微 分 方 程 式

8. 非同次微分方程式

1．非同次微分方程式

非同次線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad (*)$$

の一般解を求める．

定理．(i) $(*)$ の 1 つの特殊解 $u(x)$ および同次微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (**)$$

の 2 つの 1 次独立な解 $y_1(x), y_2(x)$ が求められたとき，$(*)$ の一般解は

$$y = u(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

である．

(ii) 同次微分方程式 $(**)$ の 1 次独立な 2 つの解 $y_1(x), y_2(x)$ が求まったとき，$(*)$ の一般解はつぎのように与えられる：

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x) \int \frac{-R(x) y_2}{W(y_1, y_2)}\, dx + y_2(x) \int \frac{R(x) y_1}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

［証明］ (i) $y = z + u(x)$ とおくと

$$L(y) = L(z+u) = L(z) + L(u) = R(x)$$

$L(u) = R$ だから $L(z) = 0$. $L(z) = 0$ の一般解は $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ だから (∗) の一般解は

$$y = u(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

(ii) [定数変化法] $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ とおくと

$$y' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2' + c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2.$$

ここで

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$$

とおく．このとき $y' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'$ となるから微分して

$$\mathbf{y'' = c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'}$$

よって

$$L(y) = c_1(x)L(y_1) + c_2(x)L(y_2) + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = R(x).$$

$L(y_1) = 0, L(y_2) = 0$ だから

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = R(x)$$

ここで

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$$
$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = R(x)$$

を $c_1'(x), c_2'(x)$ の連立方程式と思うと $W(y_1, y_2) \neq 0$ より

$$c_1'(x) = \frac{-R(x)y_2}{W(y_1, y_2)} \quad c_2'(x) = \frac{R(x)y_1}{W(y_1, y_2)}$$

x について積分すると

$$c_1(x) = \int \frac{-R(x)y_2}{W(y_1, y_2)}\,dx + c_1, \quad c_2(x) = \int \frac{R(x)y_1}{W(y_1, y_2)}\,dx + c_2.$$

(c_1, c_2 は定数). したがって，一般解は

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_1(x)\int \frac{-R(x)y_2}{W(y_1, y_2)}\,dx + y_2(x)\int \frac{R(x)y_1}{W(y_1, y_2)}\,dx$$

例題 1.

同次微分方程式 $(**)$ の 1つの解 $y_1(x) \neq 0$ が求まったとき,

(i) $y_1 \displaystyle\int \left(\frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} \int R y_1 e^{\int P dx}\, dx \right) dx$ は非同次微分方程式 $(*)$ の 1つの特殊解である.

(ii) $y_1 \displaystyle\int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}\, dx$ は $y_1(x)$ と 1次独立な $(**)$ の解である

(iii) 非同次微分方程式 $(*)$ の一般解は

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}\, dx + y_1 \int \left(\frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} \int R y_1 e^{\int P dx}\, dx \right) dx.$$

同次方程式の解がひとつわかれば非同次方程式は解ける！

［証明］ (i) $y = uy_1$ を $(*)$ へ代入すると

$$(y_1'' + Py_1' + Qy_1)u + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = R.$$

$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$ だから $y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = R.$
$u' = v$ とおくと $y_1v' + (2y_1' + Py_1)v = R.$
これは１階線形方程式であり，一般解は

$$v = e^{-\int \frac{2y_1' + Py_1}{y_1}dx} \left(\int \frac{R}{y_1} e^{\int \frac{2y_1' + Py_1}{y_1}dx} dx + c_1 \right) \tag{1}$$

$$= \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2} \left(\int Ry_1 e^{\int Pdx} dx + c_1 \right). \tag{2}$$

さらに積分すると

$$u = \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} \left(\int R y_1 e^{\int P dx} \, dx + c_1 \right) dx + c_2. \tag{3}$$

ここで $c_1 = c_2 = 0$ として $y = y_1 u$ とすれば(i)を得る

(ii) (3) で $R \equiv 0, c_1 = 1, c_2 = 0$ とすれば解であることはわかる．
1 次独立であることを証明する．　任意の定数 c_1, c_2 に対して

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx = 0$$

が成立したとする．y_1 で割ると

$$c_1 + c_2 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx = 0$$

さらに微分すると

$$c_2 \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} = 0$$

したがって，$c_2 = 0$ となりさらに $c_1 = 0$ にもなる．

(iii) 定理 1 より明らか.

問 1.

かっこ内に与えられた関数が 1 つの特殊解であることを知ってつぎの微分方程式を解け.

(1) $(1+x)y'' + xy' - y = 0 \quad (y = x)$.

(2) $xy'' - y' + (1-x)y = 0 \quad (y = e^x)$.

問 2.

かっこ内の関数が対応する同次方程式の解であることを知ってつぎの微分方程式を解け.

(1) $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = x - 1 \quad (y = e^x)$.

(2) $(x+1)y'' - (2x+3)y' + 2y = xe^x \quad (y = e^{2x})$.

定数係数線形常微分方程式

2階線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (1)$$

において a, b は定数とする． $y = e^{\lambda x}$ を代入すると

$$e\lambda x(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

となる.

2 次方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

を特性方程式といい、その解 λ を特性根という

λ が特性根のとき, $y = e^{\lambda x}$ は解になっている．

定理 **1** 特性根を λ_1, λ_2 とする,

(1) λ_1, λ_2 が相異なる実根のとき. $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ は 1次独立な（1）の解であり, 一般解は $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ である.

(2) $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき. $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_2 x}$ は 1次独立な (1）の解であり, 一般解は $(c_1 + +c_2 x)e^{\lambda_1 x}$ である.

(3) λ_1, λ_2 が共役な複素根であるとき, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ （$\alpha, \beta)$ は実数で $\beta \neq 0)$ ならば, $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$ は1次独立な（1） の解であり, 一般解は $e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$ である.

［証明］ (1） 特性根の性質から $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ が解であることは明らか.

ロンスキアンをつくると

$$W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$$

であるから **1** 次独立 である.

ii) $e^{\lambda_1 x}$ が解であることは明らか。
等根であることから $2\lambda_1 = -a$ を用いると

$$L(xe^{\lambda_1 x}) = xe^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + e^{\lambda_1 x}(2\lambda_1 + a) = 0.$$

ロンスキアンをつくると,

$$W(e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & (1+\lambda_1 x)e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \neq 0$$

だから **1** 次独立である.

(iii) 解と係数の関係により

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha = -a,\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2 = b.$$

より

$$2\alpha + a = 0,\ \alpha^2 - \beta^2 - a\alpha + b = 0$$

$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x$ を (1) に代入して

$$L(e^{\alpha x} \cos \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x(\alpha^2 - \beta^2 - a\alpha + b) - e^{\alpha x} \sin \beta x(2\alpha + a) = 0$$
$$L(e^{\alpha x} \sin \beta x) = e^{\alpha x} \sin \beta x(\alpha^2 - \beta^2 - a\alpha + b) + e^{\alpha x} \cos \beta x(2\alpha + a) = 0$$

ロンスキアンをつくると

$$W(e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) & e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \end{vmatrix}$$
$$= \beta e^{\alpha x} \neq 0$$

だから**1**次独立である.

定数係数非同次線形常微分方程式

非同次方程式

$$y'' + ay' + by = R(x)$$

の一般解については, 同次微分方程式の解が容易にわかるので定数変化法を用いればよい.