ウィキペディア
フリー百科事典

ゲルフォント＝シュナイダーの定理

出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

ゲルフォント＝シュナイダーの定理 (ゲルフォント＝シュナイダーのていり、英: Gelfond–Schneider's theorem) は、指数関数の値の超越性に関する定理である。1934年に、アレクサンドル・ゲルフォントとテオドール・シュナイダーによって、それぞれ独立に証明された。

定理の主張

α を 0, 1 以外の代数的数、β を有理数ではない代数的数としたとき、α^β は、超越数である。

系

系1

α_1, α_2 を 0, 1 以外の代数的数とする。$\log\alpha_1/\log\alpha_2$ は、有理数であるか超越数である。

系2

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ を 0 以外の代数的数とする。もし、$\log\alpha_1, \log\alpha_2$ が有理数体上線形独立であるならば、$\beta_1\log\alpha_1 + \beta_2\log\alpha_2 \neq 0$ である。

例

ゲルフォント＝シュナイダーの定理を用いて、以下の数が超越数であることが示される。

- $2^{\sqrt{2}}$ 。(オンライン整数列大辞典の数列 A007507 (https://oeis.org/A007507))
- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 。(オンライン整数列大辞典の数列 A078333 (https://oeis.org/A078333))
- $e^\pi\ (= (-1)^{-i})$ 。これはゲルフォントの定数とよばれる。(オンライン整数列大辞典の数列 A039661 (https://oeis.org/A039661))
- 有理数ではない代数的数 α に対する、$\sin\alpha\pi$, $\cos\alpha\pi$, $\tan\alpha\pi$ 。
- $i\alpha$ が有理数ではない代数的数 α に対する、$\sinh\alpha\pi$, $\cosh\alpha\pi$, $\tanh\alpha\pi$ 。
- 乗法的独立[1]である、0, 1 ではない代数的数 α, β に対する、$\log\alpha/\log\beta$ 。

歴史

ダフィット・ヒルベルトは、1900年にパリで行われた国際数学者会議において、ヒルベルトの23の問題と呼ばれる23個の問題のうち、7番目の問題として、「a が 0 でも 1 でもない代数的数で、b が代数的無理数であるとき、a^b は超越数であるか」を提出した。

その後、1929年に、アレクサンドル・ゲルフォントによって、β が虚二次体の場合に、α^β が超越数であることを証明し、例えば、e^π が超越数であることを示した。

その直後、ゲルフォントの方法を元にして、カール・ジーゲルは、β が実二次体の場合に成り立つことを示したが、発表はされなかった。翌年（1930年）、ロディオン・クズミンは、ゲルフォントの方法に基づいて、同じ結果を発表した。

1934年に、ゲルフォントとテオドール・シュナイダーがそれぞれ独立に、β が一般の代数的数の場合に成り立つことを証明した。 この結果、ヒルベルトの第7問題が肯定的に証明された。 ヒルベルトは、第7問題は大変難しい問題であり、リーマン予想の方が早く解決するのではないかと思っていたが、10年余りで証明されたことを聞いて、大変驚いたという。

ゲルフォント＝シュナイダーの定理より、2つの代数的数の対数が有理数体上線形独立であれば、代数的数体上線形独立となるが（系2）、この結果を 2以上の対数に拡張したものが、アラン・ベイカーによって、1966年に発表された（ベイカーの定理を参照）。

脚注

1. ^ 整数 k, l に対して、$\alpha^k\beta^l = 1$ ならば、$k = l = 0$ が成り立つとき、α, β は、乗法的独立であるという。

関連項目

- ヒルベルトの23の問題
- ベイカーの定理
- 超越数

参考文献

- 杉浦, 光夫編『ヒルベルト23の問題』日本評論社、東京、1997年。
- 塩川, 宇賢『無理数と超越数』森北出版、東京、1999年。
- I., Niven (1956). *Irrational numbers, The Carus Math. Monog.*. Washington: Math. Assoc. of America

-