微 分 方 程 式 2

7. 逆ラプラス変換

逆ラプラス変換

定義　関数 $F(s)$ に対して

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

となる関数 $f(t)$ を $F(s)$ の逆ラプラス変換という．記号として

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

と表す

例）　$F(s) = \dfrac{1}{s}$ に対して $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$ であったので
$f_1(t) = 1 \quad (0 \leqq t < \infty)$ は

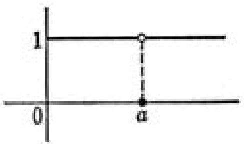
$$f_1(t) = 1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

と表される。

注意

関数

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq t < a,\ a < t < \infty) \\ 0 & (t = a) \end{cases}$$



に関しても

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

である。逆ラプラス変換は一意ではないが

定理　　逆ラプラス変換は連続関数の中では一意

※この定理の証明は今はできない

逆ラプラス変換の線型性

定理 [線型性]

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\right\}=c_1\mathcal{L}^{-1}\left\{F_1(s)\right\}+c_2\mathcal{L}^{-1}\left\{F_2(s)\right\}$$

証明はラプラス変換の線型性と一意性から直ちに従うので省略

有理関数の逆ラプラス変換の例

1) $\dfrac{1}{(s+1)(s-2)}$

まず部分分数に分解する：

$$\frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}\right)$$

線型性から

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\right\} = \frac{1}{3}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})}$$

合成積を使った別解

[定理] $\mathcal{L}\{f\} = F(s), \mathcal{L}\{g\} = G(s)$ とすれば $\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$.

ここで $f * g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$

[合成積を使った別解]

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\} = \frac{1}{s-2}$$

より合成積の定理から

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\right\} = \int_0^t e^{-(t-\tau)}e^{2\tau}\,d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{3\tau}\,d\tau$$
$$= e^{-t}\cdot\frac{1}{3}(e^{3t}-1) = \mathbf{\frac{1}{3}(e^{2t}-e^{-t})}$$

例題・続き

$\dfrac{s+3}{s(s^2+4)}$ の逆ラプラス変換を求めよ

解　まず部分分数に分解する：

$$\frac{s+3}{s(s^2+4)} = \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{4-3s}{s^2+4} = \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+2^2}.$$

線型性から

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} - \frac{3}{4}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}$$
$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin\mathbf{2t} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\cos\mathbf{2t}$$

合成積を使った別解

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)}+\frac{3}{s}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}+\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sin 2t+\frac{3}{2}\int_0^t 1\cdot\sin 2\tau\,d\tau \\
&= \frac{1}{2}\sin 2t+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right) \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin \mathbf{2t}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\cos \mathbf{2t}
\end{aligned}
$$

$\sin, \cos$ が出る場合

関数 $\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ の逆ラプラス変換を求めよ.

部分分数に分解する：

$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

線型性から

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right\} &= \frac{1}{\omega^2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\}\right)\\ &= \frac{1}{\omega^2}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right) = \frac{\mathbf{1}}{\omega^{\mathbf{3}}}\left(\omega\mathbf{t} - \sin\omega\mathbf{t}\right)\end{aligned}$$

$\sin, \cos$ が出る場合

関数 $\dfrac{1}{s(s^2+2s+2)}$ の逆ラプラス変換を求めよ.

部分分数に分解する：

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{s+2}{2(s^2+2s+2)}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

線型性と移動性定理から

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\cdot\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t}$$

$\sin, \cos$ が出る場合2

関数 $\dfrac{s-2}{s^2+4s+5}$ の逆ラプラス変換を求めよ.

$$\frac{s-2}{s^2+4s+5} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - 4\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1}$$

より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+4s+5}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} \\ &= \mathbf{e^{-2t}}\cos\mathbf{t} - \mathbf{4e^{-2t}}\sin\mathbf{t}\end{aligned}$$

$\mathbf{e^{-as}F(s)}$ の形

1) 関数 $\dfrac{e^{-as}}{s^4}$ の逆ラプラス変換を求めよ. $a \geqq 0$ とする.

解)　ヘビサイド函数 $Y(x-a)$ に関して移動性定理から

$$\mathcal{L}\left\{Y(t-a)(t-a)^3\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{t^3\right\} = e^{-as}\cdot\frac{3!}{s^4}$$

だったので

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^4}\right\} = \frac{(\mathbf{t}-\mathbf{a})^{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}\mathbf{Y}(\mathbf{t}-\mathbf{a}).$$

2) 関数 $\dfrac{e^{-as}}{s^2+\omega^2}$ の逆ラプラス変換を求めよ. $a \geqq 0$ とする.

解)　移動性定理から

$$\mathcal{L}\left\{Y(t-a)\sin\omega(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{\sin\omega t\right\} = e^{-as}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

だったので

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{\mathbf{1}}{\omega}\mathbf{Y}(\mathbf{t}-\mathbf{a})\sin\omega(\mathbf{t}-\mathbf{a}).$$

問題

次の関数の逆ラプラス変換を求めよ

(1) $\dfrac{s+a}{(s+b)^2}$ (2) $\dfrac{1}{(s+3)(s+4)(s+5)}$ (3) $\dfrac{1}{s^2(s^2-\omega^2)}$

(4) $\dfrac{e^{-as}}{s^2}$ (5) $\dfrac{e^{-as}}{s(s-1)}$