微 分 方 程 式 2

13. 行列の指数関数

行列の指数関数

以下、A を $n \times n$-行列とする（今日は正方行列しか扱わない）

$n = 1$ であれば「数（スカラー）」であり、指数関数

$$\exp A = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

が定義されている。

$n > 1$ の場合には、最後のテイラー展開で定義ができる：

定義　$n \times n$-行列 A に対して A の**指数関数行列** $\exp A = e^A$ を

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

で定める。(I は単位行列)

※　この無限級数は収束する（厳密な証明は省略）

指数関数行列の性質

定理　　$n \times n$-行列 A, B, P に対して

(1) $B = PAP^{-1}$ のとき $e^B = Pe^A P^{-1}$.

(2) $AB = BA$ のとき $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

(3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

(4) $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ とする、このとき

$$\exp A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}.$$

証明　(1) 任意の行列 S, T に対して

$$P(S+T)P^{-1} = PSP^{-1} + PTP^{-1}$$

であり、また、$B^n = (PAP^{-1})^n = PA^n P^{-1}$ であるから

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(PAP^{-1})^n}{n!} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right) P^{-1} = Pe^A P^{-1}.$$

証明 (2) (3)

$AB = BA$ のとき, 通常の数のように計算ができて二項定理より

$$(A+B)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!}.$$

したがって

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} \frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!} \right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = e^A e^B.$$

また、$e^{A+B} = e^{B+A} = e^B e^A$ となる。

(3) は (2) で $B = -A$ とおけばよい. $e^O = I$ である。

証明 (4)

$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと、 $A = aI + bJ.$

aI と bJ は可換なので、(2) より $e^A = e^{aI}e^{bJ} = e^a e^{bJ}$. また

$$J^2 = -I,\ J^3 = -J, J^4 = I$$

と J は複素数の i のような働きをするので

$$\begin{aligned} e^{bJ} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j J^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{2k} J^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{2k-1} J^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} J \\ &= \cos b I + \sin b\, J = \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

指数関数行列と固有値

定理　A の固有値 α に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする。このとき e^A は e^α を固有値に持ち、$\boldsymbol{p}$ が固有ベクトルになる。

証明　仮定より、$A\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p}$ である。帰納法によって

$$A^n\boldsymbol{p} = \alpha^n\boldsymbol{p}.$$

したがって

$$e^A\boldsymbol{p} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^j\boldsymbol{p} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\alpha^j\boldsymbol{p} = e^\alpha\boldsymbol{p}.$$

□

例

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ を考える

$$A = a\,I + B, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

$a\,I$ と B は可換なので $e^A = e^{aI}e^B = e^a e^B$.
$B^2 = 0$ より

$$e^B = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} = I + B.$$

以上により

$$e^A = e^a e^B = e^a(I + B) = e^a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ be^a & e^a \end{bmatrix}.$$

2×2 行列の場合

[1] 実2次方程式の解は次のいずれかのパターン：

(1) 2つの異なる実数　(2) 複素共役な2つの複素数解　(3) 実重解

[2] 2×2 行列 A に対して、ある正則行列 P が存在して $B = PAP^{-1}$ と変形して B は次の3タイプのいずれかになる

$$B_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

各々の指数関数行列は

$$e^{B_1} = \begin{bmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\beta} \end{bmatrix}, \quad e^{B_2} = e^{a} \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}, \quad e^{B_3} = e^{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$A = P^{-1}BP$ より

$$e^{A} = P^{-1}e^{B}P$$

となるので、任意の 2×2 行列の指数関数は求めることができる

斉次微分方程式

A: $n \times n$ 定数行列 に対して、連立微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$$

を考える。

この方程式の解を考えよう

定理

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}\,A$$

証明 $\displaystyle \frac{d}{dt}\frac{t^n}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ より

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t^{n-1}A^{n-1})}{(n-1)!}A = e^{A}\,A$$

また $A^n \cdot A = A \cdot A^n$ より、$e^{A}\,A = Ae^{A}$. □

斉次微分方程式の一般解

前の定理 $\dfrac{d}{dt}e^{tA} = A\,e^{tA}$ より、e^{tA} は $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ の基本解行列
言い換えると、e^{tA} の各列ベクトルは $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ の解になっている。

特に、$t = 0$ のとき $e^{0A} = I$ (単位行列）なので、$\boldsymbol{y}$ が初期条件

$$\boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

を満たす時、$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ の解は

$$\boldsymbol{y} = e^{tA} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}.$$

例題 1

$$\dot{y}_1 = 6y_1 - 5y_2$$
$$\dot{y}_2 = 4y_1 - 3y_2$$

解 $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ の固有多項式 $|tI - A| = (t-1)(t-2)$ より A の固有値は 1, 2. 固有ベクトルは $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ とおくと A **は対角化**できて $A = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}P^{-1}$.

したがって、$e^{tA} = P\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 5e^{2t} - 4e^t & 5e^t - 5e^{2t} \\ 4e^{2t} - 4e^t & 5e^t - 4e^{2t} \end{bmatrix}$

よって一般解は

$$\boldsymbol{y} = e^{tA}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{2t} - 4e^t & 5e^t - 5e^{2t} \\ 4e^{2t} - 4e^t & 5e^t - 4e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

非斉次微分方程式

A: $n \times n$ 定数行列 に対して、連立微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)$$

を考える。
定数変化法の行列版で、解として ベクトル $\boldsymbol{y} = e^{tA}\,\boldsymbol{c}(t)$ を考える：

$$\dot{\boldsymbol{y}} = Ae^{tA}\,\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\,\dot{\boldsymbol{c}}(t)$$
$$A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) = Ae^{tA}\,\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

より、 $e^{tA}\,\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \boldsymbol{b}(t)$ したがって、

$$\dot{\boldsymbol{c}}(t) = e^{-tA}\boldsymbol{b}(t)$$

$$\therefore \boldsymbol{c}(t) = \int_0^t e^{-sA}\boldsymbol{b}(s)\,ds + \boldsymbol{K} \quad (\boldsymbol{K}\text{ は定数ベクトル})$$

解としては $\boldsymbol{y} = \mathbf{e}^{\mathbf{tA}}\left[\int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{e}^{-\mathbf{sA}}\boldsymbol{b}(\mathbf{s})\,\mathbf{ds} + \boldsymbol{K}\right]$ がとれる

例題2　$x' = -y, \quad y' = x + t$ を解け

解 まず

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

とおくと $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$.

このとき $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$. 定数変化法で積分すると：

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-sA}\,\boldsymbol{b}(s)\,ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} s \sin s \\ s \cos s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \sin t - t\cos t \\ \cos t + t \sin t - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t - t\cos t + C_1 \\ \cos t + t\sin t - 1 + C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -t + C_1 \cos t + (1 - C_2)\sin t \\ 1 - (1 - C_2)\cos t + C_1 \sin t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

問題

1. 次の行列の指数関数をもとめよ

(1) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

2. $e^{A+B} \neq e^A e^B$ となる行列 A, B の例を作れ

3. 次の微分方程式を解け

(1) $x' = 2x - y,\ y' = 2y$ (2) $x' = 2x - y,\ y' = x + 2y$

(3) $x' = y,\ y' = x$ (4) $x' = -2x,\ y' = x - 2y,\ z' = y - 2z$

(5) $x' = y,\ y' = 2 - x$ (6) $x' = y,\ y' = -4x + \sin 2t$

(7) $x' = x + y + z,\ y' = -2y + t,\ z' = 2z + \sin t$