を対応させる写像 $p : X \to X/E$ を同値関係 E に伴う**標準射影** (canonical projection) という．標準射影は全射である．

例として，整数 $x, y \in \mathbb{Z}$ について $x - y$ が 2 で割り切れることを $x \equiv y$ と書くことにすれば，この記号 $\equiv$ も関係子である．例えば，$7 \equiv 3$, $2 \equiv 8$, $4 \not\equiv 5$ である．$x \equiv y$ を「x と y は 2 を法として合同である」と読む．この関係 $\equiv$ は同値関係であることがわかる（要証明）．そうすると整数全体集合 $\mathbb{Z}$ は

$$[0] = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots\},$$
$$[1] = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$$

のように，0 を代表元とする同値類と 1 を代表元とする同値類に分けられる．もちろん，[0] の代表元として $\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots$ のどれを選んでもよく，$[0] = [2] = [4]$ である．このとき，集合 $\mathbb{Z}$ は部分集合 [0] と [1] に類別される．

したがって，$\mathbb{Z} = [0] \amalg [1]$ である．表記が多少不細工になるが，商集合は

$$(\mathbb{Z}/\equiv) \ = \ \{ [0], [1] \}$$

である．

集合 X が同値関係 E を持っていて，$x \in X$ を変数とする写像 $f : X \to Y$ が「$x_1 E x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) = f(x_2)$」という性質を持っている場合，$q \in X/E$ と $x \in q$ に対して，$f(x)$ の値は q の中のどの元 x をとってきても等しいので，$\tilde{f}(q) := f(x)$ が $x \in q$ の選び方によらずに紛れなく定義できる．こうして $q \in X/E$ を変数とする写像 $\tilde{f} : X/E \to Y$ が定義できる．このとき写像 $\tilde{f}$ が well-defined であるという．つまり，$x_1 E x_2$ だったら $f(x_1) = f(x_2)$ なので，写像 f に代入する変数は同値類 $q = [x_1] = [x_2]$ にまとめておいてもかまわない，という意味である．

ここで，写像に関する一般論を少し言っておこう．難しいかもしれないので次の節まで飛ばしてもらってもかまわない．X はとくに同値関係を持っていない集合でもかまわない．ここで次のような事実が示される．いかなる写像 $f : X \to Y$ に対しても，$f = f_2 \circ f_1$ となるような集合 Q と全射 $f_1 : X \to Q$ と単射 $f_2 : Q \to Y$ が存在する．しかもそのような組 (f_1, f_2, Q), (f_1', f_2', Q') があったとすると，全単射 $\psi : Q \to Q'$ で $f_1' = \psi \circ f_1$, $f_2' = f_2 \circ \psi^{-1}$ を満たすものが存在する．Q の作り方は，$x, x' \in X$ に

$$x \sim x' \ :\Leftrightarrow \ f(x) = f(x') \tag{1.55}$$

という関係 $\sim$ を定義して，これが同値関係であることを確かめて，商集合 $Q := X/\sim$ をとればよい．$f_1 : X \to Q$ としては標準射影 $x \mapsto f_1(x) := [x]$ をとればよい．$f_2 : Q \to Y$ は $[x] \mapsto f_2([x]) := f(x)$ とおけば well-defined であり，単射であることがわかる．もちろん，$f_2(f_1(x)) = f(x)$ である．このような (f_1, f_2, Q) を写像 $f : X \to Y$ の標準分解という．

1.5 外延と内包

ここで少し趣きを変えて，集合の**外延** (extension) と**内包** (comprehension) と呼ばれる二面性について議論しよう．外延とは何か，内包とは何かということを辞書のように一言で表現することは難しい．ここでは，いろいろな例を挙げて，外延と内包という言葉で言い表そうとしているこころを読者に伝えることを試みる．

1つ目の例として，平面上の円という図形を取り上げよう．円を

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{1.56}$$

で定義するのが，円の外延的定義である．一方で

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1.57}$$

という方程式が円の内包的定義である．

別の例を挙げれば，

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \tag{1.58}$$

というのが集合の外延的記述であり，

$$B = \{x \,|\, x \text{ は 1 以上 20 以下の, 2 で割り切れる整数 }\} \tag{1.59}$$

が集合の内包的記述である．つまり，集合の元を羅列することによって集合の全貌を提示することが外延であり，集合の元が満たすべき条件・性質を指定することによって集合を形成するのが内包である[*9)]．

円という図形を定義するために，実数全体 $\mathbb{R}$ という集合と平面 $\mathbb{R}^2$ という集合を用意して，写像

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t) \tag{1.60}$$

を使って，

$$A = \{(\cos t, \sin t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \tag{1.61}$$

というふうに円の点を並べていくという流儀が外延的構成法である．一方で，

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1 \tag{1.62}$$

という写像を使って，

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = 0\} \tag{1.63}$$

というふうに，ある方程式の解として平面上の点を選んでいくという流儀が円の内包的規定法である．

微分幾何学の言葉では，(1.60) で導入したような写像 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は曲線と呼ばれる．また，(1.62) で導入したような写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は関数と呼ばれる．微分幾何学では，ある空間 M が与えられると曲線 $c : \mathbb{R} \to M$ や関数 $f : M \to \mathbb{R}$ という写像を使って M に対する探りを入れていく．素性のはっきりしない M という空間や，M に埋められている正体不明の図形 A を理解するために，素性のよくわかっている実数集合 $\mathbb{R}$ から M への写像や，M から $\mathbb{R}$ への写像を利用するのである．とくに，実数の集合 $\mathbb{R}$ は微分積分ができるという著しい性質があるので，微分積分という手段を利用して空間 M の性質を調べていくのが微分幾何学のテーマなのである．その際，写像 $c : \mathbb{R} \to M$ は M の中にある図形の外延を調べる道具となり，写像 $f : M \to \mathbb{R}$ は内包的な手段となる．これらのことは後々の章で見ていくことになるだろう．

---

*9)　そういう意味では「円とはある点から一定の距離にある点の集合である」というのが円の内包的定義である．ここでは話を簡単にするために，座標系，つまり実数という標準系で表示された形で議論を始めた．

考えてみると，我々が未知のものについて何かを調べようとするときは，素性のわからない X に対して，比較的素性のよくわかっている標準的な K を用意して，$c: K \to X$ という刺激を外から与えて，$f: X \to K$ という応答を見るという方法を必ずとるのではないだろうか．X が物理的な系であれば，外から熱や音や光などの刺激を与えて，温度や電気信号といった形の応答を測るだろう．X が人間ならば，いろいろな情報や環境刺激を与えたときにその人がどう反応するか見ることによって，その人の素性が少しずつわかってくるのではなかろうか．平常時よりも，何か不都合な事態に遭遇したときの反応にその人の本性や知性がよく現れる．このような図式

$$K \to X \to K \tag{1.64}$$

は我々がものごとを調べる・記述するという場面において標準的な手法として定着していると思える．

円を外延的に構成する方法は (1.60) だけとは限らない．次のような写像

$$\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad s \mapsto (x(s), y(s)) \qquad \begin{cases} x(s) = \dfrac{1-s^2}{1+s^2} \\ y(s) = \dfrac{2s}{1+s^2} \end{cases} \tag{1.65}$$

の像も $x^2 + y^2 = 1$ を満たす．ただし，この写像では $(x(s), y(s)) = (-1, 0)$ となるような $s \in \mathbb{R}$ はない．つまり円上の点 $(-1, 0)$ だけはこの写像 ϕ の像として表されない．また，s が有理数のとき $x(s), y(s)$ も有理数になっており，逆に円上で座標 (x, y) が有理数になるような点はこのような写像の像しかないということもわかっている．$x = \dfrac{X}{Z}, y = \dfrac{Y}{Z}$ という有理数を方程式 $x^2 + y^2 = 1$ に代入すれば，この問題は方程式

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \tag{1.66}$$

を満たす整数 X, Y, Z を求めよという問題に言い換えられる．この条件を満たす整数の組 (X, Y, Z) はピタゴラス数と呼ばれる．じつはその答えはユークリッドの原論でもすでに示されている．整数 m, n を用いて

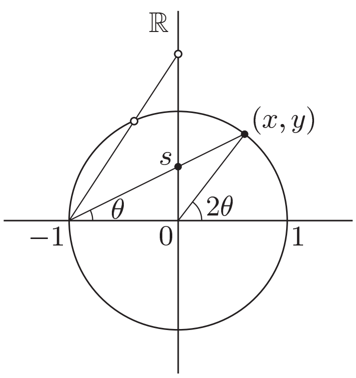


図 1.7　写像 $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (x, y)$ は円を外延的に構成する．

$$X = m^2 - n^2, \qquad Y = 2mn, \qquad Z = m^2 + n^2 \tag{1.67}$$

で与えられる数 X, Y, Z は (1.66) を満たす．逆に，方程式 (1.66) の整数解は (1.67) で与えられる (X, Y, Z) と，その X と Y とを入れ換えたものと，(X, Y, Z) を同一の整数倍したもので尽くされる*10)，というのが答えである．この答えは有理数 $s = \dfrac{n}{m}$, $x = \dfrac{X}{Z}$, $y = \dfrac{Y}{Z}$ を (1.65) に代入しても得られる．形式的に表現し直すと，

$$C = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{Z}^3 \mid X^2 + Y^2 = Z^2\} \tag{1.68}$$

というふうに内包的に規定された集合は，

$$\begin{aligned} C = &\{\, (k(m^2 - n^2),\, 2kmn,\, k(m^2 + n^2)) \mid (k, m, n) \in \mathbb{Z}^3 \,\} \\ &\cup \{\, (2kmn,\, k(m^2 - n^2),\, k(m^2 + n^2)) \mid (k, m, n) \in \mathbb{Z}^3 \,\} \end{aligned} \tag{1.69}$$

というふうに外延的に解かれるのである．この写像 (1.65) にはいろいろ面白い意味があり，後に多様体の章で議論することにする．

古典論理の世界では，内包を増やすと，外延は小さくなる．逆に，外延が増えすぎると，内包は乏しくなる．例えば

$$\begin{aligned} D &= \{6, 12, 18\} \\ &= \{x \mid x \text{ は 1 以上 20 以下の，2 と 3 で割り切れる整数 }\} \end{aligned} \tag{1.70}$$

という集合は，さっきの集合 $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ に条件を追加したものである．条件が増えた分，条件を満たすような元は減っている．これは内包が増えると外延は減るという単純な例である．

上の議論を形式化する次のようになる．集合 X の元 x に関する条件文 $P_1(x)$ と $P_2(x)$ があるとき，

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{x \in X \mid P_1(x)\}, \\ E &= \{x \in X \mid P_1(x) \text{ かつ } P_2(x)\} \end{aligned}$$

とおけば，「$P_1(x)$ かつ $P_2(x)$ ならば $P_1(x)$ である」と言えるのだから $E \subset \tilde{E}$ である．$\tilde{E}$ の方が条件が緩い分，つまり内包が少ない分，外延が広くなったのである．「$P(x)$ は $Q(x)$ を含意する」，つまり「$P(x)$ ならば $Q(x)$」という関係があると，$\{x \mid P(x)\} \subset \{x \mid Q(x)\}$ という集合の関係が生じる．例えば $P(x) = \langle x$ は 6 で割り切れる $\rangle$ とし，$Q(x) = \langle x$ は 2 で割り切れる $\rangle$ とした場合を考えてみるとよい．意味を含むという関係と元を含むという関係の向きがひっくり返っていることに注意してほしい．これもまた内包と外延の双対性の現れである．

外延と内包の関係を示すもう 1 つの例を挙げよう．3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 中の原点

*10) X, Y, Z の最大公約数が 1 になるような解（原始解と呼ばれる）だけを求めよ，という問題も考えてみてほしい．答えは整数 m, n が互いに素であり $m - n$ が奇数であるような m, n によって与えられる．

を通る平面をいかに規定するかということを考えてみよう．$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$ax + by + cz = (a, b, c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{1.71}$$

という方程式で平面を定義するやり方は，内包的である．ここで $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ と仮定している．つまり，

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto ax + by + cz \tag{1.72}$$

という関数を用いて，$F = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid f(p) = 0\}$ という方程式の解として平面を規定している．この「(a, b, c) を法線ベクトルとする平面」という規定のしかたは内包的定義である．

それに対して，

$$F = \left\{ s\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.73}$$

でも同じ平面が構成される．これは外延的構成である．ここでやっていることは,「接ベクトル $(b, -a, 0)$ と $(c, 0, -a)$ で平面を張る」という操作であり，パラメータ $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ を動かすことによって，平面上の点を全部網羅しようという企てである．このように集合の元をできるだけ直接的に示して集合の全貌を示すことが，集合の外延を与えるということなのだ．方程式の一般解を与えることだと言ってもよい．この場合の写像

$$i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto s\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \tag{1.74}$$

は「曲線」という名ではなく「埋め込み写像」という名で呼ばれる．

もう 1 つ似たような問題を出そう．

$$7x + 6y = 3 + 4z \tag{1.75}$$

という方程式にあてはまる整数の組 (x, y, z) をすべて求めよ，という問題を考えてほしい．答えは，m, n を任意の整数として，

$$x = -3 + 6m + 4n, \qquad y = 4 - 7m - 4n, \qquad z = n \tag{1.76}$$

で尽くされる．つまり

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 7x + 6y = 3 + 4z\} \tag{1.77}$$

という内包的規定条件が

$$G = \{(-3 + 6m + 4n,\ 4 - 7m - 4n,\ n) \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\} \tag{1.78}$$

という解で外延化されている．

以上の議論を形式化すると以下のようになる．素性のよくわかっている集合 K と，その元 $k_0 \in K$ を固定して，与えられた写像 $f: X \to K$ によって

$$H = \{x \in X \mid f(x) = k_0\} \tag{1.79}$$

と内包的に規定された集合に対して，また別の素性の知れた集合 K' と単射 $i: K' \hookrightarrow X$ をうまく見つけて

$$H = \{i(k') \mid k' \in K'\} \tag{1.80}$$

というふうに解集合 H を外延化するという作業が方程式 $f(x) = k_0$ を解くことに他ならない．

微分幾何学の主たる対象である多様体は，こうした外延と内包の行き来の舞台だと言える．例えば，微分方程式は微分幾何学の主要な問題であるが，微分方程式という内包的な条件が与えられたときに，解となる関数をできるだけ外延的に示せという典型的なパターンを持っている．また，数学的な問題のほとんどが，内包的に規定された問題に対して，外延的に解を尽くせ，という形で提出されることを考えると，外延と内包という視点は，微分幾何学にとどまらず，全数学の底流にある問題意識だと言えるのではなかろうか．また，こういった外延と内包の行ったり来たりの関係の中から双対性という概念が浮かび上がってくる．

1.6　双対性

双対性 (duality)*11) という概念も辞書的に説明するのは難しい．やはり例を挙げていくうちに双対性のこころを伝えたいと思う．

ベクトル空間という文脈で議論にとりかかろう．V が実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であるとは，ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ の和 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V$ や，実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ によるスカラー倍 $\lambda\boldsymbol{v} \in V$ が定義されていて，いくつかの条件を満たしていることをいう．大事な仮定であるが，V は有限次元とする．このとき，写像 $f: V \to \mathbb{R}$ で，線形性

$$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}), \qquad f(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v}) \tag{1.81}$$

を満たすものを V 上の**一形式** (one-form) とか**線形汎関数** (linear functional) という．V 上の一形式全体の集合を

$$V^* = \{f: V \to \mathbb{R},\ \text{線形}\ \} \tag{1.82}$$

と書き，V の**双対空間** (dual space) と呼ぶ．V の基底を選んでベクトル $\boldsymbol{v}$ をタテベクトルで成分表示するなら，一形式 f はヨコベクトルで表示される．例

*11)　双対は「そうつい」と読む．

えば3次元なら

$$f(\boldsymbol{v}) = (a, b, c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

といった表記が可能である．

まず，$f(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v} \in V$ を変数とする関数である，という認識をしておこう．こういう言い方をするとき，我々が念頭においているのは，関数 f を1つ固定して，いろいろな変数 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \cdots$ を f に代入して，測定値 $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), f(\boldsymbol{v}_3), \cdots$ を見るという考え方だ．ところが，双対空間を考えると，今度はいろいろな関数 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ があって，$\boldsymbol{v} \in V$ の方を固定しておいていろいろな測定値 $f_1(\boldsymbol{v}), f_2(\boldsymbol{v}), f_3(\boldsymbol{v}), \cdots$ を測るという視点に移行することが可能になる．

例えて言えば，変数 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \cdots$ はいろいろな人を表しており，関数 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ は身長計，体重計，握力計などといった種々の測定器を表している．測定器を1つ選んで，いろいろな人を測ることもできるし，人の方を1人固定しておいて，いろいろな測定器をその人にあてることもできるのだ．

こうしてみると，$f(\boldsymbol{v})$ という1つの実数は「$\boldsymbol{v}$ という関数に f という変数を代入したもの」と見てもよい気がしてくる．どちらが変数でどちらが関数か，という規定は，どちらを動かしてどちらを止めて見るか，という相対的・一時的な便宜にすぎないという気がしてくる．実際，

$$f(\boldsymbol{v}) = \hat{\boldsymbol{v}}(f) = \langle f, \boldsymbol{v} \rangle \tag{1.83}$$

と書き換えてもかまわない．$\boldsymbol{v}$ を「f を変数とする関数」と見なしたときに $\hat{\boldsymbol{v}}$ と書くことにした．また，関数と変数とはじつは対等の立場にあるということを強調するため，$\langle f, \boldsymbol{v} \rangle$ という記法を使った．これを $f \in V^*$ と $\boldsymbol{v} \in V$ の**対** (pairing) と呼ぶ[*12]．

さて，双対空間の双対空間とはいかなるものだろうか？ 定義どおり書けば，

$$V^{**} = (V^*)^* = \{\, \tau : V^* \to \mathbb{R},\ \text{線形} \,\} \tag{1.84}$$

である．τ は $f \in V^*$ を変数として実数値 $\tau(f)$ を出力する関数である．ここで，$\boldsymbol{v} \in V$ に帽子をかぶせて $\hat{\boldsymbol{v}} \in V^{**}$ を作るという写像

$$\begin{aligned} \wedge\ : V &\to V^{**} \\ \boldsymbol{v} &\mapsto \hat{\boldsymbol{v}} : V^* \to \mathbb{R} \\ &\qquad\quad f \ \mapsto \hat{\boldsymbol{v}}(f) := f(\boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{1.85}$$

を定義する．こうすると，この写像 $\wedge$ は全単射であることがわかる[*13]．もう

*12) pairing の訳語の「対」という言葉は，集合の元の順序対 (ordered pair) の意味でも用いられるので，訳さずに paring のまま押し通した方が紛れがない場合もある．

*13) 写像 $\wedge : V \to V^{**}$ が単射であることは容易に示せるのだが，V が有限次元であることを仮定しないと，全射であることを示すのは難しい．

少し詳しく言うと，$\wedge : V \to V^{**}$ は線形同形写像である．だから $V^{**} = V$ と書いてよい．双対は 2 回施すと元に戻るのである．

上の写像が全単射であるということは，「$f \in V^*$ を変数とする任意の線形関数 $\tau : V^* \to \mathbb{R}$ に対して，$\tau = \hat{\boldsymbol{v}}$ となるような $\boldsymbol{v} \in V$ が一意的に存在する」ということである．この様子をさらに日常語で表現しよう．f は $\boldsymbol{v}$ を見ているつもりだったが，見ているつもりの f もまた τ すなわち $\boldsymbol{v}$ に見られていたのだ．f は $\boldsymbol{v}$ を測って測定値 $f(\boldsymbol{v})$ を出力する装置であったが，転じて，$\boldsymbol{v}$ の方が f を測る装置 $\hat{\boldsymbol{v}}$ としてのアイデンティティを獲得する．双対とは 2 回施すと元に戻る操作であるが，ただたんに元に戻るのではなく，他者を鏡として，他人の目に映った己の姿を知り，自己認識を深めるという効果があるのだ．

しつこく言葉で説明しよう．V というのは正体のよくわからないものなので，実数 $\mathbb{R}$ という正体のよくわかっているものに対応させてやろう，何らかの測定値を引き出してやろうという働きの集合が双対空間 $V^* = (V \to \mathbb{R})$ である*14)．言わば，V^* は V に対して「あなた誰？」という問いかけを発しているのである．問いかけて答えを引き出すことが $V \to \mathbb{R}$ という矢で表されるのである．さらに，V^{**} は V^* に対して「あなたこそ誰？」と問うている．ところが，じつは V が V^* に対して「あなたこそ誰？」と問い返す側に回っていたわけで，「『あなた誰？』と言っているあなたは誰？」という質問を発する者は，当初の「あなた」と呼ばれていた者である．この問いかけ合いが

$$V^{**} \;=\; (V^* \to \mathbb{R}) \;=\; ((V \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}) \;=\; V$$

という輪を描いて V 自身にはね返って来るのである．この問いかけ合いは，自問自答ではなく，他者との対話であることに注意してほしい．双対性とは，他者との対話を通して，自他の立場を交換することによって自己認識を深める過程なのである．

ちなみに，1 つのベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は，写像

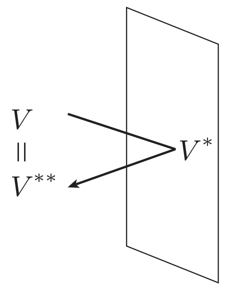


図 1.8　他者を鏡として自己を再認識する過程が双対性．

*14)　集合 X から集合 Y へのある条件を満たす写像の集合を $(X \to Y)$ と書くことにする．ここでは，ベクトル空間 V と W があったとき，V から W への線形写像全体の集合を $(V \to W)$ と書いている．

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} &\to V\\ t &\mapsto \phi(t) := t\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{1.86}$$

を定める．これは $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとする直線を引いていることにあたる．つまり，ベクトル $\boldsymbol{v}$ は素性のよくわかっている集合 $\mathbb{R}$ を，素性のまだわかっていない集合 V に入れる写像 $\phi : \mathbb{R} \to V$ として働き，V の中の直線を外延的に生成するという働きも持つ．この働きは，ベクトル $\boldsymbol{v}$ 自身が写像となって $\phi(1) = \boldsymbol{v}$ を指し示すという意味で，指差し写像に近い．標語的に書くと $V = (\mathbb{R} \to V)$ である．

なお，ベクトル空間 V に対してその双対空間 V^* を定義するという操作は写像ではないということに，注意してもらいたい．いわば，集合 V に触発されて新たな集合 V^* が派生するのだが，個々の元 $\boldsymbol{v} \in V$ に対応する元 $f \in V^*$ があるわけではない．例え話として挙げたように，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ は太郎や次郎といったいろいろな人を表しており，関数 $f_1, f_2 \in V^*$ は身長計，体重計といった種々の測定器であり，$f_1(\boldsymbol{v}_1)$ や，$f_2(\boldsymbol{v}_1)$ といった代入によっておのおのの測定値が得られるが，太郎が身長計に化けたり，次郎が体重計に化けたりするわけではない．むしろ「太郎は『身長計』計かつ『体重計』計である」と見なせるというのが $\hat{\boldsymbol{v}}_1(f_1)$ や，$\hat{\boldsymbol{v}}_1(f_2)$ という書き方であり，$V = V^{**}$ という主張である．したがって，$\wedge : V \to V^{**}$ は集合の元の行き先を定めた写像であるが，$V \to V^*$ という写像が定義されたわけではない．

双対性の最も単純な例は，補集合に関するド・モルガンの法則であろう．そもそも補集合 A^c とは，集合 X の部分集合 A が与えられたとき,「集合 A に含まれない」という条件を外延化したもの

$$A^c = \{x \in X \,|\, x \notin A\}$$

だから，そのふるまいは双対的になる．ド･モルガンの法則は，部分集合 $A, B \subset X$ に対して

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \tag{1.87}$$

が成り立つというものである．集合の合併による外延の増加分 $(A \cup B \supset A, B)$ が，補集合に対する条件の強化，すなわち補集合の内包の増加と読み替えられ，したがって補集合の外延は減る $(A^c \cap B^c \subset A^c, B^c)$ という現象を示している．さらに，$A^{cc} = A$ である．また，集合 A から補集合 A^c を作るという操作は写像ではないという点は，後に圏論を語るときに大切な注意点となる．

双対性とは何か，一般論として定式化するのは難しいが，おおざっぱに言えば次のようになる．正体のよくわからない対象 X があったとき，使い勝手のよい標準的な系 K （数の集合など，演算の可能な体系がよい）を用意すると，X を外から眺めて評価する者 f たちが集まってきて

$$M = D(X) = \{f : X \to K\ (\text{条件つき})\}$$

という 1 つの世界を形成する.「条件つき」と書いたのは，写像 $f : X \to K$ は写像なら何でもよいというわけではなく，線形性や連続性など何がしか X の構造と整合するような条件を満たすものだけを $D(X)$ の元として採用するという意味である．いったん $D(X)$ すなわち M という世界が成立すると，今度は M という対象を評価する者 x たちが $S(M) = \{x : M \to K\}$ という別世界を形成する．このとき $x \in X$ は $f \in M$ に対する測定器 $x(f) = f(x)$ として機能するので，少なくとも $X \subset S(M)$ であるが，M の持っている性質をうまく利用して $S(M)$ を必要最低限に小さく抑えて作ると，

$$X = S(M) = \{x : M \to K\ (\text{条件つき})\ \}$$

に戻って来る．こちらの条件は先ほどの条件とは別ものになることがある．$X = S(M)$ は M という異世界から特徴づけを受けて己の何たるかを知るのである．同時に，M もまた X という他者の力を借りて $M = D(X)$ という自己像を確立させる．この，自他の相互規定の反射 $X \leftrightarrow M$ が双対性である．また，双対性が現れるためには，反転の軸あるいは共通の座標になるような K が必要である．$K = \mathbb{R}$ ととったのがベクトル空間の双対性であり，$K = \{0, 1\}$ ととったのが部分集合と特性関数の双対性である．

これだけでは双対性とは何のことだか読者にはまだわからないかもしれない，いや，ちっともわからないだろう．ただ，こういった視点の主客反転，図地反転が可能だということを知ると，いろいろ深いことが見えてくるという心の準備をしてもらいたかったのである．

第 2 章
位相空間

2.1 位相空間の例

この章の目的は，位相空間の定義と性質を説明することであるが，定義を述べる前に，まず位相空間の例をいくつか挙げることにする．具体例をたくさん知っていることが，抽象的な概念の理解を助けると思われるからだ．

位相空間とは，我々が見たり心に思い浮かべたりすることができる「空間」の概念を一般化・抽象化したものだ．直線，円周，平面，球面，3 次元空間などは位相空間の例である．注意してほしいことは，平面が位相空間であると言うとき，我々は平面にへばりついている虫か何かのような視点に立っており，我々は平面に沿って動くことはできるが，平面から外れるような動きはできないものと想定しているということだ．球面が位相空間であるというのも同様の意味で，我々は球面に沿って動いたり，球面にへばりついたものを見たりすることはできるが，球面から離れることはできないし，球面から離れた位置にあるものを見ることもできない，と考える．つまり，球面上の生き物にとっては，球面こそ世界のすべてであって，球面以外の場所は存在しないのである．位相空間とは,「その世界のすべて」であり，いわば「宇宙」なのである．例えば，球の中心点 A は球面という位相空間には含まれておらず，点 A は位相空間論の考察の対象にはならない．

ちょっと考えにくいかもしれないが，球面の内側・外側という概念も，とりあ

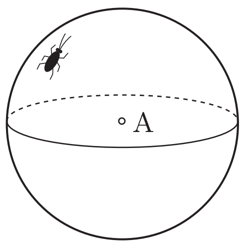


図 2.1　球の中心 A は球面の点ではない．

えず位相空間論の考察の対象にならない．と言うより，球面の住人にとっては球面の内･外という部分は認知されない．このことは想像しにくいので，別の例を挙げて説明する．例えば，紙面に描かれた円は，紙面を内側と外側に切り分ける．しかし，もしこの円が 3 次元空間に浮かんだ輪ゴムのようなものであったとしたら，この円の内側・外側と区別されるような場所は存在しない．円は，2 次元面に置かれれば，その面を内側と外側の 2 つの部分に仕切るが，円は 3 次元空間に置かれると仕切りにならないのである．したがって，内・外という概念は円そのものに固有の概念ではなく，円がそれより大きな空間の中にどのように埋め込まれているかということに依存する概念である．このように，ある図形を外から眺めたときに初めて明確に規定される性質を**外来的** (extrinsic) な性質という*1)．それに対して，その位相空間中にとどまっている住人に見えるような図形の性質を**内在的** (intrinsic) な性質という．位相空間を調べるということは，その空間の住人の立場から世界がどのように見えるか調べることなのである．

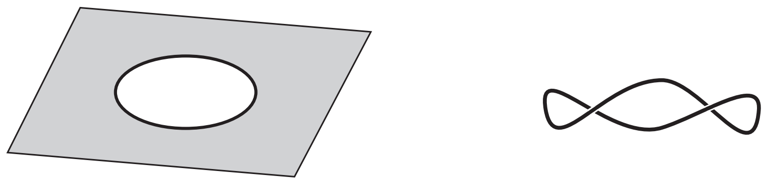


図 2.2　平面に置かれた円と 3 次元空間に置かれた輪ゴム状の円.

さて，平面や球面は代表的な 2 次元位相空間の例である．他の例を挙げてみよう．正方形（辺上の点および面内の点からなる集合）は 2 次元位相空間である．正方形を材料にして，いろいろな 2 次元位相空間を作ってみよう．この正方形は伸ばしたり縮めたり曲げたりすることが可能な，ゴム膜のようなものだとする．正方形の向かい合う一組の辺を下図のように貼り合わせると**円筒** (cylinder) ができる．これも位相空間の一種である．ここで a という矢印をつけた二辺は，

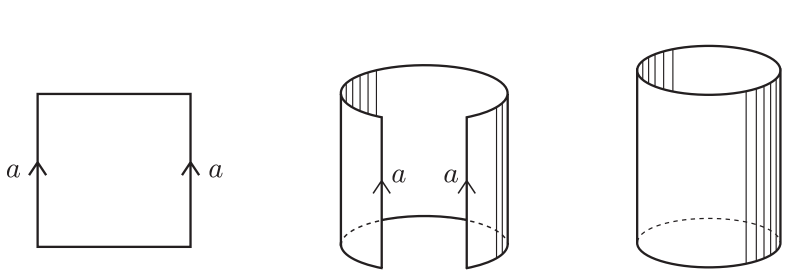


図 2.3　正方形の対辺を貼り合わせて円筒を作る.

*1)　「外来」とは「外来語」のように外国から導入されたことや，入院患者に対比して「外来患者」という意味で使われる言葉であるが，ここでは，その空間の外部にある視点からもたらされるものという意味で使うことにする.

円筒において同一のものとなる．貼り合わせをしなかった辺は，円筒の縁として残っている．

矢印の向きを互い違いにして貼り合わせることもできる．こうしてできる図形は，リボンを半回転ねじってつなげたような形で，**メビウスの帯** (Möbius strip) と呼ばれる．メビウスの帯は，直観的な意味で，裏表のない図形である．つまり，円筒は表と裏を異なった色で塗り分けることができるが，メビウスの帯はすべての面が地続きであり，表に色を塗り始めると，面全体を同じ色で塗り尽くしてしまう．ただし，面の表・裏という概念は外・内という概念と同様に外来的なので*2)，表・裏に相当する概念を内在的に規定するためにはもう少し別の定義を考えなければならない．

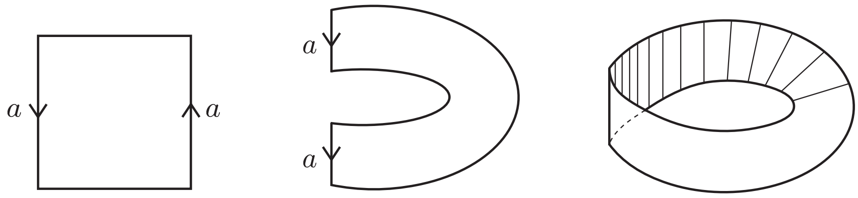


図 2.4　メビウスの帯．

下の図のように正方形の辺の組に a, b という矢印をつけて，a どうし，b どうしを貼り合わせると**球面** (sphere) ができる．これは縁のない位相空間だ．球面のことを S^2 という記号で表すことにする．

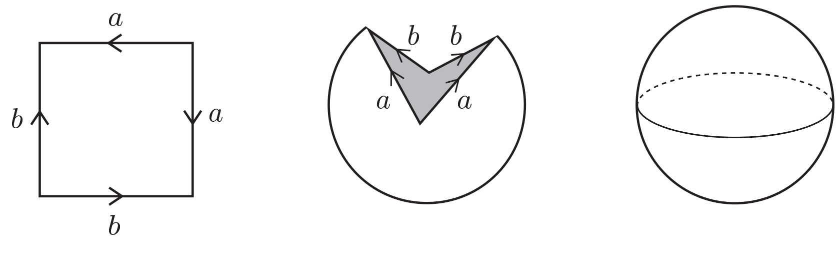


図 2.5　球面．

では，図 2.6 のように平行な辺に a, b という矢印をつけて貼り合わせるとどんな図形になるか？ これは**トーラス** (torus) と呼ばれる位相空間になる．ドーナッツの表面がトーラスである．トーラスに住む住人が右に向かって動くと，右の辺の点 A にぶつかったとたんに左の辺の点 A から出てくる．上の辺の点 B は下の辺の点 B に通じている．こういうつながり方をしている空間がトーラスである．トーラスのことを T^2 という記号で表す．なお，正方形の対辺の同一視に伴って，頂点も同一視されることに注意してほしい．

*2)　ここでは，ある多様体を次元が 1 つ大きいユークリッド空間にはめ込んで法ベクトル束が直積束になるならば，表・裏の塗り分け可能な多様体と言っている．

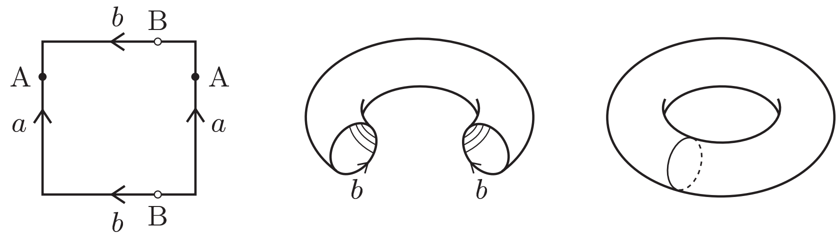


図 2.6　トーラス.

ひとひねり加えて，図 2.7 のように a は平行向きの矢印，b は反対向きの矢印として，矢の向きが重なるように辺を貼り合わせれば，どんな図形になるか？これは**クラインの壺** (Klein bottle) と呼ばれる位相空間になる．組み立ての過程で自己交差の傷ができてしまうが，この傷は外来的なものである．つまりクラインの壺を 3 次元空間中に作ろうとした都合上できてしまった傷であるが，この傷はクラインの壺（の表面）の住人には認知されないものである．また，クラインの壺は（外来的な意味で）裏・表の区別がない．

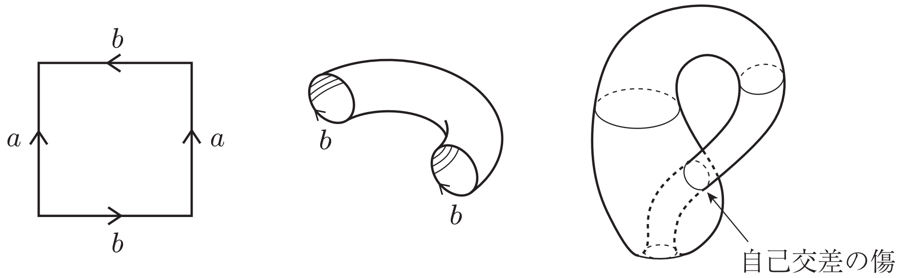


図 2.7　クラインの壺.

さらにひねって，下の図のように，向かい合った辺に反対向きの矢印をつけて a どうし，b どうし貼り合わせるとどんな図形になるか？ これは**射影平面** (projective plane) と呼ばれる位相空間になる．射影平面のことを $\mathbb{R}P^2$ という記号で表す．これにも外来的な自己交差の傷がある．

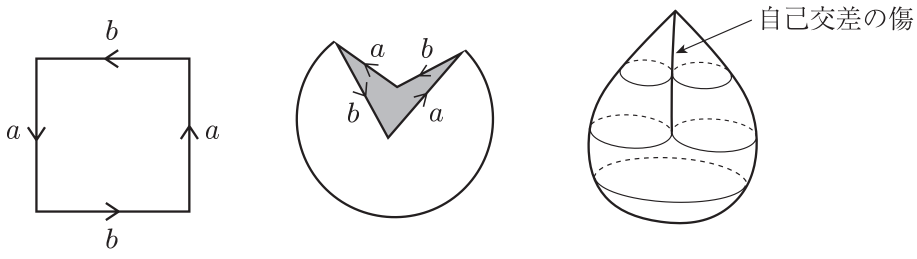


図 2.8　射影平面.

射影平面の自己交差の傷がどんなものか，わかりやすくするために，$\sqrt{z}$ のリーマン面と呼ばれるものを説明しよう．それは 2 枚のシートに切り込みを入

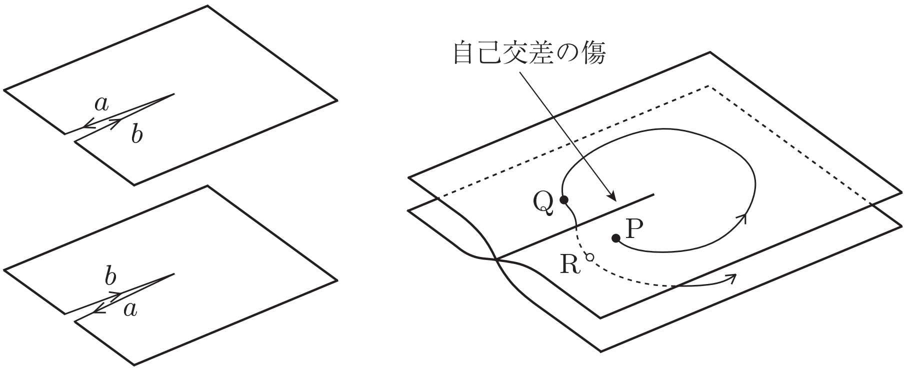


図 2.9　$\sqrt{z}$ のリーマン面．2 枚のシートを切れ目のところで貼り合わせる．

れて図 2.9 のように貼り合わせたものだ．このリーマン面の上を虫が這い回ったとしたら図のような道すじを描くことができる．自己交差の傷のところで上のシートから下のシートに乗り移っているのだ．なお点 P と点 Q は絵の都合上近くに描かれているが，本当は遠く離れた点である．むしろ点 Q と点 R の方が近くにあることに注意してほしい．

さらに 8 角形の辺に図 2.10 のように a, b, c, d という矢印をつけて同じ記号の矢印の向きが合うように貼り合わせると，2 人乗りの浮き輪のような図形ができる．これは種数 2 のトーラスと呼ばれ，Σ_2 という記号で表される．さらに種数 3 のトーラスがどんなふうに作られるか考えてみてほしい．また，8 角形の辺の矢印の配置や向きを変えて貼り合わせるとどんな図形になるか，試みてみると面白いだろう．

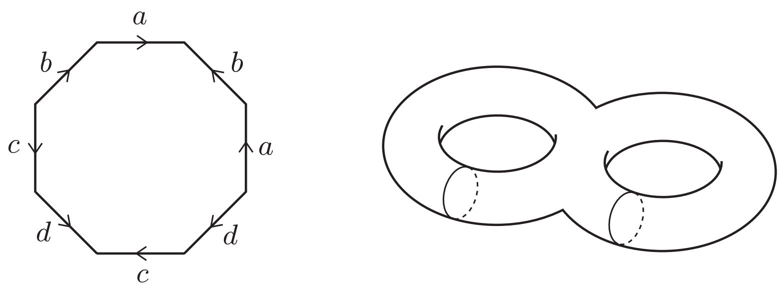


図 2.10　種数 2 のトーラス．

2.2　位相空間の定義

上に見たいろいろな位相空間の例から一般的な教訓を引き出すと,「空間とは結局，点のつながり方のことだ」と言えると思う．この点とあの点は近い，この点とあの点はじつは重なっている，この点とあの点は絵の都合上近くに描いてあるけどじつは遠い，などといった点と点の遠近関係が空間を規定しているのだ，という気がしてくる．そうすると，空間というものを初めから定義しよ

うと思ったら,「点の近さ」を定めればよいという発想が湧いてくる.

しかし点と点が「近い」とは何とも非数学的な曖昧な言葉だ.「近い」ということをどうすれば明確に規定できるだろうか？ 点と点の距離を定量的に測るのは，近さを規定する方法の 1 つである．だが，曲がった空間など一般的な空間を考えようとすると，距離を定めるやり方は必ずしも 1 通りではなく，選択の余地がある．例えば，町と町の間の距離を測るのに，地図上の直線距離を測ってもよいが，公共交通機関を使って移動した場合の所要時間を距離の目安としてもよいし，移動に必要な交通費をコスト距離と呼んでもよいだろう．地図上の直線距離に関する遠近と，電車を乗り継いで行った場合の時間的距離に関する遠近が逆転するという事態もあり得るだろう．距離の定め方は絶対にこれでなければならないというものはないのだ．また，点と点の距離を定めることは，空間を完全に固めてしまうことであり，前節で議論したような図形の伸び縮み・曲げ伸ばしといった変形を許さないことになる．我々はもっと定性的で柔軟な枠組みで空間というものを捉えたい.

そうすると，近くにある点を囲めばよい，あるいは,「囲みの中にある点を互いに近い点と呼ぶことにする」というアイディアに行き着く．例えば，実数全体 $\mathbb{R}$ は数直線で表されるが，$a < b$ という実数 a, b に対して，a と b の間にある実数の集合を

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} \tag{2.1}$$

と書き，**開区間** (open interval) と呼ぶ．順序対 (a, b) も同じ記法だが,「開区間 (a, b)」という書き方をすれば間違えることはないだろう．ちなみに両端の a, b も含む集合は

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} \tag{2.2}$$

と書き，**閉区間** (closed interval) と呼ぶ．$a < x < b$, $a < y < b$ を満たす 2 つの実数 x, y は同じ開区間 (a, b) の中に入っていて，x と y は互いに近くにあると言える．同様に，閉区間に収まっている点も互いに近くにある点だと言える.

図 2.11　開区間 (a, b) と閉区間 $[a, b]$.

結局のところ，空間中の点の遠近関係というのは，互いに近くにある点を包む部分集合によって規定されるという発想へと行き着く．そういう発想を洗練したものが以下に示す位相空間の定義である.

位相空間 (topological space) とは，集合 X に次の条件を満たすような部分集合の族 $\mathscr{O} \subset \mathbf{2}^X$ を備えたものである：

(i) $\varnothing, X \in \mathscr{O}$,

(ii) $U_1, U_2 \in \mathscr{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}$,

(iii) 添え字集合$\varLambda$の各元$\lambda \in \varLambda$について $U_\lambda \in \mathscr{O}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \varLambda} U_\lambda \in \mathscr{O}$.

もはや X はたんなる集合ではなく，開集合族 $\mathscr{O}$ を備えつけられたものだということを強調するために，位相空間 $(X, \mathscr{O})$ と書くこともある．まず，注意してほしいのは，$U \in \mathscr{O}$ は $U \subset X$ を意味するということだ．$\mathscr{O}$ は X の部分集合すべての集合ではないが，X の部分集合を適当に集めた集合である．$\mathscr{O}$ の元 U のことを**開集合** (open set) といい，$\mathscr{O}$ を開集合族という．条件 (i) は，少なくとも空集合と X そのものは開集合だという要請である．条件 (ii) は，2 つの開集合の交わりも開集合だということを要請している．条件 (iii) は，任意の個数の開集合の合併もまた開集合であることを要請している．

部分集合 $F \subset X$ に対して補集合 F^c が開集合であるとき，F を**閉集合** (closed set) という．また，$x \in X$ のことを「集合 X の元 x」と呼んでいたが，X に位相が備わったいまは，気分を変えて,「位相空間 X の点 x」と呼ぶ．

条件 (ii) は 2 個の開集合についての条件であるのに対し，条件 (iii) は任意の個数の開集合についての条件であることに注意してほしい．この違いを見るために次のような例を考えてみよう．$n \in \mathbb{N}$ で添え字づけられた開区間の族

$$U_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 < x < 1 + \frac{1}{n}\right\} \tag{2.3}$$

について，合併は

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = (0, 2) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 2\} \tag{2.4}$$

という開区間になるが，交わりは

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 1\} \tag{2.5}$$

となり，開区間にならない．無限個の開集合の合併は開集合と言えるが，無限個の開集合の交わりは必ずしも開集合とは言えないのである．こういった次第で条件 (ii) と (iii) は少し異なった設定にしてあるのだ．

n 個の実数体の直積集合 $\mathbb{R}^n$ に次のように位相を定める．$\mathbb{R}^n$ の元を $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ と書く．ここでは $x^k \in \mathbb{R}$ の添え字 k を上につけることにした．点 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ と点 $y = (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ の距離を

$$d(x, y) := \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2} \tag{2.6}$$

で定める．こういう距離を定めた $\mathbb{R}^n$ を**ユークリッド空間** (Euclidean space) という．点 $x \in \mathbb{R}^n$ と正の実数 ε に対して集合

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, d(x, y) < \varepsilon\} \tag{2.7}$$

を x を中心とする半径 ε の**開球** (open ball) という．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 U の点

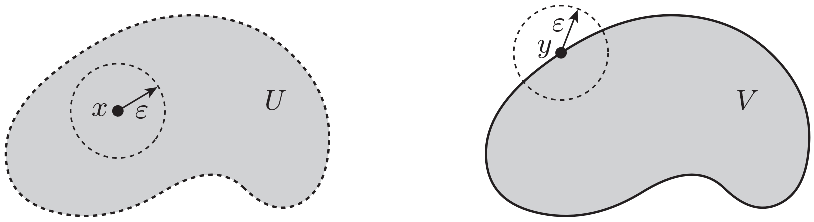


図 2.12　x は U の内点であり，U は開集合．y は V の点だが V の内点ではない．V は開集合ではない．

$x \in U$ に対して $B(x, \varepsilon) \subset U$ となる正の実数 ε が存在するとき，x は U の**内点** (inner point) という．U のすべての点が内点であるとき，U を $\mathbb{R}^n$ の開集合と呼ぶ（図 2.12 参照）．このように $\mathbb{R}^n$ の開集合族 $\mathscr{O} = \{U\}$ を定めると，これらは位相の 3 条件を満たすことが確かめられる（確かめるのはちょっと面倒だがそんなに難しくはない）．ユークリッド空間は，我々の直観に一番よくなじむ位相空間であり，他の位相空間を調べる上でも基準になる位相空間である．

また，位相空間の点 $p \in X$ と部分集合 $V \subset X$ に対して，$p \in U \subset V$ が成り立つような開集合 U が存在するとき，V は p の**近傍** (neighborhood) であるという．例えば，2 次元ユークリッド空間 $X = \mathbb{R}^2$ において点 $p = (0, 2)$ と，上半平面と呼ばれる部分集合

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$$

をとるとき，点 p を中心とする半径 1 の開円板

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 < 1\}$$

をとれば，U は X の開集合であり，$p \in U \subset V$ という関係が成り立つ．したがって部分集合 V は点 p の近傍である．「近傍」という言葉の感覚からすると，U が p の近傍だというのはしっくりくるが，上半平面 V のようにどこまでも遠くまで広がっている集合も点 p の「近傍」と呼ぶのは違和感があるかもしれない．しかし点 p のある程度近くを完全に包み込んでいる集合を p の「近傍」と呼ぶと約束したのであって，この定義では点 p から遠く離れた所の様子は気にしていないのである．だから「V は p の近傍」と言ってよいのである．

ちなみに同じ $X = \mathbb{R}^2$ と点 $p = (0, 2)$ に対して，部分集合 $W \subset \mathbb{R}^2$ を

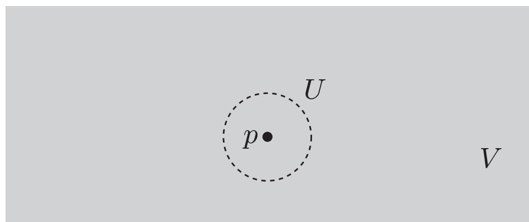


図 2.13　集合 V は点 p の近傍．

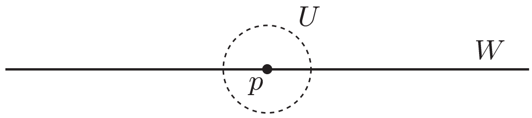


図 2.14　集合 W は点 p の近傍ではない．

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$$

とおくと，$p \in W$ は成り立つが，W は p の近傍ではない．理由は図 2.14 を見ながら考えてほしい．

2.3　位相の強弱と分離公理

位相空間とは集合に開集合族を定めたものだから，同じ集合でも，開集合の定め方によって，いろいろな位相空間になり得る．集合に開集合族を定めることを「位相を入れる」ともいう．ここではまず，簡単な集合 $X = \{a, b, c\}$ に位相を入れる練習をしてみよう．例えば，

$$\mathscr{O}_1 = \{\{\ \}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\} \tag{2.8}$$

は集合 X に位相を定める．点 c は開集合 $\{c\}$ に囲われて，点 a と点 b を包む開集合 $\{a, b\}$ から切り離されている．したがって，点 a, b は互いに近く，点 c は少し離れている，という遠近感をこの位相は表している．

$$\mathscr{O}_2 = \{\{\ \}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \tag{2.9}$$

もまた位相である（位相の 3 条件を満たしていることを確かめてほしい）．

$$\mathscr{O}_3 = \{\{\ \}, \{a, b, c\}\} \tag{2.10}$$

は，点と点の間に仕切りがなく，すべての点がべったりとへばりついてしまったような位相である．その逆の極端として

$$\mathscr{O}_4 = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \tag{2.11}$$

は，すべての点を完全に仕切って，点と点をバラバラに分けている位相だと言える．開集合が多ければ多いほど，空間を小刻みに分けた位相になる．ここに

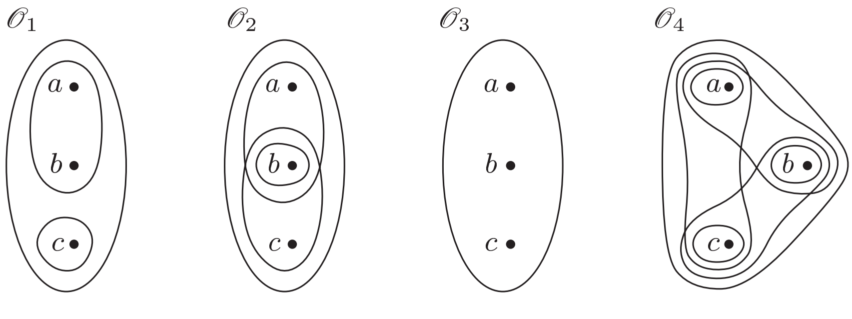


図 2.15　集合 $X = \{a, b, c\}$ に 4 通りの位相を入れる．

挙げた 4 通りの位相の他に，集合 $X = \{a, b, c\}$ に全部で何通りの位相を入れることができるか，数え尽くしてみてほしい．また，

$$\mathscr{O}_1' = \{\{\ \}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, b, c\}\} \tag{2.12}$$

のように，X の点の名前をつけ替えただけで，実質的には $\mathscr{O}_1$ と同等な位相もあることに注意してほしい．このような「同等な位相」のことを，後に「同相」と呼ぶ．そうすると，集合 X に付与することのできる「互いに同相ではない位相」が全部で何通りあるか数え上げよという問題や，この位相とあの位相は同相か否か判定せよ，といった問題意識が湧いて来る．

一般の集合 X に対して $\mathscr{O} = \{\varnothing, X\}$ を**密着位相**あるいは**自明な位相** (trivial topology) という．反対に，X のすべての部分集合を開集合とする $\mathscr{O} = \mathbf{2}^X$ を**離散位相** (discrete topology) という．X に 2 通りの位相 $\mathscr{O}, \tilde{\mathscr{O}}$ を入れたとき，$\mathscr{O} \subset \tilde{\mathscr{O}}$ ならば，$\tilde{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ よりも**強い** (strong) 位相であるという．または，$\mathscr{O}$ は $\tilde{\mathscr{O}}$ よりも**弱い** (weak) 位相であるともいう．離散位相は最も強い位相であり，密着位相は最も弱い位相である．これらの間に強弱さまざまな位相がある．

開集合が多ければ多いほど，位相は強く，空間の各点は分離される傾向が強まってくる．位相の強さに関する種々の条件は，**分離公理** (axiom of separation) と呼ばれる．分離公理の中でもとくに次のものが有名である．X の任意の異なる 2 点 x_1, x_2 に対して，x_1 を含む開集合 U_1 と，x_2 を含む開集合 U_2 で，$U_1 \cap U_2 = \varnothing$ となるものが存在するとき，位相空間 X は第 2 分離公理を満たすという．また，このとき U_1 と U_2 は 2 点 x_1, x_2 を分離するという．この条件を満たす位相空間を**ハウスドルフ空間** (Hausdorff space) という．

また，$F_1 \cap F_2 = \varnothing$ となる任意の閉集合 F_1, F_2 に対して，$F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ となるような開集合 U_1, U_2 が存在するとき，位相空間 X は第 4 分離公理を満たすという．この他にも分離公理にはさまざまな種類があるのだが，この本では深入りしない．

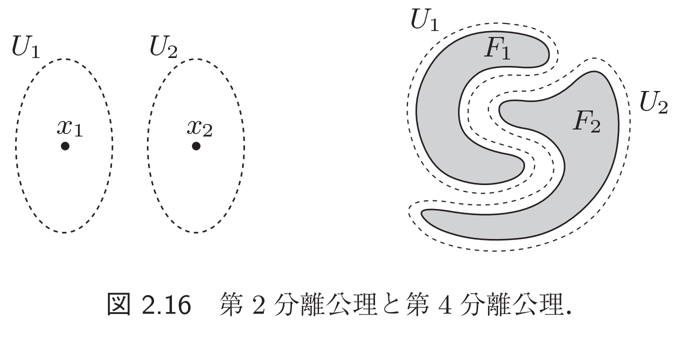


図 2.16　第 2 分離公理と第 4 分離公理．

ちなみに上で例に挙げた $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \mathscr{O}_3$ はどれも第 2 分離公理を満たさない．$\mathscr{O}_4$ だけが第 2 分離公理を満たしてハウスドルフ空間になる．ユークリッド空間はハウスドルフ空間である．トーラスや球面などもハウスドルフ空間である．

人間が普通に思い描く図形はまずたいていハウスドルフ空間であるが，位相

という概念は非常に制限が緩く，多様な位相の構成のしかたがあるので，うかつに位相空間を作ると，あるいはわざとらしく位相空間を作ると，ハウスドルフではない空間ができてしまう．一見普通の空間のように見えるが，じつはハウスドルフでない位相空間の例を 1 つだけ紹介しておく．集合 $\mathbb{R}$ を 2 つ用意して，$\mathbb{R}_1$ と $\mathbb{R}_2$ と書くことにする．$x_1 \in \mathbb{R}_1$ と $x_2 \in \mathbb{R}_2$ がともに $x_1 < 0, x_2 < 0$ であり実数値として見て $x_1 = x_2$ であるとき，$x_1 \sim x_2$ と書き，2 点 x_1, x_2 を強制的に同一点と見なす．こうしてできた空間を $X = \mathbb{R}_1 \amalg \mathbb{R}_2 / \sim$ と書く．下の図を参照してほしいが，空間 X は 2 本の数直線の負側の半直線を重ねたものであり，Y の字の形をした三叉路のような図形である．こうすると $0_1 \in \mathbb{R}_1$ に由来した点と，$0_2 \in \mathbb{R}_2$ に由来した点は異なる点でありながら，それぞれを含む開集合 U_1, U_2 は必ずオーバーラップを持ってしまい，分離できない．つまり第 2 分離公理を満たさない．したがって X はハウスドルフ空間ではない．さらに，第 2 分離公理は満たすが第 4 分離公理は満たさない位相空間の例を作ることに読者は挑戦してみてほしい．

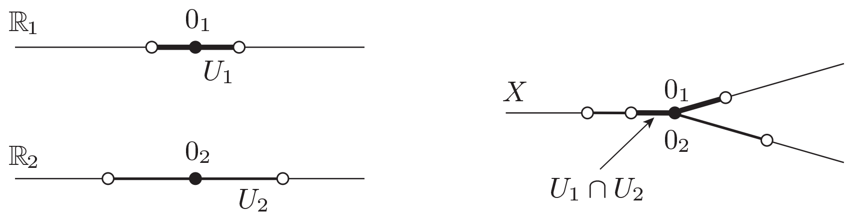


図 2.17　第 2 分離公理を満たさない空間の例．

2.4　連続写像

位相という概念は集合の点と点の近さを規定するものであった．2 つの位相空間があれば，近くの点を近くに写す写像を考えることが自然であろう．

2 つの位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ が与えられたとき，写像 $f : X \to Y$ が**連続写像** (continuous mapping) であるとは，任意の $U \in \mathscr{O}_Y$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ が成立していることである．とくに，ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ を値域とする連続写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を**連続関数** (continuous function) という．

この定義が「連続」という言葉に対する我々の感覚とマッチしていることは，次の例を見ればわかるだろう．写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続写像であるとは，開区間 $U = (a, b)$ の逆像 $f^{-1}(U)$ が開集合であることを意味する．もし図 2.18 のように写像 f に不連続点がある場合は，開区間 U を不連続値のギャップにかかるようにとれば，開区間の逆像 $f^{-1}(U)$ は「端」を含む区間になってしまい，開集合にはならない．

密着位相 $\mathscr{O} = \{\varnothing, X\}$ を持つ位相空間 X に対しては，連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$

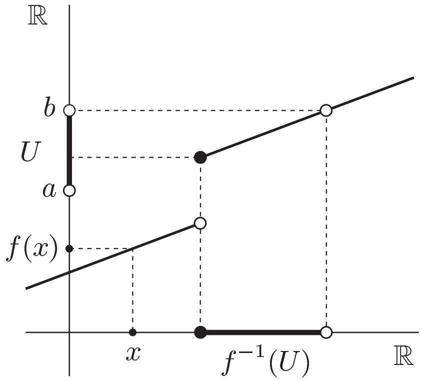


図 2.18　連続ではない写像．開集合 U の逆像 $f^{-1}(U)$ が開集合になっていない．

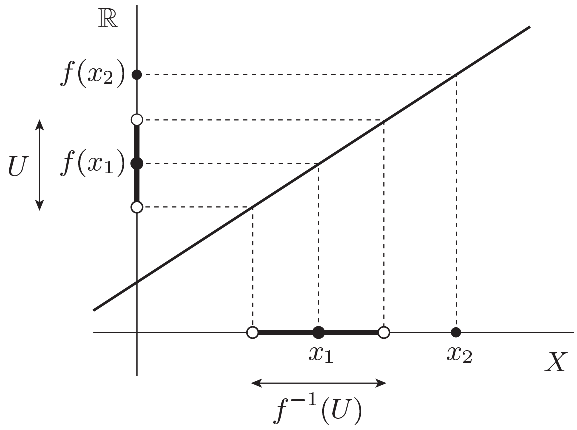


図 2.19　$x_1 \in f^{-1}(U)$ かつ $x_2 \notin f^{-1}(U)$ となるが，そのような集合 $f^{-1}(U)$ は密着位相の開集合ではない．

は定値関数しかない．つまりすべての $x \in X$ に対して $f(x) = c$（$c \in \mathbb{R}$ は定数）となる．なぜなら，もし $f(x_1) \neq f(x_2)$ となるような 2 点 $x_1, x_2 \in X$ が存在すれば，図 2.19 を見ながら考えてほしいが，$\varepsilon = \dfrac{1}{2}|f(x_1) - f(x_2)|$, $U = (f(x_1) - \varepsilon, f(x_1) + \varepsilon)$ とおけば，U は $\mathbb{R}$ の開集合であり，$f(x_1) \in U$ だから $x_1 \in f^{-1}(U)$ であり，$f(x_2) \notin U$ だから $x_2 \notin f^{-1}(U)$ となるが，そのような $f^{-1}(U)$ は密着位相の開集合族 $\{\varnothing, X\}$ の元ではない．よって，密着位相空間 X においては，$f(x_1) \neq f(x_2)$ となるような 2 点 $x_1, x_2 \in X$ は存在しない．つまり連続関数 $f(x)$ は定値関数である．言い換えると，密着位相では，すべての点がダンゴになってくっついてしまっていて，連続写像の値が変化できないのである．

連続関数の値が場所場所によって変化することが許されるためには，ある程度位相が強くなければならない．なぜなら，連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して，もし $f(x_1) \neq f(x_2)$ となるような 2 点 $x_1, x_2 \in X$ が存在していて，$f(x_1) < f(x_2)$ だとすれば，今度は図 2.20 を見ながら考えてほしいが，$c_1 < f(x_1) < d_1 < c_2 < f(x_2) < d_2$ を満たす任意の実数 c_1, d_1, c_2, d_2 に

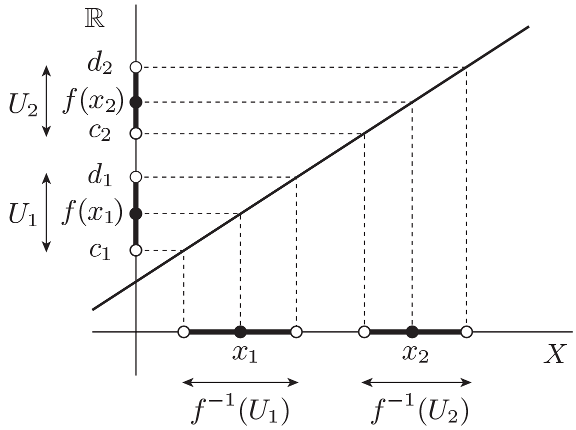


図 2.20　$f : X \to \mathbb{R}$ が連続関数になるためには $f^{-1}(U_1)$ と $f^{-1}(U_2)$ がともに開集合でなくてはならない.

対して，開区間 $U_1 = (c_1, d_1)$, $U_2 = (c_2, d_2)$ をとれば，f が連続という要請から，$f^{-1}(U_1)$ も $f^{-1}(U_2)$ も X の開集合であることが要請され，しかも $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \varnothing$ でなければならない．つまり，点 x_1 と点 x_2 を分離する十分多数の開集合を X が持っていなくてはならない.

位相が強くなってくると，空間が切り分けられて，連結成分というものが現れる．連結成分のきちんとした定義は後で与えるが，位相空間 X が 2 つの連結成分 X_1, X_2 に分かれているとは，直観的には，X は離れ離れの島 X_1 と X_2 からなる国だというふうにイメージしてもらえばよい．X_1, X_2 はそれぞれ開集合である．このとき，$c_1 \neq c_2$ なる実数 c_1, c_2 に対して，$x \in X_1$ のとき $f(x) = c_1$, $x \in X_2$ のとき $f(x) = c_2$ となる写像 $f : X \to \mathbb{R}$ が連続関数である．つまり，離れ離れの島の上では連続関数は異なった値をとることができる.

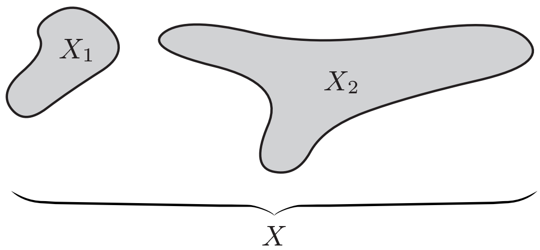


図 2.21　2 つの連結成分からなる位相空間.

連結成分に分かれるのは，点の離れ方としてはかなり極端な部類に入る．開集合をありったけ設けて，最も極端に点を分離し尽くしたものが離散位相となる．X が離散位相空間ならば，どんな写像 $f : X \to Y$ も連続写像である．双対に，Y が密着位相空間ならば，どんな写像 $f : X \to Y$ も連続写像である．しかし，どんな写像でも連続写像になってしまうのでは，わざわざ連続写像などというものを導入する意味がない.

定義域 X の位相をどれくらい強くしておけば定値でない連続関数が存在できるのか，という問いに対しては，**ウリゾーンの定理** (Uryson theorem) という答えがある．それは次のような主張である．位相空間 X が第 4 分離公理を満たすならば，$F_1 \cap F_2 = \varnothing$ となる任意の閉集合 F_1, F_2 に対して，連続写像 $f : X \to \mathbb{R}$ で，任意の $x \in X$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$ を満たし，$x \in F_1$ のとき $f(x) = 0$，$x \in F_2$ のとき $f(x) = 1$ となる写像 f が存在する．つまり，第 4 分離公理程度に位相が強ければ，ある場所では 0 になり，別の場所では 1 になるような，真に値の変化のある連続関数が存在する．

2.5 連結性

前節で触れた連結成分の定義を整えよう．前に，開集合の補集合を閉集合と呼ぶと約束した．位相空間 X について，X と $\varnothing$ は開集合なので，その補集合である $\varnothing$ と X は閉集合である．つまり X 自身は開かつ閉である．すると，開かつ閉であることは 1 つの位相空間として独立しているための条件だと思うことができる．もし，位相空間 X の部分集合 A が開かつ閉だったら，その補集合 A^c は閉かつ開である．この場合，A と A^c はそれぞれ位相空間として分離独立できる状況にある．もちろん X と $X^c = \varnothing$ は開かつ閉だが，X と $\varnothing$ 以外に開かつ閉な部分集合があれば，X は少なくとも 2 つの島に分かれていると考えてよい．

そこで，位相空間 X の部分集合 A が開かつ閉ならば $A = X$ または $A = \varnothing$ が成り立つとき，X が**連結** (connected) であるという．例えば，集合 $X = \{a, b, c\}$ に (2.8) で与えた位相

$$\mathscr{O}_1 = \{\{\ \}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$$

に関して，$A = \{a, b\}$ と $A^c = \{c\}$ はともに開集合であり，したがって，ともに閉集合であり，どちらも X 自身ではないので，位相空間 $(X, \mathscr{O}_1)$ は連結ではない．それに対して (2.9) で与えた位相

$$\mathscr{O}_2 = \{\{\ \}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

に関して位相空間 $(X, \mathscr{O}_2)$ は連結である．

位相空間の部分集合も 1 つの位相空間として扱えるようにしておこう．位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ の任意の部分集合 $A \subset X$（A 自身は開集合である必要はない）について，X の各開集合 $U \in \mathscr{O}_X$ に対して $U' = U \cap A$ を A の開集合と定めることによって A の位相 $\mathscr{O}_A = \{U'\}$ が定まる．この位相を $\mathscr{O}_X$ に関する A 上の**相対位相** (relative topology) といい，こうしてできる位相空間 $(A, \mathscr{O}_A)$ を $(X, \mathscr{O}_X)$ の**部分位相空間** (topological subspace) という．相対位相によって A が連結であるか否かが意味を持つ．

位相空間 X の開集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \tag{2.13}$$

$$\forall \lambda, \forall \lambda' \in \Lambda \, (\lambda \neq \lambda' \; \Rightarrow \; X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \varnothing), \tag{2.14}$$

$$\forall \lambda \in \Lambda \, (X_\lambda \neq \varnothing) \tag{2.15}$$

を満たし，しかも各 X_λ は相対位相に関して連結であるとき，X_λ を X の**連結成分** (connected component) という．また，添え字集合 Λ の濃度を連結成分の個数という．位相空間 X に対して上の条件を満たすような $\{X_\lambda\}$ は一意的に存在する（証明が必要な主張）．また，各 X_λ は開かつ閉である．Λ が有限濃度 n を持つならば，直観的には，X は n 個の島からなる国として描かれる．

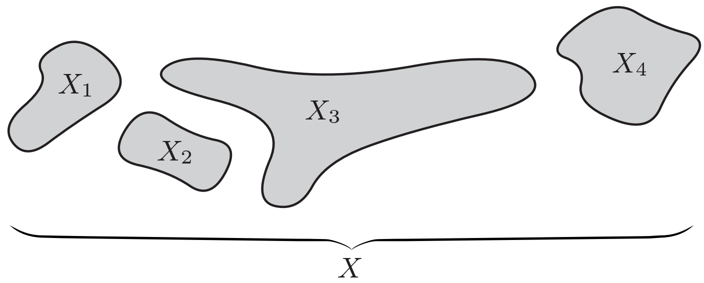


図 2.22　いくつかの連結成分からなる位相空間．

集合 $X = \{a, b, c\}$ の位相 $\mathscr{O}_1 = \{\{\,\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$ に関して言えば，X は $X_1 = \{a, b\}$ と $X_2 = \{c\}$ という 2 つの連結成分に分かれる．別の例として，集合 $Y = \{a, b, c, d\}$ に位相

$$\mathscr{O}_Y = \{\{\,\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

を備えたものはいくつの連結成分に分かれるか，読者に考えてもらいたい．

2.6　同相と位相不変量

ここまでは，集合にいろいろな位相を仕込んでいろいろな位相空間を作ってみた．ここからは，2 つの位相空間を比べる方法を考えてみよう．比べるという操作は写像によって行うのが基本的であろう．

2 つの位相空間 $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ があるとき，写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるとは，任意の $U \in \mathscr{O}_Y$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ が成立していることだと定義した．もし，連続写像 $f : X \to Y$ が全単射で，かつ，その逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も連続写像ならば，f は X から Y への**同相写像** (homeomorphism) であるという．もちろんこのとき f^{-1} は Y から X への同相写像である．X と Y の間に同相写像が存在するとき，X と Y は**同相** (homeomorphic) であるといい，$X \cong Y$ と書く．とくに X から X 自身への同相写像を同相変換ということもある．

例を挙げよう．実数体$\mathbb{R}$にはユークリッド空間としての位相を入れておく．開区間$(-1,1)$には$\mathbb{R}$からの相対位相を入れておく．このとき，写像$f:\mathbb{R}\to(-1,1)$を

$$f: x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \tag{2.16}$$

で定義すると，これは全単射であり，かつ連続写像である．逆写像 f^{-1} : $(-1,1)\to\mathbb{R}$ は

$$f^{-1}: y \mapsto \frac{y}{1-|y|} \tag{2.17}$$

であり，これも連続写像である．したがって実数全体$\mathbb{R}$と開区間$(-1,1)$は同相である．ちなみにこれらの写像は下の図のような対応で定義されている．$x\geq 0$のときは，座標平面上の点$(-1,1)$を支点として，点$(-1,1)$と点$(x,0)$を結ぶ直線がy軸と交わる点を$(0,y)$と定める．$x'\leq 0$のときは，座標平面上の点$(1,-1)$を支点として同様に交点y'を定める．

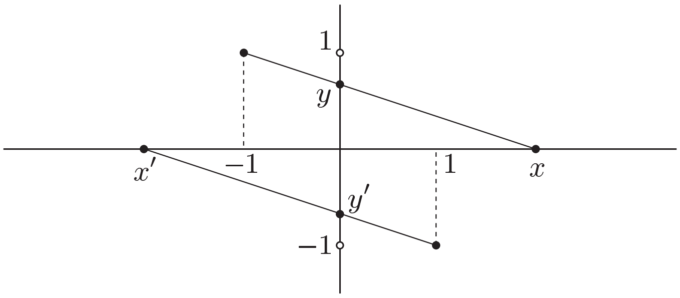


図 2.23　点xと点yの対応.

また，

$$P=(-1,0)\cup(0,1)=\{p\in\mathbb{R}\,|\,-1<p<0\text{ または }0<p<1\},$$
$$Q=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)=\{q\in\mathbb{R}\,|\,q<-1\text{ または }1<q\}$$

は，どちらも2つの連結成分からなる位相空間であり，写像

$$f:P\to Q,\quad p\mapsto\frac{1}{p}$$

は同相写像である．

位相空間XとYが同相ならば，Xの連結成分の個数はYの連結成分の個数に等しいという事実は，(証明が必要だが) 直観的には理解しやすいであろう．連続写像で「島」が分裂することはあり得ないと思われるからだ．

位相空間Xに対して何がしか$\mu(X)$という数のようなものを測ることができて，「XとYが同相ならば$\mu(X)=\mu(Y)$」となっていれば，測定装置$\mu(\cdot)$を**位相不変量** (topological invariant) という．形式的に書くと，μが位相不変量であるとは，

$$X \cong Y \;\Rightarrow\; \mu(X) = \mu(Y) \tag{2.18}$$

が成立することである．対偶をとれば，位相不変量の値が異なるような位相空間は同相ではない：

$$\mu(X) \neq \mu(Y) \;\Rightarrow\; X \ncong Y \tag{2.19}$$

ということになる．もちろん (2.18) の逆は必ずしも成立しない．つまり $\mu(X) = \mu(Y) \;\Rightarrow\; X \cong Y$ とは言えない．連結成分の個数が等しいからと言って，同相であるとは限らない．例えば，球面 S^2 とトーラス T^2 はどちらも連結成分が 1 つだが，同相ではない．つまり同相写像 $f : S^2 \to T^2$ は存在しない．したがって連結成分を数えただけでは位相空間を見分けることができたとは言えない．位相空間を見分けるためにはもっといろいろな測定をしてやらないといけないだろう．もし，$\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ といった十分多くの種類の位相不変量があって，

$$X \cong Y \quad\Leftrightarrow\quad \mu_1(X) = \mu_1(Y), \cdots, \mu_n(X) = \mu_n(Y) \tag{2.20}$$

という関係が成り立てば $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ は完全な不変量であるという．$\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ を測れば 2 つの位相空間が同相であるか同相でないか，完全に判定できるというわけだ．そして，そのような完全な位相不変量は何だろうということがトポロジーという数学の未解決の大問題なのである．

2.7 次　元

連結成分の個数は位相不変量であるが，空間の次元もよく知られた基本的な位相不変量である．本書でもすでに 2 次元，3 次元という言葉を使っていたが，改めて次元をきちんと定義しようとすると意外に難しい．縦・横・高さの 3 方向に広がりを持っているから 3 次元，という数え方はベクトル空間の次元の数え方だが，位相空間のように抽象的なレベルではこういう数え方ができない．これまで断りなしに「次元」という言葉を使ってきて，この先も曖昧なまま使い続けるのは気持ちが悪いと思われるので，いちおうここで次元の定義を述べよう．面倒だと思われたら本節は読み飛ばしてもらってかまわない．

位相空間の次元の定義は何種類かある．その中でも素朴な考え方を説明しよう．3 次元の図形は，2 次元の境界面を持つ．2 次元の面は，1 次元の境界線を持つ．1 次元の線分は，0 次元の境界点を持つ．0 次元の点には，境界はない（境界が空集合である）．この観察から，図形の一部分の境界をとるたびに次元が下がっていき，ついに空になるまでに何回境界をとることができるか，という回数を数えて元の図形の次元を確定させるというアイディアが湧いてくる．

そうすると「境界」という概念を定義したくなるが，これも位相空間レベルで済ませるためにはちょっと考える必要がある．何しろ位相空間という世界は開集合と閉集合くらいしか使える言葉がないのである．感覚を得るために，実

数 $\mathbb{R}$ の中の $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | \, a \leq x < b\}$ という区間について，この図形の境界をどう決めるか考えてみよう．直観的には，$[a,b)$ の境界は点 a と点 b である．a の方は $[a,b)$ に含まれていて，b の方は $[a,b)$ に含まれていないという違いはあるが，$\mathbb{R}$ という容器の中にはどちらの境界点もあるとしてよい．

図 2.24　区間 $[a,b)$ の境界は 2 点からなる集合 $\{a,b\}$.

この境界点をどうやって位相空間の言葉だけで確定させることができるか．$[a,b)$ は開集合でも閉集合でもないが，$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | \, a \leq x \leq b\}$ は，$[a,b)$ を含む最小の閉集合である．一方で $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | \, a < x < b\}$ は，$[a,b)$ の中に収まる最大の開集合である．そうすると，$[a,b)$ を外から包み込む閉集合 $[a,b]$ と，$[a,b)$ を内から埋める開集合 (a,b) の差として境界点が確定されることがわかる：

$$\{a,b\} = [a,b] - (a,b).$$

これをヒントにして一般的な位相空間の部分集合に対しても境界を定めることができそうな気がしてくる．そこで，上で観察したことを抽象化しよう．

位相空間 X の部分集合 A に対して，A の**閉包** (closure) $\bar{A}$ とは，$A \subset \bar{A}$ を満たす閉集合であり，もしこの他に $A \subset F$ となる閉集合 F があったとしたら $\bar{A} \subset F$ が成立するようなもののことである．つまり，$\bar{A}$ は A よりも大きな，最小の閉集合である．上の例では

$$\overline{[a,b)} = [a,b]$$

である．

次に，位相空間 X の部分集合 A に対して，A の**開核** (open kernel) A° とは，$A^\circ \subset A$ を満たす開集合であり，もしこの他に $U \subset A$ となる開集合 U があったとしたら $U \subset A^\circ$ が成立するものである．つまり，A° は A よりも小さな，最大の開集合である．上の例では

$$[a,b)^\circ = (a,b)$$

である．例題として，$X = \mathbb{R}^2$ において

$$A = [a,b) \times [c,d) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x < b, \; c \leq y < d\}$$

の閉包 $\bar{A}$ と開核 A° がどんな図形か考えてみてほしい．

以上の準備のもとで，位相空間 X の部分集合 A の（位相的）境界 ∂A を，閉包と開核の差

$$\partial A := \bar{A} - A^\circ \tag{2.21}$$

で定義する．位相空間 X の**次元** (dimension) $\dim X$ を以下のように帰納的に定義する．(1) まず空集合の次元は -1 とする ($\dim\varnothing = -1$)[*3)]．(2) $n = 0,1,2,\cdots$ とする．位相空間 X の任意の点 x の任意の近傍 V に対して，$x \in A \subset V$ となる x の近傍 A で $\dim\partial A \leq n-1$ となるものが存在するとき，$\dim X \leq n$ と定める．ここで $\partial A \subset X$ は相対位相によって位相空間として扱われている．(3) $\dim X \leq n$ であり，$\dim X \leq n-1$ ではない場合，$\dim X = n$ と定める．(4) いかなる自然数 n に対しても $\dim X \leq n$ とならない場合，$\dim X = \infty$ と定める．このように定められた次元をブラウアー・ウリゾーン・メンガーの次元という．

例えば，一点からなる空間 $X = \{a\}$ の次元は 0 になる．(2.8) から (2.11) までに与えた 4 通りの位相に関して $X = \{a,b,c\}$ の次元がいくらになるか考えてみてほしい[*4)]．また，有理数全体 $\mathbb{Q}$ は 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分位相空間であるが，$\mathbb{Q}$ の次元は 0 である[*5)]．

2.8 図形と計量の双対性

不変量という概念にもっと慣れるために，デカルト座標を用いる幾何学から例を挙げよう．平面上の図形を考える．図形には平行移動・回転・反転という変換を施すことができるとする．これらの変換の合成をユークリッド変換と呼ぶ．ユークリッド変換によって 2 つの図形 X, Y を重ねることができれば，これらの図形は合同であるといい，$X \equiv Y$ と書くことにする．

三角形を図 2.25 のような直交座標におけば，頂点の座標 (x, y) を測ることができる．当たり前のことだが，平行移動や回転を施せば，座標の値はどんどん変わってしまう．しかし，

$$c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

という数を計算するとこれはユークリッド変換について不変な量になっている．同様に a, b という量も定義される．さらに，

$$bc\cos\alpha = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)$$

で定義される α もまたユークリッド不変量であるし，

$$S = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

という量は平行移動と回転で不変であり，反転によって符号だけが変わる．つ

*3) 空集合の次元を形式的に $\dim\varnothing = -\infty$ とする流儀もある．そうしておくと，直積空間の次元についての関係式 $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ が X や Y が空集合のときにも形式的に成立する．なお，直積集合からの射影 $p : X \times Y \to X$ および $q : X \times Y \to Y$ が連続写像になるような最弱の位相を $X \times Y$ に入れたとき，$X \times Y$ を直積空間という．

*4) 答え：$\mathscr{O}_2$ に関しては 1 次元で，$\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_3, \mathscr{O}_4$ に関しては 0 次元．

*5) ヒント：a, b がともに無理数であるとき，区間 $(a, b) \subset \mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ における境界は空集合．

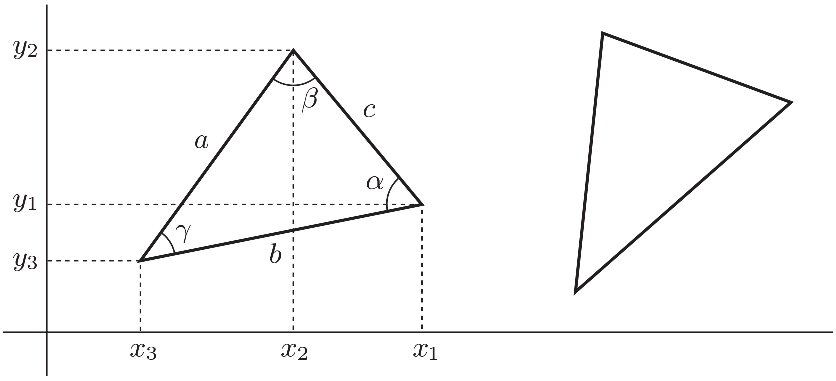


図 2.25　三角形の計量．頂点の座標は平行移動や回転で変化するが，これらの変換で変わらない量がある．

まり，3 つの点の座標 $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ はユークリッド変換について不変ではないが，いわゆる三角形の辺の長さ・角の大きさ・面積 $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, S\}$ はユークリッド不変量である．2 つの三角形 X, Y が合同ならば，これらの量はおのおの等しい．形式的には

$$X \equiv Y \;\Rightarrow\; a(X) = a(Y)$$

などと書かれる．このように図形に対してユークリッド不変量を定義して，その値を測ることを図形の計量という．

では，これらの不変量は完全だろうか？ つまり $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, S\}$ のすべての測定結果が一致すれば 2 つの三角形は合同だと言えるだろうか？ 答えは肯定的である．しかし，これらすべての量について一致を確かめる必要はない．じつは $\{a, b, c\}$ だけ一致していればよい．あるいは $\{a, b, \gamma\}$ もしくは $\{a, \beta, \gamma\}$ だけの一致が確認できれば合同だと言える．これは，いわゆる三角形の合同条件というやつだ．上に挙げた $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, S\}$ という 7 つの不変量は過剰であり，合同性をチェックするためにはこれら全部を測る必要はなかったのである．それでは，7 つも不変量を見つけたことは無駄だったのだろうか？ そんなことはない．それなりに深い意味がある．例えば，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

という関係式は余弦定理と呼ばれるが，$\{a, b, \gamma\}$ という 3 つの不変量が完全であるために，$\{a, b, \gamma\}$ さえわかれば三角形が（合同な仲間の不定性を除いて）ただ 1 つに決まり，したがって別の不変量である c の値も決まってしまうという関係式である．つまり 4 つの不変量 $\{a, b, c, \gamma\}$ は独立ではなく，1 つの三角形を構成するという制約のために，何か従属関係を持つのである．同様に，

$$a\sin\beta = b\sin\alpha$$

という関係式は正弦定理と呼ばれる．1 つの閉じた三角形が作られるためには，4 つの不変量 $\{a, b, \alpha, \beta\}$ が勝手な値をとることは許されず，正弦定理という制

約条件を課せられることになる．面積 S に関しては，もちろん $S = ab \sin\gamma$ という関係があって，S は他の不変量と独立ではない．

個々の三角形は平面上の点の集合であり，外延的存在である．辺の長さや角の大きさといった量は，三角形の性質・内包を特徴づけている．完全で余剰のない不変量は，三角形を過不足なく特徴づけるが，不変量がたくさんあると「不変量の集合」$\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, S\}$ という外延が立ち現れてきて，今度は正弦定理や余弦定理のように三角形の側から不変量の間の関係式という内包を植えつけられる．

我々が物理的世界を観測し，モデルを作るときに，これと似たことが起きていると思われる．我々は物理的実体に対して測定器をあてがい，目盛りの位置や，振り子の振れた回数のような生のデータを読み取る．そしてデータを処理して，質量とか電圧とか温度とかの不変量を求める．我々はこれらの物理量の値を用いて物理的対象を同定しようとするし，種々の物理量が測れるようになると，それらの物理量は互いに無関係ではないことが見えてくるようになる．そういう関係性を物理法則と呼ぶ．物理法則がいくつも見つかってくると，今度はそれらの法則性を成立させている背後のしかけは何かということを考え始める．原子や電子というモデルを考えると，いままでに見つかっていた気体の圧力・体積・温度の関係や電気分解の法則や化学反応の法則といった種々の法則やもろもろの現象が，少数の法則だけから導かれることがわかったり，未発見の現象までも予測できるようになったりする．我々は，物理現象からデータを測り，不変量を引き出し，法則性を見つけ，モデルを作って，多様な現象や法則をモデルが内包する少数の性質から演繹しようとする．三角形の例は，あまりに単純ではあるが，何かよくわからない図形を計量して，測定値の法則性を見つけ，その法則性を成立させている図形は何なのかと調べることは，科学の探求方法の典型例になっているのではないだろうか．

いま図形 X から不変量 $(\mu_1(X), \cdots, \mu_n(X))$ の値を読み取るという方向に見てきたが，逆の方向性もあるだろう．つまり不変量の値 $(\mu_1(X), \cdots, \mu_n(X)) = (k_1, \cdots, k_n)$ を指定したときに，そのような値を持つ図形 X は存在するだろうか？という問題を立てることができる．いわば不変量の値を指定して図形を注文しているわけだが，どんな注文にも答えられるというわけではない．例えば 3 辺の長さ (a, b, c) は独立かつ完全な不変量だが，

$$a + b > c > 0, \qquad b + c > a > 0, \qquad c + a > b > 0$$

という条件を満たしていないと，辺の長さの組 (a, b, c) に対する三角形が存在しない．これらはいわゆる三角不等式である．そして (a, b, c) がこれらの条件を満たしていれば，合同な三角形を同一と見なす限り，この計量値を持つ三角形が一意的に存在する．このように，互いに合同な図形を 1 つと数えると約束しておけば，合同でない図形は全部でどれだけあるだろうかという問題は，完

全な不変量のとり得る値の範囲を決定する問題に帰着する．こういう問題を分類問題と言う．

2.9 変換と不変式の双対性

前節では，平面上の三角形に対してユークリッド変換を施したときに不変にとどまる数量について議論した．形式化すると，図形 X に変換 g を施すと図形 gX になり，また，図形 X に対して $\mu(X)$ という量が測られるとき，

$$\mu(gX) = \mu(X)$$

という関係が成り立つことを，μ は変換 g についての不変量であるという．

また，変換の下で不変にとどまる関係性に注目することもできる．例えば，三角形 ABC の辺の長さについて AB=AC ならば，角の大きさについて $\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$ である，という定理がある．「二等辺三辺形ならば二等角三角形である」という定理だが，この定理はユークリッド変換について不変である．つまり，二等辺であるという性質はユークリッド変換を施しも変わらないし，二等角という性質も保たれる．そして，「二等辺ならば二等角」という関係もユークリッド変換の下で変わらない関係である．

このことは見かけほど当たり前ではない．図形の変換としてユークリッド変換よりも少し荒っぽい変換を考えてみよう．平面上の点 (x, y) に

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

という変換を施すことを考えよう．ここで a, b などは実数であり，$ad - bc \neq 0$ を満たすとする．このような変換を**アフィン変換** (affine transformation) という．アフィン変換で直線は直線に移るが，線分の長さや，角の大きさといったものは不変にとどまらない．そういう意味でアフィン変換はユークリッド変換より荒っぽい変換である．

それでは，アフィン変換の下で不変な量や性質というものがあるだろうか？ ある．個々の線分の長さは変わってしまうが，平行な線分の長さの比はアフィン変換の下で不変である．また，角の大きさは保たれないが，平行という性質は保たれる．正方形はアフィン変換の下で正方形にはとどまらないが，平行四辺形はアフィン変換しても平行四辺形にとどまる．

アフィン変換の下で不変な定理というのはあるだろうか？ 例えば余弦定理などいうものはアフィン変換の下では意味をなさない．長さや角という概念がアフィン変換に耐えられないからだ．アフィン変換に耐えられる定理としては，例えば中点連結定理がある．中点連結定理とは「三角形 ABC において辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とすれば，MN を結ぶ直線は底辺 BC に平行であり，線分の長さについて 2MN=BC が成り立つ」という主張のことだ．中

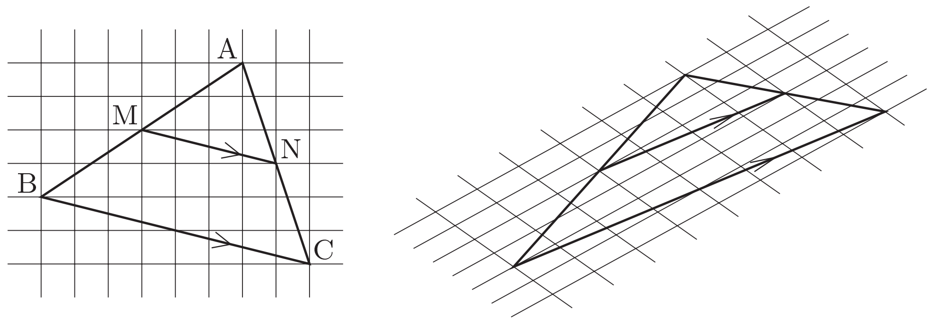


図 2.26　中点連結定理はアフィン変換の下で不変.

点というのは辺を 1 : 1 の比に内分する点であるから，アフィン変換の下で保たれる概念であるし，平行な線分の長さの比が 1 : 2 というのもアフィン不変な性質である．したがって，中点連結定理は，アフィン変換で不変な概念の間の，アフィン変換で不変な関係を述べていることになる．ただたんにある量が不変であるというのではなく，それより 1 つ上の段階の，量と量の間の関係性・法則性が不変であるということを言っているのである．

位相幾何学あるいはトポロジーと呼ばれる数学の分野では，図形に対して同相写像という変換を施すことが許される．そして同相写像で移り合えるような図形はトポロジーの視点からは同類と見なされ，同相写像で移り合えない図形がどれくらいあるかということに関心が振り向けられる．トポロジーの目標は，完全な位相不変量をリストアップすることであり，位相不変量の値がとり得る範囲を明確にし，位相不変量の値が指定されたときに位相空間を具体的に構成することである．また，もし余剰の不変量が見つかれば，それらの間の関係を明らかにすることも望まれる．

ユークリッド変換は同相変換に含まれるので，合同な図形は同相でもある．同相という関係で図形を分類すると粗い分類のしかたになり，合同という関係で図形を分類すると細かい分類になる．つまり変換の強・弱によって分類の粗・細の階層が形成される．

同相変換はユークリッド変換を含み，同相変換で不変な性質はユークリッド変換で不変な性質に含まれる．ここに，含むと含まれるという言葉が対になって現れており，変換群と不変式（幾何学）の双対性が顔を出している．また，同相変換のような荒っぽい変換で不変に保たれるような性質は，図形の原始的な性質だと言えるし，ユークリッド変換のようなおとなしい変換でかろうじて不変に保たれるような性質は，図形の繊細な性質だと言える．つまり変換の強弱によって，図形の原始的性質と繊細な性質がふるい分けられる．一番荒っぽい変換は集合の全単射であり，全単射で保たれるような性質というと，集合の濃度しかない．濃度は集合の完全不変量である．同相変換で保たれる性質としては連結成分の個数や次元があった．アフィン変換では平行線分の長さの比が不変量であり，ユークリッド変換では長さや角も不変量になる．変換を減らして

いくと，不変量の種類が増えてくる．

逆に，これこれの計量を不変にとどめてくれと要請すると，許容される変換群が限定される．角度を不変に保つようなアフィン変換に限定すると，平行移動・回転・反転と相似拡大・縮小を含む相似変換群が現れるし，長さを保つアフィン変換に限定すると，ユークリッド変換群に落ち着く．つまり不変計量の方から変換群を規定することもできる．ここには変換するものと変換されるものの間に双対性が働いている．ここでは不変量が双対性の要になっている．

さて，連結成分の個数や次元は最も素朴な位相不変量であるが，次の章ではもうちょっと手の込んだ位相不変量を導入することにしよう．

第 3 章
ホモトピー

3.1　ホモトピー理論の考え方

前章では位相空間，連続写像，同相写像といった概念を定義した．同相写像によって変わらない位相空間の性質を位相不変量といい，位相不変量を見つけたり調べたりすることがトポロジーの目標だということを説明した．また，位相空間の連結成分の個数が位相不変量の例になっていることを説明した．もちろん連結成分の個数を数えただけでは位相空間を知り尽くしたことにはならない．そこでこの章では新しい位相不変量としてホモトピーという概念を導入しよう．

ホモトピーの概念をつかむために簡単な例からとりかかろう．球面 S^2 とトーラス T^2 はともに 1 個の連結成分からなる位相空間である．球面とトーラスを見分ける方法を考えよう．もちろん球面とトーラスの見分けがつかない人はいないと思うのだが，どこがどう違うかということを的確に捉えたいのだ．また，外から空間を見下ろすような立場で考えるのではなく，空間に閉じ込められた住人の立場に立って，すなわち内在的な方法で，自分が住んでいる空間が球面なのかトーラスなのか区別できるかという問題を考えたいのだ．

ホモトピーというアイディアは次のようなものだ．球面やトーラスの上にループを置くのである．つまり，ある点から出発してロープを伸ばして行き，元の点まで戻って輪を作るのである．球面の上であればこのようなループをたぐり寄せて連続的に一点に縮めることが可能である．しかしトーラスの上では，図 3.1 の α ようなループは，切ったりつなげ直したりすることなしに，連続的に一点に縮めることはできない．図の β のループも一点に縮めることはできない．γ のように 2 回巻きついたループを連続的に変形して 1 回巻きの α に変えることもできない．また，α を連続変形で β に移すこともできない．トーラスの表面にへばりついた生き物にとっては,「このループは『どこに』ひっかかっているのか」という質問は意味のない質問だが，たぐり寄せて縮めることができな

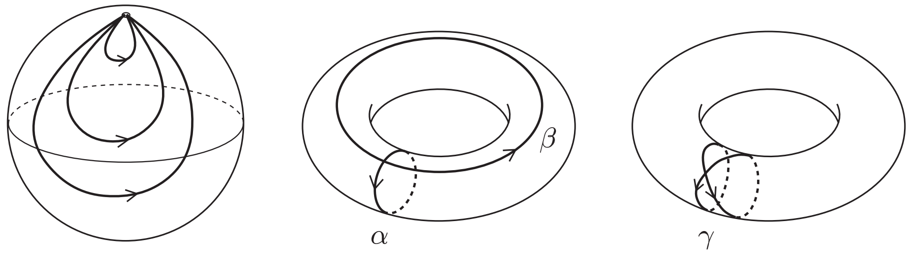


図 3.1　連続変形で一点に縮めることができるループとできないループ．

いループがいくつも存在し，互いに連続変形で重ねることもできないループが存在することは，トーラスの住人にとって認識可能である．このようなループの調査によって，自分が住んでいる世界が球面かトーラスのどちらであるかは識別可能である．このように位相空間にループを置いて，連続変形で互いに移り合えないループがどれだけあるか調べることは，位相空間と連続写像だけを用いて位相空間を知覚する方法になり得る．この方法を精緻に仕上げたものが，本章で説明するホモトピー理論である．

3.2　群

ホモトピー理論のさしあたっての目標は，ホモトピー群と呼ばれる群（ぐん）を定義することである．群を知らない人のために，群の定義と例を手短に紹介しよう．

集合 G で，任意の 2 つの元 $x, y \in G$ に対して 1 つの元 $xy \in G$ が定まり，任意の元 $x, y, z \in G$ に対して

$$(xy)z = x(yz) \qquad (\text{結合律}) \tag{3.1}$$

が成り立ち，ある元 $e \in G$ があって任意の元 $x \in G$ に対して

$$xe = ex = x \qquad (\text{単位元の存在}) \tag{3.2}$$

が成り立ち，各元 $x \in G$ に対して

$$xx' = x'x = e \qquad (\text{逆元の存在}) \tag{3.3}$$

を満たすような元 $x' \in G$ が存在するとき，G を**群** (group) という．元 x, y に対して定まる元 xy のことを x と y の積という．また，上に述べた x' のことを x の逆元といい，x^{-1} と書くのが通例である．x, y から積 xy を定めることや，x から逆元 x^{-1} を定めることを総称して群演算と呼ぶこともある．

群の例を挙げよう．正の実数全体の集合 $\mathbb{R}_+$ は通常のかけ算で積を定めると群になっている．この場合，1 が $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ を満たす単位元である．また，ゼロを除く実数全体の集合 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$ もかけ算に関して群である．

群の積はいわゆる「かけ算」である必要はない．実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は通常の足し算 $x + y$ に関して群である．この場合は 0 が $x + 0 = 0 + x = x$ を満たす単位元である．また，x の符合を反転した $-x$ が x の逆元である．

「かけ算」が定義されている集合が必ず群になるわけではない．群にならない積の例も挙げておこう．3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ のベクトル積

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = (x_2y_3 - x_3y_2,\, x_3y_1 - x_1y_3,\, x_1y_2 - x_2y_1) \in \mathbb{R}^3$$

を定めることができるが，一般には結合律が成り立たない：

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$$

（確かめよ）．したがって $\mathbb{R}^3$ はベクトル積に関しては群にならない．

群ではないものの例をもう少し挙げておく．整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ はかけ算に関しては結合律が成り立つし，単位元 1 が存在するが，一般には逆元が存在しないので（例えば 2 の逆数は整数ではない），$\mathbb{Z}$ はかけ算に関して群ではない．また，偶数全体の集合 $2\mathbb{Z} = \{2x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$ はかけ算に関して単位元を持たないので群ではない．

群の例をもう 1 つ挙げる．n 次元の実数正方行列で行列式がゼロでないもの全体の集合を $GL(n, \mathbb{R})$ と書くが，この集合は行列の積に関して群になる．これを**一般線形変換群** (general linear transformation group) という．$n \geq 2$ のとき，2 つの行列 $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ に対して $AB = BA$ は一般に成り立たない．

2 つの群 G_1, G_2 の間の写像 $\phi : G_1 \to G_2$ が，任意の $x, y \in G_1$ に対して

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

を満たしているとき，ϕ を群 G_1 から G_2 への**準同形写像** (homomorphism) という．左辺の xy は G_1 における積であるし，右辺の $\phi(x)\phi(y)$ は G_2 における積である．例えば，実数 x の指数関数 $e^x = \exp(x)$ は

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

という写像であり，$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ を満たすので，加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{R}_+$ への準同形写像である．もう 1 つの例として，正方行列 A の行列式 $\det A$ を与える写像

$$\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times, \qquad A \mapsto \det A$$

は，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を満たすので，準同形写像である．準同形写像 $\phi : G_1 \to G_2$ は，G_1 の単位元 e_1 を G_2 の単位元 e_2 に移すし $(\phi(e_1) = e_2)$，$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ を満たす．

準同形写像 $\phi : G_1 \to G_2$ が全単射でもあるとき，ϕ を**同形写像** (isomorphism) という．群 G_1 と G_2 の間に同形写像が存在するとき，G_1 と G_2 は**同形** (isomorphic) であるといい，$G_1 \cong G_2$ と書く．例えば，指数関数 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ は同形写像である．

3.3 道とループ

さて，ホモトピー群の定義に向けて，ループの定義をきちんとしておこう．そのために道という概念を準備する．実数の閉区間 $I = [0,1] = \{t \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le t \le 1\}$ は，ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合なので相対位相が誘導されて位相空間となる．位相空間 X が与えられたとき，連続写像

$$\alpha : I \to X, \qquad t \mapsto \alpha(t) \tag{3.4}$$

を**道** (path) という．これは空間 X 上を動く点を表している．時刻 t における点の位置は $\alpha(t)$ であり，始めの時刻 $t = 0$ から終わりの時刻 $t = 1$ まで，点 $\alpha(t)$ は突然ジャンプなどせず，連続的に動いて行く．

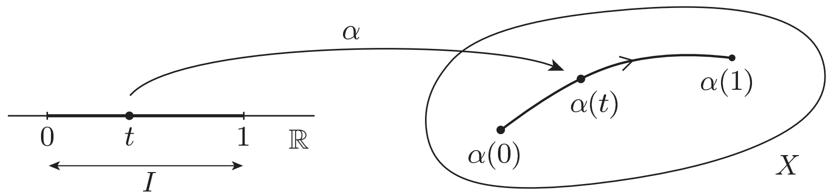


図 3.2　$0 \le t \le 1$ の実数 t に位相空間 X の点 $\alpha(t)$ を対応させる連続写像 α が道．

注意してほしいことは，道は写像として定義されているということである．2 つの道 α, β があって，どちらの道も結果的には同じ軌跡をたどるとしても，ペース配分が異なっていれば，道としては別物として扱う．例えば，$X = \mathbb{R}$ の上の 2 つの道

$$\alpha : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto t,$$
$$\beta : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto t^2$$

を考えると，これらはともに $\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Im}\,\beta = [0,1]$ という軌跡を描くが，任意の時刻 t に対して $\alpha(t) = \beta(t)$ となっているわけではない.「道」は写像であり，写像の像ではないのだ．そういう意味では α や β は「道」というよりはむしろ「歩行者」と呼んだ方が適切かもしれない．位相空間 X において $x_0 \in X$ を始点，$x_1 \in X$ を終点とする道全体のなす集合を $P(X; x_0, x_1)$ と書くことにする．

道 α において，$\alpha(0) = \alpha(1)$ となっているとき，すなわち道の始点と終点が一致しているとき，α のことを**ループ** (loop) あるいは閉道という．また，点 $\alpha(0) = \alpha(1)$ をループの**基点** (base point) という．

また，点 $x_0 \in X$ を選んで，

$$e_{x_0} : I \to X, \qquad t \mapsto e_{x_0}(t) := x_0 \tag{3.5}$$

とおけば，これは連続写像である．e_{x_0} は，言わば，1 分間 x_0 にじっと止まっている歩行者を表しているが，これも道の一例と見なして道の仲間に入れてお

く．e_{x_0} を x_0 を基点とする定点ループと呼ぶこともある．

また，道 α に対して

$$\alpha^{-1} : I \to X, \qquad t \mapsto \alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t) \tag{3.6}$$

を α の逆の道という．意味は明らかだと思うが，α^{-1} の始点は α の終点であり，α^{-1} の終点は α の始点であり，α^{-1} は道 α を逆方向にたどる道である．念のために言っておくが，逆の道 α^{-1} は α の逆写像ではない．

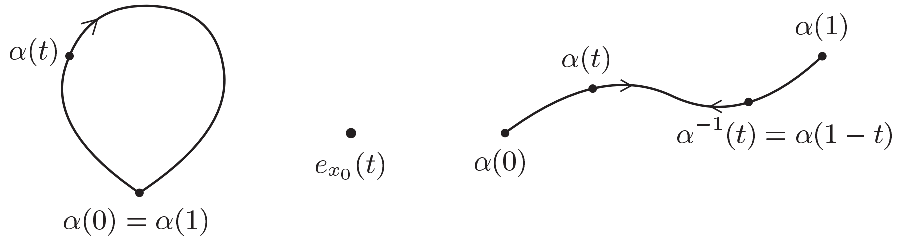


図 3.3　ループ，定点ループ，逆の道．

3.4　道の積

ここでは位相空間 X は 1 つに決めておいて，X 上のさまざまな道を考える．道 α と β があって，α の終点が β の始点と一致しているとき，つまり $\alpha(1)=\beta(0)$ となっているとき，写像

$$\alpha\cdot\beta : I \to X, \quad t \mapsto \alpha\cdot\beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \left(0 \le t \le \dfrac{1}{2}\right) \\ \beta(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} \le t \le 1\right) \end{cases} \tag{3.7}$$

は連続写像となり*1)，したがって新たな道となるが，これを道 α, β の積と呼ぶ．**道の積** (product of paths) $\alpha\cdot\beta$ の意味は明らかだと思うが，時間 $0 \le t \le 1$

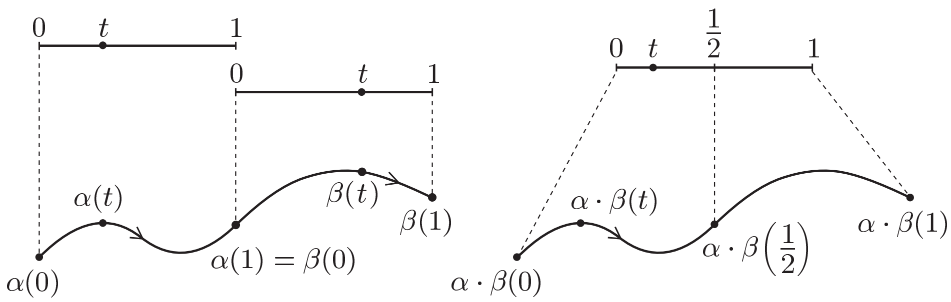


図 3.4　道 α と道 β の積 $\alpha\cdot\beta$．

---

*1)　このように定義された $\alpha\cdot\beta$ が連続写像になっていることは証明を要する．シンガー・ソープの本の「貼り合わせの補題」を参照してほしい．証明はさほど難しくない．

の前半 $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$ は道 α を 2 倍のペースで走り，中間点 $\alpha(1) = \beta(0)$ で道をつないで，後半 $\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1$ は道 β を 2 倍のペースで走るという道である．道を継ぎ足して道を伸ばすという，ごく普通の発想を表現しただけのことである．

重要な注意であるが，3 つの道 α, β, γ があって，$\alpha(1) = \beta(0), \beta(1) = \gamma(0)$ となっていれば，これらの道を継ぎ足して $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ や $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ が定義されるが，こうして作られる 2 通りの道は等しくない：

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \tag{3.8}$$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ においては $0 \leq t \leq 1$ という時間を $0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4} \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1$ という 3 区間に分割して道 α, β, γ に割りあてて道を順になぞる．それに対して，$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ においては $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4} \leq t \leq 1$ という時間配分で道 α, β, γ をなぞる．したがって，これらは写像としては別物である．言い換えると，道の積は結合律を満たさない．

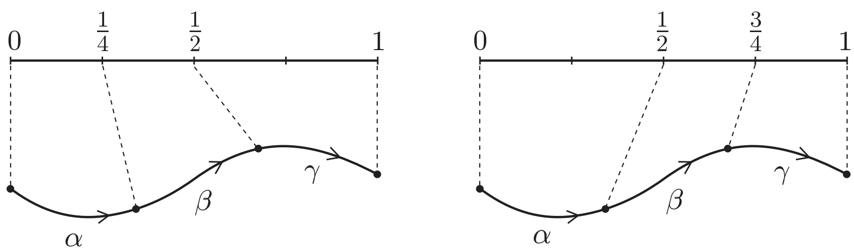


図 3.5　$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ と $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ は別物．道の積は結合律を満たさない．

3.5　ホモトピックという関係

球面やトーラスの例で，ループを連続的に変形して一点に縮めることができるかどうかということを議論したが，この連続変形という概念もきちんと定めておく必要がある．

α, α' はともに位相空間 X の x_0 を始点とし，x_1 を終点とする道であるとする．つまり $\alpha(0) = \alpha'(0) = x_0, \alpha(1) = \alpha'(1) = x_1$ とする．もし，連続写像

$$F : I \times I \to X, \qquad (s,t) \mapsto F(s,t) \tag{3.9}$$

で，$0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ に対し

$$\begin{cases} F(0,t) = \alpha(t), & F(s,0) = x_0, \\ F(1,t) = \alpha'(t), & F(s,1) = x_1 \end{cases} \tag{3.10}$$

を満たすものが存在すれば α と α' は**ホモトピック** (homotopic) であるといい，$\alpha \sim \alpha'$ と書く．また，F を α から α' への**ホモトピー** (homotopy) という．

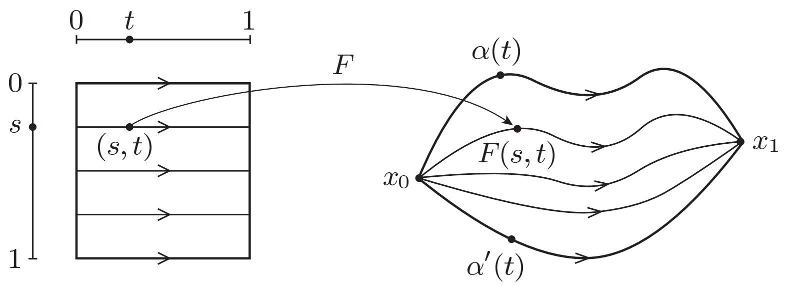


図 3.6　ホモトピー F が道 α から道 α' への変形を与える．

上の定義の内容を説明すると，$F(s,t)$ は $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ の範囲の 2 つの変数を持つ X への連続写像であり，パラメータ s の値を固定して $\alpha_s(t) = F(s,t)$ とおけば，これは時刻 t の経過とともに動く歩行者を表している．とくに $s = 0$ では $\alpha_0(t) = \alpha(t)$, $s = 1$ では $\alpha_1(t) = \alpha'(t)$ となるから，$\alpha_s(t)$ は s を変形パラメータとして道 α から道 α' への連続変形の途中経過を形作っている．$\alpha_s(t)$ が変数 s と t の両方について連続ということから，道は，途中で切られたり，つなげ直されたりされることなく，伸び縮みと曲げ伸ばしの変形だけを受けることになる．また，すべての s について $\alpha_s(0) = x_0$, $\alpha_s(1) = x_1$ だから，変形の過程においても，道の始点・終点は固定されている．このような変形で道 α から道 α' に移ることができるとき，α と α' はホモトピックであるといい，変形のしかたを指定する写像 F をホモトピーというのである．

F が α から α' へのホモトピーであることを，下図のような図式で表記することにする．

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad\alpha\quad} \\ F \Downarrow \\ \xrightarrow[\quad\alpha'\quad]{} \end{array}$$

図 3.7　F が α から α' へのホモトピーであることを表す図式.

ホモトピックという関係は同値関係である．すなわち，(i) 任意の道 α に対して $\alpha \sim \alpha$ が成り立ち，(ii) $\alpha \sim \alpha'$ ならば $\alpha' \sim \alpha$ が成り立ち，(iii) $\alpha \sim \alpha'$ かつ $\alpha' \sim \alpha''$ ならば $\alpha \sim \alpha''$ が成り立つ．

これらは，それぞれの場合についてホモトピーを構成してやれば証明できる．(i) については，

$$F(s,t) = \alpha(t) \tag{3.11}$$

とおけば，これが α から α へのホモトピーになっている．(ii) については，F が α から α' へのホモトピーであるとき，

$$G(s,t) = F(1-s,t) \tag{3.12}$$

とおけば，G は α' から α へのホモトピーになっていることで確認できる．(iii) については，F が α から α' へのホモトピー，G が α' から α'' へのホモトピーであるとき，

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \left(0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ G(2s-1,t) & \left(\dfrac{1}{2} \leq s \leq 1\right) \end{cases} \tag{3.13}$$

とおけば，H が α から α'' へのホモトピーになっていることが確認できる．このような H の構成を図 3.8 のように表記する．以上より，ホモトピックという関係は同値関係であることがわかり，α の同値類 $[\alpha]$ を定義することができる．同値類 $[\alpha]$ を α を代表元とする**ホモトピー類** (homotopy class) という．ホモトピー類とは，連続変形で互いに移り合える道の集合である．

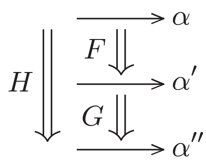


図 3.8　ホモトピー F と G の垂直合成．

道の積とホモトピックとはよい関係がある．まず，道の積 $\alpha \cdot \beta$, $\alpha' \cdot \beta'$ が定義されていて，$\alpha \sim \alpha'$ かつ $\beta \sim \beta'$ ならば，$\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'$ が成り立つ．なぜならば，α から α' へのホモトピー F と β から β' へのホモトピー G を用いて，$\alpha \cdot \beta$ から $\alpha' \cdot \beta'$ へのホモトピー H が

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & \left(0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ G(s,2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1\right) \end{cases} \tag{3.14}$$

によって構成されるからである．こうして作られたホモトピー H を図 3.9 のように表す．したがってホモトピー類どうしの積

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha \cdot \beta] \tag{3.15}$$

は代表元の選び方に依存せずに定義できる．

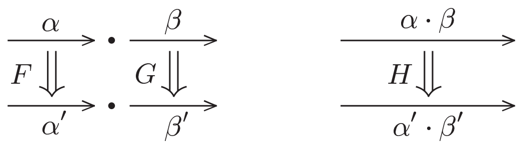


図 3.9　ホモトピー F と G の水平合成．

また $\alpha \sim \alpha'$ のとき，逆の道についても $\alpha^{-1} \sim (\alpha')^{-1}$ が成り立つ．したがってホモトピー類の逆

$$[\alpha]^{-1} := [\alpha^{-1}] \tag{3.16}$$

が代表元の選び方に依存せずに定義できる．α から α' へのホモトピー F が与えられているとき，α^{-1} から $(\alpha')^{-1}$ へのホモトピーをどう構成するかは読者に考えてもらいたい．

さらに，$\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ のときは，

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim e_{x_0}, \tag{3.17}$$

$$\alpha^{-1} \cdot \alpha \sim e_{x_1}, \tag{3.18}$$

が成り立つ．$\alpha \cdot \alpha^{-1}$ から e_{x_0} へのホモトピーは

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \left(0 \le t \le \dfrac{1}{2}(1-s)\right) \\ \alpha(1-s) & \left(\dfrac{1}{2}(1-s) \le t \le \dfrac{1}{2}(1+s)\right) \\ \alpha(2-2t) & \left(\dfrac{1}{2}(1+s) \le t \le 1\right) \end{cases} \tag{3.19}$$

と構成される．道 α を行って戻って来るループは，連続変形で一点 x_0 に縮めることができるという直観をきちんと表現したものが上のホモトピーだ．この式は図 3.10 を参考にして作った．

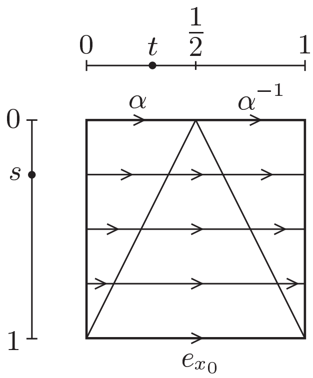


図 3.10　(3.19) 式のホモトピーの構成．

また，

$$e_{x_0} \cdot \alpha \sim \alpha \tag{3.20}$$

$$\alpha \cdot e_{x_1} \sim \alpha \tag{3.21}$$

という関係も成り立つ．$e_{x_0} \cdot \alpha$ から α へのホモトピーは

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(0) & \left(0 \le t \le \dfrac{1}{2}(1-s)\right) \\ \alpha\left(\dfrac{2}{1+s}(t - \dfrac{1}{2}(1-s))\right) & \left(\dfrac{1}{2}(1-s) \le t \le 1\right) \end{cases} \tag{3.22}$$

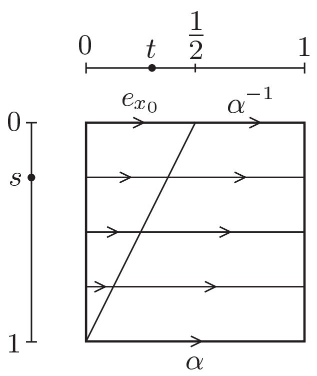


図 3.11　(3.22) 式のホモトピーの構成.

で与えられる．この式は図 3.11 を参照して作られた．$\alpha \cdot e_{x_1}$ から α へのホモトピーは読者に考えてもらいたい．

道の積とホモトピーに関して重要な性質をもう 1 つ挙げておく．3 つの道の積が定義されるとき，

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \sim \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \tag{3.23}$$

が成り立つのである．両辺は等しくはないのだが，ホモトピックではあるのだ．証明は，例によってホモトピーを具体的に構成してみせればよい．道 $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ および $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ はそれぞれ

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \left(0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}\right) \\ \beta(4t-1) & \left(\dfrac{1}{4} \leq t \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ \gamma(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \left(0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ \beta(4t-2) & \left(\dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{3}{4}\right) \\ \gamma(4t-3) & \left(\dfrac{3}{4} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

であるから $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ から $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ へのホモトピーは

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4t}{1+s}\right) & \left(0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}(1+s)\right) \\ \beta(4t-1-s) & \left(\dfrac{1}{4}(1+s) \leq t \leq \dfrac{1}{4}(2+s)\right) \\ \gamma\left(\dfrac{4t-2-s}{2-s}\right) & \left(\dfrac{1}{4}(2+s) \leq t \leq 1\right) \end{cases} \tag{3.24}$$

と構成できるが，式よりも図 3.12 を見た方がわかりやすい．要するに時間 t に関して $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}$ というペース配分から $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}$ というペース配分へ連

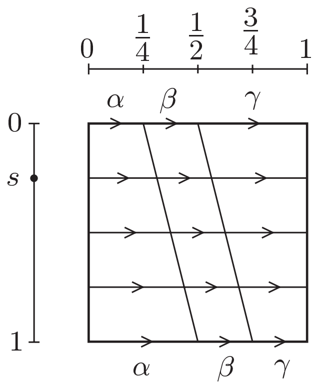


図 3.12　(3.24) 式のホモトピーの構成.

続的に再配分しているのだ．道の積は結合律を満たさなかったが，道のホモトピー類の積は結合律を満たすのだ．以上の観察は自然にホモトピー群の概念へと我々を導く．

3.6　ホモトピー群

点 $x_0 \in X$ を基点とするループ全体のなす集合を $\Omega(X; x_0) = P(X; x_0, x_0)$ と書く．任意の $\alpha, \beta \in \Omega(X; x_0)$ に対して α の終点と β の始点が一致するから積 $\alpha \cdot \beta$ が定義されて，$\alpha \cdot \beta \in \Omega(X; x_0)$ であるし，$\alpha^{-1} \in \Omega(X; x_0)$ である．また，$e_{x_0} \in \Omega(X; x_0)$ である．このとき，$\Omega(X; x_0)$ のホモトピックという同値関係についての商集合を

$$\pi_1(X; x_0) := \Omega(X; x_0)/\sim \tag{3.25}$$

と書く．そうすると，(3.15) のところで議論したように，ホモトピー類 $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X; x_0)$ に対して積 $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta] \in \pi_1(X; x_0)$ が定義され，(3.23) で見たように，結合律

$$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) \tag{3.26}$$

が成り立つ．定点ループのホモトピー類 $[e_{x_0}]$ は，(3.20), (3.21) の帰結として

$$[e_{x_0}] \cdot [\alpha] = [\alpha] \cdot [e_{x_0}] = [\alpha] \tag{3.27}$$

を満たし，したがってこの積に関して単位元となっている．また，逆の道のホモトピー類は，(3.17), (3.18) の帰結として

$$[\alpha] \cdot [\alpha^{-1}] = [\alpha^{-1}] \cdot [\alpha] = [e_{x_0}] \tag{3.28}$$

を満たし，この積に関して逆元となっている．以上より，集合 $\pi_1(X; x_0)$ は積 $[\alpha] \cdot [\beta]$ に関して群になっていることがわかる．$\pi_1(X; x_0)$ を位相空間 X の基点 x_0 に関する 1 次元**ホモトピー群** (homotopy group) または**基本群** (fundamental group) という．1 次元ホモトピー群というからには 2 次元，3 次元の

ホモトピー群もあるのだが，それらは後で述べる．何次元のホモトピー群を指しているのか明らかな場面や，何次元でもかまわない場面では，たんにホモトピー群ということにする．

ホモトピー群 $\pi_1(X;x_0)$ は基点 x_0 を指定することによって定義されているが，ホモトピー群は基点の取り方にどの程度依存しているだろうか？ 2 つの点 $x_0, x_1 \in X$ が適当に与えられたとき，x_0 を基点とするホモトピー群 $\pi_1(X;x_0)$ と x_1 を基点とするホモトピー群 $\pi_1(X;x_1)$ の間には何か関係があるのか？ その答えは，x_0 と x_1 を結ぶ道があるかないかによって変わってくる．

x_0 を始点，x_1 を終点とする道があるとは限らない．例えば，点 x_0 と点 x_1 が別々の連結成分にあるとしたら，x_0 と x_1 を結ぶ道は存在しない．この場合は $\Omega(X;x_0)$ と $\Omega(X;x_1)$ は何の関係もないし，$\pi_1(X;x_0)$ と $\pi_1(X;x_1)$ も何の関係も持たない．

任意の二点 $x_0, x_1 \in X$ に対して x_0 を始点，x_1 を終点とする道が存在するとき，X は**弧状連結** (arcwise connected) であるという．連結という概念を前章で定義したが，弧状連結ならば連結である．しかし，連結ならば弧状連結だとは言えない．例えば，$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$X = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 < x \leq 1,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\} \cup \left\{(x,y)\,\middle|\,x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\right\}$$

は，連結であるが，弧状連結ではない（確かめてほしい）．

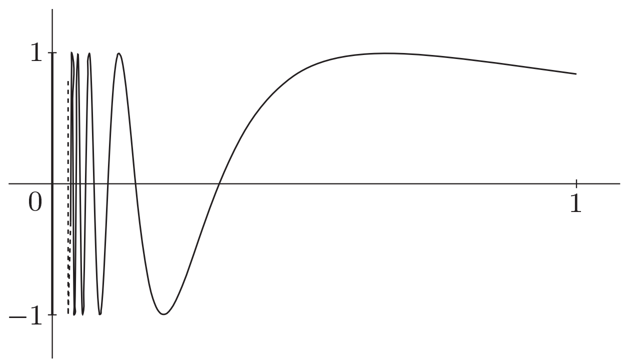


図 3.13　連結ではあるが弧状連結ではない位相空間の例．

X が弧状連結ならば，$\pi_1(X;x_0)$ と $\pi_1(X;x_1)$ は次のように関係がつく．この場合は x_0 を始点，x_1 を終点とする道があるので，それを 1 つ選んで η とする．このとき x_0 を基点とする任意のループ α に対して

$$\eta^{-1} \cdot \alpha \cdot \eta$$

は x_1 を基点とするループになる（積のとり方は $(\eta^{-1} \cdot \alpha) \cdot \eta$ でも $\eta^{-1} \cdot (\alpha \cdot \eta)$ でもどちらでもよい）．もちろん，x_1 を基点とする任意のループ γ に対しては

$$\eta \cdot \gamma \cdot \eta^{-1}$$

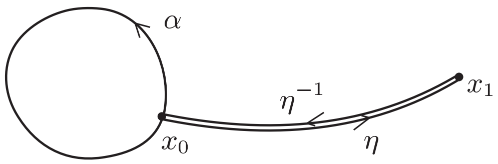


図 3.14　点 x_0 と点 x_1 を結ぶ道 η がある場合，α が x_0 を基点とするループならば $\eta^{-1}\cdot\alpha\cdot\eta$ は x_1 を基点とするループ．

は x_0 を基点とするループになる．また，x_0 を基点とするループ α, α' について $\alpha \sim \alpha'$ ならば

$$(\eta^{-1}\cdot\alpha\cdot\eta) \ \sim \ (\eta^{-1}\cdot\alpha'\cdot\eta)$$

が成り立つ．さらに，x_0 を基点とするループ α, β について

$$(\eta^{-1}\cdot\alpha\cdot\eta)\cdot(\eta^{-1}\cdot\beta\cdot\eta) \ \sim \ \eta^{-1}\cdot(\alpha\cdot\beta)\cdot\eta$$

が成り立っている．以上から，写像

$$\eta_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \qquad [\alpha] \mapsto [\eta^{-1}\cdot\alpha\cdot\eta] \tag{3.29}$$

が定義できて，これは群の同形写像になることがわかる．こうして，弧状連結な空間に対してはホモトピー群は基点の取り方には実質的には依存しないことがわかる．そのため X が弧状連結であるときは，基点の記述を省略して，ホモトピー群をたんに $\pi_1(X)$ と書くこともある．

3.7　ホモトピー群の例

3.7.1　球面

2 次元の位相空間についてホモトピー群を調べてみよう．最初の例として球面 S^2 のホモトピー群を示そう．図 3.1 で見たように，球面では任意のループを連続変形で一点に縮ませることができる．つまり球面上の任意のループは定点ループにホモトピックである．したがって球面のホモトピー群は定点ループのホモトピー類だけからなり，

$$\pi_1(S^2; x_0) = \{\,[e_{x_0}]\,\} \tag{3.30}$$

である．つまり $\pi_1(S^2; x_0)$ は単位元だけからなる群であり，積の計算も

$$[e_{x_0}]\cdot[e_{x_0}] = [e_{x_0}]$$

だけである．このように単位元だけからなるような群を自明な群という．また，1 次元ホモトピー群が自明であるような位相空間は**単連結** (simply connected) であるという．

3.7.2　トーラス

次の例としてトーラス T^2 のホモトピー群を示そう．トーラスには一点に縮

めることができないループが存在する．図 3.1 の α や β が定点ループにホモトピックでないループである．また，α と β は互いにホモトピックでないし，積 $\alpha \cdot \beta$ も定点ループにホモトピックではない．重要な性質として，トーラス上のループに関して

$$\alpha \cdot \beta \sim \beta \cdot \alpha \tag{3.31}$$

という関係が成り立つ．つまり α 方向に 1 回巻きついてから β 方向に 1 回巻きつくループは，連続変形によって，β 方向に 1 回巻きついてから α 方向に 1 回巻きつくループに移せるのだ．関係式 (3.31) の両辺に $\alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$ を右からかけると

$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} \sim e_{x_0} \tag{3.32}$$

と書き換えられる．この関係が成り立つことはトーラスの展開図 3.15 を見れば容易に確かめられる．図 2.6 でも正方形の対辺に向きをつけて同一視するという操作でトーラスを構成したが，図 3.15 のように正方形の辺を順にたどって行くと $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$ という方向に辺をなぞることになる．このループは正方形の外周なので，正方形の内部に向かって一点に縮めることができる．したがって，関係式 (3.31) はトーラスの定義そのものだとも言える．

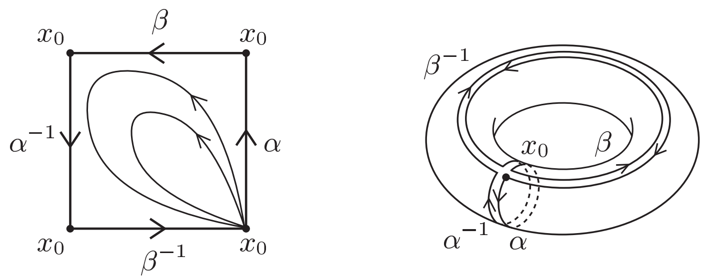


図 3.15　トーラス上では $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$ は定点ループにホモトピック．

関係式 (3.31) の結果として，トーラスのホモトピー群は可換群であることがわかる．つまり積の順序が入れ換え可能である．トーラス上では，m, n を任意の整数（負の整数も可）として α を m 回巻き，β を n 回巻いたループの積 $[\alpha]^m \cdot [\beta]^n$ で任意のループのホモトピー類が作られる．これらの積に関して

$$([\alpha]^{m_1} \cdot [\beta]^{n_1}) \cdot ([\alpha]^{m_2} \cdot [\beta]^{n_2}) = [\alpha]^{m_1+m_2} \cdot [\beta]^{n_1+n_2} \tag{3.33}$$

が成り立つので，ホモトピー類の積は実質的には

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2) \tag{3.34}$$

という整数の組の和を計算しているのと同じである．したがって，トーラスのホモトピー群は 2 つの整数の組の群に同形である．このことを

$$\pi_1(T^2; x_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{3.35}$$

と書く．また，任意のホモトピー類は $[\alpha]$ と $[\beta]$ の積で作られるという意味で $[\alpha]$ と $[\beta]$ を $\pi_1(T^2; x_0)$ の**生成子** (generator) という．

3.7.3　クラインの壺

さらに自明でない例としてクラインの壺 (Kb) のホモトピー群を調べよう．クラインの壺も一点に縮めることのできないループを持つ．そのようなループは本質的に 2 種類あって，Kb の任意のホモトピー類はそれらの積で作られる．図 3.16 を見ながら考えてほしいが，

$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta \sim e_{x_0} \tag{3.36}$$

という関係が成り立つ．この関係式は

$$\alpha \cdot \beta \sim \beta^{-1} \cdot \alpha, \qquad \beta \cdot \alpha \sim \alpha \cdot \beta^{-1} \tag{3.37}$$

などと書き換えられる．

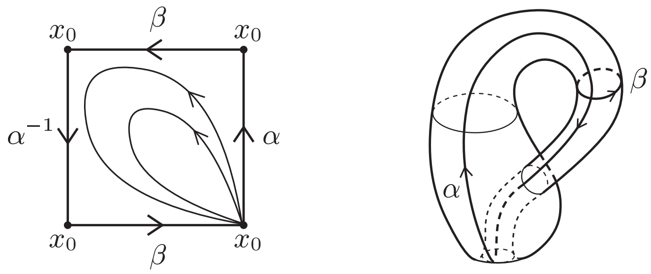


図 3.16　クラインの壺上では $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta$ は定点ループにホモトピック．

クラインの壺のホモトピー群 $\pi_1(\mathrm{Kb}, x_0)$ は $[\alpha]$ と $[\beta]$ で生成される．例えば，

$$[\gamma] = [\alpha] \cdot [\alpha] \cdot [\beta] \cdot [\alpha] \cdot [\beta]$$

は $\pi_1(\mathrm{Kb}, x_0)$ の元の 1 つである．ところが関係式 (3.37) を用いると，

$$\begin{aligned} [\gamma] &= [\alpha] \cdot [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] \\ &= [\alpha] \cdot [\alpha] \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]^{-1}) \cdot [\beta] \\ &= [\alpha] \cdot [\alpha] \cdot [\alpha] \end{aligned}$$

となる．このように，クラインの壺のホモトピー群 $\pi_1(\mathrm{Kb}, x_0)$ の元は，適当な個数の $[e], [\alpha], [\alpha]^{-1}, [\beta], [\beta]^{-1}$ を適当な順序で並べた積に，変形規則

$$[e] \cdot [e] = [e], \tag{3.38}$$

$$[\alpha] \cdot [e] = [e] \cdot [\alpha] = [\alpha], \tag{3.39}$$

$$[\beta] \cdot [e] = [e] \cdot [\beta] = [\beta], \tag{3.40}$$

$$[\alpha] \cdot [\alpha]^{-1} = [\alpha]^{-1} \cdot [\alpha] = [e], \tag{3.41}$$

$$[\beta] \cdot [\beta]^{-1} = [\beta]^{-1} \cdot [\beta] = [e], \tag{3.42}$$

$$[\alpha] \cdot [\beta] \cdot [\alpha]^{-1} \cdot [\beta] = [e] \tag{3.43}$$

を適用して移り合う元を同一視したものだと言える．(3.38) から (3.42) までの関係式は一般の群の単位元と逆元の定義を示しただけである．クラインの壺のホモトピー群を本当に特徴づけているのは関係式 (3.43) である．したがってクラインの壺のホモトピー群 $\pi_1(\mathrm{Kb}, x_0)$ は生成子 $[\alpha], [\beta]$ と関係子 (3.43) で定義されると言ってよい．

注意しておきたいことは，$\pi_1(\mathrm{Kb}, x_0)$ においては

$$[\alpha] \cdot [\beta] \neq [\beta] \cdot [\alpha]$$

であり，元を並べる順序によって異なる積ができるということだ．一般に 1 次元ホモトピー群は非可換な群になる．

3.7.4 射影平面

射影平面 $\mathbb{R}P^2$ は正方形の周辺に図 3.17 のような同一視を施したものであるから，

$$\alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta \sim e_{x_0} \tag{3.44}$$

というホモトピックな関係によって特徴づけられる．ところが頂点 x_0 と x_1 は同一視されないので，道 α はループではない．道 β もループではない．ループになっているのは $\gamma = \alpha \cdot \beta$ である．すると，上の関係式はループ γ に対する

$$\gamma \cdot \gamma \sim e_{x_0} \tag{3.45}$$

という関係式になる．したがって射影平面のホモトピー群 $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$ は生成子 $[\gamma]$ と関係子 $[\gamma] \cdot [\gamma] = [e_{x_0}]$ で定義される．つまり $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$ は，単位元 $[e]$ と，2 乗したら単位元になる元 $[\gamma]$ だけからなる群であり，

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) = \{\, [e], [\gamma] \,\} = \mathbb{Z}_2 \tag{3.46}$$

と書かれる．直観的に表現すると，射影平面上の γ は，1 回巻きではほどけないが，2 回巻くと連続変形でほどけて一点に縮めることができるループなのだ．

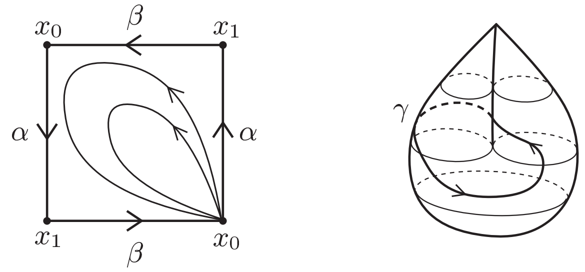


図 3.17　射影平面上では $\gamma = \alpha \cdot \beta$ とおいたとき $\gamma \cdot \gamma$ が定点ループにホモトピック．

3.8 位相不変量としてのホモトピー群

前節では，球面・トーラス・クラインの壺・射影平面は，異なったホモトピー群を有していることを見た．本節ではこのことの意味を考えてみよう．

2 つの弧状連結な位相空間 X, Y があって，それぞれの基点 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ を選べば，おのおののホモトピー群 $\pi_1(X; x_0)$, $\pi_1(Y; y_0)$ が定義される．これらを比較することを考えよう．連続写像 $f : X \to Y$ があれば，X 上の道 $\alpha : I \to X$ との合成写像 $f \circ \alpha : I \to Y$ は Y 上の道になる．つまり，写像 f によって，X の上を走る道は Y の上を走る道へと送り出される．

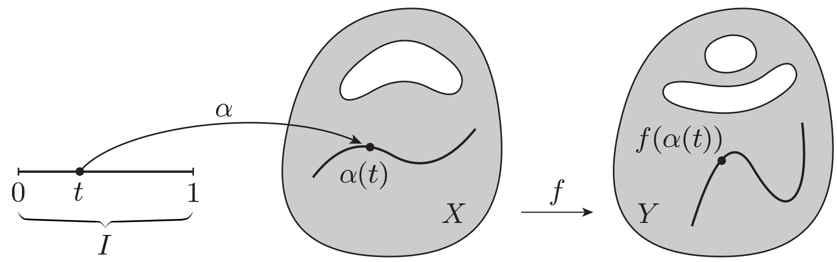


図 3.18　連続写像 $f : X \to Y$ は X の道を Y の道に移す．

X 上の 2 つの道 α, β が積 $\alpha \cdot \beta$ を定めるならば，

$$f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta) \tag{3.47}$$

が成り立つことは道の積の定義からすぐ確かめられる．逆の道に対しては $f \circ (\alpha^{-1}) = (f \circ \alpha)^{-1}$ が成り立つことも容易にわかる．

道 α と α' がホモトピックであれば，$f \circ \alpha$ と $f \circ \alpha'$ もホモトピックである．なぜなら，α と α' のホモトピー $F : I \times I \to X$ から，$f \circ \alpha$ と $f \circ \alpha'$ のホモトピー $f \circ F : I \times I \to Y$ が誘導されるからである．

もし $f(x_0) = y_0$ で，α が x_0 を基点とするループであれば，$f \circ \alpha$ は y_0 を基点とするループになる．定点ループ e_{x_0} に対しては $f \circ e_{x_0} = e_{y_0}$ が成り立つ．

以上のことから，写像

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \qquad [\alpha] \mapsto f_*[\alpha] := [f \circ \alpha] \tag{3.48}$$

が定義されて，群の準同形写像になっていることがわかる．つまり，X のホモトピー類 $[\alpha]$ の代表元 α の取り方によらずに Y のホモトピー類 $f_*[\alpha]$ が定義されていて

$$f_*([\alpha] \cdot [\beta]) = (f_*[\alpha]) \cdot (f_*[\beta]) \tag{3.49}$$

が成り立つ．したがって，位相空間の連続写像

$$f : X \to Y \tag{3.50}$$

はホモトピー群の準同形写像

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)) \tag{3.51}$$

を誘導する．位相空間と群という一見別のものが，連動しているのである．

ここで重要な定理がある．写像 $f : X \to Y$ が同相写像ならば，それが誘導する準同形写像 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ は群の同形写像になる，

$$X \cong Y \quad \Rightarrow \quad \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0)) \tag{3.52}$$

という定理だ（証明は圏論の (5.7) のところで一般的な形でなされる）．この定理は，式 (2.18) の意味でホモトピー群は位相空間の位相不変量であるということを主張している．

この定理の対偶は，2 つのホモトピー群 $\pi_1(X, x_0)$ と $\pi_1(Y, y_0)$ が同形でないならば，同相写像 $f : X \to Y$ は存在しない，ということである．例えば，前節で，球面・トーラス・クラインの壺・射影平面は，同形でないホモトピー群を有していることが判明したので，これらは同相ではないことがわかる．つまり連結成分の個数を数えるだけではわからなかった位相空間の違いをホモトピー群は見分けられるのだ．この程度の具体的な図を描けるような位相空間であればホモトピー群というのはおおげさすぎる道具立てだと思われるかもしれない．しかし，位相空間（あるいは後に論ずる多様体も位相空間の一種）にはきわめて抽象的な定義しかできないものもあって，そのような位相空間を直観的に見比べることはもはや不可能になってくる．そのような場合にこそホモトピー群が真価を発揮する．

なお，連結成分の個数というのは位相空間 X に対して 1 つの整数 $\mu(X)$ を定め，X と Y が同相ならば $\mu(X) = \mu(Y)$ が成り立つという意味で位相不変量であった．ホモトピー群は 1 つの数というよりも 1 つの代数的体系であるので，ホモトピー群を位相不変「量」と呼ぶことには違和感を持たれるかもしれないが，位相空間から位相不変な元や体系を定めることができたならば，それもおおらかに「位相不変量」と呼ぶことにする．

ホモトピー理論は，位相空間 X という幾何学的な対象に対して，ホモトピー群 $\pi_1(X)$ という代数的対象を誘導する．つまり，位相空間というぐにゃぐにゃして捉えどころのないものを，群という演算処理可能な記号体系で捉えるという役割を持つ．また，ホモトピー理論は，位相空間の連続写像 $f : X \to Y$ に対して，ホモトピー群の準同形写像 $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ を誘導する．これも，連続写像という柔軟でふにゃふにゃしたものを，群準同形という計算可能ながっちりした言葉で捉えている．さらに連続写像 $g : Y \to Z$ があれば合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が定義される．$g \circ f$ は X 上のループを Z 上のループへ送り出し，ホモトピー群の準同形 $(g \circ f)_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Z)$ を誘導するが，このとき

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \tag{3.53}$$

という関係が成り立つ．位相空間の変換に，群の準同形が合理的に連動している．このように位相空間の世界（圏）の関係性を群の世界（圏）に写し取ることがホモトピー理論の役割だと言える．ある世界（物や現象の世界）を別の世界（物の世界でもよいし記号や言葉の世界でもよい）へ写し取って，ある世界の物や出来事を別の世界の言葉で解釈するという行いを自然な形で抽出したものが，後々に説明する「関手」という概念装置である．

3.9 高次元ホモトピー群

名前だけはすでに出ていたが，ここでは 2 次元，3 次元といった高次元のホモトピー群の定義を与えよう．まずこれらを考える動機を，例を通して説明しよう．3 次元ユークリッド空間 $X = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ と，そこから原点を取り除いた $Y = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ とを比べてみる．どちらも位相空間であり，弧状連結である．図 3.19 を見ながら考えてほしいが，適当に基点を選んでループを描けば，X においても Y においてもループを連続的に一点に縮めることができる．したがって 1 次元ホモトピー群はともに単位元だけからなる：$\pi_1(X) = \pi_1(Y) = \{[e]\}$．つまり 1 次元ホモトピー群を比較しても X と Y の区別はつかない．

ループという 1 次元的な物体で探っても区別がつかないのであれば，何か 2 次元的な物体で探ろうというのは自然な発想だ．今度は風船のような袋状のものを空間中に浮かべるのだ．袋は曲げたり伸ばしたり縮めたりの連続変形はできるが，袋を破ったり切ったり貼りつけたりすることはできないものとする（自己交差は許す）．袋はある基点にピン止めされていて，基点は必ず袋の表面になければならないとする．さて，この袋を一点に縮めることができるかということを考えるのだ．空間 X においては袋は難なくつぶされる．しかし空間 Y においては袋が原点を囲んでいると袋を一点に引き絞ることはできない．なぜなら原点は Y に属していないので，Y の中しか動かせない袋は原点を横切ることができないからだ．また，原点を 2 重に包んだ袋を，1 重包みの袋に連続変

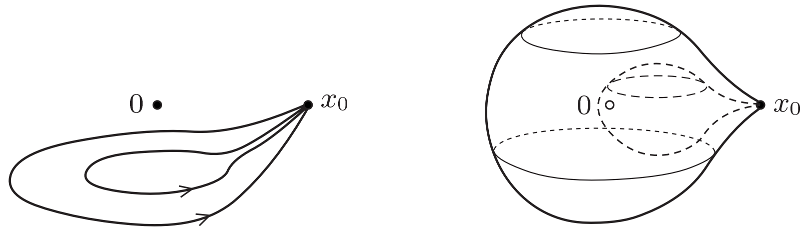


図 3.19　Y は $\mathbb{R}^3$ から原点 0 をくり抜いた空間．x_0 を基点とするループ（左図）と，x_0 を基点とする袋（右図）．

形することもできない．1 次元のループは原点をひょいとよけることができるが，2 次元の袋は原点に引っかかって外せないのだ．

このように，基点を通る 2 次元の袋を連続的に縮めることができるか，あるいは袋どうしを互いに連続変形で移り合わせることができるか，といったことを調べることは位相空間を特徴づける指標になる．こういう指標を数学的に正確に仕上げたものが高次元のホモトピー群になる．

n 次元の「袋」の概念を正確に定めよう．n 個の閉区間 $I=[0,1]$ の直積集合を用意する：

$$I^n = \{\,(t_1,\cdots,t_n)\,|\,t_i \in \mathbb{R},\ 0 \le t_i \le 1\ (i=1,\cdots,n)\,\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.54)$$

これは n 次元立方体とでも呼ぶべきものだ．

$$\partial I^n = \{\,(t_1,\cdots,t_n) \in I^n\,|\,\text{ある } i \text{ について } t_i = 0 \text{ または } t_i = 1\,\} \quad (3.55)$$

を n 次元立方体の境界と呼ぶ．位相空間 X と基点 $x_0 \in X$ が与えられたとき，連続写像 $\alpha : I^n \to X$ で，$\boldsymbol{t}=(t_1,\cdots,t_n) \in \partial I^n$ に対して $\alpha(\boldsymbol{t}) = x_0$ となるものを x_0 を基点とする n 次元ループと呼ぶことにする．

n 次元ループの連続変形も次のように定められる．2 つの n 次元ループ α, α' に対して連続写像

$$F : I \times I^n \to X, \qquad (s,\boldsymbol{t}) \mapsto F(s,\boldsymbol{t}) \quad (3.56)$$

で

$$\begin{cases} F(0,\boldsymbol{t}) = \alpha(\boldsymbol{t}), \\ F(1,\boldsymbol{t}) = \alpha'(\boldsymbol{t}), \\ \boldsymbol{t} \in \partial I^n \text{ のとき } F(s,\boldsymbol{t}) = x_0 \end{cases} \quad (3.57)$$

を満たすものが存在するとき，α と α' はホモトピックであるといい，このことを $\alpha \sim \alpha'$ と書き，F を α から α' へのホモトピーという．

また，2 つの n 次元ループ α, β の積 $\alpha \cdot \beta : I^n \to X$ を

$$(\alpha\cdot\beta)(t_1,t_2,\cdots,t_n) := \begin{cases} \alpha(2t_1,t_2,\cdots,t_n) & \left(0 \le t_1 \le \dfrac{1}{2}\right) \\ \beta(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n) & \left(\dfrac{1}{2} \le t_1 \le 1\right) \end{cases} \quad (3.58)$$

で定義する．1 次元ホモトピーのときと同様に，ホモトピックという関係は同値関係であり，ホモトピックと積は両立し（$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta' \Rightarrow \alpha\cdot\beta \sim \alpha'\cdot\beta'$），ホモトピー類の積が定義されて（$[\alpha]\cdot[\beta] := [\alpha\cdot\beta]$），その積に関して結合律が成立する．任意の $\boldsymbol{t} \in I^n$ に対して $e_{x_0}(\boldsymbol{t}) = x_0$ を満たす写像 $e_{x_0} : I^n \to X$ を n 次元定点ループという．定点ループのホモトピー類は，ホモトピー類の積の単位元となる．ホモトピー類 $[\alpha]$ の逆元が

$$\alpha^{-1}(t_1,t_2,\cdots,t_n) := \alpha(1-t_1,t_2,\cdots,t_n) \quad (3.59)$$

のホモトピー類で定義される．こうして，x_0 を基点とする n 次元ループのホモ

トピー類全体の集合は，この積 $[\alpha]\cdot[\beta]$ に関して群となる．これを n 次元**ホモトピー群**と呼び，$\pi_n(X;x_0)$ と書く．

代表的な例として，球面の 2 次元ホモトピー群は

$$\pi_2(S^2;x_0)=\mathbb{Z} \tag{3.60}$$

である．直観的には球面自身を 1 回包むような袋が生成子 $[\alpha]$ であり，あとはこの袋で球面を m 回包むことによってホモトピー群の元 $[\alpha]^m$ が作られる．

高次元ホモトピーがどうなるかということは，なかなか見当がつかない．例を挙げておくと，

$$\pi_3(S^2)=\mathbb{Z},\quad \pi_4(S^2)=\mathbb{Z}_2,\quad \pi_5(S^2)=\mathbb{Z}_2,\quad \pi_6(S^2)=\mathbb{Z}_{12} \tag{3.61}$$

といった結果が知られている．

高次元ホモトピー群の性質を 1 つだけ述べておこう．$n\geq 2$ に対してホモトピー群 $\pi_n(X)$ は可換群になる．つまり高次元ホモトピー群においては

$$[\alpha]\cdot[\beta]=[\beta]\cdot[\alpha] \tag{3.62}$$

が自動的に成り立つ．なぜなら，次元が高い分，α の定義域と β の定義域をお互いによけて入れ換えることができるからである．$\alpha\cdot\beta$ から $\beta\cdot\alpha$ への連続変形を与えるホモトピーは図 3.20 のように構成される．構成を数式で表現はしないが，図を見て連続変形の様子を想像してほしい．

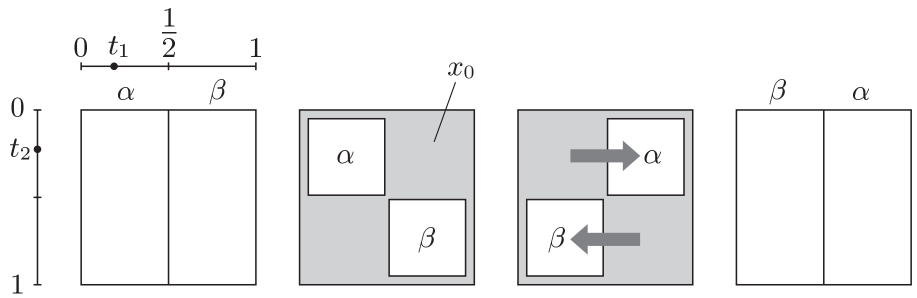


図 3.20　$\alpha\cdot\beta$ から $\beta\cdot\alpha$ へのホモトピー．左から右へ $s=0$ から $s=1$ へと連続的に移行している．グレーに塗ってある領域はすべて点 x_0 に対応する．結果的に 2 次元ホモトピー群の積は順序交換可能となる．

3.10　ポアンカレ予想

1 次元ホモトピー群は位相空間を調べる基本的な道具である．代表的な位相空間として n 次元球面

$$S^n := \left\{ (x_0,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n}(x_i)^2=1 \right\} \tag{3.63}$$

がある．この S^n は $n+1$ 次元ユークリッド空間の部分位相空間である．$n\geq 2$

のとき S^n の 1 次元ホモトピー群は

$$\pi_1(S^n; x_0) = \{\, [e_{x_0}] \,\} \tag{3.64}$$

であることが知られている．つまり 2 次元以上の球面では 1 次元ループは必ず連続変形で一点につぶすことができるのである．つまり，2 次元以上の球面は単連結である．

そうすると，この逆は言えるかという問題を考えることができる．つまりコンパクト[*2)]で弧状連結で境界のない多様体[*3)] X のホモトピー群が

$$\pi_1(X; x_0) = \{\, [e_{x_0}] \,\} \tag{3.65}$$

ならば X は S^n に同相か？という問題を思いつくのは，自然ななりゆきである．つまり，どんなループでも連続的に引き寄せて一点につぶすことができるような空間は球面に限ると言えるか，という問題である．確かに球面に同相でない位相空間であるトーラスやクラインの壺はいずれも自明でないホモトピー群を持っていた．ホモトピー群が自明になるような空間は，どこにも「穴」や「ひっかかり」がないような空間であり，そんなものは球面くらいしかないだろうと思える．そうすると「n 次元 $(n \geq 2)$，コンパクト，弧状連結，かつ境界のない多様体 X の 1 次元ホモトピー群が自明ならば，X は球面 S^n に同相である」という主張が予想される．これを**ポアンカレ予想** (Poincaré conjecture) という．1904 年にポアンカレがこの予想を発表して以来，多くの数学者がその証明に挑戦し続けて来た．$n = 2$ の場合にこの予想が正しいことは，20 世紀初頭の数学の範囲で理解できる．$n \geq 5$ の場合についてはスメールが 1961 年に証明し，$n = 4$ の場合についてはフリードマンが 1982 年に証明した．次元が高い場合の方が先に証明されて，次元が低い方が証明が難しくて後回しになるのは意外だと思われるかもしれない．$n = 3$ の場合はとくに難問で，2000 年にクレイ数学研究所は 3 次元ポアンカレ予想を証明した者に 100 万ドルの賞金を出すと発表した（西暦 2000 年を記念してミレニアム懸賞問題として合計 7 問の問題を発表した．ポアンカレ予想はそのうちの 1 問）．一方で，1970 年代後半にサーストンが 3 次元多様体に関する幾何化予想という予想を発表していた．サーストンの予想はポアンカレ予想を特別な場合として含む壮大なもので，サーストン予想が正しければポアンカレ予想も正しいということはわかっていた．そして 2003 年にペレルマンという数学者がサーストン予想を証明したというニュースが流れた．ペレルマンの証明が正しいかどうか（論証の誤りや不足がないかどうか）は他の数学者によって検証されなければならないのだが，この本を書いている時点（2006 年 4 月）では，まだ決着は着いていないようである．

---

*2) コンパクトの定義は与えていないが，おおざっぱには「大きさが有限」のことと思ってよい．例えば球面 S^n はコンパクトであり，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は非コンパクトである．

*3) 多様体の定義は後にきちんと与えるが，ここでは，位相空間に「滑らかさ」を要請したものという程度に思っておいてほしい．

第 4 章

ホモロジー

4.1 ホモロジー理論の考え方

位相空間の位相不変量としてホモロジーというものがある．その概要を説明しよう．ホモロジーでは図形の縁あるいは境界に注目する[*1]．下図のような曲線 γ の縁は端点 a と b である．さらに，曲線には向きがついているものと考えて，終点はプラス，始点はマイナスの符号をつけて考える．そうすると曲線 γ の境界は

$$\partial\gamma = b - a \tag{4.1}$$

と表記される．

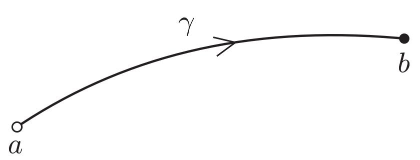


図 4.1　曲線 γ の境界．

点 a に負号をつけた「$-a$」とはいったい何なのか意味不明な感じもするが，微分可能な実数関数 $f(x)$ を微分して積分したものが

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a) \tag{4.2}$$

に等しいという式を見ると，線分 $[a, b]$ の終点 b にプラス，始点 a にマイナスをつけるのはさほど不自然なことではないように思えるだろう．

もし曲線 γ が閉じていれば，つまり γ の始点と終点が一致していれば，

$$\partial\gamma = a - a = 0 \tag{4.3}$$

*1)　数学的用語としての「境界」の定義は後に与える．本節では図形の端を指す素朴な概念として「縁」ないし「境界」という言葉を使う．

となる．すなわち，閉じたループに縁はない．右辺の「0」とは何なのか解釈しにくいが，関係式 (4.2) において点 a と点 b が一致していたら，どんな関数 $f(x)$ に対しても積分値は 0 になる，ということを表していると思えばよい．

2 次元的な図形に対しても縁を考えることはできる．下図の 2 次元図形 σ の縁 $\partial\sigma$ は 1 次元図形である．

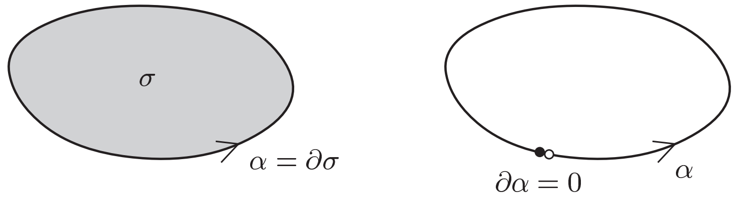


図 4.2　曲面 σ の境界 $\partial\sigma$.

ここで，次のような事実に注目してほしい．こうしてできた曲線 $\alpha = \partial\sigma$ は閉じている．つまり，形式的に書くと

$$\partial(\partial\sigma) = 0 \tag{4.4}$$

が成り立つ．標語的に言うと「縁に縁なし」である．同じことだが

$$\alpha = \partial\sigma \quad \Rightarrow \quad \partial\alpha = 0$$

と書いてもよい．

そうすると上の事実の逆は成立するかという問いが生じる.「ある 1 次元図形 α について $\partial\alpha = 0$ ならば，$\alpha = \partial\sigma$ となるような 2 次元図形 σ が存在するか？」という問いである．言い換えると，ある図形が縁なしならば，その図形は何か別の図形の縁になっているだろうか？という問いである．

その答えは，図形 α がどういう空間に置かれているかということに依存する．球面 S^2 の上であれば，答えは肯定的である．球面の上に縁なしの 1 次元図形 α があれば，α を縁とするような 2 次元図形 σ が存在する．

ところがトーラス T^2 の上では答えは微妙になる．下図のような 1 次元図形 β は縁なしだが，β を縁とするような 2 次元図形は存在しない．

そうすると，縁なしでありながら，何か他の図形の縁にはなっていないような図形がどれだけあるか調べることは，その図形の置き場所となっている空間

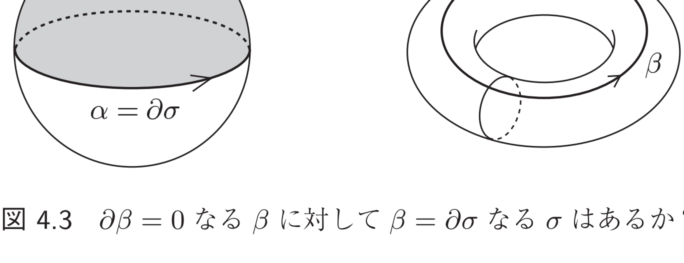


図 4.3　$\partial\beta = 0$ なる β に対して $\beta = \partial\sigma$ なる σ はあるか？

の大域的な性質を知る手がかりになりそうだという気がしてくる．この発想を数学として仕上げたものが本章で説明するホモロジー理論である．

詳しい説明をする前に１つ注意しておこう．ホモトピー理論は「連続変形で一点に縮めることができないループがどれくらいあるか」を調べる．ホモロジー理論は「他の図形の縁になっていないループがどれくらいあるか」を調べる．この２つの理論は似ているのだが，微妙な違いがある．連続的に一点に縮めることができるループは，一点に向かって連続変形する途中経過の場所となる「中身」の図形があるので，その図形の縁になっている，と言える．

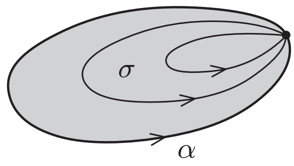


図 4.4　連続的に一点に縮めることができるループ α には中身の図形 σ があり，$\alpha = \partial\sigma$ となっている．

しかし，ループが面の縁になっているからといってそのループを一点につぶせるとは限らない．例えば下図のような２人乗りの浮き輪の形をした空間（種数２のトーラスという）において，下図の γ ようなループを考えると，このループを連続的に一点に縮めることはできないが，このループは σ という領域の縁になっている．

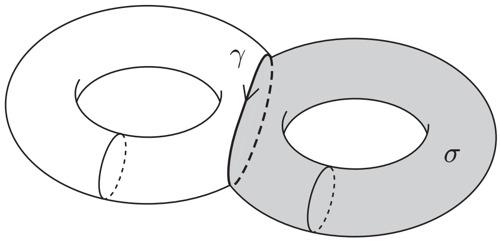


図 4.5　γ には $\gamma = \partial\sigma$ となる σ があるが，γ をトーラス上の連続変形で一点に縮めることはできない．

つまり，

$$\text{ループが連続的に一点に縮められる} \Rightarrow \text{ループが縁になっている}$$

ということは言えるが，その逆は言えない．そのために，ホモトピー理論とホモロジー理論は異なった理論になる．いまは１次元ループの事情を観察したが，高次元ループを扱うと両者の差異はもっと大きくなる．

4.2　単体複体

ホモロジーのアイディアの概要を見たところで，ホモロジーの数学的定義を整えたいのだが，それには準備が必要だ．先の例ではトーラスにループを置いて，このループを縁とするような 2 次元図形があるか，といった問いを考えた．ところが，ある空間に 1 次元図形や 2 次元図形を置くやり方にはとても多くの選択の自由度があり，それらを全部扱おうとするとホモロジーをきちんと定義することはかなり面倒になってくる．そこで，連続的な空間を，有限個の部品からなる骨組みだけに置き換えてしまうことにする．つまり，滑らかな図形として描かれているトーラスを，角張った多面体で置き換え，トーラス上の滑らかなループの代わりに，多面体の辺に沿った多角形型のループを考えることにするのだ．こういう置き換えをすると，空間の持つ滑らかさや対称性は失われるが，有限な個数の辺や面だけを扱えばよいので，安心して図形を数えたり計算したりできるようになる．とくに三角形は最も単純な 2 次元図形なので，三角形だけから構成されるような多面体を考えると，いろいろな定義や計算が簡単になる．このように，滑らかな図形を三角形からなる多面体に置き換えることを三角形分割という．このような多面体的な図形を任意の次元に拡張したものが，以下に説明する単体複体である．

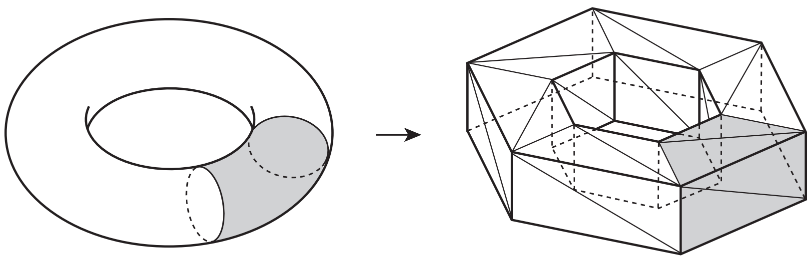


図 4.6　三角形分割.

まず，任意の次元の図形の容れ物として，十分大きな自然数 N を次元とするユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ を用意する．2 点 $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^N$ と実数 s $(0 \leq s \leq 1)$ に対して

$$p_s = (1-s)p_0 + s\,p_1$$

は 2 点 p_0, p_1 を結ぶ線分を $s : (1-s)$ の比に分ける内分点だということはよく知られているだろう．あるいは，点 p_0 に $(1-s)$，点 p_1 に s の重みをつけたときにつり合う点（重心）が p_s だと言ってもよい．さらに別の点 p_2 と実数 t $(0 \leq t \leq 1)$ を持ってきて

$$q_{s,t} = (1-t)p_s + t\,p_2 = (1-t)\{(1-s)p_0 + s\,p_1\} + t\,p_2$$

とおけば，これは 2 点 p_s, p_2 を結ぶ線分を $t : (1-t)$ の比に分ける内分点に

なっている．$c_0=(1-t)(1-s)$, $c_1=(1-t)s$, $c_2=t$ とおけば

$$q_{s,t}=c_0\,p_0+c_1\,p_1+c_2\,p_2$$

であり，各係数は $0 \le c_i \le 1$ の範囲にあり，$\sum_i c_i = 1$ であることに注意してほしい．$0 \le c_i \le 1$ かつ $\sum_i c_i = 1$ という範囲で係数 c_i を動かせば点 $q_{s,t}=c_0\,p_0+c_1\,p_1+c_2\,p_2$ は 3 点 $\{p_0,p_1,p_2\}$ を頂点とする三角形の境界と内部を埋め尽くす．各点 p_i に c_i $(i=0,1,2)$ の重みづけをしたときの重心が $q_{s,t}$ だと言ってもよい．このような三角形の構成方法を一般の次元に拡張して n 次元の単体を以下に定める．

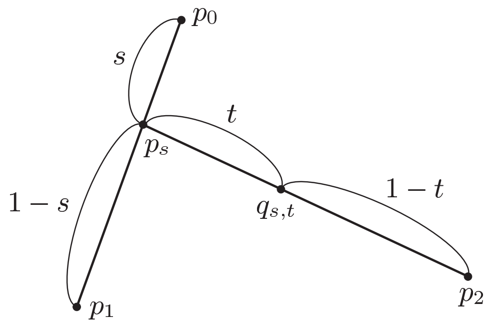


図 4.7　内分点．

空間 $\mathbb{R}^N$ 中の $n+1$ 個の点 $\{p_0,p_1,\cdots,p_n\}$ を適当に選んでくる．点 p_0 を始点とする n 個のベクトル

$$\overrightarrow{p_0p_1},\ \overrightarrow{p_0p_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{p_0p_n}$$

が線形独立[*2] ならば，これらの点 $\{p_0,p_1,\cdots,p_n\}$ は**一般の位置** (general position) にあるという．いま，p_0 を共通の始点に選んで n 個のベクトルを定義したが，これらが線形独立ならば，他の点 p_i を共通の始点に選んでその他の点を終点とする n 個のベクトル $\{\overrightarrow{p_ip_k}\,|\,k=0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$ を定義しても線形独立になっていることが確かめられる．

一般の位置にある点 $\{p_0,p_1,\cdots,p_n\}$ の内分点全体の集合

$$s=|p_0p_1\cdots p_n|=\left\{p=\sum_{i=0}^{n}c_ip_i\ \middle|\ c_i\in\mathbb{R},\ 0\le c_i\le 1,\ \sum_{i=0}^{n}c_i=1\right\} \tag{4.5}$$

を $\{p_0,p_1,\cdots,p_n\}$ を頂点とする $\boldsymbol{n}$ **単体** (n-simplex) と呼ぶ．s は $\{p_0,p_1,\cdots,$ $p_n\}$ を頂点とする多面体の表面と内部という点集合であり，$\mathbb{R}^N$ の部分集合であり，n 次元の図形である．$n=2$ の場合は s はいわゆる三角形であるし，$n=3$

*2)　ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ が線形独立であるとは，「$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=0$ となるような実数 $c_1,\cdots,c_n$ があれば $c_1=\cdots=c_n=0$ である」ということである．

の場合は s はいわゆる四面体である．n 単体とは，言わば n 次元の図形を構成する基本的なブロックである．n 単体 s の任意の点 $p \in s$ に対して $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i p_i = p$ かつ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i = 1$ となるような $(c_0, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ は一意的に存在する．この $(c_0, \cdots, c_n)$ を点 $p \in s$ の**重心座標** (barycentric coordinate) という．

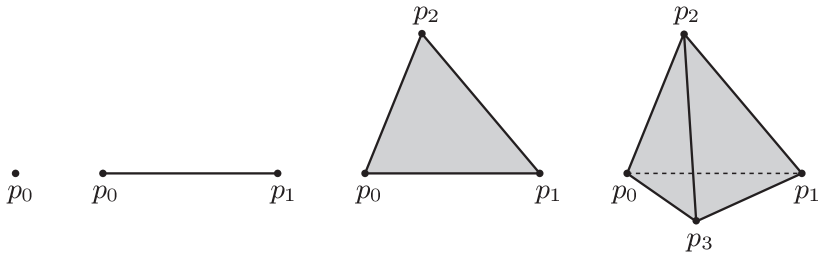


図 4.8　0 単体，1 単体，2 単体，3 単体.

単体を指定する点列 $|p_0 p_1 \cdots p_n|$ の順序には意味はない．つまり，この点列の中の i 番目と j 番目 $(0 \leq i < j \leq n)$ の点を入れ換えた単体は，$\mathbb{R}^N$ の部分集合として，元の単体と同じものになる：

$$|p_0 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n| = |p_0 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n|. \tag{4.6}$$

n 単体 $s = |p_0 p_1 \cdots p_n|$ の頂点のうち適当な $r+1$ 個を選んで r 単体 $s' = |p_{k(0)} p_{k(1)} \cdots p_{k(r)}|$ を作る．ただし点 $p_{k(0)}, p_{k(1)}, \cdots, p_{k(r)}$ は互いに異なるように選ぶ．このような r 単体 s' を n 単体 s の $\boldsymbol{r}$ **辺単体** (r-face) と呼ぶ．ただし $0 \leq r \leq n$ とする．s' が s の辺単体になっていることを $s' \leq s$ と書く．素朴な語感では「辺」と言えば 1 次元的なものを思い浮かべるが，この定義に従えば何次元でも「辺単体」と呼ぶのだ．例えば 3 単体 $|p_0 p_1 p_2 p_3|$ に対して，2 単体 $|p_0 p_1 p_2|$，1 単体 $|p_1 p_2|$，0 単体 $|p_1|$ は，順に

$$|p_1| \ \leq \ |p_1 p_2| \ \leq \ |p_0 p_1 p_2| \ \leq \ |p_0 p_1 p_2 p_3|$$

という関係になっており，いずれも $|p_0 p_1 p_2 p_3|$ の辺単体である．

次元の大小差がありさえすれば辺単体というわけではない．例えば

$$|p_1 p_3| \ \not\leq \ |p_0 p_1 p_2|$$

は辺単体の関係ではない．また，

$$|p_0 p_1| \cup |p_1 p_2| \cup |p_2 p_0|$$

は 3 本の線分をつなげた図形（三角形の周）であるが，これは単体とは言わない．また，

$$\Big(|p_0 p_1| \cup |p_1 p_2| \cup |p_2 p_0|\Big) \ \subset \ |p_0 p_1 p_2| \tag{4.7}$$

は正しいし，素朴な感覚に従って $|p_0 p_1| \cup |p_1 p_2| \cup |p_2 p_0|$ は $|p_0 p_1 p_2|$ の「辺」

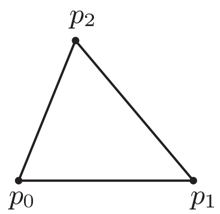


図 4.9 $\left(|p_0p_1| \cup |p_1p_2| \cup |p_2p_0|\right)$ は単体ではない．

である，と言いたくなるが，左辺は単体ではないのだから辺単体の関係ではない．むしろ，辺を合併した $|p_0p_1| \cup |p_1p_2| \cup |p_2p_0|$ は 2 単体 $|p_0p_1p_2|$ の「境界」である，と言いたい．しかし境界という概念をきちんと規定するためには，後に述べる向きづけという概念が必要になる．

$\mathbb{R}^N$ においてさまざまな次元の単体の集合 $K = \{s_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を考える．ここで Λ はたんに，いろいろな単体 s_λ を指し示す添え字 λ の集合だ．集合 K が次の 3 つの条件を満たすとき，K を**単体複体** (simplicial complex) という*3)．(i) $s \in K$ かつ $s' \leq s$ ならば $s' \in K$．(ii) $s_1, s_2 \in K$ かつ $s_1 \cap s_2 \neq \varnothing$ ならば $s_1 \cap s_2$ も単体であり，$s_1 \cap s_2 \leq s_1$ かつ $s_1 \cap s_2 \leq s_2$．(iii) $s \in K$ かつ $x \in s$ ならば x の $\mathbb{R}^N$ における適当な近傍*4) U をとれば，$U \cap s' \neq \varnothing$ となるような $s' \in K$ は有限個しか存在しない．単体複体 K に含まれる単体の次元のうち最大数を K の次元という．

例えば，図 4.10 を見ながら考えてほしいが，

$$\begin{aligned} K_1 = \{\, & |p_0|, |p_1|, |p_2|, |p_3|, |p_4|, |p_5|, |p_0p_1|, |p_0p_2|, |p_0p_5|, \\ & |p_1p_4|, |p_1p_5|, |p_2p_4|, |p_2p_5|, |p_3p_4|, |p_4p_5|, \\ & |p_0p_1p_5|, |p_1p_4p_5|, |p_2p_4p_5|, |p_0p_2p_5| \,\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

は単体複体であるが，

$$\begin{aligned} K_2 = \{\, & |p_0|, |p_1|, |p_2|, |p_3|, |p_5|, |p_0p_1|, |p_0p_2|, \\ & |p_1p_2|, |p_3p_5|, |p_0p_1p_2| \,\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

は単体複体ではない．なぜなら，K_2 に属する 2 単体 $|p_0p_1p_2|$ と 1 単体 $|p_3p_5|$ は空でない交わり $|p_0p_1p_2| \cap |p_3p_5|$ を持つが，それは K_2 に属していないから

*3) ここに述べる単体複体は，本によってはユークリッド単体複体と呼ばれるものである．ユークリッド空間の部分集合としてではなく，頂点と連結という関係だけを用いてもっと抽象的に単体複体を定義することもできるし，その方が便利なこともある．実際,「頂点」と呼ばれるものがユークリッド空間の点である必要はないし,「辺」と呼ばれるものがユークリッド空間中の線分である必要もない．例えば射影空間やクラインの壺のように，ユークリッド空間への埋め込みが明らかでないような位相空間を三角形分割しようとすると，抽象的な単体複体の定義をしておくことが望ましいし，抽象的単体複体の方がホモロジー群の計算が簡単になることもある．そのため，後に，こっそり抽象的単体複体に話を乗り換えることもある．しかしここでは，具体的な表示が可能で視覚的にも捉えやすいユークリッド単体複体を使って議論を進めることにする．

*4) 近傍の定義については，位相空間の定義を議論した 2.2 節を参照してほしい．

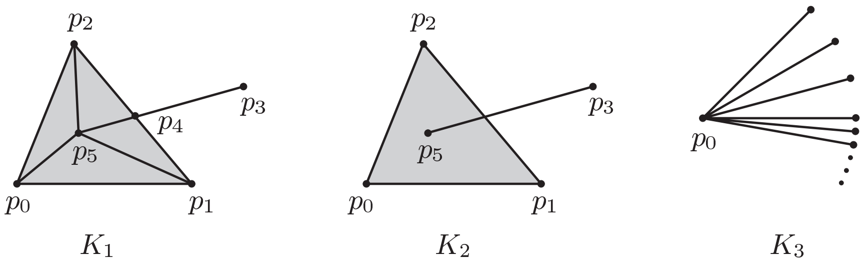


図 4.10　K_1 は単体複体であり，K_2, K_3 は単体複体ではない．

である．また，図 4.10 の K_3 ように 1 つの頂点から無限個の単体が伸びているような単体の集合も単体複体ではない．読者には，適当な単体の集合で単体複体の各条件を満たさないような例を作ってみることをお勧めする．

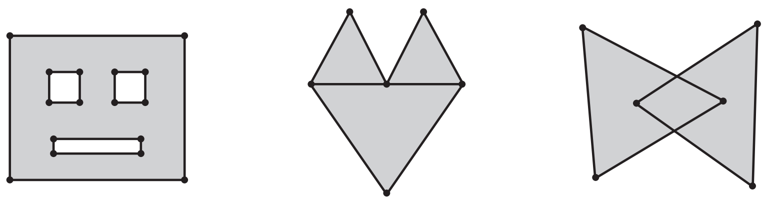


図 4.11　これらは単体複体か？ 単体複体にするためにはどう改造すればよいか？

また，単体複体 $K = \{s_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，各 s_λ は $\mathbb{R}^N$ の部分集合であることを思い出して，和集合

$$|K| = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda \tag{4.10}$$

を作ると，これも $\mathbb{R}^N$ の部分位相空間になる．この $|K|$ を**多面体** (polyhedron) という（2 次元とは限らない場合も「多面体」と呼ぶ）．注意してほしいことは，K と L が異なる単体複体であっても，$|K|$ と $|L|$ は $\mathbb{R}^N$ の部分集合としては一致することがあるということである．したがって，単体複体はたんなる多面体ではなく，構成要素としての単体がどう組み合わさっているかという情報を含んだ構造物であると言える．

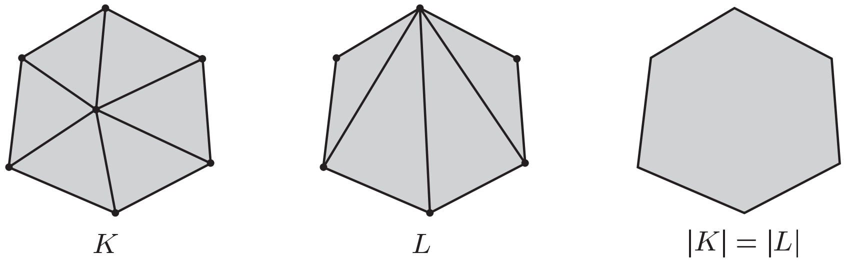


図 4.12　単体複体としては $K \neq L$ だが，多面体としては $|K| = |L|$．

位相空間 X に対して，単体複体 K と同相写像

$$f : |K| \to X \tag{4.11}$$

があれば，(K, f) を X の**三角形分割** (triangulation) という．滑らかな図形として描かれることの多い位相空間を，三角形の貼り合わせで作られた多面体で近似するという意味で三角形分割の名がつけられている．例えば，円周 $X = S^1$ に対して，円の中心が三角形 $p_0p_1p_2$ の内部に含まれるように単体複体 $K = \{\, |p_0|, |p_1|, |p_2|, |p_0p_1|, |p_1p_2|, |p_2p_0|\,\}$ をとって，円の中心から出る半直線と三角形との交点 x を，半直線と円との交点 x' に対応させることによって写像 $f : |K| \to S^1$ を定めれば，(K, f) は S^1 の三角形分割になっている．

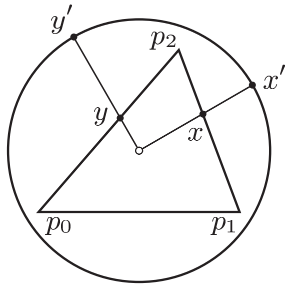


図 4.13　点 x に点 x' を対応させる写像 $f : x \mapsto x'$ は円の三角形分割を定める．

もちろん，位相空間 X が 1 つ与えられたときに，X の三角形分割のやり方は何通りもあり得る．なお，与えられた位相空間 X の三角形分割が存在するか，また，三角形分割のやり方が複数存在するときはそれらは何らかの意味で同値か，という問題はじつに微妙で，いまだに完全な解決はされていないようである．

4.3 加　群

この章の目標はホモロジー群を定義し，その性質を調べることである．そのためには加群の理論の言葉を用いるので，ここで加群の定義を述べよう．群については 3.2 節を参照してほしいが，M が群であるとは，任意の 2 つの元 $x, y \in M$ の積 $xy \in M$ が定まり，結合律，単位元の存在，逆元の存在という条件が満たされていることであった．

加群 (module) とは可換な積を持つ群である．つまり任意の $x, y \in M$ に対して交換律 $xy = yx$ が成立するような群 M のことである．このような場合は積 xy の代わりに $x + y$ と書くことにし，$x + 0 = x$ なる元 0 のことを単位元と呼ぶ代わりに零元と呼ぶ．また，$x + x' = 0$ となる逆元 x' のことを $-x$ と書く．加群は**可換群** (commutative group) あるいは**アーベル群** (Abelian group) とも呼ばれる．どれも定義は同じなのだが，文脈や，さらに付与された性質の違

いによってこれらの名前は使い分けられる．

例えば，ベクトル空間はベクトルの和に関して加群になっている．もう少しあからさまに書くと，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ の和を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

で定めると $\mathbb{R}^n$ は加群になっている．成分 x_i, y_i を整数に限定すれば加群 $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$ が定義される．

加群 M の空でない部分集合 N がまた加群になっているとき，N を M の**部分加群** (submodule) という．つまり，$N \subset M$ で，$x, y \in N$ に対して $x + y \in N$ および $-x \in N$ が成り立つとき，N を M の部分加群という．$x \in N$ に対して，$-x \in N$ であり，$x + (-x) = 0 \in N$ だから，部分加群 N には必ず 0 が含まれている．

例えば，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は和に関して加群であり，偶数全体の集合 $2\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の部分加群である．また，任意の整数 m を固定して，m の倍数全体の集合を

$$m\mathbb{Z} := \{mx \,|\, x \in \mathbb{Z}\} \tag{4.12}$$

と書けば，これも $\mathbb{Z}$ の部分加群であるし，

$$\{0\} \subset \cdots \subset 8\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \tag{4.13}$$

といった部分加群の系列を見つけることができる．また，下図のように 1 次元的な序列に収まりきらない部分加群のネットワーク[*5)] を見出すこともできる．

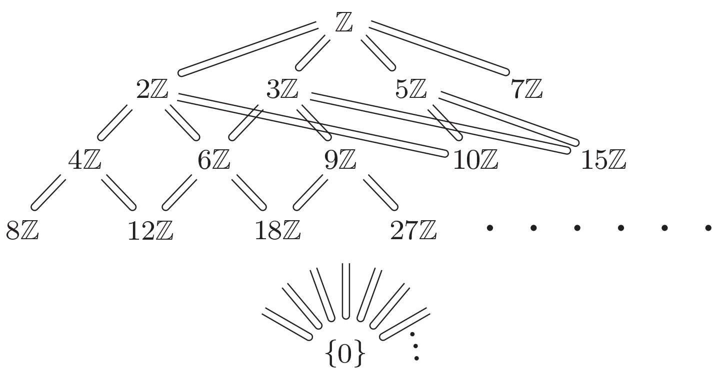


図 4.14　部分加群のネットワーク．$12\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$ や $18\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ などの包含関係は示されていない．

2 つの加群 M_1, M_2 があったとき，元 $x_1 \in M_1$ と $x_2 \in M_2$ の順序対 (x_1, x_2) を作る．$y_1 \in M_1$ と $y_2 \in M_2$ も順序対 (y_1, y_2) をなすが，順序対どうしの和を

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \tag{4.14}$$

で定めると直積集合 $M_1 \times M_2$ もまた加群になる．これを $M_1 \oplus M_2$ と書き，M_1 と M_2 の**直和加群** (direct sum module) という．同様に，任意の k 個の加群の直和加群 $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$ も定義できる．

*5)　加群の部分加群というよりは環のイデアルのネットワークと見た方が意義深い．

4.4 名前と文脈と意味

余談だが，数学においてある概念にどういう名前をつけるかということは，絶対的なことではない．例えば「群」や “group” という名前そのものに格別の意味があるわけではないし，他の名前をつけていたとしてもまったくさしつかえなかったであろう．「環（かん） (ring)」，「体（たい） (field)」，「イデアル (ideal)」，「関手（かんしゅ） (functor)」といった数学用語も，名前を聞いてそれが何であるか想像できるようなシロモノではない．

例えば「次元」という言葉は元来日本語にも中国語にもなかった言葉であり，dimension という言葉の訳語として明治以降に作られた言葉である．しかし，いまではすっかり日本語として定着していて，「次元の低い話」などという表現もできるくらいになっている．初めは珍奇な名前であったが，これらの概念を知り，慣れてくると，これらの名前にも味わいが感じられるようになり，言葉としての使い回しが利くようなるが，他の名前だったら味わいが出てこなかったかと言えば，そんなこともないであろう．文字とか言葉というものは究極的には恣意的なものであろう．

例えば「青」という文字はそれだけではただの記号である．この文字を「あお」と読んでもその発音だけから意味が出てくるわけではない．「青春」，「青年」，「青臭い」と書くと本当にどこらへんが青なのかさえ怪しくなってくるが，どの言葉も意味を獲得している．ここにはメタファーという思考の働きがある．

物理学の「力 (force)」，「熱 (heat)」，「電波 (electric wave)」といった用語も，日常語として解釈すると理解を助けるよりもむしろ誤解を生むことが多いし，これらの用語が何を指しているのか正確に理解するのはじつは相当難しい．

生物学の「遺伝子」も，初めから実体のあるものとして発見されたわけではなく，親から子に伝わる何か不可分な粒子的な存在があると仮定すると観測事実をうまく説明できるモデルとして考案・命名されたのであろう．「遺伝子」は gene の訳語として考え出された造語であるが，非常にうまくつけられた名前であると思う．遺伝子の「子」は，粒子や原子の「子」に通じていて，不可分な遺伝情報の最小単位というニュアンスが込められており，その考え方は現実と非常にうまく合致している．gene はギリシャ語で「生む」ことを表す言葉だが，遺伝という概念を直接表す言葉ではない．gene よりも遺伝子という言葉の方が，名前と現実との対応という点で，より的確なネーミングであったと思われる．

素粒子物理学の「クォーク (quark)」，「フレーバー (flavor)」，「カラー (color)」，「反粒子 (anti-particle)」といった用語に至っては，まさしくたんなる記号であり，他のどんな名前をつけてもかまわなかったようなシロモノである．しかしこれらの抽象記号を適切に解釈して現実世界との対応をつければ，さまざまな実験事実と関係がつくのが物理学の不思議なところである．反粒子という概念はあまりに斬新かつ経験からかけ離れていたので，反粒子という考えを思いつ

いたディラックは，当初は，電子の反粒子は陽子である，という対応づけをしてしまった（当時知られていた素粒子は電子と陽子と光子だけなのだから無理もない）．が，この解釈は理論的に無理があることが指摘され，実験でも電子の反粒子とおぼしき陽電子とでも呼ぶべき新しい粒子が見つかった．言葉と現実世界との対応が初めからうまくいくわけではないことを示す例である．

数学は実験科学ではないので，数学それ自身の内部世界・概念世界での論理的関係が重視される．例えば微分と積分の関係はどうなっているかとか，和と積の関係はどうなっているかとか，円周率 π とネイピア数 e との関係はどうなっているかということを考えるのが数学なのである．

名前そのものは記号だという一方で，どういう概念に名前をつけるかということは重要である．人が認知したり想像したりできる対象は無限にある中で，人が何かに名前をつけるときには，人はとくにその何かに注目しているのだから，そこには必ず人の意思の働きがあり，名前をつけられたその何かと他のものとの違いや関係に注意が払われている．そういう命名の作用は，数学に限った話ではないだろう．存在していても人が注目しなければ名前もないのである．昔はなかったが今はある言葉はいろいろあるが，ではそういう言葉で指されるような出来事が昔はなかったのかというと，そうとは限らないだろう[*6]．「群」という命名がされる前には「かけ算」や「割り算」はなかったのかと言えばそんなことはあるまい．しかし，合成や逆変換に関して閉じた変換の集まりに意味があるという「気づき」があって初めて「変換群」という命名が浮き上がってくるのである．命名というのは，ある概念に注意を払い，その概念に輪郭を与える行為なのである．

名前は文脈に埋め込まれたときに意味を獲得する．例えば，写像 (mapping)・関数 (function)・変換 (transformation)・作用素・演算子 (ともに operator) は，結局のところどれも写像なのだが，それが置かれている状況によって使い分けられる．関数と言えば $f : X \to \mathbb{R}$ のように数に値を持つ写像のことを指すことが多い．変換は合成や逆変換に関心があるような場面で使われる言葉である．ある意味で等価なものの見かけを変えているだけという場面で変換と言うことが多い．作用素は数学書でよく使われ，演算子は物理の本でよく使われる言葉だが，写像 $T : X \to Y$ が結んでいる集合 X や Y よりも写像 T そのものを一個の対象として調べようという関心が高い場面で使われることが多い．写像は一番一般的な状況で使われる言葉であろう．場面ごとの関心事によって的確な名前が使い分けられているのである．

余談が長くなってしまった．何が言いたかったのかというと，文脈から切り離されてしまえば名前それ自身は何の必然性もないたんなる記号であり，名前の意味は世界を織りなす関係性にあるということが言いたかったのだ．名前は

*6） 逆に，人々が関心を失ってしまった出来事・概念についてはその名前も忘れられていく．

図であり，文脈は地である．

ただし，いつでも文脈に依存して記号や名前を使っていればよいというわけでもない．記号には，記号と規則さえあれば意味を考えなくても計算ができるという利点がある．定式化とはそのためにすることである．意味を知らなくても記号を正しく操っていれば正しく推論できる，というレベルまで記号と規則を整えることを定式化という．例えば重力の法則はニュートンによって

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -G\,\frac{Mm}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と定式化されたように．こう定式化しておくと，例えば角運動量保存則やエネルギー保存則

$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 - G\,\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

や，ケプラーの法則は計算だけで確かめられる．太陽の質量を M，地球の質量を m とすると気安く言うが，それは恐ろしいまでの抽象化であり，こんな記号を紙の上に書き並べていじるだけで惑星の運動がわかってしまうのだから不思議である．ここまで徹底的に記号化できてしまうところが物理学の強みである．生物学などはなかなかここまで記号化できない．問題を定式化するときは文脈から考え，計算している間は文脈から離れて無心に記号を運用し，答えが出たら文脈を思い出して解釈する，そのように記号と文脈の着脱を自在に行えると，思考の分業ができて便利なのである．

4.5 加群と環

さて，加群あるいは可換群 M とは，和と呼ばれる写像

$$M \times M \to M, \qquad (x, y) \mapsto x + y$$

を伴っていて，結合律，単位元の存在，逆元の存在，交換律という条件を満たす集合のことであった．加群においては，$x \in M$ に対して

$$x + x + x + x = 4x$$

のように，足し算の繰り返しを整数倍で表すという発想が自然に湧いて来る．これを拡張して，適当な集合 A があって，元 $a \in A$ によって元 $x \in M$ を「a 倍」した $ax \in M$ が定まるという状況を考えることが多い．形式的には

$$A \times M \to M, \qquad (a, x) \mapsto ax$$

という写像を作ろうということだ．集合 A そのものは M とは異質な集合であってもかまわない．「a 倍」する a たちの集合 A はどんな性質を持っていてほしいかと考えて整理した結果が，以下に述べる環の定義である．

集合 A の各元 a, b に対して和 $a+b \in A$ と積 $ab \in A$ が定まっていて，A は和に関して加群になっており，任意の $a, b, c \in A$ の積に関して結合律 $(ab)c = a(bc)$

と，分配律

$$a(b+c) = ab+ac, \qquad (a+b)c = ac+bc \tag{4.15}$$

が成り立っているとき，A を**環** (ring) という．和と積が無関係にあるのではなく，分配律というある種の調和があるのだ．この定義から，零元 $0 \in A$ に関して $0a = a0 = 0$ が導かれる*7)．環の定義は，和の交換律 $a+b = b+a$ が成り立つことを要求するが，積の交換律 $ab = ba$ は要求しない．積についても交換律が成り立てば**可換環** (commutative ring) と呼ぶ．また，環の定義は，積に関する単位元 $e \in A$ の存在は必ずしも要求しない．単位元があれば単位元を 1 と書くことが多い．また，単位元があっても，任意の元 $a \in A$ の積に関する逆元 a^{-1} があるとは限らない．単位元があって，零元以外の任意の元が逆元が持つような可換環を**体** (field) という．ひらたく言ってしまえば，加群とは足し算と引き算（和差）ができる世界であり，環とは足し算・引き算・かけ算（和差積）ができる世界であり，体とは足し算・引き算・かけ算・割り算（和差積商）ができる世界，群とはかけ算・割り算（積商）ができる世界である．

環の例をいくつか挙げておく．整数全体の集合 $\mathbb{Z}$，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$，実数全体の集合 $\mathbb{R}$，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ はどれも可換環である．2 の倍数全体の集合 $2\mathbb{Z}$ も和と積に関して環である．ただし $2\mathbb{Z}$ には積に関する単位元がない．

環 A があったとき，自然数 n を固定して環 A の元を n^2 個並べて作った正方行列

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の全体の集合を $\mathrm{Mat}(n, A)$ と書くと，これは行列の和と積に関して環になる．$\mathrm{Mat}(n, A)$ を，A を要素とする行列環と呼ぶ．環 A が単位元を持っていれば，$\mathrm{Mat}(n, A)$ も単位元（いわゆる単位行列）を持つ．しかし，環 A が積に関して可換であっても，$\mathrm{Mat}(n, A)$ は積に関して可換にはならない．また，A の零元以外の元が逆元を持っていたとしても，$\mathrm{Mat}(n, A)$ の零元以外の元が必ず逆元（いわゆる逆行列）を持つわけではない．

加群 M に対して環 A は倍演算という働きかけをする．つまり $a \in A$ によって $x \in M$ の「a 倍」$ax \in M$ が定まり，任意の $a, b \in A$, $x, y \in M$ に対して分配律

$$a(x+y) = ax+ay, \qquad (a+b)x = ax+bx \tag{4.16}$$

と結合律

*7) $x+y=x$ ならば $y=0$ が言えることを示しておいて，$ab + a0 = a(b+0) = ab$ から $a0 = 0$ といった具合に証明できる．

$$a(bx) = (ab)x \tag{4.17}$$

が成り立つとき，M を **$\boldsymbol{A}$ 加群** (A-module) という．上の式の中に現れている和が，加群の和なのか，環の和なのか，また，式の中に現れている積が，環による加群の倍演算なのか，環の積なのか，注意しておいてほしい．例えば (4.16) の第 1 式の $x + y$ や $ax + ay$ は加群 M の和であり，第 2 式の $a + b$ は環 A の和である．また，(4.17) の左辺の $a(bx)$ は環の元によって加群の元 x を b 倍，a 倍する倍演算の合成であり，右辺 $(ab)x$ は環の積で作られた環の元 ab による倍演算を表している．もし A が単位元 1 を持っていれば単位律

$$1 \cdot x = x \tag{4.18}$$

も要請する．

環が加群に作用する例として，n 次元実数行列全体のなす環 $A = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ が，n 次元実数ベクトル全体のなす加群 $M = \mathbb{R}^n$ に作用するという例がある．この場合は条件 $a(bx) = (ab)x$ を満たすように行列の積 ab が定められている．また，体が作用する加群のことをベクトル空間という．

任意の加群 M の元 x と正の整数 m に対して m 個の x の和を $mx := x + \cdots + x$ とおき，整数 0 に対して $0x := 0$（右辺は M の零元）とおき，負の整数 m に対して $mx := -((-m)x)$ （右辺の括弧の外につけた負号は M における逆元を表す）とおけば，M は整数環 $\mathbb{Z}$ が作用する加群になっている．

4.6 自由加群

もう少し形式的な議論を続けて，自由加群という概念を導入しよう．集合 X が与えられたとき，有限個の元 $x_1, \cdots, x_k \in X$ と，整数 $m_1, \cdots, m_k$ を持ってきて，形式的な「倍」と「和」（線形結合と呼びたくなる）によって

$$c = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i \tag{4.19}$$

というものを作る．これはもはや集合 X の元ではないが，ともかく形式的にこのようなものを考えるのだ．幼稚な例で申し訳ないが，$X = \{$ りんご, バナナ, みかん $\}$ という集合だったら

$$c = 3 \times (\text{りんご}) + 5 \times (\text{バナナ}) - 2 \times (\text{みかん}) \tag{4.20}$$

といったものを考えることにするのだ．c は「りんごが 3 個あって，バナナが 5 本あって，みかんが -2 個ある状況」のことであると言ってもよいが,「-2 個」という言葉を解釈しようとすると，こじつけぽくなってしまうので，無理に具体的なイメージを持とうとせず，あくまでかけ算と足し算の記号を形式的に借用しただけだと思った方がよい．また，整数 m_i' を適当に選んで

$$c' = \sum_{i=1}^{k} m'_i x_i \tag{4.21}$$

という元を作ったら，$c + c'$ を

$$c + c' := \sum_{i=1}^{k} (m_i + m'_i) x_i \tag{4.22}$$

で定義する．例えば，

$$c = 3 \times (\text{りんご}) + 5 \times (\text{バナナ}) - 2 \times (\text{みかん})$$
$$c' = 6 \times (\text{りんご}) - 3 \times (\text{バナナ}) + 10 \times (\text{みかん})$$

に対しては，

$$c + c' = 9 \times (\text{りんご}) + 2 \times (\text{バナナ}) + 8 \times (\text{みかん})$$

となる．この例を見ると，本当に意味がある足し算は，りんごの個数が $3+6=9$ になるとか，バナナの個数が $5-3=2$ になるといった部分であって，$3 \times (\text{りんご}) + 5 \times (\text{バナナ})$ の間にある記号 $+$ には，足し算としての意味はさほどない．りんごとバナナを別物と認識している限り，$3 \times (\text{りんご}) + 5 \times (\text{バナナ}) = 8$ という計算はしない（ただし，もしりんごとバナナが同一視されるようなことがあれば，このような計算もやってよい）．このような定義の結果，結合律

$$(c + c') + c'' = c + (c' + c'') \tag{4.23}$$

が成り立つことはすぐにわかるし,「りんご」と「バナナ」を並べる順序はどうでもよいことを考えると，交換律

$$c + c' = c' + c \tag{4.24}$$

の成立も自明だろう．

なお,「ゼロ倍」された元 $x \in X$ は和に関して零元になると約束する：

$$c + 0 \cdot x = c. \tag{4.25}$$

また，c に対して $-c$ は係数の符号を全部反転させたものとする：

$$-c := \sum_{i=1}^{k} (-m_i) x_i. \tag{4.26}$$

以上の議論から，有限個の元 $x_1, \cdots, x_k \in X$ と，整数 $m_1, \cdots, m_k$ によって作られる元 $c = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i$ 全体のなす集合を $\mathscr{M}(X)$ と書くと，これは和に関する可換群になっていることがわかる．この $\mathscr{M}(X)$ を X を基 (basis) とする**自由加群** (free module)，あるいは X で生成される自由加群という．X の元を $\mathscr{M}(X)$ の**生成子**ともいう．

4.7 向きのついた単体と境界作用素

加群に関する代数的な議論はいったん終えて，幾何学・図形の議論に戻ろう．だいぶ前に出た定義を思い出すと，n 単体 $|p_0p_1\cdots p_n|$ とは $n+1$ 個の点 $\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ を頂点とする n 次元多面体であった．すでに注意したように，単体を指定する点列 $|p_0p_1\cdots p_n|$ の順序には意味はない．しかし，今度は点の順序を区別することにして，この点列の中の i 番目と j 番目 $(0 \le i < j \le n)$ の点を入れ換えた点列は，元の点列に負号をつけたものに等しい，と約束する：

$$\langle p_0\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n\rangle = -\langle p_0\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n\rangle. \tag{4.27}$$

このように約束したとき，$\sigma = \langle p_0\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n\rangle$ を**向きのついた n 単体** (oriented n-simplex) という．向きのついた 1 単体に対しては

$$\langle p_1p_0\rangle = -\langle p_0p_1\rangle$$

が成り立つ．向きのついた 1 単体とは，2 つの端点に始点と終点の区別をつけた線分であり，始点と終点を入れ換えると単体の符号が反転するものだ．また，0 単体に対しては形式的に $\langle p_0\rangle$ と $-\langle p_0\rangle$ とを別物扱いする．

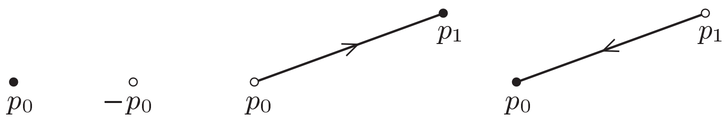


図 4.15　向きづけられた 0 単体, $\langle p_0\rangle$, $-\langle p_0\rangle$．向きづけられた 1 単体, $\langle p_0p_1\rangle$, $\langle p_1p_0\rangle$．

向きのついた 2 単体については

$$\langle p_0p_1p_2\rangle = -\langle p_1p_0p_2\rangle = \langle p_1p_2p_0\rangle = -\langle p_2p_1p_0\rangle = \langle p_2p_0p_1\rangle = -\langle p_0p_2p_1\rangle$$

という関係が成り立つ．つまり奇数回の点の入れ換えに対しては単体の符号が反転し，偶数回の点の入れ換えに対しては単体は不変にとどまると約束する．

向きづけられた n 単体 $\sigma = \langle p_0\cdots p_n\rangle$ に対して，向きのことを考慮に入れない n 単体 $s = |p_0\cdots p_n|$ のことを $s = |\sigma|$ と書くことにする．$|\sigma|$ と $|-\sigma|$ とは $\mathbb{R}^N$ の部分集合としては同じものである

単体複体 K とはいろいろな次元の単体の集合であったが，K の n 次元単体

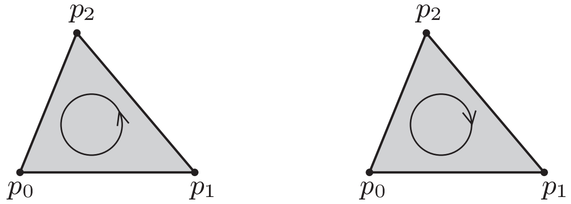


図 4.16　向きづけられた 2 単体, $\langle p_0p_1p_2\rangle$, $\langle p_2p_1p_0\rangle$．

全体のなす部分集合を K_n と書くことにする．各単体には向きをつけておく．そうすると，例えば

$$
\begin{aligned}
K = \{\, &\langle p_0p_1p_2p_3\rangle,\ \langle p_0p_1p_2\rangle,\ \langle p_0p_1p_3\rangle,\ \langle p_0p_2p_3\rangle,\ \langle p_1p_2p_3\rangle,\\
&\langle p_0p_1\rangle,\ \langle p_0p_2\rangle,\ \langle p_0p_3\rangle,\ \langle p_1p_2\rangle,\ \langle p_1p_3\rangle,\ \langle p_2p_3\rangle,\\
&\langle p_0\rangle,\ \langle p_1\rangle,\ \langle p_2\rangle,\ \langle p_3\rangle \,\}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

は 1 つの単体複体であり，このうち 3 単体だけを集めたものが，

$$K_3 = \{\, \langle p_0p_1p_2p_3\rangle \,\},$$

2 単体だけを集めたものが

$$K_2 = \{\, \langle p_0p_1p_2\rangle,\ \langle p_0p_1p_3\rangle,\ \langle p_0p_2p_3\rangle,\ \langle p_1p_2p_3\rangle \,\},$$

1 単体だけを集めたものが

$$K_1 = \{\, \langle p_0p_1\rangle,\ \langle p_0p_2\rangle,\ \langle p_0p_3\rangle,\ \langle p_1p_2\rangle,\ \langle p_1p_3\rangle,\ \langle p_2p_3\rangle \,\},$$

0 単体だけを集めたものが

$$K_0 = \{\, \langle p_0\rangle,\ \langle p_1\rangle,\ \langle p_2\rangle,\ \langle p_3\rangle \,\}$$

となる．この例に関して，当然のことながら，

$$K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

が成り立つ．

単体複体 K の n 単体全体の集合 K_n を基とする自由加群 $\mathscr{M}(K_n)$ を K の $\boldsymbol{n}$ **鎖加群** (n-chain module) と呼び，$C_n(K) := \mathscr{M}(K_n)$ と書く．また n 鎖加群の元を $\boldsymbol{n}$ **鎖** (n-chain) という．つまり，向きづけられた n 単体 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in K_n$ を適当に有限個選び，整数 $m_1, \cdots, m_k$ によって

$$c = m_1\sigma_1 + \cdots + m_k\sigma_k \quad \in C_n(K) \tag{4.29}$$

と書かれるような元 c を n 鎖という．先ほどの例 (4.28) で言えば，単体複体 K に伴う 2 鎖加群は

$$
\begin{aligned}
C_2(K) = \{\, &m_1\langle p_0p_1p_2\rangle + m_2\langle p_0p_1p_3\rangle + m_3\langle p_0p_2p_3\rangle + m_4\langle p_1p_2p_3\rangle\\
&\mid m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

となる．2 鎖

$$c = m_1\langle p_0p_1p_2\rangle + m_2\langle p_0p_1p_3\rangle + m_3\langle p_0p_2p_3\rangle + m_4\langle p_1p_2p_3\rangle \tag{4.30}$$

とは何か，あえてイメージしようとすると，「c は三角形 $p_0p_1p_2$ を m_1 個，三角形 $p_0p_1p_3$ を m_2 個 $\cdots$ を合わせたもの」とでもいったものだが，「合わせた」とはどういう意味なのかなどとあまり具体的に考えすぎない方がよい．式 (4.20) で「りんごが 3 個，バナナが 5 本，みかんが -2 個ある状況」を $c = 3 \times$ (りんご) $+ 5 \times$ (バナナ) $- 2 \times$ (みかん) と表現したのと同程度の意味で (4.30) でも倍演算と和演算を書いている．係数 m_i は負の整数値をとることも許されてい

ることに注意してほしい．なお，$K_n = \varnothing$ のときは $C_n(K) = \{0\}$ と定めておく．また，形式的に $C_{-1}(K) = \{0\}$ としておく．

さて，n 鎖加群から $(n-1)$ 鎖加群への写像

$$\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K) \tag{4.31}$$

を次のように定める．向きづけられた n 単体 $\sigma = \langle p_0 \cdots p_n \rangle$ の i 番目 $(i = 0, \cdots, n)$ の頂点 p_i を取り除いてできる $(n-1)$ 辺単体を

$$\langle p_0 \cdots p_{i-1}\, \widehat{p_i}\, p_{i+1} \cdots p_n \rangle := \langle p_0 \cdots p_{i-1}\ p_{i+1} \cdots p_n \rangle \tag{4.32}$$

と書くことにする．向きづけられた n 単体 $\sigma = \langle p_0 \cdots p_n \rangle$ の境界 $\partial_n \sigma$ を

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle p_0 \cdots p_{i-1}\, \widehat{p_i}\, p_{i+1} \cdots p_n \rangle \tag{4.33}$$

で定義する．この式の右辺はもはや $(n-1)$ 単体ではなく，$(n-1)$ 鎖であることに注意してほしい．一般の n 鎖 $c \in C_n(K)$ は，(4.29) で定めたように，向きのついた n 単体 σ_i の整数倍と和で $c = m_1\sigma_1 + \cdots + m_k\sigma_k$ と表されるので，n 鎖 c の境界を

$$\partial_n c := m_1 \partial_n \sigma_1 + \cdots + m_k \partial_n \sigma_k \tag{4.34}$$

で定義する．こうして定義される，n 鎖加群から $(n-1)$ 鎖加群への写像 $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ を**境界作用素** (boundary operator) という．

例．1 つの 1 単体からなる 1 鎖 $\sigma = \langle p_0 p_1 \rangle$ の境界は，定義どおり計算すると

$$\begin{aligned}\partial_1 \langle p_0 p_1 \rangle &= \langle \widehat{p_0} p_1 \rangle - \langle p_0 \widehat{p_1} \rangle \\ &= \langle p_1 \rangle - \langle p_0 \rangle\end{aligned}$$

である．これは (4.1) で見た線分の素朴な境界の概念と一致する．さらにいくつかの 1 単体を連ねた 1 鎖

$$c = \langle p_0 p_1 \rangle + \langle p_1 p_2 \rangle + \langle p_2 p_3 \rangle + \langle p_3 p_4 \rangle$$

の境界は

$$\begin{aligned}\partial_1 c &= -\langle p_0 \rangle + \langle p_1 \rangle - \langle p_1 \rangle + \langle p_2 \rangle - \langle p_2 \rangle + \langle p_3 \rangle - \langle p_3 \rangle + \langle p_4 \rangle \\ &= \langle p_4 \rangle - \langle p_0 \rangle\end{aligned}$$

となり，途中の結節点は打ち消し合って，始点と終点だけが境界点として残る．

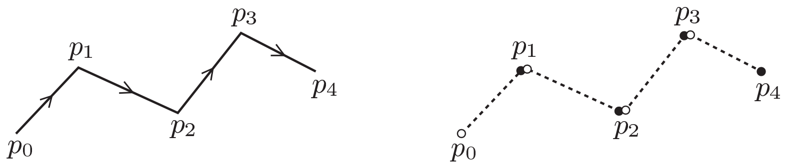


図 4.17　1 鎖 $c = \langle p_0 p_1 \rangle + \langle p_1 p_2 \rangle + \langle p_2 p_3 \rangle + \langle p_3 p_4 \rangle$ の境界．

同様に，2 鎖 $\sigma = \langle p_0p_1p_2\rangle$ の境界を定義どおり計算すると

$$\begin{aligned}\partial_2\langle p_0p_1p_2\rangle &= \langle \widehat{p_0}p_1p_2\rangle - \langle p_0\widehat{p_1}p_2\rangle + \langle p_0p_1\widehat{p_2}\rangle \\ &= \langle p_1p_2\rangle - \langle p_0p_2\rangle + \langle p_0p_1\rangle \\ &= \langle p_1p_2\rangle + \langle p_2p_0\rangle + \langle p_0p_1\rangle \end{aligned} \tag{4.35}$$

となり，三角形 $p_0p_1p_2$ の周辺というイメージと合致している．以前 (4.7) のところで素朴に定義しようとした「境界」の概念がここに来てようやく適切に定義されたことになる．境界を定式化するためには，単体の向きづけという概念と自由加群の概念が必要だったのである．

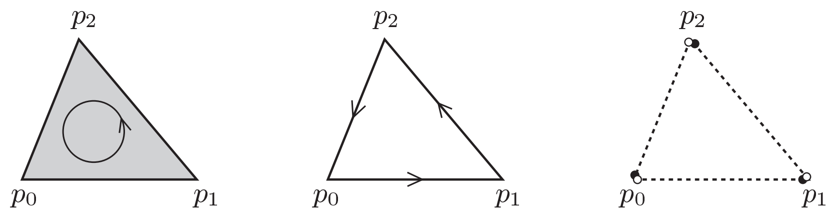


図 4.18　2 鎖 $\sigma = \langle p_0p_1p_2\rangle$ の境界とそのまた境界．

また，いまの例に対して，もう一度境界作用素を作用させると

$$\begin{aligned}\partial_1\partial_2\langle p_0p_1p_2\rangle &= \partial_1\langle p_1p_2\rangle + \partial_1\langle p_2p_0\rangle + \partial_1\langle p_0p_1\rangle \\ &= -\langle p_1\rangle + \langle p_2\rangle - \langle p_2\rangle + \langle p_0\rangle - \langle p_0\rangle + \langle p_1\rangle \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.36}$$

となる．つまり「境界の境界はゼロになる例」を体現している．

境界作用素の性質を 2 つ述べる．1 つ目の性質は，境界作用素の定義から明らかであるが，任意の n 鎖 $c, c' \in C_n(K)$ と，任意の整数 $m, m' \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial_n(mc + m'c') = m\,\partial_n c + m'\,\partial_n c' \tag{4.37}$$

が成り立つというものである．2 つ目の性質は，$\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ と $\partial_{n-1} : C_{n-1}(K) \to C_{n-2}(K)$ は通常の写像の意味で合成ができるが，そのとき

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \tag{4.38}$$

が成り立つというものである．つまり任意の n 鎖 $c \in C_n(K)$ について $\partial_{n-1}(\partial_n c) = 0$ となる．標語的に言うと「境界の境界はゼロ」になる．これは (4.36) が一般的に成り立つという主張であり，この章の冒頭で述べた「縁に縁なし」という観察を精密化したものである．

性質 (4.38) を証明しておこう．任意の n 単体 σ について $\partial_{n-1}(\partial_n\sigma) = 0$ となることが示されれば，任意の n 鎖 c は n 単体の線形結合で書かれるので，$\partial_{n-1}(\partial_n c) = 0$ が成立する．したがって n 単体 $\sigma = \langle p_0 \cdots p_n\rangle$ について

$\partial_{n-1}(\partial_n\sigma)=0$ となることを示せば十分である．それは直接計算を追えば確かめられる：

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\partial_n\langle p_0\cdots p_n\rangle &= \partial_{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\langle p_0\cdots\widehat{p_i}\cdots p_n\rangle\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\langle p_0\cdots\widehat{p_j}\cdots\widehat{p_i}\cdots p_n\rangle\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j-1}\langle p_0\cdots\widehat{p_i}\cdots\widehat{p_j}\cdots p_n\rangle\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j}\langle p_0\cdots\widehat{p_i}\cdots\widehat{p_j}\cdots p_n\rangle\\
&\quad-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j}\langle p_0\cdots\widehat{p_i}\cdots\widehat{p_j}\cdots p_n\rangle\\
&=0
\end{aligned}\tag{4.39}$$

で証明終了．鎖加群と境界作用素を定式化したので証明が計算問題になったのだ．

$\partial_n z=0$ となるような n 鎖 z を $\boldsymbol{n}$ **輪体** (n-cycle) という．n 輪体全体の集合を

$$Z_n(K):=\{\,z\in C_n(K)\,|\,\partial_n z=0\,\}\tag{4.40}$$

と書くと，これは $C_n(K)$ の部分加群をなしており[*8)]，n 輪体加群と呼ばれる．また，$d=\partial_n c$ となるような $(n+1)$ 鎖 c が存在するような n 鎖 d を $\boldsymbol{n}$ **境界** (n-boundary) という．n 境界全体の集合を

$$B_n(K):=\{\,d\in C_n(K)\,|\,d=\partial_{n+1}c,\ c\in C_{n+1}(K)\,\}\tag{4.41}$$

と書くと，これもまた $C_n(K)$ の部分加群をなしており，n 境界加群と呼ばれる．先に示した $\partial_n\partial_{n+1}c=0$ という性質のために，$d=\partial_{n+1}c$ について $\partial_n d=0$ が成り立ち，

$$B_n(K)\ \subset\ Z_n(K)\tag{4.42}$$

という包含関係が成り立つ．ここで問題となるのは，この包含関係が $B_n(K)=Z_n(K)$ となることはあるか，それとも $Z_n(K)$ は $B_n(K)$ よりも真に大きいかという問いである．つまり，$z\in Z_n(K)$ であって，$z\in B_n(K)$ ではない元 z があるか？ 言い換えると，任意の n 輪体 $z\in Z_n(K)$ は $\partial_n z=0$ を満たしているが，この z に対して $z=\partial_{n+1}c$ なる $(n+1)$ 鎖 $c\in C_{n+1}(K)$ がないという事態がある得るかという問いである．これがこの章の冒頭で述べた「縁なしの図形は，他の図形の縁になっているか？」という問いであり，その答えは基礎になっている空間（いまの場合は単体複体）の大域的なありさまを反映する．このことを明確に定式化するために，加群に関する準備を以下の節で整えよう．

*8) つまり，$z,z'\in Z_n(K)$ ならば $z+z',-z\in Z_n(K)$ である．証明は簡単．

4.8 加群の準同形写像

2 つの加群 M_1, M_2 の間の写像 $\phi : M_1 \to M_2$ が，任意の $x, y \in M_1$ に対して

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \tag{4.43}$$

を満たすとき，ϕ を加群 M_1 から M_2 への**準同形写像**という．左辺の $+$ は加群 M_1 における和であり，右辺の $+$ は加群 M_2 における和であることに注意してほしい．とくに

$$\phi(x) + \phi(0) = \phi(x+0) = \phi(x)$$

だから，

$$\phi(0) = 0 \tag{4.44}$$

である．つまり M_1 の零元は ϕ によって M_2 の零元に移される．また，

$$\phi(x) + \phi(-x) = \phi(x-x) = \phi(0) = 0$$

だから，

$$\phi(-x) = -\phi(x) \tag{4.45}$$

が成り立つ．とくに写像 ϕ が全単射でもあるとき，ϕ を**同形写像**という．このとき逆写像 ϕ^{-1} も $\phi^{-1}(u+v) = \phi^{-1}(u) + \phi^{-1}(v)$ を満たす．また，加群 M_1, M_2 の間に同形写像 $\phi : M_1 \to M_2$ が存在するとき，M_1 と M_2 は**同形**であるといい，$M_1 \cong M_2$ と書く．

例えば，加群 $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像

$$f(x) := 3x \qquad (x \in \mathbb{Z}) \tag{4.46}$$

は準同形写像である．また，加群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{(x_1, x_2) |\, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$ から $\mathbb{Z}$ への写像

$$g(x_1, x_2) := 8x_1 - 6x_2 \tag{4.47}$$

も準同形写像である．また，2 次元実数行列の集合

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

は行列の和に関して加群になる（行列の積も含めると環になる）が，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ から H への写像 h を

$$h(a + \sqrt{-1}\, b) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

で定めると，写像 $h : \mathbb{C} \to H$ は加群の同形写像になっている（じつは積に関しても $h(xy) = h(x)h(y)$ が成り立ち，h は環の同形写像にもなっている）．

準同形写像 $\phi : M_1 \to M_2$ に対して，

$$\operatorname{Ker}\phi := \phi^{-1}(0) = \{x \in M_1 \,|\, \phi(x) = 0\} \subset M_1 \tag{4.49}$$

を定義すると，これは M_1 の部分加群になっている．なぜなら，

$$\begin{aligned} x, y \in \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow \phi(x) = 0,\ \phi(y) = 0 \\ &\Rightarrow \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) = 0 + 0 = 0, \\ &\quad \text{および}\ \phi(-x) = -\phi(x) = -0 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y, -x \in \operatorname{Ker}\phi \end{aligned}$$

であるから．$\operatorname{Ker}\phi$ を準同形写像 ϕ の**核** (kernel) という．一方で，

$$\operatorname{Im}\phi := \phi(M_1) = \{\phi(x) \,|\, x \in M_1\} \subset M_2 \tag{4.50}$$

を定義すると，これは M_2 の部分加群になっている．なぜなら，

$$\begin{aligned} \phi(x), \phi(y) \in \operatorname{Im}\phi \Rightarrow \phi(x) + \phi(y) = \phi(x+y) \in \operatorname{Im}\phi, \\ \text{および}\ -\phi(x) = \phi(-x) \in \operatorname{Im}\phi \end{aligned}$$

であるから．$\operatorname{Im}\phi$ を準同形写像 ϕ の**像** (image) という．上に挙げた 3 つの準同形写像 f, g, h についてそれぞれ核と像がどんな集合か考えてみてほしい．

準同形写像 $\phi : M_1 \to M_2$ が単射であるための必要十分条件は

$$\operatorname{Ker}\phi = \{0\} \tag{4.51}$$

である．証明は，条件のたんなる言い換えである：

$$\begin{aligned} \phi\,\text{が単射} &\Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)\ \text{ならば}\ x = y \\ &\Leftrightarrow \phi(x) - \phi(y) = \phi(x-y) = 0\ \text{ならば}\ x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi(z) = 0\ \text{ならば}\ z = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\phi = \{0\}. \end{aligned}$$

一般に，加群 M の部分加群 N があれば，包含写像

$$i : N \hookrightarrow M \tag{4.52}$$

は，準同形写像であり，明らかに単射であり，

$$\operatorname{Ker} i = \{0\}, \qquad \operatorname{Im} i = N \tag{4.53}$$

が成り立つ．

4.9 商加群

加群 M の部分加群 N があったとき，2 元 $x, y \in M$ に対して

$$x - y \in N$$

のとき，

$$x \equiv y \pmod{N}$$

と書き,「x と y は N を法として合同」と言うことにする．そうするとこの関係 $\equiv$ は同値関係であることがわかる．なぜなら，部分加群 N には必ず 0 が含まれているので，任意の $x \in M$ に対して

$$x - x = 0 \in N$$

が成り立ち，したがって $x \equiv x \pmod{N}$（反射律）が成り立つ．また，$x \equiv y \pmod{N}$ のとき，$x - y \in N$ だから，N が部分加群ということから

$$y - x = -(x - y) \in N$$

も N の元であり，$y \equiv x \pmod{N}$（対称律）も成り立つ．さらに，$x \equiv y \pmod{N}$, $y \equiv z \pmod{N}$ のとき，$x - y$, $y - z \in N$ だから

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in N$$

となり，$x \equiv z \pmod{N}$（推移律）も成り立っている．以上で $\equiv \pmod{N}$ が同値関係であることが確認できた．

$a \in M$ を代表元とする，この同値関係に関する同値類を

$$[a] := \{x \in M \mid x \equiv a \pmod{N}\} = \{x \in M \mid x - a \in N\} \tag{4.54}$$

と書く．同値類 $[a]$ のことを，N を法とする a の**剰余類** (residue class) という．このような同値類全体の集合を

$$M/N := \{[a] \mid a \in M\} \tag{4.55}$$

と書く．剰余類 $[a]$ と $[b]$ の和を

$$[a] + [b] := [a + b] \tag{4.56}$$

で定めると，同値類の代表元の取り方によらず，well-defined である．つまり，$a' \in [a]$, $b' \in [b]$ を任意に選ぶと，$a' - a \in N$, $b' - b \in N$ であり，N は部分加群だから

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) \in N$$

であり，$(a' + b') \equiv (a + b) \pmod{N}$ と言える．すなわち $[a]$, $[b]$ の代表元の選び方を変えても $[a' + b'] = [a + b]$ となり，同値類としては同じものになっている．この和に関して $[0]$ は零元になっており，$[-a]$ は $[a]$ の逆元になっている．また，結合律，交換律が成り立つことも確かめられる．こうして集合 M/N は加群となる．M/N を N を法とする M の**商加群** (quotient module) と呼ぶ．

整数全体のなす加群 $M = \mathbb{Z}$ と，m の倍数全体なす部分加群 $N = m\mathbb{Z}$ について商加群 M/N がどのようなものになるか考えてみてほしい．この $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ のことを $\mathbb{Z}_m$ とも書き，m 次の**巡回群** (cyclic group) ともいう．試しに，$m = 3$

の場合は，剰余類に関して

$$[0]=[3]=[6]=[9]=[-3],$$
$$[1]=[4]=[7]=[10]=[-2],$$
$$[2]=[5]=[8]=[11]=[-1]$$

といった関係が成り立っており，

$$\mathbb{Z}_3=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\{\,[0],[1],[2]\,\}$$

で $\mathbb{Z}_3$ の元は尽くされる．和については

$$[2]+[2]=[4]=[1],$$
$$[15]+[23]=[38]=[0]+[2]=[2],$$
$$[1]+[1]+[1]=[3]=[0]$$

といった計算が成り立つ．要するに，$[a]$ とは 3 の倍数だけの差を無視した整数の集合であり，$[a]$ と書くときは a を 3 で割った余りにだけ注目しているのである．だからこそ同値類 $[a]$ を剰余類と呼ぶのである．また，[1] を 3 回足すと零になるし，4 回足せば [1] に戻る．

一般に，商加群 M/N が定義されているとき，写像

$$p: M \to M/N, \qquad a \mapsto [a] \tag{4.57}$$

は，M/N の定義 (4.55) より明らかに全射であり，M/N の和の定義のしかた (4.56) からいって明らかに準同形写像である．ここで

$$\mathrm{Ker}\, p = N, \qquad \mathrm{Im}\, p = M/N \tag{4.58}$$

が成り立つ．つまり，部分加群の包含写像 (4.52) と併せて

$$N \xrightarrow{\ i\ } M \xrightarrow{\ p\ } M/N \tag{4.59}$$

という写像の系列を作ると，合成写像について

$$p \circ i(x) = 0 \qquad (x \in N) \tag{4.60}$$

が成り立ち，したがって $\mathrm{Im}\, i \subset \mathrm{Ker}\, p$ だが，じつは

$$\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, p \tag{4.61}$$

が成り立っている．一般に加群の準同形写像の系列

$$M_1 \xrightarrow{\ \phi_1\ } M_2 \xrightarrow{\ \phi_2\ } M_3 \tag{4.62}$$

で ϕ_1 が単射，ϕ_2 が全射で，$\mathrm{Im}\, \phi_1 = \mathrm{Ker}\, \phi_2$ となっているとき，(4.62) を**短完全系列** (short exact sequence) という．また，写像の系列 $N \xrightarrow{\ i\ } M \xrightarrow{\ p\ } M/N$ は図 4.19 のように描写される．単射 $i: N \hookrightarrow M$ によって N は M の中にすっぽりと収まり，全射 $p: M \twoheadrightarrow M/N$ によって N は完全に 0 につぶされるということをこの図は表現している．

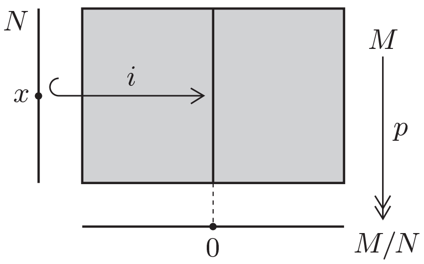


図 4.19　N は M の部分加群．M/N は商加群．

また，$N \subset M$ に対して

$$N = M \iff M/N = \{0\} \tag{4.63}$$

という必要十分な関係があることもわかる．

4.10　準同形定理

準同形定理はホモロジー群の定義にはさしあたって必要ないが，後の圏論の議論でたびたび利用するし，群には群の準同形定理があり，環には環の準同形定理があり，といった具合に代数の理論には必ず現れる定理である．その中でも加群の準同形定理は一番簡単で，これまでに定義を与えた準同形写像と商加群を使って容易に証明できる定理なので，ここに説明しておこう．

加群の準同形写像 $\phi : M_1 \to M_2$ が与えられたとき，部分加群 $\mathrm{Ker}\,\phi \subset M_1$, $\mathrm{Im}\,\phi \subset M_2$ があるが，このとき

$$M_1/\mathrm{Ker}\,\phi \;\cong\; \mathrm{Im}\,\phi \tag{4.64}$$

という同形関係が成り立つ．このことを（加群の）**準同形定理** (homomorphism theorem) という．

証明：まず，写像 $\phi : M_1 \to M_2$ を，写像の行き先を $\mathrm{Im}\,\phi\ (\subset M_2)$ に制限して $\tilde{\phi} : M_1 \to \mathrm{Im}\,\phi$ と見なせば，$\mathrm{Im}\,\phi$ の定義からいって，$\tilde{\phi}$ が全射になるのは明らかである．また，$x, y \in M_1$ に対して

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \phi(x) = \phi(y)$$

という関係を定めることにする．つまり写像 ϕ で x と y が同じ元に移るならば，$x \sim y$ と書くことにする．この関係 $\sim$ が同値関係になるのは明らかである．また，$\sim$ の定義は

$$\begin{aligned} x \sim y \;&\Leftrightarrow\; \phi(x-y) = \phi(x) - \phi(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; (x-y) \in \mathrm{Ker}\,\phi \\ &\Leftrightarrow\; x \equiv y \pmod{\mathrm{Ker}\,\phi} \end{aligned}$$

と書き換えられるから，商集合 $M_1/\sim$ は商加群 $M_1/\mathrm{Ker}\,\phi$ に他ならない．関

係 $\sim$ に関する同値類 $[x]$ を写像 $\tilde{\phi}$ で移すことを

$$\Phi : (M_1/\sim) \to \mathrm{Im}\,\phi, \qquad [x] \mapsto \Phi([x]) := \phi(x)$$

と書けば，Φ は全単射となる．もともと ϕ が加群の準同形写像だったのだから，Φ も準同形写像である．以上で，Φ は

$$\Phi : M_1/\mathrm{Ker}\,\phi \to \mathrm{Im}\,\phi$$

という同形写像であることがわかった．証明終了．

ついでに，準同形写像 $\phi : M_1 \to M_2$ と元 $k_0 \in M_2$ が与えられたとき，方程式 $\phi(x) = k_0$ と解けという問題を考えよう．つまり集合

$$\phi^{-1}(k_0) = \{x \in M_1 \mid \phi(x) = k_0\}$$

を外延的に表示せよという問題である．もし $\phi(x_0) = k_0$ となるような解（特解）x_0 が 1 つ見つかれば，一般解は

$$\phi^{-1}(k_0) = [x_0] = \{x_0 + m \mid m \in \mathrm{Ker}\,\phi\}$$

で与えられる．解の存在条件，つまり $\phi^{-1}(k_0)$ が空集合ではないための必要十分条件は $k_0 \in \mathrm{Im}\,\phi$ である．解の一意性条件，つまり $\phi^{-1}(k_0)$ が 2 つ以上の元を含まないための必要十分条件は $\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$ である．また，

$$\mathrm{Ker}\,\phi \xrightarrow{\ i\ } M_1 \xrightarrow{\ \tilde{\phi}\ } \mathrm{Im}\,\phi \tag{4.65}$$

は短完全系列になっている．写像 $\phi : M_1 \to M_2$ に対して，短完全系列 (4.65) を作ることが，方程式 $\phi(x) = k_0$ を解くことだと言ってよい．

4.11 ホモロジー群

加群の言葉がだいたいそろったところで，単体複体の話に戻ろう．単体複体 K から作られた境界作用素は，鎖加群の準同形写像の系列

$$\cdots \to C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \to \cdots \tag{4.66}$$

を定め，

$$\partial_n \circ \partial_{n+1}(c) = 0 \qquad (c \in C_{n+1}(K)) \tag{4.67}$$

を満たしているので，自動的に

$$\mathrm{Im}\,\partial_{n+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_n \tag{4.68}$$

を満たす．これは (4.42) に述べた $B_n(K) \subset Z_n(K)$ という包含関係をもう一度書いただけのことだ．そして，$B_n(K) = Z_n(K)$ となっているか，それとも $Z_n(K)$ は $B_n(K)$ よりも真に大きいかという判定は，商加群

$$H_n(K) := Z_n(K)/B_n(K) \tag{4.69}$$

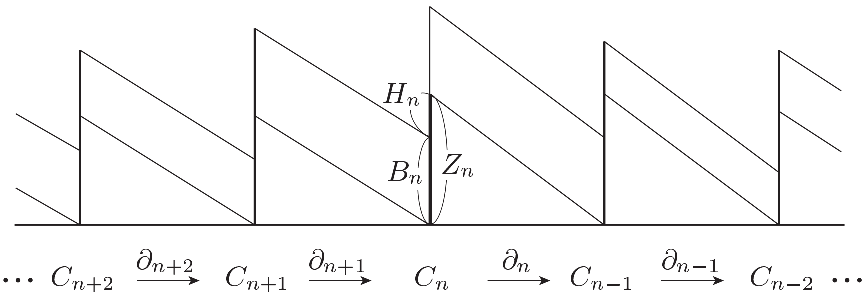


図 4.20　鎖複体．$Z_n = \mathrm{Ker}\,\partial_n$, $B_n = \mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$, $H_n = Z_n/B_n$.

が $\{0\}$ か $\{0\}$ でないかという判定に言い換えられる．こうして定められた加群 $H_n(K)$ を単体複体 K の n 次元**ホモロジー群** (homology group) という．条件式 (4.67) を満たす加群の準同形写像の系列 (4.66) を**鎖複体** (chain complex) という．境界作用素 ∂_{n+1} の像は，次の境界作用素 ∂_n の核に入っており，この像 $\mathrm{Im}\,\partial_{n+1} = B_n(K)$ よりも核 $\mathrm{Ker}\,\partial_n = Z_n(K)$ の方がどれだけ大きいかという差（余り）が，ホモロジー群 $H_n(K)$ に他ならない．すべての n について $H_n(K) = \{0\}$ であるとき，鎖複体 (4.66) は**完全系列** (exact sequence) であるという．

いま一度，(4.69) の定義を言い換えておこう，n 輪体 $z \in Z_n(K)$ とは $\partial_n z = 0$ を満たす n 鎖であり，n 境界 $d \in B_n(K)$ とは $d = \partial_{n+1} c$ となる $c \in C_{n+1}(K)$ の存在するような n 鎖であった．2 つの n 輪体 z, z' に対して

$$z' - z = \partial_{n+1} c \tag{4.70}$$

となる $c \in C_{n+1}(K)$ が存在するとき，z と z' は**ホモローグ** (homologous) であるといい，$z \sim z'$ と書くことにする．ホモローグは同値関係になる．

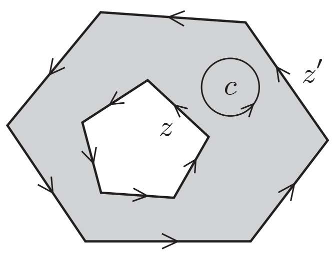


図 4.21　$z' - z = \partial c$ となる鎖 c が存在するとき，z と z' は互いにホモローグ．

$z \sim z'$ かつ $w \sim w'$ ならば $z + w \sim z' + w'$ であることがわかる．したがって，同値類 $[z]$ と同値類 $[w]$ の和 $[z + w]$ が代表元の取り方によらずに定義される．このようにして定義された加群を n 次元ホモロジー群 $H_n(K)$ と呼ぶのである．

4.12 ホモロジー群の例

ホモロジー群 $H_n(K)$ は，任意の次元の単体複体 K と，任意の次数 n に対して形式的に定義された．ここではいくつかの簡単な位相空間についてホモロジー群を具体的に調べてみよう．位相空間 X は，適切な単体複体 K に三角形分割して扱う．

4.12.1 トーラス

トーラス T^2 を三角形分割するやり方はいろいろある．図 4.6 にもトーラスの三角形分割の例を示したが，トーラスの展開図 2.6 を下図のように分割しよう．展開図では同じ記号を持つ点が複数回現れるが，これらは同一の点を表しているものと了解する．

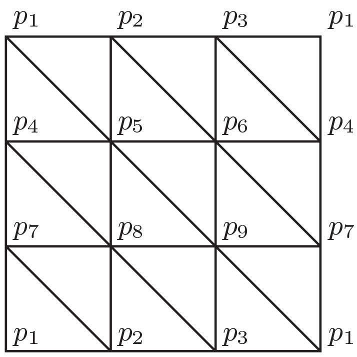


図 4.22 トーラスを三角形分割する単体複体 K.

この単体複体 K は 9 個の 0 単体，27 個の 1 単体，18 個の 2 単体からなる．単体複体 K を具体的に示すことは，ここにある単体を

$$\begin{aligned}K = \{\, & \langle p_1\rangle,\ \langle p_2\rangle, \cdots, \langle p_9\rangle,\\ & \langle p_1p_2\rangle,\ \langle p_1p_3\rangle,\ \langle p_1p_4\rangle,\ \langle p_1p_5\rangle,\ \langle p_1p_7\rangle,\ \cdots, \langle p_8p_9\rangle,\\ & \langle p_2p_1p_5\rangle,\ \langle p_3p_2p_6\rangle,\ \langle p_1p_3p_4\rangle, \cdots, \langle p_9p_3p_1\rangle\,\}\end{aligned}$$

といった調子ですべて書き下すことであり，決して簡便とは言えない表式になってしまう．それでも有限個の単体を書き並べれば済むので，無限個の滑らかな図形を扱うよりは実用的だと言える．これが滑らかなトーラスを三角形分割した理由である．

例として，0 次元ホモロジー群 $H_0(K)$ を計算する手順を示そう．まず，0 鎖加群 $C_0(K)$ を外延的に

$$C_0(K) = \{\, m_1\langle p_1\rangle + m_2\langle p_2\rangle + \cdots + m_9\langle p_9\rangle \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$$

と書き下す．そもそも 0 単体に対しては $\partial_0\langle p_i\rangle = 0$ なので，0 輪体加群 $Z_0(K)$ は $C_0(K)$ そのものになる：

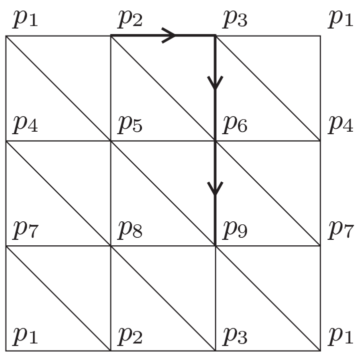


図 4.23　2 点 p_2, p_9 を結ぶ 1 鎖 c.

$$Z_0(K) = \operatorname{Ker} \partial_0 = C_0(K).$$

また，任意の 2 点 p_i, p_j に対してそれらを結ぶ 1 鎖 c が存在する．例えば p_2, p_9 に対して

$$c = \langle p_2 p_3 \rangle + \langle p_3 p_6 \rangle + \langle p_6 p_9 \rangle$$

をとれば,

$$\partial_1 c = -\langle p_2 \rangle + \langle p_3 \rangle - \langle p_3 \rangle + \langle p_6 \rangle - \langle p_6 \rangle + \langle p_9 \rangle = \langle p_9 \rangle - \langle p_2 \rangle$$

となる．こんなふうに，任意の 2 点 p_i, p_j に対してそれらを端点とする，つまり $\partial_1 c_{ij} = p_j - p_i$ となる 1 鎖 c_{ij} が存在する．したがって，(4.70) のところで定めたホモローグという関係を使えば，トーラスの単体複体上では，任意の 2 点 p_i, p_j は互いにホモローグ $p_i \sim p_j$ だと言える．ゆえにホモローグ同値類としては $[p_i] = [p_j]$ であり，同値類をただ 1 つの点 p_1 で代表してもかまわないことがわかる．すなわちホモローグ同値類を

$$\Big[m_1 \langle p_1 \rangle + m_2 \langle p_2 \rangle + \cdots + m_9 \langle p_9 \rangle \Big] \ = \ (m_1 + m_2 + \cdots + m_9) \big[p_1\big]$$

と書いてよい．以上より，トーラスを三角形分割した単体複体 K の 0 次元ホモロジー群は

$$H_0(T^2) = \{\, m[p_1] \,|\, m \in \mathbb{Z} \} \ \cong \ \mathbb{Z} \tag{4.71}$$

であることがわかる．以上の議論を直観的に表現すると，次のようになる．トーラス上の各点 p_i に符号つきの整数 m_i（電荷と呼んでもよい）を割り振ったとする．プラス 1 の点（粒子と呼んでもよい）とマイナス 1 の点（反粒子と呼んでもよい）をトーラス上の線で結ぶことができたとき，この粒子と反粒子の対は打ち消し合うとする．これらの対消滅の結果，トーラス上の粒子と反粒子は，ただ一箇所に合計電荷を置くことによって代表される．この合計電荷 $\displaystyle\sum_i m_i = m$ がホモローグ同値類に他ならない．

$H_0(K)$ を求めたら，次は $H_1(K)$ をと言いたいところだが，$H_1(K)$ を求める手順はかなり込み入っており丁寧な議論が必要なので，楽に求められる $H_2(K)$ を議論しよう．まず K は 3 次元以上の単体を持っていないので，$C_3(K) = \{0\}$ である．

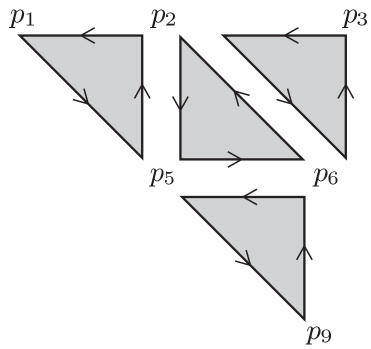


図 4.24　隣り合った 2 単体の向きづけ.

したがって，$B_2(K) = \partial_3 C_3(K) = \{0\}$ であり，2 輪体 z, z' がホモローグとなるのは $z' - z = 0$ のときのみである．ゆえに，$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = Z_2(K)$ となる．したがって，2 次元ホモロジー群を求めるためには 2 輪体加群を求めればよい．そこで 2 鎖

$$z = m_1\langle p_2p_1p_5\rangle + m_2\langle p_6p_5p_9\rangle + m_3\langle p_3p_2p_6\rangle + m_4\langle p_2p_5p_6\rangle \\ + \cdots + m_{18}\langle p_9p_3p_1\rangle$$

で $\partial_2 z = 0$ となるものを考える．トーラス上では隣り合った 2 単体の境界が打ち消し合うように各 2 単体に向きをつけることができる．例えば 2 単体 $\langle p_2p_5p_6\rangle$ に注目すると，その周囲の 2 単体には図 4.24 のように向きをつけられる．そうすると，

$$\partial_2 z = (m_4 - m_1)\langle p_2p_5\rangle + (m_4 - m_2)\langle p_5p_6\rangle + (m_4 - m_3)\langle p_6p_2\rangle + \cdots$$

といった調子になるので，$\partial_2 z = 0$ となる必要十分条件は，

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \cdots = m_{18}$$

である．したがって，

$$\tau := \langle p_2p_1p_5\rangle + \langle p_3p_2p_6\rangle + \langle p_1p_3p_4\rangle + \cdots + \langle p_9p_3p_1\rangle$$

とおけば，$\partial_2 z = 0$ なる z は $z = m\tau$ $(m \in \mathbb{Z})$ に限られることがわかる．結局，トーラスの単体複体の 2 次元ホモロジー群は

$$H_2(T^2) = \{\, m[\tau] \mid m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \tag{4.72}$$

である．この結果を翻訳すると，トーラス上で「境界のない 2 次元的図形」は，トーラスそのものか，トーラスを整数倍したものしかない，ということになる．2 鎖 τ はトーラスを一重に覆っていることに注意してほしい．トーラスの 2 次元ホモローグ同値類 $m[\tau]$ はトーラスを m 重に覆う面と解釈できる．

　さて，1 次元ホモロジー群 $H_1(K)$ はというと，結果は簡単なのだが，それを求める手順はかなり面倒になるので，申し訳ないが途中の議論は省いて結果だけを示す．

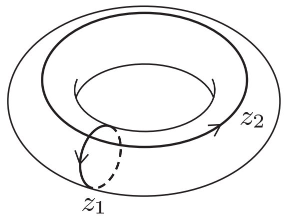


図 4.25　トーラス上の 1 次元ホモロジー群の生成子.

$$z_1 = \langle p_1 p_2 \rangle + \langle p_2 p_3 \rangle + \langle p_3 p_1 \rangle,$$
$$z_2 = \langle p_1 p_4 \rangle + \langle p_4 p_7 \rangle + \langle p_7 p_1 \rangle$$

とおけば，例えば z_1 については

$$\begin{aligned}\partial_1 z_1 &= \partial_1(\langle p_1 p_2 \rangle + \langle p_2 p_3 \rangle + \langle p_3 p_1 \rangle) = -p_1 + p_2 - p_2 + p_3 - p_3 + p_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

となっていて，z_1, z_2 はともに 1 輪体であることがわかる．図 4.25 を見れば，z_1, z_2 はトーラスに 1 回ずつ巻きついた輪である．トーラスの単体複体の 1 次元ホモロジー群は，この z_1 と z_2 のホモローグ同値類で生成される自由加群

$$H_1(T^2) = \{m_1[z_1] + m_2[z_2] \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{4.73}$$

である．難しいのは $z_i = \partial_2 c_i$ となるような 2 鎖 c_i が存在しないことの証明と，任意の 1 輪体 z に対して $z \sim m_1 z_1 + m_2 z_2$ となるような整数 m_1, m_2 が一意的に存在することの証明だ．ここではその証明はしないで，図を見て直観に頼って結果だけを述べるというズルをしてしまった．

4.12.2　種数 2 のトーラス

種数 2 のトーラス Σ_2 は図 4.26 のような三角形分割で扱うことにする．単体複体の条件を満たすためには，かなりたくさんの三角形に刻んでやらないといけないことに注意してほしい（この図のトーラスは刻みすぎだが）．

まず 0 次元ホモロジー群からとりかかる．やはり 0 単体に対しては $\partial_0 \langle p_i \rangle = 0$

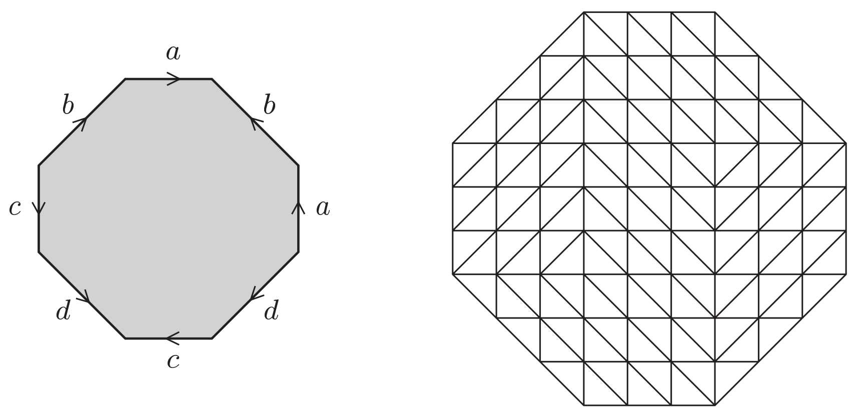


図 4.26　種数 2 のトーラスの三角形分割.

なので，任意の 0 鎖は 0 輪体になっている，つまり $Z_0(K) = \mathrm{Ker}\,\partial_0 = C_0(K)$ である．任意の 2 点 p_i，p_j を始点，終点とする 1 鎖 c_{ij} が存在するから，$p_j - p_i = \partial c_{ij}$ であり，p_i と p_j はホモローグである，つまり $[p_i] = [p_j]$ である．したがって 0 単体のホモローグ同値類は一点 $[p_1]$ で代表されて，0 次元ホモロジー群は，トーラスの場合と同様に

$$H_0(\Sigma_2) = \{\, m[p_1] \,|\, m \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z} \tag{4.74}$$

である．

以上の議論のしかたから，一般に，単体複体がひとつながりの図形ならば，つまり任意の 2 点 p_i, p_j に対してこれらを端点とする 1 鎖 c_{ij} が存在するならば（このことを単体複体が弧状連結であるという），$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ となることがわかる．さらに，もし単体複体 K が k 個の連結成分からなるならば，

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}^k \tag{4.75}$$

となることがわかる．つまり 0 次元ホモロジー群は，最も基本的な位相不変量である，連結成分の個数を表しているのである．

次に 2 次元ホモロジー群を求めよう．種数 2 のトーラス Σ_2 の単体複体は 3 次元以上の単体を持たないので $C_3(K) = \{0\}$ であり，したがって $B_2(K) = \partial_3 C_3 = \{0\}$ である．種数 2 のトーラスでは隣り合った 2 単体の境界が打ち消し合うようにすべての 2 単体に向きをつけることができるから，このように向きづけられた Σ_2 を一重に覆う 2 鎖 τ は $\partial\tau = 0$ を満たす．逆に，$\partial z = 0$ を満たす 2 輪体 z は τ の整数倍しかないことがわかるから，$Z_2(K) = \{\, m\tau \,|\, m \in \mathbb{Z} \}$ と書かれ，2 次元ホモロジー群は

$$H_2(\Sigma_2) = Z_2(K)/B_2(K) = \{\, m[\tau] \,|\, m \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z} \tag{4.76}$$

であることがわかる．

一般に，n 次元単体複体 K のある連結成分において隣り合った n 単体の境界が打ち消し合うように各単体に向きがつけられるなら，この連結成分は**向きづけ可能** (orientable) であるという．つまり向きづけ可能な連結成分はそれ自身が 1 つの n 輪体である．K が p 個の向きづけ可能な連結成分を持つならば

$$H_n(K) \cong \mathbb{Z}^p \tag{4.77}$$

であることがわかる．「向きづけ可能」という概念は，2.1 節で素朴に「裏表の区別がつく」と言っていた概念を内在的な言葉で正確に規定したものである．

1 次元ホモロジー群を定義どおりに計算で求めることも原理的には可能だが，図 4.26 のような複雑な単体複体をもとに計算するのはたいへんである．しかし，結果は直観的にわかりやすいので，結果だけを示しておく．トーラス Σ_2 には図 4.27 の z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ のような 4 つの独立な 1 輪体がある．1 次元ホモロジー群はこれらのホモローグ同値類で生成される自由加群である：

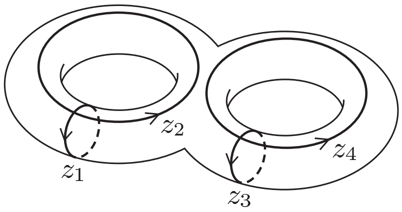


図 4.27　種数 2 のトーラスの 1 次元ホモロジー群の生成子．

$$
\begin{aligned}
H_1(\Sigma_2) &= \{m_1[z_1] + m_2[z_2] + m_3[z_3] + m_4[z_4] \mid m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}\} \\
&\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^4. \qquad (4.78)
\end{aligned}
$$

4.12.3　クラインの壺

クラインの壺 Kb も図 2.7 のところで見たように，正方形の辺を同一視して貼り合わせて作られる．この図形を三角形分割してホモロジーを計算しましょう，と言いたいところだが，ちょっと問題がある．クラインの壺は，3 次元ユークリッド空間の中で作ろうとすると必ず自己交差の傷ができてしまうのである．図 4.28 の右図はクラインの壺の展開図を安易に三角形分割したものだが，この展開図を 3 次元空間中で組み立てると，単体と単体が交差してしまい，単体複体としての条件を満たさなくなってしまう．この自己交差の傷は無理に 3 次元空間にクラインの壺を置こうとするからできてしまうものであり，クラインの壺本来の性質ではない．実際，4 次元ユークリッド空間にクラインの壺を置けば，自己交差の傷はできないことがわかっている．そこでクラインの壺を三角形分割するときは，それがどんな空間の中で組み立てられるかということは気にせず，点を結んだ抽象的なグラフを単体複体と見なすことにする．クラインの壺を三角形分割した単体複体 K として図 4.28 を採用することにする．

クラインの壺は連結成分がただ 1 つだから，0 次元ホモロジー群は

$$
H_0(\mathrm{Kb}) = \{\, m[p_1] \mid m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \qquad (4.79)
$$

である．

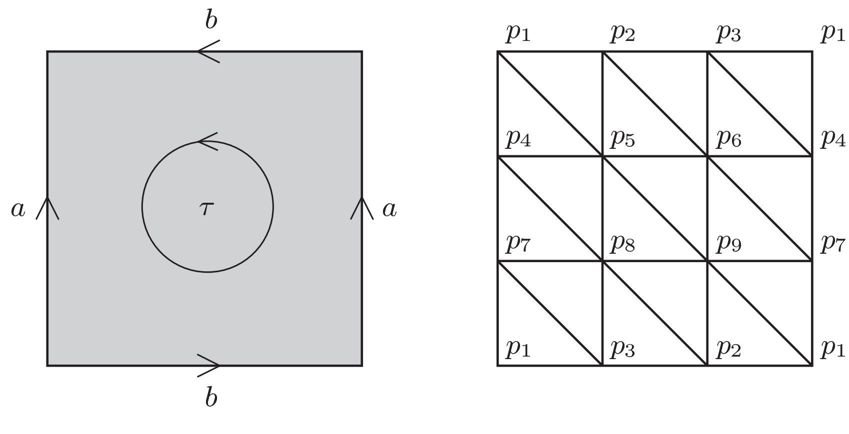


図 4.28　クラインの壺の三角形分割．

クラインの壺の隣り合った2単体の辺の向きがすべて打ち消し合うように，各2単体に向きをつけることはできるだろうか？ やってみるとそれは不可能であることがわかる．

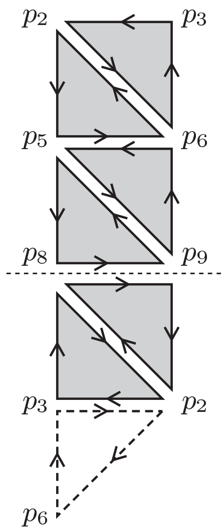


図 4.29　クラインの壺は向きづけ不可能．この場合，辺 $\langle p_8 p_9 \rangle$ のところで境界の向きが打ち消し合わず，辺 $\langle p_8 p_9 \rangle$ が2重に残る．

向きづけ不可能という事実を認めると，クラインの壺には2輪体はないことがわかる．つまり2単体にどう向きをつけて2鎖を作っても，その境界が打ち消し合わずに残ってしまうのだから，$\partial z = 0$ となるような2鎖 z はない．したがってクラインの壺の2次元ホモロジー群は自明である：

$$H_2(\mathrm{Kb}) = \{0\}. \tag{4.80}$$

クラインの壺の1次元ホモロジー群を示そう．またしても結果だけを示すが，クラインの壺の上の独立な1輪体は図 4.30 の a と b である．a, b のどちらも輪体になっていることはすぐわかると思う．クライン壺を覆っている各2単体に図 4.28 の左図の真ん中の輪の矢印に合わせて向きをつけて和をとった2鎖を τ とする．そうすると，τ の境界は打ち消し合わずに残り，

$$\partial\tau = a + b - a + b = 2b$$

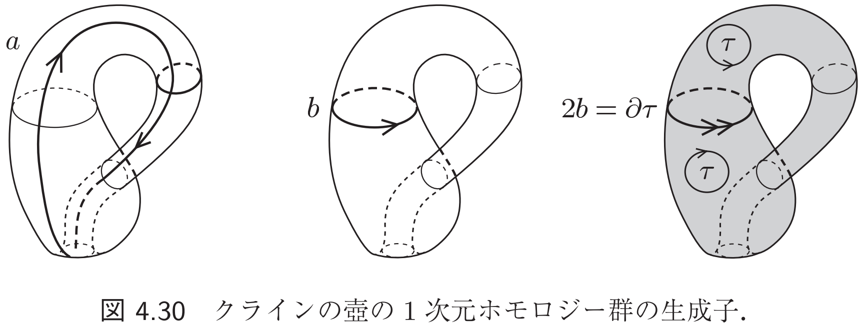


図 4.30　クラインの壺の1次元ホモロジー群の生成子．

となる．したがって $2b - 0 = \partial\tau$ であり，$2b \sim 0$ である．つまり $[b] \neq [0]$ ではあるが，

$$[b] + [b] = 2[b] = [0]$$

となってしまうのである．したがってクラインの壺の 1 次元ホモロジー群は，a と b で生成されるが，自由加群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ にはならず，

$$H_1(\mathrm{Kb}) = \{m_1[a] + m_2[b] \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \tag{4.81}$$

となる．b は「縁なしであり，何かの縁になっていない図形」だが，2 回巻きつくと「何かの縁になってしまう」のである．他方，a は「何回巻きついても縁にならない」図形である．

4.12.4　射影平面

射影平面 $\mathbb{R}P^2$ も展開図の辺の同一視で構成される位相空間であった．これもまた 3 次元空間中で工作する都合上，見かけの自己交差の傷ができてしまうのだが，そんなことは気にせず，抽象的な単体複体をもってして三角形分割ができたと見なそう．

射影平面も連結成分がただ 1 つだから，0 次元ホモロジー群はやはり一点で生成されて

$$H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z} \tag{4.82}$$

である．

クラインの壺の場合と同様に，射影平面上の隣り合った 2 単体の辺が反対向きになるようにすべての 2 単体に向きをつけることは不可能である．したがって，射影平面には 0 以外の 2 輪体はない．ゆえに 2 次元ホモロジー群は

$$H_2(\mathbb{R}P^2) = \{0\}. \tag{4.83}$$

射影平面上の独立な 1 輪体は，図 4.31 の道 a と道 b を連結した $a + b = \gamma$ のみである．1 鎖としての γ は

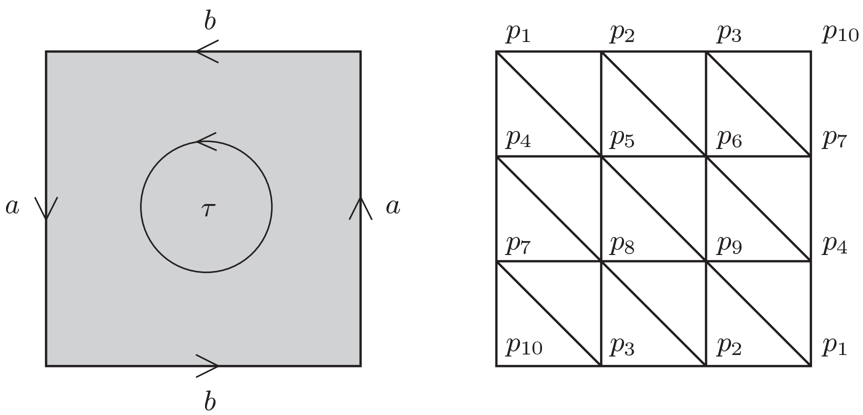


図 4.31　射影平面の三角形分割．点 p_{10} の存在に注意．

$$\gamma = \langle p_1 p_4 \rangle + \langle p_4 p_7 \rangle + \langle p_7 p_{10} \rangle + \langle p_{10} p_3 \rangle + \langle p_3 p_2 \rangle + \langle p_2 p_1 \rangle$$

と書かれる．図 4.31 のように向きづけられた 2 鎖 τ の境界は

$$\partial\tau = a + b + a + b = 2\gamma$$

となる．つまり，$[\gamma] \neq [0]$ であるが，

$$[\gamma] + [\gamma] = 2[\gamma] = [0]$$

となってしまう．したがって射影平面の 1 次元ホモロジー群は 2 次の巡回群である：

$$H_1(\mathbb{R}P^2) = \{m[\gamma] \mid m \in \mathbb{Z}\} \;\cong\; \mathbb{Z}_2. \tag{4.84}$$

4.13 位相不変量としてのホモロジー群：測定とは何か

ここまでの議論を始めのところから振り返って整理してみよう．集合とは，さしあたって何の構造も持たない，たんなる「元の集まり」として定義された．元の集め方には，元を並べ尽くす外延的な列挙と，条件によって元を取捨選択する内包的規定という 2 通りのアプローチがあることを見た．このときすでに双対性が集合に組み込まれており，双対性は後々まで陰に陽に働くこととなる．

そして，集合が 2 つあれば，それらの間でどんな写像でも考えることができた．集合を没個性的な元の集まりと見なす立場からは，全単射で余すことなく元を対応づけることができるような 2 つの集合は互いに同等と見なしてしまってよい．したがって，集合の個性は，元の個数，すなわち濃度という尺度だけで測られた．それでも濃度には $0, 1, 2, 3, \cdots$ という有限数の序列を超えて，無限という広がりがあった．無限濃度にも，比較的小さな無限（自然数全体集合の濃度）とより大きな無限（実数全体集合の濃度，あるいはもっと大きな濃度）という階層があることを知った．

集合論の段階では，元と元の間の関係は断ち切られていた，あるいは忘れられていたが，その関係性の回復として，位相がもたらされた．位相は，開集合族という網目を集合の中に張り巡らし，元と元の間に遠近感をもたらした．こうして集合は位相空間となった．そうすると，写像も何でもありというわけにはいかなくなり，互いに近くにある点を互いに近くに写すような写像が自然だと思われた．それが連続写像という概念であった．対等な集合でも位相の入れ方は何通りもあるので，この位相空間とあの位相空間は実質的に同じものなのか，それとも別ものなのか，という問いが自然と湧き上がってきた．位相空間の同異の判定基準として，連続な全単射で互いに移り合えるような位相空間は同相と言うことにした．

ところが，2 つの位相空間が同相か同相でないか見きわめることは難しい．問題を字句どおりに受け止めるなら，ありとあらゆる連続写像を考えて全単射に

なるようなものを探せというのだから，「位相空間 X と Y は同相ではない」という判決を下すのは現実的には達成不可能な作業である．そこで，同相写像では変わらないような量を 2 つの位相空間に対して測って，もしその測定値が異なっていたらその 2 つの位相空間は同相ではないと判定してよい，ということを思いついた．それが位相不変量という「測定装置」である．位相不変量の例として，連結成分の個数・次元・ホモトピー群などを順に見てきた．この章ではホモロジー群という測定装置を導入したのだが，これが位相不変量だということはまだ確認していなかった．このことを少し議論しよう．

式 (4.11) のところで導入したように，位相空間 X に対して，単体複体 K と同相写像

$$f : |K| \to X$$

があれば，(K, f) を X の三角形分割と呼び，この単体複体 K を用いてホモロジー群を定義したのであった．図 4.32 のような状況を思い浮かべてみてもすぐにわかることだが，1 つの位相空間に対して三角形分割のしかたは無数にあるので，ホモロジー群というのは位相空間そのものの性質を見ているのか，それとも三角形分割のしかたに依存するのか気になるところである．つまり，1 つの位相空間 X に対して 2 通りの単体複体 K, K' による三角形分割を採用したときに定義されるホモロジー群 $H_n(K)$ と $H_n(K')$ は同じものになるか？という疑問が当然湧いていくる．

この疑問は肯定的に解決している．すなわち，位相空間 X と X' が同相ならば，それぞれの三角形分割 $f : |K| \to X$, $f' : |K'| \to X'$ によって定められたホモロジー群 $H_n(K)$ と $H_n(K')$ は群として同形である，ということが証明されている．したがって，同一の位相空間 X に対する 2 通りの三角形分割 (K, f), (K', f') によって定められたホモロジー群もまた同形である．つまりホモロジー群は三角形分割のしかたによらない位相不変量である．だからホモロジー群を表記する際に，$H_n(K)$ のように単体複体 K という断り書きをつけるのはやめて，たんに $H_n(X)$ と書いてしまってもかまわない．もちろん鎖加群 $C_n(K)$ や

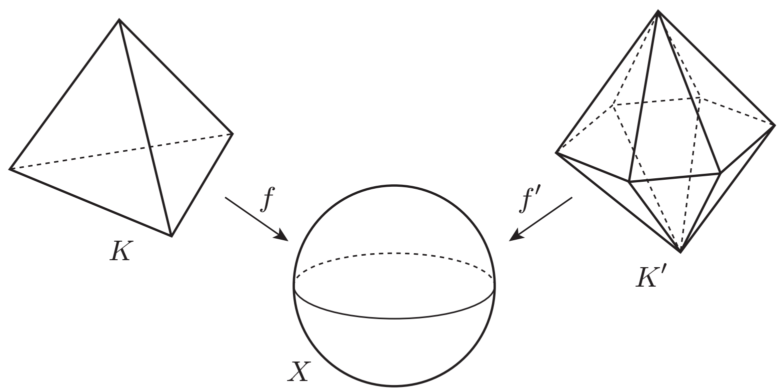


図 4.32　三角形分割のしかたは無数にある．

輪体加群 $Z_n(K)$，境界加群 $B_n(K)$ は具体的な単体複体 K のとり方に依存する．しかし商加群を作ると，単体複体の選び方には無関係になるのである：

$$Z_n(K)/B_n(K) \ \cong \ Z_n(K')/B_n(K').$$

三角形分割という，ある種，人為的で余分な構造を位相空間に押しつけてしまったが，ホモローグという粗っぽい同値関係を導入して微妙な差異に目をつぶることによって，ホモロジー群という本質的な差異だけを抽出することに成功したと言ってよい．

このような数学的操作でやっていることを言葉で表現すると次のように言えるだろう．位相空間とは同相写像による変換を受け入れるような，非常に対称性の高い図形であり，そのままではなかなか正体をつかみにくい対象である．それをやや人為的に三角形分割して単体複体で近似すると，位相空間の対称性をいったん壊してしまうが，位相空間の骨組みが捉えられ，加法や境界演算といった算法を適用できる鎖複体というデータ集が得られる．鎖複体は，そのままでは人為的な余剰のデータを含んでいるが，ホモローグというある種のフィルターを通してデータを粗視化処理することによって，もとの位相空間に固有の性質を抽出することができた．ホモロジーとはそのようなものである．ある対象を知るために，いったん相手に余分なものをつけ加えて操作をして，その多様なレスポンスの中から相手に関する意味のあるデータを引き出す，という姿勢は，我々がものを知ろうとするときの基本姿勢であり,「観測」の基本的な方法論ではないだろうか．

4.14　ベッチ数とオイラー数

位相空間の連結成分の個数や次元は，位相不変量であり，整数値をとる．ホモロジー群も位相不変量であると言うが，ホモロジー群は整数や実数などの 1 つの数値ではなく，1 つの体系（加群）であり，1 つのデータと言うよりはデータ集と言う方が適切なものである．ところで，ホモロジー群から単独の整数値の不変量を引き出すこともできる．そのことを簡単に紹介しよう．

まず，有限生成アーベル群の基本定理というのがあって，次のような事実が知られている．M を有限個の生成子を持つ加群とする．つまり有限集合 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset M$ が存在して，任意の元 $x \in M$ に対して

$$x = m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n$$

となるような整数 $m_1, \cdots, m_n$ が（一意的とは限らないが）あるとする．このとき，M は整数全体のなす加群 $\mathbb{Z}$ と巡回群 $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ の直和に同形

$$M \ \cong \ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_q} \tag{4.85}$$

であるというのが有限生成アーベル群の基本定理の主張である．r 個の $\mathbb{Z}$ の直

和 $\mathbb{Z}^r = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ を M の**自由部分** (free part) といい，整数 r を M の**階数** (rank) といい，

$$r = \operatorname{rank} M \tag{4.86}$$

と書く．残りの $\mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_q}$ を M の**ねじれ部分** (torsion part) という．M を (4.85) の右辺のように整数加法群と巡回群の直和の形に表す式は一意的ではないが，k_i は k_{i+1} で割り切れるように選ぶことができて，そのような $(k_1, \cdots, k_q)$ の選び方はただ 1 通りしかないことが証明されている*9)．つまり，この定理は，任意の加群に対して $(r, k_1, \cdots, k_q)$ という整数列データが決まり，逆にこれらのデータが与えられれば加群は完全に決まってしまうと言っているのである．例えば，クラインの壺の 1 次元ホモロジー群は，(4.81) のところで見たように

$$H_1(\mathrm{Kb}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

であり，基本定理のとおりの分解例になっている．この加群の自由部分は $\mathbb{Z}$ 1 つであり，階数は $\operatorname{rank} H_1(\mathrm{Kb}) = 1$ である．

さて，以上の準備の下にベッチ数とオイラー数を定義しよう．位相空間 X の三角形分割 (K, f) を用いてホモロジー群 $H_n(X)$ が定義されたが，その階数

$$b_n(X) := \operatorname{rank} H_n(X) \tag{4.87}$$

を X の n 次**ベッチ数** (Betti number) という．さらに，

$$\begin{aligned} \chi(X) &:= \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \, b_n(X) \\ &= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots + (-1)^d \, b_d \end{aligned} \tag{4.88}$$

を X の**オイラー数** (Euler number) という．ここで d は単体複体 K の次元，すなわち位相空間 X の次元である．ホモロジー群が位相不変であることから，ベッチ数もオイラー数も位相不変量である．(4.88) のように和と差が交互に現れるような級数を**交代和** (alternating sum) という．

オイラー数は次のように書き換えることができる．まず，鎖複体 (4.66) において

$$\operatorname{rank} C_n(K) = \operatorname{rank} Z_n(K) + \operatorname{rank} B_{n-1}(K) \tag{4.89}$$

という関係が成り立つ．なぜなら，準同形定理 (4.64) を準同形写像 $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ に適用すると，$C_n/\operatorname{Ker}\partial_n \cong \operatorname{Im}\partial_n$ を得るが，定義より $\operatorname{Ker}\partial_n = Z_n$ であり，$\operatorname{Im}\partial_n = B_{n-1}$ であるから，$C_n/Z_n \cong B_{n-1}$ を得る．これから（証明が必要だが），$\operatorname{rank} C_n(K) - \operatorname{rank} Z_n(K) = \operatorname{rank} B_{n-1}(K)$, すなわち(4.89)

*9) 例えば，$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_2$ といった同形関係が成り立つ．この場合は $(k_1, k_2) = (40, 2)$ が条件に合う数列になる．有限生成アーベル群の基本定理の証明は志賀浩二「群論への 30 講」などを参照されたい．

が従う．あるいは図 4.20 を眺めても，この式の成立はうかがえるだろう．

また，ホモロジー群の定義 $H_n(X) = Z_n(K)/B_n(K)$ より

$$\operatorname{rank} H_n(X) = \operatorname{rank} Z_n(K) - \operatorname{rank} B_n(K) \tag{4.90}$$

が成り立つ．これらをオイラー数の定義式に代入すると，

$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \operatorname{rank} H_n(X) \\
&= \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \Big(\operatorname{rank} Z_n(K) - \operatorname{rank} B_n(K)\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \operatorname{rank} Z_n(K) + \sum_{n=0}^{d} (-1)^{n+1} \operatorname{rank} B_n(K) \\
&= \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \operatorname{rank} Z_n(K) + \sum_{n=1}^{d+1} (-1)^{n} \operatorname{rank} B_{n-1}(K) \\
&= \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \Big(\operatorname{rank} Z_n(K) + \operatorname{rank} B_{n-1}(K)\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \operatorname{rank} C_n(K)
\end{aligned}$$

を得る．4 行目から 5 行目に移るとき，形式的に $B_{-1}(K) := \{0\}$ とおいた．また，$B_d(K) = \partial C_{d+1}(K) = \{0\}$ であることを使った．$c_n := \operatorname{rank} C_n(K)$ とおくと，c_n は単体複体 K に含まれる n 単体の個数に他ならない．言い換えると，c_0 は多面体 K の頂点の個数，c_1 は K の辺の個数，c_2 は K の面の個数といったものである．各 c_n の値は多面体 K に依存しているが，

$$\chi = \sum_{n=0}^{d} (-1)^n c_n \tag{4.91}$$

は位相不変量になっていて，三角形分割のとり方に依存しないのである．じつは，面の形を三角形に限定するのをやめて，四角形や五角形からなどが混じった多面体を使っても（どういう図形を多面体として許容するか，条件を整備する必要はあるが），それら多面体が同相であれば，χ の値は変わらない．

とくに 2 次元球面の場合，ホモロジー群は

$$H_0(S^2) = \mathbb{Z}, \qquad H_1(S^2) = \{0\}, \qquad H_2(S^2) = \mathbb{Z} \tag{4.92}$$

であり，ベッチ数は $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ であるから，オイラー数は $\chi = 1 - 0 + 1 = 2$ である．したがって，S^2 に同相な多面体の頂点 (vertex) の個数を V，辺 (edge) の個数を E，面 (face) の個数を F とすると，

$$V - E + F = 2 \tag{4.93}$$

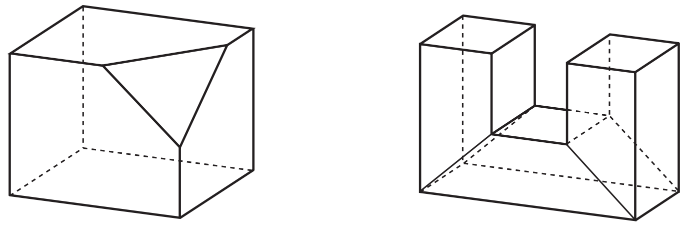


図 4.33　オイラー数を計算してみよ．

が成り立つ．これはオイラーの多面体公式と呼ばれるものである*10)．多面体を適当に描いてみて，頂点・辺・面の個数を数えて，(4.93) が成立することを試してみてほしい．

式 (4.91) や (4.93) は，位相空間の測定・計算可能なデータから位相不変量を引き出す式の代表例である．(4.91) が交代和であることには意味がある．もしこれを足してしまったら，つまり

$$\rho = \sum_{n=0}^{d} c_n(K)$$

という数を計算したら，ρ は多面体ごとにいくらでも違った値になってしまう．データをどう処理すれば不変量になるかという課題は自明なことではないのである．

*10)　オイラー自身は $V + F = E + 2$ という式しか書いていないそうである．つまり，不変量の存在はオイラーの意識には上っていなかったようである．

第 5 章
圏　論

5.1　圏論対集合論

本書は集合論から話を初めて，位相空間とホモトピー・ホモロジー理論の概観を解説して来たが，これらを統合する，ある種の高い視点として圏論*1)という理論がある．圏論は，現在のところ数学科の学生でなければほとんど触れることのない数学であるが，今後，物理学や情報科学を学ぶ人にとってしだいに大切なものになるだろうと私は期待している．この章では圏論の初歩を解説しよう．

圏論は，言わば集合論の対極にあるものの見方である．集合論では「元が集まって集合ができる」という観察が議論の出発点であり,「ある集合の元を別の集合の元に対応させる」こととして写像の概念を導入するが，圏論では集合や元の存在をあらかじめ想定しない．むしろ圏論は，集合よりも写像の方に優先的・基本的な地位を与える．集合論では「集合が先で写像が後」であるが，圏論では「写像が先で集合が後」である．常識的な理解からは，集合の概念なしに写像を定義できるのか？と思われるだろうが，そういう論理の立て方はある程度できるのである．そのような論理順序の転倒をわざわざやったところで，既成概念のたんなる言い換えをするだけであったとしたら，衒学的な悪趣味にすぎないであろう．しかし，これが新しい広い視野を提供してくれるからこそやってみる価値があるのである．

5.2　圏

圏の定義を述べよう．**圏** (category) とは，**対象** (object) と呼ばれる $a, b, c, \cdots$ と，対象 a から出て対象 b に入る**射** (arrow, morphism) と呼ばれる矢印

*1)　「けんろん」と読む．category theory の訳語．

$f : a \to b$

あるいは

$a \xrightarrow{f} b$

と書かれる矢印の集まりで，以下の公理を満たすものである．

圏の公理 1：合成　射 $f : a \to b$ と射 $g : b \to c$ があれば，これらの**合成** (composite) の射 $g \circ f : a \to c$ が一意的に定められる：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd}$$

圏の公理 2：結合律　射の系列

$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$

があったときに

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

が成り立つ．つまり，合成射 $g \circ f$ に引き続いて h を合成してできる射と，合成射 $h \circ g$ に f をつけ足してできる射は同じ射である：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, dotted] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & c \arrow[r, "h"'] & d \end{tikzcd}$$

圏の公理 3：恒等射　各対象 b に対して $1_b : b \to b$ という射があり，任意の射 $f : a \to b$ に対して

$1_b \circ f = f$

と，任意の射 $g : b \to c$ に対して

$g \circ 1_b = g$

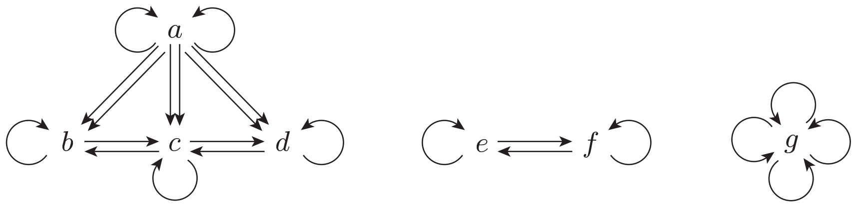
が成り立つ．1_b を b に対する**恒等射** (identity arrow) といい，id_b とも書く．恒等射は矢印の代わりに 2 重線で記すことがしばしばある：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, equal, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\ & b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

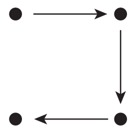
以上 3 つの条件を満たす対象と射の集まりを圏と呼ぶ．1 つの圏を $\mathscr{C}$（飾り文字の C）という記号で表すことにする．

一般の圏は図式で表すと，次図のような，対象を結ぶ矢印のネットワークの

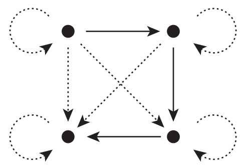
ようなものである．a から b に向かう射は 1 本とは限らない．また，恒等射が必ず存在しなければならないのだから，$a \to a$ のように同一の対象に戻って来る射が必ずある．恒等射の他にも $a \to a$ という射が複数あってもよい．$a \to b$, $b \to c$ という 2 本の射があれば，必ず $a \to c$ という射がある．また，射のネットワークは双方向的であるとは限らない．つまり，$a \to b$ という向きの射があっても，$b \to a$ という向きの射があるとは限らない．また，対象 a と e のようにその間を連絡する射がないこともあり得る．また対象 g のように，他の対象と結ぶ射が 1 本も存在しない，孤立した対象もあり得る．



下図を圏として完成させるためには少なくともどれだけの射をつけ足さなければならないか，考えてみてほしい．この図式のように対象を黒点で済ませてしまうこともある．



答えは下図．点線の矢印が圏を完成するためにつけ足された射である．



圏に含まれている対象と射が無数にあってそれらすべてを書き尽くすことは不可能であったり，たとえ有限個であっても全部を書くのは煩わしかったりするので，たいていは注目したい対象と射だけを抜き出して図式を書く．射 $f_1 : a_1 \to a_2$, $f_2 : a_2 \to a_4$, $f_3 : a_1 \to a_3$, $f_4 : a_3 \to a_4$ があって，

$$f_2 \circ f_1 = f_4 \circ f_3$$

という関係があるとき，対応する図式を**可換図式** (commutative diagram) という．下図のように真ん中に輪になった矢印を書いて可換図式を示すことがある．どの矢印をたどっても a_1 から a_4 に至る合成射は同じ射になるということを可換図式は意味している．

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_3"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
a_3 \arrow[r, "f_4"'] & a_4
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "g_3"'] & \bullet \arrow[d, "g_2"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
 & \bullet
\end{tikzcd}$$

可換図式は正方形とは限らない．例えば上図の右の可換図式は $g_2 \circ g_1 = g_3$ を表している．以下では，その図式が可換か，可換とは限らないかということは文脈からわかるので，輪になった矢印はいちいち書かないことにする．ちなみに圏の公理のところで描いた結合律の図式や，恒等射の図式は，可換図式である．

図式の一部分の射を点線で書くことがある．下のような図式で射 g, h が指定されたときに，x のところに適当な射をあてはめて，この図式を可換図式にすることができるかという問題を考える場面がしばしばある．左図の場合は $g \circ x = h$ となるような射 x を求めよという問題だし，右図は $h \circ y = g$ となるような射 y を求めよという問題だ．

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dotted, "x"] \arrow[dr, "h"'] & \bullet \arrow[d, "g"] & & \bullet \arrow[dr, "h"'] & \bullet \arrow[l, dotted, "y"'] \arrow[d, "g"] \\
& \bullet & & & \bullet
\end{tikzcd}
\tag{5.1}
$$

このような問題は，例えば整数の加群 $\mathbb{Z}$ において，$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は整数を g 倍する準同形写像 $m \mapsto gm$ で，$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は整数を h 倍する準同形写像 $m \mapsto hm$ であるときに，x 倍の写像で $g \circ x = h$ を満たすものがあるかという問いとして現れる．例えば，$3 \circ x = 12$ なら「$x : m \mapsto 4m$」という解が存在するし，$5 \circ x = 12$ なら x のところにあてはまる準同形写像は存在しない．

同様に，下の左図は $x \circ f = h$ となるような射 x を求めよという問題であり，右図は $y \circ h = f$ となるような射 y を求めよという問題である．

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \bullet \arrow[d, dotted, "x"] & & \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \bullet \\
& \bullet & & & \bullet \arrow[u, dotted, "y"']
\end{tikzcd}
$$

この手の，点線の部分の射を補えという問題の立て方は，圏論ではよく使われるので慣れてほしい．下の可換図式の点線にあてはまる射は，もちろん合成射 $g \circ f = x$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "x"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\
& \bullet
\end{tikzcd}
$$

上に示したような問題，例えば (5.1) の左の問題は，1 本の射 h を $h = g \circ x$ という 2 段階の射 x と g に分ける「射の分解問題」と呼んでもよいだろう．

射に関する用語をもう少し導入しよう．ある対象からその対象自身への射 $a \to a$ を a の**自己準同形射** (endomorphism) という．射 $f : a \to b$ に対して射 $f' : b \to a$ で，

$$f' \circ f = 1_a, \qquad f \circ f' = 1_b \tag{5.2}$$

の両方を満たすものがあれば，f は**可逆** (invertible)，あるいは**同形射** (isomorphism) であるという．このような f' があったとしたら一意的である．なぜなら，f', f'' という 2 つの射が上の条件を満たしていたら

$$f' = f' \circ 1_b = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = 1_a \circ f'' = f''$$

となるから．f' を f の**逆射** (inverse) といい $f' = f^{-1}$ と書く．また，このとき対象 a と b はこの圏において**同形** (isomorphic) であるといい，$a \cong b$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, equal, "1_a"'] \arrow[dr, "f"] & \\
a \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[l, "f'"] \arrow[d, equal, "1_b"] \\
& b
\end{tikzcd}$$

とくに $a \to a$ という同形射を a の**自己同形射** (automorphism) という．

もちろん，任意の射が可逆であるとは限らない．そもそも $a \to b$ という方向の射があっても，$b \to a$ という方向の射があるとは限らない．$g : a \to b$ と $h : b \to a$ という射があって，もし $h \circ g = 1_a$ だったとしても，$g \circ h = 1_b$ とは限らない．また，$a \to a$ という射も，可逆なものもあれば非可逆なものもあり得る．もし $a \to a$ が可逆であれば，これを自己同形射というのである．

圏の対象は $\{a, b, c, \cdots\}$ といった集合をなすので，圏論は集合論とまったく無縁というわけではない．しかし，a から b への射 $f : a \to b$ は，集合 a から集合 b への写像を表しているわけではない．そもそも圏の公理では，a や b が集合であることは要求していない．圏論の立場では，$f : a \to b$ はあくまで a から b への矢印としか言いようがないものである．そのことは以下の例を通して追々見ていくことにする．

5.3 圏の例

5.3.1 集合の圏

任意の集合を対象とし，任意の写像を射とし，写像の合成を射の合成とすると，これらの集まりは圏をなす．この圏を集合の圏と呼び，Set と書く．Set の図式を次ページに示す．なお，空集合 $\varnothing$ から空でない集合 a への射 $\varnothing \to a$ はいちおう 1 つだけあると約束する[*2)]．空でない集合 a から空集合 $\varnothing$ への射 $a \to \varnothing$ はない．だから圏 Set においては，対象 $\varnothing$ からはすべての対象に向けて射が 1 本ずつ出ている．$\varnothing$ に向かう射は恒等射以外にはない．また，ただ 1 つの元からなる集合（一者集合）$\mathbf{1} = \{*\}$ に向かって，すべての対象から 1 本ずつ射が入る．一者集合から他の集合に向かう射（指差し写像）$\mathbf{1} \to a$ は多数あるが，

*2)　1.3 節，写像集合の項を参照のこと．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \varnothing \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
a \arrow[r, shift left] \arrow[drr] & b \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[dr] & c \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d] & d \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[dl] & e \arrow[l, shift left] \arrow[dll] \\
 & & \mathbf{1} & &
\end{tikzcd}
$$

この図式には書き込まれていない．なお，この図式では各対象の恒等射は省略されている．

5.3.2　順序の圏

自然数を対象とし，自然数 a, b について，$a \leq b$ のとき $a \to b$ と書くことにして射を定める．そうすると，$a \to b$, $b \to c$ のとき $a \to c$ となるから射の合成が定められ，この矢印のネットワーク

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \cdots$$

は圏をなすことが確かめられる．煩雑になるので書かなかったが，ここにはさらに $1 \to 1$, $2 \to 2$ や $1 \to 3$, $1 \to 4$, $2 \to 4$ といった矢印も書き込むべきである．

この例では $a \to b$ という射は，$a \leq b$ という自然数の大小関係を表しているだけである．a は集合ではないし，$a \to b$ と書かれた矢印は集合 a から集合 b への写像を表しているわけでもない．最初は奇異に感じられるかもしれないが，このような矢印のネットワークも圏である．

5.3.3　位相空間の圏

任意の位相空間を対象とし，任意の連続写像を射とすると，これらの集まりは圏をなす．この圏を位相空間の圏と呼び，Top と書く．つまり Top における射 $f : a \to b$ は位相空間 a から位相空間 b への連続写像である．この圏では可逆な射は同相写像に他ならない．

5.3.4　群の圏

任意の群を対象とし，任意の準同形写像を射とすると，これらの集まりは圏をなす．この圏を群の圏と呼び，Grp と書く．つまり，Grp における射 $f : a \to b$ は群 a から群 b への準同形写像である．この圏では可逆な射は同形写像に他ならない．群の準同形写像 $f : a \to b$ は $f(e_a) = e_b$ を満たす，つまり単位元 $e_a \in a$ を単位元 $e_b \in b$ に移す．したがって圏 Grp では，単位元だけからなる群 $z = \{e\}$ からは，すべての対象に向かって 1 本ずつ射が出ているし，すべての対象から $z = \{e\}$ に向かって 1 本ずつ射が入る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & z \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
a \arrow[r, shift left] \arrow[drr] & b \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[dr] & c \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d] & d \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[dl] & e \arrow[l, shift left] \arrow[dll] \\
 & & z & &
\end{tikzcd}
$$

同様に，環の圏 Rng（環を対象とし，準同形写像を射とする），加群の圏 Mod（加群を対象とし，準同形写像を射とする），体 K 上のベクトル空間の圏 Vct_K（K 上の有限ベクトル空間を対象とし，線形写像を射とする）などを考えることができる．

5.3.5　離散圏

射として恒等射しか持たないような圏を離散圏という．すべての対象がバラバラで，面白くない圏である．任意の集合 $X = \{a, b, c, \cdots\}$ があったときに，各元を対象とし，各対象の恒等射だけを備えれば，集合は離散圏になる．この意味で，集合は圏の特別な場合である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[loop above] & b \arrow[loop above] & c \arrow[loop above] & d \arrow[loop above] & e \arrow[loop above]
\end{tikzcd}
$$

5.4　モノとエピ

圏論は集合よりも写像を優先させると言ったが，集合論における基本的な概念，例えば「写像が単射である」といったことを，集合の元に言及することなく表現することができるだろうか？ ちなみに集合論的には，写像 $f : X \to Y$ が単射であるとは，任意の元 $x_1, x_2 \in X$ に対して $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つことであった．この定義では X や Y が「元の集まり」であることをあからさまに使用している．では，単射に相当する概念を，集合に立ち入らずに定式化するにはどうすればよいだろうか？

ある圏において射 $m : b \to c$ が**モノ** (monic) であるとは，任意の対象 a と任意の射 $g_1 : a \to b$, $g_2 : a \to b$ に対して $m \circ g_1 = m \circ g_2$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つことと定義する．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & b \arrow[r, "m"] & c
\end{tikzcd}
$$

とんちのようではあるが,「モノ」は集合や元を用いずに「単射」を言い換えた表現である．集合の圏においては，モノは単射と一致している．

一方で，また集合論に立ち返って全射という概念の定義を思い出すと，写像 $f : X \to Y$ が全射であるとは，任意の元 $y \in Y$ に対して，$f(x) = y$ となるよ

うな元 $x \in X$ が存在することであった.「全射」もまた圏論の立場では集合や元に言及しない「エピ」という概念で置き換えられる.

ある圏において射 $e : a \to b$ が**エピ** (epic) であるとは，任意の対象 c と任意の射 $h_1 : b \to c$, $h_2 : b \to c$ に対して $h_1 \circ e = h_2 \circ e$ ならば $h_1 = h_2$ が成り立つことと定義する.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "e"] & b \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & c \end{tikzcd}$$

集合の圏においては，エピは全射と一致している．また，任意の圏において，同形射はモノかつエピである．しかし，ある射がモノかつエピだからといって同形射であるとは限らない*3).

5.5 関　手

数学の使命はいろいろな概念の間にある論理的関係性を解明することであると言ってよいと思うが，その使命の当然の帰結として，圏論もまた，1 つの圏だけが興味の対象にとどまることはなく，むしろ複数の圏の間の関係性が興味の対象になる．そのような圏と圏の関係・連動を語る用語が関手である.

圏 $\mathscr{C}$ と圏 $\mathscr{D}$ があったとき，$\mathscr{C}$ の各対象 a, b に $\mathscr{D}$ の対象 Fa, Fb を対応させ，$\mathscr{C}$ の各射 $f : a \to b$ に $\mathscr{D}$ の射 $Ff : Fa \to Fb$ を対応させる F が条件

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff, \tag{5.3}$$

$$F(1_a) = 1_{Fa} \tag{5.4}$$

を満たすとき，F を圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への**共変関手** (covariant functor) あるいはたんに**関手** (functor) という．普及した記法ではないが，関手による対応を $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ あるいは対象ごとに $a \rightsquigarrow Fa$，射ごとに $f \rightsquigarrow Ff$ と書くことにする．関手は，たんに対象を対象に移す写像ではなく，ある圏の射のネットワークを別の圏の中の射のネットワークに写し取る操作であることに注意してほしい.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} & a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & b \arrow[d, "g"] & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "F(g\circ f) = Fg \circ Ff"'] & Fb \arrow[d, "Fg"] & \mathscr{D} \\ & & c & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & & Fc & \end{tikzcd}$$

また，$\mathscr{C}$ の各対象 a, b に $\mathscr{D}$ の対象 Ga, Gb を対応させ，$\mathscr{C}$ の各射 $f : a \to b$ に $\mathscr{D}$ の射 $Gf : Gb \to Ga$ を対応させる G が条件

$$G(g \circ f) = Gf \circ Gg, \tag{5.5}$$

$$G(1_a) = 1_{Ga} \tag{5.6}$$

*3) 例えば，位相空間の圏において位相空間 X の稠密な部分集合を A とすると（A の閉包が X だとすると），包含写像 $i_A : A \to X$ はモノかつエピだが可逆ではない.

を満たすとき，G を圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への**反変関手** (contravariant functor) という．反変関手で写し取った射の向きが反転していて，合成される射の順序も入れ換わっていることに注意してほしい．

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & b \arrow[d, "g"] & {} \arrow[r, squiggly, "G"] & {} & Ga & Gb \arrow[l, "Gf"'] & \mathscr{D} \\
& & c & {} \arrow[r, squiggly, "G"] & {} & & Gc \arrow[u, "Gg"'] \arrow[ul, "G(g\circ f)=Gf\circ Gg"] &
\end{tikzcd}$$

共変関手 $F:\mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ があったとき，$\mathscr{C}$ の対象 a と b が同形ならば，関手 F によって対応する $\mathscr{D}$ の対象 Fa と Fb も同形である．なぜなら，a と b が同形であるとは，(5.2) で定義したように，射 $f:a\to b$ と $f':b\to a$ で

$$f'\circ f = 1_a, \qquad f\circ f' = 1_b$$

を満たすものがあるということであり，このとき関手 F によって対応する射 $Ff:Fa\to Fb$ と $Ff':Fb\to Fa$ も，関手の性質 (5.3), (5.4) により

$$Ff'\circ Ff = 1_{Fa}, \qquad Ff\circ Ff' = 1_{Fb}$$

を満たす．したがって，Fa と Fb は圏 $\mathscr{D}$ で同形な対象である．

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[d, equal, "1_a"'] \arrow[dr, "f"] & & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & Fa \arrow[d, equal, "1_{Fa}"'] \arrow[dr, "Ff"] & & \\
\mathscr{C} & a \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[l, "f'"] \arrow[d, equal, "1_b"] & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & Fa \arrow[dr, "Ff"'] & Fb \arrow[l, "Ff'"] \arrow[d, equal, "1_{Fb}"] & \mathscr{D} \\
& & b & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & & Fb &
\end{tikzcd}$$

この結果は形式的に

$$a\cong b \;\Rightarrow\; Fa\cong Fb \tag{5.7}$$

とまとめられる．いま，共変関手の場合について証明したが，反変関手の場合についても同様に

$$a\cong b \;\Rightarrow\; Ga\cong Gb \tag{5.8}$$

が成り立つ．

射 $a\to b$ を「a から b への変化」と解釈すれば，圏とは射が織りなすさまざまな変化のネットワークである．とくに恒等射 $1_a:a\to a$ は「無変化」を表している．対象 a と b が同形であるとは，a から b への「可逆な変化」があるということである．$f:a\to b$ が可逆であるとは，$f':b\to a$ という変化をつけ加えれば，$f'\circ f=1_a:a\to a$ と $f\circ f'=1_b:b\to b$ のように何ごともなかった状態へと戻すことができるということだ．そして，圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への関手とは，$\mathscr{C}$ という世界での $f:a\to b$ という変化を $\mathscr{D}$ という世界での $Ff:Fa\to Fb$ という変化に写し取る操作である．このとき圏 $\mathscr{C}$ での不変性は圏 $\mathscr{D}$ での不変性に写し取られる．そのことを $F1_a=1_{Fa}$ という条件は表している．このような関手の役割は以下の例を通してしだいに浮き上がって来ることと思う．

5.6 関手の例

5.6.1 ホモトピー関手

関手の例をいくつか挙げよう．ホモトピーは位相空間 X に対してホモトピー群 $\pi_1(X)$ を与えるものであったが，これは位相空間の圏 *Top* から群の圏 *Grp* への共変関手である．すなわち，3.8 節で議論したように，位相空間の連続写像

$$f : X \to Y$$

があれば，それに連動してホモトピー群の準同形写像

$$f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$$

が誘導され，共変条件

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

が満たされる．もちろん恒等射条件

$$(1_X)_* = 1_{\pi_1(X)}$$

も満たされる．したがって，*Top* の対象 X に *Grp* の対象 $\pi_1(X)$ を対応させ，*Top* の射 $f : X \to Y$ に *Grp* の射 $\pi_1(f) = f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ を対応させる π_1 は共変関手である．

この場合，位相空間 X は点の集まりという意味で集合であるし，群 $\pi_1(X)$ もループのホモトピー類の集まりという意味で集合であるが，X に $\pi_1(X)$ を対応させるやり方は，点 $x \in X$ の行き先としてホモトピー類 $[\alpha] \in \pi_1(X)$ を対応させているわけではない．したがって $X \rightsquigarrow \pi_1(X)$ という対応は写像ではないことに注意してほしい．関手は対象に対象を対応させるが，集合の元に集合の元を対応させる写像ではないのである．こうしてみると，圏論で扱う射や関手は，何らかの対応を指し示す矢印ではあるが，集合論の限定的な意味での写像ではないことがわかってもらえると思う．

5.6.2 ホモロジー関手

ホモロジー理論もまた位相空間 X に対してホモロジー群 $H_n(X)$ と呼ばれる群を与える手続きであった．これもまた位相空間の圏 *Top* から加群の圏 *Mod* への共変関手である．前章では説明しなかったが，位相空間の連続写像

$$f : X \to Y$$

があれば，それに連動してホモロジー群の準同形写像

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

が定義される．おおざっぱに言うと，X における n 鎖 c は写像 f によって Y における n 鎖 $f(c)$ へと移され，$\partial f(c) = f(\partial c)$ なので，$\partial z = 0$ ならば $\partial f(z) = 0$ で

ある．つまり，X の n 輪体は f によって Y の n 輪体に移される．また，$z'-z=\partial c$ という関係があれば，$f(z')-f(z)=\partial f(c)$ という関係へ移される．したがって X におけるホモロジー類 $[z]$ は Y におけるホモロジー類 $f_*([z]) := [f(z)]$ に移される．丁寧に調べてみると，この対応 $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ は加群としての準同形写像になっていることがわかるし，共変条件 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ や恒等射条件 $(1_X)_* = 1_{H_n(X)}$ の成立も確かめられる．したがって，*Top* の対象 X に *Mod* の対象 $H_n(X)$ を対応させ，*Top* の射 $f : X \to Y$ に *Mod* の射 $H_n(f) = f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ を対応させる H_n は共変関手である．

以上の議論で，ホモトピーやホモロジーは関手 $\pi_1 : \mathit{Top} \rightsquigarrow \mathit{Grp}$ や $H_n : \mathit{Top} \rightsquigarrow \mathit{Mod}$ として捉えられることを見てきた．これらの例から，一般に「位相空間の圏からの関手は位相不変量である」という見方ができることがわかる．関手 $F : \mathit{Top} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ は位相空間 X に対して何らかの対象 $F(X)$ を対応させるものであり，(5.7) の議論で見たように，位相空間 X と Y が同相であれば，$F(X)$ と $F(Y)$ は圏 $\mathscr{D}$ で同形な対象であると言える．つまり，

$$X \cong Y \;\Rightarrow\; F(X) \cong F(Y) \tag{5.9}$$

が成り立つ．この意味で，関手を作ることは，不変量を見つけることだと言うことができる．とくに圏 $\mathscr{D}$ として群の圏とか加群の圏とか，何らかの代数操作のできる圏を持って来ると，$F(X)$ は計算可能で有用な不変量となる．できれば (5.9) の逆,「$F(X)$ と $F(Y)$ が同形ならば X と Y は同相」というところまで言えれば，関手 F は完全な位相不変量だということになる．また，いままであまり触れていなかったことだが，写像 $f : X \to Y$ が必ずしも同相写像でない場合でも，この写像の位相不変な性質が $F(f) : F(X) \to F(Y)$ という射に写し取られている*4)．やはり圏 $\mathscr{D}$ が群の圏とか加群の圏であれば，$F(f)$ は写像 f の性質を代数的に計算する手段を与える．つまり，関手は対象の性質を写し取るだけでなく，射の性質も別の圏に写し取っている．

このように圏と関手という概念を用いると，考察している一群の対象と射の全貌を圏という舞台で明確に捉えることができるし，関手によってある圏 $\mathscr{C}$ の様子を別の圏 $\mathscr{D}$ に写し取って，圏 $\mathscr{D}$ で使える演算操作などを用いて，圏 $\mathscr{C}$ の様子を調べることができる．このように，ものごとの関連性・連動性・不変性を捉えることが圏論の役割だと言えるだろう．

5.6.3 ベクトル空間の圏における双対関手

関手 $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ が対応を与える圏 $\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ は必ずしも異なる圏である必要はない．つまり，同一の圏の中で関手が定義されることもある．ここでは体 K

*4) 例えば（同相写像とは限らない）連続写像 $f : S^1 \to S^1$ はホモトピー群の準同形写像 $f_* : \pi_1(S^1) \to \pi(S^1)$ を誘導するが，これは加群の準同形 $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto kn$ であり，整数 k は f の写像度とか巻き数と呼ばれる，f の位相不変量である．

上のベクトル空間の圏 Vct_K から同じく Vct_K への反変関手の例を挙げよう．

体 K とは加減乗除の四則演算について閉じている数の集合であり，有理数体 $\mathbb{Q}$，実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ などのいずれかを選んで固定しておく．体 K 上のベクトル空間の圏 Vct_K は，K 上の有限次元ベクトル空間 $V, W, \cdots$ を対象とし，線形作用素 $T : V \to W$ を射とする圏である．ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ の数 $\lambda \in K$ によるスカラー倍 $\lambda\boldsymbol{v} \in V$ が定められ，ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ の和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' \in V$ が定められていることは，通常のベクトル空間の定義どおりである．また，写像 $T : V \to W$ が線形作用素であるとは，$T(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda T(\boldsymbol{v}), T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{v}')$ を満たしていることである．V から W への線形作用素全体の集合を

$$L_K(V; W) := \{\, T : V \to W,\ K\text{-線形}\,\} \tag{5.10}$$

と書く．$T, T' \in L_K(V; W)$ のスカラー倍 λT や和 $T + T' \in L_K(V; W)$ も定義されるので $L_K(V; W)$ 自身またベクトル空間である．すでにここに，2 つの対象 V, W を選ぶと 1 つの対象 $L_K(V; W)$ が派生する構造が現れている．次元については

$$\dim L_K(V; W) = \dim V \times \dim W \tag{5.11}$$

という関係が成り立つ．

体 K 自身もまた K 上のベクトル空間の 1 つである．1.6 節でも触れたが，K に値を持つ線形写像 $f : V \to K$ を V 上の**一形式** (one-form) あるいは**余ベクトル** (co-vector) と呼ぶ．V 上の一形式全体のなす集合

$$V^* := L_K(V; K) \tag{5.12}$$

を V の**双対空間** (dual space) と呼ぶ．次元については $\dim V^* = \dim V$ が成り立つ（証明してみよ）．しかし，いま V から V^* への同形写像を作ったわけではない．いまやったことは，V という集合を元手にして V^* という集合を派生させるという操作であって，個々の元 $\boldsymbol{v} \in V$ に対応する元 $f \in V^*$ を作ったのではない．

一形式 f にベクトル $\boldsymbol{v}$ を代入したときに出力される数を

$$f(\boldsymbol{v}) = \langle f, \boldsymbol{v} \rangle \in K \tag{5.13}$$

と書くこともあり，f と $\boldsymbol{v}$ の**対** (pairing) と呼ぶ．一形式 $f \in V^*$ が $f = 0$ であるとは，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = 0$ であることと定義する．線形写像は加群の準同形写像でもあるので，(4.44) で示したように，ベクトル空間の零元 $0 \in V$ に対して，$f(0) = 0$（右辺は K の零元）を返す．また,「任意の $f \in V^*$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = 0$」は，$\boldsymbol{v} = 0$ であるための必要十分条件である：

$$f \in V^*, \quad f = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall \boldsymbol{v} \in V\,(f(\boldsymbol{v}) = 0), \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{v} \in V, \quad \boldsymbol{v} = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall f \in V^*\,(f(\boldsymbol{v}) = 0). \tag{5.15}$$

線形作用素 $T : V \to W$ に対して**双対作用素** (dual operator) T^* が

$$
\begin{aligned}
T^* : W^* &\to V^* \\
g \ &\mapsto T^*g : V \to K \\
&\qquad\qquad \boldsymbol{v} \mapsto (T^*g)(\boldsymbol{v}) := g(T\boldsymbol{v})
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

で定義される．対 (pairing) を用いて書くと

$$
\langle T^*g, \boldsymbol{v} \rangle = \langle g, T\boldsymbol{v} \rangle \tag{5.17}
$$

ということになる．また，図式で書くと，

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dotted, "V^* \ni T^*g = g\circ T"'] & W \arrow[d, "g\in W^*"] \\
& K
\end{tikzcd}
$$

となる．T^*g を T による g の**引き戻し** (pullback) という．また，線形作用素 $S : U \to V$ があったときは，合成 $T \circ S : U \to W$ が定義され，これによる引き戻し $(T \circ S)^* : W^* \to U^*$ が定義され，

$$
(T \circ S)^* g = S^*(T^*g)
$$

が成り立つ．このことは形式的に

$$
\begin{aligned}
\langle (T \circ S)^* g, \boldsymbol{u} \rangle &= \langle g, (T \circ S)\boldsymbol{u} \rangle \\
&= \langle g, T(S\boldsymbol{u}) \rangle \\
&= \langle T^*g, S\boldsymbol{u} \rangle \\
&= \langle S^*(T^*g), \boldsymbol{u} \rangle
\end{aligned}
$$

と証明されるし，図式

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend left, "T\circ S"] \arrow[drr, dotted, "(T\circ S)^*g = S^*(T^*g)"'] & V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dotted, "T^*g"] & W \arrow[d, "g"] \\
& & K
\end{tikzcd}
$$

を見ても容易に確認できるだろう．この図式からも，T^* や S^* が g を「引き戻している」という表現がふさわしいことがうかがえるだろう．

こうして圏 Vct_K において，対象 V に対象 V^* を，射 $T : V \to W$ に射 $T^* : W^* \to V^*$ を対応させる操作

$$
* : Vct_K \rightsquigarrow Vct_K
$$

は，

$$
(T \circ S)^* = S^* \circ T^* \tag{5.18}
$$

を満たす反変関手になっていることがわかる．この関手を**双対関手** (dual functor) という．これは反変関手の代表例と言ってもよいくらいの典型的例である．

しかもこの関手は 2 回やると元に戻る：

$$(V^*)^* \cong V, \qquad (T^*)^* \cong T. \tag{5.19}$$

ここで $V^{**} = (V^*)^* = L_K(L_K(V;K);K)$ はいったん V とは別のベクトル空間として定義されるのだが，式 (1.85) のところで見たように，$I_V : V \to V^{**}$ という同形写像[*5)]が自然に（他に何も余分な条件や構造をつけ加えずに）定められるので，$V \cong V^{**}$ と書いているのである．$T : V \to W$ に対する 2 重双対 $T^{**} : V^{**} \to W^{**}$ も，$T^{**} = I_W \circ T \circ I_V^{-1}$ という対応で $T : V \to W$ と等しいと見なせる．

2 つの作用素 $T_1, T_2 : V \to W$ の和とスカラー倍について

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \lambda_1 T_1^* + \lambda_2 T_2^* \tag{5.20}$$

が成り立つことは容易に確かめられるのでやってみてほしい．モノとエピの双対性から，$T : V \to W$ が単射であることと，$T^* : W^* \to V^*$ が全射であることとは等価であることがただちにわかる．

5.6.4　ベクトル空間の部分空間の圏における零化関手

1 つのベクトル空間 V を選ぶと，V の部分空間（和とスカラー倍に関して閉じた部分集合）を対象とし，部分空間の包含写像を射として圏が構成される．この圏を $\mathscr{S}(V)$ と書くことにする[*6)]．つまり，$M_1, M_2 \subset V$ といった V の部分空間が $\mathscr{S}(V)$ の対象であり，$M_1 \subset M_2$ という包含関係があったときに $M_1 \to M_2$ と書くことにする．この圏では，$\{0\}$ からは任意の対象に向けて 1 本ずつ射が出ているし，V に向かって任意の対象から 1 本ずつ射が入っている．

V の部分空間 M に対して

$$M' := \{f \in V^* \,|\, \forall \boldsymbol{m} \in M\,(f(\boldsymbol{m}) = 0)\} \tag{5.21}$$

は V^* の部分空間となるが，$f \in M'$ を M の**零化関数** (annihilator)，M' を M の**零化空間** (annihilator space) と呼ぶことにする．

$$\{0\} \subset M_1 \subset M_2 \subset V$$

という部分空間の序列に対して

$$V^* \supset M_1' \supset M_2' \supset \{0\}$$

という部分空間の序列が対応するので，$\mathscr{S}(V)$ の対象 M に，$\mathscr{S}(V^*)$ の対象 M' を対応させる操作

$${}' : \mathscr{S}(V) \rightsquigarrow \mathscr{S}(V^*)$$

---

*5)　$I_V : \boldsymbol{v} \in V \mapsto I_V(\boldsymbol{v}) \in V^{**}$ は，$f \in V^*$ に対して $(I_V(\boldsymbol{v}))(f) := f(\boldsymbol{v})$ を与えるものとして定義される．式 (1.85) のところでは $\wedge : V \to V^{**}$ と書いていた．

*6)　$\mathscr{S}$ は subspaces の頭文字の S.

は反変関手であることがわかる．これを**零化関手** (annihilator functor) と呼ぶ．くどいようだが，ここでも $M \rightsquigarrow M'$ という関手は個々の元 $\boldsymbol{m} \in M$ に何らかの元 $f \in M'$ に対応させる写像にはなっていないことに注意してほしい．また，証明が必要だが*7)

$$M'' = M \tag{5.22}$$

という関係が成り立つ．これは M と M' とが双対な関係にあると言っている．

再び圏 Vct_K に戻って，双対空間と零化空間の両方が関わる性質について議論する．以下の議論は若干込み入っており，これを飛ばして次の節に進んでもらってもさしつかえない．M の零化関数 $f \in M'$ は商空間 V/M の上の一形式と同一視できるので，自然な同形対応*8)

$$M' \cong (V/M)^* \tag{5.23}$$

がある．また，$M_1 \subset M_2$ のとき，$M'_1 \supset M'_2$ であり，(5.23) を拡張した

$$M'_1/M'_2 \cong (M_2/M_1)^* \tag{5.24}$$

という同形対応が成立する．また，包含写像 $i : M \hookrightarrow V$ は単射なので，これに双対な写像 $i^* : V^* \twoheadrightarrow M^*$ は全射である．写像 i^* の働きは，$f : V \to K$ の定義域を $M \subset V$ に制限して $i^*f : M \to K$ を与えるだけである．制限作用素 $i^* : V^* \twoheadrightarrow M^*$ は全射なので，$\mathrm{Im}\, i^* = M^*$ であり，また零化空間の定義から言って $\mathrm{Ker}\, i^* = M'$ であるから，準同形定理*9) $\mathrm{Im}\, i^* \cong V^*/\mathrm{Ker}\, i^*$ は

$$M^* \cong V^*/M' \tag{5.25}$$

を意味する．

(5.17) で議論したように，線形作用素 $T : V \to W$ と $g \in W^*$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\langle T^*g, \boldsymbol{v}\rangle = \langle g, T\boldsymbol{v}\rangle$$

が成り立っていた．「この式イコール 0」という式を $\boldsymbol{v}$ に対する条件式と見て，集合 $\{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall g \in W^* \,(\langle T^*g, \boldsymbol{v}\rangle = \langle g, T\boldsymbol{v}\rangle = 0)\}$ を作れば

$$(\mathrm{Im}\, T^*)' = \mathrm{Ker}\, T \subset V \tag{5.26}$$

が従うし，g に対する条件式と見て，集合 $\{g \in W^* \mid \forall \boldsymbol{v} \in V \,(\langle T^*g, \boldsymbol{v}\rangle = \langle g, T\boldsymbol{v}\rangle = 0)\}$ を作れば

$$\mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)' \subset W^* \tag{5.27}$$

を結論する（ここにも図地反転の双対性）．一方で，線形作用素 $T : V \to W$

*7)　$M \subset M''$ は定義から容易に示せるが，$M \supset M''$ が自明でない．

*8)　圏 Vct_K における同形 $\cong$ とは，線形同形のことである．

*9)　準同形定理については 4.10 節を参照のこと．そこでは加群の準同形定理を証明したが，ベクトル空間の線形写像に対する準同形定理もほぼ同様に証明される．

に関する準同形定理は，T が自然な同形対応

$$V/\mathrm{Ker}\, T \cong \mathrm{Im}\, T \tag{5.28}$$

を誘導することを主張する．これに (5.23), (5.26), (5.22) を順に適用すると

$$(\mathrm{Im}\, T)^* \cong (V/\mathrm{Ker}\, T)^* \cong (\mathrm{Ker}\, T)' \cong (\mathrm{Im}\,(T^*))'' = \mathrm{Im}\,(T^*) \tag{5.29}$$

が導かれる．しかし，$(\mathrm{Ker}\, T)^* \cong \mathrm{Ker}\,(T^*)$ という関係は成り立たない．$\mathrm{Ker}\, T$ と $\mathrm{Ker}\,(T^*)$ のギャップを測るために，それらの次元の差で

$$\mathrm{index}\, T := \dim \mathrm{Ker}\, T - \dim \mathrm{Ker}\, T^* \tag{5.30}$$

という数を定義し，T の指数と呼ぶ．同形対応 $V/\mathrm{Ker}\, T \cong \mathrm{Im}\, T$ は

$$\dim V - \dim \mathrm{Ker}\, T = \dim \mathrm{Im}\, T$$

を意味するし，(5.29) から $\dim \mathrm{Im}\, T = \dim \mathrm{Im}\, T^*$ がわかるので，

$$\begin{aligned} \mathrm{index}\, T &= \dim \mathrm{Ker}\, T - \dim \mathrm{Ker}\, T^* \\ &= (\dim V - \dim \mathrm{Im}\, T) - (\dim W - \dim \mathrm{Im}\, T^*) \\ &= \dim V - \dim W \end{aligned} \tag{5.31}$$

は作用素 T によらず，空間 V, W だけで決まることがわかる．指数が結局 T に依存しないという主張を**指数定理** (index theorem) （の有限次元版）という．(5.30) のように T を使って定義したものが結局 T に無関係であったとは間抜けな感じがするかもしれないが，指数定理が本当に有用になってくるのは，V も W も無限次元で $\dim V - \dim W$ という表式が意味を失っているような場合である．

指数定理は，V や W がただのベクトル空間ではなく，内積空間になっている場合の方がその構造が明瞭になるのだが，ここでは先走ってベクトル空間の圏で語れることを語った．内積空間の圏では $V^* \cong V$, $M' \cong M^\perp$ （$M^\perp$ は M の直交補空間）という（反線形）同形対応が成立する．

5.6.5　内積空間の圏における随伴関手

$K = \mathbb{R}$ 上または $K = \mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間で，内積が定義されているものを**内積空間** (inner product space) という．**内積** (inner product) とは，ベクトル空間の任意の 2 つの元 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対して数

$$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}') \in K \tag{5.32}$$

を対応させる関数であり，以下の 3 条件を満たすものである．(i) 対称性（$K = \mathbb{C}$ のときはエルミート性ともいう）：

$$(\boldsymbol{v}'|\boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}')} \tag{5.33}$$

（複素数 z の複素共役のことを $\bar{z}$ と書く），(ii) 片線形性：任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in K$,

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対して

$$(\boldsymbol{v}'|\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2) = \lambda_1(\boldsymbol{v}'|\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{v}'|\boldsymbol{v}_2), \tag{5.34}$$

(iii) 正定値性：任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}) \geq 0$ であり，$\boldsymbol{v} = 0$ であることが $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}) = 0$ であるための必要十分条件である．

条件 (i), (ii) から[*10)]

$$\begin{aligned}(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}') &= \overline{(\boldsymbol{v}'|\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2)} \\ &= \overline{\lambda_1(\boldsymbol{v}'|\boldsymbol{v}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{v}'|\boldsymbol{v}_2)} \\ &= \overline{\lambda}_1\overline{(\boldsymbol{v}'|\boldsymbol{v}_1)} + \overline{\lambda}_2\overline{(\boldsymbol{v}'|\boldsymbol{v}_2)} \\ &= \overline{\lambda}_1(\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}') + \overline{\lambda}_2(\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}')\end{aligned} \tag{5.35}$$

が従う．また，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v} + 0 = \boldsymbol{v}$ を満たす $0 \in V$ を零ベクトルとかヌルベクトル (null vector) というが，条件 (ii) からヌルベクトル 0 と任意の $\boldsymbol{v}' \in V$ に対して

$$(\boldsymbol{v}'|0) = 0$$

が成り立つことがわかる（右辺の 0 は K の零元）．条件 (i) を合わせれば $(0|\boldsymbol{v}') = 0$ もすぐわかる．

また，条件 (i) から，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について

$$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v})}$$

が従うので，$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v})$ が実数であることはただちにわかる．条件 (iii) はさらに，$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v})$ が非負の実数であることと，$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v})$ がゼロになるのは $\boldsymbol{v}$ がヌルベクトルの場合に限ることを要請している．

内積 $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ において組み合っているのは，ともに同じベクトル空間の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ である．一方，(5.13) で導入した対 $\langle f, \boldsymbol{x}\rangle$ で組み合っているのはベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ と一形式 $f \in V^*$ という異なる集合の元であることに注意してほしい．「内積」と「対」という概念は似ているが，いちおう別物として区別する．どちらかと言えば，内積よりも対の方が基本的な概念である．ベクトル $\boldsymbol{x}$ という変数を，一形式 f という関数に入力して，$f(\boldsymbol{x}) = \langle f, \boldsymbol{x}\rangle$ という出力を得るというしかけ

$$\boldsymbol{x} \xrightarrow{f} f(\boldsymbol{x})$$

があることを考えると，対象物である $\boldsymbol{x}$ が所属している集合と，一種の測定装置である f が所属している集合は別物としておく方が自然である．それに比べて，内積では，同種の 2 つの元が出会って突然

*10)　内積の記法は $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\rangle$, $\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}'\rangle$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')$ など，人と文脈によってさまざまなものが用いられるが，本書では $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}')$ という記法を用いる．また，線形性を，$(\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}') = \lambda_1(\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}') + \lambda_2(\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}')$ のように，左側の変数に要請する流儀もある．

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \xrightarrow{(\ |\ )} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

という数が現れるのだから，奇妙と言えば奇妙である．むしろ内積空間においては，$\boldsymbol{x} \in V$ 自身が $\boldsymbol{x}^\dagger \in V^*$ という測定装置としての機能も兼ねていて[*11)]，

$$\boldsymbol{y} \xrightarrow{x^\dagger} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

という入出力装置として働いていると考えた方がよい．そこで共役写像

$$\begin{aligned} D : V &\to V^* \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{x}^\dagger : V \to K \\ &\qquad\quad \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{x}^\dagger(\boldsymbol{y}) := (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{5.36}$$

という写像を導入する[*12)]．共役写像 D は全単射であり，

$$(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2)^\dagger = \overline{\lambda}_1 \boldsymbol{x}_1^\dagger + \overline{\lambda}_2 \boldsymbol{x}_2^\dagger \tag{5.37}$$

を満たすことが確かめられる．性質 (5.37) は (5.35) の言い換えにすぎない．一般に，このような性質 (5.37) を持つ写像を反線形写像という．反線形写像も加群の準同形写像なので，(4.51) で議論したように，D が単射であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\, D = \{0\}$ である．ところで，定義をたどっていくと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, D &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^\dagger = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{y} \in V\ (\boldsymbol{x}^\dagger(\boldsymbol{y}) = 0) \\ &\Rightarrow \boldsymbol{x}^\dagger(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

が言えるので（2 行目で $\boldsymbol{y} \in V$ は任意の元とされていたので，とくに $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ を選んで 3 行目に移った），$\mathrm{Ker}\, D = \{0\}$ であり，したがって D は単射である．次元の等しい有限次元ベクトル空間の間の線形写像（あるいは反線形写像）は，単射ならば全単射だと言えるので，D は全単射である．したがって $D^{-1} : V^* \to V$ も定義されて反線形写像となる．一形式 $f, f' \in V^*$ の内積を

$$(f|f') := (D^{-1} f' | D^{-1} f) \tag{5.39}$$

で定義すれば，V^* も内積空間になる．

さらに，2 つの内積空間 V, W と線形作用素 $T : V \to W$ があった場合を考えよう．V と W は次元が異なっていてもかまわないし，内積も別物である．厳密には V における内積と W における内積を区別して書いた方が紛れがない：

$$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}')_V, \qquad (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{w}')_W.$$

---

*11)　† という記号は dagger と読まれ，日本語では「剣標」と呼ばれる．形は「短剣」を表している．

*12)　テンソル代数あるいは相対性理論において，「添え字の上げ下げ」と呼ばれる演算操作がよく使われる．本節の文脈からは明らかではないが，ベクトルを一形式に移す操作は「添え字の下げ」と呼ばれている．

共役写像 $D_V : V \to V^*$ と $D_W : W \to W^*$ を区別して使おう．双対空間のところで説明したように，$T : V \to W$ には双対作用素 $T^* : W^* \to V^*$ が伴う．これに写像 $D_V : V \to V^*$ と $D_W : W \to W^*$ を組み合わせて，

$$T^\dagger := D_V^{-1} \circ T^* \circ D_W \ : W \to V \tag{5.40}$$

を定義すると，これは（反線形写像を 2 回通すので）線形写像になっている．$T^\dagger$ を T の**随伴作用素** (adjoint operator) という．定義をたどっていくと，

$$\begin{aligned}(T^\dagger \boldsymbol{w}|\boldsymbol{v})_V &= (D_V^{-1} \circ T^* \circ D_W(\boldsymbol{w})|\boldsymbol{v})_V \\ &= (T^* \circ D_W(\boldsymbol{w}))(\boldsymbol{v}) \\ &= (D_W(\boldsymbol{w}))(T\boldsymbol{v}) \\ &= (\boldsymbol{w}|T\boldsymbol{v})_W \end{aligned} \tag{5.41}$$

が示される．1 行目から 2 行目の式変形では $D_V^{-1} : V^* \to V$ の定義

$$(D_V^{-1}(f)|\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v})$$

を用いた．2 行目から 3 行目では $T^* : W^* \to V^*$ の定義

$$(T^* g)(\boldsymbol{v}) = g(T\boldsymbol{v})$$

を用いた．3 行目から 4 行目では $D_W : W \to W^*$ の定義をそのまま用いた．関係式 (5.41) の両辺の複素共役をとると

$$(\boldsymbol{v}|T^\dagger \boldsymbol{w}) = \overline{(\boldsymbol{w}|T\boldsymbol{v})}$$

となり，$T^\dagger$ の行列要素は，T の転置行列の要素の複素共役であることがわかる．$T^\dagger$ は T のエルミート共役とも呼ばれる．

2 つの作用素 $T_1, T_2 : V \to W$ の和とスカラー倍について (5.20) に対応して，

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^\dagger = \overline{\lambda}_1 T_1^\dagger + \overline{\lambda}_2 T_2^\dagger \tag{5.42}$$

が成り立つこともわかる．また，線形作用素 $S : U \to V$ と $T : V \to W$ があるときは，$S^\dagger : V \to U$ と $T^\dagger : W \to V$ が誘導され，(5.18) の結果として，

$$(T \circ S)^\dagger = S^\dagger \circ T^\dagger \tag{5.43}$$

が成り立つ．以上をまとめると，$K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ 上の内積空間を対象とし，線形作用素を射とする圏 Inn_K において，対象を $V^\dagger = V$ と不変にとどめ，射 $T : V \to W$ を射 $T^\dagger : W \to V$ に移す操作を**随伴関手** (adjoint functor)

$$\dagger : \mathit{Inn}_K \rightsquigarrow \mathit{Inn}_K$$

と呼ぶことにすると，これは反変関手であることがわかる．

内積空間 V の部分空間 M に対して

$$M^\perp := \{\boldsymbol{v} \in V \,|\, \forall \boldsymbol{m} \in M\ ((\boldsymbol{v}|\boldsymbol{m}) = 0)\} \tag{5.44}$$

で定義される V の部分空間 $M^\perp$ を M の**直交補空間** (orthogonal complement)

という．任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}'$ となるような $\boldsymbol{m} \in M$ と $\boldsymbol{m}' \in M^{\perp}$ が一意的に存在する．このことを

$$V = M \oplus M^{\perp} \tag{5.45}$$

と書き，V の**直交分解** (orthogonal decomposition) という．共役写像 $D : V \to V^*$ によって $M^{\perp}$ は零化空間 $D(M^{\perp}) = M'$ に移される．また，

$$(M^{\perp})^{\perp} = M \tag{5.46}$$

が成り立つ．(5.41) で示した関係式

$$(T^{\dagger}\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w}|T\boldsymbol{v}) \tag{5.47}$$

で,「この式イコール 0」という式を $\boldsymbol{v}$ に対する条件式と見なして，集合 $\{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall \boldsymbol{w} \in W\,((T^{\dagger}\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w}|T\boldsymbol{v}) = 0)\}$ を作れば

$$(\operatorname{Im} T^{\dagger})^{\perp} = \operatorname{Ker} T \subset V \tag{5.48}$$

が従うし，これを $\boldsymbol{w}$ に対する条件式と見なして，集合 $\{\boldsymbol{w} \in W \mid \forall \boldsymbol{v} \in V\,((T^{\dagger}\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w}|T\boldsymbol{v}) = 0)\}$ を作れば

$$\operatorname{Ker} T^{\dagger} = (\operatorname{Im} T)^{\perp} \subset W \tag{5.49}$$

を結論する（ここでも V と W が互いに相手を観測し合い，規定し合っている双対性が見て取れる）．したがって，V, W はそれぞれ

$$V = (\operatorname{Im} T^{\dagger})^{\perp} \oplus \operatorname{Im} T^{\dagger} = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T^{\dagger}, \tag{5.50}$$

$$W = (\operatorname{Im} T)^{\perp} \oplus \operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T^{\dagger} \oplus \operatorname{Im} T \tag{5.51}$$

と直交分解される．$V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T^{\dagger}$ のうち $\operatorname{Ker} T$ は T によって 0 に持って行かれ，その直交補空間 $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \operatorname{Im} T^{\dagger}$ は T によって $W = \operatorname{Ker} T^{\dagger} \oplus \operatorname{Im} T$ のうちの $\operatorname{Im} T$ に同形に移される．逆に，$T^{\dagger}$ は $\operatorname{Im} T \subset W$ を $\operatorname{Im} T^{\dagger} \subset V$ に同形に移す．T の像からはみ出した直交補空間 $(\operatorname{Im} T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^{\dagger}$ は $T^{\dagger}$ によって消される部分になっている．この様子を表した概念図が図 5.1 である．こうしてみると，$\operatorname{Ker} T$ は T がどれくらい「単射でない」かを示すものであり，$\operatorname{Ker} T^{\dagger}$ は T がどれくらい「全射でない」かを示す部分だということがわかる．また，

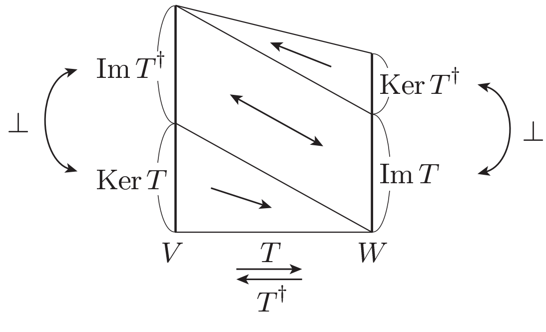


図 5.1　作用素 T と随伴作用素 $T^{\dagger}$.

図 5.1 を見ると指数定理

$$\operatorname{index} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^\dagger = \dim V - \dim W$$

は当たり前のことだと感じられるのではないだろうか．

内積空間の圏においては，随伴関手

$$\dagger : V \rightsquigarrow V, \qquad T \rightsquigarrow T^\dagger$$

と双対関手

$$* : V \rightsquigarrow V^*, \qquad T \rightsquigarrow T^*$$

という 2 種類の反変関手が定義されているが，随伴の定義 (5.40) から，これらの間には

$$\begin{tikzcd}
 & & V \arrow[dd, "D_V"] & W \arrow[l, "T^\dagger"'] \arrow[dd, "D_W"] \\
V \arrow[r, "T"] & W \arrow[ur, squiggly, "\dagger"] \arrow[dr, squiggly, "*"'] & & \\
 & & V^* & W^* \arrow[l, "T^*"]
\end{tikzcd}$$

という可換図式が成り立っている．このとき，D は随伴関手から双対関手への**自然変換** (natural transformation) と呼ばれるものの一例になっている．が，自然変換の定義には立ち入らないことにする．

5.6.6　加群の生成関手と忘却関手

関手という概念は，それと意識されないうちに使われていることを再認識してもらうために，すでに通過した話題から関手の例を拾い上げてみよう．

4.6 節で自由加群という概念を導入したが，集合 X に対して，有限個の元 $x_1, \cdots, x_k \in X$ と，整数係数 $m_1, \cdots, m_k$ によって元

$$c = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i$$

を定め，係数がすべて 0 であるような元を 0 と定め，このような元全体のなす集合を $\mathscr{M}(X)$ と書き，

$$c + c' = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i + \sum_{i=1}^{k} m_i' x_i := \sum_{i=1}^{k} (m_i + m_i') x_i$$

で和を定めることによって定義される加群 $\mathscr{M}(X)$ のことを X で生成される自由加群と呼んだのであった．そうすると，集合 X から加群 $\mathscr{M}(X)$ を作る操作は，集合の圏 Set から加群の圏 Mod への関手を定めると期待される．

写像 $f : X \to Y$ があれば，写像 $\mathscr{M}(f) : \mathscr{M}(X) \to \mathscr{M}(Y)$ を，元

$$c = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i \ \in \mathscr{M}(X)$$

に

$$(\mathscr{M}(f))(c) := \sum_{i=1}^{k} m_i f(x_i) \ \in \mathscr{M}(Y)$$

を対応させる写像と定めることは，無理のない発想であろう．こう定めておくと，写像 $\mathscr{M}(f) : \mathscr{M}(X) \to \mathscr{M}(Y)$ は加群の準同形写像になる．さらに，写像 $g : Y \to Z$ があれば

$$\mathscr{M}(g \circ f) = \mathscr{M}(g) \circ \mathscr{M}(f)$$

を満たし，恒等写像 $1_X : X \to X$ に対して

$$\mathscr{M}(1_X) = 1_{\mathscr{M}(X)}$$

を満たすことがわかるので，

$$\mathscr{M} : \mathit{Set} \rightsquigarrow \mathit{Mod}$$

は共変関手である．

集合 X から生成された加群 $\mathscr{M}(X)$ に対して，写像

$$i : X \to \mathscr{M}(X), \qquad x \mapsto 1 \cdot x$$

は単射であり，包含写像と見なすことができる．言わば，$\mathscr{M}(X)$ は X の元を「元手」にして元を増やして作った集合なのだから，$\mathscr{M}(X)$ は素直に X の元を含んでおり，集合 X は $\mathscr{M}(X)$ の部分集合と見なせる．しかし，圏論の立場から見ると，$i : X \to \mathscr{M}(X)$ という矢印は，*Set* の対象である X と，*Mod* の対象である $\mathscr{M}(X)$ を結んでおり，このままだと i を射と呼ぶのは具合が悪い．i を射として認識するためには，*Mod* の対象である $\mathscr{M}(X)$ を *Set* の対象に変えておく方が据わりがよい．

そこで，加群の圏 *Mod* から集合の圏 *Set* への関手 $\mathscr{U}$ を次のように定める．加群 M というものは集合である．とくに和という演算の定義された集合である．加群 M を集合と見なしたものを $\mathscr{U}(M)$ と書くことにする．つまり，M においては $c, c' \in M$ の和 $c + c' \in M$ という演算が意識されていたが，加群 M をたんなる元の集まり $M = \{c, c', \cdots\}$ と見なして素朴な集合のレベルに格下げしたものを，そのまま M と書いてもよいのだが，あえて $\mathscr{U}(M)$ と書くことにする．念を押すが，$\mathscr{U}(M) = \{c, c', \cdots\}$ は M と同じ集合である．ただ，$\mathscr{U}(M)$ は「加群だったことを忘れた集合」なのである．加群の準同形写像

$$\phi : M_1 \to M_2$$

も，それが準同形であったことは忘れて，たんなる集合から集合への写像と見なし，記号をわざわざ増やして

$$\mathscr{U}(\phi) : \mathscr{U}(M_1) \to \mathscr{U}(M_2)$$

と書くことにする．こうして定められた

$$\mathscr{U} : Mod \rightsquigarrow Set$$

は共変関手になることが確かめられる（確かめるも何も，Mod の対象や射に $\mathscr{U}$ という記号をかぶせるだけなのだから，共変というより不変である）．このように定義された $\mathscr{U}$ を**忘却関手** (forgetful functor) という．こうしておくと，

$$i : X \to \mathscr{U}(\mathscr{M}(X)), \qquad x \mapsto 1 \cdot x \tag{5.52}$$

は圏 Set における射として認識される．

この他にも忘却関手の例を見つけることができる．例えば，ベクトル空間は和とスカラー倍という 2 種類の演算を備えた集合だが，スカラー倍のことを忘れてしまえば，加群として認識される．これはベクトル空間の圏 Vct_K から加群の圏 Mod への忘却関手である．ベクトル空間は加群の特別な場合だから，加群で成り立つ定理はベクトル空間に対しても成り立つ．

「忘れる」ことにわざわざ「忘却関手」などというものものしい名前をつけるのは奇異に感じられるかもしれない．数学は「定義していない言葉や記号を勝手に使ってはいけない」という原則を持つ．その一方で,「(読者は) 一度読んだことは決して忘れない」と想定している．つまり,「さっき V はベクトル空間と言ったではないか．それがいまはただの加群なのか？」といったことを見逃さずに指摘して来るような読者を想定して数学の本は書かれている．そのために「スカラー倍のことはいまは忘れましょう」ということもきちんと言葉と記号で表現するのである．そういう生真面目な態度は融通が利かないとも言えるが，我々が無意識・無反省にやってしまう思考を明確に位置づけて，思考のシステムを明瞭にする効果がある．それに，加群をたんなる集合と見なすという操作は，構造を要素に還元する働きがある．また，構造の中に固く組み込まれていた個を構造から解き放ち，新たな関係構築のための下地を提供することにもなる．忘却にはそういった積極的な効能がある．

5.7 直　積

関手の例はこれくらいにしておいて，圏論的発想，つまり「集合よりも射（写像）を優先させる」発想を具現化する別の例を挙げよう．

集合の直積という概念を取り上げてみよう．集合論のところで定義したが，2 つの集合 X, Y があったときに，それぞれの集合の元 $x \in X,\ y \in Y$ を組にして (x, y) という順序対を作り，順序対全体の集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

を直積集合と呼んだのであった．これは見ての通り，元を列挙して集合を規定

するという，集合論の外延的手法にもとづいた構成方法である．

直積集合にあたるものを圏論の立場ではどう定義するのか？ ある圏 $\mathscr{C}$ の 2 つの対象 X, Y に対して，以下の条件を満たす対象 P と射 $p : P \to X$ と $q : P \to Y$ があれば，(P, p, q) を X と Y の**直積** (direct product) という．（条件）任意の対象 A と任意の射 $f : A \to X$ と $g : A \to Y$ に対して，射 $h : A \to P$ で $p \circ h = f$ かつ $q \circ h = g$ を満たすものが一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
A \arrow[urr, "f"] \arrow[r, dotted, "h"'] \arrow[drr, "g"'] & P \arrow[ur, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

つまり，$A \to X$, $A \to Y$ という A から発する 2 本の矢は，$A \to P$ という 1 本の矢に束ねられ，いったん P を通ってから枝分かれする矢として表現できる，そのような分岐点 P を X と Y の直積と呼ぶと，この定義は言っている．また，このような射 h を $h = f \times g$ と書くこともある．

これでは何のことだかわかりにくいので，集合論の言葉に翻訳しよう．集合の圏では $P = X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ とおき，射 $p : P \to X$ は写像

$$p : P \to X, \qquad (x, y) \mapsto x,$$

射 $q : P \to Y$ は写像

$$q : P \to Y, \qquad (x, y) \mapsto y$$

とおけば上の条件を満たす．つまり，P は順序対 (x, y) の集合であり，p は (x, y) の x 成分だけをとってくる写像，q は (x, y) の y 成分だけをとってくる写像である．p も q も全射であり，それぞれ X への射影，Y への射影と呼ばれる（図 1.6 を参照のこと）．任意の写像 $f : A \to X$ と $g : A \to Y$ が与えられたときに，写像 h を

$$h : A \to P, \qquad a \mapsto h(a) := (f(a), g(a))$$

と定めると，$p(h(a)) = f(a)$ かつ $q(h(a)) = g(a)$ を満たしていることは一目でわかる．

卑近な例を引き合いにしながら直積の意義をもう少し掘り下げてみよう．高度に抽象化され洗練された概念を説明するのに卑近な例を持ち出すのは「幼稚な例え話」だと思われるかもしれない．たしかに何らかの抽象概念を説明しようとするときに「夾雑物が多すぎて問題の焦点がわかりにくい例」を引き合いに出すのは，理解よりも誤解を助けるという意味で好ましくないと思う．しかし，純粋な概念を抽出する源となった具体的で典型的な事例を吟味することは，概念を文脈に布置するために必要なことだと思う．そういった狙いから，ここ

では直積の概念を卑近化する．集合 X として思い浮かべてほしいのは，例えば「色」の集合である：

$$X = \{\text{赤}, \text{黄}, \text{緑}\}.$$

集合 Y としては，例えば「味」の集合を思い浮かべてみよう：

$$Y = \{\text{甘い}, \text{辛い}, \text{酸っぱい}, \text{水っぽい}\}.$$

そして，集合 A としては，例えば「果物」の集合を考える：

$$A = \{\text{レモン}, \text{りんご}, \text{スイカ}\}.$$

写像 $f : A \to X$ は

$$f(\text{レモン}) = \text{黄}$$

といったものである．つまり「レモンは黄色い」という文である．写像 $g : A \to Y$ は，例えば

$$g(\text{レモン}) = \text{酸っぱい}$$

といったものである．つまり「レモンは酸っぱい」という文である．

ここで色と味という 2 種類の形容詞をまとめて，1 つの語を作ろう．例えば「赤くて甘い」という組み合わせ語を作る．このような複合語の集合が直積集合に他ならない：

$$X \times Y = \{(\text{赤}, \text{甘い}), (\text{赤}, \text{辛い}), (\text{赤}, \text{酸っぱい}), \cdots, (\text{緑}, \text{水っぽい})\}.$$

こういう語彙を用意しておけば，$f : A \to X$ と $g : A \to Y$ という 2 つの写像は $h : A \to X \times Y$ という 1 つの写像にまとめられる：

$$h(\text{レモン}) = (\text{黄}, \text{酸っぱい}).$$

これは先ほどの 2 文を「レモンは黄色くて酸っぱい」という 1 文にまとめたものだ．しかも $X \times Y$ には (黄, 酸っぱい, 丸い) や (黄, 酸っぱい, 三角) や (濃緑, 薄甘) といった余分な語は含まれていないので，$A \to X \times Y$ のところにあてはまる，まとめの文 h はただ 1 通りしかない：

$$\begin{tikzcd}
& & \text{黄} \\
\text{レモン} \arrow[urr, "f"] \arrow[r, dotted, "h"'] \arrow[drr, "g"'] & (\text{黄}, \text{酸っぱい}) \arrow[ur, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
& & \text{酸っぱい}
\end{tikzcd}$$

英文法の用語で言えば，写像 $f : A \to X$ の A にあてはまるものは主語であり，X にあてはまるものは補語である．写像 f は動詞だというのが適当だろう．「スイカは赤い」というように，“a is x” という形式でそれぞれの果物の色を記

述するのが $f(a)=x$ という写像なのである．

写像 $g:A\to Y$ の Y にあてはまるのは X とは別種の補語である．こちらは「スイカは水っぽい」と，果物の味を記述している．補語は列挙・組み合わせが可能なので,「赤くて水っぽい」といった複合語を作って，直積集合 $X\times Y$ という複合語集合を作ることができる．もちろん「赤くて水っぽい」から「赤い」だけを取り出すことはいつでもできる．これが $p:X\times Y\to X$ という射影の役割に他ならない.「赤くて水っぽい」から「水っぽい」だけを取り出すことも同様に可能である．これが $q:X\times Y\to Y$ という射影である．そうすると，A から出る 2 本の矢 $f:A\to X, g:A\to Y$ は，述語をまとめると $h:A\to X\times Y$ という 1 本の矢にまとめられ，その後 p,q に従って枝分かれしたものに等しい．これが $p\circ h=f, q\circ h=g$ ということに他ならない．

$$\begin{tikzcd} & X \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dotted, "h=", "f\times g"'] \arrow[dr, "g"'] & X\times Y \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\ & Y \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & \text{色} \\ \text{果物} \arrow[ur, "\text{スイカは赤い}"] \arrow[r, dotted, "\text{スイカは}", "\text{赤くて水っぽい}"'] \arrow[dr, "\text{スイカは水っぽい}"'] & \text{色}\times\text{味} \arrow[u, "\text{色だけに注目}"'] \arrow[d, "\text{味だけに注目}"] \\ & \text{味} \end{tikzcd}$$

$A\to X$ という射があるときに A は X の上流にあるといい，$A\to X$ と $A\to Y$ という射があるときに A は X と Y の共通上流にあるということにすると，直積 $X\times Y$ とは，X と Y の共通上流にある対象のうち最も下流にある対象だといえる．$X\times Y$ は X と Y の上界の下限という特徴づけができる．共通上流 A から流れ落ちてくるすべての射 $f:A\to X$ と $g:A\to Y$ は，いったん共通の対象 $X\times Y$ に射 $h:A\to X\times Y$ で流れ込んでから，射 $p:X\times Y\to X$ と $q:X\times Y\to Y$ に沿って分岐したものに等しい．しかもこのような合流射 h はただ 1 通りしかない．そうなるように $X\times Y$ は余計なものを含まず，ぎりぎりに小さく作ってある．このようにすべてのものの受け皿となる，最も無駄のない対象と射 $(X\times Y,p,q)$ は**普遍性** (universality) を持つという．

以上の考察から，元を列挙して直積集合を作るということをしなくても,「集合より射を優先」させて，射のネットワークを通して直積が持つべき性質を完全に規定し，直積を内包的に決定する，という論法が成立し得ることを納得してもらえただろうか．この圏論的直積の定義に従えば，対象が集合ではないときでも，また，たとえ対象が集合であってもその集合の元に立ち入ることなく，射のネットワークだけをたどって直積が定義されるのである．

5.8 直　和

せっかく圏論的直積の定義までやったのだから，それに双対な概念である圏論的直和も説明しよう．

まず集合論の立場で和集合の定義を確認しよう．2 つの集合 A, B があったときに A, B の和集合 $A \cup B$ は「$a \in A \cup B$ は『$a \in A$ または $a \in B$』のことである」と宣言することによって定義される．言い換えると，集合 A の元と集合 B の元を合わせて集めたものが和集合 $A \cup B$ であった．とくに，$A \cap B = \varnothing$ のとき，$A \cup B$ のことを $A \amalg B$ と書き，直和集合と呼んだ．

では圏論の立場では直和にあたるものはどう定義されるのか．ある圏 $\mathscr{C}$ の 2 つの対象 A, B に対して，以下の条件を満たす対象 S と射 $i : A \to S$ と $j : B \to S$ があれば，(S, i, j) を A と B の**直和** (direct sum) または**余積** (coproduct) という．（条件）任意の対象 Z と任意の射 $f : A \to Z$ と $g : B \to Z$ に対して，射 $h : S \to Z$ で $h \circ i = f$ かつ $h \circ j = g$ を満たすものが一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
& S \arrow[r, dotted, "h"'] & Z \\
B \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

つまり，$A \to Z, B \to Z$ という Z で合流する 2 本の矢は，Z の手前の S で合流してから出て来る 1 本の矢に束ねられる，そのような合流点 S を A と B の直和と呼ぶのである．また，このような射 h を $h = f \amalg g$ と書くこともある．言い換えると，A と B の共通下流にある対象のうち最も上流に位置する対象 S のことを A と B の直和という．

上述の直和は，集合の圏では，集合の直和集合になる．つまり $S = A \amalg B$ とればよい．また，射 $i : A \to S$ は包含写像に他ならない：

$$i : A \to S, \qquad a \mapsto a.$$

射 $j : B \to S$ も包含写像である：

$$j : B \to S, \qquad b \mapsto b.$$

つまり，S は A の元と B の元をいっしょくたに集めた集合であり，i は A の元を S に入れる写像であり，j は B の元を S に入れる写像である．集合 A と B には共通の元はないとする．あったとしても，$c \in A$ と $c \in B$ は S の中では区別して，$i(c) = c_A \in S$ と $j(c) = c_B \in S$ を別の元と見なす．写像 $f : A \to Z$ と $g : B \to Z$ の直和写像 $h : S \to Z$ は次のように構成される：

$$h : S \to Z, \qquad s \mapsto h(s) := \begin{cases} f(s) & (s \in A \text{ のとき}) \\ g(s) & (s \in B \text{ のとき}) \end{cases}$$

こうしておけば，$h(i(s)) = f(s)$ かつ $h(j(s)) = g(s)$ が成り立つのは当然だろう．

再び卑近な例を引き合いに出して直和の意味を吟味しよう．集合 A として

$$A = \{\text{ レモン, りんご, スイカ }\}$$

を使うことにする．集合 B は

$$B = \{\text{ いちご, キーウィフルーツ, レモン }\}$$

としよう．集合 Z には，例えば「重さ」の集合をとってきてもよい：

$$Z = \{\cdots, 10\,\mathrm{g}, 20\,\mathrm{g}, 30\,\mathrm{g}, 40\,\mathrm{g}, \cdots\}.$$

ここで g は「グラム」という重さの単位．写像 $f : A \to Z$ と $g : B \to Z$ がいかなるものであるかについてはもう説明の必要はないだろうが，一例を書けば

$$f(\text{りんご}) = 300\,\mathrm{g}$$

といった具合だ．レモンは集合 A にも集合 B にも属しているが，A に入っているレモンを「レモン$_A$」と呼び，B に入っているレモンを「レモン$_B$」と呼んで，別物扱いしよう．

そうすると直和集合 $S = A \amalg B$ は，それぞれの元を列挙した集合

$$S = \{\text{ レモン}_A, \text{りんご, スイカ, いちご, キーウィフルーツ, レモン}_B\}$$

に他ならない．このように果物の集合を合併しておけば，$f : A \to Z$ と $g : B \to Z$ という 2 つの写像は $h : S \to Z$ という 1 つの写像にまとめられる：

$$h(\text{りんご}) = 300\,\mathrm{g}.$$

こんなことができるのは当たり前すぎてつまらないと感じられるかもしれないが，図式の矢をたどって意味を読み取ってほしい．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \amalg B \arrow[r, dotted, "h=" above, "f \amalg g" below] & Z \\
B \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{\text{りんご}\} \arrow[d, "\text{包含}"'] \arrow[dr, "\text{りんごは}300\mathrm{g}"] & \\
\{\text{りんご, いちご}\} \arrow[r, dotted, "\text{りんごは}300\mathrm{g}\text{で}" above, "\text{いちごは}15\mathrm{g}" below] & \{15\mathrm{g}, 300\mathrm{g}, \cdots\} \\
\{\text{いちご}\} \arrow[u, "\text{包含}"] \arrow[ur, "\text{いちごは}15\mathrm{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

写像 $f : A \to Z$ の A にあてはまるものは主語であり，Z にあてはまるものは補語である．写像 $g : B \to Z$ の B にあてはまるのは A とはまた別の主語である．主語というものは取り替えが可能なので，主語になる候補の語を同列に並べて，直和集合 $A \amalg B$ という大きな主語集合を作ることができる．もちろん A のメンバーである「りんご」は $A \amalg B$ のメンバーでもある．これが $i : A \to A \amalg B$ という包含写像の役割である．B のメンバーである「いちご」

も $A \amalg B$ のメンバーである．この認識が $j : B \to A \amalg B$ という包含写像である．そうすると，Z を共通の補語集合とする 2 つの動詞 $f : A \to Z,\ g : B \to Z$ は，$i : A \to A \amalg B,\ j : B \to A \amalg B$ という写像で主語をまとめておけば，$h : A \amalg B \to Z$ という 1 つの動詞で語られる．しかも，$A \amalg B$ には「ぶどう」のような余分なものは含まれていないので，h は一意的である．この意味で，直和 $(A \amalg B, i, j)$ は普遍性を持つという．

直和は主語をまとめるものであり，A, B という主語集合から射を下った（普遍的な）合流点に $A \amalg B$ という「主語羅列」集合が現れた．それに対して，直積は補語（述語）をまとめるものであり，X, Y という補語集合から射をさかのぼった分岐点に $X \times Y$ という「複合述語」集合が現れた．図式を比較すると，直和と直積，主語と述語は矢の向きをひっくり返した構造になっていることが見て取れる．このようなところにも双対性の存在がうかがえる．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
& A \amalg B \arrow[r, dotted, "h="', "f \amalg g"] & Z \\
B \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & X \\
C \arrow[urr, "f"] \arrow[drr, "g"'] \arrow[r, dotted, "h=", "f \times g"'] & X \times Y \arrow[ur, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

5.9 部分集合の圏における直積と直和

圏論における直積と直和の定義は，対象を取り巻く射に依存しており，したがって圏が異なれば当然違った結果をもたらす．そのことを Set とは別の圏で確かめてみよう．

まず集合 X を適当に選んで固定しておく．X のすべての部分集合 $A, B, \cdots$ を対象とし，包含写像 $i : A \to B$ を射とすると，圏が構成される．この圏を $\mathscr{P}(X)$ と書くことにしよう*13)．圏 $\mathscr{P}(X)$ においては，$A \subset B$ のときに $A \to B$ という射がただ 1 つあり，$A \not\subset B$ ならば A から B への射はない．この圏では，X に向かってすべての対象から射が入って来るし，空集合 $\varnothing$ からはすべての対象に向けて射が出て行く．射を上から下に向けて書くことにすると，空集合のすぐ下にはただ 1 つの元からなる部分集合が並ぶことになる．$X = \{a, b, c\}$ の場合について圏 $\mathscr{P}(X)$ を次の図に書いておく．当然のことながら，射をたどって下流に下るほど大きな部分集合になる．なお，この図にはすべての射が書き込んであるわけではない（2 つ以上の射の合成で作られる射と恒等射は書かれていない）．

*13) 部分集合全体のなす集合のことをベキ集合 (power set) と呼んだが，その頭文字 P をとって，X の部分集合全体のなす圏のことを $\mathscr{P}(X)$ を書いた．

$$\mathscr{P}(X) \qquad \begin{tikzcd} & \varnothing \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \{a\} \arrow[d] \arrow[dr] & \{b\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \{c\} \arrow[dl] \arrow[d] \\ \{a,b\} \arrow[dr] & \{a,c\} \arrow[d] & \{b,c\} \arrow[dl] \\ & X = \{a,b,c\} & \end{tikzcd}$$

部分集合の圏における直積や直和とはいかなるものだろうか？ もう一度，直積の圏論的定義を思い出すと，対象 A と B の直積とは，A と B の共通上流の最下点，A と B に入る射が最後に分岐する点となる対象のことであった．そのような要請を満たすものは，X の部分集合の圏 $\mathscr{P}(X)$ においては，A より小さく，かつ B より小さく，かつ最大の部分集合ということになり，A と B の交わり $A \cap B$ に他ならない．下図では，$A \cap B$ と A の間にもいくつかの対象と射がはさまっている可能性があることを思い出すために（どんな対象がはさまっているか考えてみてほしい），$A \cap B$ と A の間に黒点を書き記した．その他の黒点も同様の意味で置いてある．

さらに直和の圏論的定義を思い出すと，対象 A と B の直和とは，A と B の共通下流の最上点，A と B から出る射が最初に合流する点となる対象のことであった．圏 $\mathscr{P}(X)$ において，そのようなものは，A より大きく，かつ B より大きく，かつ最小の部分集合ということになり，A と B の合併集合 $A \cup B$ に他ならない．A と B から出る射の合流点は他にもあり得るのだが（例えば一番下にある X のところでは確実に合流する），なるべく上の方に現れる合流点が $A \cup B$ なのだ．

$$\mathscr{P}(X) \qquad \begin{tikzcd} & A \cap B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & A \cup B & \end{tikzcd}$$

集合の圏 Set では，直積はいわゆる集合論的直積 $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ になったし，直和は集合論的直和 $X \amalg Y = \{x \mid x \in X$ または $x \in Y$ であり, X の元と Y の元は別物として扱う $\}$ になった．ところが，X の部分集合の圏 $\mathscr{P}(X)$ では，直積は集合論的交わり $A \cap B$ になり，直和は集合論的合併 $A \cup B$ になるのだ．圏が異なれば，同一の定義も異なった解釈を与えられ，結果的に構成されるものも違ってくるということをこれらの例は示している．加群の圏 Mod や群の圏 Grp でも直積や直和は圏論的な定義が通用するが，結果

的には別種の対象が現れる．さらに別の圏では直積や直和が存在しないこともあり得る．

1つの圏を選ぶということは，対象を取り囲む文脈を選ぶことだとも言える．さまざまな概念を，具体的な存在様式や解釈系を超えて横断的に定義する力が圏論にはあると言えるし，文脈に依存して解釈し直す余地が圏論には残してあるとも言える．

圏 $\mathscr{P}(X)$ について1つコメントしておく．X の部分集合 A に対しては補集合 A^c が定義できる．$A \subset B$ のとき $A^c \supset B^c$ なので，補集合をとる操作 $c : A \rightsquigarrow A^c$ は圏 $\mathscr{P}(X)$ から $\mathscr{P}(X)$ 自身への反変関手を定める．補集合関手は射の向きを反転させるので，直積と直和が入れ換わる．

$$
\begin{tikzcd}
 & A\cap B \arrow[dl] \arrow[dr] & & {} \arrow[r, rightsquigarrow, "c"] & {} & & A^c\cup B^c & \\
A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] & {} \arrow[r, rightsquigarrow, "c"] & {} & A^c \arrow[ur] & & B^c \arrow[ul] \\
 & A\cup B & & {} \arrow[r, rightsquigarrow, "c"] & {} & & A^c\cap B^c \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

5.10 テンソル積

5.10.1 多重線形写像としてのテンソル積

ベクトル空間の圏 Vct_K でしばしば使われる演算であるテンソル積について，集合論的定義と圏論的定義の両方を説明しよう．テンソル積は次章でテンソル場や微分形式を扱うときに多用するので，そのためにもここで準備しておこう．

体 K 上のベクトル空間 $V_1, V_2, \cdots, V_r$ の直積集合からベクトル空間 W への写像

$$T : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \to W, \qquad (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r) \mapsto T(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$$

は，r 個の変数を持ち，W に値を持つ関数であるが，これが各変数について線形であるとき，T を**多重線形写像** (multilinear mapping) という．例えば $\boldsymbol{v}_1$ を $\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}$ $(\lambda, \mu \in K;\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1)$ で置き換えたとき，

$$T(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r) = \lambda T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r) + \mu T(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$$

が成立する．同様の線形性が $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ についても成立する．$V_1, V_2, \cdots, V_r$ から W への多重線形写像全体の集合を

$$L_K(V_1, V_2, \cdots, V_r; W) := \{\, T : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \to W,\ \text{多重線形}\,\}$$

と書くことにする．$L_K(\cdot)$ の括弧内のコンマ「,」とセミコロン「;」の使い分けに注意してほしい．$T, T' \in L_K(V_1, V_2, \cdots, V_r; W)$ のスカラー倍 λT や和 $T + T'$ も定義されるので $L_K(V_1, V_2, \cdots, V_r; W)$ もまたベクトル空間である．

さて，余ベクトル $f \in V^*$ とベクトル $\boldsymbol{w} \in W$ の**テンソル積** (tensor product) $f \otimes \boldsymbol{w}$ なるものを

$$f \otimes \boldsymbol{w} : V \to W, \qquad \boldsymbol{v} \mapsto (f \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}) := \langle f, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{w} \tag{5.53}$$

という写像のことと定める．解説すると，$f \in V^*$ に $\boldsymbol{v} \in V$ を噛ませてできた数 $\langle f, \boldsymbol{v} \rangle \in K$ でベクトル $\boldsymbol{w} \in W$ をスカラー倍した $\langle f, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{w}$ が写像 $(f \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v})$ の出力結果だ．この写像 $f \otimes \boldsymbol{w} : V \to W$ が線形写像であることはすぐわかる．つまり，$f \otimes \boldsymbol{w}$ は $L_K(V; W)$ の元である．

$f \otimes \boldsymbol{w}$ は $g \in W^*$ を入力したときに $(f \otimes \boldsymbol{w})(g) \in V^*$ を出力する写像と見なすこともできる：

$$f \otimes \boldsymbol{w} : W^* \to V^*, \qquad g \mapsto (f \otimes \boldsymbol{w})(g) := \langle g, \boldsymbol{w} \rangle f. \tag{5.54}$$

今度は $\boldsymbol{w} \in W$ に $g \in W^*$ を食わせてスカラー化した $\langle g, \boldsymbol{w} \rangle$ を f にかけた．つまり，$f \otimes \boldsymbol{w}$ は $L_K(W^*; V^*)$ の元と見なすこともできる．

さらには $f \otimes \boldsymbol{w}$ は 2 変数 $\boldsymbol{v} \in V$ と $g \in W^*$ を入力したときに $(f \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}, g) \in K$ を出力する 2 重線形写像と見なすこともできる：

$$f \otimes \boldsymbol{w} : V \times W^* \to K, \qquad (\boldsymbol{v}, g) \mapsto (f \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}, g) := \langle f, \boldsymbol{v} \rangle \cdot \langle g, \boldsymbol{w} \rangle. \tag{5.55}$$

右辺の $\langle f, \boldsymbol{v} \rangle \cdot \langle g, \boldsymbol{w} \rangle$ は体 K の積である．こうして $f \otimes \boldsymbol{w}$ は $L_K(V, W^*; K)$ の元と見なせる．

有限個の $f_i \otimes \boldsymbol{w}_i$ ($f_i \in V^*$, $\boldsymbol{w}_i \in W$) をスカラー倍して和をとった

$$\sum_i \lambda_i (f_i \otimes \boldsymbol{w}_i) \tag{5.56}$$

という元も

$$\left(\sum_i \lambda_i (f_i \otimes \boldsymbol{w}_i) \right) (\boldsymbol{v}) := \sum_i \lambda_i \langle f_i, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{w}_i$$

とおけば線形写像 $V \to W$ になっている．(5.56) のような線形結合全体のなす集合を $V^* \otimes W$ と書き，ベクトル空間 V^* と W の**テンソル積空間** (tensor product space) と呼ぶことにする．そうすると，上の議論は

$$V^* \otimes W \subset L_K(V; W), \qquad V^* \otimes W \subset L_K(W^*; V^*)$$

などの部分空間の関係があることを示しているが，じつは

$$V^* \otimes W = L_K(V; W) = L_K(W^*; V^*) = L_K(V, W^*; K) \tag{5.57}$$

という線形同形の関係が成立する．容易に確認できることだが，V^* あるいは W における線形結合は，そのまま $V^* \otimes W$ の線形結合になって現れる：

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \otimes \boldsymbol{w} = \lambda_1 (f_1 \otimes \boldsymbol{w}) + \lambda_2 (f_2 \otimes \boldsymbol{w}), \tag{5.58}$$

$$f \otimes (\lambda_1 \boldsymbol{w}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{w}_2) = \lambda_1 (f \otimes \boldsymbol{w}_1) + \lambda_2 (f \otimes \boldsymbol{w}_2). \tag{5.59}$$

つまり，テンソル積を作る操作

$$\tau : V^* \times W \to V^* \otimes W, \qquad (f, \boldsymbol{w}) \mapsto f \otimes \boldsymbol{w} \tag{5.60}$$

は2重線形写像である．とくにスカラー倍はどの元にかけても同じである：

$$(\lambda f) \otimes \boldsymbol{w} = f \otimes (\lambda \boldsymbol{w}) = \lambda(f \otimes \boldsymbol{w}). \tag{5.61}$$

これらの性質からテンソル積空間 $V^* \otimes W$ はたんなる直積集合 $V^* \times W$ ではないことがわかるだろう．$(\lambda f, \boldsymbol{w})$ と $(f, \lambda \boldsymbol{w})$ は直積集合 $V^* \times W$ の元としては別物である．これらを同一視することによってテンソル積は定義されると言ってよい．また $(f_1, \boldsymbol{w}_1)$ と $(f_2, \boldsymbol{w}_2)$ の和は直積集合 $V^* \times W$ においては定義されないが，テンソル積空間 $V^* \otimes W$ は $f_1 \otimes \boldsymbol{w}_1 + f_2 \otimes \boldsymbol{w}_2$ という和を許容する．こうして作られた元 $f_1 \otimes \boldsymbol{w}_1 + f_2 \otimes \boldsymbol{w}_2$ は，もはや直積集合 $V^* \times W$ の元ではない．

$V^* \otimes W$ もベクトル空間であることを認めれば，$f \otimes \boldsymbol{w}$ は

$$f \otimes \boldsymbol{w} : K \to V^* \otimes W, \qquad \lambda \mapsto \lambda(f \otimes \boldsymbol{w}) \tag{5.62}$$

という線形写像を定めていると見てもよい．また，$V \otimes W^*$ というベクトル空間の存在も認めれば，$f \otimes \boldsymbol{w}$ は

$$f \otimes \boldsymbol{w} : V \otimes W^* \to K, \qquad \boldsymbol{v} \otimes g \mapsto (f \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v} \otimes g) := \langle f, \boldsymbol{v} \rangle \cdot \langle g, \boldsymbol{w} \rangle \tag{5.63}$$

という1変数の線形写像と見なしてもよい．

以上の議論をまとめよう．集合 $L_K(V;W)$ のことを $(V \to W)$，集合 $L_K(V_1, V_2; W)$ のことを $(V_1 \times V_2 \to W)$ などと書くことにすると，基本的な関係式として

$$(V \to K) = V^*, \tag{5.64}$$

$$(K \to V) = V, \tag{5.65}$$

$$V^{**} = V \tag{5.66}$$

という同形関係がある．1行目は双対空間の定義そのものである．2行目はベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は線形写像 $\tilde{\boldsymbol{v}} : K \to V, \lambda \mapsto \lambda \boldsymbol{v}$ とも見なせるという主張である．3行目はベクトル空間の双対性として述べた性質である．また，(1.50) のところで議論したように，2変数関数 $f(x, y)$ は変数 x を固定するごとに変数 y の関数を定めていると見なすことができるから，写像集合の同形関係として

$$(X \times Y \to Z) = (X \to (Y \to Z)) = (Y \to (X \to Z)) \tag{5.67}$$

という関係が認められる．そうすると，線形写像は次のように同値な書き換えができることがわかる：

$$
\begin{aligned}
&(V \to W)\\
&= (V \otimes W^* \to K) = (V \times W^* \to K) = (V \to (W^* \to K))\\
&= (W^* \to V^*) = (W^* \to (V \to K))\\
&= (K \to V^* \otimes W) = V^* \otimes W = (V \otimes W^*)^*.
\end{aligned} \tag{5.68}
$$

各行の一番左の表式を見比べると，形式的には，矢印の前後を移るときに V が V^* に，W が W^* に変わり，矢印の前または後が空欄になってしまうときは K を補うという規則と，$K \otimes V = V$ という規則で書き換えができることがわかる．1 行目から 2 行目に移るときは，まず $W = W^{**} = (W^* \to K)$ という規則で $(V \to W)$ を $(V \to (W^* \to K))$ に書き換えた．この 2 段階写像は正味のところ $(V \times W^* \to K)$ という 2 変数関数と同形であり，変数をテンソル積でまとめて $(V \otimes W^* \to K)$ という 1 変数関数の形に書くこともできる．2 行目から 3 行目に移るときは，2 変数関数 $(V \times W^* \to K)$ を $(W^* \to (V \to K))$ という 2 段階写像に見直し，$(V \to K) = V^*$ を用いて書き換えた．4 行目は，以上の 3 行のように書かれるものを $V^* \otimes W$ と定義するという宣言である．

いま観察した

$$
L_K(V; W) = V^* \otimes W \tag{5.69}
$$

という関係を一般化すれば，

$$
L_K(V_1, V_2, \cdots, V_r; W) =: V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_r^* \otimes W \tag{5.70}
$$

で右辺を定義するのは自然な発想であろう．余ベクトル $f_i \in V_i^*$ は 1 個のベクトル $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ を「食べて」，数 $\langle f_i, \boldsymbol{v}_i \rangle \in K$ を吐き出すものだ，と認識すれば，上式の集合の元は r 個のベクトル $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ を「食べて」，W の 1 個のベクトルを出力する装置である．具体的にはテンソル積の元は

$$
f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_r \otimes \boldsymbol{w} \ \in \ V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_r^* \otimes W
$$

のように書かれ，r 個のベクトルが代入されると 1 個のベクトルを出力する：

$$
\begin{aligned}
&(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_r \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r)\\
&= \langle f_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle \cdot \langle f_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle \cdots \langle f_r, \boldsymbol{v}_r \rangle \boldsymbol{w}.
\end{aligned}
$$

同様に，$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_r$ といったテンソル積空間はどのように定義されるか考えてみてほしい．

ちなみに，$f \in V^*$ と $\boldsymbol{v} \in V$ の対 $\langle f, \boldsymbol{v} \rangle$ は 2 重線形写像

$$
\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \to K \tag{5.71}
$$

であり，読み替え規則 (5.68) に従ってこれを写像 $I : V \to V^{**} = V$ に読み替えたものは恒等写像である．また，対は 1 重線形写像 $P : V^* \otimes V \to K$ とも

見なすことができる．任意の自己準同形写像 $A : V \to V$ は $A \in V^* \otimes V$ という元と見なすこともできるので，これを写像 P に代入して数

$$\mathrm{Tr}\, A := P(A) \in K \tag{5.72}$$

を定めることができる．$\mathrm{Tr}\, A$ を A の**トレース** (trace) とか縮約 (contraction) という．

さらに，$K = \mathbb{R}$ のときは，内積は 2 重線形写像

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R} \tag{5.73}$$

であり，これを (5.36) の共役写像 $D : V \to V^*$ と見なしたものが，いわゆる「添え字の下げ」であり，これの逆写像 $D^{-1} : V^* \to V$ が「添え字の上げ」である．さらに内積は $V^* \otimes V^*$ の元と見なすこともできる．こういった内積の書き換え・読み替えに慣れておくと，リーマン幾何学（あるいは一般相対性理論）の基礎概念である計量テンソルを理解するのはだいぶ楽になるだろう．

5.10.2　普遍対象としてのテンソル積空間

以上は，テンソル積の元を具体的に作って集めてテンソル積空間を構成するという集合論的定義であったが，圏論的にはどう定義するのが適当であろうか．圏論の精神からは，当然，具体的な元を集めてテンソル積空間を構成するという方針は採らない．

K 上のベクトル空間 V と W の**テンソル積空間**とは，K 上のベクトル空間 $V \otimes W$ と 2 重線形写像 $\tau : V \times W \to V \otimes W$ の組 $(V \otimes W, \tau)$ で以下の条件を満たすものである．（条件）任意のベクトル空間 X と任意の 2 重線形写像 $S : V \times W \to X$ に対して，1 重線形写像 $S' : V \otimes W \to X$ で $S' \circ \tau = S$ を満たすような S' が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "S"'] & V \otimes W \arrow[d, dotted, "S'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

次の図式を見ながらテンソル積空間の定義を吟味しよう．$S(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{v} \in V$ と $\boldsymbol{w} \in W$ を変数として持つ 2 変数関数であるが，あらかじめ 2 変数 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ を τ によって $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ という 1 変数にまとめておけば，1 変数関数 $S'(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})$ と見なせると言っている．$V \times W$ から発せられるいかなる 2 重線形写像 $S, T, \cdots$ も，いったん $V \otimes W$ を通り抜けて 1 重線形写像 $S', T', \cdots$ になる．もちろん τ も 2 重線形である．つまりテンソル積空間 $V \otimes W$ とは，$V \times W$ から下るすべての 2 重線形写像の最上点に位置する普遍的対象であり，テンソル積写像 $\tau : V \times W \to V \otimes W$ は，$V \times W$ から出るすべての 2 重線形写像が必ず通過する射なのである．

$$
\begin{tikzcd}
& V\times W \arrow[ddl, "S"'] \arrow[d, "\tau"] \arrow[ddr, "T"] & \\
& V\otimes W \arrow[dl, dotted, "S'"] \arrow[dr, dotted, "T'"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
$$

テンソル積が現れる実社会的な例を挙げてみよう．ある人数を動員して，ある時間をかけて，何らかの作業（掃除とかコンピュータプログラムの作成とか）をしてもらうという場面を想定しよう．動員人数 $\boldsymbol{v}$ と，作業時間 $\boldsymbol{w}$ を投入して得られる成果の量（掃除した床の面積とかプログラムのコードの長さとか，あるいは払うべき賃金とか）を $S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ とする．それが単純作業であれば，作業量は人数と時間に比例する，と期待するのは見積もりとしては悪くないだろう．つまり人数や時間を増やしたときに作業量は

$$
\begin{aligned}
&S(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}) = S(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w}) + S(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}),\\
&S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2) = S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1) + S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_2),\\
&S(\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \lambda\, S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\\
&S(\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{w}) = \lambda\, S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})
\end{aligned}
$$

という規則に従って増えるとする．1 行目の式は人数を $20+40=60$ 人にすれば，20 人のときの作業量と 40 人のときの作業量を足したのと等しい分の作業ができる，という意味だ．他の式も解釈は簡単であろう．こういう単純計算ができるとき，S は 2 重線形であるという．線形であるということは，作業員が増えたところで，協力し合って，よい知恵が浮かんで作業効率がよくなるということもないし，邪魔し合って，効率が悪くなることもないということである．お互いにまったく干渉せずに 1 人のときと同じペースで仕事をしたら，また，何時間働いても疲れることがなければ，こういう単純計算が成り立つ．線形とは恐ろしく単純なことなのである[*14)]．あまりにも単純化しすぎだと思われるなら，団体旅行を想定して，$\boldsymbol{v}$ は人数，$\boldsymbol{w}$ は宿泊日数，$S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ は宿泊費と考えてもいいだろう．

作業の例は，2 人で 6 か月働くのと，4 人で 3 か月働くのは仕事の分量としては等しい．そうすると，人数と時間をテンソル積した新しい量を定義して

$$
\begin{aligned}
1\,\text{人}\otimes 12\,\text{月} &= 2\,\text{人}\otimes 6\,\text{月} = 3\,\text{人}\otimes 4\,\text{月} = 4\,\text{人}\otimes 3\,\text{月} = 6\,\text{人}\otimes 2\,\text{月}\\
&= 12\,\text{人}\otimes 1\,\text{月}
\end{aligned}
$$

という等価関係を考えるのは自然な発想であろう．これらはどれも $\boldsymbol{v}\otimes$

*14) 世の中線形性が正しい，と私は主張するつもりはない．むしろ世の中では線形からずれていることの方が面白い．しかし，ものごとを分析するにあたっては，まずは線形性を想定してとりかかるのが簡単なのだ．

$\boldsymbol{w}$ =12人月（にんげつ）という等価な量を表している．これは (5.61) で述べたテンソル積の性質に他ならない．のべ掃除床面積 $S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ を計算するためには，2 人で 6 か月働いたのか，4 人で 3 か月働いたのかといった，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の内訳はどうでもよく，$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$ =12 人月という正味の作業量さえ知ればよい．1 人月で 5 万平方メートル掃除するといった基本的な見積もりさえあれば，一般の作業量から掃除面積を見積もる関数 $S'(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})$ ができる．このように人数と時間という異なった種類の量をまとめて「人月」という新しい種類の量を定義して，線形評価関数への入力に備えたものがテンソル積である．

$$
\begin{tikzcd}
\{\cdots,(2\text{人},6\text{月}),(3\text{人},4\text{月}),\cdots\} \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "S"'] & 12\text{人}\otimes\text{月} \arrow[d, "S'"] \\
 & 60\text{万平方メートル}
\end{tikzcd}
$$

テンソル積空間は，集合論的アプローチでは

$$
V\otimes W=\left\{\sum_i \lambda_i\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_i \,\middle|\, \lambda_i\in K,\,\boldsymbol{v}_i\in V,\,\boldsymbol{w}_i\in W\right\}
$$

という元の外延的羅列によって構成される．それに対して，圏論的アプローチは，他の対象との関わりを表す射のネットワークで取り囲むことによってテンソル積空間が持つべき内包を規定する，という様子を理解していただけたであろうか．

集合の圏 Set で直和や直積を作った場合と，部分集合の圏 $\mathscr{P}(X)$ で直和や直積を作った場合では異なった対象ができたように，圏が異なれば，つまり対象を取り巻く文脈が異なっていれば，同形な規定をしても結果的に異なった外延を生ずることがある．本章のはじめに「集合論は集合優先，圏論は写像優先」と紋切り型に書いたが，圏論は写像優先の一点張りではなく，視点を内から外に，周囲から個体にと，自由に焦点を移せるような，融通の利く視点を提供することの方に圏論の意義があるのかもしれない．

さて，テンソル積からさらにテンソル代数・外積代数や行列式についての議論を展開したいところだが，残りの紙数も少なくなってきたので，ここらで微分幾何学の話題に移ることにしよう．

第 6 章
微分幾何学

6.1　多様体の定義

この章では多様体論・微分幾何学の基本事項を説明する．とくに物理への応用を目指すとなると，トポロジーと圏論だけではもの足りず，どうしても微分幾何までやっておきたいという気がする．なぜ微分幾何がそんなに重要なのかと言えば，物理法則は微分方程式で定式化するのが一番便利であり，物理学は観測者に依存しない普遍的な法則を記述しようとする企てなので，その企てのためには座標系に依存しないような微分方程式の書き方がほしくなるからである．そのような言語を提供するのが微分幾何学であり，微分幾何学の舞台が多様体なのである．

多様体 (manifold) M とは以下の条件を満たす集合である．(i) M は n 次元ハウスドルフ空間[*1)]である．(ii) M の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ で，M を覆う，つまり

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$$

を満たすものがあり，各添え字 $\alpha \in A$ ごとに開集合 $U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ と同相写像 $\phi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha$ が定義されている．(iii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ のとき，

$$\psi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{6.1}$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合から $\mathbb{R}^n$ の開集合への写像であるが，これは C^r 級関数である．つまり $\psi_{\alpha\beta}$ は r 回偏微分可能であり（このことの意味は後で説明する），r 回偏微分して作られるすべての導関数が連続関数である．

以上の条件を満たすものを，詳細には n 次元 **C^r 級微分可能多様体** (differentiable manifold of class C^r) という．U_α を M の**座標近傍** (coordinate neighborhood) といい，ϕ_α を**座標関数** (coordinate function) という．また，U'_α を

*1)　ハウスドルフ空間については 2.3 節を参照のこと．

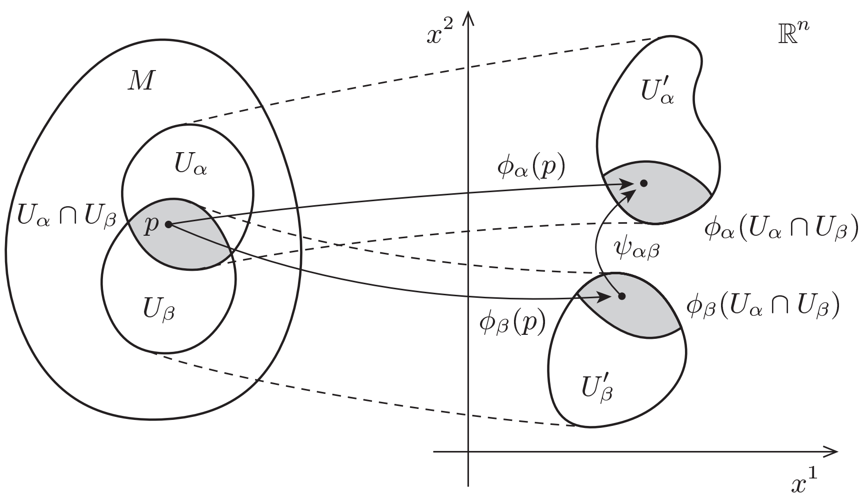


図 6.1　多様体.

座標範囲と呼ぶことにする．組 $(U_\alpha, U'_\alpha, \phi_\alpha)$ を**チャート** (chart) という．チャートをすべて集めた集合 $\{(U_\alpha, U'_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を**アトラス** (atlas) という．また，関数 $\psi_{\alpha\beta}$ を**座標変換関数** (coordinate transformation) という．$\psi_{\alpha\beta}$ が何回でも偏微分できて，すべての導関数が連続関数になるならば，C^∞ 級であるという．$\psi_{\alpha\beta}$ が実解析関数であれば（いたるところでテイラー展開が存在して 0 でない収束半径を持つならば）C^ω 級であるという．

図を眺めながら多様体の定義を吟味しよう．ハウスドルフや開集合といった概念については第 2 章で説明したので，M という空間に座標近傍と呼ばれる領域をとったところから話を始めよう．座標近傍 U_α に属する点 $p \in U_\alpha \subset M$ に写像 ϕ_α は，n 個の実数の組

$$\phi_\alpha(p) = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

を対応させる．微分幾何の文脈では，x^1, x^2, x^3 のように，座標の記号の右上に番号を添えることにする．この実数の組 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を点 p の座標という．座標とは，言わば点の位置を指し示す「番地」のようなものである．n 個の数値の組で 1 つの番地を表現するのである．点 p を連続的に動かせば，対応する座標値も（つまり x^1 も x^2 も x^n も）連続的に変化する．点 p を領域 $U_\alpha \subset M$ 上で動かすと，座標値は $U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ という範囲を埋め尽くすように変化する．つまり，任意の番地 $(x^1, x^2, \cdots, x^n) \in U'_\alpha$ を指定すれば，その番地を割りあてられる点，すなわち $\phi_\alpha(p) = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ となるような点 p が存在する．また，異なる点には異なる座標を対応させる．つまり，$p \neq p'$ ならば $\phi_\alpha(p) \neq \phi_\alpha(p')$．まとめると，各点に座標を割り振る写像 $\phi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha$ は連続写像であり，全射かつ単射であり，逆写像も連続写像である，つまり ϕ_α は同相写像である．ここまでが一組のチャート $(U_\alpha, U'_\alpha, \phi_\alpha)$ の役割だ．

こういったチャートをたくさん用意して，ともかく M 上のすべての点が少なくとも 1 つの座標近傍に所属して，座標づけられるようにしてやる．これら

の座標近傍たち $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は互いに少しずつ重なりながら M 全体を覆うのだから，そういう重なりのところでは，点 p が 2 つの座標近傍 U_α と U_β の両方に所属するということが起きている．すると，点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ は，

$$\phi_\alpha(p) = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

と

$$\phi_\beta(p) = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n) \in \mathbb{R}^n$$

という 2 通りの座標があてがわれる．これらは同一の点に対する座標なので，互いに連動し合う．つまり，チャート $(U_\beta, U'_\beta, \phi_\beta)$ における座標 $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n)$ を指定したときに，その点をチャート $(U_\alpha, U'_\alpha, \phi_\alpha)$ で見たときの座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ はいくら，という対応がつけられる．この対応関係が座標変換関数

$$\psi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n) \mapsto (x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{6.2}$$

に他ならない．これは n 個の実数変数を与えたときに，n 個の実数が決まるという写像だから，n 変数 1 実数値関数の n 個の組に他ならない：

$$\begin{cases} x^1 = \psi^1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n), \\ x^2 = \psi^2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n), \\ \vdots \\ x^n = \psi^n(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n). \end{cases} \tag{6.3}$$

実数から実数への関数に対しては，微分という操作ができる．例えば

$$\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu\, \partial \tilde{x}^\rho\, \partial \tilde{x}^\sigma} \qquad (\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, \cdots, n)$$

といった 3 階の導関数が定義できる．そして，n 次元 C^r 級微分可能多様体の定義は，このように定められる r 階までのすべての導関数が連続関数であることを要請している．これは座標変換の滑らかさに関する要請である．

位相空間は点と点の間に遠近感・連続性がある集合であり，その遠近関係は開集合族によって張り巡らされていた．ここではさらに，連続的につながった空間であるだけでなく，滑らかさを兼ね備えた空間として多様体を規定したかった．滑らかであるとは，曲線の接線や曲面の接平面を作れるということであり，接線を作れるとは微分ができるということである．微分を定義するためには数の四則演算と極限操作が必要であり，したがって実数の世界の言葉が必要である．そこで，実数の言葉で図形を記述するために多様体に座標を導入し，座標から座標への変換関数が微分できるという条件をもってして多様体の滑らかさを規定したのだ．微分可能な回数を制限しても身動きをとりにくくなるだけなので，以下ではとくに断らなければ，アトラスは C^∞ 級と仮定する．

以上の定義をまとめて言葉にしてみよう．多様体を座標近傍という領域に分け，座標近傍を座標という地図に写し取ることがチャートであった．チャートは

言わば見開きの地図であり，アトラスはチャートを束ねた地図帳である．ある座標近傍と隣り合った別の座標近傍の間には重複した「のりしろ」があり，この重複部分を介してチャートとチャートは連動している．あるチャートで点を滑らかに動かせば，別のチャート上でも対応する点は滑らかに動く．そのような地図帳を備えた世界が多様体である．次のような言い方もできる．「多様体とは，滑らかな変形が可能な方眼紙を貼り合わせて作ったハリボテである．方眼紙と方眼紙が重なったのりしろの部分では，方眼紙が破られたり，くしゃくしゃに折り曲げられたりしておらず，方眼の線が滑らかに交わっている」と*2)．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合のことを方眼紙と呼んでみた．

6.2 多様体の例

多様体の種類はじつにたくさんあり，より多くの例を知るほど多様体論の理解も深まるのだが，紙数の都合もあるので，本節では例として 2 次元球面 S^2 を説明し，さらに，1 次元球面 S^1 を簡単に説明するだけにする．

2 次元球面とは，3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$S^2 := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, u^2 + v^2 + w^2 = 1\} \tag{6.4}$$

（ここの u^2 は「u の 2 乗，$u \cdot u = u^2$」の意味．v^2, w^2 も同様）に $\mathbb{R}^3$ から誘導される相対位相を入れて，以下のようにアトラスを定めたものである．球面から「南極点」$(0, 0, -1)$ を取り除いた領域

$$U_+ := \{(u, v, w) \,|\, u^2 + v^2 + w^2 = 1,\ w \neq -1\} \tag{6.5}$$

と「北極点」$(0, 0, 1)$ を取り除いた領域

$$U_- := \{(u, v, w) \,|\, u^2 + v^2 + w^2 = 1,\ w \neq +1\} \tag{6.6}$$

を定める．そして写像

$$\phi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^2 \qquad (u, v, w) \mapsto (x^1, x^2) := \left(\frac{u}{1+w}, \frac{v}{1+w}\right) \tag{6.7}$$

（ここの x^1, x^2 の 1, 2 は添え字）と

$$\phi_- : U_- \to \mathbb{R}^2 \qquad (u, v, w) \mapsto (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) := \left(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}\right) \tag{6.8}$$

を定める．関係式 $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ を使うと

$$\begin{aligned} \frac{u}{1+w} &= \frac{u}{1-w} \cdot \frac{1-w}{1+w} \\ &= \frac{u}{1-w} \cdot \frac{(1-w)^2}{(1+w)(1-w)} \\ &= \frac{u}{1-w} \cdot \frac{(1-w)^2}{1-w^2} \end{aligned}$$

*2) 石橋明浩氏による描写．

$$= \frac{u}{1-w} \cdot \frac{(1-w)^2}{u^2+v^2}$$
$$= \tilde{x}^1 \cdot \frac{1}{(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2}$$

といった計算ができるので，$(U_+, \mathbb{R}^2, \phi_+)$, $(U_-, \mathbb{R}^2, \phi_-)$ をチャートとすると，座標変換関数は

$$\begin{array}{rccc} \psi_{+-}: & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \\ & (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) & \mapsto & (x^1, x^2) := \left(\dfrac{\tilde{x}^1}{(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2}, \dfrac{\tilde{x}^2}{(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2} \right) \end{array} \tag{6.9}$$

となる．これは何回でも微分できる関数なので，S^2 は C^∞ 級微分可能多様体である．

図形的な説明を補うと，写像 $\phi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^2$ は，南極点 $(0, 0, -1)$ と球面上の点 $\mathrm{P}(u, v, w)$ を結ぶ直線が平面 $w = 0$ と交わる点を $\mathrm{Q}(x^1, x^2, 0)$ として，点 P に点 Q を対応させている．このような写像をステレオ写像という．同様に，写像 $\phi_- : U_- \to \mathbb{R}^2$ は，北極点 $(0, 0, 1)$ と点 P を結ぶ直線が平面 $w = 0$ と交わる点を $\mathrm{R}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, 0)$ として，点 P に点 R を対応させている．球面上の点 P が北極点 $(0, 0, 1)$ に近づくと，平面上の対応する点 R は無限遠に遠ざかって行くことに注意してほしい．また，座標変換関数 ψ_{+-} は点 R に点 Q を対応させる写像であり，点 R を滑らかに動かせばそれに呼応して点 Q も滑らかに動くことが想像できるだろう．

また，円 $S^1 = \{u^2 + v^2 = 1\}$ に関して，式 (1.65) で与えた写像

$$\phi : \mathbb{R} \to S^1 \qquad s \mapsto (u, v) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2} \right) \tag{6.10}$$

は $(u, v) = (-1, 0)$ を基点とするステレオ写像になっていることを図 1.7 を見て吟味してほしい．

なお，1 つの多様体に備えつけられるアトラスは 1 通りとは限らない．S^2 の場合，子午線

$$M_\pi := \{(u, v, w) \,|\, u^2 + v^2 + w^2 = 1,\ v = 0,\ u \le 0\} \tag{6.11}$$

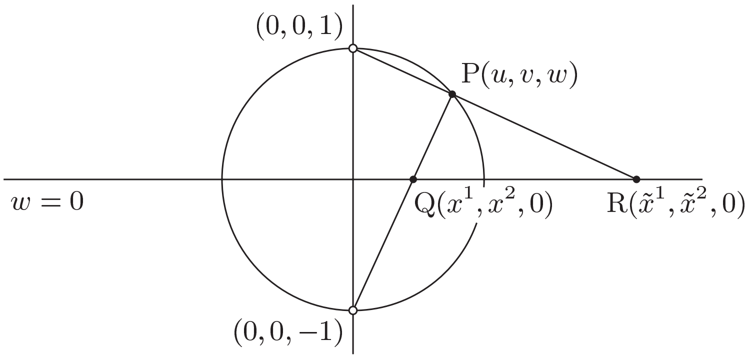


図 6.2　球面から平面へのステレオ写像，$\phi_+ : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{Q}$ と $\phi_- : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{R}$.

を球面から取り除いた差集合

$$U_0 := S^2 - M_\pi \tag{6.12}$$

を座標近傍とし，開区間 $(0, \pi) = \{\theta \in \mathbb{R} \,|\, 0 < \theta < \pi\}$ などを用いて，

$$U_0' := (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \tag{6.13}$$

を座標範囲として，座標関数（の逆関数）$\xi_0^{-1} : U_0' \to U_0$ を

$$\xi_0^{-1} : (\theta, \phi) \mapsto (u, v, w) := (\sin\theta\,\cos\phi,\, \sin\theta\,\sin\phi,\, \cos\theta) \tag{6.14}$$

で定義する[*3)]．同様に，子午線

$$M_0 := \{(u, v, w) \,|\, u^2 + v^2 + w^2 = 1,\, v = 0,\, u \geq 0\,\} \tag{6.15}$$

を球面から取り除いた差集合

$$U_\pi := S^2 - M_0 \tag{6.16}$$

を座標近傍とし，

$$U_\pi' := (0, \pi) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \tag{6.17}$$

を座標範囲として，座標関数（の逆関数）$\xi_\pi^{-1} : U_\pi' \to U_\pi$ を，見かけは先ほどと同じ式

$$\xi_\pi^{-1} : (\theta, \phi) \mapsto (u, v, w) := (\sin\theta\,\cos\phi,\, \sin\theta\,\sin\phi,\, \cos\theta) \tag{6.18}$$

で定義して，これらのチャート (U_0, U_0', ξ_0), (U_π, U_π', ξ_π) を先ほどのアトラス $\{(U_+, \mathbb{R}^2, \phi_+), (U_-, \mathbb{R}^2, \phi_-)\}$ につけ加えたものも，また新たなアトラスである．つまり地図帳のページを増やしたことに相当する．座標変換関数 $\xi_0 \circ \xi_\pi^{-1}$ がいかなるものになるか，考えてみてほしい．答えは

$$\begin{aligned}\xi_0 \circ \xi_\pi^{-1} : (0, \pi) \times [(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)] &\to (0, \pi) \times [(0, \pi) \cup (-\pi, 0)] \\ (\theta, \phi) &\mapsto \begin{cases} (\theta, \phi) & (0 < \phi < \pi) \\ (\theta, \phi - 2\pi) & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}\end{aligned}$$

である．これも C^∞ 級微分可能である．

6.3 微分可能写像と微分同相

m 次元と n 次元の C^∞ 級微分可能多様体 M と N があったとき，写像 $\tau : M \to N$ が $\boldsymbol{C^r}$ **級微分可能写像** (differentiable map of class C^r) であるということを，次のように定義する．M のアトラスを $\{(U_\alpha, U_\alpha', \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, N のアトラスを $\{(V_\beta, V_\beta', \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ とし，添え字 $\alpha \in A$, $\beta \in B$ について $W := \tau(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \varnothing$ ならば，

---

*3)　関数 $\xi_0 : U_0 \to U_0'$ を直接書くよりも逆関数の方が書きやすかったので，こちらを書いた．

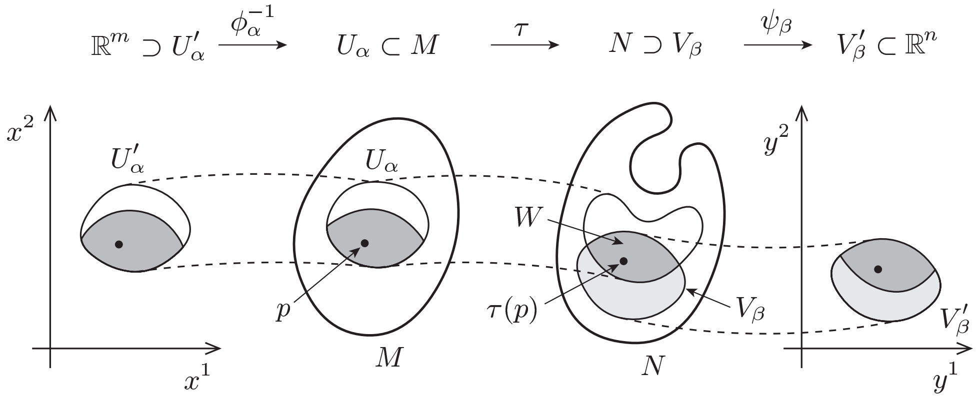


図 6.3　多様体 M から多様体 N への微分可能写像 τ.

$$\psi_\beta \circ \tau \circ \phi_\alpha^{-1} \;:\; \phi_\alpha\left(\tau^{-1}(W)\right) \to V'_\beta$$

で定義される写像は $\mathbb{R}^m$ の部分集合から $\mathbb{R}^n$ の部分集合への写像になるが，これが実数から実数への写像の意味で C^r 級関数である．

上の定義を吟味しよう．写像 $\tau : M \to N$ は，位相空間から位相空間への写像なので，τ が連続写像だということは定義できるが，τ が微分可能だということは位相だけでは定義できない．微分はやはり実数の言葉で語られなければならない．そこで座標の力を借りることにする．点 $p \in M$ が座標近傍 U_α に属していて，点 $\tau(p) \in N$ が座標近傍 V_β に属しているとする．点 p は座標関数 ϕ_α によって座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ を割りあてられ，点 $\tau(p)$ は座標関数 ψ_β によって座標 $(y^1, \cdots, y^n)$ を割りあてられるとき，この座標の関係を表すのが上に与えた写像

$$\psi_\beta \circ \tau \circ \phi_\alpha^{-1} \;:\; (x^1, \cdots, x^m) \mapsto (y^1, \cdots, y^n)$$

である．つまり，τ は m 変数 1 実数値関数の n 個の組と等価である：

$$\begin{cases} y^1 = \tau^1(x^1, x^2, \cdots, x^m), \\ y^2 = \tau^2(x^1, x^2, \cdots, x^m), \\ \quad\vdots \\ y^n = \tau^n(x^1, x^2, \cdots, x^m). \end{cases} \tag{6.19}$$

このような式を τ の座標表示という．これらは実数から実数への関数だから，r 回微分するという操作が意味を持つ．例えば，

$$\frac{\partial^3 y^\mu}{\partial x^\nu\, \partial x^\rho\, \partial x^\sigma} \qquad (\mu = 1, \cdots, n;\ \nu, \rho, \sigma = 1, \cdots, m)$$

といった 3 階の導関数が定義できる．τ が C^r 級だという定義は，このように定められる r 階までのすべての導関数が連続関数であることの要請に他ならない．注意すべきは，τ の座標表示 (6.19) の具体的な関数形や値は ϕ_α や ψ_β などのチャートの選び方に依存していることと，τ が r 回微分可能という性質は，どのチャートを使っても，座標変換が C^∞ 級である限り，変わらないことだ．また，多様体 M と N の次元が異なっていても，微分可能写像 $\tau : M \to N$ は

定義できている．

とくに，$\tau : M \to N$ が全単射 C^r 級微分可能写像であり，かつ，τ^{-1} も C^r 級微分可能写像であるとき，τ を C^r 級微分同相写像という．とくに M から N への C^∞ 級微分同相写像があるとき M と N は**微分同相** (diffeomorphic) であるという．

C^∞ 級微分可能多様体を対象，C^∞ 級微分可能写像を射として多様体の圏 Mfd が定義される．この圏における同形射は微分同相写像 (diffeomorphism) である．また，自己同形射を自己微分同相写像 (auto-diffeomorphism) という．圏 Mfd からの関手は微分位相不変量に他ならない．

6.4 曲線と関数，接ベクトルと余接ベクトル

実数体 $\mathbb{R}$ は素性のよくわかっている代表的な多様体なので，$\mathbb{R}$ を足がかりにして一般の多様体 M に探りを入れることがしばしば行われる．探りを入れるとは，$\mathbb{R} \to M$ という射や，$M \to \mathbb{R}$ という射を定めて，M を仲立ちにしてこれらの射の性質を調べることである．

C^r 級微分可能写像 $c : \mathbb{R} \to M$ を M 上の C^r 級曲線という．とくに C^∞ 曲線をたんに**曲線** (curve) という．曲線 c は実数 t に対して点 $c(t) \in M$ を定めるものである．t を時刻と解釈すれば，$c(t)$ は時間とともに M の中を動き回る点を表していると思ってよい．$c(t)$ が座標近傍 U_α に入っていれば，座標関数 ϕ_α を使って

$$\phi_\alpha \circ c(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n \tag{6.20}$$

と座標表示される．この関数が $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^n$ への C^r 級写像であることを，曲線 c が C^r 級であると言ったのだ．ホモトピー理論の 3.3 節で導入した「道」は，連続性だけを要請して，微分可能性を要請しない C^0 級の曲線だと言える．

他方，C^r 級微分可能写像 $f : M \to \mathbb{R}$ を M 上の C^r 級関数という．関数 f は点 $p \in M$ に対して実数 $f(p)$ を定めるものである．物理的には，$f(p)$ は点 p あるいは状態 p における温度とか圧力を表しているものと思ってよい．p が座標近傍 U_α に入っていれば，座標関数 ϕ_α を使って $f(p)$ は

$$f \circ \phi_\alpha^{-1}(x^1, \cdots, x^n) = f_\alpha(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R} \tag{6.21}$$

と座標表示される．本当は右辺の f_α のようにチャートの添え字 α を記してどのチャートを使っているか明示しておくべきなのだが，以下では，何らかのチャートが使用されていることを暗黙の了解として，$f(x^1, \cdots, x^n)$ と書くことがある．C^r 級関数全体の集合を $C^r(M) := \{f : M \to \mathbb{R}; C^r\text{級}\}$ と書く．関数 $f, g \in C^r(M)$ と実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，関数の和 $f + g$ とスカラー倍 $\lambda \cdot f$ を

$$(f + g)(p) := f(p) + g(p), \tag{6.22}$$

$$(\lambda \cdot f)(p) := \lambda \cdot f(p) \tag{6.23}$$

で定める．ただし $p \in M$ は任意の点とする．この和とスカラー倍に関して $C^r(M)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる．また，関数 f, g の積 $f \cdot g$ を

$$(f \cdot g)(p) := f(p) \cdot g(p) \tag{6.24}$$

で定めると，この積に関して $C^r(M)$ は可換環になる．

M 上に曲線 $c : \mathbb{R} \to M$ と関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があると，これらの合成写像 $f \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定められる．これは実数から実数への写像なので，微分が定義できる．微係数は合成関数の微分則によって

$$\begin{aligned}\langle df, X\rangle := \frac{d}{dt} f \circ c(t) &= \frac{d}{dt}(f \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ c)(t) \\ &= \frac{d}{dt} f_\alpha(x^1(t), \cdots, x^n(t)) \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \cdot \frac{dx^\mu}{dt}\end{aligned} \tag{6.25}$$

と書かれる．$c(0) = p$ のとき，点 $c(t)$ の座標 $x^\mu(t)$ の $t = 0$ での微係数を

$$X^\mu := \left.\frac{dx^\mu}{dt}\right|_{t=0}$$

とおき，形式的に

$$X = \frac{d}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{6.26}$$

と書かれるものを，曲線 c の点 p における**接ベクトル** (tangent vector) という．また，

$$df = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\, dx^\mu \tag{6.27}$$

を f の**微分** (differential) という．

n 次元多様体 M の点 p を通る曲線全体の集合を考え，それらの接ベクトル全体の集合を T_pM と書くと，T_pM は $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間をなす（接ベクトルを集めたものがベクトル空間になることの証明は省略）．T_pM を点 p における**接ベクトル空間** (tangent vector space) という．接ベクトルは (6.26) のように書かれるので，p の座標近傍において定義される $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \,\middle|\, \mu = 1, \cdots, n \right\}$ は T_pM の基底である．また，接ベクトルをすべての点 $p \in M$ にわたって集めた集合を

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

と書き，M 上の接ベクトル束という．

接ベクトル空間上の一形式 $\theta : T_pM \to \mathbb{R}$ を**余接ベクトル** (cotangent vector) という．とくに 1 つの座標近傍内で定義される dx^μ は

$$\left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \tag{6.28}$$

を満たす余接ベクトルである．一般の余接ベクトル θ は，n 個の実数 θ_μ $(\mu = 1, \cdots, n)$ を係数として

$$\theta = \sum_{\mu=1}^{n} \theta_\mu \, dx^\mu \tag{6.29}$$

と書かれる．このとき，接ベクトル (6.26) と余接ベクトル θ との対 (pairing) は

$$\begin{aligned} \langle \theta, X \rangle &= \left\langle \sum_\mu \theta_\mu \, dx^\mu, \sum_\nu X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \sum_{\mu,\nu} \theta_\mu X^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \theta_\mu X^\mu \end{aligned} \tag{6.30}$$

のように求められる．点 p における余接ベクトル全体の集合を $T_p^* M$ と書き，p における**余接ベクトル空間** (cotangent vector space) という．接ベクトル空間と余接ベクトル空間は互いの双対空間である．

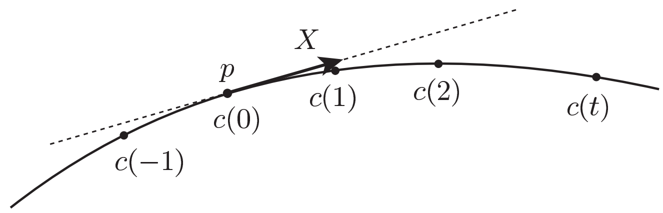


図 6.4　曲線 c の接ベクトル X．

接ベクトルと余接ベクトルの図形的なイメージを描いておこう．接ベクトル X は曲線 $c(t)$ に接する速度ベクトルとして描けばよい．点 $c(t)$ が速く動く場所ほど接ベクトルは長くなる．点の動きが止まれば接ベクトルは 0 になる．

余接ベクトルはちょっと絵に描きにくい．まず関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対して，実数 a を固定するごとに $f^{-1}(a) \subset M$ を定め，f の等高面と呼ぶことにする（図 6.5 を参照）．多様体 M が n 次元なら，等高面は一般に $n-1$ 次元の曲面になる．a の値を $\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$ と等間隔に変えていくと，等高面は必ずしも等間隔ではない曲面の族をなしていく．いま，点 $p \in M$ において $f(p) = a$ だとする．そうすると等高面 $f^{-1}(a)$ は点 p を通る曲面であり，点 p のところで等高面に接する平面を考えることができる．さらに，点 p の十分近くでは等高面の族を等間隔の平行平面の族で近似することができる．そのような等間隔接平面族が関数の微分 df の図的表示を与える．空間的に狭い範囲で関数 f の値が大きく変化する場所では，等高面が密につまっており，接平面族の間隔が狭くなる．逆に，関数 f の変化が緩やかな場所では接平面族の間隔は広くなる．

一般の余接ベクトル θ は図 6.6 のような平行平面族で表示される．θ には向

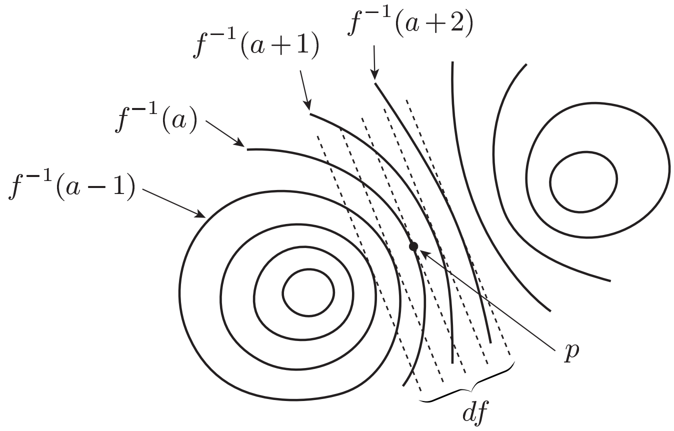


図 6.5　関数 f の微分 df.

きが定められている．接ベクトル X は矢印で表示される．接ベクトル X と余接ベクトル θ が出会うと，X は θ に属する平面を何枚か貫く．この貫いた枚数が対 $\langle\theta, X\rangle$ の値である．例えば図のように 5 枚貫いて間隔の $\dfrac{8}{10}$ の分まで矢印の頭が出れば，$\langle\theta, X\rangle = 5.8$ となる．θ の向きと反対向きに矢印が刺さるときは，対の値は負の数とする．図の接ベクトル Y は θ の負の向きに 6 枚とちょっと刺さっているので，$\langle\theta, Y\rangle = -6.4$ というように貫いた平面数をマイナスにカウントする．

一般に，多様体 M の上に曲線 $c(t)$ と関数 $f(p)$ があれば，曲線に沿って関数の値を観測する合成関数 $f(c(t))$ ができる．変数 t を時間と思えば，曲線に沿って関数の単位時間あたりの変化率を測ったものが

$$\frac{d}{dt}f(c(t)) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \cdot \frac{dx^\mu}{dt} = \langle df, X\rangle$$

である．この式は，単位時間あたりの点の移動率を表す接ベクトル X と，関数 f の空間的変化率を表す余接ベクトル df の対によって値を出力している．この値を，図 6.6 の要領で，刺される $\theta = df$ と刺す X とに分けたものが右辺だと言ってよい．

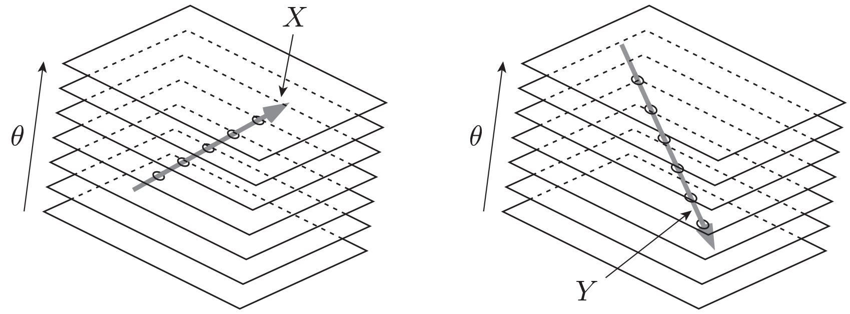


図 6.6　余接ベクトル θ と接ベクトル X の対．$\langle\theta, X\rangle = 5.8$, $\langle\theta, Y\rangle = -6.4$.

6.5 座標変換と接ベクトル・余接ベクトルの成分の変換

T_pM の基底 $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \,\middle|\, \mu = 1, \cdots, n \right\}$ は座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ から誘導されたものだから，座標を変えれば基底も変わるし，接ベクトル X を (6.26) のように展開した係数 X^μ も当然，座標変換に伴って変わる．(6.2) で議論したように，あるチャートにおける点 $p \in M$ の座標が $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ であり，同じ点を別のチャートで見たときの座標が $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \cdots, \tilde{x}^n)$ であれば，同一の接ベクトル $X \in T_pM$ に対して

$$X = \sum_{\mu=1}^{n} X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \tilde{X}^\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} \tag{6.31}$$

という 2 通りの表記を得る．合成関数の微分を通して，形式的に

$$X = \sum_{\nu=1}^{n} X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} X^\nu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}$$

と書いてよいことがわかるから

$$\tilde{X}^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu \tag{6.32}$$

を結論する．これが接ベクトルの成分の座標変換則である．とくに座標変換が

$$\tilde{x}^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} L^\mu_{\ \nu}\, x^\nu \tag{6.33}$$

のような線形変換だった場合は，接ベクトルの成分は

$$\tilde{X}^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} L^\mu_{\ \nu}\, X^\nu \tag{6.34}$$

という変換を受ける．

同様に，余接ベクトル $\theta \in T_p^*M$ は 2 通りのチャートで

$$\theta = \sum_{\mu=1}^{n} \theta_\mu\, dx^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\theta}_\nu\, d\tilde{x}^\nu \tag{6.35}$$

という 2 通りの表記を与えられ，

$$\theta = \sum_{\mu=1}^{n} \theta_\mu\, dx^\mu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \theta_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\, d\tilde{x}^\nu$$

と書けるので，

$$\tilde{\theta}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \theta_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tag{6.36}$$

を結論する．これが余接ベクトルの成分の座標変換則である．座標変換が線形な場合に限らず，

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} = \delta^\mu_{\ \rho} \tag{6.37}$$

が成り立つから，

$$L^{\nu}{}_{\rho} = \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\rho}}$$

を ν を行番号，ρ を列番号とする n 行 n 列の行列 L の成分と見なせば，

$$(L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\nu}}$$

はその逆行列の成分であることがわかる．したがって，余接ベクトルの成分の変換則は

$$\tilde{\theta}_{\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} \theta_{\mu} (L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} \tag{6.38}$$

と書ける[*4]．対 $\langle \theta, X \rangle$ の値は，もちろんどの座標表示を用いても不変である：

$$\begin{aligned}\langle \theta, X \rangle &= \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\theta}_{\nu} \tilde{X}^{\nu} = \sum_{\mu,\nu,\rho=1}^{n} \theta_{\mu} (L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} L^{\nu}{}_{\rho} X^{\rho} = \sum_{\mu,\rho=1}^{n} \theta_{\mu}\, \delta^{\mu}{}_{\rho}\, X^{\rho} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \theta_{\mu} X^{\mu}.\end{aligned}$$

ベクトルの成分 X^{μ} や θ_{μ} の値は座標の取り方によって変更されるが，接ベクトル X や余接ベクトル θ 自身は座標の取り方によらない概念であることに注意してほしい．曲線の接ベクトル X がそもそも $\langle df, X \rangle = \dfrac{df}{dt}$ で定義されたことを思い起こせば，定義そのものの中には座標を使っていなかったことがわかる．むしろ，(6.31) や (6.35) のように，X や θ の不変性を保証するように成分の変換則が定められたのである．

6.6　ベクトル場・微分形式・テンソル場

微分幾何学とは，多様体の上で微分や積分をすることによって多様体に関する微分同相不変な性質を探る数学である．したがって多様体上には微積分の対象となるものがいろいろ登場する．それらを説明しよう．n 次元多様体 M は選んで固定しておく．

M 上の**ベクトル場** (vector field) X とは，各点 $p \in M$ に対して接ベクトル $X_p \in T_pM$ を滑らかに対応させる写像である．チャート $(U_{\alpha}, U'_{\alpha}, \phi_{\alpha})$ を用いると，ベクトル場は

$$X_p = \sum_{\mu=1}^{n} X^{\mu}(p) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{6.39}$$

---

*4)　線形座標変換の式 (6.33) と接ベクトルの成分の変換式 (6.34) とは同形であり，完全に連動している．一方，余接ベクトルの成分の変換式 (6.38) は (6.33) の逆変換である．したがって，接ベクトルのことを共変ベクトル，余接ベクトルのことを反変ベクトルと呼べばよさそうなものだが，相対性理論の古い本ではこの逆の呼称，すなわち，接ベクトルのことを反変ベクトル，余接ベクトルのことを共変ベクトルと呼ぶ習慣が見られる．

と成分表示される．ここでベクトル場の成分 $X^\mu(p) = X^\mu(x^1, \cdots, x^n)$ は，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 U'_α から $\mathbb{R}$ への微分可能な写像である．座標のチャートを変えれば (6.32) に従ってベクトル場の成分は変換される．

M 上の 1 次**微分形式** (differential form) θ とは，各点 $p \in M$ に対して余接ベクトル $\theta_p \in T_p^*M$ を滑らかに対応させる写像である．言い換えると，θ_p は接ベクトル $X_p \in T_pM$ に実数

$$\theta_p(X_p) = \langle \theta_p, X_p \rangle \in \mathbb{R} \tag{6.40}$$

を対応させる線形写像であり，X がベクトル場であれば $\theta(X) : M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \theta_p(X_p)$ が M 上の微分可能関数になるようなものである．

座標を用いれば，1 次微分形式は

$$\theta_p = \sum_{\mu=1}^{n} \theta_\mu(p)\, dx^\mu \tag{6.41}$$

と成分表示される．1 次微分形式の成分 $\theta_\mu(p)$ は $U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への微分可能な写像であり，座標のチャートを変えれば (6.36) に従って変換される．

r, s を非負の整数として，M 上の (r, s) 型の**テンソル場** (tensor field) S とは各点 $p \in M$ に対して

$$S_p \in (T_pM)^{\otimes r} \otimes (T_p^*M)^{\otimes s} \tag{6.42}$$

を滑らかに対応させる写像である．この式の意味は，S_p は r 個の余接ベクトル $\theta_1, \cdots, \theta_r \in T_p^*M$ と s 個の接ベクトル $X_1, \cdots, X_s \in T_pM$ を代入したときに実数を与える多重線形写像だということである：

$$\begin{aligned} S_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s &\to \mathbb{R} \\ (\theta_1, \cdots, \theta_r, X_1, \cdots, X_s) &\mapsto S_p(\theta_1, \cdots, \theta_r, X_1, \cdots, X_s). \end{aligned} \tag{6.43}$$

多重線形とは，どの変数についても線形だということである．例えば X_1 のところを $\alpha X + \beta Y$ で置き換えれば

$$\begin{aligned} &S_p(\theta_1, \cdots, \theta_r, \alpha X + \beta Y, X_2, \cdots, X_s) \\ &= \alpha\, S_p(\theta_1, \cdots, \theta_r, X, X_2, \cdots, X_s) \\ &\quad + \beta\, S_p(\theta_1, \cdots, \theta_r, Y, X_2, \cdots, X_s) \end{aligned}$$

が成り立つ．座標を用いれば，テンソル場は

$$S_p = \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_r, \nu_1, \cdots, \nu_s = 1}^{n} S^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_s} \tag{6.44}$$

と成分表示される．座標変換に伴う成分の変換則は，この表式から合成関数の微分をたどるだけで自動的に決まる：

$$S = \sum_{\mu,\nu} S^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_s}$$
$$= \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma} S^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} \frac{\partial \tilde{x}^{\rho_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\rho_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial \tilde{x}^{\rho_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\rho_r}}$$
$$\otimes \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \tilde{x}^{\sigma_1}} d\tilde{x}^{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial \tilde{x}^{\sigma_s}} d\tilde{x}^{\sigma_s}$$

（添え字についての和の書き方を簡略化してある）．この式から，$(x^1, \cdots, x^n)$ と $(\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n)$ が同一点 $p \in M$ に対して 2 通りのチャートが与える座標だとすれば

$$\tilde{S}^{\rho_1\cdots\rho_r}_{\sigma_1\cdots\sigma_s} = \sum_{\mu,\nu} S^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} \frac{\partial \tilde{x}^{\rho_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{\rho_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \tilde{x}^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial \tilde{x}^{\sigma_s}} \tag{6.45}$$

を結論する．これがテンソルの成分の座標変換則である．とくにベクトル場は (1,0) 型のテンソル場であるし，1 次微分形式は (0,1) 型のテンソル場である．なお (0,0) 型のテンソル場とは微分可能な関数 $f : M \to \mathbb{R}$ のことをいう．式 (6.43) の値は，$\theta_i = \sum_{\mu=1}^{n} \theta_{i,\mu} dx^\mu$, $X_j = \sum_{\nu=1}^{n} X_j^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ などの成分表示を使えば

$$S_p(\theta_1, \cdots, \theta_r, X_1, \cdots, X_s) =$$
$$\sum_{\mu_1,\cdots,\mu_r,\nu_1,\cdots,\nu_s=1}^{n} S^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\nu_1\cdots\nu_s} \theta_{1,\mu_1} \cdots \theta_{r,\mu_r} X_1^{\nu_1} \cdots X_s^{\nu_s}$$

と書かれる．

6.7 外積代数

$(0, q)$ 型の反対称テンソル場 ω のことを q 次**微分形式**という．つまり q 次微分形式 ω とは，q 個の接ベクトル $X_1, \cdots, X_q \in T_pM$ を与えたときに実数値

$$\omega_p(X_1, \cdots, X_q) \in \mathbb{R} \tag{6.46}$$

を返す写像であり，各 X_i について線形であり，変数を入れ換えると符号が反転するものである：

$$\omega_p(X_1, \cdots, X_j, \cdots, X_i, \cdots, X_q)$$
$$= -\omega_p(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_j, \cdots, X_q). \tag{6.47}$$

多様体 M 上の q 次微分形式全体の集合を $\Omega^q(M)$ と書く．これは $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間をなす．点 $p \in M$ を一箇所に止めて議論するときは q 次微分形式をたんに q 形式 (q-form) と呼ぶことにする．

微分形式は面積や体積の概念を一般化したものである．例えば，2 形式は面積を表すということの意味を検討してみよう．V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ が張る平行四辺形の面積を $\varepsilon(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ と書くとしたら，関数 ε はどのような性質を持つべきか考えてみる．ベクトルのスカラー倍に応

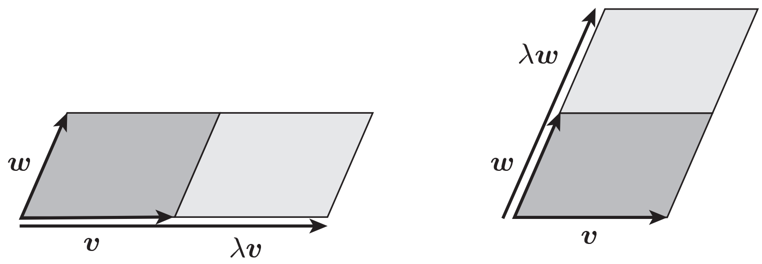


図 6.7　ベクトルをスカラー倍すると面積も同じくスカラー倍される．

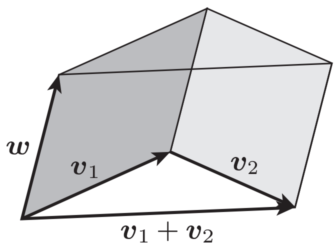


図 6.8　ベクトルの和に面積の和が対応する．(6.49) 式を参照．

じて平行四辺形の面積もスカラー倍されることを要請するのは，きわめて自然な要請だろう：

$$\varepsilon(\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\varepsilon(\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{w})=\lambda\,\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}). \tag{6.48}$$

また，ベクトルの和に応じて平行四辺形の面積が足されることも，認めておきたい性質であろう：

$$\varepsilon(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})=\varepsilon(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w})+\varepsilon(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}), \tag{6.49}$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)=\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1)+\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_2). \tag{6.50}$$

ここまでは ε が 2 重線形写像だということを言っただけである．さらに，2 本のベクトルが一致してしまったら，平行四辺形はつぶれてしまうので，当然その面積はゼロになることを要請したいだろう．つまり，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0 \tag{6.51}$$

が成立してほしい．このようなつぶれた平行四辺形を退化した平行四辺形という．

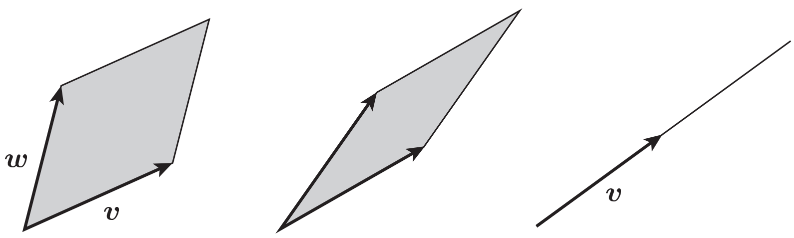


図 6.9　退化した平行四辺形の面積は 0.

この性質と線形性とを合せると

$$\begin{aligned}0 &= \varepsilon(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\\ &= \varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})+\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+\varepsilon(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})+\varepsilon(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})\\ &= 0+\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+\varepsilon(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})+0\end{aligned}$$

したがって

$$\varepsilon(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) = -\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \tag{6.52}$$

という関係式が導かれる．逆に，この式から

$$\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = -\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$$

が導かれ，したがって

$$\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$$

すなわち (6.51) が導かれる．以上，(6.48), (6.49), (6.50), (6.52) をまとめると，面積を表す関数 $\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ は 2 重線形かつ反対称であるべしとするのが自然な要請であることがわかる．

線形性と，退化した平行四辺形の面積はゼロという性質 (6.51) を使うと

$$\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}+\lambda\boldsymbol{v}) = \varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+\lambda\,\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

という関係が導かれる．これは，平行な 2 直線にはさまれていて，共通の底辺を持つ平行四辺形の面積は等しいということを言っている．これは，底辺の長さと高さがそれぞれ等しい三角形の面積は等しいという，なじみ深い事実の現れである．

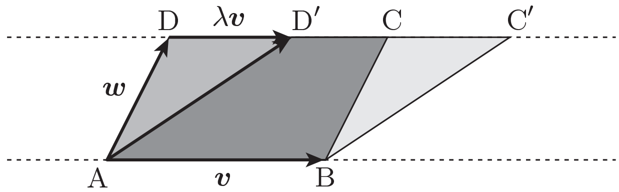


図 6.10　底辺が共通で，平行線にはさまれている 2 つの平行四辺形 ABCD と ABC′D′ の面積は等しい．

ここまでは，2 形式，すなわち 2 重線形で反対称な写像 $\varepsilon : V \times V \to \mathbb{R}$ が面積だということを吟味した．もう少し物理っぽい言い方をすると，2 形式は面積に比例する物理量を測る関数だから，単位面積あたりの物理量の密度を表していると言った方がよい．例えば，流体力学の場合なら単位面積を通過する流量の密度は 2 形式で記述される．流体の中にベクトル $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ で張られる平行四辺形を置いたときに，この平行四辺形を通過する流量が $\varepsilon(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ に等しいのである．だから ε そのものは単位面積あたりの流量密度と言った方がよい．

同様に，3 形式，すなわち 3 重線形で反対称な写像 $\alpha : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ は体積の関数だと言える．つまり，3 個のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ が張る平行六面体の体積に比例する量を $\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は表す．あるいは，3 形式 α はある物理量の単位体積あたりの密度（質量密度や電荷密度）だと言える．これらの概念を多重線形で反対称な写像に一般化したものが q 形式なのである．

面積と長さをかけ算して体積を求めるように，q 形式と r 形式をかけ算して $(q+r)$ 形式を作るという発想も自然に湧いて来る．そのことを議論しよう．準備として，n 個の元があったときにそれらを並び替える操作を考える．n 個の元は番号をつけて区別するのが簡単なので，$A = \{1, 2, \cdots, n\}$ という集合を考える．この集合 A から集合 A への全単射のことを**置換** (permutation) と呼ぶ．つまり置換とは

$$\sigma : A \to A, \qquad i \mapsto \sigma(i)$$

という写像であり，番号 i の元を番号 $\sigma(i)$ の位置に置き換える．σ が全単射ということは，σ による操作で元が増えたり減ったりすることはなく，たんに元を並び替えるということだ．例えば $A = \{1, 2, 3\}$ のとき，

$$\begin{cases} \sigma : 1 \mapsto 3 \\ \sigma : 2 \mapsto 1 \\ \sigma : 3 \mapsto 2 \end{cases}$$

という写像は置換であり，下図のようなあみだくじで表現される．

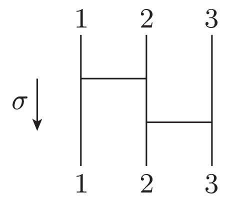


図 6.11　置換 σ を表すあみだくじ．

すべての置換は何らかのあみだくじで表現することが可能である．しかし，1 つの置換を表すあみだくじは 1 通りとは限らない．実際，上の σ は下のようなあみだくじでも表現できる．

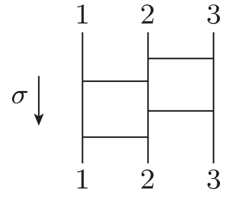


図 6.12　これも置換 σ を表すあみだくじ．

結果的に同じ置換になるようなあみだくじの「横棒」の本数は一定ではない．しかし同じ置換に対応するあみだくじの横棒の本数が偶数であるか，奇数であるかという性質は，あみだくじの書き方を変えても不変にとどまる．例えば，置換

$$\begin{cases} \tau : 1 \mapsto 3 \\ \tau : 2 \mapsto 2 \\ \tau : 3 \mapsto 1 \end{cases}$$

を表すあみだくじを何通りか書いてみて，どのような書き方をしても横棒の本数が奇数になることを確かめてみてほしい．そこで，あみだくじの横棒の数が偶数になるような置換を偶置換と呼び，奇数になるような置換を奇置換と呼ぶことにする．そして，置換 σ の符号 (signature) と呼ばれる関数を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & (\sigma\text{ が偶置換のとき}) \\ -1 & (\sigma\text{ が奇置換のとき}) \end{cases} \tag{6.53}$$

と定義する．n 個の元からなる集合に作用する置換全体の集合を $\mathfrak{S}_n$ と書き，n 次の対称群とか n 次の置換群と呼ぶ[*5)]．$\mathfrak{S}_n$ は $n!$ 個の元からなる集合である．

以上の準備の下で，q 形式 ω と r 形式 η の**外積** (exterior product) と呼ばれる $(q+r)$ 形式 $\omega \wedge \eta$ を次のように定める．$n = q + r$ とおいて，n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ に対して $\omega \wedge \eta$ は

$$\begin{aligned} &(\omega \wedge \eta)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n) := \\ &\frac{1}{q!\,r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \omega(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(q)})\, \eta(\boldsymbol{v}_{\sigma(q+1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(q+r)}) \end{aligned} \tag{6.54}$$

という値をとる関数と定義する．ここで和はすべての n 次置換 σ についてとる．記号 $\wedge$ はウェッジ（wedge,「くさび」を意味する）と呼ばれる．$\omega \wedge \eta$ が変数 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ について線形かつ反対称な関数になっていることはすぐにわかる．さらに q 形式 ω_1, ω_2 や r 形式 η_1, η_2 があるときは，実数 λ_i, μ_i について

$$(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) \wedge \eta = \lambda_1\, \omega_1 \wedge \eta + \lambda_2\, \omega_2 \wedge \eta, \tag{6.55}$$

$$\omega \wedge (\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2) = \mu_1\, \omega \wedge \eta_1 + \mu_2\, \omega \wedge \eta_2 \tag{6.56}$$

という線形性が成り立つ．また，積の前後の入れ換えについて

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{qr}\, \omega \wedge \eta \tag{6.57}$$

という符号の変化を伴う．したがって，とくに ω が奇数次の微分形式であれば

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega = 0 \tag{6.58}$$

である．

外積は微分形式に対しても定義される．接ベクトル $X, Y \in T_pM$ に対して

*5) $\mathfrak{S}$ はドイツ文字の S である．対称群の原語の symmetric group の頭文字からとった．

は，$X = \sum_\mu X^\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ などを用いて外積の定義 (6.54) どおりに計算すると

$$\begin{aligned}(dx^\mu \wedge dx^\nu)(X, Y) &= \langle dx^\mu, X\rangle\langle dx^\nu, Y\rangle - \langle dx^\mu, Y\rangle\langle dx^\nu, X\rangle \\ &= X^\mu Y^\nu - Y^\mu X^\nu\end{aligned}$$

を得る．したがって，テンソル積の定義を思い出すと

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \tag{6.59}$$

と書いてもよい．同様に，$(dx^\mu \wedge dx^\nu) \wedge dx^\rho$ を計算すると

$$(dx^\mu \wedge dx^\nu) \wedge dx^\rho = dx^\mu \wedge (dx^\nu \wedge dx^\rho) \tag{6.60}$$

が成り立ち，

$$\begin{aligned}&dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \\ &= dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho + dx^\nu \otimes dx^\rho \otimes dx^\mu + dx^\rho \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &\quad - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\rho - dx^\rho \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu - dx^\mu \otimes dx^\rho \otimes dx^\nu\end{aligned} \tag{6.61}$$

であることがわかる．外積の線形性から，微分形式の外積の成分表示は，成分を書き並べるだけで得られることがわかる：

$$\omega \wedge \eta = \sum_\mu \omega_\mu dx^\mu \wedge \sum_\nu \eta_\nu dx^\nu = \sum_{\mu,\nu} \omega_\mu \eta_\nu \, dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{6.62}$$

2 次微分形式 ω は (0,2) テンソルとして成分表示されるが，反対称性からその成分は $\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}$ を満たし，(6.59) を用いて

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \omega_{\mu\nu} \, dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \omega_{\mu\nu} \, dx^\mu \otimes dx^\nu + \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \omega_{\nu\mu} \, dx^\nu \otimes dx^\mu \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \omega_{\mu\nu}(dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \omega_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \sum_{1 \le \mu < \nu \le n} \omega_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu\end{aligned}$$

などと書き換えられる．同様に q 次微分形式は

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_q=1}^{n} \omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q} \, dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_q} \\ &= \frac{1}{q!}\sum_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_q=1}^{n} \omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q} \, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} \\ &= \sum_{1 \le \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_q \le n} \omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q} \, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q}\end{aligned} \tag{6.63}$$

と表記される．

6.8　外微分

ここまでの議論では多様体の一点の上に接ベクトルや余接ベクトル，テンソルや反対称テンソルなどのいろいろなベクトル空間を導入したが，多様体 M がたくさんの点を持つ滑らかな空間だという事実は，最初に接ベクトルを導入するために利用されただけで，多様体全体のありさまは本質的な役割を演じてこなかった．ここからは多様体上の異なる点に載せられた数量を比較することを考えよう．とは言え，いきなり離れた 2 点を比較することも無理があるので，無限に近い 2 点の比較，すなわち微分ということから考える．

多様体 M 上の微分可能関数 f を 0 次微分形式と呼び，(6.27) に定めた微分 df は 1 次微分形式となった．f から df を作る操作を一般化して，q 次微分形式から $(q+1)$ 次微分形式を作る写像

$$d : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M), \qquad \omega \mapsto d\omega \tag{6.64}$$

を (6.63) の ω に対して

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{q!} \sum_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_q=1}^{n} d\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q} \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_q=1}^{n} \frac{\partial \omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} \end{aligned} \tag{6.65}$$

で定義する．$d\omega$ を ω の**外微分** (exterior differentiation) と呼ぶ．この定義式 (6.65) の右辺は座標を使った定義なので，こうして定められた $d\omega$ がチャートの選び方によらず不変なものになっているかということは確認を要する．一般の場合でもできるのだが，計算式が煩雑になるので，1 次微分形式の場合についてのみ確認しておこう．(6.35) のところで議論したように 1 次微分形式 θ は 2 通りのチャートに従って

$$\theta = \sum_\mu \theta_\mu \, dx^\mu, \qquad \theta = \sum_\nu \tilde{\theta}_\nu \, d\tilde{x}^\nu$$

という 2 通りの表記を持ち，

$$\sum_\mu \theta_\mu \, dx^\mu = \sum_{\mu,\nu} \theta_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} d\tilde{x}^\nu = \sum_\nu \tilde{\theta}_\nu \, d\tilde{x}^\nu$$

という書き換えでお互いに移り合う．つまり

$$\tilde{\theta}_\nu = \sum_\mu \theta_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}$$

という成分の変換則によって 2 通りの表記は整合していた．それでは，2 通りの表記から計算した外微分

$$d\theta = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial \theta_\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\mu, \qquad d\theta = \sum_{\rho,\nu} \frac{\partial \tilde{\theta}_\nu}{\partial \tilde{x}^\rho} d\tilde{x}^\rho \wedge d\tilde{x}^\nu \tag{6.66}$$

は一致するだろうか，というのがチェックすべきことである．右の式を変形し

ていくと

$$\begin{aligned}\sum_{\rho,\nu}\frac{\partial\tilde{\theta}_\nu}{\partial\tilde{x}^\rho}\,d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu &= \sum_{\rho,\nu,\mu}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\rho}\left(\theta_\mu\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\right)d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu\\ &= \sum_{\rho,\nu,\mu}\frac{\partial\theta_\mu}{\partial\tilde{x}^\rho}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\,d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu\\ &\quad+\sum_{\rho,\nu,\mu}\theta_\mu\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tilde{x}^\rho\,\partial\tilde{x}^\nu}\,d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu\end{aligned}$$

を得るが，偏微分は可換であり：

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu\,\partial\tilde{x}^\rho}=\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\nu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\rho}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\right)=\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tilde{x}^\rho\,\partial\tilde{x}^\nu}$$

外積は反対称なので：

$$d\tilde{x}^\nu\wedge d\tilde{x}^\rho=-d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu$$

この項は

$$\begin{aligned}\sum_{\rho,\nu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tilde{x}^\rho\,\partial\tilde{x}^\nu}\,d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu &= \sum_{\rho,\nu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu\,\partial\tilde{x}^\rho}\,d\tilde{x}^\nu\wedge d\tilde{x}^\rho\\ &= -\sum_{\rho,\nu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tilde{x}^\rho\,\partial\tilde{x}^\nu}\,d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu\end{aligned}\tag{6.67}$$

となるからゼロである．ただし，1 行目ではダミーの添え字のつけ替えをして，2 行目に移るときには偏微分の対称性と外積の反対称性を用いた．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{\rho,\nu}\frac{\partial\tilde{\theta}_\nu}{\partial\tilde{x}^\rho}\,d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu &= \sum_{\rho,\nu,\mu}\frac{\partial\theta_\mu}{\partial\tilde{x}^\rho}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\,d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu+0\\ &= \sum_{\lambda,\rho,\nu,\mu}\frac{\partial\theta_\mu}{\partial x^\lambda}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial\tilde{x}^\rho}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\,d\tilde{x}^\rho\wedge d\tilde{x}^\nu\\ &= \sum_{\lambda,\mu}\frac{\partial\theta_\mu}{\partial x^\lambda}\,dx^\lambda\wedge dx^\mu\end{aligned}$$

に帰着する．したがって (6.66) の 2 通りの表式は同じものを表している．いま 1 次微分形式について外微分が座標の選び方によらないことを示したが，q 次微分形式についてもほぼ同様に証明できる．この証明において本質的なことは，偏微分は対称だが，外積は反対称だという性質である．反対称テンソル場は自然なやり方で微分が定義できるのであり，このことが反対称テンソル場だけを微分形式と呼んで他のテンソル場よりも特別扱いする理由である．

なお，座標近傍において座標 x^μ は 0 次微分形式 $x^\mu : U_\alpha\to\mathbb{R}$ と見なせるが，外微分の定義から $d(x^\mu)=dx^\mu$ と書くことが整合している．

6.9 ド・ラムのコホモロジー群

外微分の性質を列挙しておく．任意の $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^q(M)$, $\eta \in \Omega^r(M)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ に対して，次の関係式が成り立つ：

$$d(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1\, d\omega_1 + \lambda_2\, d\omega_2, \tag{6.68}$$

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^q\, \omega \wedge d\eta, \tag{6.69}$$

$$dd\omega = 0. \tag{6.70}$$

1 行目の式は外微分 $d : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M)$ が線形写像だということを言っている．2 行目の式は，関数の積の微分が $(fg)' = f'g+fg'$ となるという性質を一般化したものであり，次数つきのライプニッツ則とも呼ばれる．3 行目の式では，本当は 2 つの d を写像 $d_q : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M)$ と $d_{q+1} : \Omega^{q+1}(M) \to \Omega^{q+2}(M)$ に区別して書くべきである．この式 (6.70) は，合成写像 $dd = d_{q+1} \circ d_q$ はすべての q 次微分形式を 0 に移すということを言っている．この性質

$$d_{q+1} \circ d_q = 0 \tag{6.71}$$

は外微分の最も重要な性質である．この性質は，(4.38) のところで議論した，単体複体の境界作用素の性質 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ と比類される．

性質 (6.70) を証明しておこう．証明はたんなる計算問題である．外微分の定義式 (6.65) どおりに，外微分を 2 回施したものを書くと

$$dd\omega = \frac{1}{q!} \sum_{\rho,\lambda,\mu_1,\cdots,\mu_q=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{\mu_1\cdots\mu_q}}{\partial x^\rho\, \partial x^\lambda}\, dx^\rho \wedge dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q}$$

となるが，偏微分は対称であり，外積は反対称なので，(6.67) で議論したのと同じ理由から，これはゼロである．ライプニッツ則 (6.69) の証明は読者に考えてもらいたい．

$d\omega = 0$ となるような微分形式 ω を**閉微分形式** (closed differential form)，あるいはたんに閉形式という．q 次閉微分形式の全体の集合を

$$Z^q(M) := \{\omega \in \Omega^q(M) \,|\, d\omega = 0\} \tag{6.72}$$

と書く．また，$\omega = d\eta$ となるような微分形式 η があれば，ω を**完全微分形式** (exact differential form)，あるいはたんに完全形式という．q 次完全微分形式全体のなす集合を

$$B^q(M) := \{\omega = d\eta \,|\, \eta \in \Omega^{q-1}(M)\} \tag{6.73}$$

と書く．$Z^q(M)$ はベクトル空間になっており，外微分の性質 (6.70) から，完全形式は閉形式である．$B^q(M)$ は $Z^q(M)$ の部分ベクトル空間であることがわかる：

$$B^q(M) \subset Z^q(M). \tag{6.74}$$

2 つの閉形式 $\omega, \omega' \in Z^q(M)$ に対して $\omega - \omega' \in B^q(M)$ のとき，ω と ω' はコホモローグであるといい，$\omega \sim \omega'$ と書くことにする．この関係 $\sim$ は同値関係であることがわかり，このような同値類全体のなす集合を

$$H^q(M) := Z^q(M)/B^q(M) \tag{6.75}$$

と書くと，$H^q(M)$ はまたベクトル空間になっている．$H^q(M)$ を M の q 次元の**ド・ラムのコホモロジー群** (de Rham cohomology group) と呼ぶ[*6)]．

6.9.1 0 次元コホモロジーの例

ド・ラムコホモロジーの意味を吟味しよう．0 次元のコホモロジーが一番簡単なので，0 次元から考えることにする．0 次の微分形式とは微分可能な関数 $f : M \to \mathbb{R}$ のことだ．そうすると 0 次の閉微分形式とは $df = 0$ となるような関数 f のことである．一方，-1 次の微分形式 η というものはないので 0 次の完全微分形式 $\omega = d\eta$ というものはない．したがって 0 次元のコホモロジーというのは 0 次の閉微分形式の集合そのものに他ならない：

$$H^0(M) = Z^0(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \,|\, df = 0\}. \tag{6.76}$$

要するに，0 次元のコホモロジーというのは微分してゼロになるような関数はどれくらいあるか示しているのである．定値関数は微分するとゼロになる．問題は，定値関数以外に微分したらゼロになるような関数はあるか，ということだ．

定値関数ではないが微分したらゼロになる関数は，あり得る．例えば多様体 X として

$$X \;=\; \mathbb{R} - \{0\} \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\} \;=\; (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

をとって，定数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して関数

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} c_1 & (x < 0) \\ c_2 & (x > 0) \end{cases}$$

を定義すると，この関数 $f(x)$ は微分するとゼロになるが，$c_1 \neq c_2$ だと $f(x)$ は定値関数ではない．要するに，X が 2 つの連結成分[*7)]に分かれていると，微分がゼロというだけでは，1 つの連結成分の上で関数が一定値をとることが言えるだけで，離れた連結成分での値が一致している保証がない．この場合，微分してゼロになる関数は 2 つの実数 c_1, c_2 で特徴づけられるから，0 次元コホモロジー群は

$$H^0(X) = \{(c_1, c_2) \,|\, c_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

である．

---

*6) コホモロジーと呼ばれるものには，アレクサンダーのコホモロジーやチェックのコホモロジーなどいくつか種類があるのだが，本書ではド・ラムのコホモロジーしか扱わないので，本書ではたんにコホモロジーと言えばド・ラムのコホモロジーのことを指す．

*7) 連結成分については 2.5 節の議論を参照のこと．

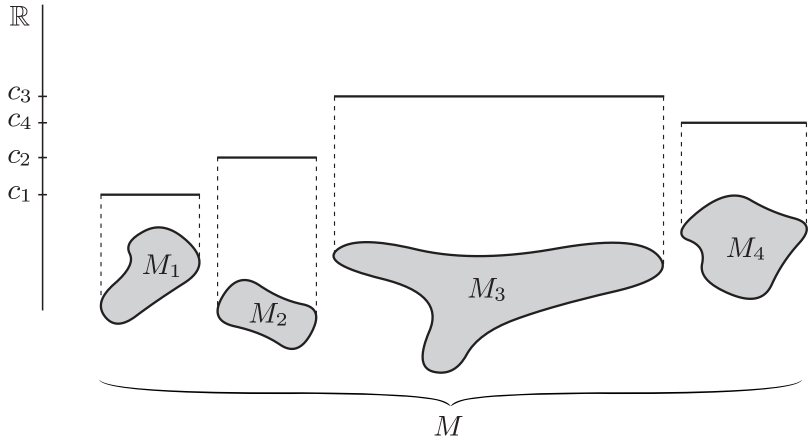


図 6.13　関数 $f : M \to \mathbb{R}$ のグラフ．多様体がいくつかの連結成分に分かれている場合は，$df = 0$ でも $f =$ 定数とは限らない．

一般に多様体 M がいくつかの連結成分からなる場合も，M 上の関数 f の微分がゼロであれば，関数 f は各連結成分上で一定値をとるが，離れ離れの連結成分の上での関数値は異なっていてよい（図 6.13 を参照）．つまり，M が k 個の連結成分を持つならば，関数 f の値はそれぞれの連結成分上での値の組 $(c_1, c_2, \cdots, c_k)$ で記述される．0 次元のコホモロジー群は微分してゼロになる関数全体の集合だから，

$$H^0(M) = \{(c_1, c_2, \cdots, c_k) \mid c_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^k \tag{6.77}$$

となる．

微分形式は，多様体の各点の接ベクトル空間から派生して定義されたものであり，そのままでは多様体上の異なる 2 点を関係づけることはなかった．しかし，外微分という操作を定めて，外微分するとゼロになるような微分形式を考えると，ある点での微分形式の値とその近傍点での微分形式の値とが関係づけられる．そして外微分してゼロになるような微分形式がどれくらいあるかということを調べて，多様体の全体像を探ろう，というのがコホモロジーのアイディアなのである．まず，0 次元コホモロジーは，多様体が何個の「島」からできているか，ということを感知しているのである．

6.9.2　1 次元コホモロジーの例

1 次元，2 次元や，より高次元のコホモロジーも，多様体の大域的な特徴を捉える道具である．あまり一般的な議論はせず，証明もせず，典型例だけをお見せしよう．平面から一点を除いた空間 $M = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ も多様体である．座標 (x, y) を使って書かれる 1 次微分形式

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy - \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx \tag{6.78}$$

は $d\omega = 0$ を満たす（確認計算は各自やってみてほしい）．しかし $\omega = d\eta$ と

なるような 0 次微分形式 η は存在しない．よって，ω は M の 1 次元コホモロジーの非自明な代表元である．平面に極座標を導入して

$$x = r\,\cos\phi, \qquad y = r\,\sin\phi$$

と書き，これらを微分して

$$dx = \cos\phi\,dr - r\,\sin\phi\,d\phi, \qquad dy = \sin\phi\,dr + r\,\cos\phi\,d\phi \tag{6.79}$$

を得る．これらを (6.78) に代入すると

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{r^2}\Bigl\{r\cos\phi(\sin\phi\,dr + r\cos\phi\,d\phi) - r\sin\phi(\cos\phi\,dr - r\sin\phi\,d\phi)\Bigr\}\\ &= d\phi \end{aligned}\tag{6.80}$$

を得る．この表式から $\omega = d\phi$ となるような関数 ϕ があるように見えるが，ϕ はいわゆる角度を表していて，r を一定にとどめながら，ϕ を $0 \le \phi \le 2\pi$ の範囲で動かすと，M 上の対応する点は円周上をぐるっと一周して元に戻って来てしまう．$\phi = 0$ と $\phi = 2\pi$ で表される点は M 上の同一点に対応するが，関数 $\phi : M \to \mathbb{R}$ は，1 個の点に 2 個の値を対応させてはいけないので，0 か 2π のどちらかの値を選ばなくてはならない．どちらの値を選んでも，無限に小さな正の実数 ε に対して $\phi = 2\pi - \varepsilon$ の点と $\phi = \varepsilon$ の点は平面上では無限に近いにもかかわらず，ϕ の値が有限の幅のギャップを持っている．つまり ϕ は平面上の連続関数ではない．したがって ϕ は M 上の 0 次微分形式ではない．

この ω の表式 (6.78) を見てもらえば ω が $(x, y) = (0, 0)$ の点では定義できていないことがわかるだろう（分母がゼロになってしまって，まずいということである）．$(x, y) = (0, 0)$ の点は M から除外されているので，ω の存在が許容されるのである．逆に言うと，このような ω の存在は，空間のどこかがくり抜かれているという状況を感知しているのである．

6.9.3　2 次元コホモロジーの例

2 次元のコホモロジーの例を 1 つだけ挙げよう．多様体として 3 次元空間から一点を除いた空間 $M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ を考える．座標 (x, y, z) を使って書かれる 2 次微分形式

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + y^2)^{3/2}} \tag{6.81}$$

は $d\omega = 0$ を満たす（確認計算はかなり面倒だが）．しかし $\omega = d\eta$ となるような 1 次微分形式 η は存在せず，ω は M の 2 次元コホモロジーの非自明な代表元である．この微分形式 ω は 3 次元の極座標

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\phi, \qquad y = r\,\sin\theta\,\sin\phi, \qquad z = r\,\cos\theta$$

を用いると

$$\omega = \sin\theta\,d\theta \wedge d\phi \tag{6.82}$$

と書かれる．この形に書けば $d\omega = 0$ となることは容易に確認できるだろう．微分形式の積分という概念をまだ定義していないので，先走った言い方になるが，この ω は原点の周りの立体角要素であり，原点を 1 回包むような閉曲面上で ω を積分すると 4π になる．(6.81) の表式を見てもらえばわかるように，ω は原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ では定義されていない．$(0, 0, 0)$ という点が M から除外されているので ω の存在が許容されるのであり，このような ω の存在は 3 次元空間のどこかがくり抜かれているという状況を反映しているのである．

6.10 ポアンカレの補題と可積分条件

(6.75) 式の定義どおり，コホモロジーは「閉微分形式ではあるが完全微分形式ではないものがどれだけあるか」を表すものだ．ところで次のような事実がある：多様体 M 上の一点可縮な開集合 U の上では閉微分形式は完全微分形式である．この事実を**ポアンカレの補題** (Poincaré's lemma) という．

もう少し言葉を補って説明した方がよいだろう．開集合 $U \subset M$ が**一点可縮** (contractible to a point) であるとは，ある点 $x_0 \in U$ と連続写像

$$F : [0, 1] \times U \to U, \qquad (s, x) \mapsto F_s(x)$$

で，任意の $x \in U$ に対して $F_0(x) = x_0$ かつ $F_1(x) = x$，かつ，任意の $s \in [0, 1]$ に対して $F_s(x_0) = x_0$ となるような F と x_0 が存在することをいう．s というのは変形を表すパラメータであり，$0 \leq s \leq 1$ の範囲の値をとる．開集合 U の点 x は写像 F_s によって $F_s(x) \in U$ に移される．$s = 1$ のときは $F_1(x) = x$ のままだが，s の値を減らしていくにしたがって点 $F_s(x)$ はずるずると動いて行き，$s = 0$ になったときにはすべての点 $x \in U$ は $F_0(x) = x_0$ に集められる．このように領域 U にあるすべての点を U の中で連続的に引きずって一点に引き寄せることができるとき，U は一点可縮であるという．

例えば，図 6.15 の球面上の開集合 U_1 は一点可縮である．一方，U_2 は一点可縮ではない．トーラス上の開集合 U_3 は一点可縮であるが，U_4 は一点可縮ではない．ちなみに $M = \mathbb{R}^n$ は一点可縮である．なぜなら，$\mathbb{R}^n$ をベクトル空間

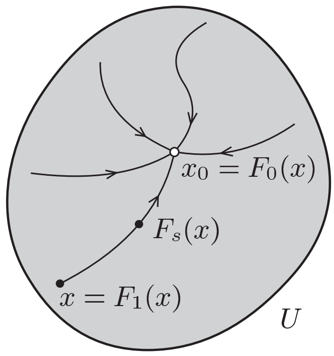


図 6.14　一点可縮な領域 U.

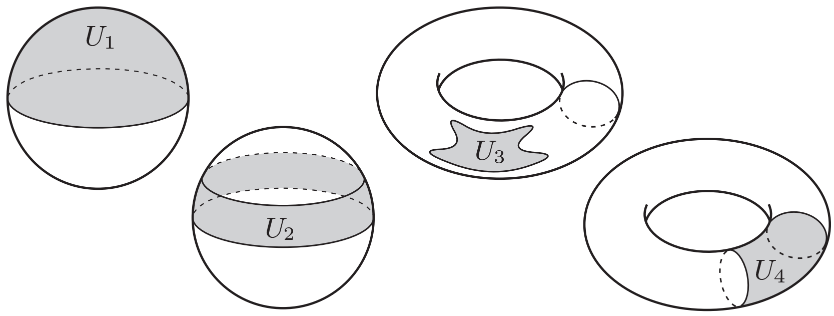


図 6.15　U_1 と U_3 は一点可縮だが，U_2 と U_4 は一点可縮でない．

と見て，

$$F : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (s, \boldsymbol{v}) \mapsto F_s(\boldsymbol{v}) := s\boldsymbol{v}$$

とおけば，これは連続写像であり，$s = 0$ のときはすべての点 $\boldsymbol{v}$ が $F_0(\boldsymbol{v}) = 0$ で原点に移され，$s = 1$ のときは $F_1(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ である．

ポアンカレの補題は，一点可縮な開集合 U の上に限定すれば，$d\omega = 0$ なる q 次微分形式 ω に対して $\omega = d\eta$ なる $(q-1)$ 次微分形式 η が必ず存在すると主張している*8)．言い換えると $H^q(U) = 0$ ということである．ただし，η が多様体 M 全体にわたって存在するとは限らない．むしろ，$\omega = d\eta$ なる η が多様体 M 全体にわたってちゃんと連続関数として存在するか否かが，M の大域的なトポロジーの関わってくるところなのである．

ポアンカレの補題の証明はしないが，例を挙げておく．(6.78) のところで議論した，平面から一点を除いた多様体 $M = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上の 1 次微分形式

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx$$

は $d\omega = 0$ を満たす．そして，

$$U = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y = 0\}$$

とおけば，U は一点可縮な領域であり，この領域に限れば角度座標 ϕ は $0 < \phi < 2\pi$ の範囲の値を連続的にとる関数になり，(6.80) で見たように，$\omega = d\phi$ を満たす．したがってこれはポアンカレの補題の成立を示す例になっている．

同様に，(6.82) のところで議論した，$M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ 上の 2 次の閉微分形式

$$\omega = \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$$

に対しても，極座標で $\theta \neq \pi$（直交座標でいうと $z \neq -r$）という領域に限れば

$$\eta = (1-\cos\theta)\,d\phi = \frac{r-z}{r} \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{r(r+z)}$$

*8)　一点可縮な U の上で $d\omega = 0$ なる $\omega \in \Omega^q(U)$ に対して $\omega = d\eta$ なる $\eta \in \Omega^{q-1}(U)$ を具体的に構成する方法もあるのだが，本書の範囲では説明しきれない．アーノルドの本にわかりやすい解説がある．

という1次微分形式が存在して，$\omega = d\eta$ が成立する．

ポアンカレの補題は，微分方程式の可積分条件という，重要な意味を持つ．たぶん微分形式の物理への応用は，可積分性の判定という形でなされることが一番多いのではないかと思う．可積分 (integrable) とは読んで字のごとく「積分できる」という意味であり，積分とは「微分の逆をたどること」だと考えるならば，可積分とは「微分するとそれになるような関数が存在する」という意味である．つまり $f(x)$ という関数に対して

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

となるような関数 $F(x)$ があれば，$f(x)$ は可積分であるという．このような $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (primitive function) と呼ぶのはよく知られていることであろう．$f(x)$ が一変数の連続関数であれば原始関数 $F(x)$ は（具体的に書けるかどうかはともかくとして）必ず存在するので，この段階では可積分ということを取り立てて言う必要はない．

問題は多変数関数の微分方程式を考えるときである．n 個の実数変数 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ の関数の連立微分方程式として

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} = \omega_1(x^1, x^2, \cdots, x^n), \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} = \omega_2(x^1, x^2, \cdots, x^n), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^n} = \omega_n(x^1, x^2, \cdots, x^n) \end{cases} \tag{6.83}$$

を考える．これは，右辺の関数 $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ が与えられたときに，左辺にあてはまる未知関数 F を求めよという問題であり，たしかに「微分するとそれになるような関数を求めよ」という形になっている．さて，微分すると $\dfrac{\partial F}{\partial x^\mu} = \omega_\mu$ になるような関数 F はあるだろうか？ 多変数の連立方程式になると，複数の方程式を全部満たすような解があるかという両立性・整合性の問題が生じる．$\mu \neq \nu$ に対して，$\dfrac{\partial F}{\partial x^\mu} = \omega_\mu$ と $\dfrac{\partial F}{\partial x^\nu} = \omega_\nu$ の両方を満たすような関数 F が存在したとしたら，偏微分は可換なので

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial F}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu}$$

が言える．つまり，

$$\begin{aligned} &\text{連立方程式}\ \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \omega_\mu\ (\mu = 1, 2, \cdots, n)\ \text{を満たす}\ F\ \text{が存在する} \\ &\quad \Rightarrow\ \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu}\ (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{6.84}$$

という命題が成り立つ．対偶をとれば，「$\dfrac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} = \dfrac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu}$ が満たされなければ，方程式 $\dfrac{\partial F}{\partial x^\mu} = \omega_\mu$, $\dfrac{\partial F}{\partial x^\nu} = \omega_\nu$ の共通の解 F はない」ということである．ポアン

カレの補題は，少なくとも一点可縮な領域では (6.84) の逆が成立するということを言っている．つまり，

$$\text{一点可縮領域において}\ \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n)$$
$$\Rightarrow\ \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \omega_\mu\ (\mu = 1, 2, \cdots, n)\ \text{を満たす}\ F\ \text{が存在する} \tag{6.85}$$

と言える．このことを微分形式を使って書き換えよう．$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu\, dx^\nu$ とおく．$dF = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^\nu}\, dx^\nu$ なので連立方程式 (6.83) は $dF = \omega$ と書かれる．また，

$$d\omega = \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

だから，命題 (6.84) は

$$\exists F\,(dF = \omega) \quad \Rightarrow \quad d\omega = 0 \tag{6.86}$$

と書き換えられるし，命題 (6.85) は

$$\text{一点可縮な領域では，} \quad d\omega = 0\ \Rightarrow\ \exists F\,(dF = \omega) \tag{6.87}$$

と書き換えられる．(6.86) は外微分の性質である恒等式 $ddF = 0$ に他ならないし，(6.87) はポアンカレの補題に他ならない．要するに，

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.88}$$

であることが一点可縮領域における連立方程式 $\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \omega_\mu\ (\mu = 1, 2, \cdots, n)$ の解の存在の必要十分条件だということである．(6.88) を (6.83) の**可積分条件** (integrability condition) とか**両立条件** (consistency condition) という．

もちろん，可積分という言葉が意味を持つのは，世の中には可積分な方程式も，非可積分な方程式もあるからである．非可積分な方程式の例は次の章で取り上げることにしよう．ただし，非可積分，つまり (6.88) が成立しないという状況は，座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ が少なくとも 2 次元以上ないと起きないということには注意しておこう．1 次元の場合は，そもそも $\frac{dF}{dx} = f(x)$ という方程式が 1 つしかないので，2 つの方程式が両立するかどうかということを気にする必要はなく，必ず可積分だったのである．

6.11 微分形式の積分

積分には二種類ある．1 つは，微分の逆演算としての積分であり，言い換えると「微分すると与えられた関数になるような関数」を求めることであり，不定積分と呼ばれるものだ．不定積分の結果が原始関数である．もう 1 つは，面積や体積などを無限分割の極限操作で計算することであり，定積分と呼ばれるものだ．定積分の結果は定数になる．とりあえず定積分は微分とは無関係に定

義される．前節では不定積分について議論したので，本節では定積分について議論しよう．次節ではこれらの関係について議論する．

これからやることは，n 次元の向きづけられた多様体 M 上で n 次微分形式 ω の積分を定めようということである．そのために多様体の向きというものを定めなくてはならない．多様体上の 2 つのチャート (U, U', ϕ), $(\tilde{U}, \tilde{U}', \tilde{\phi})$ が重なりを持っているとき（$U \cap \tilde{U} \neq \varnothing$），座標変換関数 $\psi = \phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ を (6.3) のように定めて，n 次正方行列 J の行番号 μ，列番号 ν の成分 J^{μ}_{ν} を微分係数

$$J^{\mu}_{\nu} := \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\nu}}$$

で定義する．J^{μ}_{ν} は領域 $U \cap \tilde{U}$ 上で定義された連続関数であり，行列 J の行列式はゼロではない実数である（なぜそう言える？）．したがって，J の行列式は重なり領域 $U \cap \tilde{U}$ 上で一定の符号を持つ．$\det J > 0$ のとき 2 つのチャートは向きが整合しているといい，$\det J < 0$ のとき 2 つのチャートは逆向きだという．もしも，多様体 M を向きが整合したチャートだけからなるアトラスで覆うことができれば，M は**向きづけ可能** (orientable) な多様体であるという．もし，そのようなアトラスが存在しなければ M は向きづけ不可能だという．M が向きづけ可能な場合，向きが整合したアトラスは 2 通り存在するが，このうちの一方を選ぶことを，M に向きをつけるという．

積分を定義するためにもう 1 つ準備しなくてはならないことがある．それは「単位の分割」と呼ばれるものである．A は有限集合または可算集合とする．A を添え字集合とする開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属した**単位の分割** (partition of unity) とは次の 4 つの条件を満たす関数の集合 $\{p_\alpha : M \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ のことである．(1) 各添え字 α に対して $p_\alpha : M \to \mathbb{R}$ は微分可能な関数である．(2) 任意の $x \in M$ に対して $0 \leq p_\alpha(x) \leq 1$．(3) $x \notin U_\alpha$ のとき $p_\alpha(x) = 0$. (4) 各点 $x \in M$ に対して $\displaystyle\sum_{\alpha} p_\alpha(x) = 1$.

こうして向きをつけられて，単位の分割も与えられた多様体 M の上で n 次微分形式 ω の積分は次のように定められる．向きづけたアトラスの中からチャートを 1 つを選んで微分形式 ω を座標表示すると

$$\omega = \omega_\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

と書かれる．このチャートの座標近傍 U_α 上の ω の積分を

$$\int_{U_\alpha} \omega := \int_{U'_\alpha} \omega_\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n)\, dx^1\, dx^2 \cdots dx^n \tag{6.89}$$

で定める．右辺の積分は座標範囲 $U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ の上での通常の実数関数の積分である．もし ω が複数の座標近傍にまたがってゼロでない値を持つならば，単位の分割を ω にかけ算して座標近傍ごとに積分値を求め，それらの和で積分を定める：

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} p_\alpha\, \omega. \tag{6.90}$$

同様に，n 次元多様体 M の向きづけられた r 次元部分多様体 C 上で r 次微分形式 η の積分

$$\int_C \eta$$

を定めることもできるのだが，これをきちんと定義しようとするとさらに多くの準備を要するので，以下では計算例だけを示すことにする．

1 つ目はとても簡単な例．多様体 $M = \mathbb{R}^2$ の上の 2 次微分形式

$$\omega = dx \wedge dy$$

を領域

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

で積分しよう[*9)]．$\mathbb{R}^2$ はただ 1 つのチャートで覆われるので，向きづけはできたことになっている．極座標を用いれば積分すべき領域は $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ であり，(6.79) で計算した dx, dy を ω に代入して，$dr \wedge dr = d\phi \wedge d\phi = 0$, $d\phi \wedge dr = -dr \wedge d\phi$ に注意すれば

$$\omega = (\cos\phi\, dr - r\,\sin\phi\, d\phi) \wedge (\sin\phi\, dr + r\,\cos\phi\, d\phi) = r\, dr \wedge d\phi$$

を得るから，積分は

$$\int_D \omega = \int_0^a \int_0^{2\pi} r\, dr d\phi = \pi a^2 \tag{6.91}$$

となる．つまり円の面積が求められた．

次の例．多様体は同じ $M = \mathbb{R}^2$ だが，1 次微分形式

$$\eta = x\, dy$$

を 1 次元部分多様体（曲線のこと．この場合は円）

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$$

の上で積分しよう．写像

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto c(t) := (a\cos t, a\sin t)$$

を考えると，この写像の像は曲線 C に一致している．$(x, y) = c(t) = (a\cos t$, $a\sin t)$ を代入すると

$$dy = d(a\sin t) = a\cos t\, dt$$

だから，

$$\eta = x\, dy = a^2\cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}a^2(1 + \cos 2t)\, dt \tag{6.92}$$

であり，微分形式 η を円 C 上で積分すると

---

*9) D は境界つき多様体と呼ばれるものだが，その定義は本書では与えていない．詳しくは中原の本などを参照してほしい．

$$\int_C \eta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos 2t)\,dt = \pi a^2 \tag{6.93}$$

となる．ある部分多様体 C の上で微分形式 η を積分するには，C を適当に座標づけて（いまの例では 1 次元部分多様体 C を t という変数で座標づけた），その変数を微分形式に代入して微分形式を書き直し，部分多様体を規定する座標範囲で積分すればよい．微分形式に座標を代入すると，(6.92) でやったように，いわゆる置換積分が自動的に計算できる．「置換積分が形式的に計算できるから微分形式というのだ」という話もある*10)．

なお，曲線を定める写像 $c:\mathbb{R}\to M$ を微分して得られる接ベクトルは，$\dot{c}:\mathbb{R}\to TM$ という写像を誘導する．一方で 1 次微分形式は $\eta: TM\to\mathbb{R}$ という写像である．曲線の座標を微分形式に代入すると，合成写像 $\eta\circ\dot{c}:\mathbb{R}\to TM\to\mathbb{R}$ が作られて，これは実数から実数への写像なので，通常の定積分ができる．積分とは，多様体 M を仲立ちとして部分多様体 C と微分形式 η が対をなして実数を出力する操作だと言ってもよい：

$$\langle \eta, C\rangle = \int_C \eta.$$

微分形式は，積分の足場となる部分多様体 C さえ与えられれば，積分値を決定するものである．$\eta = \eta_x dx + \eta_y dy$ や $\omega = \omega_z dx\wedge dy$ といった表式からもうかがえるように，微分形式は「積分される寸前の状態」であり，その意味では「積分形式」と呼んだ方が適切だったのかもしれない．なお，積分結果 (6.93) が (6.91) の結果と一致することは偶然ではない．これらの一致は，後に述べるストークスの定理の成立を示す例になっている．

読者には，$\mathbb{R}^3$ 上の 1 次微分形式 $\xi = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ が極座標を用いると

$$\xi = r\,dr = \frac{1}{2}d(r^2)$$

になることを確かめてもらいたい．また，点 (x_0, y_0, z_0) と点 (x_1, y_1, z_1) を結ぶ線分

$$c:[0,1]\to\mathbb{R}^3, \qquad t\mapsto c(t) := (1-t)(x_0,y_0,z_0) + t(x_1,y_1,z_1)$$

に沿って積分 $\displaystyle\int_c \xi$ を計算してみてほしい．同様に，2 次微分形式 $\eta = \dfrac{1}{3}(x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)$ が

$$\eta = \frac{1}{3}r^3 \sin\theta\, d\theta\wedge d\phi$$

になることや，3 次微分形式 $\omega = dx\wedge dy\wedge dz$ が

$$\omega = r^2 \sin\theta\, dr\wedge d\theta\wedge d\phi$$

になることを確かめてもらいたい．また，$d\eta = \omega$ となることは，簡単に確かめられるだろう．

*10）　古結明男氏談.

6.12 ストークスの定理

さて前の 2 節で，微分形式の不定積分と定積分を議論した．不定積分とは q 次微分形式 ω の「原始微分形式」η，すなわち

$$\omega = d\eta$$

となるような $(q-1)$ 次微分形式 η を求めることであり，そのような η が存在するための必要条件は $d\omega = 0$ だった（可積分条件）．もし考えている多様体が一点可縮であれば，$d\omega = 0$ であることは，$\omega = d\eta$ となる η が存在するための必要十分条件であった（ポアンカレの補題）．多様体が一点可縮でない場合は，$d\omega = 0$ であっても，$\omega = d\eta$ となる η が存在しないことがあり，この存在障害を調べたものがコホモロジー群 $H^q(M) = Z^q(M)/B^q(M)$ であった．

一方で，微分形式の定積分とは，q 次元部分多様体を規定する写像 $c : U' \to M$（$U' \subset \mathbb{R}^q$）と q 次微分形式 ω を出会わせて，対 $\langle \omega, c \rangle = \int_c \omega$ を実数値として出力させることであった．

ところが，不定積分と定積分は無関係ではない．これらを関係づけるものが微分積分の基本定理であり，ストークスの定理である．このことを本節では説明しよう．微分積分の基本定理とは

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a) \tag{6.94}$$

のことである．断っておくが，この式は定積分の定義式ではない！（この式を定積分の定義だと思っていた人は，微積か解析の教科書にある「定積分」か「リーマン積分」の項目を見てほしい．）定積分と微分はもともと別個の概念であるが，それらがじつは関係しているというのがこの公式の主張である．この公式は，$f(x)$ の原始関数（つまり不定積分）$F(x)$ がわかれば，$f(x)$ の定積分が

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

と計算できると言っているのである．つまり，区間 $[a, b]$ での $f(x)$ の定積分は，区間 $[a, b]$ の端での原始関数の値だけで決まる．

以上は 1 次元空間 $\mathbb{R}$ 上の微分と積分の関係だが，同様のことがもっと高い次元でも成立するというのが，ストークスの定理である．**ストークスの定理** (Stokes' theorem) は次のように述べられる．$(q-1)$ 次微分形式 η と，向きづけられた q 次元部分多様体 C があったとき，

$$\int_C d\eta = \int_{\partial C} \eta \tag{6.95}$$

という関係が成り立つ．∂C は多様体 C の境界であり，C が q 次元なら，∂C は $(q-1)$ 次元の多様体である．とくに，C が点 $a \in M$ を始点として $b \in M$ を終点とする曲線であり，$\eta = F$ が 0 次微分形式であれば，$\partial C = b - a$ であ

り，公式 (6.95) は

$$\int_C dF = \int_{\partial C} F = F(b) - F(a)$$

となる．したがってストークスの定理は，微分積分の基本定理を特別な場合として含んでいる．(6.91) と (6.93) の計算結果が一致したのも，円板 D の境界が円周 $C = \partial D$ であり，かつ $\eta = x\,dy$ に対して $d\eta = dx \wedge dy = \omega$ だったからである．前節の計算は，$\displaystyle\int_D \omega = \int_D d\eta = \int_{\partial D} \eta$ というストークスの定理の成立を確認していたのである．本書ではストークスの定理の証明はしない．証明は他の本を見てほしいが，結局は 1 変数関数の微分積分の基本定理に帰着させることによって証明される．

ストークスの定理は面白い構造を持っている．外微分は

$$d : \Omega^{q-1}(M) \to \Omega^q(M), \qquad \eta \mapsto d\eta$$

というふうに，微分形式の次数を増やす方向に作用する．他方，部分多様体の境界作用素（この本ではきちんと定義を述べていないが）は

$$\partial : C_q(M) \to C_{q-1}(M), \qquad C \mapsto \partial C$$

のように多様体の次元を下げる方向に働く．積分は，次数と次元がマッチした微分形式と部分多様体の対 $\langle \omega, C \rangle = \displaystyle\int_C \omega$ を与える．このとき，ストークスの定理は

$$\langle d\eta, C \rangle = \langle \eta, \partial C \rangle \tag{6.96}$$

と書かれる．また $dd\eta = 0$ であるし，$\partial\partial C = 0$ である．このように微分形式の外微分と，部分多様体の境界作用素は，ある種の双対な関係を持っている．したがって外微分から定義されるコホモロジーと，境界作用素から定義されるホモロジーは，多様体 M に関して似たような情報を引き出していると期待される．例えば，0 次元のホモロジーもコホモロジーも，多様体の連結成分の個数に関する情報を引き出していた．

もちろん，定義が違うのだからホモロジーとコホモロジーの違いはあり，コホモロジーだけが引き出せる情報もあるし，ホモロジーだけが引き出せる情報もある．残念ながら本書では議論しきれないが，コホモロジーはベクトル空間としての構造の他に外積 $\omega \wedge \eta$ によって環としての構造も持つので，環構造を通して見分けられる性質がある．さらに進んだ話題になるが，微分形式がとる値を実数だけでなくファイバー束に拡張することによって，特性類と呼ばれるコホモロジー類を作ることが可能になる．一方で，ホモロジーは整数係数の加群であるため，ねじれ部分まで見分けることができる（$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \neq \{0\}$ だが，$\mathbb{R}/m\mathbb{R} = \{0\}$ である）．

第 7 章
物理への応用

微分幾何は物理に豊富な応用例を持つ．しかし応用という言葉はくせものである．微分幾何が物理に絶対必要不可欠なものかと言えば，そんなことはないと私は思う．微分幾何がなくても物理の研究はやっていけると思うし，実際やっている人もたくさんいる．ただ，同じことをやるにしても微分幾何を使う方が表記が簡便であり，意味も明瞭になり，見通しがよくなるのである．とくに一般相対性理論になると，微分幾何的な概念や記法を抜きにしては，そもそも理論の定式化すら困難である．ただし一般相対論の定式化にはリーマン幾何学が必要であり，あいにく本書の内容はリーマン幾何学まで到達していない．

しかも本書は，理論物理を学ぼうとする人だけを読者として想定しているのではなく，さまざまな現象や法則を語るための数理言語を欲する人をも読者として取り込むことを意図している．ここまでの解説のしかたも，ときとして妙に社会的な例えや擬人的表現を使ってきたのはそのためである．以下に列挙する例も，微分幾何的な捉え方とはこういうものだという例を示すために物理から題材を拾っているつもりである．また，ついでにこれら物理を通して我々が世界をどのように理解しているかということを議論しよう．

7.1 電磁気学

電場とは，そこに荷電粒子が置かれれば，その粒子に力を及ぼすような場所のことである．磁場とは，そこを通過して運動する荷電粒子があれば，その粒子に力を及ぼすような場所のことである．3 次元ベクトルの記法を使って書くと，電荷 e を持つ粒子が時刻 t に位置 $\boldsymbol{r}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過するとき受ける力は

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{7.1}$$

である．これは電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の定義式である．その上，いったん電場と磁場さえわかってしまえば，どんな粒子が動いていようとも，その粒子の運動はこ

の力で決まるという法則を表している式でもある．さらに言うと，電荷 e の定義式でもあり，電荷の測定方法を与える式でもある．これは定義と法則を 1 つに兼ね備えた式なのである．このように電磁場と荷電粒子は互いに観測し合い，互いに相手を律する関係になっており，ここにもすでに電磁場と荷電粒子の双対性の片鱗をうかがうことができる．(7.1) はローレンツ力の法則と呼ばれる．

電場も磁場も場所場所によって，また時刻によって変化し得る．また，荷電粒子の存在や運動状態によって電場や磁場の分布も変化する．そうすると，電場や磁場の変化のしかたに関する法則性はないものか，と問いたくなる．その法則はクーロン，ガウス，アンペール，ファラデーといった人たちによって少しずつ発見され，マクスウェルによる最終的な発見が加えられて完成した[*1)]．それがマクスウェル方程式と呼ばれるものだ．電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ は，ともに場所 $\boldsymbol{r}$ と時刻 t に依存した 3 次元ベクトル場である．マクスウェル方程式は，ベクトル解析の記法を使って

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{7.2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \tag{7.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{7.4}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\boldsymbol{j} \tag{7.5}$$

と書かれる偏微分方程式の組である．ここで $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ は電荷密度（単位体積あたりの電荷量）であり，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ は電流密度（単位面積を単位時間あたり通過する電荷量）である．c は光の速さであり，ε_0 は真空の誘電率と呼ばれる定数である．マクスウェル方程式とローレンツ力の法則が電磁気学の法則のすべてである．つまり (7.1) から (7.5) までのわずか 5 つの連立方程式で電磁気学の原理は言い尽くされており，これらの方程式の解として，さまざまな電磁気的な現象が記述される．その中にはクーロンの法則や，発電・変電・送電や電動モーターなどの電気機械，電磁波の発生・伝達・受信なども含まれている．

マクスウェル方程式を微分幾何学の記法に書き換えてみよう．舞台となる多様体は $\mathbb{R}^3$ である．電場の成分 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$，磁場の成分 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ を使って 1 次微分形式

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz \tag{7.6}$$

と 2 次微分形式

---

*1)　電磁気学の形成に関わった人物と業績については太田浩一氏の本にきわめて正確な記述がある．正確を期するために太田氏は徹底的に一次文献にあたって調査しており，その執念は半端なものではない．太田氏の本を読むと，他の電磁気学の教科書の著者が，情報源を自分で確かめもせずに，受け売りとうろ覚えの知識を書き並べていることがわかってしまう．

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \tag{7.7}$$

を定める．そうすると

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \tag{7.8}$$

といった具合の計算ができて，マクスウェル方程式の前半 2 つ，(7.2), (7.3) は

$$dB = 0, \tag{7.9}$$

$$dE + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{7.10}$$

と書き換えられることがわかる．後半の 2 つを微分形式で表すためには，電場を 2 次微分形式

$$*E = E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy \tag{7.11}$$

に書き直し，磁場を 1 次微分形式

$$*B = B_x dx + B_y dy + B_z dz \tag{7.12}$$

に書き直しておくとよい．また，電荷密度を 3 次微分形式

$$\rho = \rho\, dx \wedge dy \wedge dz, \tag{7.13}$$

電流密度を 2 次微分形式

$$j = j_x dy \wedge dz + j_y dz \wedge dx + j_z dx \wedge dy \tag{7.14}$$

で表しておく．そうするとマクスウェル方程式の後半 2 つ，(7.4), (7.5) は

$$d*E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \tag{7.15}$$

$$d*B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial *E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j \tag{7.16}$$

と書き換えられる．1 次形式から 2 次形式への変換 $E \mapsto *E$ や，2 次形式から 1 次形式への変換 $B \mapsto *B$ をホッジ変換 (Hodge operator) ともいう[*2)]．(7.9), (7.10), (7.15), (7.16) が微分形式で書かれたマクスウェル方程式である．

さらに時空の座標 (t, x, y, z) を対等に扱うことにして，4 次元多様体 $\mathbb{R}^4$ を舞台として考えることにする．電場と磁場をひとまとめにして $\mathbb{R}^4$ 上の 2 次微分形式

$$\begin{aligned} F = {} & E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt \\ & + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \end{aligned} \tag{7.17}$$

を作る．F は電磁場テンソルあるいはファラデーテンソルとも呼ばれる．F を

*2)　ホッジ変換は，n 次元多様体上の q 次微分形式 ω を $(n-q)$ 次微分形式 $*\omega$ に移す線形変換である．一般的にはリーマン幾何学の枠組みの中で定式化される．

使うと (7.9), (7.10) はあっさりと

$$dF = 0 \tag{7.18}$$

と書かれる．また，F をホッジ変換した 2 次微分形式を

$$\begin{aligned} *F = &\frac{1}{c}\big(E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy\big) \\ &- c\big(B_x dx \wedge dt + B_y dy \wedge dt + B_z dz \wedge dt\big) \end{aligned} \tag{7.19}$$

と定める．電荷と電流もひとまとめにして 3 次微分形式

$$\begin{aligned} J = &\rho\, dx \wedge dy \wedge dz \\ &- j_x dy \wedge dz \wedge dt - j_y dz \wedge dx \wedge dt - j_z dx \wedge dy \wedge dt \end{aligned} \tag{7.20}$$

を定める．これらを用いると (7.15), (7.16) は

$$d{*F} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} J \tag{7.21}$$

と書かれる．結局，全部のマクスウェル方程式は

$$dF = 0, \qquad d{*F} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} J \tag{7.22}$$

という，たった 2 つの，見かけもシンプルな方程式にまとめられてしまった．もちろんこうした書き換えをしたところで，方程式の内容が増えたわけでも減ったわけでもない．ただ，理論の構造が見やすくなるのである．

せっかくマクスウェル方程式が簡潔な形に書けたので，これを利用してすぐにわかることを言ってみよう．$\mathbb{R}^4$ は一点可縮なので，第 1 の方程式 $dF = 0$ とポアンカレの補題から，$F = dA$ となる 1 次微分形式 A の存在が言える．

$$A = -\phi\, dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz \tag{7.23}$$

と書けば，$F = dA$ は普通のベクトル解析の記法で書くと

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{7.24}$$

である．F を電磁場と呼ぶのに対して，A をゲージ場と呼ぶ．$F = dA$ となるような A はもちろん一意的ではない．任意の 0 次微分形式 χ を持って来て，$A' = A + d\chi$ とおけば，$dA' = dA + dd\chi = F + 0$ だから A' も A と同じ電磁場 F を与える．この

$$A \mapsto A + d\chi$$

という変換をゲージ変換という．このような変換を施しても電磁場や電磁場の方程式は変わらないという性質を，ゲージ不変性という．

後半のマクスウェル方程式 $d{*F} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c} J$ と，外微分の性質 $dd{*F} = 0$ とから，$dJ = 0$ が言える．$dz \wedge dt = -dt \wedge dz$ などに注意すると

$$dJ = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

を得るから，$dJ = 0$ は電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 \tag{7.25}$$

を意味していることがわかる．言い換えると，マクスウェル方程式が解を持つためには電荷が保存していなければならない．

電磁気の理論では，電磁場が (7.22) のような方程式に従い，ゲージ不変性という性質や，電荷保存則という条件を満たしている．素粒子論では，電磁気学のこういった性質をお手本にして，電磁気力の他の，弱い力や強い力と呼ばれる相互作用をも記述するゲージ理論が構築された．しかもゲージ理論は素粒子の実験ときわめて高い精度で合うという成功を収めており，20 世紀の物理学の輝かしい到達点の 1 つとなっている．電磁気学は 19 世紀にほぼ完成された学問であるが，その理論形式をいろいろ書き換えて，理論としての性質をよく知っておくことは，新しい発見の礎となったのである．

余談であるが，もし，物理学史上最大の発見は何か？と尋ねられるならば（先人の成し遂げた業績について後知恵にもとづいて大小の評価をするのは空疎な趣味かもしれないが，あえて言うなら），私は，電磁気の法則の発見と，その副産物としての電磁波の存在の予言とその実現を挙げたい．それまでの物理の研究の蓄積が電磁気学において見事に結集し，開花したという点と，電磁気学の定式化を契機に相対論や量子論の発見などその後の物理学の怒涛のごとき発展が促されたという点において，電磁気学の完成には最大の賛辞を送るべきだと思う．とりわけ，電磁場という人間が直接感知することができないような抽象度の高いものに対して，完全な法則のセットを見つけられたことは驚嘆に値する．それに比べれば質点の力学などは，感覚的に把握できる現象を，感覚的にわかりやすい言葉で定式化したというレベルにとどまる（もちろんそれもたいへんな発見であるし，そのような目に見え手に触れる現象の記述体系があってこそ，非感覚的な記述体系の解釈が可能になる）．また，静電気や磁気，電磁誘導や，電波や光，X 線，色・反射・屈折・回折・干渉・偏光といった，非常に質的に異なって見える現象が，すべて電磁場のふるまいの量的な差異にすぎないことを示したという意味で*3)，電磁気学は「世界には統一的な法則がある」ということを曖昧さなく示しており，物理学の理想的な姿を体現している．電磁気学の統一理論的性格は，その後の物理学の研究の手本を示し，ゲージ理論などの成功に導いたとも言える．また，電気の技術が文明に及ぼしたインパクトは，いまだにどこまで影響が広がるかわからないほど強烈・広大なものである．とくに電波による通信・放送は，情報（正しい情報もいいかげんな情報

---

*3)　もちろんマクスウェルの電磁気学ですべての電磁現象が説明できたわけではない．とりわけ，原子はなぜ特定の波長の光だけを吸収・放出するのか，そもそもなぜ原子は安定に存在していられるのか，光速はどの観測者から見ても一定なのか，高温の物体から出る光の色はどういう法則に従うのか，光電効果はなぜ起こるのか，といった問題は 19 世紀末から 20 世紀初頭の物理の難問であった．

も）の伝達速度と伝達範囲，商売や政治のやり方や，国と国のつき合い方までも変えてしまった．電気・電波技術の発明は，人類史上，農耕の発明や文字の発明に並ぶくらいの偉大な発明・発見ではなかろうか．

余談はそのくらいにして，マクスウェル方程式の書き換えについて別のバージョンを紹介しておこう．ここまでの書き換えはいずれにしても微分方程式の形で電磁気の法則を書き表していたが，積分方程式の形で書くこともできる．$\mathbb{R}^3$ 上の微分形式 E, B を採用し，V を $\mathbb{R}^3$ の中の任意の 3 次元領域，S を任意の曲面とする．そうするとマクスウェル方程式の前半 2 つ，(7.9), (7.10) は

$$\int_{\partial V} B = 0, \tag{7.26}$$

$$\int_{\partial S} E + \frac{\partial}{\partial t}\int_S B = 0 \tag{7.27}$$

と書き換えられる．同様に，後半 2 つ，(7.15), (7.16) も

$$\int_{\partial V} *E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho, \tag{7.28}$$

$$\int_{\partial S} *B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_S *E = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int_S j \tag{7.29}$$

と書き換えられる．例えば (7.28) は「任意の 3 次元領域 V の表面から出る電気力線の総量は，その領域 V 内にある電荷の総量に比例する」と読まれる．その他の式の読み方は各自考えてみてほしい．積分形で方程式を書いておくと，電荷の分布が不連続に変化するような場合でもそのまま扱えるという利点がある．微分方程式を使っていると，関数値が不連続に変化する箇所では，関数を微分できないので，微分方程式だけでは扱い切れず，境界条件という付帯条件が必要になる．

7.2 拘束系の力学

7.2.1 非可積分な拘束条件

次に古典力学の拘束条件の微分幾何的な扱いという話題を紹介しよう．力学系を記述するときは，まず系がどれだけの自由度を持っているかということを調べる．系の状態を記述するのに必要な座標の数を系の自由度 (degrees of freedom) という．例として，平面の上を転がる円板を考えてみよう．床の上で一輪車を操縦している様子を思い浮かべてほしい．話を簡単にするために，この円板（車輪）は倒れないものとする．

この車輪の状態を記述するためにはいくつの変数が必要だろうか？ まず，車輪が床のどの地点にあるかということを記述するために，車輪が床と接地している場所を指し示す座標 (x, y) が必要だろう．この他に，車輪の向きを示す角度 θ と，車輪がどれだけ回ったかを示す角度 ϕ があればよい．つまり角度 θ は一輪車のハンドルの方向を表し，角度 ϕ は一輪車のペダルの回転角を表してい

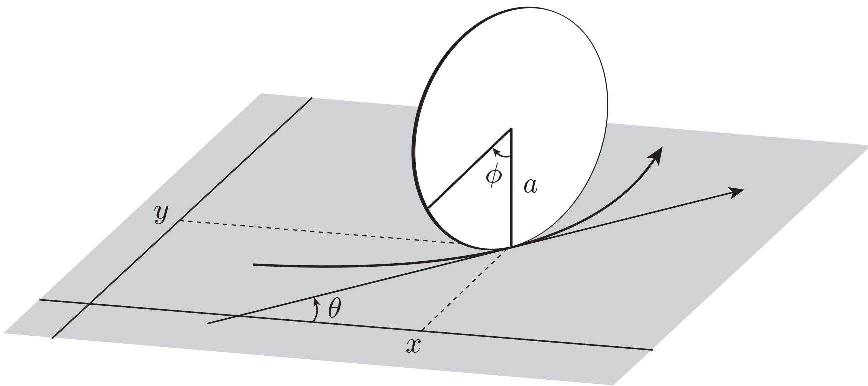


図 7.1　床を滑らずに転がる倒れない円板．

る（実際の一輪車にはハンドルはついていないが，一輪車の方向を指す角度をハンドルと呼ぶことにする）．以上 4 つの座標 (x, y, θ, ϕ) で円板の状態は完全に記述できる．すなわち，床の上を倒れずに転がる円板の自由度は 4 である．

ところで，これら 4 つの変数は独立に変動することができるだろうか？ ここで車輪は滑らずに転がるものとする．つまり車輪はペダルをこいだときだけ，車輪の向いている方向に転がり，車輪は横滑りしたり空回りしたりはしないものとする．そうすると，車輪の位置の変化は，ペダルの回転とハンドルの向きに依存して決まる．車輪の半径を a とすると，車輪の位置 x, y の変化分 dx, dy は，ペダルの回転角の変化分 $d\phi$ と

$$dx = a\cos\theta\, d\phi, \tag{7.30}$$

$$dy = a\sin\theta\, d\phi \tag{7.31}$$

という関係を持つ．(θ, ϕ) が独立した自由度で，(x, y) は (θ, ϕ) に従属した自由度である．上式のような自由度の間の従属関係を拘束条件という．

さて，4 つの自由度があって，2 つの拘束条件があるのだから，正味の「生きている」自由度は 2 つしかない.「滑らずに転がる」という条件の下では，自由に動かせるのは (θ, ϕ) だけで，それにつられて (x, y) の動き方が決まってしまう．それならば，変数 (x, y) は完全に (θ, ϕ) の関数として決まってしまうのか？という疑問が湧いて来る．つまり拘束条件を

$$x = x(\theta, \phi),$$

$$y = y(\theta, \phi)$$

という形に書き直せるか？という問いが立てられる．

微分方程式 $dx = a\cos\theta\, d\phi$ を満たすような関数 $x(\theta, \phi)$ を求めよという問題は，原始関数を求めよという問題に他ならない．そのような原始関数があるかないかということは可積分条件を調べてみればわかる．原始関数 x が存在するならば，外微分の性質から $ddx = 0$ でなければならない．しかるに，

$$ddx = d(a\cos\theta\, d\phi) = -a\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi \tag{7.32}$$

となり，右辺はゼロではない．つまり，微分方程式 $dx = a\cos\theta\, d\phi$ は非可積分である．したがって，原始関数 $x(\theta, \phi)$ は存在しない．同様に，$dy = a\sin\theta\, d\phi$ を満たす関数 $y(\theta, \phi)$ も存在しないことがわかる．このように非可積分な拘束条件を**非ホロノーム拘束** (nonholonomic constraint) ともいう．

拘束条件 (7.30) が非可積分であることの意味をもう少し吟味してみよう．もしも関数 $x(\theta, \phi)$ があったら，その微分は

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi = \omega_\theta d\theta + \omega_\phi d\phi = \omega \tag{7.33}$$

と書ける．偏微分は可換なので

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right) = \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \theta} \tag{7.34}$$

を満たさなければならない．したがって

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \phi}\right) d\theta \wedge d\phi = 0$$

でなければならない．ところが，いまの問題では $\omega = a\cos\theta\, d\phi$ は $d\omega = 0$ を満たさなかった．だから $dx = \omega$ を満たすような関数 $x(\theta, \phi)$ は存在し得ない，というのが上で見た結果だった．

(7.33) を見ると，$\omega_\theta d\theta$ の項は θ をちょっと動かしたときに，それに応答して x はどれだけ動くか，ということを表しており，$\omega_\phi d\phi$ の項は ϕ をちょっと動かしたときに，それに応答して x はどれだけ動くか，ということを表していることが見て取れる．ところが条件 (7.34) が満たされなかったということは，θ をちょっと動かした後に ϕ をちょっと動かした場合と，ϕ をちょっと動かした後に θ をちょっと動かした場合では，x の変化量は違ってくるということを言っているのである．しつこく言うと，ハンドル操作とペダル操作の順序を入れ換えると，結果は違ってくる．ハンドル操作とペダル操作の非可換性が，拘束条件の非可積分性なのである．この非可換性から，ハンドルを角度 $\Delta\theta$ 回した後，ペダルを角度 $\Delta\phi$ 回し，次にハンドルを $-\Delta\theta$ 回し，ペダルを $-\Delta\phi$ 回して，ハンドルとペダルを完全に元の状態に戻しても，x の変化は打ち消されずに残ることがわかる．実際，出発点を (θ_0, ϕ_0) としてこの経路 C に沿って微分形式 $dx = a\cos\theta\, d\phi$ を積分すると，x の変化量は

$$\Delta x = \int_C dx = a\cos(\theta_0 + \Delta\theta)\,\Delta\phi - a\cos\theta_0\,\Delta\phi$$

となる．もしも，ハンドル $\Delta\theta$ 回転，ペダル $\Delta\phi$ 回転，ペダル $-\Delta\phi$ 回転，ハンドル $-\Delta\theta$ 回転，の順に操作していれば一輪車は完全に元の位置に戻る．操作の順序を入れ換えると，正味違う結果をもたらすのである．むしろ，ハンドルとペダルの操作が非可換であるからこそ，一輪車は「移動」できる乗り物なのである．非可積分とは，プロセスの順序・経路に依存して，変化の蓄積結果が異なってくるという意味だったのだ．

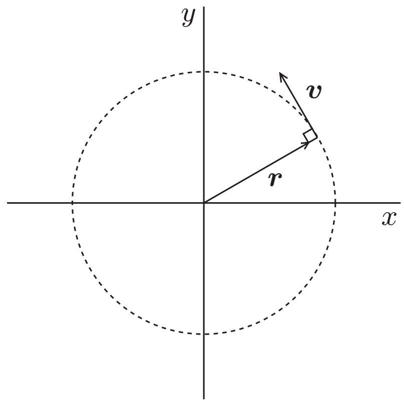


図 7.2　位置ベクトルと速度ベクトルがつねに直交するという拘束条件．

7.2.2　可積分な拘束条件

次に，可積分な拘束条件の例を挙げよう．平面上を動く質点を考える．原点からとった位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y)$ とする．これは 2 自由度の系である．拘束条件として，質点の速度ベクトル $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y)$ はつねに位置ベクトルに垂直である，という条件が課せられているものとする．つまり，

$$(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{v})=xv_x+yv_y=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \tag{7.35}$$

という拘束条件を考える．これは，微分形式

$$\alpha=x\,dx+y\,dy \tag{7.36}$$

を使うと，質点の軌道の接ベクトル $\boldsymbol{v}=\dfrac{d}{dt}=v_x\dfrac{\partial}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial}{\partial y}$ は $\langle\alpha,\boldsymbol{v}\rangle=0$ を満たすべしという条件に読み替えられる．

この拘束条件は可積分である．つまり $d\alpha=0$ であり，$\mathbb{R}^2$ は一点可縮なので，$\alpha=dh$ となるような 0 次微分形式 h が存在する．実際，

$$h=\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2) \tag{7.37}$$

とおけば $dh=x\,dx+y\,dy=\alpha$ となることがわかる．拘束条件は

$$\langle\alpha,\boldsymbol{v}\rangle=\langle dh,\boldsymbol{v}\rangle=\frac{dh}{dt}=0 \tag{7.38}$$

と書き換えられ，質点の運動に沿って h の値は一定であることがわかる．この定数を $h=\dfrac{1}{2}a^2$ とおけば，

$$x^2+y^2=a^2 \tag{7.39}$$

となり，質点の運動は円周上に束縛されていることがわかる．(7.35) のような微分に関する拘束条件を，(7.39) のような微分を含まない座標だけに関する条件に書き換えることが積分なのだ．拘束条件が (7.39) のようになれば，例えば

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

のように変数 y を他の変数 x について解くことによって，正味の独立な自由度を減らすことができる．この場合，x が独立な自由度で，y はそれに従属した変

数であり，y はもはや自由度のうちに入らない．拘束条件 (7.35) は，結局，微分を含まない拘束条件 (7.39) に帰着された．(7.35) のように可積分な拘束条件を**ホロノーム拘束** (holonomic constraint) ともいう．

以上の議論は，可積分な関係式を見つけて，微分方程式に現れる変数の自由度を減らすことができれば，解の存在し得る範囲を狭めていき，ついには解を完全に決めることができるかもしれない，という微分方程式の解き方を予感させる．実際，そのような方法が有効であることを次節で議論しよう．

7.3　力学と保存則

運動方程式を解くことと可積分との関わりを説明しよう．例として調和振動子を挙げよう．調和振動子とは，$x(t)$, $p(t)$ に対する連立微分方程式

$$\frac{dp}{dt} = -\omega^2 x, \tag{7.40}$$

$$\frac{dx}{dt} = p \tag{7.41}$$

のことである．ω は正の実数とする．もちろんこの方程式を解くのは読者にとってたやすいことだろうが，ここではじっくりと解き方を吟味してみよう．今度は，(x, p, t) を座標とする多様体 $\mathbb{R}^3$ 上の微分形式

$$\eta_1 := dp + \omega^2 x\, dt, \tag{7.42}$$

$$\eta_2 := dx - p\, dt \tag{7.43}$$

を導入し，質点の運動経路を $c(t) = (x(t), p(t), t)$ と書き，その接ベクトルを

$$X = \frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dp}{dt}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{7.44}$$

と書くと，運動方程式 (7.40), (7.41) は，$\langle \eta_1, X\rangle = \langle \eta_2, X\rangle = 0$ と書き直される．η_1, η_2 の線形結合で dt の項を消去すると，

$$\alpha_1 := p\,\eta_1 + \omega^2 x\,\eta_2 = p\, dp + \omega^2 x\, dx \tag{7.45}$$

を得て，これも $\langle \alpha_1, X\rangle = p\langle \eta_1, X\rangle + \omega^2 x\langle \eta_2, X\rangle = 0$ を満たす．この微分形式 α_1 は恒等的に $d\alpha_1 = 0$ を満たし，ゆえに可積分であり，

$$\alpha_1 = d\left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) \tag{7.46}$$

と書ける．つまり $\alpha_1 = dH$ となる関数 $H = \dfrac{1}{2}p^2 + \dfrac{1}{2}\omega^2 x^2$ が見つかる．運動方程式は

$$\langle \alpha_1, X\rangle = \langle dH, \frac{d}{dt}\rangle = \frac{dH}{dt} = 0 \tag{7.47}$$

を要請するので，その解は

$$H := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = 定数 = E \tag{7.48}$$

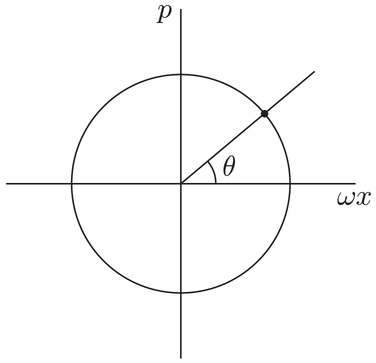


図 7.3　求積によって解曲線の存在範囲が $\dfrac{1}{2}p^2 + \dfrac{1}{2}\omega^2 x^2 = E$, $\theta + \omega t = \theta_0$ に限定される．

という部分多様体の上に限定される．

また，$\langle \eta_1, X \rangle = 0$ と $\langle \eta_2, X \rangle = 0$ から $\langle x\,\eta_1 - p\,\eta_2, X \rangle = 0$ を作ると，

$$\Big\langle x\,dp - p\,dx + (\omega^2 x^2 + p^2)\,dt,\ X \Big\rangle = 0 \tag{7.49}$$

を得る．さらに

$$x = \frac{\sqrt{2H}}{\omega}\cos\theta, \qquad p = \sqrt{2H}\,\sin\theta \tag{7.50}$$

とおいて，座標を (H, θ, t) に変換すると，(7.49) は

$$\left\langle \frac{2H}{\omega}d\theta + 2H\,dt,\ X \right\rangle = 0 \tag{7.51}$$

と書き直される．ここで

$$\alpha_2 := d\theta + \omega\,dt \tag{7.52}$$

という微分形式を導入すれば，$H \neq 0$ のときは，(7.51) は $\langle \alpha_2, X \rangle = 0$ となる．この α_2 もまた可積分な微分形式であり，

$$\alpha_2 = d\big(\theta + \omega t\big) \tag{7.53}$$

と積分できる．つまり，運動方程式 $\langle \alpha_2, X \rangle = \dfrac{d}{dt}(\theta + \omega t) = 0$ の解は

$$\theta + \omega t = 定数 = \theta_0 \tag{7.54}$$

という部分多様体の上に限定される．

以上より，3 次元の多様体 $\mathbb{R}^3$ 上の 2 つの微分方程式 (7.40), (7.41) が，微分を含まない 2 つの条件式 (7.48), (7.54) に書き換えられた．つまり積分できた．(x, p, t) という 3 つの自由度に対して 2 つの条件だから，残りの自由度はただ 1 つであり，この場合 t だけが独立変数として生き残る．他の変数は

$$x = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos(\theta_0 - \omega t), \qquad p = \sqrt{2E}\,\sin(\theta_0 - \omega t) \tag{7.55}$$

のように t の関数として書かれる．こうして調和振動子の方程式が解けた．

条件式 (7.47) すなわち $\dfrac{dH}{dt} = 0$ は，H が時間によらない定数であること，

つまりエネルギーの保存則を表している．このように保存量を見つけることが，微分形で書かれた条件式を，微分を含まない条件式「$H=$ 定数」に書き換える道すじである．(7.51), (7.53) も $\dfrac{d}{dt}(\theta+\omega t)=0$ という保存則を見つけたことに相当する．こうして微分方程式から少しずつ「微分を剥がして」いき，最終的にどこにも微分がない条件式に到達したとき，解が求められたことになる．このようにできるだけ多くの保存量を見つけて微分方程式を解く方法を**求積法** (quadrature) という．

つまるところ，微分方程式とは適当な多様体 M 上の曲線 $c:\mathbb{R}\to M, t\mapsto c(t)$ の接ベクトル $X=\dfrac{dc}{dt}$ に対する条件式である．それは，(7.42), (7.43) のように，接ベクトルをある微分形式の組 $\{\eta_1,\cdots,\eta_k\}$ に代入したらゼロになるという条件式

$$\eta_i\left(\frac{dc}{dt}\right)=0$$

で表現される．つまり微分形式は曲線を内包的に規定する．求積とは，上の条件式をうまく書き換えて

$$\alpha_i\left(\frac{dc}{dt}\right)=0$$

という形で $\alpha_i=dH_i$ を満たすような関数 H_i を見つけることである．そうすると，上の式は

$$\frac{dH_i}{dt}=0$$

となり，

$$H_i(c(t))=E_i$$

と積分される．つまり，関数 $H_i:M\to\mathbb{R}$ の逆像 $H_i^{-1}(E_i)$ の中に解曲線の存在範囲は限定される．これも曲線を内包的に規定する条件である．しかもこちらの方が曲線のありようを，接ベクトルを規定するよりも直接的に規定することになる．最終的に (7.55) のようにうまく座標を選んで，曲線を外延的に

$$c(t)=F(t;E_1,\cdots,E_k)$$

という形に書けたとき，解があらわになったと言える．M をはさんで $\mathbb{R}\to M\to\mathbb{R}$ という写像の入出力があり，微分形式 $TM\to\mathbb{R}$ や保存量 $M\to\mathbb{R}$ という内包から，曲線 $c:\mathbb{R}\to M$ という外延を浮き上がらせようとするアプローチを上の例から見て取ってもらえただろうか．

ちなみに求積法は決して万能な方法ではない．求積法では解けない微分方程式はいくらでもある．代表的なところでは三体問題（万有引力で引き合う 3 つの天体の運動方程式）は求積法では解けないことが証明されている．そのような方程式の研究からカオスと呼ばれる現象が見出され，それはそれで普遍性のある現象であり，魅力ある研究対象となっている．他方，求積できる方程式を追求していく分野として可積分系と呼ばれる分野もある．

7.4 双対的世界観

方程式を解くことは内包から外延に迫ろうとするアプローチであったが，世界において外延と内包の関係は決して一方通行ではない．我々は，物理法則は方程式で書かれ，物理現象は方程式の解で書かれるというものの見方に慣れている．方程式は内包的性格のものであり，解は外延的性格のものである．我々が目にする現象は，方程式ではなく，解の方である．チコ・ブラーエの天体観測データからケプラーが見出したものは，惑星の楕円軌道であって，万有引力の法則ではない．ガリレイは振り子の等時的振動を見たが，調和振動子の微分方程式を見たわけではない．あまたの現象から法則性を見出すことは，解から方程式への推察であり，外延から内包への帰納である．こうして基礎方程式が仮定され，その解が演繹され，実験・観察という手段でテストされる．そのような外延と内包の絶えざる往復と問いかけが自然界のありようであるし，人間が考えながら生きているということなのだろう．そのような絶えざる相互作用と相互認識に囲まれたダイナミックな自然を語る言語として，本書で議論した集合論・トポロジー・圏論・微分幾何学が広く使われ，これらの底流にある双対性という視点が何か世界の本質を捉えるために役に立つことを祈って，本書をしめくくることにする．

参考文献

[1] 遠山啓，無限と連続，岩波書店，1980.

[2] 志賀浩二，集合への 30 講，朝倉書店，1988.

[3] 森毅，現代数学と数学教育，裳華房，1976.

[4] 辻正次（小松勇作改訂），新版集合論，共立出版，1967.

[5] 黒川信重，若山正人 他，フォーラム：現代数学の風景，双対性をさがす（数学セミナー別冊数学のたのしみ No. 10，pp. 11–102）日本評論社，1998.

[6] 小嶋泉，だれが量子場を見たか（中村孔一・中村徹・渡辺敬二編集，だれが量子場をみたか，pp. 65–107）日本評論社，2004.

[7] I. Ojima, Micro-Macro Duality in Quantum Physics, e-print arXiv, math-ph/0502038. (Proceedings of International Conference on Stochastic Analysis, Classical and Quantum, pp. 143–161, World Scientific, 2005.)

[8] 辰馬伸彦，位相群の双対定理，紀伊國屋書店，1994.

[9] 佐々木正人，知性はどこに生まれるか — ダーウィンとアフォーダンス，講談社，1996.

[10] 内田伏一，集合と位相，裳華房，1986.

[11] 志賀浩二，位相への 30 講，朝倉書店，1988.

[12] 田尾鶉三，次元とはなにか，講談社，1979.

[13] 矢野公一，距離空間と位相構造，共立出版，1997.

[14] I. M. シンガー，J. A. ソープ，トポロジーと幾何学入門，培風館，1976.

[15] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Adam Hilger, 1990. 中原幹夫（中原幹夫・佐久間一浩訳），理論物理学のための幾何学とトポロジー（上・下），ピアソン・エデュケーション，2001.

[16] 瀬山士郎，トポロジー — ループと折れ線の幾何学，朝倉書店，1989.

[17] 枡田幹也，代数的トポロジー，朝倉書店，2002.

[18] 岩井斉良，ホモロジー代数入門，サイエンス社，1978.

[19] 町田健，言語が生まれるとき・死ぬとき，大修館書店，2001.

[20] 井上京子，もし「右」や「左」がなかったら — 言語人類学への招待，大修館書店，1998.

[21] 瀬戸賢一，メタファー思考 — 意味と認識のしくみ，講談社，1995.

[22] ポアンカレ（吉田洋一訳），科学の価値，岩波書店，1977.

[23] 志賀浩二，群論への 30 講，朝倉書店，1989.

[24] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician (2nd edition), Springer, 1998. S. マックレーン（三好博之・高木理訳），圏論の基礎，シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005.

[25] K. H. Rose, XY-pic（圏論の図式を描くための LaTeX のマクロ）
`http://www.ctan.org/tex-archive/macros/generic/diagrams/xypic/`

[26] 加藤五郎，コホモロジーのこころ，岩波書店，2003.

[27] 松本幸夫，多様体の基礎，東京大学出版会，1988.

[28] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, W.H. Freeman, 1973.

[29] V. I. アーノルド（安藤韶一・蟹江幸博・丹羽敏雄訳），古典力学の数学的方法，岩波書店，1980.

[30] 今井功，電磁気学を考える，サイエンス社，1990.

[31] 太田浩一，電磁気学 I, II，丸善，2000.

索　　引

ア

カ

サ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

ワ

欧字

著者略歴

谷村　省吾
たにむら　しょうご

1967 年　名古屋市生まれ
1990 年　名古屋大学工学部応用物理学科卒業
1995 年　名古屋大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程修了，博士(理学)
日本学術振興会特別研究員(東京大学大学院理学系研究科)，
京都大学工学部助手，京都大学大学院工学研究科講師，
大阪市立大学大学院工学研究科助教授，
京都大学大学院情報学研究科准教授を経て，
2011 年　名古屋大学大学院情報科学研究科教授
専門　理論物理，主に量子論，素粒子論，ゲージ理論．

臨時別冊・数理科学 **SGC** ライブラリ - **52**
『理工系のための　トポロジー・圏論・微分幾何　双対性の視点から』
著　者　谷村 省吾
ISBN 978–4–7819–9901–2
2006 年 12 月 25 日　初版発行

数　理　科　学　編　集　部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．

発行所　©　株式会社　サ　イ　エ　ン　ス　社　　TEL.(03)5474–8500(代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25

組版　ビーカム