微 分 方 程 式2

3．ラプラス変換の性質

1. 線型性

仮定　$f(t)$: $0 < t < \infty$ で区分的に連続かつ指数 α 位の関数
※もっと弱い条件でも結果は成立することが多い

定理 $\mathcal{L}\left\{f_k\right\}$ $(\mathrm{Re}\, s > \alpha_k)$ $(k = 1, 2)$ が存在すれば, 任意の定数 c_1, c_2 に対して

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f_1 + c_2 f_2\right\} = c_1 \mathcal{L}\left\{f_1\right\} + c_2 \mathcal{L}\left\{f_2\right\}, \quad (\mathrm{Re}\, s > \max(\alpha_1, \alpha_2))$$

が成立する.

【証明】 任意の $T > 0$ をとる. $\mathrm{Re}\, s > \max(\alpha_1, \alpha_2)$ のときは

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\, dt &= c_1 \int_0^T e^{-st} f_1(t)\, dt + c_2 \int_0^T e^{-st} f_2(t)\, dt \\ &\to c_1 \mathcal{L}\left\{f_1\right\} + c_2 \mathcal{L}\left\{f_2\right\} \quad (T \to \infty) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f_1 + c_2 f_2\right\} = c_1 \mathcal{L}\left\{f_1\right\} + c_2 \mathcal{L}\left\{f_2\right\}.$$

この結果を繰り返して用いて:

n 個のラプラス変換 $\mathcal{L}\left\{f_k\right\}$ $(\mathrm{Re}\, s > \alpha_k)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ が存在すれば, 任意の定数 $c_1, ..., c_n$ に対して

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n\right\} = c_1 \mathcal{L}\left\{f_1\right\} + \cdots + c_n \mathcal{L}\left\{f_n\right\},$$

が成立する. ただし、$\mathrm{Re}\, s > \max(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

例 1　A, ω, θ を定数として, $\mathcal{L}\left\{A \sin(\omega t + \theta)\right\}$ を求めよ.

解

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{A \sin(\omega t + \theta)\right\} &= A \mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)\cos\theta + \cos(\omega t)\sin\theta\right\} \\
&= A(\cos\theta \mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)\right\} + \sin\theta \mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)\right\}) \\
&= A\left(\cos\theta \frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \sin\theta \frac{s}{s^2+\omega^2}\right) \\
&= \frac{A(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{s^2+\omega^2}. \quad \square
\end{aligned}$$

移動性

定理 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(t)$ $(\mathrm{Re}\, s > \alpha)$ とする．このとき

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a), \quad (\mathrm{Re}\,(s-a) > \alpha).$$

証明

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cdot f(t)\,dt \\ &= F(s-a), \quad (\mathrm{Re}\,(s-a) > \alpha) \quad \Box\end{aligned}$$

例

(1) $\mathcal{L}\{e^{at}t\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ (2) $\mathcal{L}\{e^{at}\sin\omega t\} = \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

問題 1. 次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $\cos(\omega t+\theta)$ (2) $\sinh(\omega t+\theta)$

(3) $e^{2t}\cos\omega t$ (4) $e^{-t}\sinh t$ (5) $e^t t^2$.

相似性

定理　$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(t)$ $(\mathrm{Re}\, s > \alpha)$ とする．このとき任意の正数 $a > 0$ に対して

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad (\mathrm{Re}\, s > \alpha \cdot a).$$

証明　$at = u$ と置換積分する：

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(s/a)u} f(u)\, du$$
$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad (\mathrm{Re}\, s > \alpha \cdot a). \quad \square$$

導関数の変換

定理　$f(t)$ は $0 < t < \infty$ で連続, 指数 α 位の関数, $\lim_{t \to +0} f(t) =: f(+0)$ が存在し, $f'(t)$ は $0 < t < \infty$ で区分的に連続とすれば

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(+0) \quad (\mathrm{Re}\, s > \alpha).$$

証明　任意の $T > 0$ に対して $f'(t)$ は区間 $(0, T)$ で区分的に連続であるから $e^{-st} f'(t)$ は $[0, T]$ で積分可能である. このとき

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-st} f'(t)\, dt &= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^T + s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \\ &= e^{-sT} f(T) - f(+0) + s\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.\end{aligned}$$

したがって、定理を示すためには

$$\lim_{T \to \infty} |e^{-sT} f(T)| = 0$$

をいえばよい

■ $\displaystyle\lim_{T\to\infty}|e^{-sT}f(T)|=0$ の証明

十分大きなT_0をとると

$$|f(t)| \leqq Me^{\alpha t}$$

であるから $T>T_0$ に対して

$$|e^{-sT}f(T)|=e^{-T\,\mathrm{Re}\,s}|f(T)| \leqq Me^{-(\mathrm{Re}\,s-\alpha)T}$$

となり, $\mathrm{Re}\,s>\alpha$ のとき

$$\lim_{T\to\infty}|e^{-sT}f(T)|=0$$

が成立する. したがって, $T\to\infty$ とすれば $f'(t)$ のラプラス変換が存在して

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\mathcal{L}\{f\}-f(+0) \quad (\mathrm{Re}\,s>\alpha).$$

が成立する. □

$f^{(n)}(t)$ に対するラプラス変換に関して次が成立する:

定理　$f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}$ はすべて $0 < t < \infty$ で連続, 指数 α 位の関数, $\lim_{t \to +0} f^{(j)}$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ が存在し, $f^{(n)}(t)$ は $0 < t < \infty$ で区分的に連続ならば

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - s^{n-1} f(+0) - s^{n-2} f'(+0) \\ - \cdots - s f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0), \ (\mathrm{Re}\, s > \alpha).$$

例

$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ をもちいて $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}$ を求めよ

解　$f(t) = \cos \omega t$ とおけば $f'(t) = -\omega \sin \omega t$ であるから

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{-\omega \sin \omega t\} = -\omega \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = -\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}.$$

他方で

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(+0) = s\mathcal{L}\{f(t)\} - 1$$

となるので比べて

$$-\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - 1.$$

これより

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}. \quad \square$$

積分のラプラス変換

定理　$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(t)$ $(\mathrm{Re}\, s > \alpha)$ とすると

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}F(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > \max(0, \alpha)).$$

証明　$f(t)$ が区間 $0 < t < \infty$ で区分的に連続のとき,

積分 $G(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\,du$ も $0 \leqq t < \infty$ で連続なので

任意の $T > 0$ に対して $e^{-st}\displaystyle\int_0^t f(u)\,du$ は $[0, T]$ で積分可能である.

(1) $\alpha > 0$ とする. まず、次を示す：

「$f(t)$ が指数 α 位の関数のとき $G(t)$ も指数 α 位の関数である.」

積分 $G(t)$ も指数 α 位の関数

$f(t)$ が指数 α 位の関数なので, 十分大きい T_0 を選ぶと,

$$|f(t)| \leqq Me^{\alpha t} \quad (t \geqq T_0)$$

が成立する。両辺を $t(> T_0)$ まで積分すると

$$\begin{aligned}\left|\int_{T_0}^{t} f(u)\,du\right| &\leqq \int_{T_0}^{t} |f(u)|\,du \leqq \int_{T_0}^{t} Me^{\alpha u}\,du \\ &= \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - e^{\alpha T_0}) < \frac{M}{\alpha}e^{\alpha t}\end{aligned}$$

となるからである.

このとき, $\mathrm{Re}\, s > \alpha (> 0)$ ならば

$$\int_0^T e^{-st}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(u)\,du\right]_0^T + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$
$$= -\frac{1}{s}e^{-sT}\int_0^T f(u)\,du + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt \;(*)$$

最後の式の第1項を評価する. $T > T_0$ として

$$\left|e^{-sT}\int_0^T f(u)\,du\right| = \left|e^{-sT}\left(\int_0^{T_0} f(u)\,du + \int_{T_0}^T f(u)\,du\right)\right|$$
$$\leqq e^{-T\,\mathrm{Re}\, s}\left|\int_0^{T_0} f(u)\,du\right| + \frac{M}{\alpha}e^{-(\mathrm{Re}\, s-\alpha)T}$$
$$\to 0 \quad (T \to \infty)$$

が成立する(T_0 を固定すると $\displaystyle\int_0^{T_0} f(u)\,du$ は有界)。したがって

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \frac{1}{s}F(s).$$

(2) $\alpha \leqq 0$ のとき
$f(t)$ が指数α位の関数なので, 十分大きいT_0を選ぶと, $t \geqq T_0$ では

$$|f(t)| \leqq Me^{\alpha t} \leqq M \quad (t \geqq T_0)$$

が成立する。今度も、両辺を $t(> T_0)$ まで積分すると

$$\left|\int_{T_0}^{t} f(u)\,du\right| \leqq M(t - T_0) \leqq Mt$$

となる。
積分のラプラス変換を計算すると (*) までは同じ式で、第一項の評価は少し異なるが結論は同じになる：

$$\begin{aligned}\left|e^{-sT}\int_0^T f(u)\,du\right| &= \left|e^{-sT}\left(\int_0^{T_0} f(u)\,du + \int_{T_0}^{T} f(u)\,du\right)\right| \\ &\leqq e^{-T\,\mathrm{Re}\,s}\left|\int_0^{T_0} f(u)\,du\right| + e^{-T\,\mathrm{Re}\,s}MT \\ &\to 0 \quad (T \to \infty)\end{aligned}$$

例題

(1) $\mathcal{L}\left\{\sin\omega t\right\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ より

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin\omega u\,du\right\} = \frac{1}{s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

(2) $\mathcal{L}\left\{\cos\omega t\right\} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ より

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos\omega u\,du\right\} = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{s^2+\omega^2}.$$

(3)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t ue^{-2u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{te^{-2t}\right\} = \frac{1}{s}\frac{1}{(s+2)^2}.$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sinh(\omega t+\theta)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\sinh(\omega t)\cosh\theta+\cosh(\omega t)\sinh\theta\right\} \\
&= \left(\cosh\theta\mathcal{L}\left\{\sinh(\omega t)\right\}+\sinh\theta\mathcal{L}\left\{\cosh(\omega t)\right\}\right) \\
&= \left(\cosh\theta\frac{\omega}{s^2-\omega^2}+\sinh\theta\frac{s}{s^2-\omega^2}\right) \\
&= \frac{(\omega\cosh\theta+s\sinh\theta)}{s^2-\omega^2}. \quad \square
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}\left\{e^t t^2\right\} = \frac{2}{(s-1)^3}
$$