ベクトル解析

8. 面積分

1 曲面の面積

C^1 級の曲面 S のパラメーター表示

$$S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \quad (u, v) \in D$$

今日の定理　(1) S の曲面積は二重積分

$$\iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u, v) \right| dudv$$

で定まる。

(2) (1) の式を

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad G = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v},$$

を用いて書き直すと

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

(3) 特に S が $z = f(x, y)$ で与えられている時の曲面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

記号

主定理にあらわれる

$$
\begin{aligned}
dS &= \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right| dudv \\
&= \sqrt{EG - F^2}\, dudv \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy
\end{aligned}
$$

を面積要素という。どれも同じものになる

[区分的に C^1 級の場合]〜多面体など

区分的に C^1 級の曲面 S が C^1 級の曲面 S_1, S_2 , ..., S_m から成っているとき S の面積を S_1, S_2 , ..., S_m の面積の和と定める.

例 1

底面の半径が $a > 0$, 高さ h の 円 柱 面

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (a\cos u, a\sin u, v) \quad (0 \leqq u \leqq 2\pi, 0 \leqq v \leqq h)$$

の面積を求めよ.

[解] $D = \{(u, v) \mid 0 \leqq u \leqq 2\pi, 0 \leqq u \leqq h\}$ である。

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (-a\sin u, a\cos u, 0), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

より

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = a^2, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = 0, \quad G = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = 1$$

$E = a^2, F = 0, G = 1$ から求める曲面積は

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \int_0^h dv \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cdot 1 - 0^2}\, du = \mathbf{2\pi ah}$$

問題

次の曲面の面積を求めよ.

(1) 曲面: $z = x^2 + y^2 \quad (x^2 + y^2 \leqq 1)$

(2) 円錐 $\boldsymbol{r} = (u\cos v, u\sin v, u) \quad (0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 2\pi)$

(3) 曲面 $\boldsymbol{r} = (u, v, u + v) \quad (0 \leqq u, v \leqq 1)$

面積分

C^1 級の曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \quad (u, v) \in D$

$f(x, y, z)$: S を含む領域で定義されている函数

定理　(1) $f(x, y, z)$ の S 上の面積分を二重積分

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u, v) \right| dudv$$

で定める。

(2) (1) の式は、E, F, G を用いると以下のようにも書ける

$$\iint_D f(\boldsymbol{r}(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

(3) 特に S が $z = g(x, y)$ で与えられている時の面積分は

$$\iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2}\, dxdy.$$

注意

[区分的に C^1 級の場合]

区分的に C^1 級の曲面 S が C^1 級の曲面 S_1, S_2 , ..., S_m から成っているとき f の S 上の面積分を次で定める：

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \sum_{j=1}^{m} \iint_{S_j} f(x,y,z)\,dS$$

公式 f, g: 関数、k: 定数、$S = S_1 + S_2$

$$\int_S (f+g)\,dS = \int_S f\,dS + \int_S g\,dS$$

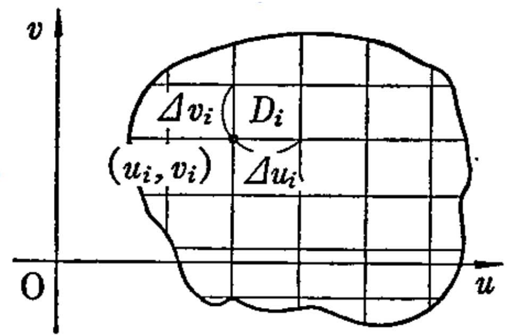
$$\int_S kf\,dS = k\int_S f\,dS$$

$$\int_S f\,dS = \int_{S_1} f\,dS + \int_{S_2} f\,dS$$

面積分:証明

領域 D を u 軸, v 軸に平行な直線によって小領域に分割する:

$$\Delta : D_1, D_2, ..., D_m$$



小長方形領域 D_i の頂点を

$$(u_i, v_i),\ (u_i + \Delta u_i, v_i),\ (u_i, v_i + \Delta v_i),\ (u_i + \Delta u_i, v_i + \Delta v_i),$$

として、D_i を $\boldsymbol{r}$ で写した曲面の小部分を S_i とする。
S_i は長方形ではなく、歪んだ平行四辺形になっている

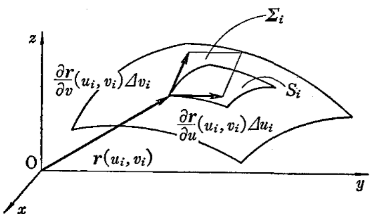
S_i の面積

S_i の頂点 $\boldsymbol{r}(u_i, v_i)$ での接ベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_i, v_i)\Delta u_i, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_i, v_i)\Delta v_i$$

この 2 つのベクトルがつくる平行四辺形 Σ_i の面積 $m(\Sigma_i)$ は

$$m(\Sigma_i) = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_i, v_i)\Delta u_i \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_i, v_i)\Delta v_j\right| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_i, v_i) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_i, v_i)\right| \Delta u_i \Delta v_j.$$



分割を細かくすることで $m(\Sigma_i)$ は $m(S_i)$ に近づき、$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} m(\Sigma_i)$ は曲面積に近づく

曲面積

したがって $\Delta u_i, \Delta v_i \to 0$ として積分

$$\iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right| dudv$$

一般に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\sin\theta| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

ここで $\boldsymbol{a} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \boldsymbol{b} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ として

$$E = |\boldsymbol{a}|^2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad G = |\boldsymbol{b}|^2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \quad F = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v},$$

とおくと

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right| = \sqrt{EG - F^2}.$$

$z = f(x, y)$ のとき

特に曲面 S が $z = f(x, y)$ $((x, y) \in D)$ で与えられるとき, パラメタ表示は

$$\boldsymbol{r}(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$$

であるから

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = (1, 0, f_x), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (0, 1, f_y)$$

より

$$E = 1 + (f_x)^2, \quad G = 1 + (f_y)^2, \quad F = f_x f_y$$

となり

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dxdy = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy$$