

複素解析

1 複素数

1.1 複素数

i を虚数単位: $i^2 + 1 = 0$, a, b を実数として

$$z = a + ib = a + bi$$

を複素数という。

- $a = \operatorname{Re} z$ を z の実部,
- $b = \operatorname{Im} z$ を z の虚部
- $\operatorname{Im} z = 0$ となる複素数 $z = z + i0$ は実数を表す
- $\operatorname{Re} z = 0$ となる複素数 z を純虚数という

複素数は、実数と同じように加減乗除ができる

定義 $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$ に対して

$$\begin{array}{ll} z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2, b_1 = b_2 & \\ \text{加減} & z_1 \pm z_2 = (a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i \\ \text{乗法} & z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\ \text{除法} & \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} \end{array}$$

定義 加法・乗法が定義されて

- (1) (加法の交換則・結合則) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$,
- (2) (乗法の交換則・結合則) $z_1 z_2 = z_2 z_1 (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- (3) (分配則) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
- (4) (加法の零元・乗法の単位元の存在) $z + 0 = z, z \cdot 1 = z$.
- (5) (加法の逆元の存在) $z + (-z) = 0$

上の性質 (1)-(5) をもつ集合を(可換)環といふ。

(1)-(5) にくわえて

- (6) (乗法の逆数の存在) $z \cdot \frac{1}{z} = 1 (z \neq 0)$

性質 (1)-(6) をもつ集合を体といふ。

例

複素数全体 \mathbb{C} は体である。

実数全体 \mathbb{R} は体である。有理数全体 \mathbb{Q} も体である。

整数全体 \mathbb{Z} は環である

補題 1.1 零元・単位元は一つしか存在しない。

証明) 単位元の一意性を示す。 $u + iv$ を単位元とすると任意の複素数 $x + iy$ に対して

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = x + iy$$

これより

$$(xu - yv) + i(xv + yu) = x + iy$$

となるので

$$xu - yv = x, \quad xv + yu = y$$

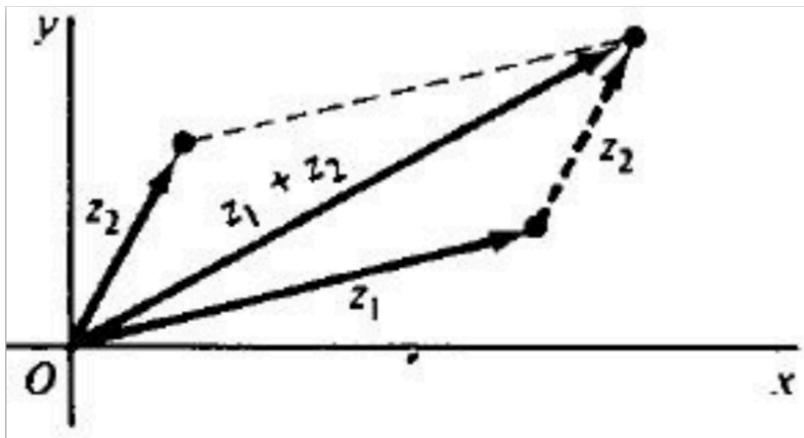
が任意の実数 x, y に対して成り立つ。特に $y = 0$ とすると、 $xu = x, xv = 0$ なので、 $x \neq 0$ の場合にも成り立つためには $u = 1, v = 0$ でなければならない。すなわち、単位元は $1 + 0i = 1$ だけである。

1.2 複素平面と複素数の絶対値

$z = x + yi$ に対して、 xy -平面 \mathbb{R}^2 上の点 (x, y) を対応させる。

この平面を**複素平面**といい、 x -軸を**実軸**、 y -軸を**虚軸**という。

複素数の加法は、**平面ベクトルとしての和**になる。



絶対値と共役複素数

$z = a + bi$ に対して

・**絶対値** を $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

・**共役複素数** を $\bar{z} = a - bi$ で定める。

※共役複素数 \bar{z} は実軸に関する折り返しになる

命題 1.2

$$(1) \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, z\bar{z} = |z|^2, \bar{\bar{z}} = z$$

$$(2) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$$

$$(3) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

(4) $z = 0 \iff |z| = 0$ であり、 $z \neq 0$ なら逆数 $1/z$ が存在して

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \text{ 言い換えると } \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

絶対値の性質・距離

$$(5) |z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 \pm z_1 \bar{z}_2 \pm \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$

$$(6) |\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|, |\bar{z}| = |z|$$

$$(7) (\text{三角不等式}) ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1.3 乗法の幾何学的説明

複素数に実数をかけた乗法は平面ベクトルのスカラー倍になる

$z = x + yi$ に i をかけた乗法は $iz = -y + xi$ になるので、行列で書くと

$$\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり、90度回転を表す。

i を2回かけると -1 倍することになって、原点に関する対称移動 = 180度回転になるが、行列でいうと下のようになる

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$a + bi$ をかける乗法は $x' + iy' = (a + bi)(x + iy) = (ax - by) + (bx + ay)i$ より

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

※ $a + bi$ に行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ を対応させる写像 $\mathbb{C} \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ は加法・乗法を保つ。

1.4 極形式

(x, y) を極座標で表し $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とする

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

を複素数の**極形式**（**極表示**とも）という。

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ を**偏角**といい、 $\arg z$ で表す。偏角は一意に決まらず $\arg z = \theta + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) だけの自由度がある。

定義 θ を実数とするとき **オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

と表す。左辺が指数函数として意味づけられることは後に扱う。

三角函数の加法公式から、次の公式が従う

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}$$

定義とくに $-\pi < \theta \leq \pi$ ととったとき**偏角の主値**といい $\operatorname{Arg} z$ で表す。

（この定義は本によって異なる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ としてもさしつかえない）

定理

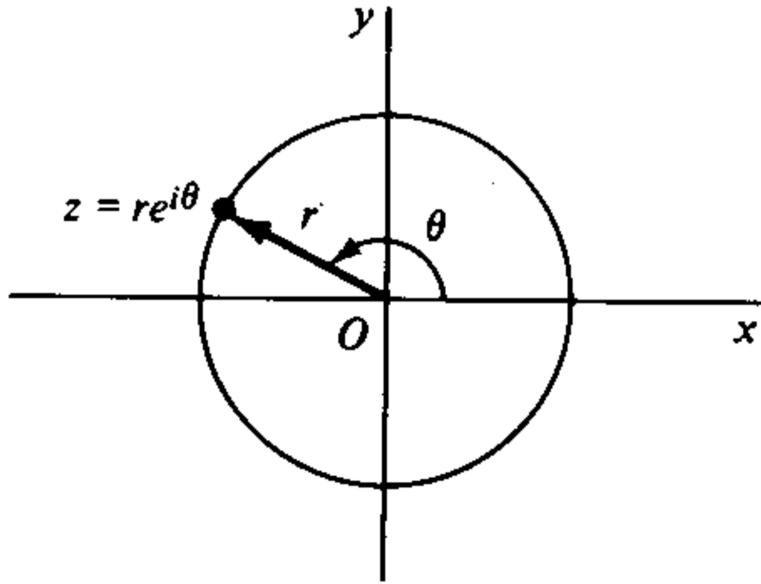
(1) $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対して

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)), \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)), \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

(2) $z = re^{i\theta}$ ならば

$$z = re^{i(\theta+2n\pi)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



$$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \text{ ならば } z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

(3) ド・モアブルの公式 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
 系 $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。 $z^n = a$ の根は $z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$). これらは円周上に等間隔で並んでいる。

定理

- (1) z が点 a, b を通る直線 $\iff z = a + t(b - a)$
- (2) z が点 a を中心とする半径 r の円 $\iff |z - a| = r$
 $\iff z = a + r(\cos \theta + i \sin \theta) = a + r e^{i\theta}.$

1.5 べき根とべき乗

0 でない複素数 $z = r e^{i\theta}$ に対して

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

がなりたつ。これからべき根が求まる

例 1 の n 乗根

1 の n 乗根とは $z^n = 1$ を満たす複素数 z である。

$z = r e^{i\theta}$ とおくと

$$z^n = r^n e^{in\theta} = 1 = 1 \cdot e^{i0}$$

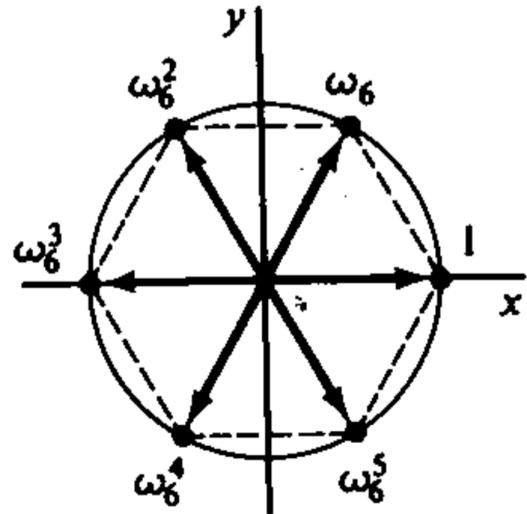
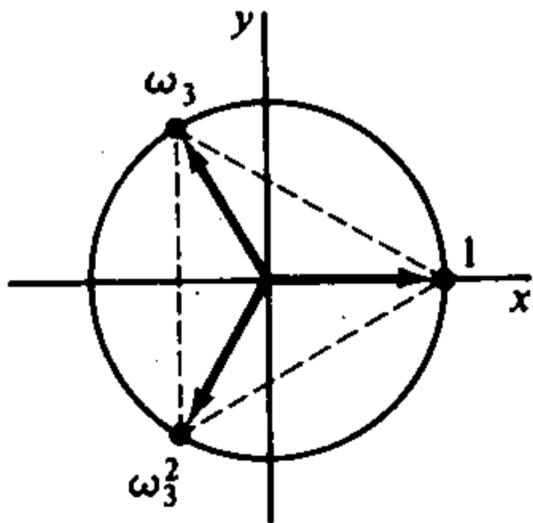
より、 $r^n = 1, n\theta = 2k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

したがって、

$$r = 1 \quad \theta = \frac{2k\pi}{n}$$

すなわち

$$z = \exp \left(\frac{2ki\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$



$n = 3$ の場合と $n = 6$ の場合の、 1 の n 乗根の位置：

一般の複素数 $z_0 = Re^{i\theta}$ の n 乗根は

$$z = \sqrt[n]{R} \exp \left(\frac{i(\theta + 2k\pi)}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

1.6 複素平面のトポロジー

点 z_0 を中心として半径 ε の円の内部

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

を z_0 の ε 近傍 という。

複素平面の部分集合 S に対して、点 z_0 のある ε 近傍が集合 S に含まれるとき、 z_0 を S の 内点 という。

点 z_0 の ε 近傍で、集合 S の点を含まないものがあるとき、 z_0 を S の 外点 という。

点 z_0 が S の内点でも外点でもないとき、 z_0 を 境界点 という。すなわち、境界点とは、そのどんな近傍も、 S の点も、 S でない点も、どちらも含むような点である。 S の境界点全体を 境界 という。

例 $S_1 = \{|z| < 1\}$ に対して、 S_1 の全ての点が内点、 $S_0 = \{|z| = 1\}$ が境界点、 $T_1 = \{|z| > 1\}$ が外点。
 $S_2 = \{|z| \leq 1\}$ に対しても、 S_2 の内点は S_1 、 $S_0 = \{|z| = 1\}$ が境界点、 $T_1 = \{|z| > 1\}$ が外点。

・境界点を含まない集合を 開集合 という

・境界点を全て含む集合を 閉集合 という。また、 S の全ての点と S の全ての境界点を合わせた集合を S の 閉包 といい、 \bar{S} で表す

補題

- (1) 集合 S が開集合 $\iff S$ の全ての点が内点
- (2) 集合 S が閉集合 $\iff \bar{S} = S$

・複素平面の部分集合 S の任意の 2 点 a, b に対して、 S に含まれる折れ線（有限個のつながった線分）で結ぶことができるとき、 S を 連結 という。

例 $S_1 = \{|z| < 1\}$ 円環 $1 < |z| < 2$

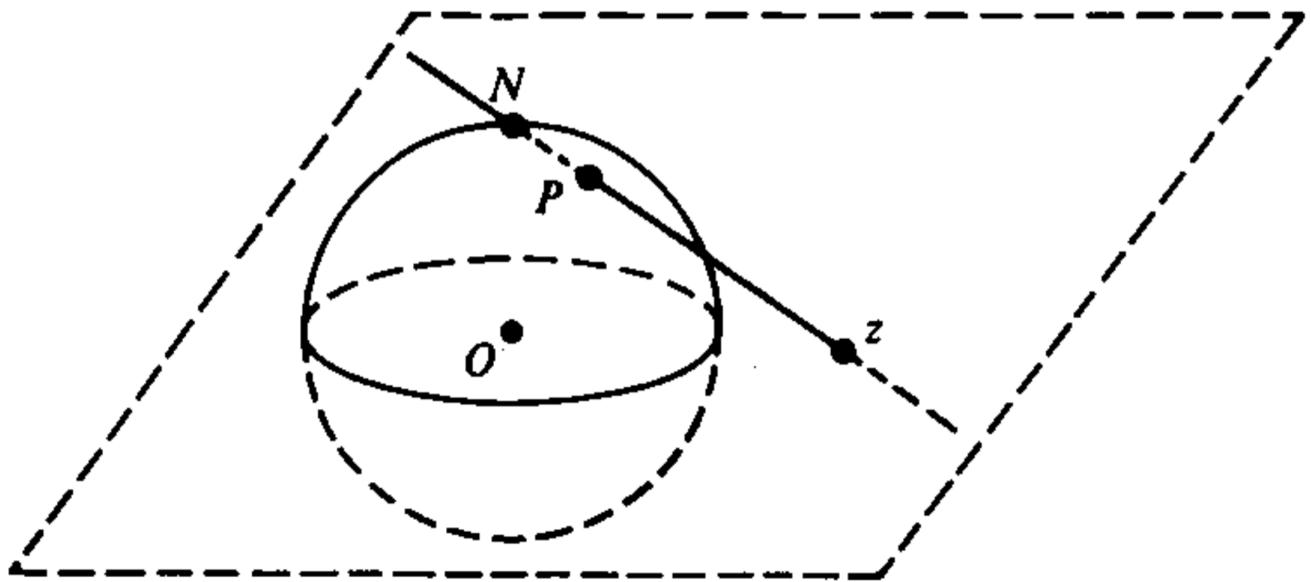
・連結な開集合を 領域 という。複素函数の定義域はおもに領域に限る。

- 複素平面の部分集合 S が、ある円 $|z| < R$ に含まれるとき、 S を**有界**といい、そうでないとき**有界でない**という。
 - 集合 S に対して、 z_0 の任意の近傍が z_0 と異なる S の点を少なくとも一つ含む場合、 z_0 を S の**集積点**という。
- S が閉集合 $\Leftrightarrow S$ は S の集積点を全て含む

1.7 リーマン球面

複素平面に無限遠点 ∞ を付け加えたものを**拡張された複素平面**という。実は球面になるので**リーマン球面**ともいう。

無限遠点を具体化するには次のような**立体射影**を考える：



北極点 N が無限遠点である。 ∞ の近傍は $|z| > R$ になる。

2 正則函数

2.1 複素変数の函数

複素数の集合 D の各点 z に、それぞれ一つの複素数 w が対応しているとき、 w は z の**複素函数**といい $w = f(z)$ と表す。 D を**定義域**という。

複素函数では

$$f(z) = \sqrt{z}$$

のように**多価函数**を考えることが多い。 $\pm\sqrt{z}$ の二値函数と思う。

これでは不便なので、一つの値を選んで**一価函数**とみなす場合もある。

例 $\arg z$ は無限多価函数で $2n\pi$ のずれがある。

主値 $\operatorname{Arg} z$ をとることで、 $-\pi < \arg z < \pi$ の範囲で一価函数。

$z = x + iy$, $w = u + iv$ とおくと、 u, v は実数の変数 x, y の二変数実函数と見なせる。 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ と書く：

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

例 $f(z) = z^2$

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$$

より $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$

例 $f(z) = |z|^2$

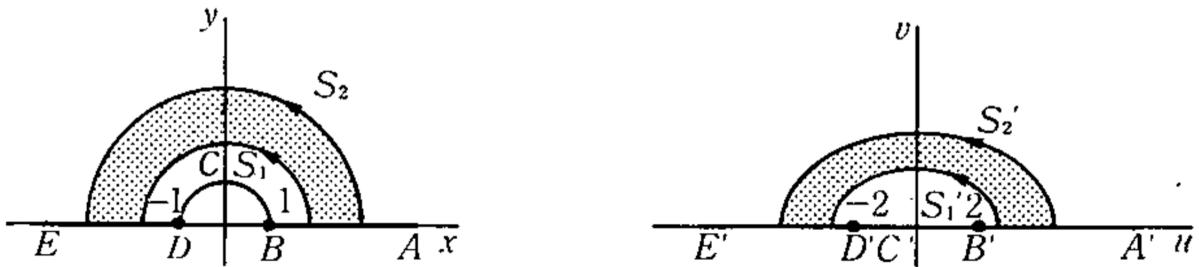
この場合は、実数値函数なので、 $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$

複素函数 $w = f(z)$ は z 平面のある部分を w 平面のある部分へうつす写像である。グラフは $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$ の 4 次元空間の曲面となって図示できない。

特に、 z がある曲線上を動けば対応する w も曲線を動く。

z -平面のある部分が w -平面のどの部分に写るかを見ることで複素函数の様子がわかってくる。

例: $w = z + \frac{1}{z}$, $z = x + iy$, $w = u + iv$



I) x -軸の $x > 1$ の部分 BA は $u > 2$ に写る

$u = x + 1/x$ より高校数学。同様に $x < -1$ の部分 ED は $u < -2$ に写る

II) $|z| = 1, y > 0$ の部分 BCD は $-2 < u < 2$ に写る

$z = e^{i\theta}$ より $w = e^{i\theta} + e^{-i\theta}/r = (r + 1/r)\cos\theta + i(r - 1/r)\sin\theta$ より

III) 半円 S_1 : $|z| = r (> 1), y > 0$ は橢円 S'_1 に写る

$z = re^{i\theta}$ より $w = re^{i\theta} + e^{-i\theta}/r = (r + 1/r)\cos\theta + i(r - 1/r)\sin\theta$ より

$u = a\cos\theta, v = b\sin\theta$ ($a = r + 1/r, b = r - 1/r$), となり、橢円 $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ を定める。

2.2 函数の極限

複素函数 $f(z)$ に対して、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - c| < \varepsilon$$

ならば、 $f(z)$ は $z \rightarrow z_0$ のとき極限値 c に収束するといい $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$ と表す

定理 (1) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $c = a + ib$ のとき、 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$ であるための必要十分条件は

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = a \text{かつ} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = b$$

が成り立つことである。

(2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = d$ のとき

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha c + \beta d, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = cd, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{c}{d} \quad (d \neq 0).$$

2.3 連続函数

z_0 の近傍で定義された複素函数 $f(z)$ について $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ であるとき、 $f(z)$ は z_0 で連続であるという。

$f(z)$ が領域 D の各点で連続ならば $f(z)$ は D で連続であるという。

定理 (1) $f(z), g(z)$ が $z = z_0$ で連続であれば、次の函数も $z = z_0$ で連続：

$$(i) \alpha f(z) + \beta g(z), \quad (ii) f(z)g(z), \quad (iii) \frac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z_0) \neq 0).$$

(2) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする。 $f(z)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で連続であるための必要十分条件は $u(x, y), v(x, y)$ がともに (x_0, y_0) で連続であることである

命題

(a) $f(z)$ が $z = z_0$ で連続で $f(z_0) \neq 0$ ならば z_0 のある近傍 $U_\varepsilon(z_0)$ の中の全ての点 z で $f(z) \neq 0$ となる。

(b) $f(z)$ が $z = z_0$ で連続, $g(w)$ が $w = f(z_0)$ で連続であれば、合成函数 $g(f(z))$ も $z = z_0$ で連続

(c) 複素平面上の有界閉集合 R で連続な実数値函数 $f(z)$ は R において最大値・最小値を持つ。また R で一様連続である

2.4 導函数

$f(z)$ が $z = z_0$ の近傍で定義されているとする。極限値

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在するとき、 $f(z)$ は z_0 で微分可能といい、この極限値を $f(z)$ の z_0 での微分係数といい、 $f'(z_0)$ で表す。

$f(z)$ が領域 D の各点で微分可能のとき、 $f(z)$ は D で正則であるといい、 $f'(z)$ を $f(z)$ の導函数という。 $f(z)$ が z_0 のある近傍で正則の時、 $f(z)$ は z_0 で正則という。

重要 複素変数になんでも微分は何も変わらない

例 多項式 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ は複素平面で正則で、

$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

互いに素な多項式 $P(z), Q(z)$ に対して $R(z) = P(z)/Q(z)$ を有理式といふ。 $R(z)$ は $Q(z) \neq 0$ である全ての点で正則。

例 $f(z) = |z|^2$

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\bar{z}}{h} = z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h}$$

したがって、 $z = 0$ のときは

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (\bar{0} + \bar{h}) = 0$$

で微分可能。 $z \neq 0$ のときは

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h} \right) = \bar{z} + z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

となるが、 $h = \varepsilon e^{i\theta}$ とすると $\bar{h} = \varepsilon e^{-i\theta}$ より最後の極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = e^{-2i\theta}$$

となって不定。よって、極限は存在しない。

注) $f(z) = |z|^2 = (x^2 + y^2) + i \cdot 0$ なので、 $f(z)$ の実部、虚部はともに実2変数函数としては微分可能だが、複素微分可能ではない。

定理

(0) z_0 で微分可能な函数は z_0 で連続。

(1) c を定数とすると $(c)' = 0$, $(z^n)' = nz^{n-1}$

(2) $f(z), g(z)$ が $z = z_0$ で微分可能であれば、次が成立

$$(i) (\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0),$$

$$(ii) (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$

$$(iii) \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2} \quad (g(z_0) \neq 0).$$

(3) $f(z)$ が $z = z_0$ で微分可能, $g(w)$ が $w = f(z_0)$ で微分可能であれば、合成函数 $g \circ f(z) = g(f(z))$ も $z = z_0$ で微分可能で $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0)$.

2.5 コーシー・リーマンの方程式

$z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする。

$f(z)$ が領域 D で正則ならば、 $u(x, y), v(x, y)$ は偏微分可能で

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つ。これを **コーシー・リーマンの方程式** という。

さらに次が成り立つ：

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

例題

$$z = re^{i\theta}, \quad f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

と**極座標**で表すと、コーシー・リーマンの方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

証明

微分の定義

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

において、 $h \in \mathbb{R}$ とすると $f(z+h) = u(x+h, y) + iv(x+h, y)$ より

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h, y) + iv(x+h, y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{h} = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$$

$h = ik, k \in \mathbb{R}$ とすると $f(z+h) = u(x, y+k) + iv(x, y+k)$ より

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[u(x, y+k) + iv(x, y+k)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{ik} = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$$

微分はどの方向でとっても同じだから、コーシー・リーマンの方程式

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad v_x(x, y) = -u_y(x, y)$$

が成り立つ

例 $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ の場合

$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ で、コーシー・リーマンの方程式を満たす：

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x$$

コーシー・リーマンの関係式は「ほぼ」微分可能性と同値：

定理 実数値函数 $u(x, y), v(x, y)$ が領域 D で連続な偏導函数をもち、コーシー・リーマンの方程式を満たせば $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は D で正則である。

証明 u, v は連続な偏導函数をもつて、全微分可能である。すなわち

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) - u_x(x, y)h - u_y(x, y)k = o(\sqrt{h^2 + k^2}), \quad \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$$

すなわち、 $r = \sqrt{h^2 + k^2}$ として

$$\varepsilon_1 = \frac{u(x+h, y+k) - u(x, y) - u_x(x, y)h - u_y(x, y)k}{r}$$

とおくと $\lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$. 同様に

$$\varepsilon_2 = \frac{v(x+h, y+k) - v(x, y) - v_x(x, y)h - v_y(x, y)k}{r}$$

とおくと $\lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$. これから

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k) &= (u + u_x h + u_y k + \varepsilon_1 r) + i(v + v_x h + v_y k + \varepsilon_2 r) \\ &= (u + u_x h - \textcolor{red}{v}_x k + \varepsilon_1 r) + i(v + v_x h + \textcolor{red}{u}_x k + \varepsilon_2 r) \\ &= (u + iv) + u_x(h + ik) + iv_x(h + ik) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r \end{aligned}$$

よって、 $r \rightarrow 0$ のとき $\{[u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)] - (u + iv)\}/(h + ik) \rightarrow u_x + iv_x$.

□

2.6 正則函数

定義 点 z_0 のある近傍において $f(z)$ が微分可能の時、 $f(z)$ は z_0 で正則という。とくに、 $f(z)$ が集合 R で正則であるとき、 $f(z)$ は R で正則という

例 $f(z) = |z|^2$ は $z = 0$ で（複素）微分可能であるが、正則ではない。

一般にはある開集合で正則な函数を考える。

$f(z)$ が $|z| \leq 1$ で正則というときは、 $|z| \leq 1$ を含むある領域で正則という意味である。

全複素平面で正則な函数を整函数という

$f(z)$ が $z = z_0$ で正則ではないが、 z_0 のどんな近傍を取ってもその中の少なくとも 1 点では正則であるとき、すなわち正則な点の集積点であるとき、 z_0 を $f(z)$ の特異点という。

定理 領域 D で恒等的に $f'(z) = 0$ ならば、 $f(z)$ は D で定数。

証明は $u_x = 0, u_y = 0, v_x = 0, v_y = 0$ より

2.7 調和函数

実数値函数 $h(x, y)$ が領域 D で 2 回偏微分可能でラプラスの方程式

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

を満たすとき、 $h(x, y)$ を調和函数という。

※調和函数は何回でも微分可能になる（今は示せない）

$u(x, y), v(x, y)$ が調和函数でコーシー・リーマンの方程式を満たすとき、 $v(x, y)$ を $u(x, y)$ の共役調和函数という。

定理

$u(x, y), v(x, y)$ が領域 D で 2 階連続微分可能とする。次の 2 条件は同値

- (1) $u(x, y), v(x, y)$ は調和函数で、 $v(x, y)$ は $u(x, y)$ の共役調和函数
- (2) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は D で正則函数

証明 (1) \Rightarrow (2)

コーシー・リーマンの方程式をみたして、1 階連続微分可能なので正則になる。

(2) \Rightarrow (1)

$f(z)$ は正則函数だから、コーシー・リーマンの方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つ。したがって、

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = v_{yx} + (-v_{xy}) = 0$$

であり、 v も同様。共役調和函数になるのは定義そのもの。

3 初等函数

以下、指数・対数・三角函数などいわゆる **初等函数**を複素函数に拡張する。
実数での定義は知つてると仮定する。

3.1 指数函数

定義 複素函数

$$f(z) = f(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

を **指数函数** e^z と定義する。

- 1) $u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$ はコーシー・リーマンの方程式を満たすので、正則函数。
- 2) $y = 0$ のときは実函数 e^x に一致。
- 3) $f(z) = e^z$ は整函数で、 $f'(z) = f(z)$
- 4) 逆に、 $f(x + i \cdot 0) = e^x$ となる整函数 $f(z)$ で、 $f'(z) = f(z)$ となるものは e^z に限る
- 5) $z = iy$ (純虚数) の場合、 $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (オイラーの公式)。したがって、 $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.

証明 (1)(2)(3)(5) は直ちに証明できる。(4) は演習問題 3-14

定理

- (1) **加法定理** $e^{z+w} = e^z e^w$ 。特に n を自然数として $(e^z)^n = e^{nz}$.
- (2) $z = x + iy$ として、 $|e^z| = e^x, \arg(e^z) = y + 2\pi n$, (n は整数)。
- (3) $e^z = 1 \iff z = 2\pi ni$, (n は整数)。

また、 e^z は **周期 $2\pi i$ の周期函数**：すべての z に対して $e^{z+2\pi ni} = e^z$.

(4) $w = e^z$ とすると、 $z = \log |w| + i(\operatorname{Arg} w + 2n\pi)$ (n :整数)。したがって、**逆函数は多価函数**になる

- (5) $e^z = -1$ ならば $z = (2n + 1)\pi i$ (n :整数)。とくに、 $e^{\pi i} = -1$ (オイラーの関係式)
- (6) $w = e^z$ により、 z -平面の直線 $x = a$ は w -平面の円 $|w| = e^a$ に、 z -平面の直線 $y = b$ は w -平面の半直線 $\arg w = b$ にうつる。また、 $\{z = x + iy \mid -\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi\}$ は集合 $\{w \mid w \neq 0\}$ に 1 対 1 で写る

証明

(1)(2) は定義より。(3)(4)(5)(6) は(2) より。(2) で $z = x + iy$ と実部と虚部に分けたときに、 x, y を表す式が得られている。

3.2 三角函数・双曲線函数

三角函数 三角函数は以下で定める

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

定理 (1) $\sin z, \cos z$ は 整函数で

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

(2) 実部と虚部は

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$(3) |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

特に、 $|\sin z| > 1$ となることがあることに注意せよ

$$(4) \sin z = 0 \iff z = n\pi, \quad \cos z = 0 \iff z = (n + 1/2)\pi$$

※：加法定理、周期性、偶奇性など、実函数の時に示した公式は全て成立

問題 $\cos z = 100$ となる z を求めよ。

解 $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ より

$$\cos x \cosh y = 100, \quad \sin x \sinh y = 0$$

z は実数ではないので $y \neq 0$ より $\sinh y \neq 0$. よって $\sin x = 0$. したがって、 $x = n\pi$. $\cos(n\pi) = (-1)^n$ だが、 $\cosh y > 0$ より n は偶数で $\cos(2m\pi) = 1$ より, $\cosh y = 100$. よって、

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 100.$$

これをといて、 $y = \log(100 \pm \sqrt{9999}) = \pm \log(100 + \sqrt{9999})$.

よって、 $z = 2m\pi \pm \log(100 + \sqrt{9999})i$, m は整数.

双曲線函数

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

定理 (1) $\cos(iz) = \cosh z$, $\sin(iz) = i \sinh z$, $\tan(iz) = i \tanh z$,

(2) $\cosh z$, $\sinh z$ は全平面で正則かつ $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$.

$$(3) \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad 1 - \tanh^2 z = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

(4) 加法定理

$$\begin{aligned} \cosh(z + w) &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w, \\ \sinh(z + w) &= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w. \end{aligned}$$

3.3 対数函数

$z(\neq 0)$ に対して、 $z = e^w$ をみたす w を

$$w = \log z$$

で表し、 z の **対数** したいが、多価函数になる.

$z = re^{i\theta}$ とおくと

$$w = \log z = \log_e r + i(\theta + 2n\pi), \quad n : \text{整数}$$

$\log z$ は $2\pi i$ の整数倍の違いをもつ無限多価函数である

とくに、 $-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$ の範囲に制限したものを**対数の主値**といい、 $\operatorname{Log} z$ で表す。このとき

$$\operatorname{Log} z = \log_e |z| + i \operatorname{Arg} z$$

定理

$$(1) \log 1 = 2n\pi i \quad (n: \text{整数})$$

(2) $\log z$ の実部 $u(r, \theta) = \log r$, $v(r, \theta) = \theta$ は極形式のコーシー・リーマン方程式 $u_r = v_\theta/r$, $v_r = -v_\theta/r$ を満たす。

(3) $\log z$ は $z \neq 0$ で正則で、 $(\log z)' = 1/z$.

3.4 多価函数

一般に **多価函数**を扱うときは、ある領域に区切って一価函数になるように制限する。複素平面をある曲線で区切った領域で正則になるとき、定義域を制限された一価正則函数を**分枝**という。

$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} = \{-\pi < \arg z \leq \pi\}$ の領域で定義された函数 $\text{Log } z$ (主値) を多価函数 $\log z$ の**主枝**という

分岐の中心となる点 ($\log z$ なら原点) を**分岐点**という

定理

- (1) $e^{\log z} = z$
- (2) $\log e^z = z + 2n\pi i$ (n は整数)
- (2') $\text{Log } e^z = z$ ($-\pi < \arg z \leq \pi$)
- (3) 多価函数として $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$. $\text{Log}(z_1 z_2) \neq \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$. たとえば $\text{Log } 1 = 0$ だが、 $\text{Log } (-1) = \pi i$ より $\text{Log } (-1) + \text{Log } (-1) = 2\pi i$.
- (4) $z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)$ (n は自然数)。右辺は一般に n 値函数

3.5 べき根函数

べき函数 c を固定したとき $z (\neq 0)$ に対して $z^c = e^{c \log z}$ と定義して、 z の c 乗という。 z^c は一般に多価函数である。

注意) c が整数の時は一価函数になり、通常の定義と一致する

例 $-2i$ 乗は

$$f(z) = z^{-2i} := \exp(-2i \log z)$$

で定義される。特に

$$f(i) = \exp(-2i \log i) = \exp\left[-2i\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi i\right] = e^{(1+4n)\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

したがって、 i^{-2i} は**無限多価で値は全て実数**である。

z^c は多価函数であるが、 $\log z$ の分枝を一つ選べば一価になる。

特に、 $-\pi < \arg z \leq \pi$ で $\text{Log } z$ を選んだものを z^c の**主値**という。すなわち

$$z^c = e^{c \text{Log } z}$$

を**主枝**という。

定理

- (1) z^c は $z \neq 0$ で正則で $(z^c)' = cz^{c-1}$.
- (2) 特に $c = 1/n$ (n は自然数) の場合 $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ とかく。 $n = 2$ のときは単に $w = \sqrt{z}$ とかく。
 $z = re^{i\theta}$ ($-\pi < \theta \leq \pi$) とおくと $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2\pi k)/n}$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$) となる。とくに $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$ を $\sqrt[n]{z}$ の**主値**といいう。
- (3) m, n が互いに素な自然数のとき、 $z^{m/n}$ は n 個の値を取る。
特に $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$. c が有理数でなければ z^c は無限多価である。

一般の底 ($c \neq 0$) の指数函数を

$$c^z := \exp(z \log c)$$

で定める。 c^z は多価であるが、 $\log c$ の分枝を一つ決めるごとに一価正則である。とくに $c = e$ の時は、何も断らなければ $\log e = 1$ と主値をとり、 e^z は普通の定義と同じである。

定理

c^z は全平面で正則で $(c^z)' = c^z(\log c)$.

3.6 逆三角函数・逆双曲線函数

$z = \sin w$ のとき $w = \sin^{-1} z$ とかく、他の逆三角函数・逆双曲線函数も同様に定義する。三角函数・双曲線函数は周期函数なので、逆函数は多価函数になる。

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

より

$$(e^{iw})^2 - 2iz \cdot e^{iw} - 1 = 0$$

より

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$$

したがって

$$w = \sin^{-1} z = -i \log(iz + (1 - z^2)^{1/2}).$$

で右辺は無限多価になる

例 $\sin^{-1}(-i)$

$$\sin^{-1}(-i) = -i \log(1 + (1 - (-i)^2)^{1/2}) = -i \log(1 \pm \sqrt{2}).$$

ここで、

$$\begin{aligned} \log(1 + \sqrt{2}) &= \log_e(1 + \sqrt{2}) + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \log(1 - \sqrt{2}) &= \log_e(\sqrt{2} - 1) + (2n + 1)\pi i \\ &= -\log_e(\sqrt{2} + 1) + (2n + 1)\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

したがって、

$$\log(1 \pm \sqrt{2}) = (-1)^n \log_e(\sqrt{2} + 1) + n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

となるので

$$\sin^{-1}(-i) = n\pi + i(-1)^{n+1} \log_e(\sqrt{2} + 1).$$

定理

(1) 三角函数・双曲線函数の逆函数は

$$\begin{aligned} \cos^{-1} z &= -i \log(z + i\sqrt{1 - z^2}), \\ \sin^{-1} z &= -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}), \\ \tan^{-1} z &= \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} z &= \log(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \sinh^{-1} z &= \log(z + \sqrt{z^2 + 1}), \\ \tanh^{-1} z &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \end{aligned}$$

(2) 導函数は

$$(\cos^{-1} z)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (\sin^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (\tan^{-1} z)' = \frac{1}{1 + z^2}$$

$$(\cosh^{-1} z)' = -\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (\sinh^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}, \quad (\tanh^{-1} z)' = \frac{1}{1 - z^2}$$

4 複素積分(1)

4.1 複素平面の曲線

複素平面の曲線は、平面 \mathbb{R}^2 上の曲線と全く同様である

曲線

複素平面の点 a から b に至る曲線 C の方程式を

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), (\alpha \leq t \leq \beta)$$

とする。 $z(\alpha) = a, z(\beta) = b$ とすると、 a を C の始点、 b を C の終点と呼ぶ。

$t_1 \neq t_2$ ならば $z(t_1) \neq z(t_2)$ となる曲線を単純弧もしくはジョルダン弧というといふ

始点と終点が一致する曲線を閉曲線といふ。それ以外に一致する点がないとき单一閉曲線もしくはジョルダン閉曲線といふ。

例

単位円 $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) はジョルダン閉曲線である。

反時計回りの曲線を正の向きと考える

同じ单位円でも $z = e^{-it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) は負の向きになる

以下、断らない限り、閉曲線はすべて正の向きを持った单一閉曲線を考える。

微分可能な曲線

$z(t)$ が有限個の t の値を除いて、連続な導函数 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ を持つとき、 C を区分的に滑らかといふ。以下、区分的に滑らかであることを仮定する。

曲線 C の長さは

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

で与えられる

4.2 線積分

D を複素平面内の領域、 $C : z = z(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta$) を D に含まれる曲線とする。

D で連続な複素数値函数 $f(z)$ に対して、 $f(z)$ の曲線 C に沿った積分を

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

で定義する。 C を積分路といふ。

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ とすると

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} (u + iv)(x' + iy') dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (ux' - vy') dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (vx' + uy') dt \\ &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \end{aligned}$$

となる。最後の形(実平面の線積分)を得るには形式的に

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$$

としてもよい

曲線 C : $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($\alpha \leqq t \leqq \beta$) に対して、逆向きの曲線 $-C$ を

$$z(-t) = x(-t) + iy(-t), \quad (-\beta \leqq t \leqq -\alpha)$$

で定める。

$-C$ に沿った積分は

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(z) dz &= \int_{-\beta}^{-\alpha} f(z(-t))(-z'(-t)) dt \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} f(z(\tau))(-z'(\tau)) d(-\tau), \quad (\tau = -t) \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f(z(\tau))(z'(\tau)) d\tau = - \int_C f(z) dz \end{aligned}$$

定理

C を逆向きに終点から始点にたどるとき、その曲線を $-C$ であらわすと

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$

定理

(1) a から b に至る曲線を C_1 , b から c に至る曲線を C_2 とする。この二つを続けた曲線を $C_1 + C_2$ とすると $\int_{C_1 + C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$.

(2) p, q を定数、 $f(z), g(z)$ を連続函数として

$$\int_C [pf(z) + qg(z)] dz = p \int_C f(z) dz + q \int_C g(z) dz.$$

(3) $M = \max_{z \in C} |f(z)|$, L を C の長さとすると

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leqq \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| \cdot |z'(t)| dt \leqq ML.$$

証明 (3)

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &\leqq \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| \cdot |z'(t)| dt \\ &\leqq M \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = ML. \end{aligned}$$

例

(1) $C : z = 0$ と $z = 2 + i$ を結ぶ線分

$$I = \int_C z^2 dz$$

C の決め方： 線分は一次式だから、簡単のため $0 \leqq t \leqq 1$ としておいて

$$z(t) = at + b$$

とおける。定数 a, b は $z(0) = b = 0, z(1) = a + b = 2 + i$ より

$$z = (2 + i)t = 2t + i \cdot t.$$

C は $z(t) = x(t) + iy(t) = 2t + i \cdot t, (0 \leqq t \leqq 1)$
したがって、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (z(t))^2 z'(t) dt \\ &= \int_0^1 (2t + it)^2 (2 + i) dt = (2 + i)^2 (2 + i) \int_0^1 t^2 dt \\ &= (2 + 11i) \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i \end{aligned}$$

例

(2) $C_1 : z = 0$ と $z = 2$ を結ぶ線分, $C_2 : z = 2$ と $z = 2 + i$ を結ぶ線分
 $C = C_1 + C_2$ として

$$I = \int_C z^2 dz$$

C_1 は $z(t) = x(t) + iy(t) = t, (0 \leqq t \leqq 2),$

C_2 は $z(t) = x(t) + iy(t) = 2 + i \cdot t, (0 \leqq t \leqq 1),$

したがって、

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz \\ &= \int_0^2 (t)^2 dt + \int_0^1 (2 + it)^2 \cdot (i) dt = \int_0^2 t^2 dt + \int_0^1 [-4t + i \cdot (4 - t^2)] dt \\ &= \frac{8}{3} + \left(-2 + \frac{11}{3}i \right) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i \end{aligned}$$

例 (1) と例 (2) で値が等しい理由は、後で述べるコーシーの積分定理

例

C : 単位円の上半分で $-1 \rightarrow 1$ $I = \int_C \bar{z} dz$

解 $C : z(\theta) = e^{-i\theta}, -\pi \leqq \theta \leqq 0, -C : z(\theta) = e^{i\theta}, 0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$I = - \int_{-C} \bar{z} dz = - \int_0^\pi e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = - \int_0^\pi i dt = -\pi i$$

例

C : 単位円 $I = \int_C \frac{1}{z} dz$

解

$C : z(\theta) = e^{i\theta}, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

※ $|z| = 1$ では、 $z\bar{z} = 1$ なので、 $\bar{z} = 1/z$ である。

5 線積分とグリーンの定理

5.1 曲線

平面上の曲線とは t の閉区間 $[a, b]$ で定義された連続函数

$$C : x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

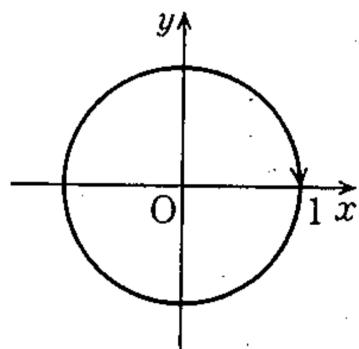
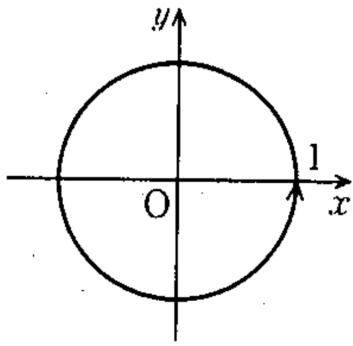
のことである。以下 $\varphi(t), \psi(t)$ は有限個の点を除いて微分可能とする。

例) $t \in [0, 2\pi]$ とする

$$C_1 : x = \cos t, y = \sin t$$

$$C_2 : x = \cos t, y = -\sin t$$

どちらも単位円を表すが、方向が逆になる



5.2 線積分

一変数の積分は

$$\int_a^b f(t) dt$$

であった。また、二変数の積分は

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

であった。平面の上の曲線に沿った線積分を考えることにする

t の閉区間 $[a, b]$ で定義された曲線

$$C : x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

を考える。

C に沿った線積分 を

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt + \int_a^b g(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$$

で定める

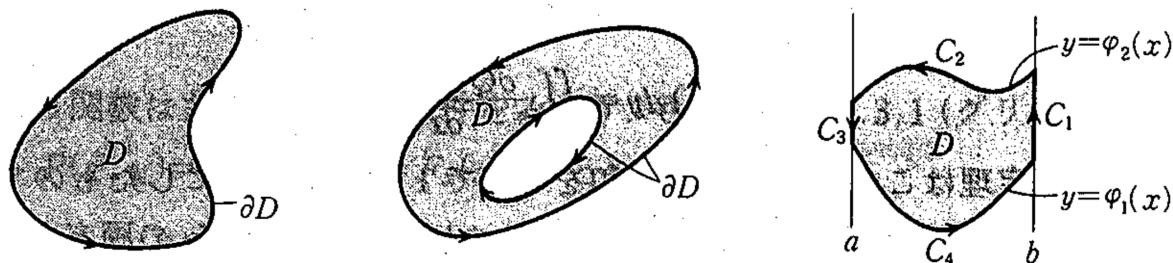
注) 線積分は曲線と向きで決まり、パラメタの取り方によらない

例) $C : x = t, y = t^2$ ($0 \leq t \leq a$) とする。

$$\begin{aligned} \int_C (x + y) dx &= \int_0^a (t + t^2) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^a = \frac{\mathbf{a}^2}{2} + \frac{\mathbf{a}^3}{3} \\ \int_C (x + y) dy &= \int_0^a (t + t^2) \cdot 2t dt = \left[\frac{2t^2}{3} + \frac{t^4}{2} \right]_0^a = \frac{2\mathbf{a}^3}{3} + \frac{\mathbf{a}^4}{2} \end{aligned}$$

5.3 境界の向き

平面の中の領域 D がなめらかな曲線で囲まれているとする。境界 ∂D は D の内部が進行方向の左手になるようにとる



5.4 グリーンの定理

D : 有界な閉領域、 $P(x, y), Q(x, y)$: C^1 -級函数 のとき

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy$$

証明) P だけに依存する部分

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy$$

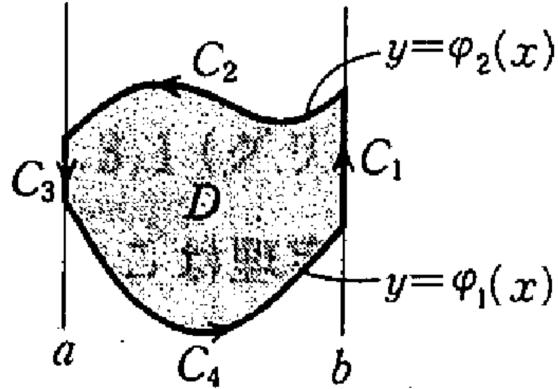
を示す。 Q のほうも同様である。

D が x について単純な領域

$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b, \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$$

になっているとすると、次のように分割できる：

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$



C_1 は $x = b, y = t$ ($\varphi_1(b) \leqq t \leqq \varphi_2(b)$) とかけるので、 $\frac{dx}{dt} = 0$ だから

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b, t) \frac{dx}{dt} dt = 0$$

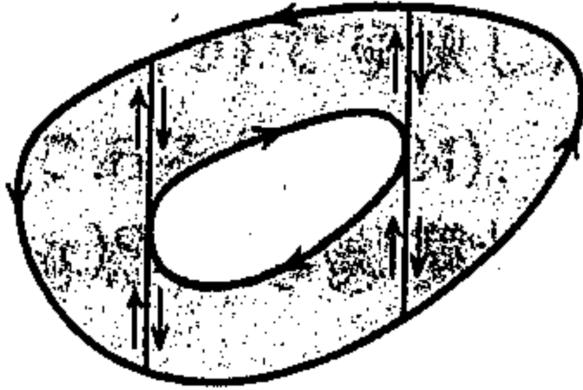
同様に、 $\int_{C_3} P(x, y) dx = 0$ となる。

C_2 : $x = t, y = \varphi_2(t)$ ($t : b \rightarrow a$),

C_4 : $x = t, y = \varphi_1(t)$ ($t : a \rightarrow b$)

に注意すると

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P(x, y) dx &= \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \\ &= \int_b^a P(t, \varphi_2(t)) dt + \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt \\ &= \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx + \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx \\ &= - \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx \\ &= - \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \\ &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dxdy \end{aligned}$$



一般の領域に対しては、 D を単純な領域のいくつかにわけて考える。分割された小領域の境界で D の内部にあるものは、隣接する 2 つの小領域の境界として 2 回現れてて、向きが逆なので打ち消し合う。よって、一般の領域でもグリーンの定理は成立する。

Q の場合は、 y について単純な領域に分割すればよい。

例) $C: x^2 + y^2 = a^2$ として、反時計回りに向き付けする。

D を C で囲まれた内部とすると

$$\int_C ydx - xdy = \iint_D -2dxdy = -2\pi a^2$$

例) $P_y = Q_x$ が成り立てば

$$\int_{\partial C} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D (Q_x(x, y) - P_y(x, y)) dxdy = 0$$

よく間違える例)

P, Q は D の境界、内部ともで C^1 -級である。そうでない場合、グリーンの定理は成り立たない

C を単位円に反時計回りに向き付けしたものとする

$$I = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

を求める。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

なので、形式的にグリーンの定理を用いると $I = 0$.

しかし、被積分函数は原点で連続ではない。

まじめに計算すると $x = \cos t, y = \sin t$ とおいて

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) dt + \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (\cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

5.5 重積分の変換公式の証明

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

以下の仮定をおく。実用上、たいていの函数で成り立つ。

仮定 $F_x(x, y) = f(x, y)$ となる C^1 -級函数 $F(x, y)$ が存在する

$f(x, y) = F_x(x, y)$ とすると、グリーンの定理

$$\int_{\partial D} Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy$$

により

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx dy \\ &= \int_{\partial D} F(x, y) dy \end{aligned}$$

ここで、変換 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ を考えると

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

を代入して

$$\begin{aligned} I &= \pm \int_{\partial E} F(x(u, v), y(u, v)) \left\{ \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right\} \\ &= \pm \int_{\partial E} F(x(u, v), y(u, v)) y_u du + F(x(u, v), y(u, v)) y_v dv \end{aligned}$$

ここで、もう一度グリーンの定理を使って E の積分に戻すと

$$\begin{aligned} I &= \pm \iint_E \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (F(x, y) y_v) - \frac{\partial}{\partial v} (F(x, y) y_u) \right\} du dv \\ &= \pm \iint_E F_x(x(u, v), y(u, v)) (x_u y_v - x_v y_u) du dv \\ &= \pm \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \end{aligned}$$

符号 \pm はヤコビアンが正なら ∂D と ∂E の向きが同じなので正、ヤコビアンが負なら ∂D と ∂E の向きが逆なので負。よって、ヤコビアンに絶対値を付ければ \pm はいらない。よって証明された \square

6 コーシー・グルサの定理

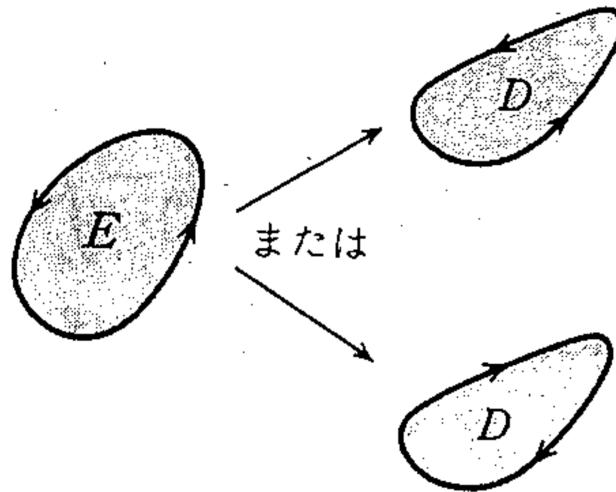
6.1 グリーンの定理・復習

xy -平面の区分的に滑らかなジョルダン閉曲線 C (正の向き) で囲まれた閉集合 R で、実数値函数 $P(x, y), Q(x, y)$ が C^1 -級とする。

グリーンの定理

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy$$

グリーンの定理を正則函数に適用すると、複素解析の基本定理であるコーシーの定理を得る。



6.2 コーシーの定理

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が R で正則とする。線積分

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$$

にグリーンの定理を用いると

$$\int_C f(z) dz = \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy$$

となり、右辺はコーシー・リーマンの方程式より 0 になる

コーシーの定理

$f(z)$ は单連結な領域 D で正則。 $f'(z)$ は連続とする。 D の中の区分的になめらかなジョルダン閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

このコーシーの定理が、複素函数の理論の基礎になる

6.3 コーシー・グルサの定理

コーシー・グルサの定理

区分的になめらかなジョルダン閉曲線 C の上と内部で正則な複素函数 $f(z)$ に対して

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

※ 「 $f'(z)$ は連続」の条件はなくても良い。この定理の証明は難しいので省略

コーシー・グルサの定理は次の形で使うことが多い：

定理

$f(z)$ は単連結な領域（ジョルダン閉曲線の内部） D で正則、 D の中に区分的になめらかなジョルダン閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

※上の定理で C はジョルダン閉曲線でなく、自己交差する閉曲線でも正しい。

※交差点が無限にあっても成り立つ（証明は複雑になる）

次も、コーシー・グルサの定理の言い換えである

定理 $f(z)$ は単連結な領域 D で正則、 D に含まれる点 a を固定して、 a から z を結ぶ曲線 C に沿って積分すると、 C の取り方によらずに積分の値は一定。

証明 a から z を結ぶ二つの曲線 C_1, C_2 に対して $C_1 - C_2$ は、 a から a に戻る閉曲線になるので、前の定理から

$$\int_{C_1 - C_2} f(z) dz = 0$$

より

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

6.4 単連結な領域・多重連結な領域

ジョルダン閉曲線に囲まれた内部の集合を単連結という。単連結ではないが連結な集合を多重連結という。

例 円環 $1 < |z| < 2$ は多重連結である。一般に、多重連結な集合は穴の空いた領域になる

定理

$C, C_j (j = 1, 2, \dots, n)$ はすべて区分的に微分可能なジョルダン閉曲線で、 C_j は C の内部にある。また、 C_j の内部は共通点を持たないとする。

R を C の内部から C_j の内部を除いた多重連結な集合とする。 R の境界は C と C_j の全部だが、向きは R の内部が左にくる向きとする。向きづけられた境界を B と書く。

$f(z)$ が R と B で正則なら

$$\int_B f(z) dz = 0$$

証明

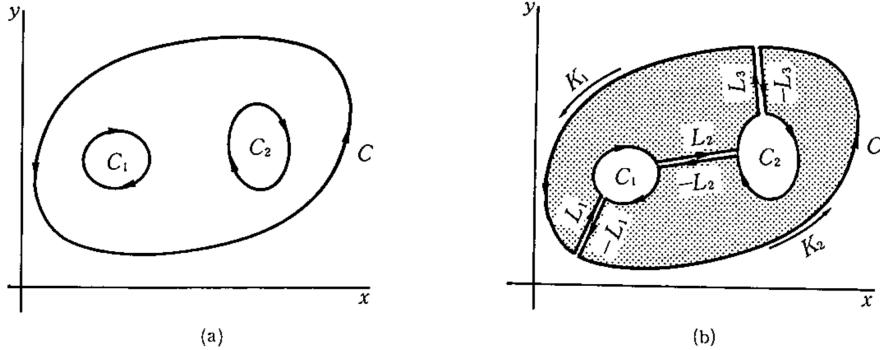
C と C_j を曲線 L_1 で、 C_1 と C_2 を曲線 L_2 で、 \dots C_n と C を曲線 L_{n+1} で結び、図のように向きをつけて R を二つのジョルダン閉曲線 K_1, K_2 で囲まれた単連結な領域に分ける。

$$\int_{K_1 + K_2} f(z) dz = \int_{K_1} f(z) dz + \int_{K_2} f(z) dz = 0.$$

L_j には二つの向きがついてキャンセルするので

$$\int_{K_1 + K_2} f(z) dz = \int_B f(z) dz$$

となり、定理が証明された。



系

C の内部に C_1 だけがある場合、 C_1 も反時計回りに向きに取ると

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$$

となる。これを**積分路の変形原理**という。次の形でも使う

系

点 a, b を領域 D の内部の点、 C_1, C_2 を D に含まれる a と b を結ぶ曲線で、 D の内部で C_1 から C_2 を端点を保ったまま連続的に変形できるなら

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

例 $R : 1 < |z| < 2$ とする。境界 B は $|z| = 2$ を正の向きに回る道と $|z| = 1$ を負の向きに回る道を合わせた物になる。このとき

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2 + 9)} = 0$$

被積分函数は $z \neq 0, \pm 3i$ で正則なので、 R で正則。

6.5 コーシーの定理の応用～発展

代数学の基本定理 n 次方程式

$$P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0, \quad (a_n \neq 0)$$

は複素数の解を少なくとも一つ持つ。 $(n \geq 1)$

証明 $\bar{P}(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \cdots + \bar{a}_n z^n$ とおき、 $P(z) \cdot \bar{P}(z)$ は $2n$ 次の多項式で係数は全て実数になるので、最初から P の係数は実数としてよい。

むじゅんによって示す。 $P(z) = 0$ が解を持たないとする。 $P(z)$ は実軸上では実数値函数だから、全て正か、全て負か、いずれかであるから

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(2\cos\theta)} \neq 0$$

左辺の積分において、 $z = e^{i\theta}$ とおくと、 $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$, $d\theta = dz/iz$ より、単位円 C に沿った複素積分

$$\frac{1}{i} \int_C \frac{dz}{zP(z + z^{-1})} = \frac{1}{i} \int_C \frac{z^{n-1}}{Q(z)} dz$$

と等しい。ここで、 $Q(z) = z^n P(z + z^{-1})$.

$Q(z)$ も多項式で、 $z \neq 0$ では $Q(z) \neq 0$. $z = 0$ のとき、 $Q(0) = a_n \neq 0$ であるから、任意の z で $Q(z) \neq 0$ となるので、 $\frac{z^{n-1}}{Q(z)}$ は正則函数。よってコーシーの定理より 0 となって矛盾。□

7 複素積分(2)

7.1 原始函数と線積分

定義 領域 D で連続な函数 $f(z)$ に対して

$$F'(z) = f(z)$$

が成り立つ正則函数 $F(z)$ を $f(z)$ の **原始函数** という。

※正則函数の微分はまた正則なので、原始函数をもつ函数は正則函数に限る

定理 閉曲線で囲まれた領域 D で正則な函数 $f(z)$ に対して、その原始函数を $F(z)$ とする。領域 D の内部の区分的に滑らかな曲線 $C: z = z(t) (a \leq t \leq b)$ に対して

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \left[F(z(t)) \right]_{t=a}^{t=b} = F(z(b)) - F(z(a)).$$

この定理によって、原始函数がわかっている函数については、線積分は原始函数から求めることが出来る（実数の積分と同じ）

証明 曲線は滑らかとする

(Step 1) $\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) z'(t)$

$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ とする

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(z(t)) &= \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) + i \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \\ &= U_x x' + U_y y' + i(V_x x' + V_y y') \\ &= U_x x' - V_x y' + i(V_x x' + U_y y') \quad (\leftarrow \text{CR 方程式}) \\ &= (U_x + iV_x)(x' + iy') = F'(z(t)) z'(t) \end{aligned}$$

(Step 2)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt &= \int_a^b \{F(z(t))\}' dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) \end{aligned}$$

(丁寧に証明するなら、実部と虚部に分ける)

□

前の定理を少し書き直して

定理 閉曲線で囲まれた領域 D で正則な函数 $f(z)$ に対して、その原始函数を $F(z)$ とすると領域 D の内部の点 z_1, z_2 に対して

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \left[F(z) \right]_{z=z_1}^{z=z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$

不定積分 $f(z)$ は閉曲線で囲まれた領域 D で正則、 D に含まれる点 a を固定して、 a から z を結ぶ曲線 C に沿って積分すると、 C の取り方によらずに積分の値は一定なのでそれを $F(z) = \int_a^z f(z) dz$ で表す。このようにして決まる函数 $F(z)$ を **不定積分** という。

注意) D が穴の空いた多重連結領域の場合、 C が穴の周りを回ると積分の値が変わるので、 D は閉曲線で囲まれたような単純な領域でなければならない。

定理 不定積分 $F(z)$ に対して $F'(z) = f(z)$ となる。

証明

$$F(z) = \int_a^z f(z) dz \text{ に対して}$$

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(s) ds$$

であるから、

$$\left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(s) ds - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \{f(s) - f(z)\} ds \right|$$

である。 $f(z)$ は連続だから $|s - z| < \delta$ のとき $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ となるので、この時

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(s) ds - f(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} |f(s) - f(z)| ds \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} \varepsilon ds \right| = \varepsilon \end{aligned}$$

これより、定理は証明された □

前の定理の言い換え：

定理 領域 D で連続な函数 $f(z)$ の線積分の値が D 内の積分路に無関係に定まるならば、 $f(z)$ は D で原始函数をもつ。

上の定理+コーシーの定理より

定理 単連結な領域 D で正則な函数 $f(z)$ は D で原始函数をもつ。積分の値は原始函数の端点での値 $F(b) - F(a)$ で決まる (3 ページ目の定理)。

定理 原始函数は定数の違いを除いて一意である。

(証明) CR 方程式より微分して 0 なら定数だった。 $F'(z) = f(z)$, $G'(z) = f(z)$ とすると差 $F(z) - G(z)$ は微分すると 0 なので、定数になる。 □

例 $f(z) = z^2$ は原始函数 $F(z) = z^3/3$ を持つので

$$\int_0^{2+i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{2+i} = \frac{2+11i}{3}$$

例 D を複素平面から原点を抜いた領域とする (単連結ではない)。 D の上の正則函数 $f(z) = \frac{1}{z^2}$ は D で原始函数 $-\frac{1}{z}$ を持つので、 a, b を結ぶ曲線が原点を通らない限り線積分は計算できて

$$\int_a^b \frac{1}{z^2} dz = \left[-\frac{1}{z} \right]_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

特に、 C を原点と中心とする半径 $|a|$ の円にそった線積分なら $a = b$ と考えて

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \left[-\frac{1}{z} \right]_a^a = 0.$$

例 D を複素平面から原点を抜いた領域とする。

$f(z) = \frac{1}{z}$ を考えると、原始函数 $F(z) = \log z$ は D の上の一価正則函数ではない。**分枝のところで不連続になるから**である。そのため、不定積分を使って線積分を求めることは一般にできない。しかし、ここで

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$$

とすると、 E は单連結なので、 $-2i$ と $2i$ を結ぶ曲線 $C : z = 2e^{i\theta}$, $(-\pi/2 \leq z \leq \pi/2)$ について

$$\int_C \frac{dz}{z} = \left[\operatorname{Log} z \right]_{-2i}^{2i} = \operatorname{Log}(2i) - \operatorname{Log}(-2i) = \pi i.$$

1. 次の積分の値を求めよ

$$\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$$

2. $C : z = 2e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) のとき

$$I = \int_C \frac{z+2}{z} dz$$

を求めよ

8 コーシーの積分公式

コーシー・グルサの定理と並ぶ、複素解析の2大定理が積分定理である

コーシーの積分公式

$f(z)$ が領域 D で正則ならば、 D の点 a と a を正の向きに一周する D 内の閉曲線 C に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

ただし、 C に囲まれた内部の領域は D に含まれる

この定理のキモは、 $f(z)$ の $z = a$ での値は、 a を中心とする円の上で $f(z)$ の値で決まるということである。積分公式が正則函数に相当の制約を与えている。

例 $C : |z| = 2$, $f(z) = z/(9-z^2)$ とする。 $a = -i$ として、コーシーの積分公式を適用すると

$$\int_C \frac{f(z)}{(z+i)} dz = \int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \cdot \frac{-i}{9-(-i)^2} = \frac{\pi}{5}.$$

積分公式の証明

$f(z)$ は $z = a$ で連続だから、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$|z - a| < \delta \text{ のとき } |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

a を中心とする半径 ρ の小さい円 $C_0 : |z - a| = \rho$ を C_0 が D に含まれ、かつ $\rho < \delta$ とする。

コーシー・グルサの定理により

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) &= \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \int_{C_0} \frac{1}{z-a} dz \\ &= \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C_0} \frac{f(a)}{z-a} dz \\ &= \int_{C_0} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz. \end{aligned}$$

より両辺の絶対値を取り

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \right| &= \left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \\ &\leq \int_{C_0} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} |dz| \\ &\leq \int_{C_0} \frac{\varepsilon}{\rho} |dz| = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

ε は任意の正数だったので、それより小さいので

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

となる □

例

$C: |z| = 2$ とする。次の積分の値を求めよ

$$I_1 = \int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} dz, \quad I_2 = \int_C \frac{e^z}{z^2-1} dz$$

解 (1) $f(z) = \frac{z}{(9-z^2)}$ は C の内部と境界で正則なのでコーシーの積分公式から

$$I_1 = 2\pi i f(-i) = \frac{\pi}{5}$$

(2) $C_1: |z-1| = 1/3, C_2: |z+1| = 1/3$ とするとコーシーの積分定理より

$$\int_C \frac{e^z}{z^2-1} dz = \int_{C_1} \frac{e^z}{z^2-1} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{z^2-1} dz$$

となる。 $f_1(z) = \frac{e^z}{z+1}, f_2(z) = \frac{e^z}{z-1}$ とおくとコーシーの積分公式から

$$I_2 = 2\pi i f_1(1) + 2\pi i f_2(-1) = 2\pi i \left(\frac{e}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \right) = \mathbf{2\pi i \sinh 1}.$$

定理

$f(z)$ が領域 D で正則ならば、 $f'(z)$ も正則である。したがって $f(z)$ は何回でも微分可能になる。

証明 まず、次の式を示す：

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds$$

$f'(z)$ を定義に従って求めるが、コーシーの積分公式から

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \left(\int_C \frac{f(s)}{s-z-h} ds - \int_C \frac{f(s)}{s-z} ds \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{s-z-h} - \frac{1}{s-z} \right) \frac{f(s)}{h} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)} ds \end{aligned}$$

ここで、 $h \rightarrow 0$ とすると形式的には正しいが、厳密に示そう。

$$\int_C \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)} ds - \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds = h \int_C \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)^2} ds$$

である。積分定理より、 C は z を中心とする半径 d の円と考えてもよい。 h は十分小さいとしてよいので、 $|h| < d$ とすると $|s-z| = d$ であり、

$$|s-z-h| \geq ||s-z| - |h|| = d - |h| > 0$$

となる。 $|f(z)|$ の C での最大値を M とすると

$$\begin{aligned} \left| h \int_C \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)^2} ds \right| &\leq |h| \int_C \frac{|f(s)|}{|s-z-h||s-z|^2} |ds| \\ &\leq |h| \int_C \frac{M}{(d-|h|)d^2} |ds| \\ &= \frac{M|h|}{(d-|h|)d^2} \int_C |dz| = \frac{2\pi M|h|}{(d-|h|)d} \end{aligned}$$

より、 $h \rightarrow 0$ のとき最後の式も 0 に収束するので、示された。

2 階微分以上の場合も同様だが、評価が面倒になるので省略

コーシーの微積分公式

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

この公式は、 $f(z)$ の泰勒展開を求めるときなどに役立つ。

コーシーの積分公式を [形式的に微分して良い](#) という公式である

定理

正則函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ は何度でも偏微分でき、偏導函数は連続である。

証明 $f(z)$ が正則なので $f'(z)$ も正則である（微分可能）。したがって、

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

より、 u, v の全ての 1 階偏微分は連続である。同様に

$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = v_{yx} - iu_{yx} = -u_{yy} - iv_{yy}$$

となって、 u, v の全ての 2 階偏微分は連続である。以下、数学的帰納法。 \square

例

$C: |z| = 3$ とする。次の積分の値を求めよ

$$I = \int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3} dz$$

解 (1) $f(z) = e^{2z}$ は C の内部と境界で正則なのでコーシーの積分公式から

$$I = \frac{2\pi i}{2!} f''(2) = 4\pi i \cdot e^4$$

問題 次の積分の値を求めよ

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{z^4 + z^2 + 3z + 1}{(z-i)^3} dz$$

$$(2) \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(z-3)} dz$$

モレラの定理

函数 $f(z)$ が領域 D で連続とする。このとき

D 内の全てのジョルダン曲線 C に対して $\int_C f(z) dz = 0$

ならば、 $f(z)$ は領域 D で正則（コーシー・グルサの定理の逆）。

証明

D 内の二点 z_1, z_2 を結ぶ曲線に沿った線積分の値は、曲線によらず端点のみで決まるから、 $f(z)$ は原始函数 $F(z) = \int_a^z f(s) ds$ を持つ。 $F(z)$ は微分可能、すなわち正則なので、導函数 $f(z) = F'(z)$ もまた正則。 \square

よく使う公式：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

コーシーの積分公式で、 $C = a + re^{i\theta}$, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) において線積分の定義を用いると良い

8.1 問題

1. 次の積分の値を求めよ

$$\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$$

2. $C : z = 2e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) のとき

$$I = \int_C \frac{z+2}{z} dz$$

を求めよ

9 級数

9.1 テイラー展開

定理

$f(z)$ が a を中心とする半径 R の円 C の内部で正則とする。このとき C の内部で $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

の形のべき級数に展開できる。右辺のべき級数は $|z-a| < R$ で収束して、その極限は $f(z)$ に等しい。

右辺を $f(z)$ の $z=a$ における **テイラー級数** という。特に $a=0$ のときは **マクローリン級数** という。実函数のときと同じであるが、テイラー級数が必ず収束して $f(z)$ に等しくなる点が異なる (より便利である)。

$0 < r < R$ として、円 $C_1 : |z-a|=r$ とするとテイラー展開の係数は

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds \quad (n \geq 0)$$

証明 $a=0$ として証明すればよい。

$|z| < r < R$ となるように r をとり、円 $C_1 : |z|=r$ を考える。コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

において、分母を考えると $|s|=r > |z|$ であることに注意して展開すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-z/s} \\ &= \frac{1}{s} \left(1 + \frac{z}{s} + \left(\frac{z}{s}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z}{s}\right)^{N-1} + \frac{(z/s)^N}{1-(z/s)} \right) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} z + \frac{1}{s^3} z^2 + \cdots + \frac{1}{s^N} z^{N-1} + \frac{1}{(s-z)s^N} z^N \end{aligned}$$

この式を代入すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s} ds + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s^2} ds \right) z + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s^3} ds \right) z^2 \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s^N} ds \right) z^{N-1} + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z)s^N} ds \right) z^N \end{aligned}$$

微積分公式によって

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{f^{N-1}(0)}{(N-1)!} z^{N-1} + \rho_N(z)$$

となる。余り $\rho_N(z)$ は

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z)s^N} ds$$

であり、 $\rho_N(z) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) であることを示せばよい。

C_1 における $f(z)$ の最大値を M とおくと

$$\begin{aligned} |\rho_N(z)| &\leq \frac{|z|^N}{2\pi} \int_{C_1} \frac{|f(s)|}{|s-z||s|^N} |ds| \\ &\leq \frac{|z|^N}{2\pi} \int_{C_1} \frac{M}{(r-|z|)r^N} |ds| = \frac{Mr}{r-|z|} \left(\frac{|z|}{r}\right)^N \end{aligned}$$

$|z|/r < 1$ より 最後の式は 0 に収束する。よって $\rho_N(z) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$)。□

注意) テイラー展開は存在したら一意である

9.2 テイラー展開の例

$$\begin{aligned} \frac{1}{c-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{n+1}} z^n \quad (|z| < |c|, c \neq 0), & e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (|z| < \infty), \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < \infty), & \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (|z| < \infty), \\ \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < \infty), & \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (|z| < \infty), \\ \tan z &= z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \cdots \quad (|z| < \pi/2), & \frac{1}{\cos z} &= 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + \cdots \quad (|z| < \pi/2), \\ (1+z)^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} z^n \quad (|z| < 1), & \text{Log } (1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1), \\ \sin^{-1} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad (|z| < 1), & \tan^{-1} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

テイラー展開の応用例として、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

また、 $\cos i$ は実数である：

$$\cos i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} i^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$$

例

$$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2} \left(2 - \frac{1}{1+z}\right)$$

を原点の周りでべき級数に展開しよう、

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

より

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} (2 - (1 - z + z^2 - z^3 + \cdots)) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots \end{aligned}$$

となり、 $1/z$ などは $z=0$ に特異点を持っている（ローラン展開の例になっている）

9.3 ローラン展開

先ほどの例のように、正則でない点 a の周りではテイラー展開はできない。 $z - a$ の負べきまで合わせて展開することになる。

ローランの定理

$f(z)$ が円環 $D = \{z \mid r \leq |z - a| \leq R\}$ で正則ならば、 D の内部の点 z に対して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - a)^n}$$

と級数に展開される。とくに

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - a)^{-n+1}} dz. \end{aligned}$$

これを $f(z)$ の D における **ローラン級数** という。

また、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}$ を **ローラン展開の主要部** という。

注意)

・ $z = a$ が孤立した特異点のときは、 r をいくらでも小さく選べるので、級数展開は $0 < |z - a| < R$ で成り立つ

・ $f(z)$ が $|z - a| \leq R$ で正則 ($z = a$ でも正則) ならば、 $\frac{f(z)}{(z - a)^{-n+1}}$ は正則なので、コーシー・グルサの定理より $b_n = 0$ となって、テイラー展開に一致

・ コーシー・グルサの定理より、積分路は円環の中で $z = a$ を正の向きに一周する閉曲線 C ならなんでもよい、

ローラン級数は次の形でも与えられる：

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

・ ローラン展開はただ一通りに定まる。

9.4 ローラン展開の例

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots, \quad (0 < |z| < \infty)$$

$$e^{1/z} = \frac{1}{1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \cdots, \quad (0 < |z| < \infty)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-c} &= \frac{1}{z} + \frac{c}{z^2} + \frac{c^2}{z^3} + \cdots \quad (|z| > |c|), \\ \cot z &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots, \quad (0 < |z| < \pi) \\ \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z} + \frac{z}{6} - \frac{7z^3}{360} + \cdots \quad (0 < |z| < \pi)\end{aligned}$$

証明 $a = 0$ のときに示せば十分である
コーシーの積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

第1の積分においては、 $|s| = R > |z|$ よりテイラー展開の場合と同様に

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-z} &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-z/s} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}z + \frac{1}{s^3}z^2 + \cdots + \frac{1}{s^N}z^{N-1} + \frac{1}{(s-z)s^N}z^N\end{aligned}$$

第二の積分では $|s| = r < |z|$ なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-z} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-s/z} \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{s^{-1}} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{s^{-2}} \frac{1}{z^3} - \cdots - \frac{1}{s^{-N+1}} \frac{1}{z^N} - \frac{1}{z^N} \frac{s^N}{z-s}\end{aligned}$$

この式を代入すると

$$\begin{aligned}f(z) &= a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{N-1}z^{N-1} + \rho_N(z) \\ &\quad + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_N}{z^N} + \sigma_N(z)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{f(s)}{s^{-n+1}} ds \\ \rho_N(z) &= \frac{z^N}{2\pi i} \int_{|s|=R} \frac{f(s)}{(s-z)s^N} ds, \quad \sigma_N(z) = \frac{1}{2\pi i z^N} \int_{|s|=r} \frac{f(s)s^N}{z-s} ds,\end{aligned}$$

$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0$ となることはテイラーの定理とまったく同様に証明できる。
 $|z| = r$ 上の $|f(z)|$ の最大値を K とすると

$$\begin{aligned}|\sigma_N(z)| &\leq \frac{1}{2\pi |z|^N} \int_{|s|=r} \frac{|f(s)||s|^N}{|z-s|} |ds| \\ &\leq \frac{Kr}{|z|-r} \left(\frac{r}{|z|} \right)^N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

□

$f(z) = \frac{2}{z(z-1)(z-2)}$ を $z = 0$ を中心として各領域でローラン展開せよ

$$(1) \ 0 < |z| < 1 \quad (2) \ 1 < |z| < 2$$

まず $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-2}$ と部分分数展開される
(1) $|z| < 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} + \frac{2}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-(z/2)} \\ &= \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n \end{aligned}$$

(2) $|z/2| < 1, |1/z| < 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z} \frac{1}{1-(1/z)} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-(z/2)} \\ &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (1/z)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n = -2 \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} - \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n \end{aligned}$$

9.5 孤立特異点

$z = a$ が $f(z)$ の特異点とは、

(1) $f(z)$ は $z = a$ で正則ではない

(2) $z = a$ のどんな近傍にも $f(z)$ の正則点が存在する
の二条件が成り立つことである。

特に、 $z = a$ のある近傍で函数 $f(z)$ が a 以外の点で正則なら a を $f(z)$ の孤立特異点という。

例 $f(z) = 1/z$ は $z = 0$ を孤立特異点にもつ。

例 次の函数は 3 点 $z = 0, \pm i$ を孤立特異点にもつ：

$$\frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

例

$$\frac{1}{\sin(\pi/z)}$$

は、 $z = 0, \pm 1/1, \pm 1/2, \dots$ を特異点を持つ。

$z = \pm 1/1, \pm 1/2, \dots$ は孤立特異点、 $z = 0$ は孤立しない特異点。

9.6 孤立特異点とローラン展開

点 z_0 が $f(z)$ の孤立特異点とすると、 $f(z)$ が $0 < |z - z_0| < R$ で正則になるような $R > 0$ が必ず存在する。したがってローラン級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots$$

が取れて

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ここで、 C は z_0 を正の向きに一周するジョルダン閉曲線。

$f(z)$ の点 a でのローラン級数のうち、負べきの部分を **主要部** という。

主要部の形で特異点は 3 つのタイプに分かれる

(1) 極 a が $f(z)$ の孤立特異点で、 $f(z)$ の点 a でのローラン展開が

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \cdots + \frac{c_{-p}}{(z - a)^p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

と主要部が有限項で切れるとき、 $z = a$ を $f(z)$ の **位数 p の極** という

(2) 真性特異点 a が $f(z)$ の孤立特異点で、 $f(z)$ の点 a でのローラン展開が有限で切れないとき、 $z = a$ を $f(z)$ の **真性特異点** という。

(3) 除去可能な特異点 $f(z)$ の a の周りでのローラン展開が、実は負べきを持たなかった場合を **除去可能な特異点** という。これは、 $f(a)$ の値を定義しなおすと正則になるので、本質的には特異点ではない。

例

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = z + \frac{3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2}$$

より $z = 2$ は位数 1 の極。 $R(2) = 3$, 主要部は $3/(z - 2)$.

例 $\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z + \frac{1}{7!} z^3 + \cdots$

より $z = 0$ は位数 3 の極。 $R(0) = 1/6$, 主要部は $1/z^3 + 1/(6z)$.

例 $e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < \infty)$

より $z = 0$ は真性特異点。 $R(0) = 1$, 主要部は \sum の部分全部。

例 $f(z) = (e^z - 1)/z$ は $z = 0$ では見かけ上は定義されないが

$$\begin{aligned} \frac{e^z - 1}{z} &= \frac{1}{z} \left[\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) - 1 \right] \\ &= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty) \end{aligned}$$

となるので、除去可能な特異点である。

$f(0) = 1$ と定義すれば、全平面で正則な函数になる。

10 留数と極

10.1 孤立特異点

$z = a$ が $f(z)$ の **特異点** とは、

(1) $f(z)$ は $z = a$ で正則ではない

(2) $z = a$ のどんな近傍にも $f(z)$ の正則点が存在する
の二条件が成り立つことである。

$z = a$ が **孤立特異点**：ある近傍で函数 $f(z)$ が a 以外の点で正則

ローラン級数の $1/(z - z_0)$ の係数を $f(z)$ の $z = z_0$ での留数と呼び、 $\text{Res}(f(z); a)$ 、もしくは単に $\text{Res}(a)$, $R(a)$ などと表す。

C が $x = a$ を正の向きに一周する小さい円とすると

$$\text{Res}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

となり、留数が積分計算で重要な働きをする。

10.2 特異点の3つのタイプ

$f(z)$ の点 a でのローラン級数のうち、負べきの部分を主要部という。主要部の形で特異点は3つのタイプに分かれる

(1) 極 a が $f(z)$ の孤立特異点で、 $f(z)$ の点 a でのローラン展開が

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

と主要部が有限項で切れるとき、 $z = a$ を $f(z)$ の位数 p の極という

(2) 真性特異点 a が $f(z)$ の孤立特異点で、 $f(z)$ の点 a でのローラン展開が有限で切れないとき、 $z = a$ を $f(z)$ の真性特異点という。

(3) 除去可能な特異点 $f(z)$ の a の周りでのローラン展開が、実は負べきを持たなかった場合を除去可能な特異点といいう。これは、 $f(a)$ の値を定義しなおすと正則になるので、本質的には特異点ではない。

例 函数

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$$

を円 $C : |z| = 2$ に沿って積分しよう。 $f(z)$ の孤立特異点 $z = 1$ を除いて、 $f(z)$ は C の内部で正則であるから、

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i b_1.$$

$f(z)$ を $z = 1$ の周りでローラン展開しよう

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\mathbf{e}^{-1} \mathbf{e}^{-(z-1)}}{(z-1)^2} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2!} - \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{3!} (z-1) + \cdots \end{aligned}$$

より、留数は $b_1 = -1/e$. したがって

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = -\frac{2\pi i}{e}$$

例 積分

$$\int_{|z|=2} e^{1/z} dz$$

$z = 0$ が孤立特異点であることは明らかである。ローラン級数は

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots$$

より、留数は $b_1 = 1$. したがって $\int_{|z|=2} e^{1/z} dz = 2\pi i$.

例 積分

$$\int_{|z|=2} e^{1/z^2} dz$$

$z = 0$ が孤立特異点であることは前と同じ。ローラン級数は

$$e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z^2)^n}{n!} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^6} + \dots$$

より、留数は $b_1 = 0$. したがって $\int_{|z|=2} e^{1/z^2} dz = 0$.

これは、孤立特異点を持つが、積分の値は 0 になる例になっている。

10.3 留数定理

ジョルダン曲線の中に有限個の孤立特異点を持つ場合を考える（無限にあれば孤立しない）。

留数定理

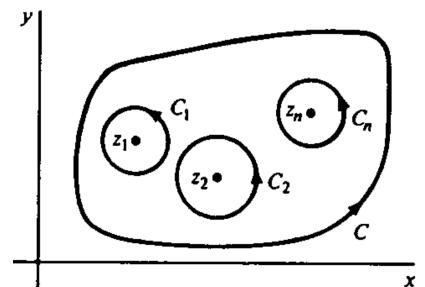
函数 $f(z)$ が閉曲線 C に囲まれた内部に孤立特異点 z_1, z_2, \dots, z_n をもつとき

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n R(z_j).$$

証明

特異点 z_1, z_2, \dots, z_n の周りに小さい円 C_1, C_2, \dots, C_n をお互いに、また C とも交じらないように正の向きにとる。

コーシー・グルサの定理により、



$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz$$

ここで、

$$\int_{C_j} f(z) dz = 2\pi i R(z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

より、留数定理は示された。 \square

10.4 無限遠での留数

定義 $f(z)$ が $R < |z| < +\infty$ で正則なとき、

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz \quad (R < r < +\infty)$$

を $f(z)$ の ∞ における留数といい、 $\text{Res}(\infty; f)$, $\text{Res}_f(\infty)$ または $\text{Res}(\infty)$ で表す。

命題 (無限遠でのローラン展開と留数) $f(z)$ の ∞ のまわりのローラン展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

とすると

$$\text{Res}(\infty; f) = -c_{-1}.$$

10.5 外部領域の留数定理

C は領域 D 内の単純閉曲線で, C の外部 (∞ は除く) は D の点のみより成るものとする. $f(z)$ が C の外部にある有限個の点 b_1, \dots, b_m を除いて D で正則なとき,

$$\int_{-C} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^m \text{Res}(b_j; f) + \text{Res}(\infty; f) \right).$$

ここに, 積分路 $-C$ は C を負の向きに一周する曲線を表す.

証明

C_R は円 $|z| = R$ で半径 R を十分大きくとって, 点 b_1, \dots, b_m がすべてその内部にあるものとし, 各 b_j を中心とする十分小さい半径の円 C_j をとする.

このときコーシーの積分定理より

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \cdots + \int_{C_m} f(z) dz + \int_C f(z) dz \\ &= 2\pi i \text{Res}(b_1; f) + \cdots + 2\pi i \text{Res}(b_m; f) - \int_{-C} f(z) dz \\ &= -2\pi i \text{Res}(\infty; f) \end{aligned}$$

より定理を得る □

例 正の向きをもつ円 $C : |z| = 2$ に対して

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$$

を求める。

C の内部の孤立特異点は $z = 0, 1$ である。 $R(0), R(1)$ を求める。

$z = 0$ の周りのローラン展開

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \frac{5z-2}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(5 - \frac{2}{z} \right) (-1 - z - z^2 - \cdots) \\ &= \frac{2}{z} - 3 - 3z - \cdots \end{aligned}$$

より $R(0) = 2$. $z = 1$ の周りのローラン展開

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \frac{5z-2}{z-1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{5(z-1)+3}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \left(5 + \frac{3}{z-1} \right) (1 - (z-1) + (z-1)^2 - \cdots) \\ &= \frac{3}{z-1} + 2 - 2(z-1) + 2(z-1)^2 - \cdots \end{aligned}$$

より $R(1) = 3$. 以上により留数定理によって

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i (R(0) + R(1)) = \mathbf{10}\pi i.$$

別解 部分分数分解のほうが速い：

$$\begin{aligned} \int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz &= \int_C \left(\frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} \right) dz \\ &= 2 \int_C \frac{dz}{z} + 3 \int_C \frac{dz}{z-1} = 2 \cdot 2\pi i + 3 \cdot 2\pi i = \mathbf{10}\pi i. \end{aligned}$$

留数の計算

a が $f(z)$ の孤立特異点のとき、留数 $R(a)$ をどう計算するか

(1) C を a の周りを正の向きに回るジョルダン曲線とすれば

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathbf{f}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

(2) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ とローラン展開すれば、 $R(a) = c_{-1}$.

真性特異点の場合は、(1)(2) のような方法くらいしかない

(3) a が $f(z)$ の位数 1 の極ならば

$$f(z) = \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

なので

$$(z-a)f(z) = b_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+1}$$

ここで、極限をとって

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{a}} [(\mathbf{z} - \mathbf{a})\mathbf{f}(\mathbf{z})]$$

(4) a が $f(z)$ の位数 p の極ならば

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

両辺に $(z-a)^p$ をかけて

$$(z-a)^p f(z) = c_{-1}(z-a)^{p-1} + c_{-2}(z-a)^{p-2} + \cdots + c_{-p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+p}$$

なので、 c_{-1} を取り出すには両辺を $p-1$ 回微分して $z=a$ とおけばよい：

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{d^{p-1}}{d\mathbf{z}^{p-1}} [(\mathbf{z} - \mathbf{a})^p \mathbf{f}(\mathbf{z})]$$

(5) 分数函数 $f(z), g(z)$ が a で正則、 $g(a) = 0, g'(a) \neq 0$ ならば

$$\text{Res} \left(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{z})}{\mathbf{g}(\mathbf{z})}, \mathbf{a} \right) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a})}{\mathbf{g}'(\mathbf{a})}$$

証明 $g(z) = (z - a)r(z), r(a) = g'(a) \neq 0$ とかけるので、(3) より

$$R(a) = \lim_{z \rightarrow a} [(z - a) \frac{f(z)}{g(z)}] = \lim_{z \rightarrow a} [\frac{f(z)}{r(z)}] = \frac{f(a)}{r(a)} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

例 $f(z) = \frac{5z - 2}{z(z - 1)}$

特異点は $z = 0, 1$ で、ともに 1 位の極だから

$$R(0) = \left[zf(z) \right]_{z=0} = \left[\frac{5z - 2}{(z - 1)} \right]_{z=0} = \mathbf{2},$$

$$R(1) = \left[(z - 1)f(z) \right]_{z=1} = \left[\frac{5z - 2}{z} \right]_{z=1} = \mathbf{3}.$$

例 $f(z) = \frac{\tan(z/2)}{(z - a)^2} \quad (|a| < 2)$

$z = a$ は 2 位の極だから

$$\begin{aligned} R(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} [(z - a)^2 f(z)] = \left[\left(\tan \frac{z}{2} \right)' \right]_{z=a} \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(z/2)} \right]_{z=a} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(a/2)} \end{aligned}$$

例 $f(z) = \frac{\cosh z}{z^4}$

$z = 0$ は 4 位の極だから

$$\begin{aligned} R(a) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} [z^4 f(z)] = \frac{1}{6} \left[\frac{d^3}{dz^3} (\cosh z) \right]_{z=0} \\ &= \frac{1}{6} \left[\sinh z \right]_{z=0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

例 $\frac{\sinh z}{z^3}$ の場合、 $z = 0$ が 3 位の極に見えるが

$$\frac{\sinh z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \dots$$

となり、実は 2 位の極で $R(0) = 0$ までわかつてしまう。一応、やることにすると

$$\begin{aligned} [z^2 f(z)]' &= \left(\frac{\sinh z}{z} \right)' = \frac{z \cosh z - \sinh z}{z^2} \\ &= \frac{1}{z^2} \left[z \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) - \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) z + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

より $R(0) = \lim_{z \rightarrow 0} [z^2 f(z)]' = 0$.

例 $f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$

$z = \pm 3i$ に 1 位の極がありそうである。

$$f(z) = z + 1, \quad g(z) = z^2 + 9$$

とおくと $g'(z) = 2z$ であり、 $g'(\pm 3i) = \pm 6i \neq 0$
したがって、複号同順で

$$R(\pm 3i) = \left[\frac{f(z)}{g'(z)} \right]_{z=\pm 3i} = \frac{\pm 3i + 1}{\pm 6i} = \frac{\mathbf{3} \mp \mathbf{i}}{\mathbf{6}}$$

例 $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ は、 $z = n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ に 1 位の極を持つので $f(z) = \cos z, g(z) = \sin z$ とおいて

$$R(n\pi) = \left[\frac{f(z)}{g'(z)} \right]_{z=n\pi} = \left[\frac{\cos z}{\cos z} \right]_{z=n\pi} = \left[1 \right]_{z=n\pi} = \mathbf{1}.$$

例 $f(z) = \frac{z}{z^4+4}$ は、 $z = (-4)^{1/4} = \pm 1 \pm i$ に 1 位の極を持つ。
 $f(z) = z, g(z) = z^4 + 4$ とおいて

$$R(1+i) = \left[\frac{f(z)}{g'(z)} \right]_{z=1+i} = \left[\frac{z}{4z^3} \right]_{z=1+i} = \left[\frac{1}{4z^2} \right]_{z=1+i} = -\frac{\mathbf{i}}{8}.$$

10.6 問題

1. $z = -3$ のまわりで $1/z$ を泰イラー展開せよ。この級数を項別微分して $1/z^2$ の泰イラー展開をもとめよ

2. $0 < |z| < \pi$ での展開

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \dots$$

を用いて、 C を単位円 $|z| = 1$ を正の向きに回る円として

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \sinh z} = -\frac{\pi i}{3}$$

を示せ

11 定積分

11.1 実函数の定積分

留数定理を使って、実函数の定積分が求まることが多い
すなわち実函数 $f(x)$ を複素函数 $f(z)$ の $z = x + i0$ での積分と考える。

復習：広義積分

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 f(x) dx + \lim_{r' \rightarrow \infty} \int_0^{r'} f(x) dx$$

$f(x)$ が偶函数の場合 $[f(-x) = f(x)]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$$

以下で扱う積分は次の形である。 $R(x)$ は有理函数

$$(I) \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$$

$$(II) \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx \quad (\lambda > 0)$$

$$(III) \int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx, \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$(IV) \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

実軸の上に特異点がある場合は、別に考える必要がある。

微積分で扱った積分の多くは、上の形をしていた。指数函数の場合も同じように扱える ($e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$ に注意)

例 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi$

解答 実積分で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = [\tan^{-1} x]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

と求まる。

複素積分では、実軸上の積分 $[-r, r]$ と原点を中心とする半径 r の上半円 C_r を結ぶジョルダン曲線 C 上の積分を考える。

$r > 1$ なら $f(z) = 1/(z^2 + 1)$ は C の中で $z = i$ にのみ極を持つので、留数定理により

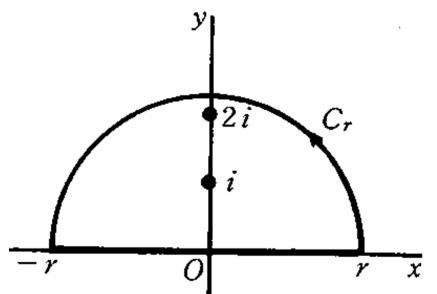
$$\int_C f(z) dz = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz = 2\pi i R(i)$$

留数は

$$R(i) = \left[\frac{1}{(z^2 + 1)'} \right]_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

なので、 $2\pi i R(i) = \pi$. したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \pi - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) dz$$



前ページ、最後の極限が 0 となることを示す

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \int_{C_r} \frac{1}{|z^2 + 1|} |dz|$$

なので $|z^2 + 1|$ を下から押さえる必要がある。 $|z| = r$ より $r > 1$ とすれば

$$|z^2 + 1| \geq ||z^2| - 1| = r^2 - 1$$

したがって、

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{r^2 - 1} \int_{C_r} |dz| = \frac{\pi r}{r^2 - 1} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

よって、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) dz = 0$$

なので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi.$$

留数定理を用いた積分計算では、ある曲線 C_r 上の積分が $r \rightarrow \infty$ のときに 0 になるかどうかが問題になる。いくつかのパターンを覚えよう。

例 次の、実の無限積分の値を求めよ：

$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

解 被積分函数は偶函数だから、 $-\infty$ から ∞ への積分を求めて 2 で割る。

$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$ より、上半平面 $\text{Im } z > 0$ にある極は $i, 2i$ 。前の問題同じジョルダン曲線を考える。 $r > 2$ なら、極を内部に含むので

$$\int_{-r}^r f(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz = 2\pi i [R(i) + R(2i)]$$

(1) C_r での積分を上から押さえ、(2) $R(i), R(2i)$ を求めればよい。

(1) $|z| = r (> 2)$ では、

$$\text{分子 } |2z^2 - 1| \leq 2|z|^2 + 1 = 2r^2 + 1.$$

$$\text{分母 } |(z^2 + 1)(z^2 + 4)| \geq ||z^2| - 1| \cdot ||z^2| - 4| = (r^2 - 1)(r^2 - 4)$$

なので、 C_r での積分を上から押さえると

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \frac{2r^2 + 1}{(r^2 - 1)(r^2 - 4)} \int_{C_r} |dz| = \frac{(2r^2 + 1)\pi r}{(r^2 - 1)(r^2 - 4)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

留数は

$$R(i) = \left[\frac{2z^2 - 1}{(x^4 + 5x^2 + 4)'} \right]_{z=i} = -\frac{1}{2i}$$

$$R(2i) = \left[\frac{2z^2 - 1}{(x^4 + 5x^2 + 4)'} \right]_{z=2i} = \frac{3}{4i}$$

なので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = 2\pi i [R(i) + R(2i)] = 2\pi i \left(-\frac{1}{2i} + \frac{3}{4i} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

求める答えは、これを 2 で割った $\pi/4$ 。途中の計算には i が出てくるが、実の積分なので、答えは実数になる（そうでなければ計算間違い）。

有理函数の積分 $R(x) = P(x)/Q(x)$, $P(x), Q(x)$ はそれぞれ n, m 次の多項式で $m \geq n + 2$ とする。 $Q(z) = 0$ は実根を持たないと仮定して、 $Q(z) = 0$ の上半平面にある根を a_1, \dots, a_p とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}(R(z); a_k).$$

例 次の式を示す

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{6}$$

被積分函数は偶函数だから、 $-\infty$ から ∞ への積分を求めて 2 で割る。

被積分函数の分子は 2 次式、分母は 4 次式なので、これまでと同様にして

$$\int_{C_r} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty).$$

となり、分母の零点は $i, 2i$ である。 $R(i), R(2i)$ は演習として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = 2\pi i [R(i) + R(2i)] = 2\pi i \left(-\frac{1}{6i} + \frac{1}{3i} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

より、これを 2 で割ればよい。

11.2 三角函数を含む場合

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx \quad (\lambda > 0)$$

$R(x) = P(x)/Q(x)$, $P(x), Q(x)$ はそれぞれ n, m 次の多項式で $m \geq n + 1$ とする。 $Q(z) = 0$ は実根を持たないと仮定して、上半平面にある根を a_1, \dots, a_p とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}(R(z) e^{i\lambda z}; a_k)$$

この両辺の実部と虚部を比べて

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx &= \operatorname{Im} \left[2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}(R(z) e^{i\lambda z}; a_k) \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx &= \operatorname{Re} \left[2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}(R(z) e^{i\lambda z}; a_k) \right] \end{aligned}$$

例 次の式を示す

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

被積分函数は $f(x) = \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2}$ の実部であり、特異点は $z = \pm i$. 留数定理により $r > 1$ ならば

$$\int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i R(i) - \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz$$

となる。 C_r での積分は

$$|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = r^2 - 1,$$

$$|e^{iz}| = e^{-y} |e^{ix}| = e^{-y} \leq 1 \quad (y \geq 0 \text{ より})$$

より

$$\left| \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \leq \int_{C_r} \left| \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} \right| |dz| \leq \frac{1}{(r^2 - 1)^2} \pi r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty).$$

i は 2 位の極なので、留数は

$$R(i) = \left[\left((z - i)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} \right)' \right]_{z=i} = -\frac{i}{2e}$$

したがって、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i R(i) = \frac{\pi}{e}$$

となり、両辺の実部をとればよい（虚部は奇函数だから 0）

三角函数がついてる場合、分母の次数が分子の次数より 1 大きければよい

ジョルダンの不等式 $r > 0$ のとき

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2r}, \quad \int_0^{\pi} e^{-r \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{r}$$

証明 最初の不等式を示せば、後者は置換積分よりしたがう：

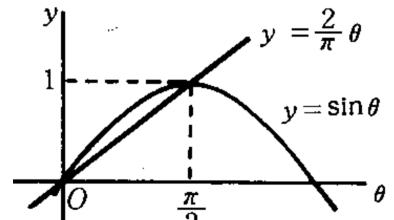
$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-r \sin \theta} d\theta = \int_{\pi/2}^0 e^{-r \sin(\pi-\theta)} d(-\theta) = \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta} d\theta$$

$0 \leq \theta \leq \pi/2$ のとき $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ より

$$-r \sin \theta \leq -\frac{2r}{\pi} \theta$$

よって

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-(2r/\pi)\theta} d\theta = \frac{\pi}{2r} (1 - e^{-r}) < \frac{\pi}{2r}$$



ジョルダンの不等式が有効な例

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$$

$f(x) = \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1}$ の虚部を取る。 $f(z)$ は $\pm i$ で極をもつので、 $r > 1$ ならば

$$\int_{-r}^r \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i R(i) - \int_{C_r} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz$$

となる。留数を求める

$$R(i) = \left[\frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)'} \right]_{z=i} = \left[\frac{ze^{iz}}{2z} \right]_{z=i} = \frac{1}{2e}$$

被積分函数を C_r 上で上から押さえる。

$$\left| \frac{z}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{|z|}{|z|^2 - 1} = \frac{r}{r^2 - 1}$$

C_r 上では $z = re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$ より

$$|e^{iz}| = |e^{-r \sin \theta}| |e^{ir \cos \theta}| = e^{-r \sin \theta}$$

なので

$$\left| \int_{C_r} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \int_{C_r} \left| \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} \right| |dz| \leq \int_{C_r} \frac{r}{r^2 - 1} e^{-r \sin \theta} |dz|$$

ここで $|dz| = |z'(\theta)|d\theta = |re^{i\theta}|d\theta = r d\theta$ より

$$\cdots = \frac{r}{r^2 - 1} \int_0^\pi e^{-r \sin \theta} r d\theta \leq \frac{r^2}{r^2 - 1} \frac{\pi}{r} = \frac{\pi r}{r^2 - 1}$$

したがって

$$\left| \int_{C_r} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{\pi r}{r^2 - 1} \rightarrow 0.$$

以上により

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Im} [2\pi i R(i)] = \frac{\pi}{e}$$

例 次の等式を示す

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\pi}{e} (\sin 1 + \cos 1)$$

$f(x) = \frac{xe^{ix}}{x^2 + 2x + 2}$ とおき、その実部を考える。

上半平面の極は $-1 + i$ で、一位の極だから

$$\begin{aligned} R(-1 + i) &= \left[\frac{ze^{iz}}{(z^2 + 2z + 2)'} \right]_{z=-1+i} \\ &= \frac{(-1 + i)e^{-i}}{2ei} = \frac{(\sin 1 - \cos 1) + i(\sin 1 + \cos 1)}{2ei} \end{aligned}$$

したがって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \operatorname{Im} [2\pi i R((-1 + i))] = \frac{\pi(\sin 1 + \cos 1)}{e}$$

注 実部を取れば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 2x + 2} dx = \operatorname{Re} [2\pi i R((-1 + i))] = \frac{\pi(\sin 1 - \cos 1)}{e}$$

極が実軸上にある場合 I この例はそのまま覚えておく！

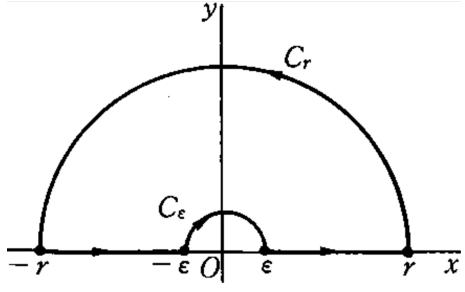
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$f(z) = e^{iz}/z$ として虚部を取る。右の図でコーシー・グルサの定理より

$$\left(\int_{\varepsilon}^r + \int_{-r}^{-\varepsilon} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = - \left(\int_{C_r} + \int_{C_\varepsilon} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz$$

左辺は、置換積分 $z = -w$ で

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_r^{\varepsilon} \frac{e^{-iw}}{-w} d(-w) = - \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{-iw}}{w} dw$$



となるので

$$\left(\int_{\varepsilon}^r + \int_{-r}^{-\varepsilon} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} dz = 2i \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin z}{z} dz$$

右辺は外と中の円で違う計算を行う：

$r \rightarrow \infty$ の極限

$$\left| \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_{C_r} \frac{|e^{ir(\cos \theta + i \sin \theta)}|}{|z|} |dz| = \int_0^\pi \frac{e^{-r \sin \theta}}{r} r d\theta \leq \frac{\pi}{r} \rightarrow 0$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{e^{i\varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta)}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi e^{i\varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta \rightarrow -i \int_0^\pi d\theta = -i\pi$$

したがって $r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ の極限では

$$\lim_{r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} 2i \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin z}{z} dz = 0 + \pi i$$

なので

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

□

11.3 問題

1. $z = 0$ における留数を求めよ

$$(1) \frac{1}{z+z^2} \quad (2) z \cos \frac{1}{z}$$

2. 正の方向を持つ円 $C : |z| = 2$ に対して、次の積分を求めよ

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+1)}$$

解答例

1(1)

$$R(0) = \left[\frac{1}{(z+z^2)'} \right]_{z=0} = \left[\frac{1}{1+2z} \right]_{z=0} = \mathbf{1}$$

$$(2) \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ より}$$

$$z \cos \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)! z^{2n-1}} = z - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \cdots$$

より留数は $-\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{z^3(z+1)}$ の $|z| < 2$ での特異点は $z = 0, -1$ のみ $R(0) = 1, R(-1) = -1$ より

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+1)} = 2\pi i(R(0) + R(-1)) = \mathbf{0}.$$

11.4 極が実軸上にある場合 II

回転対称性のある場合

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

解 被積分函数は $z = -1$ に極を持つが、 $z \rightarrow e^{2i\pi/3}z$ という $1/3$ -回転で対称である。そこで積分路を右図のように取ると、 $r > 1$ のとき

$$\int_0^r \frac{dx}{x^3 + 1} + \int_{C_r} \frac{dz}{z^3 + 1} + \int_{re^{2i\pi/3}}^0 \frac{dz}{z^3 + 1} = 2\pi i R(e^{i\pi/3})$$

まず、円弧 C_r での積分：

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{dz}{z^3 + 1} \right| &= \left| \int_0^{2\pi/3} \frac{ire^{i\theta}}{(re^{i\theta})^3 + 1} d\theta \right| \quad (z = re^{i\theta}) \\ &\leq \int_0^{2\pi/3} \frac{r}{r^3 - 1} d\theta = \frac{2\pi r}{3(r^3 - 1)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

また、回転対称性から

$$\begin{aligned} \int_{re^{2i\pi/3}}^0 \frac{dz}{z^3 + 1} &= \int_r^0 \frac{e^{2i\pi/3}}{(se^{2i\pi/3})^3 + 1} ds \quad (z = se^{2i\pi/3}) \\ &= -e^{2i\pi/3} \int_0^r \frac{ds}{s^3 + 1} \end{aligned}$$

留数は $z = e^{i\pi/3}$ が一位の極だから

$$R(e^{i\pi/3}) = \left[\frac{1}{(z^3 + 1)'} \right]_{z=e^{i\pi/3}} = \frac{e^{-2i\pi/3}}{3}$$

以上によって、積分公式の極限では

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} + 0 - e^{2i\pi/3} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3 + 1} = 2\pi i \frac{e^{-2i\pi/3}}{3}$$

したがって

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{1 - e^{2i\pi/3}} \cdot 2\pi i \frac{e^{-2i\pi/3}}{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$(e^{2i\pi/3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ などに注意)

□

多価函数の積分 $\int_0^\infty x^\alpha R(x) dx, \quad 0 < \alpha < 1, R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$P(x), Q(x)$ はそれぞれ n, m 次の多項式で $m \geq n + 1$ とする。 $z = 0$ で $R(x)$ は正則かたかだか一位の極をもつ。 $Q(z) = 0$ は正の実根を持たず、全平面で $z = 0$ 以外の根を a_1, \dots, a_p とすると

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}(z^\alpha R(z); a_k)$$

例 $\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1)$

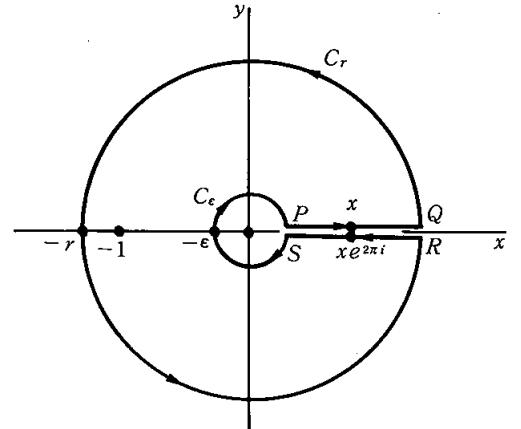
$x = -1$ に極があり、減点で多価函数なので、積分路は右の図のようにとる。 ε は十分小さく r は十分大きい。 $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ に注意する

留数定理により

$$\left[\int_{PQ} + \int_{C_r} + \int_{RS} + \int_{C_\varepsilon} \right] \frac{z^{-a}}{z+1} dz = 2\pi i R(e^{\pi i})$$

$-1 = e^{\pi i}$ であるが、間違いややすいので $e^{\pi i}$ を使う

$$R(e^{\pi i}) = \left[\frac{z^{-a}}{(z+1)'} \right]_{z=e^{\pi i}} = (e^{\pi i})^{-a} = e^{-\pi ai}$$



円弧での積分は $r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ の極限を見る

$$\left| \int_{C_r} \frac{z^{-a}}{z+1} dz \right| \leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{(re^{i\theta})^{-a}}{re^{i\theta}+1} rie^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{r^{-a}}{r-1} rd\theta = \frac{2\pi r^{1-a}}{r-1} \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{-a}}{z+1} dz \right| \leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{-a}}{\varepsilon e^{i\theta}+1} \varepsilon ie^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^{-a}}{1-\varepsilon} \varepsilon d\theta = \frac{2\pi \varepsilon^{1-a}}{1-\varepsilon} \rightarrow 0$$

RS 上では $\arg z = 2\pi$ であることの多価性に注意

$$\int_{RS} \frac{z^{-a}}{z+1} dz = - \int_\varepsilon^r \frac{x^{-a} e^{-2\pi ai}}{x+1} dx = -e^{-2\pi ai} \int_\varepsilon^r \frac{x^{-a}}{x+1} dx = -e^{-2\pi ai} \int_{PQ} \frac{z^{-a}}{z+1} dz$$

以上合わせて $r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ のとき

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx + 0 - e^{-2\pi ai} \int_\varepsilon^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx + 0 = 2\pi i e^{-\pi ai}$$

より

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{2\pi i e^{-\pi ai}}{1 - e^{-2\pi ai}} = \pi \frac{2i}{e^{\pi ai} - e^{-\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

三角函数の積分

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

$R(\cos \theta, \sin \theta)$ を $\cos \theta, \sin \theta$ の有理函数とする。単位円 C 上の点 z に対して $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq z \leq 2\pi$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, $\cos \theta = (z + z^{-1})/2$, $\sin \theta = (z - z^{-1})/(2i)$ より

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_C R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz.$$

特に、 $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ の単位円内 $|z| < 1$ に含まれる特異点を a_1, a_2, \dots, a_n とすると

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z); a_k).$$

例 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ ($-1 < a < 1$)

C を単位円 $|z| = 1$ として、

$$z = e^{i\theta} (0 \leq z \leq 2\pi)$$

とおくと、 $\sin \theta = (z - z^{-1})/(2i)$, $dz = iz d\theta$ より

$$I = \int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1} dz$$

分母の零点 z_1, z_2 は $z_1 \cdot z_2 = -1$ より一方が単位円の内部、他方は外部。

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a} i$$

であり、マイナス符号の方を z_2 とすると

$$|z_2| = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{|a|} > \frac{1}{|a|} > 1$$

だから、プラス符号のほうが単位円の内部で、 C 上には極はない。よって

$$I = 2\pi i R(z_1) = 2\pi i \left[\frac{2/a}{(z^2 + (2i/a)z - 1)'} \right]_{z=z_1} 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

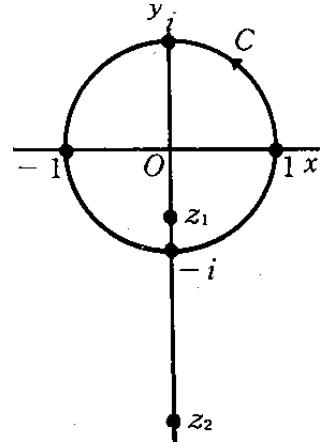
11.5 問題

1. $z = 0$ における留数を求めよ

$$(1) \frac{1}{z + z^2} \quad (2) z \cos \frac{1}{z}$$

2. 正の方向を持つ円 $C : |z| = 2$ に対して、次の積分を求めよ

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z + 4)}$$



12 偏角の原理

定理 (偏角の原理) $f(z)$ は領域 D で有理形 (極しか持たない),
 C は D 内の単純閉曲線で, C の内部は D の点のみより成り,
 C 上には $f(z)$ の零点も極もないとする.
 C の内部にある $f(z)$ の零点と極の個数を, その位数だけ重複して数えて,
それぞれ N および P とすると,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

12.1 偏角の原理の証明

$F(z) = f'(z)/f(z)$ とおく。 $F(z)$ の特異点は $f(z)$ の零点または極に限る。 C 上では $F(z)$ は正則

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{「}C\text{ の内部にある }F(z)\text{ のすべての特異点についての留数の和」}$$

$z = a$ が $f(z)$ の k 位の零点のときは,

$$f(z) = (z - a)^k g(z) \quad (g(z) : a \text{ で正則}, g(a) \neq 0)$$

と表せるから

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - a)^{k-1}g(z) + (z - a)^k g'(z)}{(z - a)^k g(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

g'/g は $z = a$ で正則だから, a は $F(z)$ の 1 位の極で, その留数は k である.

また, $z = b$ が $f(z)$ の l 位の極のときは,

$$f(z) = (z - b)^{-l} g(z) \quad (h(z) : b \text{ で正則}, h(b) \neq 0)$$

と表せ, 上と全く同じ計算で, b は $F(z)$ の 1 位の極で, その留数は $-l$ となる.
以上より, 定理が直ちに導かれる. □

12.2 偏角の原理の名前の由来

$\log f(z) = \text{Log}|f(z)| + i \arg f(z)$ は一般には多価である。 $f(z)$ が 1 値とすると,
その多価性は $\arg f(z)$ に 2π の整数倍の付加定数として現れるに過ぎない.
したがって, その微分

$$\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz = d \log f(z) = d \text{Log}|f(z)| + i d \arg f(z)$$

は必ず 1 値であって, 偏角の原理の左辺は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \text{Log}|f(z)| + \frac{1}{2\pi} \int_C d \arg f(z)$$

となる. この右辺の第 1 項および第 2 項は, C を 1 周したときの, $\text{Log}|f(z)|$ および $\arg f(z)$ の値の変化に等しい.

しかるに, $\text{Log}|f(z)|$ は 1 値なので第 1 項は 0 に等しく, $\arg f(z)$ の変化は 2π の整数倍であるから 第 2 項は整数 となる.

$w = f(z)$ とおくと, z が C 上を動くとき, w は w 平面の 0 を通らない (单一とは限らない) 閉曲線 Γ をえがき, 置換積分によって

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d \arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg w$$

となって, この右辺は Γ が 0 のまわりを回る回転数に等しい.

これが ‘偏角の原理’ という名の由来である.

13 ルーシェの定理

ルーシェ (Rouche) の定理 C は領域 D 内の単純閉曲線で C の内部は D の点のみよりなるとする。 $f(z), g(z)$ は D で正則で,

$$|f(z)| > |g(z)| \quad (\forall z \in C)$$

が成り立つならば, $f(z)$ と $f(z) + g(z)$ とは C の内部に, 位数だけ重複して数えるとき, 同じ個数の零点をもつ。

証明 [偏角の原理](#)により, C の内部にある $f(z) + g(z)$ と $f(z)$ の零点の個数の差は

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d\arg(f(z) + g(z)) - \frac{1}{2\pi} \int_C d\arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C d\arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)$$

となる。仮定より, $w = 1 + (g(z)/f(z))$ による C の像 Γ は, 右半平面 ($|w - 1| < 1$) 内にあるから, Γ の0のまわりを回る回転数は0である。□

問1 $z^5 + 7z + 2 = 0$ の解は, 単位円内 ($|z| < 1$) に1つ, 円環領域 $1 < |z| < 2$ 内に4つあることを示せ。

問2 $\sin z = 2z$ の単位円内の解は, $z = 0$ だけであることを示せ。

14 リュービル (Liouville) の定理

リュービル (Liouville) の定理 $f(z)$ は \mathbb{C} で正則 (すなわち整関数) で, $|f(z)| < M$ (M : 定数) ならば, $f(z)$ は定数である。

証明 任意の $z_0 \in \mathbb{C}$ に対し, [コーシーの評価式](#) より

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

が成り立ち, $f(z)$ は \mathbb{C} で正則だから, r はいくら大きい数でもよい。ゆえに $|f'(z_0)| = 0$ 。 z_0 は任意だから, $f(z)$ は定数となる。□

例1 定理の対偶として, 多項式, e^z だけではなく $\sin z, \cos z$ も \mathbb{C} では有界でない。

14.1 代数学の基本定理～リュービルの定理の応用として

代数学の基本定理 複素数を係数とする n 次方程式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

は, 複素数の範囲で必ず解をもつ。

証明 $P(z)$ が零点を持たないなら $1/P(z)$ は整関数。

$$|P(z)| = |z^n| \left| a_0 + a_1 \frac{1}{z} + \cdots + a_n \frac{1}{z^n} \right|$$

より, $z \rightarrow \infty$ のとき $|P(z)| \rightarrow \infty$ 。したがって $|1/P(z)| \rightarrow 0$ 。

すなわち, $|z| > R$ のとき, $|1/P(z)| < 1$ となるような正数 R がとれる。一方, $|1/P(z)|$ は z の連続関数だから, 有界閉集合 $|z| \leq R$ で有界である。

よって, $|1/P(z)| < M$ (M : 定数) が \mathbb{C} 全体で成り立ち, リュービルの定理より $1/P(z)$ は定数。これは矛盾である。□

14.2 最大値の原理

最大値の原理 $f(z)$ が領域 D で正則なとき, $f(z) \not\equiv$ 定数 ならば $|f(z)|$ は D 内で最大値をとらない.

証明 $a \in D$ で $|f(z)|$ が最大値 $M = |f(a)|$ をとったとする.

$$E = \{z \mid z \in D, |f(z)| = M\}$$

とする. $E = D$ ならば, D 全体 で $|f(z)| = M$ となり, $f(z)$ が定数となって仮定に反する ($|f(z)|$ が定数なら $f(z)$ 自体が定数) .

$D - E \neq \emptyset$ ならば, D 内に E の境界点 b があり, $|f(z)|$ の連続性から, $|f(z)| = M$ となる. b を中心として, D に含まれる閉円板 $|z - b| \leq r$ の周を Γ とする. この閉円板内に $D - E$ の点が必ずあるから, とくに Γ 上に $|f(z)| < M$ となる点があると仮定してよい.

$\zeta \in \Gamma$ に対して $\zeta = b + re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とおくと,

$$M = |f(b)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - b} \right| |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(b + re^{i\theta})| d\theta.$$

Γ 上で $|f(b + re^{i\theta})| \leq M$, また上の仮定と $|f(z)|$ の連続性から, Γ の部分弧の上で $|f(z)| < M$ となるので, 上式の右辺は $< M$ となって矛盾である. \square

14.3 シュワルツの補題

シュワルツの補題 $f(z)$ は $|z| < 1$ で正則であって, $|f(z)| \leq 1$, $f(0) = 0$ ならば

$$|f(z)| \leq |z| \quad (|z| < 1)$$

かつ

$$|f'(0)| \leq 1.$$

前者の式で $0 < |z_0| < 1$ なる z_0 で等号が成り立つか, 後者の式で等号が成り立つのは $f(z) = cz$ (c : 定数, $|c| = 1$) の場合に限る.

証明

証明 $f(0) = 0$ なので $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0)$ より

$$F(z) = \begin{cases} f'(0) & (z = 0) \\ \frac{f(z)}{z} & (0 < |z| < 1) \end{cases}$$

は $|z| < 1$ で正則となる. ($z = 0$ が ‘除去可能な特異点’ になっている).

$|z| \leq r$ ($r < 1$) における $|F(z)|$ の最大値は, 最大値の原理より, $|z| = r$ 上でとられるから

$$|F(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r} \quad (|z| \leq r).$$

ここで $r \rightarrow 1$ とすることにより, $|z| < 1$ のとき $|F(z)| \leq 1$ となり, $r \neq 0$ のときは定理を得る. $z = 0$ のときは明らかである.

命題にあるような等号が成り立つことは, $|F(z)|$ の最大値が $|z| < 1$ の 1 点でとられることになり, $F(z)$ は定数 c でなければならない. \square

14.4 問題

問1 $f(z)$ は整関数で、 $|f(z)| \leq e^x$ ($z = x + iy$) が任意の $z \in \mathbb{C}$ で成り立つなら、 $f(z) = ae^z$ (a : 複素定数, $|a| \leq 1$) であることを示せ。

問2 $f(z)$ は領域 D で正則で 0 とならないとき、 $f(z) \not\equiv$ 定数ならば $|f(z)|$ は D 内で最小値をとらないことを示せ。

15 等角写像

15.1 1次分数変換

a, b, c, d 複素定数とする。複素函数

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

を一次分数変換という。

例 $c = 0, a \neq 0$ とすると

$$w = Bz + C$$

の形をしている。これは一次函数である。

$C = 0$ のときは線型変換であり、相似・回転になる。

$B = 0$ のときは平行移動になる。

15.2 例：線型変換

$$w = (1 + i)z$$

は

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

なので、 z -平面の図形を $\sqrt{2}$ 倍に拡大して、向きを $\pi/4$ 回転させる変換になる。

一次函数

$$w = (1 + i)z + (2 - i)$$

は、 $\sqrt{2}$ 倍に拡大して、向きを $\pi/4$ 回転させたあと、実軸方向に +2、虚軸方向に -1 平行移動させる変換になる。

反転

$$w = \frac{1}{z}$$

は、

$$\arg w = -\arg z$$

より、まず実軸に関して折り返して \bar{z} に写した後、 $|w| \cdot |\bar{z}| = 1$

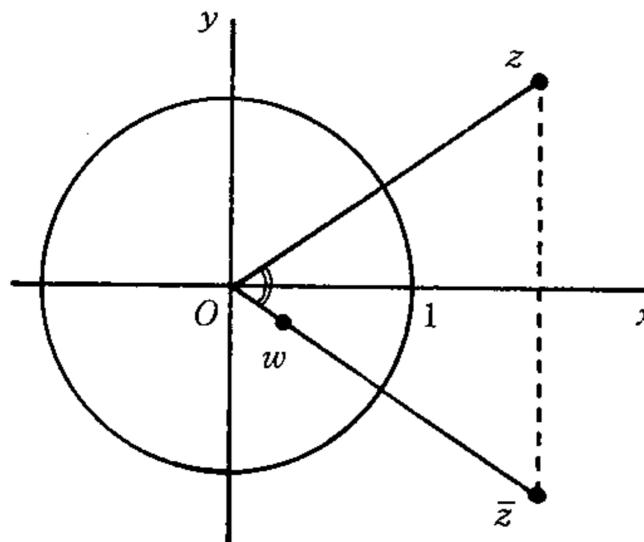
より、円 $|z| = 1$ に関して対称な点に写す変換になる。

$z = x + iy$ として、 $w = u + iv$ と実部・虚部に分けると

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

となる。 $z = 1/w$ なので、逆変換は

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$



15.3 円・円対応

平面上の一般の円は

$$a(x - c)^2 + a(y - d)^2 - r = 0, \quad ar > 0$$

より

$$a(x^2 + y^2) - 2acx - 2ady + [a(c^2 + d^2) - r] = 0, \quad ar > 0$$

となる。

$$\alpha = a, \beta = -2ac, \gamma = -2ad, \delta = a(c^2 + d^2) - r$$

とおくと、 $ar > 0$ より $\beta^2 + \gamma^2 > 4\alpha\delta$. そこで一般の円の方程式を

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \quad (\beta^2 + \gamma^2 > 4\alpha\delta)$$

とおく。 $\alpha = 0$ のときは直線になるが、これも半径無限大の円と考える。

反転は円を円に写す： $w = 1/z$ とすると $x^2 + y^2 = 1/(u^2 + v^2)$ に注意して

$$\alpha + \beta u - \gamma v + \delta(u^2 + v^2) = 0$$

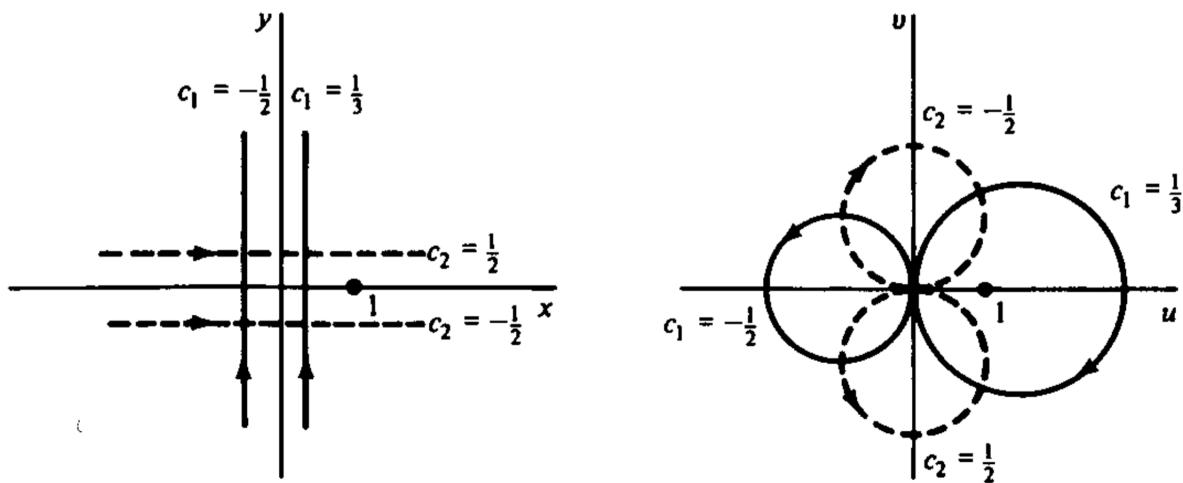
となるので、やはり円または直線である

例 直線 $x = c$ の行き先は $u - c(u^2 + v^2) = 0$ だから

$$\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

直線 $y = d$ の行き先は $-v - c(u^2 + v^2) = 0$ だから

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2d}\right)^2 = \left(\frac{1}{2d}\right)^2$$



補題

一般の一次分数変換は、一次函数 $w = cz + d$ と反転 $w = 1/z$ を合成することで得られる

証明 一次分数変換

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

に対して $c = 0$ なら一次函数そのもの、 $c \neq 0$ ならば

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}$$

で、一次函数 $w = cz + d$ 、反転、一次変換 $w = (bc - ad)/c \cdot z + a/c$ の合成。 \square

前の補題より

定理 一次分数変換は円を円に写す。ただし、直線は半径 ∞ の円とみなす

15.4 一次分数変換と拡張された z -平面

定理 (1) 一次分数変換

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

に対して、 $z = \infty$ の像を $w = a/c$ と定める ($c = 0$ のときは $w = \infty$) また、 $z = -d/c$ の像を $w = \infty$ と定めることで、一次分数変換は拡張された z -平面から拡張された w -平面への一対一対応になる。

(2) 拡張された z -平面の異なる 3 点 $\{z_1, z_2, z_3\}$ を拡張された w -平面の異なる 3 点 $\{w_1, w_2, w_3\}$ に写す一次分数変換はただ一つ存在する：

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

(注： $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ のどれかが無限大 ∞ のときは極限をとる)

例 $z = 1.0, -1$ をそれぞれ $w = i, \infty, 1$ に写す一次分数変換

$$w = \frac{(1+i)z + (i-1)}{2z}$$

例 $z = -1.0, 1$ をそれぞれ $w = -i, 1, i$ に写す一次分数変換は

$$w = \frac{i-z}{i+z}$$

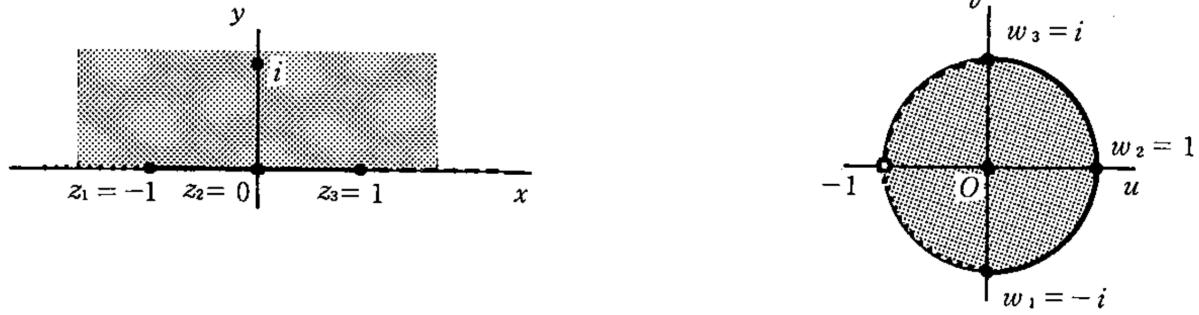
この一次変換は、実軸 $z \in \mathbb{R}$ を単位円 $|w| = 1$ に写す。
なぜなら $z \in \mathbb{R}$ のとき、 $|i-z| = |i+z|$ であるから。

z が上半平面の点なら $|i-z| < |i-(-z)|$ 。 $(|a-b|$ は a, b の間の距離)
したがって、 $|w| < 1$ となって、単位円の内部に写る。

定理

(1) 実軸を単位円に、点 a を原点に写す一次函数は $w = c \frac{z-a}{z-\bar{a}}$, ($|c|=1$). 特に、 $\operatorname{Im} a > 0 (< 0)$ なら上半平面が単位円の内部（外部）に写る。

(2) 単位円を単位円に、点 a を原点に写す一次函数は $w = c \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, ($|c|=1$). $|a| > 1$ のときは、単位円の内部と外部が入れ替わり、 $|a| < 1$ のときは、単位円の内部は単位円の内部に写る。



(3) 一次函数により z_1, z_2, z_3, z_4 が w_1, w_2, w_3, w_4 に対応するならば

$$\frac{z_1 - w_z}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_4} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_4}$$

この比を**非調和比**という。 ∞ が分子分母に現れた場合、その商を1とみなす。

(4) **鏡像の原理** 円 C に関する点 z の鏡像を z^* とする。一次函数によって、 z, z^* がそれぞれ、 w, w^* に、円 C が円 Γ に写されたとすると、 w^* は Γ に関する w の鏡像である。なお、 z^* が点 a を中心とする半径 r の円 C に関する z の**鏡像**であるとは、 a, z, z^* は a を挟まないように一直線上に並び、 $|a - z| \cdot |a - z^*| = r^2$ が成り立つことである。

15.5 等角写像

z -平面の二つの曲線 C_1, C_2 の変換 $w = f(z)$ による像を Γ_1, Γ_2 とする。

点 $z = z_0$ で C_1, C_2 が交わっているとき、それぞれの接線の交角を α とする。正確にはそれぞれの接線が実軸となす角を θ_1, θ_2 、とすると、 $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ を C_1 から C_2 へ測った**交角**という。

定義 点 $z = z_0$ で交わるどんな二つの曲線 C_1, C_2 についても C_1 から C_2 へ測った交角が Γ_1 から Γ_2 へ測った交角と等しいとき $f(z)$ は $z = z_0$ で**等角**であるとい

う。

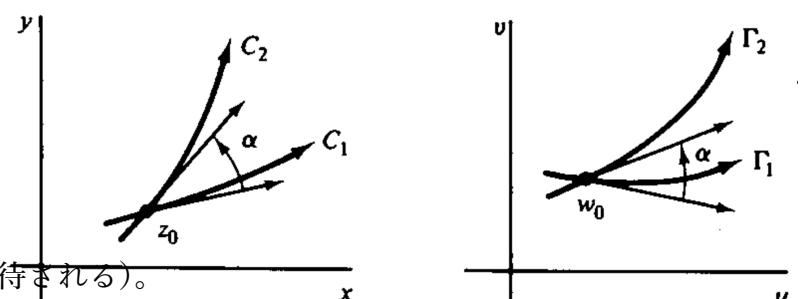
領域 D の各点で $w = f(z)$ が等角であると、 $w = f(z)$ は D において**等角写像**であるとい

う。

前にやったことから、 $x = c$ の像は原点を中心とする円に $y = d$ の像は、原点を始点とする半直線に写るので、交角は $\pi/2$ である。

例 $w = e^z$ は全平面で等角写像である（と期待される）。

前にやったことから、 $\operatorname{Re} w = c, \operatorname{Im} w = d$ の逆像はお互いに直交する双曲線である。交角は $\pi/2$ である。



定理 正則函数 $f(z)$ は、 $f'(z_0) \neq 0$ をみたす z_0 で等角である。したがって、領域 D で $f'(z) \neq 0$ となる正則函数 $f(z)$ は、等角写像である。

証明 曲線 C を $z = z(t)$ とする。 C の像 Γ は $w(t) = f(z(t))$ である

$$w'(t) = f'(z(t))z'(t)$$

より

$$\arg w'(t) = \arg f'(z(t)) + \arg z'(t)$$

$z_0 = z(t_0)$ として、 C の z_0 での接線が実軸となす角を θ とすると、 $\theta = \arg z'(t_0)$ である。 Γ の $w_0 = f(z_0)$ での接線が実軸となす角 φ は $w'(t_0)$ である。 $\alpha = \arg f'(z_0)$ とおくと

$$\varphi = \alpha + \theta$$

すなわち、元像の接線を α 回転させたものが像の接線なので、等角であることが従う。 \square

定義 等角性の証明で表れた $\alpha = \arg f'(z_0)$ を **回転角** という

例 $z = 0$ では $w = z^2$ は等角ではない

解説 $z = re^{i\theta}$ とおくと

$$w = \rho e^{i\varphi}, \quad (\rho = r^2, \varphi = 2\theta)$$

したがって、 z -平面の原点を起点とする半直線 $\theta = \alpha$ は w -平面の原点を起点とする半直線 $\varphi = 2\alpha$ にうつる。

つまり、 z -平面の原点を通る二直線は、 w -平面の原点を通る直線に写るが、交角は 2 倍になる。

一般に、正則函数 $f(z)$ が $f'(z_0) = 0$ ならば、 z_0 で等角ではない。 $f(z)$ が z_0 で m 位の零点を持つならば、交角は m 倍になる

注意

正則でない函数、たとえば $z = \bar{z}$ は折り返しなので、一見すると等角であるが、 C_1 から C_2 へ測った交角を θ とするとき、折り返した \bar{C}_1 から \bar{C}_2 へ測った交角は $-\theta$ になるので、等角ではない。

15.6 逆関数定理

定義 領域 D で定義された関数 $f(z)$ が写像として 1 対 1 のとき、すなわち、 $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$ ならば $f(z_1) \neq f(z_2)$ となるとき、 $f(z)$ は D で **单葉** であるという。

注意 $f'(z_0) = 0$ のとき、点 z_0 のどのような近傍の中でも写像 $w = f(z)$ は 1 対 1 とならない。

正則かつ单葉であれば $f'(z)$ は 0 にならないので、等角写像になる

逆に、 $f'(z_0) \neq 0$ ならば、 $w = f(z)$ は点 z_0 の適当な近傍で单葉となる (**局所单葉性**)

逆関数定理 $f(z)$ は $z = z_0$ で正則で、 $f'(z_0) \neq 0$ とする。

このとき、 z_0 の近傍 U と $w_0 = f(z_0)$ を含む開集合 V が存在して、

(1) f は U で **正則单葉** で、 $f(U) = V$.

(2) V で定義される f の逆関数 $z = F(w)$ は V で正則で

$$\frac{dF}{dw} = 1 \Big/ \frac{df}{dz}.$$

15.7 実2次元の逆関数定理

まず**実2次元の逆関数定理**を述べる

定理 xy 平面の領域 D から uv 平面への写像

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

において、 $u(x, y), v(x, y)$ が C^1 級で点 $(x_0, y_0) \in D$ で、ヤコビアン

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0$$

であれば、 (x_0, y_0) の適当な近傍 U で写像 (u, v) は单葉である。

その像 V で定義される逆写像

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

も C^1 級であって、その1階偏導関数は次のようになる：

$$x_u = v_y/J, x_v = -u_y/J, y_u = -v_x/J, y_v = u_x/J$$

この定理の証明は省略。

15.8 複素関数の逆関数定理の証明

[証明] 写像 $w = f(z) = u + iv$ を実2変数の写像とみなす、 $z_0 = x_0 + iy_0$ とする。C.-R. 関係式により

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$$

となるから、仮定 $f'(z_0) \neq 0$ より、点 (x_0, y_0) で $J \neq 0$ 。

したがって、**実2変数関数としての逆写像**が存在する。逆写像 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ を用いて

$$F(u, v) = x(u, v) + i y(u, v)$$

とおくと、

$$x_u = v_y/J, x_v = -u_y/J, y_u = -v_x/J, y_v = u_x/J$$

となるので u, v が C.-R. 関係式をみたすことから、 x, y も C.-R. 関係式をみたし、 $F(w = u + iv)$ は $V = f(U)$ の各点で複素数の意味で微分可能、すなわち正則となる。

関係式 $\frac{dF}{dw} = \left(\frac{df}{dz} \right)^{-1}$ は $z = F(f(z))$ の両辺を微分することによって得られる。□

15.9 リーマンの写像定理

リーマンの写像定理

$D(\subset \mathbb{C})$ を \mathbb{C} 全体と一致しない 任意の **単連結領域**（穴の空いてない繋がった領域）とするとき、 D から単位円の内部 $|w| < 1$ への 1 対 1 かつ上への写像 (全単射) となるような、 D で正則な関数 $f(z)$ が存在する。

証明は省略する。

15.10 問題

1. 次の変換の不動点を求めよ

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

2. 写像 $w = e^z$ によって、帯状集合 $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$ はどんな集合に移されるか。