ベクトル解析

5. スカラー場とベクトル場

1 スカラー場とベクトル場

D: $\mathbb{R}^3$ の部分集合（普通は開集合）

スカラー場

D 上の函数 $f : D \to \mathbb{R}$ のことをスカラー場という

ベクトル場

D 上のベクトル値函数 $\boldsymbol{a} : D \to \mathbb{R}^3$ のことをベクトル場という

スカラー場, ベクトル場ともに普通は微分可能 C^1 級とする

例

1) 空間内の物質 D, $P \in D$ に対して、

$\rho(P)$: P での物質の密度 はスカラー場

2) 空間 $\mathbb{R}^3$ の原点 O に電気量 q の点電荷をおく
$D = \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{O}$, $\mathrm{OP} = r$ として

$$\boldsymbol{E}(P) = \frac{q}{r^3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

とおくと $\vec{E}$ はベクトル場 (電場) になる.
クーロンの法則より電場の強さは逆二乗法則を満たしている

3) 空間の中の流体の流れを考える. 空間の点 P に対して, P での流体の速度 $\boldsymbol{v}(\mathrm{P})$ が定まる. よって, 流体の速度はベクトル場.

勾配

スカラー場 f の勾配 $\mathrm{grad}\, f$

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

によって定められるベクトル場 $\boldsymbol{a}$ を f の勾配といい $\mathrm{grad}\, f$ とかく:

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

微分演算子ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いて,

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f$$

とかくこともある

スカラーポテンシャル

与えられたベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対して,

$$\boldsymbol{a} = -\nabla f = -\mathrm{grad}\, f$$

をみたすスカラー場 f が存在するとき, f をベクトル場 $\boldsymbol{a}$ のスカラーポテンシャルといい, $\boldsymbol{a}$ は保存力場またはスカラーポテンシャルをもつという.

問題

次の関数 f に対して grad f を求めよ.

1) $f(x,y,z)=xyz$ (2) $f(x,y,z)=\log(x^2+y^2+z^2)$

3) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

1) $f_x=yz,\quad f_y=xz,\quad f_z=xy$ より

$$\operatorname{grad} f=(f_x,f_y,f_z)=(yz,xz,xy)$$

2) $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2},\quad f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}\quad f_z=\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$ より

$$\operatorname{grad} f=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)$$

3) $f_x=\dfrac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\quad f_y=\dfrac{-y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\quad f_z=\dfrac{-z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$

より

$$\operatorname{grad} f=\frac{-1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x,y,z)$$

スカラーポテンシャルの例

電場

$$\boldsymbol{E}(P) = \frac{q}{r^3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

はスカラーポテンシャルを持つ

解説　　$\mathrm{P}(x, y, z)$ とおく． $\boldsymbol{E}(P)$ を具体的に書くと

$$\boldsymbol{E}(P) = \frac{q}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x, y, z)$$

したがって、前の問題から

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

とおくと

$$-\mathrm{grad}\,\varphi = \boldsymbol{E}(P)$$

となり、φ が電場 $\boldsymbol{E}(P)$ のスカラーポテンシャルになる。

保存力場におけるエネルギー保存の法則

力の場が $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, U$ の形の時、保存力場という

U は $\boldsymbol{F}$ のスカラーポテンシャル（位置エネルギー）

$\boldsymbol{r}(t)$: 時刻 t の P の位置ベクトル

このとき、質量 m の質点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ は運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, U(\boldsymbol{r}(t))$$

にしたがう

定理　保存力場の元で運動しているとき、力学的エネルギー E

$$E := \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + U(\boldsymbol{r}(t))$$

は保存される（t に依らない）。ここで $\boldsymbol{v}$ は P の速度ベクトル、$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2$ を運動エネルギー、U を位置エネルギーという

エネルギー保存法則の証明

$\boldsymbol{v} = \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + U(\boldsymbol{r}(t))\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)|^2 + U(\boldsymbol{r}(t))\right) \\
&= m\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\cdot\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) + \frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\cdot(-\mathrm{grad}\,U(\boldsymbol{r}(t))) + \frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}(t))
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}(t)) &= \frac{d}{dt}U(x(t), y(t), z(t)) \\
&= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}(t) + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}(t) \\
&= \mathrm{grad}\,U(\boldsymbol{r}(t)))\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t).
\end{aligned}
$$

ゆえに $E'(t) = 0$ となり、力学的エネルギー $E(t)$ は時刻 t に無関係である． □

方向微分係数

f: D 上の C^1 級スカラー場

$\boldsymbol{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$: 単位ベクトル,　　$\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$: D 上の点

定義　スカラー場 f の点 P_0 における $\boldsymbol{a}$ 方向の微分係数:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\mathrm{P}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{P}_0 + t\boldsymbol{a}) - f(\mathrm{P}_0)}{t}$$

具体的には

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\mathrm{P}_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} \\ &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P}_0) + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{P}_0) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{grad}\ f(\mathrm{P}_0)\end{aligned}$$

grad $f(\mathrm{P}_0)$ の幾何学的意味

単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ と grad $f(\mathrm{P}_0)$ のなす角 θ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\mathrm{P}_0) = |\mathrm{grad}\ f(\mathrm{P}_0)| \cos\theta.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\mathrm{P}_0)$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ が grad $f(\mathrm{P}_0)$ の方向と一致するとき最大値 $|\mathrm{grad}\ f(\mathrm{P}_0)|$ をもつ.

等位面と grad

f の等位面 $S : f(x, y, z) = k$, $f(\mathrm{P}_0) = k$. 曲面 S 上にあり P_0 を通る曲線のパラメーター表示を

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (\boldsymbol{r}(0) = \mathrm{P}_0)$$

とするとき

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k$$

よって

$$\left[\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))\right]_{t=0} = x'(0)\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}_0) + y'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P}_0) + z'(0)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{P}_0) = 0$$

より

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(0) \cdot \mathrm{grad}\ f(\mathrm{P}_0) = 0.$$

grad $f(\mathrm{P}_0)$ は P_0 を通る f の等位面の上のすべての曲線と直交.

ベクトル grad $f(\mathrm{P}_0)$ は等位面 S の P_0 における接平面と直交.

例

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ について点 $\mathrm{P}(1,1,1)$ における

$\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の方向の方向微分係数を求めよ.

解説

$\mathrm{grad}\ f=(2x,2y,2z)$ より $\mathrm{grad}\ f(\mathrm{P})=(2,2,2)$.

よって

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\mathrm{P})=\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}\,f(\mathrm{P})=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2=\frac{6}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}.$$

例

単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における単位法線ベクトルの1つを求めよ.

解説　$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ とおくと $\mathrm{grad}\ f=(2x,2y,2z)$ より

$$\mathrm{grad}\ f(\mathrm{P})=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

より求める単位法線ベクトルの 1 つは

$$\left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=2$$

より

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\boldsymbol{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

1　次の関数 f の点 P における $\vec{a}$ 方向の方向微分係数を求めよ.

1) $f(x,y,z) = xy\sin z$, $\mathrm{P}(1,1,1)$, $\boldsymbol{a} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

2) $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + z^2$, $\mathrm{P}(-1,0,1)$, $\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2　次の曲面の点 P における単位法線ベクトルを求めよ.

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ \ \mathrm{P}(1,1,1)$

2) $z^2 = x^2 + y^2,\ \ \mathrm{P}(3,4,5)$