微 分 方 程 式2

1. ラプラス変換の定義

1. ラプラス変換の定義

ラプラス変換の定義　無限積分

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

が収束するときは s をパラメータとする関数が定義され,
ラプラス積分という.（ここで s は複素数であってもよい.）
t の関数 $f(t)$ に s の関数 $F(s)$ を対応させると考えて
$F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換といい次の記号を用いる：

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$F(s)$ を $f(t)$ の像関数, $f(t)$ を $F(s)$ の原関数という.
$F(s)$ が与えられたとき, 関数 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ を満足する $f(t)$ を対応させることを逆ラプラス変換といい, 次の記号を用いる：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

2. ラプラス変換の例1

(1) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$.

$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\, dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s}.$$

注意　この例のように $f(t)$ が $0 \leqq t \leqq \infty$ で連続であってもそのラプラス変換がすべての s に対して存在するとは限らない．厳密には無限積分が収束するための条件 (s の範囲等) を付加しなければならない．

この例では, $\mathrm{Re}\, s > 0$ が収束するための必要十分な条件になっている, 広義積分で $t = \infty$ のところの値が有限になるのは $\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき、かつその時に限る．以下の例に対しても付記された s に対する条件が収束するための必要十分な条件である．

2. ラプラス変換の例2

(2) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$.　　$(\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき$)$

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot t\, dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}t\right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s^2}.$$

(3) $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$　$(\alpha > -1)$.

$s > 0$ のとき, 変数変換 $x = st$ を施すと

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot t^\alpha\, dt = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{x^\alpha}{s^\alpha}\frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

3. ガンマ函数とベータ函数

ガンマ函数

$$\Gamma(s) \;=\; \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \quad (s > 0)$$

ベータ函数

$$B(p,q) \;=\; \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p, q > 0)$$

は、応用上重要な函数である。ちなみにアルファ函数はない。

ガンマ函数の基本性質

(1) $\Gamma(s)$ は $s > 0$ で収束して $\Gamma(s) > 0$ である
(2) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
(3) $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad n = 1, 2, 3, \dots$
(4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

証明）

(1) 省略

(2) 部分積分を用いる：

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^s \, dx = \int_0^\infty [-e^{-x}]' x^s \, dx \\
&= \left[-e^{-x} x^s\right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-x} [x^s]' \, dx \\
&= s \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx = s\Gamma(s)
\end{aligned}$$

(3) $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$,

あと $\Gamma(n) = (n-1)!$ は $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ を使って帰納法

(4) $x = t^2$ と置換積分すると

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1/2}\, dx = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$\square$

※最後の積分については次で

4. ガウス積分

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

解）

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$$

と置き、重積分と考える。$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0\}$ である。

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと D は

$$E = \{(r, \theta) \mid r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi/2\}$$

にうつる。

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy &= \iint_E e^{-r^2} \cdot r dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

したがって $\mathbf{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathbf{2}}$

(3), (4) からすぐでてくること

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

証明)

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

例)

$$\Gamma(6)=5!=120$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

注) ガンマ函数の整数、半整数での値は求まるが、他の値は難しい

5. ラプラス変換の例3

(4) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$. （$\mathrm{Re}\,(s-a) > 0$ のとき）

$$\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = \left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-a}.$$

(5) $\mathcal{L}\left\{\sin\omega t\right\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$. （$\mathrm{Re}\,s > 0$ のとき）

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin\omega t\,dt &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin\omega t\right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\cos\omega t\,dt\\ &= \frac{\omega}{s}\left(\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos\omega t\right]_{t=0}^{t=\infty} - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin\omega t\,dt\right)\\ &= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin\omega t\,dt\end{aligned}$$

両辺に s^2 をかけたあと、右辺を移項して整理すると良い

6. ラプラス変換の例 4

(6) $\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$.　(Re $s>0$ のとき)

$$\int_0^\infty e^{-st}\cdot\cos\omega t\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos\omega t\right]_{t=0}^{t=\infty} - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin\omega t\,dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

7．ラプラス変換の例5

(7) $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$.　（$\mathrm{Re}\, s > |a|$ のとき）

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}.$$

(8) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$.　（$\mathrm{Re}\, s > |a|$ のとき）

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

8. 対数関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}\{\log t\} = -\frac{\log s + C}{s}.$$

ただし C はオイラーの定数といい

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

で定義される

1) $C = 0.5772156649\cdots$ (無理数かどうかは不明)

2) $\Gamma'(1) = -C$.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{x-1}\,d\tau$$

を x について微分してから $x = 1$ とおけば

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{x-1}\log\tau\,d\tau \Longrightarrow \Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-\tau}\log\tau\,d\tau.$$

この積分で変数変換 $\tau = st\ (s > 0)$ を行うと

$$\begin{aligned}
\Gamma'(1) &= \int_0^\infty e^{-\tau} \log\tau \, d\tau \\
&= s\int_0^\infty e^{-st}(\log s + \log t)\, dt \\
&= s\log s \int_0^\infty e^{-st} dt + s\mathcal{L}\left\{\log t\right\} \\
&= s\log s\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^\infty + s\mathcal{L}\left\{\log t\right\} = \log s + s\mathcal{L}\left\{\log t\right\}
\end{aligned}$$

したがって

$$\mathcal{L}\left\{\log t\right\} = \frac{\Gamma'(1) - \log s}{s} = -\frac{\log s + C}{s}.$$

オイラーの定数

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0.57721156649\cdots$$

このとき $\Gamma'(1) = -C$ が成立している