# 微 分 方 程 式

## 9. 記号解法

# 1. 微分作用素



$x$ について微分することを $D$ で表す：

$$y' = Dy$$

$x$ について 2 回微分することは $D^2$ と表す:

$$y'' = D^2 y$$

一般に $D^n y = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ と定める

$$D^{n+m} y = D^m D^n y$$

$a_0, a_1, ..., a_n$ を定数とする

$$\begin{aligned} & a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y \\ = \ & a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y \end{aligned}$$

# 1．微分作用素・続き



微分作用素：$f(D)$ とは

$$f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

のことである

作用素=ある関数に作用して別の関数へ写す写像:

$$f(D)y = a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} Dy + a_n y$$

微分作用素の計算は多項式のように行える：

$f(t), g(t), h(t)$ を $t$ の多項式とすると

$$f(t) + g(t) = g(t) + f(t), \quad f(t)g(t) = g(t)f(t),$$
$$h(t)(f(t) + g(t)) = h(t)f(t) + h(t)g(t)$$

が成り立つが $t$ を $D$ に変えても成り立つ

# 2．微分作用素の逆１



微分方程式 $f(D)y = R(x)$ の１つの特殊解を形式的に書くと

$$y = \frac{1}{f(D)}R(x)$$

演算子 $\dfrac{1}{f(D)}$ の 意味

１）$f(D) = D$ のとき．　$Dy = R(x)$ より積分すると

$$y = \int R(x)\,dx + C$$

今は特殊解のみを求めているので $c = 0$ の場合を採用して

$$\frac{1}{D}R(x) = \int R(x)\,dx$$

とする。$\dfrac{1}{D}$ は積分すること（微分の逆演算）と定義する

# 2. 微分作用素の逆 2



2) $f(D) = D^2$ のとき． $D^2 y = R(x)$ は $y'' = R(x)$ と同じ:

$\dfrac{1}{D^2}$ は **2** 回積分することと定義する

$$\frac{1}{D^2}R(x) = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}R(x)\right) = \int dx \int R(x)\,dx$$

(ただし特殊解だけを求めるので付加定数は 0 としたものを採用) .

3) $f(D) = D^n$ のとき 前の操作を $n$ 回くり返す

$\dfrac{1}{D^n}$ は $n$ 回積分することと定義する

$$\frac{1}{D^n}R(x) = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{D^{n-1}}R(x)\right) = \underbrace{\int dx \cdots \int}_{n\text{回積分}} R(x)\,dx$$

# 1．微分作用素の逆3



4) $f(D)=D-\alpha$ のとき．

$$(D-\alpha)y=R(x)$$

は $y'-\alpha y=R(x)$ と同じ．一般解は

$$y=e^{\alpha x}\left(\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx+c\right)$$

$c=0$ の場合を採用して $\dfrac{1}{D-\alpha}$ を次の積分で定義する：

$$\frac{1}{D-\alpha}R(x)=e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx$$

$\alpha=0$ の場合には前の $\dfrac{1}{D}$ の定義と一致している．

# 1．微分作用素の逆４



4) $f(D) = (D-\alpha)^2$ のとき．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(D-\alpha)^2}R(x) &= \frac{1}{D-\alpha}\left(\frac{1}{D-\alpha}R(x)\right) \\
&= \frac{1}{D-\alpha}\left(e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx\right) \\
&= e^{\alpha x}\int \mathbf{e^{-\alpha x}}\left(\mathbf{e^{\alpha x}}\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx\right)dx \\
&= e^{\alpha x}\int dx \int e^{-\alpha x}R(x)\,dx
\end{aligned}
$$

# 2. 微分作用素の逆5



4) $f(D)=(D-\alpha)^n$ のとき 前の操作を $n$ 回くり返す

$\dfrac{1}{(D-\alpha)^n}$ は次の $n$ 回積分と定義する

$$\begin{aligned}\frac{1}{(D-\alpha)^n}R(x) &= \frac{1}{D-\alpha}\left(\frac{1}{(D-\alpha)^{n-1}}R(x)\right)\\ &= \underbrace{e^{\alpha x}\int dx\cdots\int e^{-\alpha x}R(x)\,dx}_{n\text{回積分}}\end{aligned}$$

# 3. 微分作用素の逆・一般



一般の微分作用素の逆は因数分解すれば良い

5) $f(D) = (D-\alpha)(D-\beta)$ のとき

[I] $(D-\alpha)(D-\beta)y = R(x)$ に対しては前のことをくり返して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)}R(x) &= \frac{1}{D-\beta}\left(\frac{1}{D-\alpha}R(x)\right) \\
&= \frac{1}{D-\alpha}\left(\frac{1}{D-\beta}R(x)\right)
\end{aligned}
$$

と順に計算すればよい.

[II] 部分分数展開

$$
\frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{D-\alpha} - \frac{1}{D-\beta}\right)
$$

# 3. 微分作用素の逆・一般2



$$\frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{D-\alpha} - \frac{1}{D-\beta}\right)$$

を示すには

$$(D-\alpha)(D-\beta)\cdot\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{D-\alpha} - \frac{1}{D-\beta}\right)R(x) = R(x)$$

を示せばいい

$$\begin{aligned}
(D-\alpha)(D-\beta)\frac{1}{D-\alpha}R(x) &= (D-\beta)(D-\alpha)\frac{1}{D-\alpha}R(x) \\
&= (D-\beta)R(x), \\
(D-\alpha)(D-\beta)\frac{1}{D-\beta}R(x) &= (D-\alpha)R(x),
\end{aligned}$$

二式の差をとると（続く）

# 3. 微分作用素の逆・一般 2



$$
\begin{aligned}
(D-\alpha)(D-\beta)\frac{1}{D-\alpha}R(x) &= (D-\beta)R(x), \\
(D-\alpha)(D-\beta)\frac{1}{D-\beta}R(x) &= (D-\alpha)R(x),
\end{aligned}
$$

の差をとって

$$
(D-\alpha)(D-\beta)\left(\frac{1}{D-\alpha}-\frac{1}{D-\beta}\right)=(\alpha-\beta)R(x)
$$

よって

$$
\frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{D-\alpha}-\frac{1}{D-\beta}\right)
$$

# 3. 微分作用素の逆・一般３

一般に $f(D)$ の逆作用素を求めるには $\dfrac{1}{f(D)}$ を取り有理式と思って部分分数分解すればよい

例）

$$\frac{1}{(D-\alpha)^3(D-\beta)D^2} = \frac{a_3}{(D-\alpha)^3} + \frac{a_2}{(D-\alpha)^2} + \frac{a_1}{D-\alpha} + \frac{b_1}{D-\beta} + \frac{c_1}{D^2} + \frac{c_2}{D}$$

注意） $f(D)$ を 1 次因数に分解するとき虚因数（$\alpha, \beta$ が複素数）を含む場合には，やはり上と同様にして形式的に計算してもよい．

例題 つぎの微分方程式を解け.

(1) $(D^2-1)y=\dfrac{1}{1+e^x}$

［解］

特性方程式 $\lambda^2-1=0$. 特性根 $1,-1$. 斉次方程式の解は

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

なので特殊解を求める

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2-1}\cdot\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D-1}-\frac{1}{D+1}\right)\frac{1}{1+e^x}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{D+1}\cdot\frac{1}{1+e^x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^x\int e^{-x}\frac{1}{1+e^x}\,dx-e^{-x}\int e^x\frac{1}{1+e^x}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[e^x(\log(1+e^x)-x-e^{-x})-e^{-x}\log(1+e^x)\right]
\end{aligned}$$

$$\int e^x \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\,dx = \log(1+e^x)$$

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{1}{e^x(1+e^x)} = \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)\,dx \\
&= -e^{-x} - \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}\,dx \\
&= -e^{-x} - \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)\,dx \\
&= -e^{-x} - x + \log(1+e^x)
\end{aligned}$$

求める一般解は

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left[e^x(\log(1+e^x) - x - e^{-x}) - e^{-x}\log(1+e^x)\right]$$

(2) $(D^2+1)y = \tan x$ 

［解］ 特性方程式 $\lambda^2+1=0$. 特性根 $i, -i$. 斉次方程式の解は

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x$$

なので特殊解を求める

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{D^2+1}\tan x = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{D-i} - \frac{1}{D+i}\right)\tan x \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{D-i}\tan x - \frac{1}{D+i}\tan x\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D-i}\tan x &= e^{ix}\int e^{-ix}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = e^{ix}\int(\cos x - i\sin x)\frac{\sin x}{\cos x}\,dx \\ &= e^{ix}\int\left(\sin x - i\frac{1}{\cos x} + i\cos x\right)dx \\ &= e^{ix}\left(-\cos x - i\int\frac{1}{\cos x}\,dx + i\sin x\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx \int \frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{(\sin x)'}{\sin x+1}\,dx - \int \frac{(\sin x)'}{\sin x-1}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\log|\sin x+1| - \frac{1}{2}\log|\sin x-1| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{D-i}\tan x = e^{ix}\left(-\cos x - \frac{i}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + i\sin x\right).$$

同様に

$$\frac{1}{D+i}\tan x = e^{-ix}\left(-\cos x + \frac{i}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| - i\sin x\right).$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D-i}\tan x &= e^{ix}\left(-\cos x - \frac{i}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + i\sin x\right) \\
&= (\cos x + i\sin x)\left(-\cos x - \frac{i}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + i\sin x\right) \\
&= \left[\cos^2 x + \frac{\sin x}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| - \sin^2 x\right] \\
&\quad -i\frac{\cos x}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|
\end{aligned}
$$

これより

$$
y_0 = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{D-i}\tan x - \frac{1}{D+i}\tan x\right) = -\frac{\cos x}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|
$$

一般解: $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \dfrac{\cos x}{2}\log\left|\dfrac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|$

# 練習問題



1. 次を計算せよ

(1) $\dfrac{1}{D-2}x^2$　　(2) $\dfrac{1}{D+1}\sin x$

2. 次の微分方程式を解け

(1) $y'' - 4y = e^x$　　(2) $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{2}{1+e^{2x}}$