SGCライブラリ- 23

微分幾何講義

一般理論と現代物理への応用

二木　昭人 著

サイエンス社

まえがき

本書は，1 学期程度の講義の多様体論の知識を持つ読者を対象にして，微分幾何学の一般論を解説する前半部分（第 1 章，第 2 章）と，その応用としてスピン多様体，ディラク作用素，サイバーグ・ウィッテン不変量を解説する後半部分（第 3 章，第 4 章）からなる．前半部分は東京工業大学理学部における微分幾何学の一般論についての講義ノートを，後半部分は 1995 年に研究室の大学院生を相手に講義したノートと 2000 年 2 月の八王子大学セミナーハウスにおける講義ノートをそれぞれ加筆，修正したものである．

前半の目的は微分幾何学の解説であるが，特に特性類を含む接続の一般論，測地線論の基本事項，ケーラー幾何学などの複素微分幾何学に関する基本事項，テンソル解析の技法の 4 つを解説することとに重点をおいた．後半部分は，先に出版された著者による翻訳「J．モーガン著：サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー（培風館，1998)」を執筆しながらもう少し違う書き方もありうると感じた経験をもとに，著者なりのサイバーグ・ウィッテン不変量の解説をしたつもりである．サイバーグ・ウィッテン不変量を定義する方法は，$SU(2)$ インスタントンを用いたドナルドソン多項式不変量，フレアーホモロジー，グロモフ・ウィッテン不変量，量子コホモロジーなどの定義に共通するものがあり，一つを理解すれば他の定義の基本的なものの考え方は理解される．その意味で，本書において特にサイバーグ・ウィッテン不変量のみを学習するということではなく，これらのゲージ理論的不変量の定義の典型例としてサイバーグ・ウィッテン不変量を取り上げるものであると考えていただきたい．以下，

A. 前半部分で扱われるテーマが幾何学全般の中に占める位置を述べる；
B. 後半部分で解説したいゲージ理論的不変量の構成方法の概略を述べる；

の 2 つを目標とする．

A. 多様体論を学び始めたときに最初に出会う大きな定理はド･ラームの定理であろう．この定理はド･ラームコホモロジー群が定数層 $\mathbb{R}$ 係数のチェックコホモロジーと同型であることを主張する．ここに，p 次微分形式全体 Ω^p に作用する外微分作用素 $d:\Omega^p\to\Omega^{p+1}$ から作られる複体をド･ラーム複体といい，そのコホモロジーがド･ラームコホモロジー群である．さらに，多様体 M がコンパクト向き付け可能ならばド･ラームコホモロジー群は調和微分形式の全体とも同型である（ホッジ理論）．この場合，調和形式の全体は有限次元であるからド･ラームコホモロジー群 $H^p=Z^p/B^p$ は有限次元である．ここで Z^p は p 次閉形式の全体であり，B^p は p 次完全形式の全体であり，どちらも無限次元である．しかし，商空間 Z^p/B^p は有限次元になるのである．後で述べるゲージ理論においてモデュライ空間が有限次元になるのも同じような状況である．

幾何学の色々な理論の一つの出発点となるものの中にガウス・ボンネの定理がある．$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 M に対し，局所的に 2 つの接ベクトル場 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を正規直交基底であるように取る．次に τ^1，τ^2 を $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ の双対基底となる 1 次微分形式と取る．

$$d\tau^i + \theta^i_1 \wedge \tau^1 + \theta^i_2 \wedge \tau^2 = 0$$

により θ^i_j を定義し，接続形式という（命題 2.2.3 参照）．行列 $\theta = (\theta^i_j)$ は歪対称行列に値を持つ 1 次微分形式である．

$$d\theta^1_2 = \kappa\,\theta^1 \wedge \theta^2$$

により κ を定義し，ガウス曲率という．κ は $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ の取り方によらない．ガウス・ボンネの定理の主張は

$$\frac{1}{4\pi}\int_M \kappa\,\theta^1 \wedge \theta^2 = \chi(M)$$

ということである．ここに $\chi(M)$ は M のオイラー数，すなわち 3 角形分割したときの，頂点の個数 $-$ 辺の個数 $+$ 面の個数である．この式は M の与えられた 3 角形分割に対し証明され，従って特にオイラー数が 3 角形分割の取り方によらないこと，また左辺の積分が M の形に（すなわち $\mathbb{R}^3$ への埋め込み方に）よらないことが同時にわかる．特に，2 次微分形式 $e := \frac{1}{4\pi}\kappa\,\theta^1 \wedge \theta^2$ は M の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みによらない 2 次元ド･ラームコホモロジー類を定めることがわかる．この類を M のオイラー類という．この状況を一般化すると次のようになる．コンパクト向き付け可能多様体 M 上の複素ベクトル束 $E \to M$ が与えられるとチャーン類と呼ばれる偶数次コホモロジー類が標準的に定まる．実 2 次元向き付け可能多様体は 1 次元複素多様体であり，特に接ベクトル束は 1 次元複素ベクトル束である．その第 1 チャーン類がオイラー類である．実ベクトル束に対してはポントリャーギン類と呼ばれる $4k$ 次元コホモロジー類が定まる．このようなコホモロジー類を総称して特性類という．ベクトル束から定まる特性類は実は同伴主束から定まることがわかり，一般にコンパクトリー群 G を与えたとき，主 G 束の分類空間 B_G のコホモロジー環の元を分類写像で引き戻したコホモロジーが特性類であるということができる．このような元は主束の接続とその曲率形式を用いて表すことができる．以上の理論はチャーン・ヴェイユ理論と呼ばれる．

ド･ラームの定理とチャーン・ヴェイユ理論を併せると次のことがいえる．ド･ラーム複体のオイラー・ポアンカレ指標はオイラー類を積分した値に等しい．これを一般化したものがアティヤ・シンガー指数定理であり，この定理は次のように言い表される：解析的指数と位相的指数は等しい．解析的指数とはフレドホルム作用素としての指数ということであり，位相的指数とは特性類の積分で表される指数という意味である（厳密には位相的指数は K 理論の言葉で表現される）．ド･ラーム複体以外では，ドルボー複体に応用したリーマン・ロッホの定理，$d + d^* : \Omega^{\mathrm{even}} \to \Omega^{\mathrm{odd}}$ に適用したヒルツェブルフの符号定理，スピン多様体のディラク作用素に適用した定理（ディラク作用素の指数は $\widehat{A}$ 種数に等しい）などがアティヤ・シンガー指数定理の応用例である．アティヤ・シンガー指数定理は本書の程度を越えるので，本書では解説せず，特別な場合のみに結果だけを用いる．例えば [18],

[28] などを参照されたい．

上の例にあげた複体は楕円型複体と呼ばれるものである．このような複体のコホモロジーは適当な曲率の条件のもとで 0 になることがわかる．例えばドルボー複体のコホモロジー群は調和微分形式のなすベクトル空間と同型である．一方ある種の調和微分形式は適当な曲率の条件のもとでは 0 しかないことがわかり，従ってコホモロジー群の一部は適当な曲率の条件のもとに 0 となる．小平の消滅定理はこのような議論による結果である．また，ディラク作用素の核の元は調和スピノルと呼ばれるが，多様体が正のスカラー曲率を持てば調和スピノルは 0 しか存在しないことがわかり，従って多様体が正のスカラー曲率を持てば $\widehat{A}$ 種数は 0 になることがわかる．このような証明をする方法はボホナーテクニックとか，ボホナー・ヴァイツェンベック公式による方法などと呼ばれるものであるが，これを実行するための基礎がテンソル解析である．また，多様体上の非線形偏微分方程式におけるア・プリオリ評価においてもテンソル解析は必要であり，これに習熟することは大域解析学を学習・研究する上で有益である．

さて，アティヤ・シンガー指数定理のように解析的な手法を用いて多様体の大域的性質を調べる数学を大域解析学という．大域解析学の典型的かつ古典的な例は測地線論であろう．本書では多様体の上で微分方程式を解いて多様体の大域的性質を調べる典型として測地線論から得られる結果，例えば Synge の定理などを紹介する．測地線を高次元化したものに調和写像がある．測地線は 1 次元多様体からの写像であるのに対し，調和写像は一般次元多様体からの写像である．このため，測地線のみたす微分方程式が常微分方程式であるのに対し，調和写像のみたす微分方程式は偏微分方程式でありしかも非線形であるため，調和写像の存在が証明できる場合は高次元においてはまれである．しかし，幸運にも存在が示される場合は多様体の研究の強力な道具となる．この他，極小曲面，その高次元化である極小部分多様体，アインシュタイン計量，もっと一般に平均曲率一定曲面，スカラー曲率一定計量なども有用である．これらはどちらかというと直接的に偏微分方程式の解を多様体の研究に使うものであるが，次に説明するゲージ理論的不変量を構成する方法は間接的に微分方程式を用いる．

B. $F : M \to N$ を多様体 M, N の間の滑らかな写像とする．更に M, N にはリー群 $\mathcal{G}$ が作用し，F は $\mathcal{G}$ 同変であるとする：$F(gx) = gF(x)$．$o \in N$ を G の不動点とし，$F^{-1}(o)/\mathcal{G}$ をモデュライ空間と呼ぶことにする．$1 \in \mathcal{G}$，$x \in F^{-1}(o)$，$o \in N$ における各接空間の間の自然な写像の列

$$0 \to T_1\mathcal{G} \to T_xM \to T_oN \to 0$$

は複体をなす．これは単に $\mathcal{G}$ のリー環の元 ξ が自然に定める M のベクトル場を同じ ξ で表すとき，

$$dF_x(\xi) = 0$$

であることを言っているに他ならない．この複体のコホモロジーを H^i，$i = 0, 1, 2$，により表そう．陰関数定理により dF_x が全射なら $F^{-1}(o)$ は滑らかな部分多様体である．dF_x

が全射とは $H^2=0$ ということである．更に $\mathcal{G}$ の作用が自由なら商空間 $F^{-1}(o)/\mathcal{G}$ は再び滑らかな多様体になる．$\mathcal{G}$ の作用が自由ということは $H^0=0$ ということである．この条件のもとに H^1 がモデュライ空間の接空間であり，その次元は $\dim H^1=-\chi$ となる．ただし χ は複体のオイラー・ポアンカレ標数である．ゲージ理論で現れる状況は M，N は無限次元多様体（しかるべき函数空間）であり，F は非線形偏微分方程式（例えば接続に関する自己双対方程式であったり，サイバーグ・ウィッテン方程式であったり）であり，そして複体は上述のような楕円型複体である．よってアティヤ・シンガー指数定理により，モデュライ空間の次元は特性類を用いて表される．さて，実際上 $H^0=H^2=0$ とは限らないので非線形偏微分方程式を摂動することにより，$H^0=H^2=0$ となるようにしたい．簡単のため $H^0=0$ にはできると仮定してこの点は気にしないことにしょう．$H^2=0$ とするために（無限次元）多様体 Δ でパラメーター付けられた摂動偏微分方程式の族 $\{F_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ を考える．ただし $F_0=F$ とする．

$$\widetilde{F}:M\times\Delta\to N$$

を $\widetilde{F}(x,\delta)=F_\delta(x)$ により定義したとき，$\widetilde{F}^{-1}(o)=:\mathcal{M}_\Delta$ は滑らかな（無限次元）多様体になり，$\pi(x,\delta)=\delta$ により定義される写像

$$\pi:\mathcal{M}_\Delta\to\Delta$$

はフレドホルム写像になったとしよう．実際上の応用ではいつもこのようになるのでこのようなものであると安心してよい．またフレドホルム写像とはその微分がフレドホルム作用素（核も余核も有限次元ということ）になるもののことである．有限次元の可微分写像と同様にフレドホルム写像に対してもサードの定理が成り立つことが S. スメイルによって証明されている．よって o が正則値でなくても o の十分近傍に正則値が存在する．そして正則値 δ の逆像 $\pi^{-1}(\delta)$ は有限次元の滑らかな多様体になる．2 つの相異なる正則値 δ_1，δ_2 をとっても $\pi^{-1}(\delta_1)$ と $\pi^{-1}(\delta_2)$ はボルダント，すなわち 1 次元高い多様体 W が存在して $\partial W=\pi^{-1}(\delta_1)-\pi^{-1}(\delta_2)$ となることがわかる．ここに $-$ と書いたのは向きを考慮してである．したがってこのボルディズム類を多様体の大域的性質の研究に用いようというのが，ゲージ理論的不変量の考え方である．例えば本書で取り上げるサイバーグ・ウィッテン方程式を用いると可微分構造の違いを見分ける不変量が得られる．ここで言いたいことは他のゲージ理論的不変量の定義においても同じパターンで議論が進むので，一つを学べば他も同様であるということである．

最後に，サイバーグ・ウィッテン方程式のトポロジーへの応用が発表された 1994 年に，出張先のバークレー・MSRI でウィッテンやクロンハイマー・ムローカの論文をネットワークから取り出してくれた牛腸徹氏にこの場を借りてお礼を申し上げたい．また挿絵を書いていただくなどお世話になったサイエンス社の平勢耕介氏に感謝したい．

2002 年 11 月

二木 昭人

目　次

第 1 章
多様体の基本事項

この章では線形代数および多様体論からの基本事項を復習する．線形代数について微分幾何で慣用的に用いられるノーテイションは，テンソル解析においても主束の接続のゲージ変換や曲率の式においても大切であるので微分幾何をはじめて学ぶ読者は第 1 節も目を通して頂きたい．また，この本で用いられる記号を設定するという目的も同時に兼ねている．複素多様体，層についても説明する．

1.1　線形代数からの基本事項

V を n 次元実ベクトル空間とする．V の**双対空間** V^* とは V から 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}$ への線形写像全体のなすベクトル空間のことである：

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ は線形}\}.$$

i) V^* は実ベクトル空間になる．

証明　$f, g \in V^*$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し $\alpha f + \beta g \in V^*$ を

$$(\alpha f + \beta g)(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in V$$

により定義すれば V^* には和とスカラー倍が定まり，これに関し V^* はベクトル空間の公理をみたす． □

ii) V の次元を n とし，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を V の基底とする．V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n$$

という形に実数 $x^1, \cdots, x^n$ を用いて一意的に表される．ここで添字 i を右上にのせて x^i と書いていることに注意しよう．これは x の i 乗という意味ではな

く，第 i 番目の係数（または第 i 座標）という意味であることは文脈から理解できるであろう．微分幾何や物理では慣習として，ベクトル空間の基底の番号を表す添字は下に書き，係数の番号を表す添字は上に書く．更に，本来

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{e}_i$$

と Σ 記号を使って書くべきところを

$$\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$$

と Σ を省略して表す．すなわち上下に同じ添字が現れたら Σ 記号はなくても和をとるものと約束する．これを**アインシュタインの規約**という．第 1 章においてはアインシュタインの規約には従わず Σ 記号を省略せずに書くことにする．第 2 章以降からはアインシュタインの規約を用いるので，読者は Σ 記号なしで書いても Σ 記号があるのと同じ意味として読むことを第 1 章で訓練して欲しい．

iii) $\dim V^* = \dim V$.

証明　$n = \dim V$ とし，$1 \leq i \leq n$ に対し $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を V の基底とする．$\boldsymbol{e}^i \in V^*$ を（i が上についていることに注意せよ）

$$\boldsymbol{e}^i \left(\sum_{j=1}^{n} x^j \boldsymbol{e}_j \right) = x^i$$

により定義する．もし定数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に対し $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{o}$ とすると，任意の j に対し

$$\lambda_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}^i \right) (\boldsymbol{e}_j) = 0$$

であるから，$\boldsymbol{e}^1, \cdots, \boldsymbol{e}^n$ は一次独立である．更に任意の $f \in V^*$ に対し

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}^i$$

と表すことができるので $\boldsymbol{e}^1, \cdots, \boldsymbol{e}^n$ は V^* の基底である．　□

定義 1.1.1　$\boldsymbol{e}^1, \cdots, \boldsymbol{e}^n$ を $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に対する**双対基底**という．

双対空間 V^* の元は $\alpha_1 \boldsymbol{e}^1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}^n$ の形に一意的に表される．ここで α_i と添字 i を下に書いたことに気をつけよう．結局 V の基底の添字と V^* の係数の添字は下に，V の係数の添字と V^* の基底の添字は上につけることになった．これには次の理由からの合理性がある．例えば V の元の係数 x^i と V^* の基底 $\boldsymbol{e}^i$ はどちらも V の線形関数で，$\boldsymbol{e}_j \in V$ に対し値 δ^i_j を取るものであり，従って

両者は本質的に同じものである．ここに δ^i_j は**クロネッカー（Kronecker）のデルタ**

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

である．

全く同様に V^* の元の係数 α_i と V の基底 $\boldsymbol{e}_i$ も本質的に同じものである．

さて，ベクトル空間 V の基底を選んで V を $\mathbb{R}^n$ と同一視するとき，$\mathbb{R}^n$ のベクトルを横ベクトルで表す場合と縦ベクトルで表す場合とがある．どちらを採用するかで今後のノーテイションが変わってくるので，本書では縦ベクトルで表す方を採用する（この方が圧倒的多数派である）．この了解のもとに数ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ は

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

と表される．

次に $\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ をもう一つの V の基底とし，

$$\boldsymbol{x} = x'^1 \boldsymbol{e}'_1 + \cdots + x'^n \boldsymbol{e}'_n$$

と表されるとする．各 $\boldsymbol{e}'_j$ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の一次結合で表される：

$$\boldsymbol{e}'_j = p_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{e}_n.$$

すなわち基底の取り替えの行列と呼ばれる正則行列 P により

$$(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P$$

と表される（[17] 3.5 節参照）．このとき

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)PP^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

と変換される．

一方双対空間の元 $\alpha \in V^*$ は

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix}$$

と係数ベクトルを横ベクトルで表す方が座標変換の観点から統一性がよい．

実際双対基底の定義

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j, \qquad \boldsymbol{e}'^j(\boldsymbol{e}'_j) = \delta^i_j$$

を用いると

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'^n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

となることが容易にわかる．このことは，x^i と $\boldsymbol{e}^i$ が本質的に同じものであるから当然である．ここで言いたいことは添字が上についているものは同じ変換を受け，下についているものも同様に同じ変換を受けるということである．

一方，文脈によってはすべてのベクトル空間に対して基底は横に書き，係数ベクトルを縦ベクトルで書く方が統一性が良い場合があり，双対空間 V^* の双対ベクトルも横に書いた方がいい場合がある．この場合，(1.1) の両辺の転置を取って

$$(\boldsymbol{e}'^1, \cdots, \boldsymbol{e}'^n) = (\boldsymbol{e}^1, \cdots \boldsymbol{e}^n)\ {}^tP^{-1}$$

となる．すなわち，V の基底の取り替えの行列が P ならば，V^* の対応する双対基底の取り替えは ${}^tP^{-1}$ でなされる．

次節で述べるように，多様体とはベクトル空間の開集合を貼り合わせて得られるものであるが，その接ベクトルと余接ベクトルを局所座標を用いて

$$\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx^i$$

と表すとき，局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ を別の局所座標に取りかえると，X^i と dx^i は同じ変換を受け，$\frac{\partial}{\partial x^i}$ と α_i も同じ変換を受ける．これは各々が本質的に同じものであるから当然である．$\frac{\partial}{\partial x^i}$ の添字 i は中心より下に，dx^i は上についていることに気をつけよう．このことは座標の添字を上につけて x^i と書くことの利点である．

iv) $(V^*)^* = V$.

証明　$\varphi : V \to (V^*)^*$ を

$$(\varphi(\boldsymbol{x}))(f) = f(\boldsymbol{x}), \qquad f \in V^*$$

により定義する．

もし $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ ならば任意の $f \in V^*$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = 0$ であるから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となる．従って φ は単射である．

更に $\dim V = \dim V^* = \dim(V^*)^*$ であるから φ は同型である． □

$V_1, \cdots, V_p$ を p 個の実ベクトル空間とするとき

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p^* = \{ f : V_1 \times \cdots \times V_p \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } p \text{ 次線形} \}$$

とおく．ここで f が **p 次線形**とは任意の i に対し

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \lambda \boldsymbol{x}_i + \lambda' \boldsymbol{x}_i', \cdots, \boldsymbol{x}_p) \\ & \qquad = \lambda f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_p) + \lambda' f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i', \cdots, \boldsymbol{x}_p) \end{aligned}$$

をみたすときをいう．$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$ を $V_1^*, \cdots, V_p^*$ の**テンソル積**という．

v) $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$ は $\dim V_1 \times \cdots \times \dim V_p$ 次元のベクトル空間である．

証明　$n_i = \dim V_i$ とし $\boldsymbol{e}_{i,1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i,n_i}$ を V_i の基底，$\boldsymbol{e}_i^1, \cdots, \boldsymbol{e}_i^{n_i}$ をその双対基底とする．

$$\boldsymbol{e}_1^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_p^{j_p} \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$$

を

$$\boldsymbol{e}_1^{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_p^{j_p} \left(\sum_{j=1}^{n_1} x_1^j \boldsymbol{e}_{1,j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n_p} x_p^j \boldsymbol{e}_{p,j} \right) = x_1^{j_1} \cdots x_p^{j_p}$$

により定義するとこれらは $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$ の基底になる．よって

$$\dim V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p^* = n_1 \times \cdots \times n_p$$

を得る． □

$V = (V^*)^*$ に注意すると $V \otimes W^*$，$V \otimes W$ も同様に定義できる．また $V_1 = \cdots = V_p$ のとき $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$ を $\otimes^p V^*$ と表す．更に

$$S^p V^* = \left\{ f \in \otimes^p V^* \;\middle|\; \begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_p) \\ & \qquad = f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_p),\ \forall i, j \end{aligned} \right\},$$

$$\wedge^p V^* = \left\{ f \in \otimes^p V^* \;\middle|\; \begin{aligned} & f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_p) \\ & \qquad = -f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_p),\ \forall i, j \end{aligned} \right\}$$

とおき，$S^p V^*$ の元を **p 次対称テンソル**，$\wedge^p V^*$ の元を **p 次交代テンソル**とい

う．p 次交代テンソルの元は

$$\boldsymbol{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{i_p} := \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\ \boldsymbol{e}^{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_{\sigma(p)}}$$

の一次結合として表される．ここに S_p は p 次対称群（p 個の置換全体のなす群）である．例えば

$$\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j - \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^i$$

である．

例 1.1.2 (1) 実ベクトル空間 V の内積は 2 次対称テンソルである．
(2) $V = \mathbb{R}^n$ とおく．

$$\det : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{n\text{ 回}} \to \mathbb{R}$$

を $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ に行列式 $\det(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ を対応させる写像とすると，det は n 次交代テンソルである．

$V \otimes V^*$ の元は自然に V の一次変換全体と同一視される．実際 $e \otimes \alpha \in V \otimes V^*$ と $v \in V$ に対し $(e \otimes \alpha)(v) = (\alpha(v))e \in V$ により $e \otimes \alpha$ は V の一次変換とみなすことができる．一次変換を自己準同型（endomorphism）ともいうので $V \otimes V^* =: \operatorname{End}(V)$ と表すことがある．V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を選ぶと．$V \otimes V^*$ の元は

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a^i_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j \quad \left(= \sum_{i,\,j=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \otimes a^i_j \boldsymbol{e}^j \right)$$

の形に表されるが，上の同一視による一次変換の，基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に関する表現行列は $A = (a^i_j)$ である．ここで，上についた添字 i が行の成分，下についた添字 j が列の成分を表すことを覚えておくと便利である．実際 $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^n x^k \boldsymbol{e}_k$ に対し

$$\left(\sum_{i,\,j=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \otimes a^i_j \boldsymbol{e}^j \right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \boldsymbol{e}_i a^i_j x^j$$

である．

次に V を向き付けられた実計量ベクトル空間，$(\cdot, \cdot)$ をその内積とする．このとき，**Hodge（ホッジ）スター作用素**と呼ばれる線形写像

$$* : \wedge^p V^* \to \wedge^{n-p} V^*$$

を定義したい．

まず $p=0$ の場合に定義する．V の正の向きを与える正規直交基を $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ とし，その双対基底を $\boldsymbol{e}^1,\cdots,\boldsymbol{e}^n$ とする．

$$*1=\boldsymbol{e}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^n$$

とおき，これを線形に拡張することにより $*:\wedge^0=\mathbb{R}\to\wedge^n V^*$ を定義する．上式の右辺は正の正規直交基底の取り方によらないことに注意せよ．$*1$ を V の体積要素という．

次に $p\geq 1$ とする．$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n-p}\in V$ に対し

$$*(\boldsymbol{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^{i_p})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n-p})=(*1)(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_p},\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n-p})$$

とし，これを線形に拡張することにより $*:\wedge^p V^*\to\wedge^{n-p}V^*$ を定義したい．これが正規直交基底の取り方によらないことを示せばよい．内積から定まる V^* から V への同型写像を μ とする．すなわち $\mu:V^*\to V$ を

$$\alpha(\boldsymbol{v})=(\mu(\alpha),\boldsymbol{v}),\qquad \alpha\in V^*,\ \boldsymbol{v}\in V$$

とおく．もちろんこの定義は正規直交基底は用いていないので正規直交基底にはよっていない．このとき上で定義した $*$ は $\alpha^1,\cdots,\alpha^p\in V^*$ に対し

$$\begin{aligned}&(*(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^p))(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n-p})\\&\qquad=(*1)(\mu(\alpha^1),\cdots,\mu(\alpha^p),\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n-p})\end{aligned}\tag{1.2}$$

により表される．何故なら $\alpha^i=\sum_{j=1}^n a^i_j\boldsymbol{e}^j$ とすると $\mu(\alpha^i)=\sum_{j=1}^n \alpha^i_j\boldsymbol{e}_j$ であり，よって

$$(1.2)\text{ の左辺}=(*1)\left(\sum_{j=1}^n a^1_j\boldsymbol{e}_j,\cdots,\sum_{j=1}^n a^p_j\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{n-p}\right)=(1.2)\text{ の右辺}$$

となるからである．(1.2) の右辺は正の正規直交基底の選び方によっていないので上で定義した $*:\wedge^pV^*\to\wedge^{n-p}V^*$ は正の正規直交基底の取り方によらないことが示された．

$*$ を用いると $\wedge^pV^*$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ が次のように定義される．すなわち $\alpha,\beta\in\wedge^pV^*$ に対し

$$\alpha\wedge*\beta=(\alpha,\beta)*1.$$

実際にこのようにして定義された $(\cdot,\cdot)$ が $\wedge^pV^*$ 上の正値 2 次形式であることは，正規直交基底を用いて書き下せば容易に確かめることができる．

補題 1.1.3　$*^2=(-1)^{p(n-p)}$.

証明　証明は次の 2 式より明らかである．

$$*(\boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^p) = \boldsymbol{e}^{p+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n,$$
$$**(\boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^p) = (-1)^{p(n-p)} \boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^p. \qquad \square$$

特に $n=4$，$p=2$ のときは $*: \wedge^2 V^* \to \wedge^2 V^*$，$*^2 = 1$ であるから，$\wedge^2 V^*$ は $*$ の固有値 ± 1 の固有空間 $\wedge^+$ および $\wedge^-$ の直和に分解する：

$$\wedge^2 V^* = \wedge^+ \oplus \wedge^-.$$

$\alpha \in \wedge^2 V^*$ を上の分解に応じて

$$\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$$

と分解するとき，$\alpha = \alpha^+$ のとき α は自己双対，$\alpha = \alpha^-$ のとき α は反自己双対であるという．容易に示せるように $\wedge^\pm$ の基底は

$$\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \pm \boldsymbol{e}^3 \wedge \boldsymbol{e}^4, \quad \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3 \pm \boldsymbol{e}^4 \wedge \boldsymbol{e}^2, \quad \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^4 \pm \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 \tag{1.3}$$

である．

$SO(4)$ のリー環 $\mathfrak{so}(4)$ は歪対称行列全体と同型であるので $\wedge^2 \mathbb{R}^4$ と同型である．この同型により，$SO(4)$ の $\wedge^2 \mathbb{R}^4$ への作用は $\mathfrak{so}(4)$ への随伴表現と同値であることがわかる．一方分解 $\wedge^2 = \wedge^+ \oplus \wedge^-$ は $SO(4)$ の作用で保たれる．$\dim \wedge^\pm = 3$ であるから結局

$$SO(4) \to SO(3) \times SO(3)$$

が得られる，この核は $\{\pm 1\}$ である．よってリー環レベルでは同型

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$$

が得られたことになる．この事実の普遍被覆群レベルの同型 $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ は第 3 章，例 3.1.7 において与えられる．

1.2 多様体論からの基本事項

本書では断らない限り多様体はすべて C^∞ 級多様体とし，また多様体の間の写像も C^∞ 級写像とする．M を n 次元多様体とする．すなわち，$\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な開集合（座標近傍と呼ばれる）による開被覆を持ち，開集合 U における局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ と開集合 V における局所座標 $(y^1, \cdots, y^n)$ は $U \cap V \neq \emptyset$ なるとき，$U \cap V$ において $(x^1, \cdots, x^n)$ は $(y^1, \cdots, y^n)$ の C^∞ 級関数

$$x^1 = x^1(y^1, \cdots, y^n), \quad \cdots \quad , x^n = x^n(y^1, \cdots, y^n)$$

として表される．合成関数の微分の公式から $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$\frac{\partial f}{\partial y^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.4}$$

を得る．

E，M，F を多様体とする．$\pi : E \to M$ が**ファイバー束**であるとは，M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在し次の可換図式をみたす微分同相写像 φ_λ が存在することである．

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\lambda) & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & U_\lambda \times F \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_\lambda \\ U_\lambda & = & U_\lambda \end{array}$$

ここに p_λ は第一成分への標準的射影である．E を**全空間**，M を**底空間**，F を**ファイバー**，π を**射影**という．また上の可換図式が存在することを**局所自明性**を持つという．典型的ファイバー束は次の定義に現れるベクトル束と，定義 2.3.4 に現れる主束である．

定義 1.2.1　E が M 上の**階数** r の**ベクトル束**であるとは次の条件をみたすときをいう．

(a)　E は $n+r$ 次元多様体である；

(b)　$\pi : E \to M$ は全射な可微分写像である；

(c)　M の開被覆 U_λ と微分同相写像 $\varphi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times \mathbb{R}^r$ が存在し，

(c.1) $p_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^r \to U_\lambda$ を射影とすると

$$\pi = p_\lambda \circ \varphi_\lambda$$

が成り立つ；

(c.2) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : (U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{R}^r \to (U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{R}^r$$

は

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}(p, \boldsymbol{x}) = (p, \varphi_{\lambda\mu}(p)\boldsymbol{x}),$$
$$\varphi_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL(r, \mathbb{R})$$

と表される．(このような $\varphi_{\lambda\mu}$ が存在するということが条件である．)

いうまでもなく，$\varphi_{\lambda\mu}(p)$ は r 次正則行列であり，$\{p\}\times\mathbb{R}^r$ を $\{p\}\times\mathbb{R}^r$ に線形同型に写している．φ_λ を U_λ 上の**局所自明化**，$E_p := \pi^{-1}(p) \cong \mathbb{R}$ を $p \in M$ 上のファイバーという．上の定義の条件 (c.2) から各ファイバーはベクトル空間の構造を持つ．なぜなら一つの局所自明化を用いて各ファイバーにベクトル空間の構造を与えれば，(c.2) により局所自明化を取りかえてもファイバーは $GL(r,\mathbb{R})$ の元，すなわち線形同型写像で変換されるので，この与え方は well-defined であるからである．$\varphi_{\lambda\mu}$ を**変換関数**という．$U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$ 上で変換関数は明らかに

$$\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu} \tag{1.5}$$

をみたす．逆にこの式をみたす $\{\varphi_{\lambda\mu}\}$ が与えられればベクトル束が定まる．

ベクトル束の定義において $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{C}^n$ に，変換関数の取る値を $GL(n,\mathbb{R})$ の代りに $GL(n,\mathbb{C})$ に置き換えたものを階数 n の**複素ベクトル束**という．

M の点 p における**接ベクトル空間**（または単に**接空間**ということもある）$T_p(M)$ とは p における微分の全体のなすベクトル空間のことであった．ここで微分とは，M 上の $C^\infty(M)$ 関数に実数を対応させる線形写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ で，**ライプニッツルール**

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \quad f,\, g \in C^\infty(M)$$

をみたすもののことである．$x^1, \cdots, x^n$ を p のまわりの局所座標とすると，実は接空間 $T_p(M)$ は

$$T_p(M) = \left\{ \sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \,\middle|\, X^i \in \mathbb{R} \right\}$$

と表されることがわかる（松島 [23] p.38，参照）．ここで

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

である．

定義 1.2.2　接空間 $T_p(M)$ の双対空間を**余接空間**といい $T_p^*(M)$ により表す．$T_p(M)$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p$ に対する $T_p^*(M)$ の双対基底を

$$(dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p$$

により表す．

$U \cap V \neq \emptyset$ なる V 上の局所座標を $y^1, \cdots, y^n$ とする．$dy^i = \sum_{k=1}^n a_k^i\, dx^k$ とすると，双対基底の定義より

$$\delta^i_j = dy^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \sum_{k=1}^n a^i_k\, dx^k\left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^n a^i_k \frac{\partial x^k}{\partial y^j}$$

を得る．すなわち

$$(a^i_j) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right);$$
$$dy^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \tag{1.6}$$

となる．この式は大学 1 年次の微分積分学で学ぶ全微分の式と一致する．むしろ，この事実があるから $dx^1, \cdots, dx^n$ を $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ の双対基底と定義したのである．

$TM = \cup_{p\in M} T_p(M)$ は M 上の階数 n のベクトル束になる．これを**接ベクトル束**または単に**接束**という．実際，局所自明化は

$$\varphi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times \mathbb{R}^n$$
$$\varphi_\lambda\left(p,\ \sum_{i=1}^n X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = \left(p, \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}\right)$$

により与えられる．もう一つの座標近傍 U_μ における局所座標を $y^1, \cdots, y^n$ とする．$p \in U_\lambda \cap U_\mu$ において

$$\sum_{i=1}^n X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^n Y^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p$$

とすると

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

より

$$\sum_{j=1}^n Y^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p = \sum_{i,\,j=1}^n Y^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

となる．よって

$$X^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} Y^j$$

を得る．従って

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \varphi_{\lambda\mu} \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}, \qquad \varphi_{\lambda\mu} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$$

と表すことができるので，ヤコビ行列 $\{\varphi_{\lambda\mu}\}$ が接ベクトル束の変換関数を与える．1.1 節と比較すると次のようにいうことができる．基底 $\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}$ から基底 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ への基底の取り替えの行列 P はヤコビ行列の逆行列 $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)^{-1}$ である．従って係数の変換を与える行列 P^{-1} はヤコビ行列となる.)

接ベクトル束と同様に**余接ベクトル束** $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*(M)$ も階数 n のベクトル束になる．局所自明化は

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i (dx^i)_p \mapsto \left(p, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right)$$

により与えられる．また，

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx^i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \, dy^j$$

とすると

$$dy^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$$

より

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx^i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i,$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = {}^t\!\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = {}^t\!\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

となり，変換関数はヤコビ行列の転置の逆行列

$${}^t\!\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)^{-1}$$

で与えられる.

一般に M 上のベクトル束 $\pi : E \to M$ が与えられたとき，次のようなベクトル束が自然に構成される．点 $p \in M$ のファイバー $\pi^{-1}(p)$ を E_p で表す.

双対束 E^* ： E_p^* をファイバーとするベクトル束．変換関数は $\{{}^t\varphi_{\lambda\mu}^{-1}\}$.
$E \otimes E$ ： $E_p \otimes E_p$ をファイバーとするベクトル束.

$S^q E$ ： $S^q E_p$ をファイバーとするファイバー束．
$\wedge^q E$ ： $\wedge^q E_p$ をファイバーとするファイバー束．

定義 1.2.3 M 上のベクトル束 $\pi : E \to M$ に対し，C^∞ 級写像 $s : M \to E$ が $\pi \circ s = \mathrm{id}$ をみたすとき s を E の**切断**という．切断全体のなす集合を $\Gamma(M, E)$ または $C^\infty(M, E)$ により表す：

$$\Gamma(M, E) = \{s : M \to E \mid s \text{ は切断 }\}.$$

$\Gamma(M, E)$ は無限次元ベクトル空間になる．条件 $\pi \circ s = \mathrm{id}$ は各 p にファイバー $\pi^{-1}(p)$ のベクトル $s(p)$ を一つ対応させるということであり，s が C^∞ 級であるとは p が滑らかに M 上を動くときベクトル $s(p)$ も滑らかに変化するということである．

例 1.2.4 (1) $C^\infty(M, TM)$ の元をベクトル場という．局所座標 $x^1, \cdots, x^n$ を用いるとベクトル場は局所的に

$$\sum_{i=1}^{n} X^i(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

ただし $X^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, X^n(x^1, \cdots, x^n)$ は C^∞ 級関数，と表される．
(2) $C^\infty(M, \otimes^q TM)$ や $C^\infty(M, \otimes^q T^*M)$ のように q 個の接空間，余接空間のテンソル積，あるいはこれらが q 個混ざったテンソル積の切断を総称して **q 次テンソル場**という．例えば $C^\infty(M, TM \otimes TM \otimes T^*M)$ の元は局所的に

$$\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} T^{ij}{}_k(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k$$

と表される．
(3) $C^\infty(M, \wedge^q T^*M)$ の元を **q 次微分形式**という．q 次微分形式全体を $\Omega^q(M)$ で表すことにする．
(4) $E = M \times \mathbb{R}^r$ のとき E を階数 r の自明なベクトル束という．変換関数は恒等的に単位行列である．$r = 1$ の場合の自明な束の切断は M の C^∞ 関数に他ならない．

p 次微分形式 $\alpha \in \Omega^p$ に対し $p+1$ 次微分形式 $d\alpha$（これを α の**外微分**という）が次のようにして定まる：一つの座標近傍上の局所座標 $x^1, \cdots, x^n$ に関し微分形式 α は

$$\alpha = \sum_{i_1, \cdots, i_p = 1}^{n} \alpha_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

と表される：このとき $d\alpha$ を

$$d\alpha = \sum_{j,i_1,\cdots,i_p=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

により定義する．この定義は局所座標の選び方によらないことは容易に検証できる．外微分について特筆すべきことは

$$d \circ d = 0 \tag{1.7}$$

となることである．

証明

$$\begin{aligned} dd\alpha &= \sum_{i,\,j,\,i_1,\cdots,i_p=1}^{n} \frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \sum_{i<j} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n} \frac{\partial^2 \alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i \partial x^j} (dx^i \wedge dx^j + dx^j \wedge dx^i) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

であるが $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$ であるから右辺は 0 である． □

定義 1.2.5 (1) $\omega \in \Omega^p(M)$ が**閉形式**であるとは $d\omega = 0$ をみたすときをいう．(2) $\omega \in \Omega^p(M)$ が**完全形式**であるとは，ある $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ が存在して $\omega = d\alpha$ となるときをいう．

$d \circ d = 0$ より $\{\Omega^p(M), d\}_{p=0,\,1,\,2,\ldots}$ はコチェイン複体をなす．この複体を**ド・ラーム（de Rham）複体**という．コサイクルのなす部分群 $Z^p(M)$ は閉形式全体であり，コバウンダリーのなす部分群 $B^p(M)$ は完全形式全体である：

$$\begin{aligned} &Z^p(M) = \{\omega \in \Omega^P(M) \mid d\omega = 0\}, \\ &B^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid \omega = d\alpha,\ \exists \alpha \in \Omega^{p-1}(M)\}. \end{aligned}$$

もちろん $B^p(M) \subset Z^p(M)$ である．商群

$$H_d^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$$

を M の **p 次元ド・ラームコホモロジー群**という．ド・ラームコホモロジー群は $\mathbb{R}$ 係数特異コホモロジー群と同型である．更に M が向き付け可能閉リーマン多様体のときは調和微分形式の全体とも同型である（この場合有限次元になる）．ただし，境界を持たないコンパクト多様体を**閉多様体**という．複素数値の微分形式を考えるときは p 次元ド・ラームコホモロジー群は $H_d^p(M, \mathbb{C})$ により表す．もちろん $H_d^p(M, \mathbb{C}) \cong H_d^p(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ である．

定理 1.2.6（ストークスの定理） M を向き付けられた境界 ∂M を持つ n 次元コンパクト多様体とし，$\iota : \partial M \hookrightarrow M$ を包含写像とする．M の $n-1$ 次微分

形式 ω に対し，

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^*\omega$$

が成立する．ここに $\iota^*\omega$ は ι による ω の ∂M 上への**引き戻し**である．

このストークスの定理において特に $\partial M = \emptyset$ のとき次を得る．

系 1.2.7 M を向き付けられた n 次元閉多様体とする．$n-1$ 次微分形式 ω に対し，

$$\int_M d\omega = 0$$

となる．

1.3 複素多様体

多様体 M の定義において $\mathbb{R}^n$ の開集合を $\mathbb{C}^n$ の開集合に，C^∞ 級関数を正則関数に置き換えて定義し直したものを n 次元**複素多様体**という．従って特に複素多様体は $2n$ 次元 C^∞ 級多様体にもなる．定義 1.2.1 において多様体を複素多様体に，$\mathbb{R}^r$ を $\mathbb{C}^r$ に，そして C^∞ 級写像を正則写像に置き換えて定義されるものを**正則ベクトル束**という．従って正則ベクトル束においては局所自明化 $\varphi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times \mathbb{C}^r$ は正則写像で，変換関数 $\varphi_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL(r, \mathbb{C})$ も正則写像である．

複素多様体 M の局所正則座標を $z^1, \cdots, z^n$ としよう．更に $z^j = x^j + iy^j$ とおくと，x^1, $y^1, \cdots, x^n$, y^n が実多様体としての局所座標を与える．この座標が正の向きと定めることにより，複素多様体はすべて向き付け可能となる．

演習問題 1.3.1 このことを証明せよ．

実多様体としての接ベクトル束 TM のファイバーは

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial y^1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x^n},\ \frac{\partial}{\partial y^n}$$

の一次結合で表される．これを複素座標 z^j およびその複素共役 $\overline{z}^j$ を用いて書き表したい．そのために複素解析学における標準的記号

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - i\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + i\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

を用いる．この記号からわかるように虚数単位 i が係数に現れることは避け難い．これを許す為に TM の**複素化** $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ を考える．これは上記の一次結合を複素係数で考えることにするに他ならない．関係

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial z^i} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}, \qquad \frac{\partial}{\partial y^i} = i\left(\frac{\partial}{\partial z^i} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}\right)$$

より $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の元は $\frac{\partial}{\partial z^i}$，$\frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}$，$1 \leq i \leq n$，の複素係数一次結合で表される．$T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は $\frac{\partial}{\partial z^i}$ 達で張られるベクトルからなる部分空間 T'_pM と，$\frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}$ 達で張られるベクトルからなる部分空間 T''_pM の直和になる．よってベクトル束としても

$$TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T'M \oplus T''M$$

となる．$z^1, \cdots, z^n$ の定義されている座標近傍を U とすると U 上の局所自明化は

$$\varphi_U : T'M|_U \to U \times \mathbb{C}^n,$$
$$\varphi_U\left(\xi^i \frac{\partial}{\partial z^i}\right) = (z^1, \cdots, z^n, \xi^1, \cdots, \xi^n)$$

で与えられる．また $U \cap V \neq \emptyset$ なる座標近傍 V 上の局所正則座標 $w^1, \cdots, w^n$ に対し

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{\partial w^i}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial w^i}$$

であるので，変換関数は

$$\varphi_{UV}(p) = \left(\frac{\partial w^i}{\partial z^j}\right)$$

で与えられ，正則関数となる．よって $T'M$ は正則ベクトル束になる．$T'M$ を正則接ベクトル束という．これに対し $T''M$ の変換関数は

$$\overline{\left(\frac{\partial w^i}{\partial z^j}\right)}$$

になるので正則ベクトル束ではない．

余接ベクトル束も全く同様に

$$T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T'^*M \oplus T''^*M$$

と直和分解される．ここに T'^*M は $dz^1, \cdots, dz^n$ の一次結合で，T''^*M は $d\overline{z}^1, \cdots, d\overline{z}^n$ の一次結合で書けるベクトルからなる．いうまでもなく

$$dz^j = dx^j + i\,dy^j, \qquad \overline{z}^j = dx^i - i\,dy^j,$$
$$dz^i\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \delta_{ij},\ dz^i\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right) = 0,\ d\overline{z}^i\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right) = \delta_{ij},\ d\overline{z}^i\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right) = 0$$

である．T'^*M は正則ベクトル束になるが，T''^*M はならない．正則ベクトル束のいくつかのテンソル積は正則ベクトル束になる．特に $(\otimes^p T'M) \otimes (\otimes^q T'^*M)$，$\wedge^k T'^*M$ は正則ベクトル束になる．

複素多様体においては断らない限り常に微分形式は複素数値のものを考えることにする．正則局所座標 $z^1, \cdots, z^n$ を用いると $dx^i = \frac{1}{2}(dz^i + d\overline{z}^i)$, $dy^i = \frac{1}{2i}(dz^i - d\overline{z}^i)$ であるので，任意の k 次微分形式 α は

$$\alpha = \sum_{i_1,\cdots,i_p,\bar{j}_1,\cdots,\bar{j}_q} \alpha_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}\, dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\overline{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^{j_q}$$

と表される．ただし右辺は $p+q=k$ となる全ての添字に関する和を意味するものとする．与えられた (p,q) に対し，$dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\overline{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^{j_q}$ の形のものの一次結合で書かれる微分形式を (p,q) 形式，あるいは (p,q) 型の微分形式という．以上により，k 次微分形式全体 $\Omega^k(M)$ は $p+q=k$ なる (p,q) 形式全体のなす部分空間 $\Omega^{p,q}(M)$ の直和となる：

$$\Omega^k(M) = \sum_{p+q=k} \Omega^{p.q}(M).$$

外微分作用素 $d : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$ は値域の分解に対応して $d = \partial + \overline{\partial}$ と分解される．局所正則座標を用いると，例えば 1 次微分形式 $\alpha = \alpha_j\, dz^j$ に対しては

$$\partial\alpha = \frac{\partial\alpha^j}{\partial z^i}\, dz^i \wedge dz^j, \qquad \overline{\partial}\alpha = \frac{\partial\alpha_j}{\partial\overline{z}^i}\, d\overline{z}^i \wedge dz^j$$

である．$d^2 = 0$ より，型の分解 $d^2\Omega^{p,q} = \Omega^{p+2,q} \oplus \Omega^{p+1,q+1} \oplus \Omega^{p,q+2}$ に応じ

$$\partial^2 = 0, \quad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0, \quad \overline{\partial}^2 = 0$$

を得る．固定した p に対しコチェイン複体 $(\Omega^{p,*}, \overline{\partial})$ を**ドルボー（Dolbeault）複体**といい，その q 次元コホモロジーを **q 次元ドルボーコホモロジー群**といい，$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$ により表す．後で示すようにケーラー多様体と呼ばれる M に対しては

$$H^k_d(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$$

が成り立つ．このことは調和形式を媒介として理解される．

$E \to M$ を正則ベクトル束とすると C^∞ 級 E 値 (p,q) 形式が $E \otimes (\wedge^p T'^*) \otimes (\wedge^q T''^*)$ の切断として定まる．このとき

$$\Omega^{p,q}(E) = \Gamma\big(M, E \otimes (\wedge^p T'^*) \otimes (\wedge^q T''^*)\big)$$

とおく．E の変換関数が正則関数であることから $\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$ が自然に定まる．$\overline{\partial}^2 = 0$ であるから $\Omega^{p,*}(E)$ はコチェイン複体をなす．これの q 次コホモロジー群を $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M, E)$ により表し，E に値を持つ **(p,q) 型ドルボーコホモロジー群**という．

1.4 層

本書では層や層係数コホモロジーを頻繁に扱うことはないが，主束やベクトル束の扱いに若干必要であるので，本書に必要最小限なだけの解説をここでしておく．

定義 1.4.1 位相空間 M 上の可換群の**層** $\mathcal{S}$ とは次の性質をみたす 3 つ組 (S, π, M) である．

(1) S と M は位相空間で，$\pi : S \to M$ は全射局所同相写像である．

(2) 各 $p \in M$ に対し $S_p := \pi^{-1}(p)$ は可換群である．(S_p を p 上の**茎**という．)

(3) $\alpha,\ \beta \in S_p$ に対し $\alpha + \beta \in S_p$ および $\alpha - \beta \in S_p$ を対応させる 2 つの写像 $S \times_\pi S \to S$ は連続である．ここに $S \times_\pi S = \{(\alpha, \beta) \in S \times S \mid \pi(\alpha) = \pi(\beta)\}$ で $S \times S$ からの相対位相を入れたものである．

ここでは可換群の層を定義したが非可換群であれ，ある環 K に対する K 加群であれ，各々の代数的演算が連続であることを要請することにより，群の層，K 加群の層などが定義できる．本書で必要なのは群の層であるが，数学全般でよく現れるのは K 加群の層であろう．ここではとりあえず加群の層を扱うことにする．

(S, π, M) と (S', π', M) を同じ M 上の層とする．$f : S \to S'$ が連続で，$\pi = \pi' \circ f$ をみたし，制限 $f|_{S_p} : S_p \to S'_p$ は準同型であるとき，f は**層準同型**であるという．

例 1.4.2 $E \to M$ を可微分多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル束とする．$p \in M$ を一つ取り固定する．p の近傍 U 上の E の C^∞ 級切断 s と，もう一つの近傍 V 上の C^∞ 級切断 t は $U \cap V$ 上で一致するとき同値であるということにする．この同値類を p における C^∞ 級切断の**芽**という．s の属する同値類を $[s]_p$ により表す．$\widetilde{E}_p$ を p における C^∞ 級芽の集合とし，

$$\mathcal{C}^\infty(E) = \bigcup_{p \in M} \widetilde{E}_p$$

とおく．$\pi : \mathcal{C}^\infty(E) \to M$ を $\pi([s]_p) = p$ により定義する．また M の開集合 U 上の C^∞ 級切断 s に対し，集合 $\{[s]_p \mid p \in U\} \subset \mathcal{C}^\infty(E)$ を対応させる．このような集合全体を基底とする位相を $\mathcal{C}^\infty(E)$ に与えると $\mathcal{C}^\infty(E)$ は層の定義をみたす．これを E の C^∞ 級切断の芽の層という．

例 1.4.3 $E \to M$ を複素多様体 M 上の正則ベクトル束とする．上の例により C^∞ 級切断の芽の層 $\mathcal{C}^\infty(E)$ が定義される．また，全く同様にして正則切断の芽の層 $\mathcal{H}(E)$ も定義される．自然な包含写像 $\mathcal{H}(E) \to \mathcal{C}^\infty(E)$ は層準同型で

ある．

例 1.4.4 G をリー群とする．多様体 M の G への C^∞ 級写像の芽の層 $\mathcal{G}$ は群の層になる．

例 1.4.5 群 G に離散位相を入れると $M \times G$ は層になる．これを定数層という．別な言い方をすれば G に値をとる定値関数の芽の層である．

例 1.4.6 M 上の**前層**（**準層**ともいう）とは，各開集合 U に対し可換群 S_U が与えられ，$V \subset U$ である開集合 U，V に対し準同型 $r_{V,U} : S_U \to S_V$ が与えられており，次の性質をみたすときをいう．

(1) U が空集合なら $S_U = 0$.

(2) $r_{U,U} = \mathrm{id}$.

(3) $W \subset V \subset U$ ならば $r_{W,U} = r_{W,V} \circ r_{V,U}$.

前層が与えられると次のようにして層が定まる．$p \in M$ を一つ固定する．p の近傍を U，V とするとき，$s \in S_U$ と $t \in S_V$ は $r_{U\cap V,U}s = r_{U\cap V,V}t$ のとき同値であると定義する．この同値類 $[s]_p$ を芽と呼ぶ．p におけるすべての芽からなる集合 S_p を p における茎という．$S = \bigcup_{p\in M} S_p$ とおく．各 $s \in S_U$ に対し集合 $\{[s]_p \mid p \in U\}$ を対応させ，このような集合全体を基底とする位相を S に与える．$\pi([s]_p) = p$ により $\pi : S \to M$ を定義すると (S, π, M) は層になる．

逆に，層から前層を次のように定義できる．開集合 U 上の連続写像 $s : U \to S$ で $\pi\circ s = \mathrm{id}$ をみたすものを U 上の**切断**という.（例えばベクトル束 E の C^∞ 級切断の芽の層の場合，U 上の切断は U 上の E の切断に他ならない.）U 上の切断の全体を $\Gamma(U, S)$ により表す．$V \subset U$ に対し制限写像を $r_{V,U} : \Gamma(U, S) \to \Gamma(V, S)$ とする．$S_U = \Gamma(U, S)$ と取ることにより前層が得られる．

層から前層を作り，この前層から層を作ると最初の層が復元される．しかし，前層から層を作り，再び前層を作っても一般には元の前層は復元されない（[29], 5.7，5.8 参照）．

次に**層 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ に係数を持つコホモロジー群** $H^q(M, \mathcal{S})$ を定義する．手順は次の通りである．(1) まず，M の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ に対し，$\mathcal{S}$ から自然に定まる前層 $\Gamma(U, S)$ に係数を持つコホモロジー群 $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$ を定義する．
(2) 開被覆 $\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ の細分であるとき，制限により自然に $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \to H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{S})$ が定まる．よって $\mathfrak{U}$ がすべての開被覆を動くときの群 $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$ の**帰納極限**を $H^q(M, \mathcal{S})$ とおき，層 $\mathcal{S}$ に係数を持つ q 次コホモロジー群と呼ぶ．

以下 (1) のステップを説明する．$\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ を M の開被覆とする．共通部分が空でない $\mathfrak{U}$ の開集合の順序のついた集まり $\sigma = (U_{i_0}, U_{i_1}, \cdots, U_{i_q})$ を **$\boldsymbol{q}$ 単体**という．σ の**第 $\boldsymbol{k}$ 面**とは $q-1$ 単体 $(U_{i_0}, \cdots, U_{i_{k-1}}, U_{i_{k+1}}, \cdots, U_{i_q})$ の

ことである．

q コチェイン f とは各 q 単体 σ に $\Gamma(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}, S)$ の元 $f(\sigma)$ を対応させるものである．$f(\sigma)$ を $f_{i_0i_1\cdots i_q}$ とも表すことにする．q コチェイン全体の集合を $C^q(\mathfrak{U},\mathcal{S})$ により表す．記号の簡略化のため，制限を

$$r_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots i_q} := r_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}, U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{k-1}}\cap U_{i_{k+1}}\cap\cdots\cap U_{i_q}}$$

により表す．余境界作用素

$$d : C^q(\mathfrak{U},\mathcal{S}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{S}) \tag{1.8}$$

を次により定義する：

$$(df)_{i_0\cdots i_q} = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k r_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots i_q}(f_{i_0\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_q}). \tag{1.9}$$

これにより $C^*(\mathfrak{U},\mathcal{S})$ はコチェイン複体になる．これの q 次コホモロジー群が $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{S})$ である．

例 1.4.7　$q=0$ の場合，0 コチェイン $\{f_i\}$ に対し，$U_i\cap U_j\neq\emptyset$ のとき

$$(df)_{ij} = (f_i - f_j)|_{U_i\cap U_j}$$

であるから，$\{f_i\}$ がコサイクルであるということは $\{f_i\}$ が層 $\mathcal{S}$ の M 上の大域的切断を定めるということである：

$$H^0(\mathfrak{U},\mathcal{S}) = \Gamma(M,S).$$

これは開被覆 $\mathfrak{U}$ の取り方によらない．よって

$$H^0(M,\mathcal{S}) = \Gamma(M,S)$$

である．

層の短完全系列からコチェイン複体の短完全系列が誘導され，長完全系列が標準的方法で導かれる．さらに帰納極限に移ることにより層係数コホモロジーの長完全系列が得られる．

定義 1.4.8　G を可換群としたとき，定数層 $M\times G$ に係数を持つコホモロジー群を**チェック（Čech）コホモロジー群**という．

定理 1.4.9（ド･ラームの定理）　滑らかな多様体 M に対し，ド･ラームコホモロジー群 $H^q_{DR}(M)$ と定数層 $M\times\mathbb{R}$ のチェックコホモロジー群 $H^q(M,\mathbb{R})$ は同型である．

これらは更に $\mathbb{R}$-**特異コホモロジー群**，**アレクサンダー・スパニエ（Alexander–Spanier）コホモロジー群**とも同型である．証明は [29]，第 5 章を見よ．

定理 1.4.10（ドルボーの定理）　$E \to M$ を正則ベクトル束とする．このときドルボーコホモロジー群 $H_{\bar\partial}^{p,q}(M,E)$ は，E 値正則 p 次形式の芽の層に係数を持つコホモロジー群 $H^q(M,\Omega^p(E))$ と同型である．

証明は [3] を参照せよ．さて，ここまでの構成は可換群の層または K 加群の層のときになされたことに気をつけよう．そこで次に非可換なリー群 G に対し，G に値を持つ C^∞ 級写像の芽の層 $\mathcal{G}$ を考えよう．$H^0(M,\mathcal{G}) = \Gamma(M,\mathcal{G})$ であることは可換群の場合と同じである．しかし $q \geq 1$ に対し q 次コホモロジー群は標準的方法では定義されない．ただし，$q=1$ に対しては次のようにしてコホモロジー集合（G が可換群でないなら群にはならないので集合という）が定義できる．

$\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ を M の開被覆とする．$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ なる $i,\ j \in I$ に対し $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{G})$ が与えられ，$U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ のときこの集合上で

$$f_{ij} f_{jk} = f_{ik}$$

をみたすとき，この $\{f_{ij}\}$ を 1 コサイクルという．$i=j=k$ とすると

$$f_{ii} f_{ii} = f_{ii}$$

であるから，$f_{ii}=1$ を得る．更に

$$f_{ij} f_{ji} = f_{ii} = 1$$

より $f_{ji} = f_{ij}^{-1}$ を得る．2 つのコサイクル $\{f_{ij}\}$ と $\{f'_{ij}\}$ が同値であるとは，ある 0 コチェイン $\{h_i\}$ が存在して

$$f'_{ij} = h_i^{-1} f_{ij} h_j$$

をみたすときをいう．この同値類の全体を $H^1(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ により表す．そして $\mathfrak{U}$ がすべての開被覆を動くときの帰納極限を $H^1(M,\mathcal{G})$ により表す．もちろん G が可換群ならば $H^1(M,\mathcal{G})$ は可換群になる．

定理 1.4.11　$H^1(M,\mathcal{G})$ は M 上の主 G 束（定義 2.3.4）の同型類の全体と一致する．

証明　主 G 束 P に対しその変換関数 f_{ij} は $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上 $f_{ij} f_{jk} = f_{ik}$ をみたす．よってコサイクルを定める．いまもう一つの主 G 束 P' が P と同型で

あるとする．また，開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_i \mid i\in I\}$ に対し P および P' は U_i 上局所自明であるとし，P および P' の変換関数が $\{f_{ij}\}$，$\{f'_{ij}\}$ により与えられるとする．このとき P' から P への束同型は，各 U_i 上の局所自明化に関し

$$U_i\times G\to U_i\times G,\qquad (p,g)\mapsto (p,h_ig)$$

と表され，次の図式を可換にする．

$$\begin{array}{ccc} U_j\times G & \xrightarrow{f'_{ij}} & U_i\times G \\ \big\downarrow{\scriptstyle h_j} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_i} \\ U_j\times G & \xrightarrow{f_{ij}} & U_i\times G \end{array}$$

よって $f_{ij}h_j=h_if'_{ij}$ をみたす．よって 2 つのコサイクル $\{f_{ij}\}$ と $\{f'_{ij}\}$ は同値である．

逆にコサイクルの代表元は変換関数の条件をみたすので主 G 束を定める．コホモロジーとして同値なものは，上と同じ考察から同値な束を定める． □

第 2 章
接続の理論およびリーマン幾何

本章では接続の一般論を展開する．まず C^∞ 級ベクトル束の場合の線形接続について述べ，その特別な場合としてリーマン多様体のレビ･チビタ接続，正則ベクトル束の標準接続，ケーラー多様体の接続があることを説明する．その後，これらの一般化として主束の接続があることを説明し，特性類の理論（チャーン・ヴェイユ理論，チャーン・サイモンス理論）について述べる．

さらに 2.5 節においては測地線，ボホナーテクニックによるテンソル計算，調和積分論，ホロノミーなどのリーマン幾何における基本事項を解説する．

本章以降はアインシュタインの規約を用い，上下に同じ添字がついていれば Σ 記号が無くてもその添字に関し和を取っているものとする．

2.1　ベクトル束の接続

M を n 次元 C^∞ 級多様体，$\pi : E \to M$ を M 上の実または複素ベクトル束とする．切断全体 $C^\infty(M, E)$ は実または複素ベクトル空間になる．E が複素ベクトル束のときは TM も複素化しておくことにする．TM の複素化 $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とは各ファイバーを複素化したベクトル束のことである．接ベクトル束の複素化とは実際上複素数 X^i を係数とする接ベクトル $X^i\partial/\partial x^i$ を考えることにすることに他ならない．記号は複素化したものも TM をしばしば混用することにする．

定義 2.1.1　線形写像 $\nabla : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E \otimes T^*M)$ が E の**線形接続**であるとは，任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ と切断 $s \in C^\infty(M, E)$ に対し

$$\nabla(fs) = f\nabla s + s \otimes df$$

をみたすときをいう．このような線形接続 ∇ が与えられたとき，T^*M と TM の縮約から定まる写像

$$C^\infty(M, E\otimes T^*M)\times C^\infty(M, TM)\to C^\infty(M,E),$$
$$(\nabla s, X)\mapsto \nabla_X s$$

により $\nabla_X s$ を定義する．$\nabla_X s$ を s の X による**共変微分**という．∇ 自体を共変微分ということもある．

例 2.1.2 階数 1 の自明なベクトル束 $E=M\times\mathbb{R}$ の場合，切断は C^∞ 級関数に他ならない．$s\in C^\infty(M,E)=C^\infty(M)$ に対し，外微分 $ds\in C^\infty(M,T^*M)=C^\infty(M,E\otimes T^*M)$ を用いて

$$\nabla s = ds$$

と定義できる．このとき $\nabla_X s=\langle ds, X\rangle = Xs$ である．以下関数に対する共変微分は外微分であると約束する．

階数 r の自明な束にも上と同様な自然な線形接続が存在する．しかし，変換関数が定関数でない限り，一般には自然な線形接続は存在しない．

演習問題 2.1.3 変換関数がすべて定関数であるとき（このような束を平坦束という）自然な線形接続が存在することを示せ．

演習問題 2.1.4 1 の分割を用いて，任意のベクトル束は線形接続を持つことを示せ．

ベクトル束 $\pi: E\to M$ に対し M の開被覆 $\{U_\lambda\}$ を各 U_λ 上局所自明化 $E|_{U_\lambda}:=\pi^{-1}(U_\lambda)\cong U_\lambda\times\mathbb{R}^r$ が与えられているように取る（$E|_{U_\lambda}$ を E の U_λ への制限という）．$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ を $\mathbb{R}^r$ の標準的基底とし，局所自明化を用いて

$$U_\lambda\times\mathbb{R}^r\to E|_{U_\lambda},\qquad (p,\boldsymbol{e}_i)\mapsto \boldsymbol{e}_{\lambda i}(p)$$

により $E|_{U_\lambda}$ の切断 $\boldsymbol{e}_{\lambda i}$ を定める．$\boldsymbol{e}_{\lambda 1},\cdots,\boldsymbol{e}_{\lambda r}$ を U_λ 上の**局所枠**という．局所枠は各点でファイバーの基底を定める．よって任意の切断 $s\in C^\infty(M,E)$ は U_λ 上

$$s=s^1\boldsymbol{e}_{\lambda 1}+\cdots+s^r\boldsymbol{e}_{\lambda r}=\boldsymbol{e}_{\lambda i}s^i,\qquad s^1,\cdots,s^r\in C^\infty(U_\lambda)$$

と表される．線形接続の定義より

$$\nabla s=(\boldsymbol{e}_{\lambda i}\otimes ds^i+\nabla\boldsymbol{e}_{\lambda i}s^i) \tag{2.1}$$

である．

定義 2.1.5　U_λ 上の 1 次微分形式 ${\theta_\lambda}^i_j$ を

$$\nabla \boldsymbol{e}_{\lambda j} = \boldsymbol{e}_{\lambda i} \otimes {\theta_\lambda}^i_j \tag{2.2}$$

により定義する．r 次正方行列に値を持つ 1 次微分形式 $\theta_\lambda = ({\theta_\lambda}^i_j)_{1\leq i,\, j\leq r}$ を U_λ 上の**接続形式**または**接続行列**という．

1.1 節で述べたように上についた添字 i が行の成分を，下についた添字 j が列の成分を表すことに注意しよう．この定義のもとに

$$\nabla s = \boldsymbol{e}_{\lambda i} \otimes (ds^i + {\theta_\lambda}^i_j s^j)$$

となる．別の μ $(\neq \lambda)$ に対し $\boldsymbol{e}_{\mu 1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\mu r}$ を U_μ 上の局所枠とすると

$$\boldsymbol{e}_{\mu j} = \boldsymbol{e}_{\lambda i} {f_{\lambda\mu}}^i_j \tag{2.3}$$

と表すことができる．

命題 2.1.6　$U_\lambda \cap U_\mu$ 上 θ_λ と θ_μ は

$$\theta_\mu = f_{\lambda\mu}^{-1} \theta_\lambda f_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}^{-1} df_{\lambda\mu} \tag{2.4}$$

の関係をみたす．逆にこの関係をみたす $\{\theta_\lambda\}$ が与えられると (2.2) により定義される線形接続 ∇ は well-defined である．

証明　(2.3) の両辺を共変微分すると

$$\nabla \boldsymbol{e}_{\mu j} = \nabla \boldsymbol{e}_{\lambda i} {f_{\lambda\mu}}^i_j + \boldsymbol{e}_{\lambda i} \otimes d{f_{\lambda\mu}}^i_j$$

を得る．よって

$$\boldsymbol{e}_{\mu k} \otimes {\theta_\mu}^k_j = \boldsymbol{e}_{\lambda l} \otimes {\theta_\lambda}^l_i {f_{\lambda\mu}}^i_j + \boldsymbol{e}_{\lambda l} \otimes d{f_{\lambda\mu}}^l_j$$

となる．この左辺を (2.3) を用いて書き直すことにより

$${f_{\lambda\mu}}^l_i {\theta_\mu}^i_j = {\theta_\lambda}^l_i {f_{\lambda\mu}}^i_j + d{f_{\lambda\mu}}^l_j$$

となる．更にこれを行列の積の形に書くと

$$f_{\lambda\mu}\theta_\mu = \theta_\lambda f_{\lambda\mu} + df_{\lambda\mu},$$
$$\theta_\mu = f_{\lambda\mu}^{-1} \theta_\lambda f_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}^{-1} df_{\lambda\mu}$$

を得る．逆にこの関係をみたす $\{\theta_\lambda\}$ が与えられれば well-defined な線形接続が定まることは，上の証明の逆をたどれば確かめることができる．　□

定義 2.1.7 行列に値を持つ 2 次微分形式 $\Theta_\lambda = d\theta_\lambda + \theta_\lambda \wedge \theta_\lambda$，すなわち

$$\Theta_{\lambda}{}^{i}_{j} = d\theta_{\lambda}{}^{i}_{j} + \theta_{\lambda}{}^{i}_{k} \wedge \theta_{\lambda}{}^{k}_{j}$$

を ∇ の**曲率形式**という．

命題 2.1.8 $\Theta_\mu = f_{\lambda\mu}^{-1} \Theta_\lambda f_{\lambda\mu}$.

演習問題 2.1.9 上の命題を証明せよ．

この命題より Θ_μ は Θ_λ の基底の取り替えの行列 $f_{\lambda\mu}$ による相似行列である．よって Θ_λ，Θ_μ は，各点 $p \in U_\lambda \cap U_\mu$ でファイバー $E_p = \pi^{-1}(p)$ のある一次変換の，基底 $\{\boldsymbol{e}_{\lambda i}\}$ および $\{\boldsymbol{e}_{\mu i}\}$ に関する表現行列になっている．すなわち $\{\Theta_\lambda\}$ は $C^\infty(M, E \otimes E^* \otimes \wedge^2 T^* M)$ の元を定める．なぜなら 1.1 節で述べたように $E_p \otimes E_p^*$ の元は E_p の一次変換と同一視されるからである．

定義 2.1.10 $\mathrm{End}(E) := E \otimes E^*$ とおき**自己準同型束**と呼ぶ．E の各ファイバーの正則一次変換からなる自己準同型束の部分集合を E の**自己同型束**といい，$\mathrm{Aut}(E)$ により表す：

$$\mathrm{Aut}(E) = \{\varphi \in \mathrm{End}(E) \mid \pi(\varphi) = p \text{ のとき } \varphi : E_p \to E_p \text{ は正則一次変換 }\}.$$

$\mathrm{Aut}(E)$ の切断を E の**ゲージ変換**という．ゲージ変換全体のなす集合を**ゲージ変換群**といい $\mathcal{G}_E$ により表す：$\mathcal{G}_E = C^\infty(M, \mathrm{Aut}(E))$ である．

演習問題 2.1.11 次を示せ．

(1) $\mathcal{G}_E$ は群になる．
(2) ゲージ変換群 $\mathcal{G}_E$ は $C^\infty(M, E)$ に作用する．すなわち，自然な写像 $\mathcal{G}_E \times C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ が存在する．
(3) $\mathcal{C}(E)$ を E の接続全体とする．$\varphi \in \mathcal{G}_E$ と $\nabla \in \mathcal{C}(E)$ に対し，合成 $\varphi \circ \nabla \circ \varphi^{-1} : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E \otimes T^* M)$ は E の接続を定める．これによりゲージ変換群は接続全体の空間 $\mathcal{C}(E)$ に作用する．
(4) 接続の全体 $\mathcal{C}(E)$ はベクトル空間 $C^\infty(M, \mathrm{End}(E) \otimes T^* M)$ をモデルとしたアファイン空間である．すなわち，一つの接続 ∇_0 を固定すると

$$\mathcal{C}(E) = \{\nabla_0 + \alpha \mid \alpha \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E) \otimes T^* M)\}$$

と表すことができる．

E の接続 ∇ が与えられたとする．このとき E^* および $E \otimes E^*$ の自然な接続

が次のようにして定まる．

(a) $s \in C^\infty(M,E)$，$\alpha \in C^\infty(M,E^*)$ に対し

$$\langle s, \nabla\alpha\rangle = d\langle s,\alpha\rangle - \langle \nabla s, \alpha\rangle \tag{2.5}$$

により $\nabla\alpha$ を定めると E^* の接続が定まる．実際

$$\begin{aligned}\langle s, \nabla(f\alpha)\rangle &= d\langle s, f\alpha\rangle - \langle \nabla s, f\alpha\rangle \\ &= \langle s,\alpha\rangle\, df + f\, d\langle s,\alpha\rangle - f\langle\nabla s,\alpha\rangle \\ &= \langle s, \alpha\otimes df + f\nabla\alpha\rangle,\end{aligned}$$

すなわち $\nabla(f\alpha) = \alpha\otimes df + f\nabla\alpha$ であるから ∇ は接続の条件をみたす．

(b) より一般に 2 つのベクトル束 E，F に接続 ∇_E，∇_F が与えられたとする．$C^\infty(M,E\otimes F)$ は $\alpha\otimes\beta \in C^\infty(M,E)\otimes C^\infty(M,F)$ の形の元で張られる．そこで

$$\nabla(\alpha\otimes\beta) = \nabla_E\alpha\otimes\beta + \alpha\otimes\nabla_F\beta$$

により $E\otimes F$ の接続 ∇ を定義すればよい．

(2.5) を書き換えれば $\nabla\langle s,\alpha\rangle = \langle\nabla s,\alpha\rangle + \langle s,\nabla\alpha\rangle$ となる．この左辺は $s\otimes\alpha$ の縮約を取ってから共変微分したものであり，右辺は共変微分してから縮約を取ったものである．テンソル積に対してはこの両者が等しくなるように共変微分を定義してあり，このことを縮約と共変微分は可換であると言い表す．

補題 2.1.12　E の局所枠を $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r$，その双対基底から定まる E^* の局所枠を $\boldsymbol{e}^1,\cdots,\boldsymbol{e}^r$ とする．E の線形接続 ∇ の $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ に関する接続行列を $\theta = (\theta^i_j)$ とする．

(1) 恒等変換 $\mathrm{id} = \boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^i$ は平行である：$\nabla\,\mathrm{id} = 0$.

(2) E^* に自然に定まる線形接続の $\boldsymbol{e}^1,\cdots,\boldsymbol{e}^r$ に関する接続行列は $-{}^t\theta = (-\theta^j_i)$ で与えられる．(ここでは双対空間の係数ベクトルも縦ベクトルと同一視している．横ベクトルと同一視すれば転置は必要ない．)

証明　(1) 縮約を取ってから共変微分するのと共変微分してから縮約を取るのを比較する：

$$\begin{aligned}\nabla\langle\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_k\rangle &= \nabla(\boldsymbol{e}_i\delta^i_k) = (\nabla\boldsymbol{e}_i)\delta^i_k = \nabla\boldsymbol{e}_k; \\ \nabla\langle\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_k\rangle &= \langle\nabla(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^i), \boldsymbol{e}_k\rangle + \langle\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^i, \nabla\boldsymbol{e}_k\rangle \\ &= \langle\nabla(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^i), \boldsymbol{e}_k\rangle + \nabla\boldsymbol{e}_k.\end{aligned}$$

両式より $\nabla(\mathrm{id}) = \nabla(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^i) = 0$ を得る．(または $\mathrm{id}^2 = \mathrm{id}$ の両辺を共変微分

することにより $2\nabla\,\mathrm{id} = \nabla\,\mathrm{id}$ となるから，という証明でもよい.）
(2) 接続行列の定義 $\nabla \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \otimes \theta^i_j$ より

$$0 = d\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j \rangle = \langle \nabla \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j \rangle + \langle \boldsymbol{e}_i, \nabla \boldsymbol{e}^j \rangle = \theta^j_i + \langle \boldsymbol{e}_i, \nabla \boldsymbol{e}^j \rangle.$$

よって $\nabla \boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}^i \otimes (-\theta^j_i)$ を得る. □

命題 2.1.13 ∇ の接続形式を θ とすると，ゲージ群の元 $\varphi \in \mathcal{G}_E$ に対し $\varphi(\nabla) := \varphi \circ \nabla \circ \varphi^{-1}$ の接続形式は

$$\theta - \nabla\varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi\theta\varphi^{-1} - d\varphi \cdot \varphi^{-1}$$

で与えられる．ここに $d\varphi$ は局所枠に関する表現行列としての行列値関数 $\varphi = (\varphi^i_j)$ の外微分である.

証明 まず $\nabla(\varphi^{-1} \cdot \varphi) = \nabla(\mathrm{id}) = 0$ より $\nabla\varphi^{-1} = -\varphi^{-1}\nabla\varphi \cdot \varphi^{-1}$ を得る. 次に

$$\varphi(\nabla(\varphi^{-1}s)) = \nabla s + \varphi((\nabla\varphi^{-1})s) = \nabla s - \nabla\varphi \cdot \varphi^{-1}s$$

となるから $\varphi(\nabla)$ の接続形式は $\theta - \nabla\varphi \cdot \varphi^{-1}$ となる．更に，$\varphi = \boldsymbol{e}_i \otimes \varphi^i_j \boldsymbol{e}^j$ とすると

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes d\varphi^i_j + \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \theta^k_i \varphi^i_j - \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^k \otimes \varphi^i_j \theta^j_k,$$

すなわち，$\nabla\varphi = d\varphi + [\theta, \varphi]$ を得る．よって

$$\theta - \nabla\varphi \cdot \varphi^{-1} = \theta - (d\varphi + \theta\varphi - \varphi\theta)\varphi^{-1} = \varphi\theta\varphi^{-1} - d\varphi \cdot \varphi^{-1}$$

となる. □

命題 2.1.14 $\Theta(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$.

証明 まず $d\theta(X, Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y])$ であることを思い出そう（例えば [23]，p.126 参照）．よって

$$\begin{aligned}\Theta(X, Y) &= (d\theta + \theta \wedge \theta)(X, Y) \\ &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y]) + \theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X)\end{aligned}$$

となる．一方，$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r)$ とおくと $\nabla \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \otimes \theta$ であるから，

$$\begin{aligned}&(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\boldsymbol{e} \\ &\quad = \nabla_X(\boldsymbol{e}\theta(Y)) - \nabla_Y(\boldsymbol{e}\theta(X)) - \boldsymbol{e}\theta([X, Y]) \\ &\quad = \boldsymbol{e}\big(\theta(X)\theta(Y) + X\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X) - Y\theta(X) - \theta([X, Y])\big)\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{e}\Theta(X, Y).$$

よって命題を得る． □

特に

$$\Theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}.$$

すなわち，曲率形式 Θ は $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ と $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}$ が可換かどうかを計るものであるということがわかる．

定義 2.1.15 $d^\nabla : C^\infty(M, E \otimes (\wedge^p T^*M)) \to C^\infty(M, E \otimes (\wedge^{p+1} T^*M))$ を

$$d^\nabla(s \otimes \alpha) = \nabla s \wedge \alpha + s \otimes d\alpha$$

により定義し**共変外微分**という．$p = 0$ に対しては $d^\nabla = \nabla$ であることに注意せよ．

演習問題 2.1.16 $d^\nabla \circ d^\nabla : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E \otimes \wedge^2 T^*M)$ に対し次を示せ．

(1) $d^\nabla \circ d^\nabla = \Theta$.
(2) $d^\nabla \Theta = 0$（これを**ビアンキ（Bianchi）の恒等式**という）．

2.2 リーマン接続，正則ベクトル束の標準接続，ケーラー多様体

2.2.1 リーマン多様体

定義 2.2.1 2 次対称テンソル $g \in C^\infty(M, S^2T^*M)$ が**リーマン計量**であるとは，任意の点 $p \in M$ において $g_p : T_pM \times T_pM \to M$ が正値 2 次形式であるとき，すなわち T_pM の内積を定めるときをいう．局所座標を使って $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ と書いた場合，(g_{ij}) は正値対称行列になる．

定理 2.2.2 リーマン多様体には以下の (1)，(2) をみたす接ベクトル束 TM の線形接続が一意的に存在する．(これを**レビ・チビタ（Levi-Civita）接続**，または**リーマン接続**という．)

(1) 任意のベクトル場 X，Y に対し $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
(2) 任意のベクトル場 X，Y，Z に対し

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

条件 (1) を“ ∇ は捩れがない ”，(2) を“ ∇ は計量と**両立する** ”と言い表す．

証明　もし (1)，(2) をみたす ∇ が存在したとする．(2) より次を得る．

$$
\begin{aligned}
Xg(Y,Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\
Yg(Z,X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\
Zg(X,Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).
\end{aligned}
$$

この 3 式と (2) を組み合わせて

$$
\begin{aligned}
&Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\
&\qquad = g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g([Y,Z],X) + g([X,Z],Y) \\
&\qquad = 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X,Y],Z) + g([Y,Z],X) + g([X,Z],Y)
\end{aligned}
$$

を得る．よって

$$
\begin{aligned}
&g(\nabla_X Y, Z) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\big(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\
&\qquad\qquad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) - g([X,Z],Y)\big)
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

となる．特に

$$
g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{2.7}
$$

となる．そこで

$$
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^l_{ij} \frac{\partial}{\partial x^l}
$$

により Γ^l_{ij} を定義する（これを**クリストッフェル**（**Christoffel**）**記号**という）．(2.7) より

$$
\Gamma^l_{ij} g_{lk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)
$$

を得る．更に (g_{ij}) の逆行列を $(g^{kl}) := (g_{ij})^{-1}$ により表すと

$$
\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{2.8}
$$

となる．よって (1)，(2) をみたす線形接続が存在するとすれば一意的であることがわかる．次に存在を示す．そのためには式 (2.6)，またはそれと同値な (2.7) により $\nabla_X Y$ を定義し，それが条件 (1)，(2) をみたすことをみればよい．(2.7) により ∇ を定義すると Γ^i_{jk} が決まる．まず (2.8) から

$$
\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}
$$

であることに注意する．これより

$$
\nabla_X Y - \nabla_Y X
$$

$$= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + X^iY^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} - \left(Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^iX^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$
$$= [X, Y]$$

となり，(1) をみたすことがわかる．また式 (2.7) を用いて (2) もみたすことがわかる（簡単な計算なので読者の練習問題とする）． □

$\nabla\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^k$ であるので

$$\omega = (\Gamma^i_{jk}dx^k) \tag{2.9}$$

が接続形式である．定理 2.2.2 の証明の最後の部分からわかるように，Γ^i_{jk} が j と k について対称であることと，レビ･チビタ接続が捩れがないこととは同値である．この理由から定理 2.2.2 の (1) の性質を，捩れがないというかわりに，対称であるといい表すことがある．

命題 2.2.3　接ベクトル束の枠を $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ とし，レビ･チビタ接続のこの枠に関する接続形式を θ とする：$\nabla\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\theta$．余接ベクトル束の双対枠を

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau^1 \\ \vdots \\ \tau^n \end{pmatrix}$$

とする：$\tau^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$．このとき

$$d\tau + \theta\wedge\tau = 0$$

がなりたつ．この式は捩れがないことと同値であり，**カルタン（Cartan）の第 1 構造方程式**と呼ばれている．曲率形式の定義式 $\Theta = d\theta + \theta\wedge\theta$ は**第 2 構造方程式**と呼ばれている．

証明　$\tau(\boldsymbol{e}) = E$，ただし E は単位行列，である．よって $\nabla_X(\tau(\boldsymbol{e})) = 0$ より

$$\begin{aligned}(\nabla_X\tau)(\boldsymbol{e}) &= -\tau(\nabla_X\boldsymbol{e}) \\ &= -\tau(\boldsymbol{e}\theta(X)) = -\theta(X),\end{aligned}$$

よって $\nabla_X\tau = -\theta(X)\tau$ を得る．これと外微分の定義より

$$\begin{aligned}&(d\tau + \theta\wedge\tau)(X, Y) \\ &\quad = X(\tau(Y)) - Y(\tau(X)) - \tau([X, Y]) + \theta(X)\tau(Y) - \theta(Y)\tau(X) \\ &\quad = (\nabla_X\tau)(Y) + \tau(\nabla_XY) - (\nabla_Y\tau)(X) - \tau(\nabla_YX) - \tau([X, Y]) \\ &\qquad\quad + \theta(X)\tau(Y) - \theta(Y)\tau(X) \\ &\quad = \tau(\nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y]) = 0\end{aligned}$$

となる． □

前節で述べたように TM の接続が定まるとその双対束 T^*M およびこれらのテンソル積にも接続が定まる．例えば，局所座標を用いて

$$T = T^{ij}{}_k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \in C^\infty(M, TM \otimes TM \otimes T^*M)$$

と表されるテンソル場 T に対し

$$\begin{aligned}\nabla T &= \nabla_m T^{ij}{}_k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k \otimes dx^m \\ &\quad \in C^\infty(M, TM \otimes TM \otimes T^*M \otimes T^*M)\end{aligned}$$

という記号で表す．このとき

$$\nabla_m T^{ij}{}_k = \frac{\partial T^{ij}{}_k}{\partial x^m} + T^{nj}{}_k \Gamma^i_{mn} + T^{in}{}_k \Gamma^j_{mn} - T^{ij}{}_n \Gamma^n_{mk}$$

となる．

曲率形式 Θ は命題 2.1.14 の式で与えられることがわかっていた．リーマン幾何の標準的ノーテイションでは Θ ではなく R で表すのが一般的である：

$$R(X,Y)Z := \Theta(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

更に次のような定義をする．

定義 2.2.4 4 階のテンソル場 $R \in C^\infty(M, \otimes^4 T^*M)$ を

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,W) &= g(Z, R(X,Y)W) \\ &= g(Z, \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W)\end{aligned}$$

により定義する．R を**曲率テンソル**という．

R が実際テンソルであることは Θ が $C^\infty(M, \wedge^2 M \otimes TM \otimes T^*M)$ の元であることから明らかである．しかし，あらためてこのことを確かめるには R の各成分について関数線形であることを見ればよい（例えば，松島 [23] p.123〜124 参照．ここに書いてあることは覚えておくべきことである）．実際滑らかな関数 f に対し

$$R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$$

であることは簡単に確かめることができる．局所座標を用いて $R = R_{ijkl}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$ とおいて，R_{ijkl} を曲率テンソルということもある．

命題 2.2.5 次の等式が成立する．

(1) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$;

(2) $R(X,Y,W,Z) = -R(X,Y,Z,W)$;

(3) $R(X,Y,Z,W) + R(Y,W,Z,X) + R(W,X,Z,Y) = 0$;

(4) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$;

(5) $(\nabla_X R)(Y,Z,\cdot,\cdot) + (\nabla_Y R)(Z,X,\cdot,\cdot) + (\nabla_Z R)(X,Y,\cdot,\cdot) = 0$.

((4) は演習問題 2.1.16 の (2) と同値である．リーマン幾何では上の (3) を第 1 ビアンキ恒等式，(4) を第 2 ビアンキ恒等式という．)

証明　(1) は明らかであり，(2) もレビ･チビタ接続が計量と両立すること，捩れがないことを用いると容易に示せる．(3) は

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)W + R(Y,W)X + R(W,X)Y \\
&\quad = [X,[Y,W]] + [Y,[W,X]] + [W,[X,Y]]
\end{aligned}
$$

とヤコビ律より従う．(4) を示すにはまず (3) の左辺を $S(X,Y,Z,W)$ とおく．これはもちろん 0 である．次に

$$
\begin{aligned}
&S(X,Y,Z,W) - S(Y,Z,W,X) - S(Z,W,X,Y) + S(W,X,Y,Z) \\
&\qquad = 2R(X,Y,Z,W) - 2R(Z,W,X,Y)
\end{aligned}
$$

を (1) と (2) だけを用いて示すことができる．よって (4) を得る．

(5) は (1)，(2)，(3)，(4) とテンソルに対する共変微分の定義式

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X R)(Y,Z,W,T) \\
&\qquad = X(R(Y,Z,W,T)) - R(\nabla_X Y,Z,W,T) \\
&\qquad\qquad - R(Y,\nabla_X Z,W,T) - R(Y,Z,\nabla_X W,T) - R(Y,Z,W,\nabla_X T)
\end{aligned}
$$

を用いると多少長い計算により証明できる（読者の演習問題とする）.（補題 2.1.12 の直前に述べたことと重複するがあえてもう一度述べる．この定義式は $X(R(Y,Z,W,T))$ のみを右辺に残してそれ以外を左辺に移項して眺めて見よ．$R \otimes Y \otimes Z \otimes W \otimes T$ を，縮約してから X で共変微分するのと，共変微分してから縮約するのが同じであるように $\nabla_X R$ を定義しているということに気付いて欲しい．他のテンソルに対する共変微分も同様である.）　□

局所座標を用いると命題 2.2.5 の (1)，(3)，(4)，(5) はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} + R_{jlki} + R_{likj} = 0, \quad R_{ijkl} = R_{klij}, \\
&\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0
\end{aligned}
$$

と表すことができる．

定義 2.2.6　長さが 1 で互いに直交する 2 つの点 p における接ベクトル X, $Y \in T_pM$ に対し $R(X,Y,X,Y)$ を X と Y の張る 2 次元平面 H に対する**断面曲率**という．この定義は H の正規直交基底 X，Y の選び方によらないことが容易に確かめることができる．接ベクトル束 TM の各ファイバー T_pM で 2 次元平面のなすグラスマン（Grassmann）多様体 $G(2,T_pM)$ を作り，これらをファイバーとするファイバー束を $G(2,TM)$ により表す．断面曲率は $G(2,TM)$ 上の C^∞ 級関数である．

定義 2.2.7　$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ を T_pM のリーマン計量 g に関する正規直交基底とするとき，

$$Ric(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}R(\boldsymbol{e}_i,X,\boldsymbol{e}_i,Y)$$

により定義されるテンソル $Ric \in C^\infty(M,\otimes^2T^*M)$ を**リッチ（Ricci）曲率**，または**リッチテンソル**という．リーマン計量 g に対するリッチ曲率であることを明確にしたいときは Ric_g と表すことにする．

リッチテンソルは局所座標を用いて

$$Ric=R_{ij}\,dx^i\otimes dx^j, \qquad R_{ij}:=g^{kl}R_{ikjl} \tag{2.10}$$

と表すこともできる．その意味で R_{ij} をリッチテンソルということもある．

命題 2.2.5 の (4) によりリッチテンソルは対称テンソルである．リーマン計量も対称テンソルであるから両者を比較することができる．

定義 2.2.8　ある定数 $k\in\mathbb{R}$ が存在して $Ric_g=kg$ となるリーマン計量 g を**アインシュタイン計量**という．

(2.8)，(2.9)，(2.10) よりアインシュタイン計量の定義式 $Ric_g=kg$ は g に関する 2 階の偏微分方程式である．物理的には（g がローレンツ（Lorentz）計量のとき）重力場の方程式である．どのような多様体がアインシュタイン計量を持つかは完全にはわかっていない．例えば 4 次元コンパクト多様体の場合ヒッチン・ソープ（Hitchin–Thorpe）不等式と呼ばれるオイラー数と符号数に関する不等式をみたさなければならないことが知られている（[21]）．

定義 2.2.9　リーマン多様体上の関数

$$\kappa=\sum_{i=1}^{n}Ric(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i)=\sum_{i,\,j=1}^{n}R(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=g^{ik}g^{jl}R_{ijkl}$$

を**スカラー曲率**という．

2 次元多様体 M の場合は断面曲率，リッチ曲率，スカラー曲率は定数倍を除いて一致する．さらに M が $\mathbb{R}^3$ 内の曲面のときは古典的ガウス曲率と一致する．以下はこのことを確かめることが目標である．

例 2.2.10 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は多様体として一つの座標系 $x^1, \cdots, x^n$ で記述される．$\mathbb{R}^n$ のリーマン計量として $g_{ij} = \delta_{ij}$ で定まるものを与える（ただし δ_{ij} はクロネッカー記号）．すなわち通常の内積

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{ij}$$

が各点の接空間の内積を定めているとする．このとき (2.8)，(2.9) よりクリストッフェル記号も接続形式も 0 であり，共変微分は通常の微分

$$\nabla_X Y = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

となる．また曲率テンソルも恒等的に 0 になる．ユークリッド空間というときはリーマン多様体としてはこの標準計量を与えたものと約束する．従ってユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ においては各点の接空間は $\mathbb{R}^n$ 自身と内積空間として同一視される．この意味で 2 つの接ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ により表す．

2.2.2 部分多様体の幾何学

少し記号を変えて N を n 次元リーマン多様体とする．もう一つの m 次元多様体 M から N への写像 $f : M \to N$ を考える．$p \in M$ のまわりの局所座標 $x^1, \cdots, x^m$ と $f(p) \in N$ のまわりの局所座標 $y^1, \cdots, y^n$ に関し写像 f を

$$f(x^1, \cdots, x^m) = \bigl(y^1(x^1, \cdots, x^m), \cdots, y^n(x^1, \cdots, x^m)\bigr)$$

と表すことができる．$y^i(x^1, \cdots, x^m)$ が $(x^1, \cdots, x^m)$ に関し C^∞ 級であるとき，f は C^∞ 級写像であるという．C^∞ 級写像 f の**微分**とは線形写像 $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$

$$f_*\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

のことである（f_* のかわりに df と表すこともある）．f_* の双対写像 $f^* : T^*_{f(p)}N \to T^*_pM$ を**余微分**または**引き戻し**という：

$$f^* dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j.$$

$m \leq n$ とし，ヤコビ行列 $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ が階数 m のとき f は**挿入**であるという．C^∞ 級写像 f が挿入であり単射であるとき，f は**埋め込み**であるといい，f の像 $f(M)$ を N の**部分多様体**であるという．(図 2.1.)

部分多様体の場合 M と $f(M)$ とを同一視し p と $f(p)$ も区別せず同じ p で

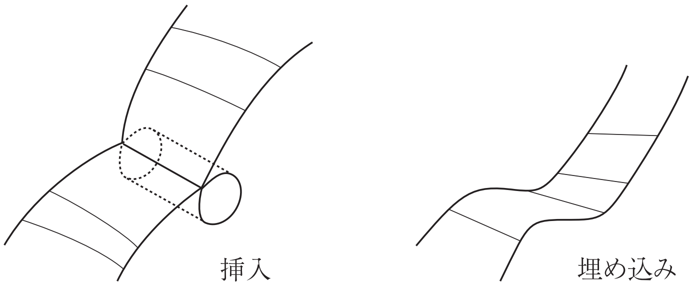


図 2.1

表すことにする（よって M は N の部分集合とみなす）．また接空間 T_pM も T_pN の線形部分空間とみなす．

定義 2.2.11 $f: M \to N$ を部分多様体 M のリーマン多様体 N への埋め込み写像とする（実際は挿入でもよい）．h を N のリーマン計量とするとき，M への**誘導計量** $g = f^*h$ を

$$g(X, Y) = h(f_*X, f_*Y)$$

により定義する．

N のリーマン計量 h に関するレビ·チビタ接続 $\widetilde{\nabla}$ と M の誘導計量 $g = f^*h$ に関するレビ·チビタ接続 ∇ との関係を調べたい．上記のように $M \subset N$，$T_pM \subset T_pN$ とみなし，f と f_* は単に包含写像とみなす．このとき g は T_pN の内積 h を T_pM に制限したものに他ならない．$\pi: T_pN \to T_pM$ を内積 h に関する直交射影とする．

命題 2.2.12 M のベクトル場 X，Y に対し

$$\nabla_X Y = \pi(\widetilde{\nabla}_X Y)$$

が成立する．ただし右辺において X，Y は N のベクトル場に任意に拡張したものとする．

証明 N の h に関するレビ·チビタ接続 $\widetilde{\nabla}$ に対し，上式の右辺により M の線形接続 ∇ を定める．このときこの ∇ が M の g に関するレビ·チビタ接続の条件をみたすことを確かめればよい．まず X，Y は M のベクトル場であるから $[X, Y]$ も M のベクトル場である．よって

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \pi(\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X) = \pi([X, Y]) = [X, Y]$$

となり，∇ は捩れがない．次に $Z \in T_pM$ と $U \in T_pN$ に対し $h(U, Z) = h(\pi(U), Z)$ であるから，M のベクトル場 X，Y，Z を N に任意に拡張したも

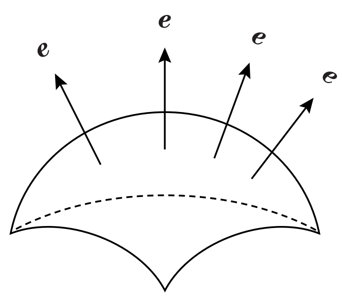


図 **2.2**

のを同じ X, Y, Z で表して M に沿って考えると

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= X(h(Y,Z)) = h(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + h(Y, \widetilde{\nabla}_X Z) \\ &= h(\pi(\widetilde{\nabla}_X Y), Z) + h(Y, \pi(\widetilde{\nabla}_X Z)) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \end{aligned}$$

すなわち ∇ は計量 g と両立する． □

M の余次元が 1 のとき，すなわち $n = m + 1$ のとき M は N の**超曲面**であるという．この場合少なくとも局所的には (M と N が向きづけ可能のときは大域的に) M に直交する長さ 1 のベクトル場（**法ベクトル場**という）$\boldsymbol{e}$ が存在する.（図 2.2.）このとき

$$\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \alpha(X, Y)\boldsymbol{e} \tag{2.11}$$

とおくと α は M の対称 2 次形式になる（これは $\widetilde{\nabla}$ と ∇ が捩れがないことから直ちに従う）．α を部分多様体 M の**第 2 基本形式**という.（これに対し誘導計量 $g = f^* h$ を**第 1 基本形式**ともいう.）

以下 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の超曲面 M を考える．M の開集合 U は $D = \{(u^1, u^2) \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ と同相で,

$$\boldsymbol{p} : D \to U \subset M \subset \mathbb{R}^3$$

がその同相写像を与え，(u^1, u^2) が局所座標を与えているとする．$\boldsymbol{p}(u^1, u^2)$ における接空間は 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{p}_{u^1} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u^1}, \qquad \boldsymbol{p}_{u^2} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u^2}$$

で張られる $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．M の誘導計量（第 1 基本形式）h は

$$h = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{u^1} \cdot \boldsymbol{p}_{u^1} & \boldsymbol{p}_{u^1} \cdot \boldsymbol{p}_{u^2} \\ \boldsymbol{p}_{u^2} \cdot \boldsymbol{p}_{u^1} & \boldsymbol{p}_{u^2} \cdot \boldsymbol{p}_{u^2} \end{pmatrix},$$

$$h = E\,du^1 \otimes du^1 + F(du^1 \otimes du^2 + du^2 \otimes du^1) + G\,du^2 \otimes du^2$$

で与えられる．第 2 基本形式 α は

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\boldsymbol{e} &= \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\boldsymbol{p}_{u^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\boldsymbol{p}_{u^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i}\boldsymbol{p}_{u^j} - \pi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\boldsymbol{p}_{u^j}\right) \\ &= (\boldsymbol{p}_{u^i u^j}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e},\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\alpha = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{u^1u^1}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{p}_{u^1u^2}\cdot\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{p}_{u^2u^1}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{p}_{u^2u^2}\cdot\boldsymbol{e} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\boldsymbol{p}_{u^1}\cdot\boldsymbol{e}_{u^1} & -\boldsymbol{p}_{u^1}\cdot\boldsymbol{e}_{u^2} \\ -\boldsymbol{p}_{u^1}\cdot\boldsymbol{e}_{u^2} & -\boldsymbol{p}_{u^2}\cdot\boldsymbol{e}_{u^2} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\alpha = L\,du^1\otimes du^1 + M(du^1\otimes du^2 + du^2\otimes du^1) + N\,du^2\otimes du^2$$

で与えられる．

定義 2.2.13　$\mathbb{R}^3$ の曲面 M の $\boldsymbol{p}(u^1,u^2)$ における**ガウス曲率** κ とは

$$\kappa = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{\det\alpha}{\det h}$$

をいう．ガウス曲率は M 上の C^∞ 級関数である．

定理 2.2.14　曲面 M のガウス曲率と断面曲率は一致する．(スカラー曲率と同じ記号 κ を用いたが，スカラー曲率はガウス曲率の 2 倍である．)

証明　$q\in D$ を固定し，q において $\frac{\partial}{\partial u^1}$，$\frac{\partial}{\partial u^2}$ が正規直交基底となるように局所座標 u^1，u^2 を取り直す．このとき q において

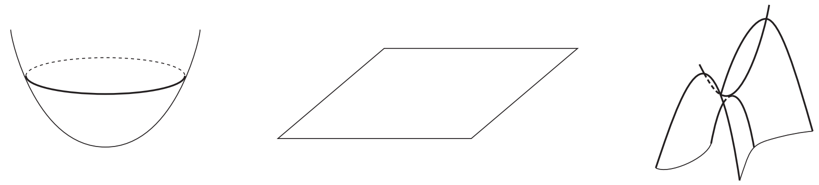
$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\right) = LN - M^2$$

を示せばよい．簡単な計算により

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\boldsymbol{p}_{u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\boldsymbol{p}_{u^i}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\boldsymbol{p}_{u^i}\right)\cdot\boldsymbol{e}\right)\boldsymbol{e} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\boldsymbol{p}_{u^iu^j} - (\boldsymbol{p}_{u^iu^j}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\boldsymbol{p}_{u^iu^j} - (\boldsymbol{p}_{u^iu^j}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}\right)\cdot\boldsymbol{e}\right)\boldsymbol{e} \\ &= \boldsymbol{p}_{u^iu^ju^k} - (\boldsymbol{p}_{u^iu^ju^k}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} - (\boldsymbol{p}_{u^iu^j}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}_{u^k}\end{aligned}$$



$z = x^2 + y^2$　　　　$z = 0$　　　　$z = -x^2 + y^2$

図 **2.3**

を得る．これと曲率テンソルの定義より

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\right) &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \boldsymbol{p}_{u^2} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \boldsymbol{p}_{u^2}\right) \cdot \boldsymbol{p}_{u^1} \\
&= -(\boldsymbol{p}_{u^2u^2} \cdot \boldsymbol{e})(\boldsymbol{e}_{u^1} \cdot \boldsymbol{p}_{u^1}) + (\boldsymbol{p}_{u^2u^1} \cdot \boldsymbol{e})(\boldsymbol{e}_{u^2} \cdot \boldsymbol{p}_{u^1}) \\
&= (\boldsymbol{p}_{u^2u^2} \cdot \boldsymbol{e})(\boldsymbol{p}_{u^1u^1} \cdot \boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{p}_{u^1u^2} \cdot \boldsymbol{e})^2 \\
&= LN - M^2
\end{aligned}
$$

を得る． □

注意 2.2.15　任意に $\boldsymbol{p}_0 \in M$ を固定する．簡単のため $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p}(0,0)$ とする．$\boldsymbol{p}_0$ における長さ 1 の法ベクトルを $\boldsymbol{e}_0$ とする．もちろん $\boldsymbol{e}_0$ は定ベクトルである．このとき M 上の関数

$$f(u^1, u^2) = \boldsymbol{p}(u^1, u^2) \cdot \boldsymbol{e}_0$$

は接平面 $T_{\boldsymbol{p}_0}M$ から見た M の高さである．明らかに f は $(u^1, u^2) = (0, 0)$ を臨界点に持つ：

$$\frac{\partial f}{\partial u^1} = \frac{\partial f}{\partial u^2} = 0.$$

そして f のヘッシアンが第 2 基本形式になる：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \, \partial u^j} = \boldsymbol{p}_{u^iu^j} \cdot \boldsymbol{e}_0.$$

よって $\kappa = LN - M^2$ が正，零，負となる典型的な図は図 2.3 のようになる．

2.2.3　正則ベクトル束の標準接続

本部分節では複素多様体 M 上の正則ベクトル束に対する微分幾何的扱いについて述べる．階数 1 のベクトル束を**直線束**という．n 次元複素多様体に対し $K_M := \wedge^n T'^* M$ を**標準直線束**という．

例 2.2.16　$D \subset M$ を余次元 1 の複素部分多様体とする（D は**非特異因子**とも呼ばれる）．一つの座標近傍 U_λ 上で $D \cap U_\lambda \neq \emptyset$ とする．このときは $D \cap U_\lambda$ は D に沿って 1 位の次数で 0 になる正則関数 f_λ により

$$D \cap U_\lambda = \{p \in U_\lambda \mid f_\lambda(p) = 0\}$$

と表される．$D \cap U_\lambda = \emptyset$ のときは至るところ 0 でない関数，例えば $f_\lambda = 1$ を取る．$U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき

$$f_{\lambda\mu} = \frac{f_\lambda}{f_\mu}$$

とおくと $f_{\lambda\mu}$ は $U_\lambda \cap U_\mu$ 上正則で至るところ 0 でない．すなわち正則写像 $f_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL(1, \mathbb{C})$ を定め，明らかに $f_{\lambda\mu} f_{\mu\nu} = f_{\lambda\nu}$ をみたす．よって $\{f_{\lambda\mu}\}$ を変換関数に持つような正則直線束が存在する．

上の例において D は実際は特異点があってもよいし，いくつかの因子の形式和を考えてもよい（この場合単に**因子**と呼ばれる）．D と D' の定める直線束をそれぞれ L_D，$L_{D'}$ とするとき $D + D'$ の定める直線束は $L_D \otimes L_{D'}$ である．$D + D = 2D$ に対しては D に沿って 2 位の次数で 0 になる正則関数を取ればよい．また $-D$ の定める直線束は D に沿って極を持つ関数 f_λ^{-1} を用いて同様に定義すれば L_{-D} は変換関数を逆数にした直線束 L_D^{-1} である．

L の k 個のテンソル積は $L^{\otimes k}$ で表される：

$$L^{\otimes k} = \overbrace{L \otimes \cdots \otimes L}^{k\ \text{個}}.$$

例 2.2.17　複素射影空間

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \{(z^0 : \cdots : z^n) \mid (z^0, \cdots, z^n) \neq (0, \cdots, 0)\} = (\mathbb{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{o}\})/\mathbb{C}^*$$

の部分多様体

$$H = \{(0 : z^1 : \cdots : z^n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid (z^1, \cdots, z^n) \neq (0, \cdots, 0)\}$$

を**超平面**といい，H の定める正則直線束 L_H を**超平面束**という．記号

$$\mathcal{O}(k) := L_H^{\otimes k} = L_{kH}$$

が使われることが多い．

例 2.2.18　上の例で $n = 1$ の場合を考える．よって $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で，$H = \{(0 : 1)\}$ は 1 点である．開集合 $U_0 = \{z^0 \neq 0\}$ 上 $s = z^1/z^0$ を，$U_1 = \{z^1 \neq 0\}$ 上 $t = z^0/z^1$ を局所正則座標とする．$U_0 \cap H = \emptyset$，$U_1 \cap H = H$ であるから

$$f_0 = 1\ (U_0\ \text{上}), \qquad f_1 = t\ (U_1\ \text{上})$$

とおくと

$$f_{01} = \frac{1}{t} = s, \qquad f_{10} = t$$

が $\mathcal{O}(1) = L_H$ の変換関数である．

定義 2.2.19　複素ベクトル束 $\pi : E \to M$ に対し，$h \in C^\infty(M, \overline{E}^* \otimes E^*)$ が E の**エルミート（Hermite）計量**であるとは，各点 p において

$$h : \overline{E}_p \times E_p \to \mathbb{C}$$

が正値エルミート形式であるときをいう．すなわち，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を局所枠とするとき

$$(h_{\bar{i}j}) := \big(h(\overline{\boldsymbol{e}}_i, \boldsymbol{e}_j)\big)$$

は正値エルミート行列であるときをいう．

今後 E が正則エルミート束のときは断わらなくても局所枠は局所正則切断からなるものとする．E の開集合 U_λ 上の局所枠に関するエルミート計量の行列表示を h_λ とする．このとき

$$h_\mu = {}^t\overline{f_{\lambda\mu}} h_\lambda f_{\lambda\mu}$$

をみたす．逆にこの関係をみたす $\{h_\lambda\}$ は E のエルミート計量を定める．

定義 2.2.20　複素多様体の正則接ベクトル束 $T'M$ のエルミート計量 h を M のエルミート計量という．

$$h_{\bar{i}j} = h\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right)$$

とおく．

例 2.2.21　$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の直線束 $\mathcal{O}(k)$ には次のように定義される自然なエルミート計量が存在する．U_0 上

$$h_0 = \frac{1}{(1+|s|^2)^k},$$

U_1 上

$$h_1 = \frac{1}{(1+|t|^2)^k}$$

とおくと $s = 1/t$ であったから $h_1 = \overline{f}_{01}^k h_0 f_{01}^k$ をみたすので h は $\mathcal{O}(k) = L_H^{\otimes k}$ のエルミート計量を定める．

例 2.2.22　$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の正則接ベクトル束 $T'\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は $\mathcal{O}(2)$ と同型である．

証明　正則接ベクトル束の局所枠として U_0 上 $\partial/\partial s$，U_1 上 $-\partial/\partial t$ を取る．このとき

$$-\frac{\partial}{\partial t}=s^2\frac{\partial}{\partial s}$$

であるから変換関数は $f_{01}=s^2$ である． □

よって $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の自然なエルミート計量として U_0 および U_1 上それぞれ

$$h\left(\frac{\partial}{\partial \bar{s}},\frac{\partial}{\partial s}\right)=\frac{1}{(1+|s|^2)^2},\quad h\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{1}{(1+|t|^2)^2}$$

で与えられるものが定まる．

定義 2.2.23 n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の開被覆として $U_\lambda=\{z^\lambda\neq 0\}$，$\lambda=0,\cdots,n$，を取る．$U_\lambda$ 上の局所座標として

$$t_\lambda^0=\frac{z^0}{z^\lambda},\cdots,\widehat{t_\lambda^\lambda},\cdots,t_\lambda^n=\frac{z^n}{z^\lambda}$$

を取る[*1]．$z^0,\cdots,z^n$ を**斉次座標**，$t_\lambda^0,\cdots,\widehat{t_\lambda^\lambda},\cdots,t_\lambda^n$ を**非斉次座標**という．U_λ において

$$h_{\bar{i}j}^{(\lambda)}=\frac{\partial^2}{\partial \bar{t}_\lambda^i\partial t_\lambda^j}\log\bigl(|t_\lambda^0|^2+\cdots+|t_\lambda^{\lambda-1}|^2+1+|t_\lambda^{\lambda+1}|^2+\cdots+|t_\lambda^n|^2\bigr)$$

とおくと，$\bigl\{(h_{\bar{i}j}^{(\lambda)})\bigr\}$ は M のエルミート計量を定める．これを**フビニ・ストゥディー（Fubini–Study）計量**という．

$n=1$ のとき U_0 上

$$\frac{\partial^2}{\partial\bar{s}\partial s}\log(1+|s|^2)=\frac{1}{(1+|s|^2)^2}$$

であるから $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ のフビニ・ストゥディー計量は $\mathcal{O}(2)$ の標準計量と一致する．

正則ベクトル束 E に対し，$\overline{\partial}:C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,E\otimes T''^*M)$ が次のように定義される．座標近傍 U 上の正則枠 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ を任意に取り，切断 $s\in C^\infty(M,E)$ を $s=s^i\boldsymbol{e}_i$ と表す．そこで

$$\overline{\partial}s=(\overline{\partial}s^i)\boldsymbol{e}_i$$

と定義する．この定義は正則枠の取り方によらない．正則でない C^∞ ベクトル束に対しては正則枠も $\overline{\partial}$ も定義できないことに注意せよ．

定理 2.2.24 正則ベクトル束 $E\to M$ のエルミート計量 h に対し，次をみたす線形接続 ∇ が一意的に存在する．

(i) $\nabla=\nabla'+\nabla'':C^\infty(M,E)\to C^\infty\bigl(M,E\otimes(T'^*M\oplus T''^*M)\bigr)$ と分解すると $\nabla''=\overline{\partial}$.

*1) ^ は省略を表す記号である．

(ii) $d(h(\overline{s}, t)) = h(\overline{\nabla s}, t) + h(\overline{s}, \nabla t)$.

（この接続をエルミート正則ベクトル束の**標準接続**という．エルミート計量から自然に決まることから**エルミート接続**と呼ばれることもある.）

証明　もし (i), (ii) をみたす線形接続が存在したとする．$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を局所正則枠とすると $\nabla'' \boldsymbol{e}_j = \overline{\partial} \boldsymbol{e}_j = 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{e}_j &= \nabla' \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \otimes \theta^i_j, \\
dh_{\bar{i}j} &= h(\overline{\nabla \boldsymbol{e}_i}, \boldsymbol{e}_j) + h(\overline{\boldsymbol{e}_i}, \nabla \boldsymbol{e}_j) \\
&= h(\overline{\boldsymbol{e}_k \otimes \theta^k_i}, \boldsymbol{e}_j) + h(\overline{\boldsymbol{e}_i}, \boldsymbol{e}_k \otimes \theta^k_j) \\
&= \overline{\theta^k_i} h_{\bar{k}j} + \theta^k_j h_{\bar{i}k}
\end{aligned}
$$

であるが，一方 $dh_{\bar{i}j} = \partial h_{\bar{i}j} + \overline{\partial} h_{\bar{i}j}$ であるので，$(1,0)$ 部分を比較して

$$
\theta^i_j = h^{i\bar{k}} \partial h_{\bar{k}j}, \qquad \text{ただし } (h^{i\bar{j}}) = (h_{\bar{i}j})^{-1},
$$

すなわち

$$
\theta = h^{-1} \partial h
$$

と一意的に接続形式が定まる．

次にこの式で定まる接続形式が well-defined な接続を定めることを示そう．2 つの座標近傍 U_λ，U_μ 上でそれぞれ $\theta_\lambda = h_\lambda^{-1} \partial h_\lambda$，$\theta_\mu = h_\mu^{-1} \partial h_\mu$ とおく．$U_\lambda \cap U_\mu$ 上の E の変換関数を $\varphi_{\lambda\mu}$ とおくと

$$
h_\mu = {}^t\overline{\varphi}_{\lambda\mu} h_\lambda \varphi_{\lambda\mu}, \qquad \overline{\partial} \varphi_{\lambda\mu} = 0
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\theta_\mu &= h_\mu^{-1} \partial h_\mu \\
&= \varphi_{\lambda\mu}^{-1} h_\lambda^{-1}\, {}^t\overline{\varphi}_{\lambda\mu}^{-1} ({}^t\overline{\varphi}_{\lambda\mu} \partial h_\lambda \varphi_{\lambda\mu} + {}^t\overline{\varphi}_{\lambda\mu} h_\lambda \partial \varphi_{\lambda\mu}) \\
&= \varphi_{\lambda\mu}^{-1} h_\lambda^{-1} \partial h_\lambda \varphi_{\lambda\mu} + \varphi_{\lambda\mu}^{-1} \partial \varphi_{\lambda\mu} \\
&= \varphi_{\lambda\mu}^{-1} \theta_\lambda \varphi_{\lambda\mu} + \varphi_{\lambda\mu}^{-1} d\varphi_{\lambda\mu}
\end{aligned}
$$

であるから命題 2.1.6 より大域的に well-defined な線形接続を定める．　□

命題 2.2.25　エルミート正則ベクトル束の標準接続の接続形式は

$$
\theta = h^{-1} \partial h,
$$

曲率形式は

$$
\Theta = \overline{\partial} \theta = \overline{\partial}(h^{-1} \partial h)
$$

で与えられる．特に Θ は $(1,1)$ 型である．

証明　θ の式は前定理の証明の中で与えた．これを用いて $\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta$ を計算すると容易に欲しい式を得る． □

系 2.2.26　$L \to M$ を正則直線束，h を L のエルミート計量とする．開集合 U 上の至るところ 0 でない正則切断（すなわち正則枠）s に対し，$h_U := h(\overline{s}, s)$ とおくと

$$\Theta = -\partial\overline{\partial} \log h_U$$

と表される．

複素直線束の曲率形式はエルミート計量の取り方によらないド･ラーム類を定め，このド･ラーム類の $\frac{i}{2\pi}$ 倍は**第 1 チャーン（Chern）類**と呼ばれる．特に M が複素 1 次元のコンパクト多様体で複素直線束が正則接ベクトル束の場合は，この事実は**ガウス・ボンネ（Gauss–Bonnet）の定理**と呼ばれる定理と同値である．一方チャーン類の理論はより一般のリー群を構造群とする主束の特性類の理論に一般化されている（チャーン・ヴェイユ理論と呼ばれる）．特性類の一般論は後で述べるが，正則直線束の場合は特に基本的であるので以下に詳しく述べることにする．

以下この部分節の最後まで正則直線束 $L \to M$ にエルミート計量 h が与えられているとする．

補題 2.2.27　$\Theta = -\partial\overline{\partial} \log h_U$ は局所枠 s の取り方によらない．特に $\frac{i}{2\pi}\Theta$ は大域的な実 2 次閉微分形式を定める．

証明　開集合 U 上の局所正則枠 s と開集合 V 上の局所枠 t に対し，$U \cap V$ 上のある 0 にならない局所正則関数 φ が存在して $t = \varphi s$ と表される．よって $h_U = h(\overline{s}, s)$，$h_V = h(\overline{t}, t)$ に対し，

$$\begin{aligned} -\partial\overline{\partial} \log h_V &= -\partial\overline{\partial}(\log \varphi + \log \overline{\varphi} + \log h_U) \\ &= -\partial\overline{\partial} \log h_U \end{aligned}$$

となる．$\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$ より容易に $\frac{i}{2\pi}\Theta$ が実形式であることが確かめられる．また，$d = \partial + \overline{\partial}$，$\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$ より $d\Theta = 0$ も確かめられる． □

定義 2.2.28　$\frac{i}{2\pi}\Theta$ を $L \to M$ のエルミート計量 h に関する**第 1 チャーン形式**といい，$c_1(L, h)$ により表す．

補題 2.2.29　ド･ラーム類 $[c_1(L, h)]$ は h の取り方によらない．

証明　h' を別のエルミート計量とし，s，t を前補題の証明のように取ると

$$h_V = |\varphi|^2 h_U, \quad h'_V = |\varphi|^2 h'_U$$

であるから

$$\frac{h_V}{h'_V} = \frac{h_U}{h'_U}$$

となる．よって $f := \frac{h_U}{h'_U}$ とおくと f は M 上の C^∞ 関数であり，

$$c_1(L,h) - c_1(L,h') = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log f = d\left(-\frac{i}{2\pi}\,\overline{\partial}\log f\right)$$

となる．すなわち $c_1(L,h)$ と $c_1(L,h')$ は同じド･ラーム類を定める．　□

定義 2.2.30　ド･ラーム類 $[c_1(L,h)]$ を L の**第 1 チャーン類**といい $c_1(L)$ により表す．

例 2.2.31　$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ の場合，$U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ 上のエルミート計量 h_{U_0} は非斉次座標 $s = z_1/z_0$ を用いて

$$h_{U_0} = \frac{1}{(1+|s|^2)^k}$$

と表されるので

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k), h) = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log h_{U_0} = \frac{ki}{2\pi}\frac{ds\wedge d\overline{s}}{(1+|s|^2)^2},$$

よって $s = re^{i\theta}$ と置くことにより

$$\begin{aligned}\langle c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k), [\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]\rangle &= \int_{U_0}\frac{ki}{2\pi}\frac{ds\wedge d\overline{s}}{(1+|s|^2)^2}\\ &= \frac{k}{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{2r\,dr\wedge d\theta}{(1+r^2)^2} = k\end{aligned}$$

となる．

系 2.2.32　$\langle c_1(T'\mathbb{P}^1(\mathbb{C})), [\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]\rangle = 2.$

この 2 という値は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$ のオイラー数であり，上の系はガウス・ボンネの定理に他ならない．

定義 2.2.33　n 次元コンパクト複素多様体 M に対し $c_1(M) := -c_1(K_M)$ とおき，M の第 1 チャーン類と呼ぶ．

上の定義において $K_M = \wedge^n T'^* M = (\wedge^n T' M)^{-1}$ であったことを思い出そう．従って

$$c_1(M) = +c_1(\wedge^n T' M)$$

である．

演習問題 2.2.34　$c_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = (n+1)c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ を示せ．

$E \to M$ をコンパクト複素多様体 M 上の階数 r の正則ベクトル束とし，h を E のエルミート計量とする．上述の通り曲率形式は $\Theta = \overline{\partial}(h^{-1}\partial h)$ である．変数 t を用いて

$$\det\left(1 + \frac{ti}{2\pi}\Theta\right) = 1 + tc_1(h) + \cdots + t^r c_r(h)$$

と展開することにより $2i$ 次微分形式 $c_i(h)$ を定義する．

定理 2.2.35　$c_i(h)$ は閉形式であり，ド･ラーム類 $[c_i(h)]$ はエルミート計量 h の選び方によらない．

この定理をもっと一般化した定理（2.4.2 参照）を後で証明するので，この定理の証明はここでは省略する．ただ，閉形式であることはビアンキの恒等式からすぐにわかるし，$[c_i(h)]$ が h によらないことも h の変分を用いた直接計算から比較的容易に得られるので，熱意のある読者は試みられたい．

定義 2.2.36　ド･ラーム類 $[c_i(h)]$ を E の**第 i チャーン類**という．

ここではチャーン類がきちんとした式で書けるという利点があるので正則ベクトル束に話を限ったが，実際は C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル束 $E \to M$ にもチャーン類は定義できる．実際 E にエルミート計量を与え，エルミート計量を保つ線形接続の曲率形式を用いて同じように第 i チャーン類は定義される．後で述べる定理 2.4.2 はこれを含む．

命題 2.2.37　(1) h を正則ベクトル束 E のエルミート計量とするとき

$$c_1(h) = \frac{i}{2\pi}\operatorname{tr}(\overline{\partial}(h^{-1}\partial h)) = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\det h.$$

(2) $c_1(M) = c_1(T'M)$.

証明　(1) よく知られた行列式の微分の公式（[17]，p.204，1.15，参照）

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\,\mathrm{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{dA}{dt}\right)$$

より $-\partial\overline{\partial}\log\det h = \mathrm{tr}(\overline{\partial}(h^{-1}\partial h))$ が従う．よって (1) が示される．
(2) $\det h$ は $\wedge^r E$ のエルミート計量を定める．このことと (1) より (2) が得られる． □

定理 2.2.38 コンパクト複素多様体 M の因子 D に同伴した正則直線束を L_D とすると，$c_1(L_D) \in H^2(M,\mathbb{R})$ は $[D] \in H_{2n-2}(M,\mathbb{R})$ のポアンカレ双対である．すなわち，任意の $Z \in H_2(M,\mathbb{R})$ に対し

$$\langle c_1(L_D), Z\rangle = [D]\cdot Z$$

が成り立つ．ただし右辺は交点数である．

証明 $n=1$ の場合に証明する（一般次元の場合も全く同様であるので読者自ら証明を試みよ）．従って M はコンパクトリーマン面であり，D は有限個の点 $\{p_1,\cdots,p_l\}$ である．証明すべきことは

$$\langle c_1(L_D), [M]\rangle = l$$

である．$j=1,\cdots,l$ に対し p_j の開近傍を U_j とし，これらの U_j を含む M の開被覆を $M=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ とする．$D\cap U_\lambda = \{f_\lambda = 0\}$ と表される U_λ 上の正則関数 f_λ が存在する．このとき

$$f_{\lambda\mu} = \frac{f_\lambda}{f_\mu}$$

が L_D の変換関数であるから

$$f_\lambda = f_{\lambda\mu}f_\mu$$

より $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は L_D の正則切断 s を定める．このとき s の零点集合は $D = \{p_1,\cdots,p_l\}$ である．

次に L_D のエルミート計量 h を，$j=1,\cdots,l$ に対し U_j 上の局所自明化に関して $h_{U_j}\equiv 1$ となるように取る．

このとき $\frac{i}{2\pi}\log h(\overline{s},s)$ は $M-\{p_1,\cdots,p_l\}$ 上の C^∞ 級関数である．しかも $M-\{p_1,\cdots,p_l\}$ 上

$$c_1(L,h) = -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log h(\overline{s},s)$$

である．p_j を中心とする半径 ϵ の円板を $D_\epsilon(p_j)$ とすると，ストークスの定理と $h_{U_j}\equiv 1$ より

$$\langle c_1(L_D),[M]\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{M-\bigcup_{j=1}^{l}D_\epsilon(p_j)}\left(-\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log h(\overline{s},s)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to 0} \sum_j \int_{\partial D_\epsilon(p_j)} \frac{1}{2\pi i} \partial \log h(\overline{s}, s) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \sum_j \int_{|f_j|=\epsilon} \frac{1}{2\pi i} \partial \log f_j \\
&= l \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{z} = l
\end{aligned}
$$

を得る． □

2.2.4 ケーラー多様体の接続

M を複素 n 次元の複素多様体とする．正則接ベクトル束 $T'M$ のエルミート計量を複素多様体 M のエルミート計量という．M のエルミート計量 h は $C^\infty(M, T'^*M \otimes \overline{T}'^*M) = C^\infty(M, T'^*M \otimes T''^*M)$ の元である．前節では正則ベクトル束のエルミート計量は $\overline{E}^* \otimes E^*$ の切断と定義したが本節では $\overline{E}^*$ と E^* の順番を入れ換えることにする．これは単に慣習に従うためである．この了解のもとに

$$
h_{i\overline{j}} = h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right)
$$

とおくと局所的に

$$
h = h_{i\overline{j}}\, dz^i \otimes d\overline{z}^j
$$

と表される．$(h_{i\overline{j}})$ がエルミート行列であることより

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(h) &= \frac{1}{2}\left(h_{i\overline{j}}\, dz^i \otimes d\overline{z}^j + \overline{h_{i\overline{j}}}\, d\overline{z}^i \otimes dz^j\right) \\
&= h_{i\overline{j}} \times \frac{1}{2}(dz^i \otimes d\overline{z}^j + d\overline{z}^j \otimes dz^i)
\end{aligned}
$$

となる．$p \in M$ を固定し，この点 p において

$$
\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)_p, \ \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial z^n}\right)_p
$$

が正規直交基底であるように局所正則座標 $z^j = x^j + iy^j$ を取ると，$h_{i\overline{j}} = \delta_{ij}$ であり，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(h) &= \frac{1}{2} \sum_j (dz^j \otimes d\overline{z}^j + d\overline{z}^j \otimes dz^j) \\
&= \mathrm{Re} \sum_j (dx^j + i\, dy^j) \otimes (dx^j - i\, dy^j) \\
&= \sum_j (dx^j \otimes dx^j + dy^j \otimes dy^j)
\end{aligned}
$$

となる．よって h の実部の 2 倍 $2\,\mathrm{Re}(h)$ は M の実多様体としてのリーマン計量を定める．次に h の虚部を考察しよう．

定義 2.2.39　h の虚部の -2 倍は

$$\begin{aligned}\omega = -2\,\mathrm{Im}(h) &= ih_{i\bar{j}}(dz^i \otimes d\bar{z}^j - d\bar{z}^j \otimes dz^i) \\ &= ih_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j \end{aligned} \tag{2.12}$$

となり，2 次微分形式になる．これを h の**基本 2 次形式**，または**ケーラー形式**（**Kähler 形式**）という．

$(h_{i\bar{j}})$ がエルミート行列であることから ω は実 2 次微分形式であることがわかる．

定義 2.2.40　(1) エルミート計量 h が**ケーラー計量**であるとは ω が閉形式であるときをいう．
(2) 複素多様体 M とケーラー計量の組 (M, h) を**ケーラー多様体**という．
(3) ケーラー多様体においてケーラー形式の代表するド·ラーム類を**ケーラー類**という．

さて $T'M$ にエルミート計量を与えると正則ベクトル束としての標準接続が定まる．一方 h の実部はリーマン計量を定めるので実多様体としての接ベクトル束にレビ·チビタ接続も定まる．ケーラー計量の意義はこの両者が一致するということである：

定理 2.2.41　h を複素多様体 M のエルミート計量とする．h の定める $T'M$ の正則ベクトル束としての標準接続と，リーマン計量 $2\,\mathrm{Re}(h)$ の定める TM のレビ·チビタ接続を $\mathbb{C}$ 線形に $TM \otimes \mathbb{C}$ に拡張したものとが $T'M$ 上で一致するための必要十分条件は，h がケーラー計量であることである．

証明　標準接続もレビ·チビタ接続も計量と両立するので，標準接続 ∇ が捩れを持たないための必要十分条件はケーラー条件 $d\omega = 0$ であることを示せばよい．

標準接続の接続形式は $(\theta^i_j) = h^{-1}\partial h = h^{i\bar{k}}\partial h_{j\bar{k}}$ で与えられるので

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \frac{\partial}{\partial z^j} = \theta^p_j \left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) \frac{\partial}{\partial z^p} = h^{p\bar{k}} \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial z^p}$$

である．よって

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}} \frac{\partial}{\partial z^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial z^j}} \frac{\partial}{\partial z^i} = \left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right] = 0$$

となるための必要十分条件は

$$\frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial z^i} = \frac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial z^j}$$

である．この最後の式は

$$d\omega = i\frac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial z^j}\, dz^j \wedge dz^i \wedge d\overline{z}^k = 0$$

と同値である． $\square$

例 2.2.42 複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ のフビニ・ストゥディー計量 h はケーラー計量である．

証明 開集合 $U_0 = \{z^0 \neq 0\}$ 上の局所座標 $t^i = \frac{z^i}{z^0}$，$1 \leq i \leq n$ を用いるとフビニ・ストゥディー計量は

$$h_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2}{\partial t^i\, \partial \bar{t}^j} \log\left(1 + \sum_k |t^k|^2\right)$$

で与えられる．よってそのケーラー形式 ω は

$$\omega = i\partial\overline{\partial} \log\left(1 + \sum_k |t^k|^2\right)$$

であるから

$$d\omega = (\partial + \overline{\partial})i\partial\overline{\partial} \log\left(1 + \sum_k |t^k|^2\right) = 0$$

となる． $\square$

補題 2.2.43 ケーラー多様体の複素部分多様体は誘導計量に関しケーラー多様体である．

証明 N をケーラー多様体 (M, h) の複素部分多様体とするとき $\iota^* h$ は明らかに N のエルミート計量を定める．その基本 2 次形式は $\iota^*\omega$ で与えられるが，引き戻しと外微分は可換であるので

$$d(\iota^*\omega) = \iota^* d\omega = 0$$

となる．すなわち $\iota^* h$ はケーラー計量である． $\square$

上の例により $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の部分多様体はケーラー多様体である．$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ のコンパクト部分多様体は**非特異射影代数多様体**と呼ばれ，代数幾何学の研究対象である．以上の議論から射影代数多様体はすべてケーラー多様体である．ケーラー多様体であることの利点の一つは次のことである：コンパクトケーラー多様体のド･ラームコホモロジーとドルボーコホモロジーは同型である．この意味は 2.5.3 節でもう少し詳しく述べる．

2.3　平行移動と主束の接続

M を C^∞ 級多様体，$\pi : E \to M$ を C^∞ 級ベクトル束，∇ を E の線形接続とする．多様体 T からの C^∞ 級写像 $f : T \to M$ に対し，E の**引き戻し** f^*E を

$$f^*E = \{(t, v) \in T \times E \mid v \in \pi^{-1}(f(t))\}$$

により定義する．$\pi : f^*E \to T$，$\pi(t, v) = t$ により f^*E は T 上のベクトル束になる．更に，E の接続形式を f で引き戻すことにより f^*E に ∇ の引き戻し $f^*\nabla$ が定義される．局所座標を用いると $f^*\nabla$ は次のように記述される．まず，$f(t)$ の近傍 U における E の局所枠を $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ とする．$t \in T$ の近傍 V に対し $f(V) \subset U$ とし，V 上局所座標 $t^1, \cdots, t^k$ を持つとする．このとき f^*E の切断 s は V 上

$$s(t) = s^\alpha(t^1, \cdots, t^k)\ \boldsymbol{e}_\alpha(f(t))$$

と表される．この状況で

$$(f^*\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t^j}} s = \frac{\partial s^\alpha}{\partial t^j}\boldsymbol{e}_\alpha + s^\alpha \nabla_{f_*\frac{\partial}{\partial t^j}} \boldsymbol{e}_\alpha$$

と表される．通常，慣用的に

$$\nabla_{f_*\frac{\partial}{\partial t^j}} s := (f^*\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t^j}} s$$

と書く記号が用いられること多く，f に沿った共変微分と呼ばれている．f が曲線 $c : (a, b) \to M$ の場合は，$\nabla_{c_*\frac{d}{dt}}$ の代わりに $\nabla_{\dot{c}}$ あるいは $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ とも書かれる．

本節では M の点は x，y により表す．2 点 x，$y \in M$ を結ぶ滑らかな曲線 $c : [0, 1] \to M$，$c(0) = x$，$c(1) = y$，と $x \in M$ 上のファイバー $E_x = \pi^{-1}(x)$ のベクトル $v \in E_x$ に対し，

$$\nabla_{c_*\frac{d}{dt}} v(t) = 0, \qquad v(0) = v \tag{2.13}$$

をみたすベクトルの族 $\{v(t) \in E_{c(t)} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ を考える．このとき $v(t)$ は $c(t)$ に沿って平行であるといい，$v(1) \in E_y$ を $v(0) = v \in E_x$ の c に沿った**平行移動**という.（図 2.4.）

補題 2.3.1　平行移動は常に存在する．

証明　上式をより具体的に書くために x のまわりの枠 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を一つ選ぶ．接続形式は $\nabla \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \otimes \theta^i_j$ により与えられている．$v = a^i\boldsymbol{e}_i(x)$ の平行移動を $v(t) = a^j(t)\boldsymbol{e}_j(c(t))$ とすると

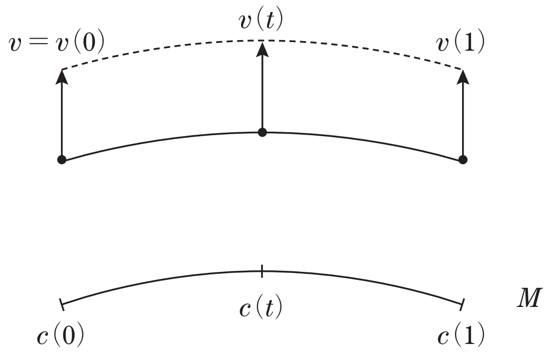


図 **2.4**

$$\nabla_{c_*\frac{d}{dt}}v(t) = \frac{da^j}{dt}\boldsymbol{e}_j + a^j\theta^i_j\left(c_*\frac{d}{dt}\right)\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{da^i}{dt} + a^j\theta^i_j\left(c_*\frac{d}{dt}\right)\right)\boldsymbol{e}_i$$

であるから，次の常微分方程式

$$\frac{da^i}{dt} + \theta^i_j\left(c_*\frac{d}{dt}\right)a^j = 0,$$
$$a^i(0) = a^i$$

に帰着される．これは 1 階線形常微分方程式であるから解は一意的に存在する． □

$x \in M$ を基点とする区分的に滑かな道の集合を Γ_x とする：

$$\Gamma_x = \{c : [0,1] \to M \mid c(0) = c(1) = x,\ c \text{ は区分的に滑らか }\}.$$

道 $c \in \Gamma_x$ に対し $P_c : E_x \to E_x$ を c に沿った平行移動とする．1 階線形常微分方程式の解は初期値に線形に依存するので P_c は線形写像である．$c^{-1}(t) = c(1-t)$ とおいて c^{-1} を c の逆の道という．明らかに $P_{c^{-1}}P_c = 1$ であるから，任意の c に対し P_c は正則一次変換である．

定義 2.3.2 $Hol_x = \{P_c \mid c \in \Gamma_x\} \subset GL(E_x)$ を x を基点とする**ホロノミー群**という．(実際これが群になることは上に述べたことから明らかである．)

例 2.3.3 $M = \mathbb{R}^n$ の接ベクトル束 $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の自明な接続（標準計量に関するレビ･チビタ接続でもある）を考えると平行移動は

$$0 = \frac{dX^i}{dt} + \theta^i_j X^j = \frac{dX^i}{dt}$$

の解で与えられる．この解は $X^i \equiv a^i$ (定数) で与えられる．よって $Hol_x = \{1\}$ となる．

階数 r のベクトル束 $E \to M$ に対し x のファイバー E_x の基底全体の集合を

すべての x にわたって集めた集合を P_{GL} で表し，E の**枠束**という：

$$P_{GL} = \{(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r) \mid x \in M,\ \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r \text{ は } E_x \text{ の基底}\}.$$

$P_{GL} \to M$ は次の意味で主 $GL(r, \mathbb{R})$ 束である．

定義 2.3.4　G をリー群とする．多様体 P に対し $\pi : P \to M$ が M 上の**主 $\boldsymbol{G}$ 束**であるとは次の条件をみたすときである．

(1) G は右から自由に P に作用する．すなわち，写像 $P \times G \to P$, $(p, g) \mapsto pg$ で $(pg)h = p(gh)$ をみたすものが存在し，さらにもしある $p \in P$ に対し $pg = p$ なら $g = 1$ である．

(2) M の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と微分同相写像

$$\varphi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times G$$

で次の (2.a)，(2.b) をみたすものが存在する．ただし $\psi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to G$ は C^∞ 写像.

(2.a) $\varphi_\lambda(p) = (\pi(p), \psi_\lambda(p))$,

(2.b) $\varphi_\lambda(pg) = (\pi(p), \psi_\lambda(p)g)$.

φ_λ が微分同相であるから $\psi_\lambda : \pi^{-1}(x) \to G$ もやはり微分同相写像である．また (2.b) より $\psi_\lambda(pg) = \psi_\lambda(p)g$ である．G がコンパクトのときは (1) から自動的に (2) が導かれる．さて，ベクトル束 E とその枠束 P_{GL} にもどろう．$p = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r)$ が E_x の基底，$g = (g_{ij}) \in GL(r, \mathbb{R})$ のとき

$$pg = \left(\sum_{i=1}^{r} g_{i1}\boldsymbol{p}_i, \cdots, \sum_{i=1}^{r} g_{ir}\boldsymbol{p}_i \right)$$

はまた E_x の基底となる．これは単に基底の取り替えに過ぎず，G が P に右から作用するのはこのことから来る．

$x \in M$ を通る曲線

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \to M, \qquad c(0) = x,$$

に対し

$$\widetilde{c}_p : (-\epsilon, \epsilon) \to P_{GL}$$

を c に沿った $p = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_r) \in (P_{GL})_x$ の平行移動とする．(図 2.5.）そこで

$$H_p = \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \widetilde{c}_p \;\middle|\; c \text{ は } x \text{ を通る曲線} \right\}$$

とおく．

補題 2.3.5　H_p は T_pP_{GL} の n 次元線形部分空間である．

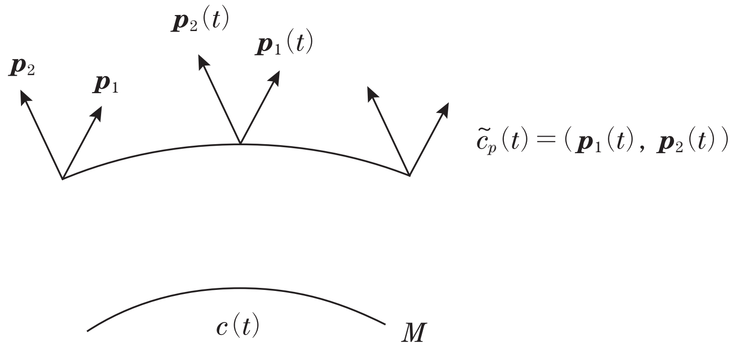


図 **2.5**

証明　x のまわりの E の枠を $e=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r)$ とすると x において $p=ea$, $a\in GL(r,\mathbb{R})$, と表される．このとき p の c に沿った平行移動は $\widetilde{c}(t)=e(c(t))a(t)$ と表され，

$$\frac{da}{dt}+\theta(\dot{c})a=0$$

をみたす．枠 e に関する局所自明化により $(P_{GL})|_U\cong U\times GL(r,\mathbb{R})$ を得るが，これに関し $\dot{\widetilde{c}}(0)=(\dot{c}(0),\dot{a}(0))$ と表される．ところが $\dot{a}(0)=-\theta(\dot{c}(0))a$ であるから $(\dot{c}(0),\dot{a}(0))$ は $\dot{c}(0)$ に関し線形である．よって c がすべての曲線をわたるとき

$$H_p\cong\{(\dot{c}(0),-\theta(\dot{c}(0))a)\mid\dot{c}(0)\in T_xM\}$$

は n 次元線形部分空間である．　□

この補題により

$$H=\bigcup_{p\in P_{GL}}H_p\subset TP_{GL}$$

は階数 $n=\dim M$ の部分束を与える．一般に，多様体の接ベクトル束の部分束を**分布**といい，この部分束を接ベクトル束とするような積分多様体が常に存在する（すなわち，この分布が**包合的**である）ための必要十分条件はこの部分束の切断全体が括弧積に関し閉じていることであった（フロベニウス（Frobenius）の定理，森田 [26]，2.3 節参照）．H は P_{GL} の（包合的とは限らない）分布を与えるが後でみるように H が包合的であることと ∇ の定める曲率形式が 0 であることとは同値である．

定義 2.3.6　主 G 束 P_G の接ベクトル束 TP_G の部分束

$$V=\{v\in TP_{GL}\mid d\pi(v)=0\}$$

を**垂直分布**という．$TP_G=V\oplus H$ をみたす部分束 H を**水平分布**という．

補題 2.3.7 H_p を補題 2.3.5 の直前に定義されたものとする．
(1) $\pi : P_{GL} \to M$ は同型 $d\pi : H_p \to T_{\pi(p)}M$ を誘導する．
(2) $H = \{H_p\}_{p\in P}$ は**右不変分布**である．すなわち $g \in GL(r,\mathbb{R})$ に対し，$R_g : P_{GL} \to P_{GL}$ を $R_g(p) = pg$ により定義するとき，$H_{pg} = R_{g*}H_p$ が成り立つ．

証明 (1) 曲線 $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ の水平リフトを $\widetilde{c} : (-\epsilon,\epsilon) \to P_{GL}$ とする．$d\pi(\frac{d\widetilde{c}}{dt}) = \frac{dc}{dt}$ であるから $d\pi$ は全射である．しかも $\dim H_p = \dim T_{\pi(p)}M = n$ であるから同型である．

(2) $p(t) = (\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_r)$ を $c(t)$ に沿った平行枠とするとき

$$p(t)g = (\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_r)g$$

も $c(t)$ に沿った平行枠である．よって

$$H_{pg} = \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (p(t)g) \right\} = \left\{ R_{g*} \left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=0} \right\} = R_{g*}H_p$$

となる．　□

次の定理は線形接続 ∇ を与えることと，右不変水平分布 H を与えることは同値であるということを主張している．

定理 2.3.8 (1) ベクトル束 E に線形接続 ∇ が与えられているとき，右不変な分解 $TP_{GL} = H \oplus V$ が存在する．

(2) 逆に右不変な分解 $TP_{GL} = H \oplus V$ が与えられるとベクトル束 E に線形接続が定まる．

証明 (1) $d\pi|_H$ は同型，$\ker d\pi = V$ であるから $TP_{GL} = H \oplus V$ となる．また H も V も G 不変である．

(2) 各点 $x \in M$ と x を通る任意の曲線 $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ に対し $\nabla_{\dot{c}}$ が決まればよい．ただし $\dot{c}(t) \neq 0$ のときのみを考えればいいのでそう仮定する．そのためには $c(t)$ に沿った平行枠 $\boldsymbol{e}_1(t),\cdots,\boldsymbol{e}_r(t)$ が決まればよい．何故なら，任意の $c(t)$ に沿ったベクトル場は

$$v(t) = a_1(t)\boldsymbol{e}_1(t) + \cdots + a_r(t)\boldsymbol{e}_r(t)$$

と表され，

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} v(t) = \sum_{i=1}^{r} \frac{da_i}{dt}\boldsymbol{e}_i(t)$$

と $\nabla_{\dot{c}}$ が決まるからである．

さて $c^*P_{GL} \cong (-\epsilon,\epsilon) \times GL(r,\mathbb{R})$ であり，$Tc^*P_{GL} = H' \oplus V|_c$，ただし $p \in c^*P_{GL}$ に対し $H'_p = \{\ell v \in H_p \mid d\pi(v) = \dot{c}(t),\ \ell \in \mathbb{R}\}$ である．(図 2.6.)

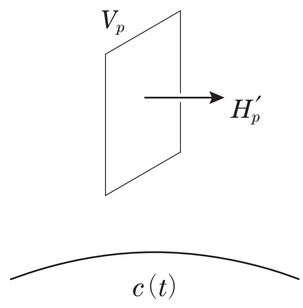


図 2.6

よって $\dot{c}(t)$ の H' への水平リフトとして c^*P_{GL} のベクトル場が定まる．任意の $p \in c^*P_{GL}$ に対し，p を通る積分曲線 $p(t) = (\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_r(t))$ を取り，$\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_r(t)$ を平行枠と決めればよい． □

定義 2.3.9　リー群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ とし，P を主 G 束とする．$A \in \mathfrak{g}$ に対し $p \mapsto \frac{d}{dt}\big|_{t=0} p\exp(tA)$ により定まる P 上のベクトル場を A の定める**基本ベクトル場**といい，A^* により表す．

P が自明な束 $M \times G$ のとき $A^* = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(x, g\exp(tA))$ は左不変ベクトル場である．

補題 2.3.10　$R_{g*}A^* = (\mathrm{Ad}(g^{-1})A)^*$.

証明　証明は次の式から得られる．

$$
\begin{aligned}
(R_{g*}A^*)_{pg} &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p\exp(tA)g = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} pg \cdot g^{-1}\exp(tA)g \\
&= (\mathrm{Ad}(g^{-1})A)^*_{pg}.
\end{aligned}
$$

□

定理 2.3.11　右不変水平分布 H が与えられることと次の (1)，(2) をみたす $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ に値を取る P_{GL} 上の 1 次微分形式 $\widetilde{\theta}$ が存在することとは同値である[*2]．

(1) $\widetilde{\theta}(A^*) = A$;

(2) $R_g^*\widetilde{\theta} = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \widetilde{\theta}$.

証明　右不変水平分布 H が与えられたとする．$\widetilde{\theta}$ を

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\theta}(A^*) = A, \qquad A \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}), \\
&\widetilde{\theta}|_H = 0
\end{aligned}
$$

*2)　一般にリー群 G のリー環はそのドイツ文字の小文字 $\mathfrak{g}$ で表される．行列式が 0 でない r 次正方行列全体のなすリー群 $GL(r, \mathbb{R})$ のリー環は r 次正方行列全体 $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ である．

により定義する．H 上と V 上で各々(2) がみたされることを見ればよい．まず，H は右不変であるから

$$(R_g^*\widetilde{\theta})|_H = \widetilde{\theta}|_{R_{g*}H} = \widetilde{\theta}|_H = 0$$

であり，一方明らかに

$$((\mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \widetilde{\theta})|_H = 0$$

であるから $R_g^*\widetilde{\theta}$ と $\mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \widetilde{\theta}$ はどちらも H 上 0 であり，一致する．一方 V 上では

$$\begin{aligned}(R_g^*\widetilde{\theta})(A^*) &= \widetilde{\theta}(R_{g*}A^*) = \widetilde{\theta}\big((\mathrm{Ad}(g^{-1})A)^*\big) \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})A = \mathrm{Ad}(g^{-1})\widetilde{\theta}(A^*)\end{aligned}$$

であるから (2) は成立する．

次に (1)，(2) をみたす P_{GL} 上の 1 次微分形式 $\widetilde{\theta}$ が存在したとする．$H = \ker\widetilde{\theta}$ により H を定義する．各点 $p \in P_{GL}$ において $\widetilde{\theta}_p : T_pP_{GL} \to \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ は全射であるから，明らかに $TP_{GL} = V \oplus H$ である．更に $v \in H$ に対し

$$\widetilde{\theta}(R_{g*}v) = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\widetilde{\theta}(v)) = 0$$

であるから $R_{g*}v \in H$ となり，H は右不変であることがわかる． □

定義 2.3.12 $\widetilde{\theta}$ を P_{GL} の接続形式という．

定理 2.3.13 $P_{GL} \to M$ をベクトル束 $E \to M$ の枠束とする．∇ を E の線形接続，θ を M の開集合 U 上の P_{GL} の局所自明化 $P_{GL}|_U \cong U \times GL(r, \mathbb{R})$ に関する接続行列とする．このとき P_{GL} 上の接続形式 $\widetilde{\theta}$ はこの局所自明化に関し

$$\widetilde{\theta} = A^{-1}dA + A^{-1}\theta A$$

で与えられる．($A^{-1}dA$ は $GL(r, \mathbb{R})$ のモーラー・カルタン（Maurer–Cartan）形式と呼ばれる.)

証明 M の開集合 U 上で E の局所枠 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を取ると U 上の局所自明化

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(U_\lambda) \ &\cong \ U_\lambda \times GL(r, \mathbb{R}) \\ (\boldsymbol{e}_1(x), \cdots, \boldsymbol{e}_r(x))A \ &\mapsto \ (x, A)\end{aligned}$$

が得られる．よって $x^1, \cdots, x^n$，a_{ij} $(1 \leq i,\ j \leq r)$ が $P_{GL}|_U$ の局所座標を与える．また，接続形式 (θ^i_j) は

$$\nabla \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \theta^i_j$$

で与えられる．

さて，$c(t)$ を U 上の曲線とする．$c(t)$ のリフトである P_{GL} 上の曲線

$$p(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} a_{1i} \boldsymbol{e}_i(t), \cdots, \sum_{i=1}^{r} a_{ri} \boldsymbol{e}_i(t) \right)$$

（ただし $\boldsymbol{e}(t) := \boldsymbol{e}(c(t))$）が平行であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}} p(t) &= \nabla_{\frac{d}{dt}} \big((\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_r(t)) A(t) \big) \\ &= (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r) \widetilde{\theta}(\dot{c}) A + (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r) \frac{dA}{dt} = 0, \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} + \theta(\dot{c}) A = 0 &\iff A^{-1} \frac{dA}{dt} + A^{-1} \theta(\dot{c}) A = 0 \\ &\iff (A^{-1} dA + A^{-1} \theta A)(\dot{A} + \dot{c}) = 0 \end{aligned}$$

である．ここに，上記の局所座標に関し $p(t) = (A(t), c(t))$ と表している．従って $A^{-1}dA + A^{-1}\theta A$ の核が平行枠 $p(t)$ の接する空間である．よって $\widetilde{\theta} = A^{-1}dA + A^{-1}\theta A$ である． □

さて以上のベクトル束に対する線形接続とその枠束 P_{GL} の接続を念頭において，一般の主束の接続を次のように定義する．

定義 2.3.14 主 G 束 $P_G \to M$ の**接続**とは右不変分布 $H \subset TP_G$ のこと，または同値な言い換えとして，右不変束分解 $TP_G = V \oplus H$ のことである．ただし V は垂直分布，すなわちファイバーに沿った接ベクトル束である．

定理 2.3.15 P_G の右不変水平分布 H が与えられることと次の (1)，(2) をみたす $\mathfrak{g}$ に値を取る P_G 上の 1 次微分形式 $\widetilde{\theta}$ が存在することとは同値である．

(1) $\widetilde{\theta}(A^*) = A$;

(2) $R_g^* \widetilde{\theta} = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \widetilde{\theta}$.

証明 補題 2.3.10 を用いると定理 2.3.11 と全く同じように証明をすることができる． □

定義 2.3.16 (1) $\widetilde{\theta}$ を P_G の**接続形式**という．

(2) P_G 上の $\mathfrak{g}$ 値 2 次微分形式 $\widetilde{\Theta} = d\widetilde{\theta} + \frac{1}{2}[\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}]$ を接続 $\widetilde{\theta}$ の**曲率形式**という．ただし，$\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式 α，β に対し，$\mathfrak{g}$ 値 2 次微分形式 $[\alpha, \beta]$ は

$$[\alpha, \beta](X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)]$$

により定義される．

定理 2.3.17　ベクトル束 E に同伴する枠束を $P_{GL} \to M$ とする．そして E の線形接続から定まる P_G 上の接続形式とその曲率形式を $\widetilde{\theta}$，$\widetilde{\Theta}$ とする．$p = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r)$ を開集合 $U \subset M$ 上の枠とし，p の定める U 上の局所自明化に関する接続行列を θ，その曲率形式を Θ とする．このとき

$$p^*\widetilde{\theta} = \theta, \qquad p^*\widetilde{\Theta} = \Theta$$

が成り立つ．

証明　$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を選ぶと局所自明化 $\pi^{-1}(U) \cong U \times GL(r, \mathbb{R})$ が定まり，$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r)$ は切断 $U \to U \times GL(r, \mathbb{R})$，$x \mapsto (x, E)$，を定める．ここに E は r 次単位行列を表す．定理 2.3.13 により，この状況で

$$\widetilde{\theta} = A^{-1}dA + A^{-1}\theta A$$

であり，p に沿って $A \equiv E$ であるから

$$p^*\widetilde{\theta} = \theta$$

となる．更にこれより

$$p^*\widetilde{\Theta} = p^*(d\widetilde{\theta} + \widetilde{\theta} \wedge \widetilde{\theta}) = d\theta + \theta \wedge \theta = \Theta$$

となる．　□

以後，一般の主 G 束 $\pi : P_G \to M$ を考える．実際上 G は一般線形群 $GL(r, \mathbb{R})$ の部分群のことが多い．この場合 P_G には**同伴ベクトル束**

$$P_G \times_G \mathbb{R}^r := P_G \times \mathbb{R}^r/\sim$$

が定まる．ただし同値関係 $\sim$ は

$$(pg^{-1}, gv) \sim (p, v)$$

により定義されるものである．このとき P_G の接続とは平行枠が部分群 G に属するような接続ということである．

例 2.3.18　ベクトル束 E に計量が与えられているとする．すなわち，各点 $p \in M$ のファイバー E_p に内積が与えられ，p に関し滑らかであるとする．このとき正規直交基底全体のなす部分集合 $P_O \subset P_{GL}$ は直交群 $O(r)$ を構造群とする主束になる．この場合 P_O の接続とは E の線形接続で，平行枠が正規直交基底だけからなるような接続ということである．一方 E の構造群の $O(r)$ への

簡約化 $P_O \subset P_{GL}$ は E に計量（h とする）を与えることと同値である（下の定義 2.3.26 および例 2.3.27 参照）．正規直交枠に関する接続形式は歪対称行列のなすリー環 $\mathfrak{o}(r)$ に値を持つので，

$$\begin{aligned}(\nabla h)(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) &= d(h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) - h(\theta_i^k \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j) - h(\boldsymbol{e}_i, \theta_j^k \boldsymbol{e}_k) \\ &= -\theta_i^j - \theta_j^i = 0\end{aligned}$$

となる．よって $\nabla h = 0$，すなわち ∇ は計量 h と両立する接続のことである．

以下記号を簡略化するため $\widetilde{\theta}$ を θ，$\widetilde{\Theta}$ を Θ により表す．

定義 2.3.19　$h : TP_G \to H$ を V に沿った射影，すなわち $h|_H = \mathrm{id}$，$h|_V = 0$ により一意的に定まる線形写像とし，**水平射影**と呼ぶ．また，$v : TP_G \to V$ を H に沿った射影とし，**垂直射影**と呼ぶ．

定理 2.3.20　$\Theta(X, Y) = \Theta(hX, hY) = d\theta(hX, hY)$ が成り立つ．（最初の等式を Θ は**水平である**と言い表す．）

証明　2 番目の等式は

$$\Theta(hX, hY) = \left(d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]\right)(hX, hY) = d\theta(hX, hY)$$

より明らかである．よって $\Theta(X, Y) = \Theta(hX, hY)$ を示せばよい．

$$\Theta(X, Y) = \Theta(hX, hY) + \Theta(hX, vY) + \Theta(vX, hY) + \Theta(vX, vY)$$

であるから右辺の第 2 項，第 3 項，第 4 項が 0 であることを示せばよい．

第 2 項が 0 であること：$vY = A^*$ とし，hX を水平ベクトル場に拡張する．このとき

$$\begin{aligned}\Theta(hX, A^*) &= d\theta(hX, A^*) \\ &= hX\theta(A^*) - A^*\theta(hX) - \theta([hX, A^*]) \\ &= -\theta([hX, A^*])\end{aligned}$$

（ただし $\theta(A^*)$ は恒等的に A に等しいのでその微分 $hX\theta(A^*)$ は 0 である）を得る．更に基本ベクトル場の定義 $A^* = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p\exp(tA)$ より A^* の生成する 1 助変数変換群 $\mathrm{Exp}(tA^*)$ は $R_{\exp(tA)}$ に等しい．よって

$$[A^*, hX] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\bigl(hX - (R_{\exp(tA)})_* hX\bigr)$$

となる．しかし $hX \in H$ であり，H は右不変であるから $(R_{\exp(tA)})_* hX \in H$ であるので $[A^*, hX] \in H$ となる．よって上式より $\Theta(hX, A^*) = 0$ を得る．す

なわち第 2 項は 0 である．

第 3 項が 0 であること：$\Theta(vX, hY) = -\Theta(hY, vX) = 0$ より明らか．

第 4 項が 0 であること：$vX = A^*$，$vY = B^*$ とすると

$$\begin{aligned}\Theta(A^*, B^*) &= d\theta(A^*, B^*) + \frac{1}{2}[\theta, \theta](A^*, B^*) \\ &= A^*\theta(B^*) - B^*\theta(A^*) - \theta([A^*, B^*]) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big([\theta(A^*), \theta(B^*)] - [\theta(B^*), \theta(A^*)]\big) \\ &= -[A, B] + \frac{1}{2}([A, B] - [B, A]) = 0\end{aligned}$$

を得る． □

系 2.3.21　主束 P_G の接続 θ に対し，その水平分布 H が完全積分可能であるための必要十分条件は曲率形式 Θ が恒等的に 0 であることである．

定義 2.3.22　$\Theta = 0$ となる P_G の接続 θ を**平坦接続**という．また平坦接続の与えられた束を**平坦束**という．

定義 2.3.23　$x \in M$ を固定し，$c : [0, 1] \to M$ を x を基点とする区分的に滑らかな閉曲線とする（従って $c(0) = c(1) = x$ である）．x 上のファイバー $(P_G)_x$ の点 p_0 に対し $p_c : [0, 1] \to P_G$ を，$p_c(0) = p_0$ を初期値とする水平リフトとする．この意味は $\pi \circ p_c = c$ であり，$\dot{p}_c(t) \in H$ をみたすということである.（言うまでもなくベクトル束の枠束の場合は c に沿った平行枠に他ならない.）このとき $p_c(1) \in (P_G)_x$ を c に沿った p_0 の**平行移動**という．また，ある $h \in G$ を用いて $p_c(1) = p_0 h$ と表されるが，この h を c に沿った**ホロノミー**という.（図 2.7.）すべての c に対するホロノミーの全体の集合

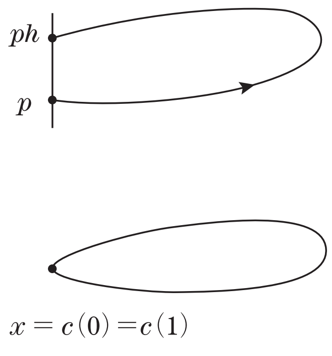


図 2.7

$$Hol(p_0) = \left\{ h \in G \;\middle|\; \begin{array}{l} h \text{ は } x = \pi(p_0) \text{ を基点とする} \\ \text{区分的に滑らかな閉曲線に関するホロノミー} \end{array} \right\}$$

は群をなす．実際にはリー部分群になるが，M がコンパクトでも一般には閉部分群にはならないことが知られている．リーマン多様体の場合，一点にホモトピックな道のみを考えた制限ホロノミー群は $SO(n)$ の閉部分群になり，詳しく調べられている．これについては 2.5.4 節で解説する．また，容易にわかるように（下の例題参照）

$$Hol(p_0 g) = g^{-1}\, Hol(p_0) g$$

である．$Hol(p_0)$ の共役類を**ホロノミー群**という．

例題 2.3.24　上の定義中の $Hol(p_0 g) = g^{-1}\, Hol(p_0) g$ を示せ．

解答　水平分布は右不変であるから $p_c g$ は $p_c(0)g = p_0 g$ を初期値とした平行移動である．

$$p_c(1)g = p_0 hg = p_0 g \cdot g^{-1} hg$$

であるから $p_0 g$ を初期値とした c に沿ったホロノミーは $g^{-1}hg$ である．　□

演習問題 2.3.25　次を示せ．

(1) θ が平坦接続であるための必要十分条件は，任意の $x \in M$ に対し，ある近傍 U と U 上の局所自明化 $P_G|_U = U \times G$ が存在し，水平分布は $H = \pi^* TU$ により与えられることである．

(2) ベクトル束 E の線形接続 ∇ の場合，∇ が平坦接続である（つまり曲率形式が 0 である）ための必要十分条件は，任意の $x \in M$ に対しある近傍 U と U 上の平行枠 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ が存在することである．

(3) P_G を平坦束とする．

(3.a)　2 つの閉曲線 c_1 と c_2 がホモトピックなとき c_1 と c_2 に対するホロノミーは等しい．

(3.b)　$\rho : \pi_1(M, x) \to G$ を $\rho([c]) = h$，ただし h は c に関するホロノミー，と定義する．このとき ρ は群の準同型写像である．

(4) P_G を平坦束とする．$\widetilde{M}$ を M の普遍被覆とし，$\widetilde{M} \to M$ を主 $\pi_1(M)$ 束とみなす．このとき P_G は同伴束 $\widetilde{M} \times_\rho G$ と同型である．ただし，$\widetilde{M} \times_\rho G$ は $\widetilde{M} \times G$ を同値関係

$$(\widetilde{m}, g) \sim (\widetilde{m}h^{-1}, \rho(h)g), \qquad h \in \pi_1(M, x)$$

で割った商空間である．

(5) 平坦主 G 束の同型類全体と，基本群の表現 $\pi_1(M) \to G$ の共役類全体とは 1 対 1 に対応する．

定義 2.3.26　$H \subset G$ をリー部分群とする．与えられた主 G 束 P_G に対し，ある主 H 束 P_H と，埋め込み $\iota\colon P_H \hookrightarrow P_G$ で

$$\iota(ph) = \iota(p)h, \qquad p \in P_H,\ h \in H,$$

をみたすものが存在するとき，P_H を P_G の構造群 H への**簡約化**という．

P_G，P_H の M への射影を π_G，π_H で表す．$P_G \supset P_H \ni p$，$\pi_H(p) = x$ のとき，

$$(\pi_G)^{-1}(x) = pG, \quad (\pi_H)^{-1}(x) = pH$$

である．すなわち P_H が与えられると各点 x のファイバー $(P_G)_x$ において H 軌道が一つ定まる．よって P_H が与えられると $(P_G)/H \to M$ の切断が一つ決まる．

逆に，$(P_G)/H \to M$ の切断 s を一つ与えると $s(x) \subset (P_G)_x$ は一つの H 軌道を決め，

$$P_H := \bigcup_{x \in M} s(x) \subset P_G$$

により P_H が決まる．

例 2.3.27　E を階数 r の実ベクトル束，P_{GL} をその枠束とする．$\mathbb{R}^r$ の内積に対しその正規直交基底を列ベクトルに並べた行列全体を対応させることにより，$\mathbb{R}^r$ の内積全体のなす空間から $GL(r,\mathbb{R})/O(r)$ への全単射が得られる．この意味で P_{GL} の構造群を $O(r)$ に簡約化すること，すなわち $P_{GL}/O(r) \to M$ の切断を与えることは E のファイバー計量を与えることと対応する．

全く同様に E が複素ベクトル束のとき，その枠束 $P_{GL(r,\mathbb{C})}$ の構造群を $U(r)$ に簡約化することは，E にエルミート計量を与えることと対応する．

命題 2.3.28　主 G 束 P_G の，構造群の H への簡約化 P_H が与えられているとする．このとき P_H の接続は P_G の接続を自然に定める．(このような P_G の接続を H 接続という．)

証明　P_H の右不変水平分布は P_G の右移動を用いて自然に P_G の右不変水平分布に拡張する．　□

例 2.3.29　M を向き付けられた n 次元リーマン多様体とするとき，そのレビ･チビタ接続は $SO(n)$ 接続である．なぜなら，任意の点 x の接空間で正規直交基底を一つ取り，x を通るかってな曲線 $c(t)$ に対し，$c(t)$ に沿った平行移動を $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ とする．レビ･チビタ接続はリーマン計量と両立するので

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\nabla_{\dot{c}}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) + (\boldsymbol{e}_i, \nabla_{\dot{c}}\boldsymbol{e}_j) = 0,$$

すなわち，平行枠 $\boldsymbol{e}_1(c(t)), \cdots, \boldsymbol{e}_n(c(t))$ は任意の t に対し正規直交基底である．よってレビ·チビタ接続は正規直交枠 P_{SO} の接続から誘導されるものである．

例 2.3.30 上の例と同様に，複素ベクトル束 E にエルミート計量とその計量と両立する線形接続があったとする．このような接続は $U(r)$ 接続である．

主束 P_G に接続が与えられているとし，$x \in M$ と $p_0 \in (P_G)_x$ を固定する．x を始点とする M の任意の区分的に滑らかな道 $c(t)$, $0 \leq t \leq 1$，に対し p_0 の c に沿った平行移動 $p_c(t)$, $0 \leq t \leq 1$，を取り，

$$P_{Hol(p_0)} = \{p_c(1) \mid c(t) \text{ は } x \text{ を始点とするすべての区分的に滑らかな道}\}$$

とおく．$P_{Hol(p_0)}$ は主 $Hol(p_0)$ 束をなし，P_G の構造群の $Hol(p_0)$ への簡約化を与える．$P_{Hol(p_0)}$ を**ホロノミー束**という．明らかに接続はホロノミー束の接続から誘導されている．よって主 P_G 束の接続は $Hol(p_0)$ 接続である．またホロノミー群は接続を込めて構造群を簡約化できる最小の部分群である．

次の補題は次節でくり返し使われるものである．次節の準備としてここで述べておきたい．

補題 2.3.31 $\pi : P_G \to M$ を主 G 束とする．P_G 上の k 次微分形式 α が

(1) $R_g^*\alpha = \alpha$,

(2) ある X_i に対し $\pi_* X_i = 0$ であるならば $\alpha(X_1, \cdots, X_k) = 0$

の 2 つの性質をみたすとする．このとき M の k 次微分形式 $\underline{\alpha}$ が存在して $\alpha = \pi^*\underline{\alpha}$ と表される．

証明 $x \in M$ における接ベクトル $Z_1, \cdots, Z_k$ に対し，$\pi_* X_i = Z_i$ となる $p \in P_G$ における接ベクトル $X_1, \cdots, X_k$ を任意にとる．そこで

$$\underline{\alpha}(Z_1, \cdots, Z_k) = \alpha(X_1, \cdots, X_k)$$

により $\underline{\alpha}$ を定義する．これが well-defined であることをみればよい．$g \in G$ とし $pg \in P_G$ における接ベクトル $Y_1, \cdots, Y_k$ を $\pi_* Y_i = Z_i$ なる別のリフトとする．このとき α の右不変性と $\pi_*(R_{g*}X_i - Y_i) = 0$ より

$$\begin{aligned}
&\alpha(X_1, \cdots, X_k) - \alpha(Y_1, \cdots, Y_k) \\
&\quad = \alpha(R_{g*}X_1, \cdots, R_{g*}X_k) - \alpha(Y_1, \cdots, Y_k) \\
&\quad = \alpha(R_{g*}X_1 - Y_1, R_{g*}X_2, \cdots, R_{g*}X_k) \\
&\qquad + \alpha(Y_1, R_{g*}X_2 - Y_2, R_{g*}X_3, \cdots, R_{g*}X_k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+\alpha(Y_1,\cdots,Y_{k-1},R_{g*}X_k-Y_k)\\
&=0
\end{aligned}
$$

であるから $\underline{\alpha}$ は well-defined である． □

2.4 特性類

本節では特性類と接続の関係に関する理論，いわゆるチャーン・ヴェイユ（Chern–Weil）理論について解説する．

G をコンパクトなリー群，$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする．$\mathfrak{g}$ 上の k 次同次多項式で G の随伴作用で不変なものの全体を $I^k(G)$ により表す：

$$
I^k(G)=\{f:\mathfrak{g}\times\cdots\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}\mid f \text{ は次の (1)，(2) をみたす}\},
$$

(1)　f は対称かつ多重線形，

(2)　$f(\mathrm{Ad}(g)X_1,\cdots,\mathrm{Ad}(g)X_k)=f(X_1,\cdots,X_k)$.

$I(G)=\bigoplus_{k\geq 0}I^k(G)$ は $\mathbb{R}$ 代数になる．$I^k(G)$ の元は次数 k の **G 不変多項式**と呼ばれる．

主束 $\pi:P_G\to M$ に接続 θ が与えられているとし，その曲率形式を $\Theta=d\theta+\frac{1}{2}[\theta,\theta]$ とする．

補題 2.4.1　$f\in I^k(G)$ とする．$f(\Theta)=f(\Theta,\cdots,\Theta)$ に対し M 上の $2k$ 次微分形式 $\underline{f(\Theta)}$ が存在して $f(\Theta)=\pi^*\underline{f(\Theta)}$ をみたす．

証明　$R_g^*\theta=\mathrm{Ad}(g^{-1})\theta$ より

$$
\begin{aligned}
R_g^*\Theta&=dR_g^*\theta+\frac{1}{2}[R_g^*\theta,R_g^*\theta]\\
&=d\,\mathrm{Ad}(g^{-1})\theta+\frac{1}{2}[\mathrm{Ad}(g^{-1})\theta,\mathrm{Ad}(g^{-1})\theta]\\
&=\mathrm{Ad}(g^{-1})\left(d\theta+\frac{1}{2}[\theta,\theta]\right)=\mathrm{Ad}(g^{-1})\Theta
\end{aligned}
$$

を得る．従って

$$
\begin{aligned}
R_g^*f(\Theta)&=f(R_g^*\Theta,\cdots,R_g^*\Theta)\\
&=f(\mathrm{Ad}(g^{-1})\Theta,\cdots,\mathrm{Ad}(g^{-1})\Theta)=f(\Theta,\cdots,\Theta)=f(\Theta),
\end{aligned}
$$

すなわち $f(\Theta)$ は右不変である．

更に定理 2.3.20 より Θ は水平であるから $f(\Theta)$ も水平である．よって補題 2.3.31 により M 上の $2k$ 次微分形式 $\underline{f(\Theta)}$ が存在して $f(\Theta)=\pi^*\underline{f(\Theta)}$ をみたす． □

以下の目標は次の 2 つを示すことである．

(a) $\underline{f(\Theta)}$ は閉形式である．
(b) θ_0，θ_1 を 2 つの接続とすると，P_G 上の $(2k-1)$ 次微分形式 $Tf(\theta_0, \theta_1)$ が存在し，

$$f(\Theta_1) - f(\Theta_2) = dTf(\theta_0, \theta_1) \tag{2.14}$$

をみたす．また M 上の $(2k-1)$ 次微分形式 $\underline{Tf(\theta_0, \theta_1)}$ が存在し，

$$Tf(\theta_0, \theta_1) = \pi^* \underline{Tf(\theta_0, \theta_1)} \tag{2.15}$$

をみたす．

この 2 つが証明されると次の定理が得られる．

定理 2.4.2 閉形式 $\underline{f(\Theta)}$ の定めるド·ラーム類 $[\underline{f(\Theta)}] \in H^{2k}_{DR}(M, \mathbb{R})$ は接続 θ の選び方によらない．

証明 補題 2.4.1 および式 (2.14)，(2.15) により

$$\pi^* \big(\underline{f(\Theta_1)} - \underline{f(\Theta_2)} - d\underline{Tf(\theta_0, \theta_1)} \big) = 0$$

となる．しかし π_* が全射であるから π^* は単射であり，従って

$$\underline{f(\Theta_1)} - \underline{f(\Theta_2)} = d\underline{Tf(\theta_0, \theta_1)}$$

となる．すなわち，ド·ラーム類として $[\underline{f(\Theta_1)}] = [\underline{f(\Theta_2)}]$ となる． □

定義 2.4.3 $w : I(G) \to H^*_{DR}(M)$ を $w(f) = [\underline{f(\Theta)}]$ により定義し，**ヴェイユ準同型**という．実際 w は環準同型である．また $w(f)$ を f に対応する**特性類**という．

以上の理論を**チャーン・ヴェイユ理論**という．更に，$Tf(\theta_0, \theta_1)$ は**転入形式**と呼ばれ，チャーン・サイモンス（Chern–Simons）理論で重要な役割を果たす．これについては後述することにし，上の (a)，(b) の証明をして，定理 2.4.2 の証明を完了したい．

定義 2.4.4 接続の与えられた主束 P_G 上の p 次微分形式 φ に対し

$$D\varphi = d\varphi \circ h$$

とおき，作用素 D を**共変外微分**という．

補題 2.4.5　曲率形式 Θ に対し $D\Theta = 0$ となる．(これをビアンキ（**Bianchi**）の恒等式という．)

証明　$\theta \circ h = 0$ より

$$
\begin{aligned}
D\Theta(X, Y, Z) &= (d\Theta)(hX, hY, hZ) \\
&= \left(d \left(d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] \right) \right) (hX, hY, hZ) \\
&= \left(\frac{1}{2}[d\theta, \theta] - \frac{1}{2}[\theta, d\theta] \right) (hX, hY, hZ) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を得る．　□

補題 2.4.6　P_G 上の p 次微分形式 φ が M の 2 次微分形式 $\underline{\varphi}$ を用いて $\pi^*\underline{\varphi}$ と表されるとき，

$$d\varphi = D\varphi$$

が成り立つ．

証明　引き戻しと外微分は交換可能であることと $\pi_* = \pi_* \circ h$ であることより

$$
\begin{aligned}
(d\varphi)(X_1, \cdots, X_{p+1}) &= (d(\pi^*\underline{\varphi}))(X_1, \cdots, X_{p+1}) \\
&= (d\underline{\varphi})(\pi_* X_1, \cdots, \pi_* X_{p+1}) \\
&= (d\underline{\varphi})(\pi_* hX_1, \cdots, \pi_* hX_{p+1}) \\
&= (\pi^* d\underline{\varphi})(hX_1, \cdots, hX_{p+1}) \\
&= (d\varphi \circ h)(X_1, \cdots, X_{p+1}) = (D\varphi)(X_1, \cdots, X_{p+1})
\end{aligned}
$$

を得る．　□

(a) **の証明**　補題 2.4.1 と 2.4.6 より $d(f(\Theta)) = D(f(\Theta))$ であるから

$$
\begin{aligned}
d(f(\Theta)) &= d(f(\Theta)) \circ h \\
&= f(D\Theta, \Theta, \cdots, \Theta) + \cdots + f(\Theta, \cdots, \Theta, D\Theta) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を得る（ただし $\Omega \circ h = \Omega$ とビアンキの恒等式（補題 2.4.5）を用いた）．よって

$$\pi^* d\underline{f(\Omega)} = d(f(\Omega)) = 0$$

となる．π_* は全射であるから $d(\underline{f(\Omega)}) = 0$ を得る．　□

補題 2.4.7 主束 P_G に接続が与えられているとする．P_G 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式 φ が

(1) $\varphi \circ v = 0$；

(2) $R_g^* \varphi = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \varphi$

をみたすとすると

$$D\varphi = d\varphi + [\varphi, \theta] \tag{2.16}$$

が成り立つ．

証明 $D\varphi$ は 2 次微分形式であるから 2 つのベクトル場 X，Y で値をとるとき X，Y がどちらも垂直の場合，どちらも水平の場合，一方だけが垂直の場合の 3 つの場合に検証すればよい．

まず X，Y がどちらも垂直の場合，$hX = hY = 0$ より

$$D\varphi(X, Y) = d\varphi(hX, hY) = 0$$

である．一方 $\theta(X) = \theta(Y) = 0$ であり，$[X, Y]$ も垂直であるから (2.16) の右辺を X，Y で値をとると 0 である．

次に X，Y がどちらも水平の場合，(2.16) の両辺を X，Y で値をとると，どちらも $d\varphi(X, Y)$ に等しい．

最後に $X = A^*$ で Y が水平のときを考察する．$hX = 0$ であるから

$$(D\varphi)(X, Y) = (d\varphi)(hX, hY) = 0$$

となる．よって (2.16) の右辺を X，Y で値をとると 0 であることを見ればよい．

$$\begin{aligned}(d\varphi + [\varphi, \theta])(X, Y) &= d\varphi(A^*, Y) - [\varphi(Y), \theta(A^*)] \\ &= A^*\varphi(Y) - Y\varphi(A^*) - \varphi([A^*, Y]) + [A, \varphi(Y)]\end{aligned}$$

であるが，仮定 $\varphi \circ v = 0$ より $\varphi(A^*) = 0$ である．更に Y を右不変水平ベクトル場として拡張しておくと

$$[A^*, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Y - R_{\exp(tA)*}Y) = 0$$

となる．よって

$$A^*\varphi(Y) + [A, \varphi(Y)] = 0$$

を示せばよい．実際 $u \in P_G$ において

$$\begin{aligned}A_u^*(\varphi(Y)) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big((\varphi(Y))_{u\exp(tA)} - (\varphi(Y))_u\big) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(\varphi_{u\exp(tA)}(R_{\exp(tA)*}Y_u) - \varphi_u(Y_u)\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big((R^*_{\exp(tA)}\varphi)_u(Y_u) - \varphi_u(Y_u)\Big)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\mathrm{Ad}(\exp(-tA))\varphi_u(Y_u) - \varphi_u(Y_u)\Big)\\
&= -[A, \varphi_u(Y_u)]
\end{aligned}
$$

であるから欲しい式が得られた．ただし 2 番目の等式では Y が右不変水平ベクトル場に拡張されていると仮定していることを用いた． □

(b) の証明　θ_0，θ_1 を P_G の 2 つの接続形式とする．

$$
\begin{aligned}
&\alpha := \theta_1 - \theta_0,\\
&\theta_t := \theta_0 + t\alpha = (1-t)\theta_0 + t\theta_1
\end{aligned}
$$

とおくと θ_t は接続になる．また

$$
\alpha(A^*) = \theta_1(A^*) - \theta_0(A^*) = A - A = 0,
$$

すなわち $\alpha \circ v = 0$ をみたし，更に

$$
R_g^*\alpha = \mathrm{Ad}(g^{-1})\alpha
$$

をみたすから α は補題 2.4.7 の仮定をみたす．よって θ_t の曲率形式

$$
\Theta_t = d\theta_t + \frac{1}{2}[\theta_t, \theta_t]
$$

に対し

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Theta_t &= d\frac{d\theta_t}{dt} + \left[\frac{d\theta_t}{dt}, \theta_t\right]\\
&= d\alpha + [\alpha, \theta_t] = D_t\alpha \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

を得る．そこで

$$
Tf(\theta_0, \theta_1) = k\int_0^1 f(\alpha, \Theta_t, \cdots, \Theta_t)dt
$$

とおく．もし一つでも $\pi_* X_i = 0$ なる X_i があれば，$\alpha \circ v = 0$ と定理 2.3.20 より

$$
Tf(\theta_0, \theta_1)(X_1, \cdots, X_{2k-1}) = 0
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
R_g^* Tf(\theta_0, \theta_1) &= k\int_0^1 f\big(\mathrm{Ad}(g^{-1})\alpha, \mathrm{Ad}(g^{-1})\Theta_t, \cdots, \mathrm{Ad}(g^{-1})\Theta_t\big)dt\\
&= k\int_0^1 f(\alpha, \Theta_t, \cdots, \Theta_t)dt = Tf(\theta_0, \theta_1)
\end{aligned}
$$

である．よって補題 2.3.31 より M 上の $(2k-1)$ 次微分形式 $\underline{Tf(\theta_0,\theta_1)}$ で

$$\pi^*\underline{Tf(\theta_0,\theta_1)} = Tf(\theta_0,\theta_1)$$

をみたすものが存在する．更に補題 2.4.6 および $D_t\Theta_t = 0$ により

$$\begin{aligned}
dTf(\theta_0,\theta_1) &= k\int_0^1 d(f(\alpha,\Theta_t,\cdots,\Theta_t))dt \\
&= k\int_0^1 D_t(f(\alpha,\Theta_t,\cdots,\Theta_t))dt \\
&= k\int_0^1 f(D_t\alpha,\Theta_t,\cdots,\Theta_t)dt \\
&= k\int_0^1 f\left(\frac{d\Theta_t}{dt},\Theta_t,\cdots,\Theta_t\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}f(\Theta_t)dt = f(\Theta_1) - f(\Theta_0)
\end{aligned}$$

を得る． □

G がユニタリ群

$$U(r) = \{A \in GL(r,\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}A = E,\ \det A = 1\}$$

の場合を考えよう．リー環 $\mathfrak{g}$ は歪エルミート行列全体のなすリー環 $\mathfrak{u}(r)$ である．$A \in \mathfrak{u}(r)$ に対し，

$$\det\left(E + t\frac{i}{2\pi}A\right) = 1 + tc_1(A) + \cdots + t^r c_r(A)$$

により $c_1,\cdots,c_r$ を定義する．ただし E は単位行列である．明らかに

$$c_1(A) = \operatorname{tr} A, \quad \cdots, \quad c_r(A) = \det A$$

である．

命題 2.4.8 $I(U(r))$ は $c_1,\cdots,c_r$ で生成される．

証明

$$\begin{aligned}
\det\left(E + t\frac{i}{2\pi}PAP^{-1}\right) &= \det\left(P\left(E + t\frac{i}{2\pi}A\right)P^{-1}\right) \\
&= \det\left(E + t\frac{i}{2\pi}A\right)
\end{aligned}$$

であるから，c_i は i 次不変多項式である．一方任意の $A \in \mathfrak{u}(r)$ は正規行列なので，あるユニタリ行列 P が存在して

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} i\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\lambda_r \end{pmatrix}$$

となる．よって $I(U(r))$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ の対称多項式全体と一致し，

$$c_1 \sim -\frac{1}{2\pi}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)$$

$$\vdots$$

$$c_r \sim \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^r \lambda_1 \cdots \lambda_r$$

である．よって命題の主張は，任意の対称多項式は基本対称式で生成されるという事実から従う． □

次に G が直交行列全体

$$O(r) = \{A \mid A \text{ は } r \text{ 次実正方行列}, {}^tAA = E\}$$

の場合を考えよう．リー環 $\mathfrak{g}$ は歪対称行列全体のなすリー環 $\mathfrak{o}(r)$ である．$A \in \mathfrak{o}(r)$ に対し

$$\det\left(E - \frac{t}{2\pi}A\right) = 1 + tq_1(A) + \cdots + t^r q_r(A)$$

により $q_1, \cdots, q_r$ を定義する．

命題 2.4.9　i が奇数のとき $q_i = 0$ である．

証明

$$\det\left(E - \frac{t}{2\pi}A\right) = \det{}^t\left(E - \frac{t}{2\pi}A\right) = \det\left(E - \frac{t}{2\pi}(-A)\right)$$

であるから

$$q_i(A) = q_i(-A) = (-1)^i q_i(A)$$

となる．よって i が奇数のとき $q_i = 0$ である． □

定義 2.4.10　$p_i(\Theta) := q_{2i}(\Theta)$ とおき i 次**ポントリャーギン（Pontryagin）形式**という．また，ド·ラーム類 $[p_i(\Theta)] \in H^{4i}_{DR}(M)$ を i 次**ポントリャーギン類**という．

更に，特殊直交群

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$$

に関し次の事実が知られている（[6]，vol II, pp.298–305）.

事実 2.4.11　$I(SO(2r+1))$ は $q_2, \cdots, q_{2r}$ で生成される.

事実 2.4.12　$I(SO(2r))$ は $q_2, \cdots, q_{2r}, e$ で生成される．ただし，

$$e\begin{pmatrix} & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r \\ & & & -\lambda_r & \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_r$$

である.

定義 2.4.13　ド・ラーム類 $[\frac{1}{2^r\pi^r}e(\Theta)]$ を**オイラー類**という.

ここで再び式 (2.14) に戻ろう．この式は主束 $\pi : P_G \to M$ の 2 つの接続 θ_1，θ_2 に対する式である．しかし，この式において θ_1 はある接続 θ であるとし，$\theta_2 = 0$ としても（0 は接続形式ではないが）式としては意味を持つ．もちろんこのとき $\Theta_2 = 0$ である．よって $Tf(\theta) = Tf(\theta, 0)$ とおくと

$$f(\Theta) = dTf(\theta)$$

を得る．すなわち，任意の特性形式は P_G に引き戻すと微分形式としては完全形式である．更に，もしある接続 θ に対し特性形式が微分形式として恒等的に 0 であるとすると

$$dTf(\theta) = 0$$

となり，この接続の転入形式は P_G のコホモロジー類を定めることになる．このコホモロジー類 $[Tf(\theta)]$ は M のコホモロジー類を定めるか，そして M の何らかの幾何構造に対する不変量になるかという疑問が生ずる．答えは状況により $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 類として意味を持ち，不変量になることがあるということである．これがもっとも有効に機能する例は**葉層構造**の特性類の場合である．葉層構造とはフロベニウスの定理の意味で包合的な分布が与えられているとき，積分多様体の族を多様体上のひとつの構造とみなしたものである．このとき，接束に対する接続形式 θ は，積分多様体に制限すると 0 になる微分形式になるとき**基本接続**または**ボット（Bott）接続**と呼ばれる．このとき不変多項式 f の次数が積分多様体の余次元より大きいと $f(\Theta) = 0$ となる．よって $Tf(\theta)$ は P_G の閉形式を定める．更に転入形式の変分を調べることにより M の $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 類として基本接続の選び方によらないことがわかる．このようにして得ら

れる不変量を**チャーン・サイモンス不変量**，あるいは**二義的特性類**（secondary characterisitc class）という．詳細は [11]，[10]，[16] を参照せよ．

2.5　リーマン幾何の基本事項

2.5.1　測地線と正規座標

以下 M を連結リーマン多様体とする．

定義 2.5.1　リーマン多様体 M の曲線 $c:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ が**測地線**であるとは

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}\dot{c}(t)=\left(\frac{d^2c^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dc^j}{dt}\frac{dc^k}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}=0$$

をみたすときをいう．

ここに $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ は c に沿った共変微分である（第 2.3 節の冒頭参照）．いいかえれば測地線とは $\dot{c}(t)$ が c に沿って平行であるときをいう．今 M の 2 点 p と q を結ぶ区分的に滑らかな道の全体

$$Path(p,q)=\{c:[a,b]\to M\mid c\text{ は区分的に滑らか},\ c(a)=p,\ c(b)=q\}$$

を考える．道 c の長さを

$$L(c)=\int_a^b\sqrt{g(\dot{c},\dot{c})}\,dt$$

により定義する．L は $Path(p,q)$ 上の汎関数を定める．

$a=c(0)$ から $c(t)$ までの長さは

$$s(t)=\int_a^t g(\dot{c}(\tau),\dot{c}(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau$$

により与えられる．任意の t に対し $\dot{c}(t)\neq 0$ と仮定する．もしそうでなければそのような部分閉区間に制限して考える．このとき

$$\frac{ds}{dt}=g(\dot{c}(t),\dot{c}(t))^{\frac{1}{2}}\neq 0$$

である．よって逆関数定理により t を s の関数とみなすことができ，$t=t(s)$ とおくと

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{g(\dot{c}(t),\dot{c}(t))^{\frac{1}{2}}}$$

となる．このとき

$$c(t)=c(t(s))=\widetilde{c}(s)$$

とおくと $\widetilde{c}:[0,s(b)]\to M$ とみなすことができ，しかも

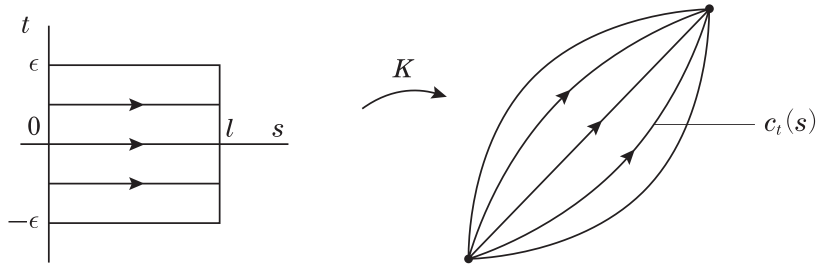


図 2.8

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{d\tilde{c}}{ds}, \frac{d\tilde{c}}{ds}\right) &= g\left(\frac{dt}{ds}\dot{c}(t), \frac{dt}{ds}\dot{c}(t)\right) \\
&= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \equiv 1
\end{aligned}
$$

となる．このように $\|\frac{d\tilde{c}}{ds}\| \equiv 1$ のとき $\tilde{c}$ は弧長でパラメーター付けられているという．

定理 2.5.2 滑らかな道 c が弧長でパラメーター付けられているとする．c が $L : Path(p, q) \to \mathbb{R}$ の臨界点であるための必要十分条件は，c が測地線であることである．特に c が 2 点を結ぶ最短曲線であれば測地線である．

証明 $c(s)$，$0 \leq s \leq l$，を p と q を結ぶ弧長でパラメーター付けられた滑らかな曲線とする．滑らかな写像 $K : [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ で $K(s, 0) = c(s)$，かつ任意の $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ に対し $c(0, t) \equiv p$，$c(l, t) \equiv q$ なるものを任意に取る．(このような K を c の変分という．また，ここでの t は曲線の族のパラメーターであり上で出てきた t とは無関係である.) $c_t(s) = K(s, t)$ とおき，$c_t : [0, l] \to M$ を p と q を結ぶ曲線の族とみなす. (図 2.8.) このとき示すべきことは，

$$
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(c_t) = 0
$$

となるための必要十分条件は $c(s)$ が測地線であることであるということである．定理 2.5.2 の証明の途中であるが，次の補題を証明する．

補題 2.5.3 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} K_*(\frac{\partial}{\partial t}) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} K_*(\frac{\partial}{\partial s})$.

［証明］ これは ∇ が捩れがないことから従う．実際

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} K_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial K^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \frac{\partial^2 K^i}{\partial s\, \partial t} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial K^i}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \frac{\partial^2 K^i}{\partial s\, \partial t} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial K^i}{\partial t} \frac{\partial K^j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned}
$$

であるから，s と t を入れ換えた式を辺々ひいて

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} K_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} K_* \left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial K^i}{\partial t}\frac{\partial K^j}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] = 0$$

となる．■

以下記号を簡略化するために

$$\frac{\partial K}{\partial s} := K_* \frac{\partial}{\partial s}$$

とおく．そして

$$e(s,t) = g\left(\frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial s}\right)$$

とおく．$c_0(s) = c(s)$ は弧長でパラメーター付けられているので $e(s,0) \equiv 1$ である．従って

$$\begin{aligned} \frac{dL(c_t)}{dt} &= \int_0^l e(s,t)^{\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l e^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial e}{\partial t} ds, \end{aligned}$$

よって

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(c_t) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\partial e}{\partial t}(s,0) ds$$

となる．ここで前補題を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) = 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) \\ &= 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) \\ &= 2\frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) - 2g\left(\frac{\partial K}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial K}{\partial s}\right) \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(c_t) &= \left.\int_0^l \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) ds\right|_{t=0} \\ &\qquad - \left.\int_0^l g\left(\frac{\partial K}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial K}{\partial s}\right) ds\right|_{t=0} \qquad (2.18) \\ &= \left. g\left(\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right)\right|_{s=l,\, t=0} - \left. g\left(\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right)\right|_{s=0,\, t=0} \\ &\qquad - \int_0^l g\left(\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot{c}(s)\right) \qquad (2.19) \end{aligned}$$

を得る．ここで $s = 0,\ l$ においては $\frac{\partial K}{\partial t} = 0$ であるから

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(c_t) = -\int_0^l g\left(\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\dot{c}(s)\right)$$

となる．以上により任意の変分 K に対し

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(c_t) = 0$$

となるための必要十分条件は $c(s)$ が測地線の方程式

$$\nabla_{\frac{d}{ds}}\dot{c}(s) = 0$$

をみたすことである．これにより定理 2.5.2 の証明を終える． □

測地線の定義式は t に関する 2 階の非線形常微分方程式である．よって初期値 $c(0) = p \in M$，および $\dot{c}(0) = X \in T_pM$ を与えれば，十分小さい $\epsilon > 0$ に対し $-\epsilon < t < \epsilon$ において測地線の方程式の解は存在する．

点 $p \in M$ を一つ選び接ベクトル空間 T_pM の単位球面を

$$S_p = \{X \in T_pM \mid \|X\| = 1\}$$

とする．$X \in S_p$ を初期値とする測地線が $-\epsilon_X < t < \epsilon_X$ で存在するとき，X の S_p における近傍 U_X を十分小さく取ると任意の $Y \in U_X$ に対し Y を初期値とする測地線が $-\epsilon_X/2 < t < \epsilon_X/2$ で存在する．X が S_p 上を動くとき U_X は S_p の開被覆を与える．S_p はコンパクトであるから有限個の $\{U_{X_1}, \cdots, U_{X_k}\}$ を選んで S_p を覆うことができる．ϵ を $\epsilon_{X_1}/2, \cdots, \epsilon_{X_k}/2$ の最小値ととることにより任意の $-\epsilon < t < \epsilon$ と $X \in S_p$ に対し X を初期値とする測地線 $c_X(t)$ が得られる．T_pM における原点の ϵ 近傍を $B_\epsilon(p)$ により表す．そこで**指数写像** $\exp_p : B_\epsilon(p) \to M$ を次のように定義する．$X \in S_pM$ に対し測地線 $c(t)$ を $c(0) = p$，$\dot{c}(0) = X$ を初期値として一意的に定まるものとする．このとき

$$\exp_p(tX) = c(t)$$

と定める．もちろん $-\epsilon < t < \epsilon$ のとき $tX \in B_\epsilon(p)$ である．

補題 2.5.4　原点 $0 \in T_pM$ において $d\exp_p : T_0(T_pM) \cong T_pM \to T_pM$ は恒等写像である．よって，必要なら十分小なる $\epsilon > 0$ に取り替えると，接ベクトル空間 T_pM における原点の ϵ 近傍

$$B_\epsilon = \{X \in T_pM \mid g(X, X) < \epsilon\}.$$

から $\exp_p(B_\epsilon)$ への写像 $\exp_p : B_\epsilon \to \exp_p(B_\epsilon)$ は微分同相写像である．

証明　常微分方程式の解は初期値に滑らかに依存するので指数写像 $\exp_p$ は C^∞ 級写像である．更に

$$
\begin{aligned}
d(\exp_p)_0(w) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p(tw) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c(t) = \dot{c}(0) = w,
\end{aligned}
$$

すなわち，$d(\exp_p)_0$ は恒等写像である．よって逆関数定理により $\exp_p$ は原点の近傍の局所微分同相を与える． □

$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を接ベクトル空間 T_pM の正規直交基底とする．$q \in \exp_p(B_\epsilon)$ に対し

$$
\exp_p^{-1}(q) = x^1(q)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^n(q)\boldsymbol{e}_n
$$

により $\exp_p(B_\epsilon)$ の局所座標 $x^1, \cdots, x^n$ を定義する．この座標を点 p のまわりの**正規座標**という．また $\exp_p(B_\epsilon)$ を**正規近傍**という．

命題 2.5.5　$x^1, \cdots, x^n$ が p のまわりの正規座標のとき次が成り立つ．

(1) $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.

(2) $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

(3) $dg(p) = 0$.

証明　(1) は $\partial/\partial x^i = \boldsymbol{e}_i$ より明らかである．

(2) $c(t) = \exp_p\bigl(t(a^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a^n\boldsymbol{e}_n)\bigr)$ とおくと $c(t)$ は測地線になる．よって

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c}(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d^2}{dt^2}(ta^i) + \Gamma_{jk}^i \frac{d(ta^j)}{dt}\frac{d(ta^k)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i,\,j,\,k=1}^n \Gamma_{jk}^i a^i a^j \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned}
$$

となる．ここで a^i は任意であるから

$$
\Gamma_{jk}^i(p) = 0
$$

を得る．

(3) 点 p において

$$
\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = g\left(\Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = 0
$$

である． □

正規座標は微分幾何的量を計算するときに極めて有用である．具体的応用例は次節で紹介することにする．

補題 2.5.6（ガウスの補題） $\exp(B_\epsilon)$ を正規近傍とする．このとき，p を通る測地線は各 r（ただし $0<r<\epsilon$）に対し，半径 r の球面

$$S_r := \{\exp(X) \mid \|X\| = r\}$$

に直交する．

証明 $X(t)$，$a \le t \le b$，を T_pM 上の曲線で，任意の t に対し $\|X(t)\| = r$ なるものとする．$K:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\to M$ を

$$K(s,t) = \exp_p(sX(t))$$

とする．このとき各 t に対し $\exp_p(sX(t))$，$-\epsilon<s<\epsilon$ は測地線であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial K}{\partial s},\frac{\partial K}{\partial t}\right\rangle &= \left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial s},\frac{\partial K}{\partial t}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial K}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}\right\rangle \\ &= \left\langle\frac{\partial K}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}\right\rangle\end{aligned}$$

となる．更に

$$\left\|\frac{\partial K}{\partial s}\right\| = \|X(t)\| = r$$

であるから

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\partial K}{\partial s},\frac{\partial K}{\partial s}\right\rangle = 2\left\langle\frac{\partial K}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial s}\right\rangle = 2\left\langle\frac{\partial K}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}\right\rangle$$

となる．よって $\langle\frac{\partial K}{\partial s},\frac{\partial K}{\partial t}\rangle$ は s によらない関数である．しかし，$s=0$ において $K(0,t)\equiv p$ であるから $\frac{\partial K}{\partial s}\big|_{s=0} = 0$ であり，よって $\langle\frac{\partial K}{\partial s},\frac{\partial K}{\partial t}\rangle = 0$ でなければならない． □

命題 2.5.7 $q\in S_r$ とする．任意の $c\in Path(p,q)$ に対し，$L(c)\ge r$ である．等号が成立するのは，弧長によりパラメーターを付けたとき c が p と q を結ぶ測地線になるときに限る．

証明 $c(a)=p$，$c(b)=q$ となる曲線 $c:[a,b]\to M$ を任意に取る．$c(s)=p$ となる最大の s を a' とし，c' を c の $[a',b]$ への制限とすると $L(c)\ge L(c')$ であり，$c'\in Path(p,q)$ であるから，$a=a'$ と仮定してもかまわない．そこで $a<s\le b$ のとき

$$c(s) = \exp_p(r(s)X(s)), \qquad \|X(s)\| = r, \quad 0<r(s)<r,$$

という形に曲線 $c(s)$ が書けているとしてよい．もちろん $r(s)$ と $X(s)$ は s について区分的に滑らかである．以下微分は定義される所のみで考える．

$$K(s,t) = \exp_p(tX(s))$$

とおく．このとき $K(s, r(s)) = c(s)$ であり

$$\frac{\partial c}{\partial s} = r'(s)\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial s}$$

であるが，ガウスの補題により $\frac{\partial K}{\partial s} \perp \frac{\partial K}{\partial t}$ であるから，

$$\left\|\frac{\partial c}{\partial s}\right\|^2 = r'(s)^2\left\|\frac{\partial K}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial K}{\partial s}\right\|^2 \geq r'(s)^2$$

を得る．ここに等号が成立するのは $\frac{\partial K}{\partial s} = 0$ のときである．よって

$$L(c) = \int_a^b \left\|\frac{\partial c}{\partial s}\right\| ds \geq \int_a^b |r'|\, ds \geq r(b) - r(a) = r$$

となる．等号が成立するのは $X(s)$ が一定かつ $r(s)$ が単調増加であるときのみであり，このとき $c(s)$ は弧長でパラメーター付けたとき測地線になる． □

2 点 p，$q \in M$ に対し $d(p,q)$ を

$$d(p,q) = \inf_{c \in Path(p,q)} L(c)$$

により定義する．

定理 2.5.8 d は M の距離を定める．また，d の定める距離空間としての位相と M の多様体としてのもとの位相とは一致する．

証明 距離の公理

(1) $d(p,q) = d(q,p)$,

(2) $d(p,q) + d(q,r) \geq d(p,r)$,

(3) $d(p,q) \geq 0$．等号が成立 $\iff$ $p = q$

のうち (1) は明らかである．まず (2) を示そう．任意の $\epsilon > 0$ に対し p と q を結ぶ曲線を c，および q と r を結ぶ曲線 c' を

$$L(c) < d(p,q) + \epsilon, \qquad L(c') < d(q,r) + \epsilon$$

をみたすようにとる．c と c' をつないだ（区分的に滑らかな）曲線を $c + c'$ により表すと

$$\begin{aligned} d(p,r) &\leq L(c + c') = L(c) + L(c') \\ &< d(p,q) + d(q,r) + 2\epsilon \end{aligned}$$

を得る．ϵ は任意であるから不等式 (2) を得る．

次に (3) を示そう．$d(p,q) \geq 0$ は明らかである．$\epsilon > 0$ を補題 2.5.4 のように取る．半径 $\epsilon/2$ の閉近傍を B とする：

$$B = \{\exp_p X \mid X \in T_pM,\ \|X\| \le \epsilon/2\}.$$

$q \in B$ に対し $q = \exp_p Y$ とすると命題 2.5.7 により

$$d(p,q) = \|Y\|$$

である．よって $d(p,q) = 0$ となるのは $Y = 0$，すなわち $p = q$ のときである．$q \notin B$ のとき，q と p を結ぶ任意の曲線 c は B の境界を通る．よって $L(c) \ge \epsilon$ であり，$d(p,q) \ge \epsilon$ である．以上により，$d(p,q) = 0$ となるのは $p = q$ のときに限ることがわかる．

最後に，$\exp_p$ が微分同相写像であることから d の定める距離空間としての p における基本近傍系は多様体としての基本近傍系になる．よって両者は一致する． □

定義 2.5.9 任意の初期値 $c(0) = p$ と $\dot{c}(0) = X \in T_pM$ に対し測地線 $c(t)$ がすべての時間 $t \in \mathbb{R}$ に対し存在するとき，リーマン多様体 M は**完備**，または**測地的に完備**であるという．

定理 2.5.10（ホップ・リノー（Hopf–Rinow）の定理） リーマン多様体 M が測地的に完備であることと，(M,d) が距離空間として完備であることとは同値である．

この定理の証明は省略したい．例えば酒井 [7]，p.111 を参照せよ．

演習問題 2.5.11 M が閉リーマン多様体のとき M は測地的に完備であることを示せ．

測地線はリーマン多様体の大域的構造を調べるための強力な道具である．以下に，測地線が有効に使われる典型的例として Synge の定理とカルタン・アダマール（Cartan–Hadamard）の定理を紹介しよう．まず，定理 2.5.2 の証明を復習しよう．$c : [0,l] \to M$ を p と q を結ぶ弧長でパラメーター付けられた曲線とする．c の変分 $K : [0,l] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$，$K(s,0) = c(s)$，を任意に取る．定理 2.5.2 の証明では両端を止めた変分を考えたが，ここでは止めないものを考える．$c_t(s) = K(s,t)$ とおき，$c_t : [0,l] \to M$ を p と q を結ぶ曲線の族とみなす．式 (2.18) と全く同様にして

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(c_t) = \left[g\left(\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right)\Bigg|_{t=0} \right]_{s=0}^{s=l} - \int_0^l g\left(\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot{c}(s) \right) \tag{2.20}$$

を導くことができる．式 (2.20) を**第 1 変分公式**という．$c(s)$ が測地線であると仮定して $L(c_t)$ を t について 2 階微分し，$t=0$ とおいた次の式 (2.21) を**第 2 変分公式**という．

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} L(c_t) &= \left[\left. g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right)\right|_{t=0}\right]_{s=0}^{s=l} \\ &\quad + \int_0^l \left(\left\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}\right\|^2 - R\left(\frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial t}\right)\right. \\ &\quad \left.\left. - g\left(\frac{\partial K}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}\right)^2\right)\right|_{t=0} ds. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

第 2 変分公式の証明　$e = g(\frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial s})$ とおいていたことを思い出そう．このとき

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(c_t) &= \int_0^l \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial e}{\partial t}ds, \\ \frac{d^2}{dt^2}L(c_t) &= \int_0^l \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)^2\right) ds\end{aligned}$$

を得る．$c(s) = c_0(s)$ は弧長でパラメーター付けられているから $e(s,0) \equiv 1$ であり，よって

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} L(c_t) = \int_0^l \left.\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)^2\right)\right|_{t=0} ds$$

となる．ここで補題 2.5.3 より

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial t} &= 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) = 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right), \\ \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} &= 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) + 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

である．また曲率の定義より

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial t} + R\left(\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right)\frac{\partial K}{\partial t}$$

であるので，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} &= 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) - 2R\left(\frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial t}\right) \\ &\qquad + 2\left\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}\right\|^2 \\ &= 2\frac{\partial}{\partial s}g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}\right) - 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial K}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial s}\right) \\ &\qquad - 2R\left(\frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial t}\right) + 2\left\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial K}{\partial t}\right\|^2\end{aligned}$$

となる．$c(s) = c_0(s)$ は測地線であるので $t=0$ において右辺第 2 項は 0 であ

る．よって $t=0$ に制限すると第 2 変分公式 (2.21) を得る． □

定理 2.5.12（Synge の定理） M はコンパクト，向き付け可能，偶数次元リーマン多様体で，断面曲率が至る所正であるとすると，M は単連結である．

証明 背理法による．もし単連結でないとすると自明でない自由ホモトピー類が存在する．更に，この自由ホモトピー類を代表する閉曲線の中で，長さが最小の閉測地線 $c : S^1 \to M$ が存在する（このことの証明は [7]，p.257 に譲る）．c の長さは最小であるから任意の変分に対し

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} L(c_t) \geq 0 \tag{2.22}$$

が成立する．次に，c に沿った平行ベクトル場で $\dot{c}$ に直交するものは 0 しかないことを見よう．もし Y がそのような平行ベクトル場であったとする．c の変分 $K : S^1 \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ を $\left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0} = Y$ となるように取り，第 2 変分公式 (2.21) を適用する．この場合，c の定義域は S^1 であり，境界はない．よって断面曲率が至る所正であることから

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} L(c_t) = -\int_0^{2\pi} R(\dot{c}, Y, \dot{c}, Y) ds \leq 0 \tag{2.23}$$

を得る．(2.22) と (2.23) より $Y=0$ でなければならない．

よって，定理 2.5.12 の仮定のもとでは c に沿った 0 でない平行ベクトル場で，$\dot{c}$ に直交するものが存在することを示せば背理法が完成する．c に沿ったホロノミーは $p := c(0)$ における接空間 T_pM の，行列式 1 の直交変換 $A : T_pM \to T_pM$ を定める．c は測地線であるから $\dot{c}$ は c に沿って平行である．よって $A(\dot{c}(0)) = \dot{c}(0)$ となる．T_pM における $\dot{c}(0)$ の直交補空間を $\dot{c}(0)^\perp$ により表すと，A は $\dot{c}(0)^\perp$ の行列式 1 の直交変換になる．$\dot{c}(0)^\perp$ は奇数次元であるから A は少なくとも 1 つ固有値 1 を持つ（[17]，例 5.5.3 の (3)，参照）．このことは $A(Y) = Y$ となる $Y \in \dot{c}(0)^\perp$ が存在することを意味し，Y を初期値とする平行ベクトル場は $c : S^1 \to M$ に沿って滑らかな平行ベクトル場を与える． □

例 2.5.13 $2m$ 次元球面 S^{2m} や m 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ は向き付け可能で，正の断面曲率を持ち，単連結である．

$2m$ 次元実射影空間は正の断面曲率を持つが向き付け可能ではなく，単連結でもない．

$2m-1$ 次元実射影空間は正の断面曲率を持ち向き付け可能であるが，奇数次元であり，単連結でもない．

定理 2.5.14（カルタン・アダマールの定理） M を単連結で測地的完備な n 次元リーマン多様体とする．もし M が至る所非正の断面曲率を持てば，指数写

像は 1 点 p の接空間 $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ から M への微分同相写像を与える．

証明　もし $\exp_p : T_pM \to M$ が微分同相写像でないとすると，ある点 $X \in T_pM$ における微分 $d(\exp_p)_X$ の核が $\{0\}$ ではない．すなわち，ある 0 でない $Y \in T_pM$ が存在し，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p(X+tY) = 0 \tag{2.24}$$

となる．そこで，前と同様に

$$K(s,t) := \exp_p(s(X+tY))$$

とおく（M は完備と仮定しているのですべての s と t に対し定義されている）．各 t に対し，s に関する曲線 $c_t(s) := K(s,t)$ は $s=0$ で p を通る測地線になる．すなわち

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial K}{\partial s} = 0$$

である．これと，曲率の定義式を用いた次の式

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial K}{\partial t} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial K}{\partial s} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial K}{\partial s} + R\left(\frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial K}{\partial t}\right)\frac{\partial K}{\partial s}\end{aligned}$$

より $Z = \left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0}$ は 2 階線形常微分方程式

$$\nabla_{\dot{c}_0} \nabla_{\dot{c}_0} Z - R(\dot{c}_0, Z)\dot{c}_0 = 0 \tag{2.25}$$

をみたす．測地線 c_0 に沿ったこのようなベクトル場 $Z(s)$ をヤコビ場という．(2.24) は $Z(1)=0$ と同値である．一方上で構成された $Z(s)$ は，任意の t に対し $c_t(0)=p$ であることから $Z(0)=0$ である．よって曲率が非正であるという仮定のもとでは $Z(0)=0$，$Z(1)=0$ となるヤコビ場 $Z(s) \not\equiv 0$ は存在しないことを示せば証明は終わる．実際，式 (2.25) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\|Z(s)\|^2 &= 2(\nabla_{\dot{c}} Z, \nabla_{\dot{c}} Z) + 2(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} Z, Z) \\ &= 2(\nabla_{\dot{c}} Z, \nabla_{\dot{c}} Z) - 2R(\dot{c}, Z, \dot{c}, Z) \geq 0\end{aligned}$$

であるから，$Z(0)=0$，$Z(s) \not\equiv 0$ であれば $s>0$ に対し $\|Z(s)\| > 0$ である．よって定理は証明された．　□

最後に，もう一つ有用な結果を紹介しよう．

定理 2.5.15　M をリーマン多様体とする．任意の点 $p \in M$ に対し，次の性質をみたす近傍 W が存在する：任意の 2 点 q，$r \in W$ を結ぶ測地線がただ一つ存在する．

証明　$\exp_p(B_\epsilon)$ を正規近傍とする．p のある近傍 U が存在して，任意の $q \in U$ と $|X| < \epsilon/2$ に対し $\exp_q(X)$ が定義される．そこで接束の U 上の零切断の十分小さい近傍 V から $M \times M$ への写像 Φ を，$X \in T_qM$ に対し $\Phi(X) = (q, \exp_q(X))$ とおくことにより定義する．Φ の微分は U 上の零切断 $\{0_q \mid q \in U\}$ の各点で非特異であることを見よう．実際 V の 0_q における接空間は $T_qM \times T_qM$ であり，$\Phi(0_q) = (q,q) \in M \times M$ における接空間も $T_qM \times T_qM$ である．この分解に関し $d\Phi_{0_q}$ は

$$d\Phi_{0_q} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}$$

と表される（ただし E は単位行列）．よって非特異である．従って Φ は 0_p のある近傍上で微分同相である．この近傍をあらためて V により表す．このとき p の近傍 W を $\Phi(V) \supset W \times W$ となるようにとると W の 2 点を結ぶ測地線がただ一つ存在する．　□

2.5.2　調和積分論とボホナー・ヴァイツェンベック公式

M を向き付けられた n 次元多様体，g を M のリーマン計量とする．座標近傍 U 上の正の向きの局所座標を $(x^1, \cdots, x^n)$ とするとき

$$g_{U,ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$
$$dv_U = \sqrt{\det(g_{U,ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

とおく．もうひとつの座標近傍 V 上の正の向きの局所座標 $(y^1, \cdots, y^n)$ に対しても同様に

$$g_{V,ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right),$$
$$dv_V = \sqrt{\det(g_{V,ij})}\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

とおく．

補題 2.5.16　$U \cap V$ 上 $dv_U = dv_V$ となる．よって M 上の大域的な n 次微分形式が定まる．

証明　$U \cap V$ 上 $y^i = y^i(x^1, \cdots, x^n)$ と表されるとする．$\mathcal{J} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ をヤコビ行列とすると

$$g_{U,ij} = \frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j} g_{V,pq}, \qquad g_U = {}^t\mathcal{J} g_V \mathcal{J} \tag{2.26}$$

である．一方

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \det \mathcal{J}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

であるから

$$\begin{aligned} dv_U &= \sqrt{\det({}^t\mathcal{J} g_V \mathcal{J})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sqrt{\det g_V}\ \det \mathcal{J}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sqrt{\det g_V}\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \end{aligned}$$

を得る． □

定義 2.5.17　前補題により定まる n 次微分形式をリーマン多様体 (M, g) の**体積要素**といい，dv_g または dv により表す．

定義 2.5.18　積分値 $\int_M dv_g$ をリーマン多様体 (M, g) の**体積**という．

ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ に対し

$$\operatorname{div} X := \nabla_i X^i$$

とおき，X の**発散**と呼ぶ．ここに

$$\begin{aligned} \nabla X &= \nabla_j X^i\, dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ \nabla_j X^i &= \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k \end{aligned}$$

である．

定理 2.5.19（発散定理）　M を向き付けられたコンパクト多様体，∂M をその境界とする．ν を ∂M の外向きの法ベクトルとするとき

$$\int_M \operatorname{div} X\, dv_g = \int_{\partial M} (X, \nu)\, dv_{\partial M} \tag{2.27}$$

が成立する．ここに $dv_{\partial M}$ は境界 ∂M の誘導計量に関する体積要素である．

証明　ストークスの定理 (1.2.6) により

$$\int_M d(i(X)dv_g) = \int_{\partial M} i(X)dv_g \tag{2.28}$$

である．ここで (2.28) の左辺の被積分関数は,

$$i(X)dv_g = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X^i\, \boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{e}^i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n$$

であるから

$$d(i(X)dv_g) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \nabla_{\boldsymbol{e}_i} X^i\, \boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{e}^i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n$$

$$= \operatorname{div} X\, dv_g \tag{2.29}$$

となり (2.27) の左辺の被積分関数に等しい．一方，境界の向きの定義により (2.28) の右辺は (2.27) に等しい． □

さて．第 1 章 (1.1) 節において，向き付けられた計量ベクトル空間 V に対して Hodge スター作用素 $*: \wedge^p V^* \to \wedge^{n-p} V^*$ を定義し，更にこれを用いて $\alpha,\ \beta \in \wedge^p V^*$ の内積 (α, β) を

$$(\alpha, \beta) * 1 = \alpha \wedge *\beta$$

により定義した．向き付けられたリーマン多様体においては各点の接空間が計量ベクトル空間であるので，微分形式に対しても Hodge スター作用素

$$*: \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$$

が定義される．さらにこれを用いて $\alpha,\ \beta \in \Omega^p(M)$ の L^2 内積が

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta$$

により定義される．また

$$*1 = dv_g$$

であることにも注意しよう．このことは各点で正規座標を取って考えれば明らかである．このことから，体積要素は $*1$ により表されることも多い．

定義 2.5.20 $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d * : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ を**余微分作用素**という．

補題 2.5.21 δ は外微分作用素 d の形式的随伴作用素である．すなわち，$\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$，$\beta \in \Omega^p(M)$ に対し次が成立する．

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle. \tag{2.30}$$

証明 $\beta \in \Omega^p(M)$ に対し $d * \beta \in \Omega^{n-p+1}(M)$ であるから

$$\begin{aligned}(-1)^{p-1} d * \beta &= (-1)^{(n-p+1)(p-1)} (-1)^{p-1} * * d * \beta \\ &= (-1)^{(n+1)(p-1)+(p-1)} * * d * \beta \\ &= (-1)^{n(p+1)} * * d * \beta = - * \delta\beta\end{aligned}$$

となる．よって

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_M d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1} \int_M \alpha \wedge d * \beta$$

$$= \int_M d\alpha \wedge *\beta - \int_M \alpha \wedge *\delta\beta,$$

すなわち (2.30) を得る． □

$d \circ d = 0$ と，δ が d の形式的随伴作用素であることから $\delta \circ \delta = 0$ であることもわかる．

定義 2.5.22 $\Delta = \delta d + d\delta : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ を**ラプラシアン**または**ラプラス・ベルトラミ（Laplace–Beltrami）作用素**という．ただし 0 次微分形式，すなわち関数 f に対しては $\delta f = 0$ とする．従って

$$\Delta f = \delta df$$

である．$\Delta\alpha = 0$ となる微分形式を**調和形式**といい，p 次調和形式全体のなすベクトル空間を $\mathbb{H}^p$ により表す．

補題 2.5.23 $\Delta\alpha = 0$ であるための必要十分条件は $d\alpha = 0$ かつ $\delta\alpha = 0$ であることである．

証明 次の計算から明らかである．

$$\langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = \langle (d\delta + \delta d)\alpha, \alpha \rangle = \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle.$$ □

系 2.5.24 M を連結な閉リーマン多様体とする．$\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ の核も余核も定数全体 $\mathbb{R}$ である．ただし，ここでは像の直交補空間を余核と呼んでいる．

証明 もし向き付け可能でないなら 2 重被覆を取って M は最初から向き付け可能であると仮定してさし支えない．$\Delta f = 0$ であるための必要十分条件は $df = 0$，すなわち f が定数であることである．よって核は $\mathbb{R}$ である．次に

$$\langle \Delta f, g \rangle = \langle df, dg \rangle$$

であるから，$\{\Delta f \mid f \in C^\infty(M)\}$ に直交する任意の g は定数である．よって余核は $\mathbb{R}$ である． □

定理 2.5.25（ホッジ・小平・ド・ラーム） M が向き付けられたコンパクト閉多様体のとき，各 p に対し p 次元ド・ラームコホモロジー群は p 次調和形式全体とベクトル空間として同型である：

$$H^p_{DR}(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{H}^p.$$

これの証明は次のようにしてなされる.（詳細は例えば [29] に譲ることにし，ここではあらましのみを述べることにする.）簡単のため $\Omega^p(M)$ を Ω^p と表すことにする．まず，$\mathbb{H}^p$ は有限次元であることが示される．次に**ホッジ分解**と呼ばれる Ω^p の L^2 直交分解

$$\Omega^p = \mathbb{H}^p \oplus d\Omega^{p-1} \oplus \delta\Omega^{p+1}$$

が存在することを示すことができる．さてド･ラームコホモロジー群は閉形式全体を完全形式全体で割った商空間であった．ホッジ分解においては閉形式全体は $\mathbb{H}^p \oplus d\Omega^{p-1}$ であり，完全形式全体は $d\Omega^{p-1}$ である．よって前者の後者による商空間は $\mathbb{H}^p$ と同型である．

ホッジ分解を証明するためには次のような考察をする．まず，$\mathbb{H}^p$ は有限次元であるとわかるので，直交射影 $\mathbb{H} : \Omega^p \to \mathbb{H}^p$ が存在する．なぜなら $\omega_1, \cdots, \omega_k$ を $\mathbb{H}^p$ の L^2 正規直交基底とし，$\alpha \in \Omega^p$ に対し

$$\mathbb{H}\alpha = \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \omega_i \rangle \omega_i$$

とおけばよい．次に $\beta \in \operatorname{Ker} \mathbb{H}$ に対し $\Delta\gamma = \beta$ をみたす $\gamma \in \operatorname{Ker} \mathbb{H}$ が一意的に存在することを証明する．さらに $\alpha \in \Omega^p$ に対し，$\alpha - \mathbb{H}\alpha \in \operatorname{Ker} \mathbb{H}$ であるから $\Delta\gamma = \alpha - \mathbb{H}\alpha$ をみたす γ が一意的に存在するので，α に γ を対応させる写像を $G : \Omega^p \to \operatorname{Ker} \mathbb{H}$ とする（これを**グリーン**（**Green**）**作用素**と呼ぶ）：$\Delta G\alpha = \alpha - \mathbb{H}\alpha$．このとき

$$\alpha = \mathbb{H}\alpha + \Delta G\alpha = \mathbb{H}\alpha + d(\delta G\alpha) + \delta(dG\alpha)$$

となり，これがホッジ分解を与える． □

G の構成から Δ と可換な作用素は G とも可換である．特に

$$d \circ G = G \circ d, \quad \delta \circ G = G \circ \delta, \quad *G = G*, \quad \Delta G = G\Delta$$

が成り立つ．

レビ･チビタ接続がリーマン計量と両立するという条件は

$$\begin{aligned}(\nabla g)(X, Y, Z) &= (\nabla_X g)(Y, Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0\end{aligned}$$

と表すことができる．従ってこの条件は $\nabla g = 0$，局所座標を使って書き表せば

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.31}$$

と同値である．行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) により表す．g^{ij} は余接束のファイバーの計量を与える．$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$ であるから，補題 2.1.12 の (1) および (2.31) より

$$\nabla_k g^{ij} = 0 \tag{2.32}$$

を得る．

例 2.5.26 $\beta \in \Omega^1(M)$ とし，$h \in C^\infty(M)$ をコンパクトな台を持つ（すなわち，あるコンパクト集合の外では恒等的に 0 となる）滑らかな関数とする．$\boldsymbol{e}^1, \cdots, \boldsymbol{e}^n$ を余接束の局所正規直交枠とし，局所的に $\beta = \beta_i \, \boldsymbol{e}^i$ と表されているとすると，

$$\langle dh, \beta \rangle = \int_M \sum_{i=1}^n \nabla_i h \cdot \beta_i \, dv_g$$

と表される．$x^1, \cdots, x^n$ を局所座標とすると発散定理と h がコンパクトな台を持つこと，および (2.32) より

$$\begin{aligned}
\langle dh, \beta \rangle &= \int_M \nabla_i h \cdot g^{ij} \beta_j \, dv_g \\
&= \int_M \big(\nabla_i (h g^{ij} \beta_j) - h \nabla_i (g^{ij} \beta_j) \big) \, dv_g \\
&= -\int_M h \nabla_i (g^{ij} \beta_j) \, dv_g \\
&= -\int_M h g^{ij} \nabla_i \beta_j \, dv_g
\end{aligned}$$

を得る．上の各式の被積分関数は局所座標を用いて表示してあるが，実際には局所座標の選び方によらない量であることに気をつけよう．よって 1 次微分形式に対する余微分作用素は

$$\delta\beta = -g^{ij} \nabla_i \beta_j = -g^{ij} \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k \beta_k \right)$$

により与えられることがわかった（補題 2.1.12 の (2) 参照）．従って特に $f \in C^\infty(M)$ に対しては

$$\begin{aligned}
\Delta f = \delta df &= -g^{ij} \nabla_i \nabla_j f \\
&= -g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \, \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)
\end{aligned}$$

である．計量から定まる同型 $\mu : T^*M \to TM$ を用いるとベクトル場

$$\mu(df) = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

が得られる．このベクトル場を f の**勾配ベクトル場**といい $\operatorname{grad} f$ により表す．この記号のもとで Δ は

$$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

により表すことができる．また発散定理から

$$\int_M \Delta f\, dv_g = 0 \tag{2.33}$$

となる．しかし，これは Δ の余核が定数であることからも明らかである．

定義 2.5.27　リーマン多様体の C^∞ 級関数 f が $\Delta f \leq 0$ をみたすとき**劣調和関数**であるという.（本書における Δ は例えば $\mathbb{R}^2$ では $-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ であることに気をつけよ.）

定理 2.5.28　閉リーマン多様体 M の劣調和関数は定数に限る．

証明　もし向き付け可能でないなら 2 重被覆を取って M は最初から向き付け可能であると仮定してさし支えない．(2.33) と $\Delta f \leq 0$ より f は実際には調和関数であることがわかる．よって定数である．　□

本部分節の最後の目標はいわゆるボホナー・テクニックと呼ばれるテンソル計算の実践的方法を説明することである．この方法は幾何学の色々な場面で，適当な曲率の条件のもとで幾何学的量（例えばある種のテンソル場，スピノル場など）が 0 になることを証明する方法である．このテクニックは一般論というより，むしろ色々な個別論の集合体であるので，次の 1 次調和形式に関するボホナーの定理の証明を理解することにより体得していただきたい．

定理 2.5.29（ボホナー（Bochner））　向き付け可能閉リーマン多様体 M が正のリッチ曲率を持つとき（すなわち (R_{ij}) が正値対称行列のとき）の第 1 ベッチ数 $b_1(M)$ は 0 である．

証明を始める前にテンソル計算の基本事項を説明する．局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ を選んだとする．例えば M のベクトル場 X はこの局所座標を用いて

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.34}$$

と表される．全く同様に 1 次微分形式 $\xi = \xi_i\, dx^i$ に対し X で値を取ったもの (ξ, X) は M の滑らかな関数になり，

$$(\xi, X) = X^i \xi_i \tag{2.35}$$

により表される．ポイントはどちらも右辺は局所的な表示をしているが，左辺が大域的であることから実は大域的な量であるということである．第 1 章の線形代数の復習で言いたかったことは，これが何故かを線形代数の基底の取り替えの観点から説明できるということである．すなわち X^i がヤコビ行列で変換されるとき，$\frac{\partial}{\partial x^i}$ も ξ_i もヤコビ行列の転置の逆行列で変換されるので，(2.34) も (2.35)

も右辺は局所座標の取り方によらないのである．このことをより symbolic に言うと，上についている添字と下についている添字に関し和を取ると大域的に well-defined な量になるということである．次に，このことを念頭において色々な量および記号に対し添字の上げ下げをすることをしよう．リーマン計量 g を用いると接空間と余接空間の同型が得られるが，これは局所座標を用いると

$$X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto g_{ij} X^i \, dx^j, \qquad \xi_i \, dx^i \mapsto g^{ij} \xi_i \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と表される．そこで

$$X_j := g_{ij} X^i, \qquad \xi^i := g^{ij} \xi_j$$

とおくことにより，X^i はベクトル場の係数，X_i はリーマン計量を用いた同型により X に対応する 1 次微分形式の係数であると了解する．同様に ξ_i は 1 次微分形式の係数，ξ^i は対応するベクトル場の係数である．この記号のもとで，例えば ξ の各点でのノルムは

$$\|\xi\|^2 = g^{ij} \xi_i \xi_j = \xi_i \xi^i = g_{ij} \xi^i \xi^j$$

と表現される．次に，例 2.5.26 で見たように 1 次微分形式に対する余微分作用素は

$$\delta\xi = -g^{ij} \nabla_i \xi_j$$

により定義されていた．そこで ∇_i も g^{ij} で添字を上に上げて $\nabla^j := g^{ij} \nabla_i$ と表すことにし，

$$\delta\xi = -\nabla^j \xi_j$$

により表すことにする．この記号のもとに関数に対するラプラシアン Δ は

$$\Delta f = -\nabla^i \nabla_i f$$

とも表示される．また (2.32) より

$$\Delta f = -\nabla_i \nabla^i f$$

でもよい．最後に，曲率テンソルの定義 2.2.4 より

$$R(X, Y, Z, W) = g(\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W,\ Z)$$

であるから，局所座標を用いて曲率の定義式を表すと

$$\nabla_i \nabla_j W^k - \nabla_j \nabla_i W^k = R_{ij}{}^k{}_l W^l = R^k{}_{lij} W^l$$

となる．

命題 2.5.30（ヴァイツェンベック（Weitzenböck）公式） 1次微分形式 ξ に対し次の式が成立する．

$$\Delta\xi = \nabla^*\nabla\xi + Ric(\xi),$$

ここに右辺の各項は局所座標を用いて表される次の式の右辺の 2 つの項である．

$$(\Delta\xi)_i = -\nabla^j\nabla_j\xi_i + R_{ij}\xi^j.$$

すなわち ∇^* は ∇ の形式的随伴作用素であり，リッチ曲率 R_{ij} は (2.10) において与えたものである．

証明　まず，$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ より

$$(d\xi)_{ij} = \nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i$$

と書くことができることに注意しよう．よって $\Delta\xi$ は

$$\begin{aligned}(\Delta\xi)_i &= -\nabla_i\nabla^j\xi_j - \nabla^j(d\xi)_{ji} \\ &= -\nabla_i\nabla^j\xi_j - \nabla^j(\nabla_j\xi_i - \nabla_i\xi_j) \\ &\quad \text{（ここで最後の項を曲率の定義式を用いて変形する）} \\ &= -\nabla_i\nabla^j\xi_j - \nabla^j\nabla_j\xi_i + \nabla_i\nabla^j\xi_j + R_j{}^{kj}{}_i\xi_k \\ &= (\nabla^*\nabla\xi)_i + R^k{}_i\xi_k = (\nabla^*\nabla\xi)_i + R_{ji}\xi^j\end{aligned}$$

となる．$R_{ji} = R_{ij}$ であるから，欲しい式を得る． □

上のような添字の上げ下げを伴ったテンソル計算になじめない読者は，各点毎に正規座標を取って計算していると考えてよい．ただ 2 階の共変微分の順番を入れ換えると曲率の項が現れるということに気をつけながら計算しさえすればよい．

定理 2.5.29 の証明　$\Delta\xi$ と ξ の L^2 内積を取ると

$$\langle\Delta\xi, \xi\rangle = \|\nabla\xi\|^2 + \int_M R_{ij}\xi^i\xi^j\,dv_g$$

となり，R_{ij} が正定値であるので右辺は 0 以上である．ここで $\Delta\xi = 0$ とすると，$\xi = 0$ でなければならないことがわかる． □

一般に主要部がラプラシアンと同じ形をしている楕円型偏微分作用素 P に対し

$$Pu = \nabla^*\nabla u + (\text{曲率に関する 1 次式})\,u$$

の形の式を P に対する**ヴァイツェンベック公式**という．ヴァイツェンベック公式は様々な状況で証明され，適当な曲率のもとでの幾何学的量の消滅定理を証

明するのに用いられる．しかしながら，ヴァイツェンベック公式を証明せずに，$\Delta\|\xi\|^2$ の積分を直接計算することにより証明する次のような方法もある．

定理 2.5.29 の別証明　ξ を 1 次調和微分形式とするとき，条件 $\operatorname{div}\xi = 0$ および $d\xi = 0$ はそれぞれ

$$\nabla^i \xi_i = 0, \qquad \nabla_i \xi_j = \nabla_j \xi_i$$

により表現される．よって

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}\int_M \Delta\|\xi\|^2\, dv_g = \frac{1}{2}\int_M \nabla^i\nabla_i(\xi^j\xi_j)\, dv_g \\
&= \int_M (\nabla^i\xi^j \cdot \nabla_i\xi_j + \nabla^i\nabla_i\xi_j \cdot \xi^j)\, dv_g \\
&= \int_M (\nabla^i\xi^j \cdot \nabla_i\xi_j + \nabla^i\nabla_j\xi_i \cdot \xi^j)\, dv_g \qquad (\nabla_i\xi_j = \nabla_j\xi_i \text{ を用いた}) \\
&= \int_M (\nabla^i\xi^j \cdot \nabla_i\xi_j + \nabla_j\nabla^i\xi_i \cdot \xi^j + R_i{}^{ki}{}_j\xi_k\xi^j)\, dv_g \qquad (\text{曲率の定義式を用いた}) \\
&= \int_M (\nabla^i\xi^j \cdot \nabla_i\xi_j + R^{ij}\xi_i\xi_j)\, dv_g \qquad (\nabla^i\xi_i = 0 \text{ を用いた})
\end{aligned}$$

を得る．$R^{ij} = g^{ik}g^{jl}R_{kl}$ は正値対称であるから，$\xi = 0$ でなければならない．□

この方法は**ボホナーの方法**と呼ばれている．この方法の利点は，例えば調和形式の場合は楕円型作用素 P として Δ を取ることがはっきりしていてどのようなヴァイツェンベック公式を証明すればいいかが明らかであるが，そうではない場合に有効である点である．例えばやはり**ボホナーの定理**と呼ばれる次の定理の証明を考えよう．リーマン多様体 M から M 自身への微分同相写像 f が $f^*g = g$ をみたすとき f を等長変換という．等長変換全体はリー群になることが知られている（証明は例えば [4] の第 2 章第 1 節を見よ）．

定理 2.5.31（ボホナー）　向き付け可能閉リーマン多様体 M が負のリッチ曲率を持つとき，M の等長変換群は離散群である．

この定理の証明を始める前にキリングベクトル場について説明する．ベクトル場 X が等長変換からなる 1 パラメーター変換群 $\{\varphi_t\}$ を生成するとき X を**キリング**（**Killing**）**ベクトル場**と呼ぶ．キリングベクトル場全体はリー環をなす．X がキリングベクトル場ならば

$$(L_X g) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_t^* g - g) = 0 \qquad ([23]\text{，第 3 章第 5 節の式 (6) 参照})$$

であるから，X は任意のベクトル場 Y，Z に対し

$$\begin{aligned}
0 &= (L_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z])
\end{aligned}$$

$$= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$$

となる．$Y = \frac{\partial}{\partial x^i}$，$Z = \frac{\partial}{\partial x^j}$ としてこの式を局所座標を用いて書き換えると

$$\nabla_i X^k \cdot g_{kj} + g_{ik} \nabla_j X^k = 0$$

すなわち

$$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0 \tag{2.36}$$

となる．よってこれがキリングベクトル場のみたすべき方程式である．特に，g^{ij} を掛けて i，j に関し和を取ると

$$0 = g^{ij}(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i) = 2\nabla_i X^i = 2\,\mathrm{div}\,X \tag{2.37}$$

となる．もちろん，この式も各点での正規座標を用いても証明できる．以上で定理 2.5.31 の証明の準備が終わった．

定理 2.5.31 の証明　M のキリングベクトル場は 0 しかないことを示せばよい．仮定により R_{ij} は負定値であるので

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}\int_M \Delta\|X\|^2\,dv_g = \frac{1}{2}\int_M \nabla^i\nabla_i(X_j X^j)\,dv_g \\
&= \int_M (\nabla^i\nabla_i X_j \cdot X^j + \nabla_i X_j \cdot \nabla^i X^j)\,dv_g \\
&= \int_M (-\nabla^i\nabla_j X_i \cdot X^j + \nabla_i X_j \cdot \nabla^i X^j)\,dv_g \qquad \text{((2.36) より)} \\
&= \int_M (-\nabla_j\nabla^i X_i \cdot X^j - R_i{}^{ki}{}_j X_k X^j + \nabla_i X_j \cdot \nabla^i X^j)\,dv_g \quad \text{（曲率の定義より）} \\
&= \int_M (-R_{ij} X^i X^j + \nabla_i X_j \cdot \nabla^i X^j)\,dv_g \geq 0
\end{aligned}$$

となり，$X = 0$ でなければならない．□

演習問題 2.5.32　向き付け可能閉リーマン多様体においてリッチ曲率が非正のとき，キリングベクトル場は平行であることを示せ．さらにキリングベクトル場のなすリー環はアーベルリー環（可換リー環）であることを示せ．

2.5.3　ケーラー多様体の基本事項

第 2 章の 2.2.4 節においてケーラー多様体の定義と性質について述べた．それによれば，ケーラー多様体とは複素多様体 M とその上のエルミート計量 h の組でケーラー形式

$$\omega = h_{i\bar{j}}\,dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

が閉形式になるもののことであった（定義 2.2.40）．この条件は，h の定める

$T'M$ の標準接続と，リーマン計量 $\mathrm{Re}(h)$ の定める TM のレビ･チビタ接続が一致することと同値であった（定理 2.2.41）．

本部分節では実リーマン多様体から出発してケーラー多様体を見直すことにする．(M, J) を**概複素多様体**とする．すなわち J は TM の自己準同型で $J^2 = -\mathrm{id}$ をみたすものである．各 $p \in M$ において J の固有値は $\pm i$ であるから，$T_pM \otimes \mathbb{C}$ は $\pm i$ 固有空間に分解する．よって束分解

$$TM \otimes \mathbb{C} = T'M \oplus T''M$$

を与える．

定義 2.5.33　概複素多様体 (M, J) 上のリーマン計量 g が**エルミート計量**であるとは g が J 不変であるとき，すなわち

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \qquad \forall X,\ Y \in T_pM$$

をみたすときをいう．

上の意味のエルミート計量を $\mathbb{C}$ 双線形に拡張することにより双線形形式

$$g \in \Gamma((TM \otimes \mathbb{C})^* \otimes (TM \otimes \mathbb{C})^*)$$

が得られる．g が J 不変であることから X，Y がどちらも $T'M$ に属するか，どちらも $T''M$ に属するかであれば

$$g(X, Y) = 0$$

となる．更に g が実ベクトルに対しては実数を取ることから，$T'M$ のあるエルミート計量 h が存在して $g = 2\,\mathrm{Re}(h)$ となることがわかる．実際，複素ベクトル X，$Y \in T'M$ に対し $g(Y, \overline{X}) = \overline{g(X, \overline{Y})}$ であり，$2g(X, \overline{X}) > 0$ であるから $h(X, \overline{Y}) := g(X, \overline{Y})$ は $T'M$ の定義 2.2.19 の意味でのエルミート計量になっている（ただし慣習に合わせて，2 番目の成分に関し反線形としている）．

定義 2.5.34　実多様体 M，その上の概複素構造 J，およびエルミート計量の組 (M, J, g) がケーラー多様体であるとは，g の定めるレビ･チビタ接続 ∇ に関し J が平行であるとき，すなわち $\nabla J = 0$ のときをいう．

任意の X，Y に対し $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$ であるから（これも縮約と共変微分は可換であることから従う），条件 $\nabla J = 0$ は $\nabla \circ J = J \circ \nabla$ と同値であることに注意しよう．以下定義 2.2.40 と定義 2.5.34 の 2 つのケーラー多様体の定義は同値であることを示したい．

命題 2.5.35 (M, J, g) が定義 2.5.34 の意味でのケーラー多様体であるなら，J は積分可能である．すなわち (M, J) は複素多様体である．

証明 ニューランダー・ニーレンバーグ（Newlander–Nirenberg）の定理により，概複素構造 J が積分可能であるための必要十分条件はニーエンハイス（Nijenhuis）テンソルが 0 になることである．この条件は，J に関する分解 $TM \otimes \mathbb{C} = T'M \oplus T''M$ において，$T'M$ の任意の 2 つの切断 X，Y に対し $[X, Y]$ がまた $T'M$ の切断になることと同値である．定義 2.5.34 の場合，レビ･チビタ接続を $\mathbb{C}$ 線形に拡張するとき $\nabla J = 0$ より

$$
\begin{aligned}
J([X,Y]) &= J(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \nabla_X(JY) - \nabla_Y(JX) \\
&= i(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = i[X,Y]
\end{aligned}
$$

であるから，$[X, Y]$ は $T'M$ の切断である． $\square$

この補題により，定義 2.2.40 だけでなく，定義 2.5.34 においても M は複素多様体と仮定してよいことがわかる．この仮定の下で，定義 2.2.40 における $T'M$ の h についての条件と，$g = 2\,\mathrm{Re}(h)$ と表されるリーマン計量 g についての定義 2.5.34 の条件が同値であることを示せばよい．ところで g を $\mathbb{C}$ 双線形に拡張したとき，

$$
g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right) = h\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right)
$$

であるから，$g_{i\bar{j}} = h_{i\bar{j}}$ であり，ケーラー形式は

$$
\omega = i\, g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z}^j
$$

と表されることに注意しよう（定義 2.2.39 参照）．一方ケーラー形式 ω は

$$
\omega(X, Y) = g(JX, Y) \tag{2.38}
$$

によっても表現されることにも注意しよう．実際，g の J 不変性と対称性より

$$
g(JY, X) = g(J^2Y, JX) = -g(Y, JX) = -g(JX, Y)
$$

であるから，(2.38) の右辺は交代であり 2 次微分形式を定める．g の J 不変性をもう一度使うと $(1,1)$ 型であることもわかる．そして

$$
g\left(J\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right) = i\, g_{i\bar{j}}
$$

であるから (2.38) が成立することがわかる．以上に注意すると定義 2.2.40 と定義 2.5.34 の同値性は次の命題から明らかである．

命題 2.5.36 M を複素多様体，J をその複素構造とする．定義 2.5.33 の意味でのエルミート計量 g に関する次の条件は互いに同値である．よって特に次のどれもが g がケーラー計量であることと同値である．

(1) g の定めるレビ･チビタ接続 ∇ に関し $\nabla J = 0$.
(2) $\nabla \omega = 0$.
(3) $d\omega = 0$.
(4) M の各点の近傍において，ある C^∞ 級関数 φ が存在して

$$\omega = i\,\partial\overline{\partial}\varphi$$

と表される．
(5) M の各点 p において，p のまわりの正則局所座標 $z^1, \cdots, z^n$ で $g_{i\bar{j}}(p) = \delta_{ij}$, $dg_{i\bar{j}}(p) = 0$ となるものが取れる．(これを**正則正規座標**という．)

証明 (1) $\Longleftrightarrow$ (2)：レビ･チビタ接続 ∇ に対し $\nabla g = 0$ であるから，(1) と (2) が同値であることは式 (2.38) より明らかである．

(1) $\Longleftrightarrow$ (3)：条件 (3) が成り立つとき定理 2.2.41 により g の定めるレビ･チビタ接続は $g = 2\,\mathrm{Re}(h)$ となる $T'M$ のエルミート計量 h から定まる標準接続と一致する．よって標準接続の性質により $T'M$ 切断は共変微分により保たれる：

$$\nabla\frac{\partial}{\partial z^j} = g^{p\bar{k}}\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial z^p} \otimes dz^i.$$

すなわち ∇ と J は可換であり，条件 (1) が成立する．逆に (1) が成立するとする．添字 $A = 1, \cdots, n, \overline{1}, \cdots, \overline{n}$ に対し，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^A}}\frac{\partial}{\partial z^B} = \Gamma^C_{AB}\frac{\partial}{\partial z^C}$$

とおく．$\nabla J = 0$ より $\Gamma^{\bar{k}}_{Aj} = \Gamma^{k}_{A\bar{j}} = 0$ である．更に ∇ はレビ･チビタ接続を $\mathbb{C}$ 線形に拡張したものであるから Γ^C_{AB} は A，B について対称である．よって，例えば

$$\Gamma^k_{\bar{i}j} = \Gamma^k_{j\bar{i}} = 0$$

などが成立するので，Γ^k_{ij}，$\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i},\bar{j}}$ の形のもの以外はすべて 0 になる．よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} &= g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^k}\right)\\ &= \Gamma^l_{ij}g_{l\bar{k}}\end{aligned}$$

であるから $\Gamma^l_{ij} = g^{l\bar{k}}\frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial z^j}$ を得る．レビ･チビタ接続の性質から $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$ がなりたっている筈であるから

$$\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial z^j}$$

でなければならない．この式は (3) と同値である．

(3) $\Longleftrightarrow$ (4)：(3) $\Longleftarrow$ (4) は明らかである．(3) を仮定する．点 $p \in M$ の近傍 U を $\mathbb{C}^n$ の多重円盤と双正則であるように取る．ω は閉形式であるからポアンカレの補題により U 上 $\omega = d\eta$ となる実 1 次微分形式 η が存在する．η は実形式であるから η の $(0,1)$ 部分を $\eta^{0,1}$ とすると

$$\eta = \eta^{0,1} + \overline{\eta^{0,1}}$$

と表される．$\omega = d\eta$ の両辺のタイプを比較して

$$\bar{\partial}\eta^{0,1} = 0, \tag{2.39}$$
$$\omega = \partial\eta^{0,1} + \overline{\partial}\,\overline{\eta^{0,1}} \tag{2.40}$$

を得る．(2.39) と $\overline{\partial}$-ポアンカレ補題により

$$\overline{\partial}\psi = \eta^{0,1}$$

をみたす滑らかな関数 ψ が存在する．このとき (2.40) により

$$\partial\overline{\partial}(\psi - \overline{\psi}) = \omega$$

となる．そこで $\varphi = -i(\psi - \overline{\psi})$ とおくと φ が条件 (4) をみたす．

(3) $\Longleftrightarrow$ (5)：(3) $\Longleftarrow$ (5) は明らかである．そこで (3) を仮定しよう．$p \in M$ のまわりの局所正則座標 $w^1, \cdots, w^n$ を

$$\omega = i\gamma_{i\bar{j}}\, dw^i \wedge d\overline{w}^j, \qquad \gamma_{i\bar{j}}(p) = \delta_{ij}$$

となるように取る．（これはグラム・シュミットの方法を使ってできる．）仮定 (3) により

$$\frac{\partial\gamma_{j\bar{k}}}{\partial w^i} = \frac{\partial\gamma_{i\bar{k}}}{\partial w^j} \tag{2.41}$$

が成り立つ．そこで w 座標から z 座標へ

$$w^i = z^i + c^i_{jk} z^j z^k, \qquad c^i_{jk} = c^i_{kj} \text{ で，これは定数,}$$

の形で座標変換することにより (5) をみたすようにしたい．$\omega = ig_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z}^j$ とおくと

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(p) = \frac{\partial\gamma_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(p) + 2c^j_{ik}$$

を得る．そこで

$$2c^j_{ik} = -\frac{\partial\gamma_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(p)$$

とおく．これは (2.41) から $c^i_{jk} = c^i_{kj}$ と両立する．もちろんこのとき $\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(p) = 0$

であるから (5) が示された． □

さて実リーマン多様体において $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ を局所正規直交枠とし，$\boldsymbol{e}^1,\cdots,\boldsymbol{e}^n$ を双対枠とする．微分形式に対する作用素 $\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{e}^i\wedge)\circ(\nabla_{\boldsymbol{e}_i})$ は正規直交枠の取り方によらない．特に，$x^1,\cdots,x^n$ を点 p における正規座標とし，$\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$ とすると，点 p において

$$d=\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{e}^i\wedge)\circ(\nabla_{\boldsymbol{e}_i}) \tag{2.42}$$

となるので (2.42) は至る所成立する．((2.42) は正規直交枠でない枠でも成り立つし，∇ はレビ･チビタ接続でなくても捩れのない接続であればよい.) (2.42) の形式的随伴作用素をとると

$$\delta=-\sum_{i=1}^n\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\circ i(\boldsymbol{e}_i) \tag{2.43}$$

となる．ここに $i(\boldsymbol{e}_i)$ は内部積を表す．((2.43) は内積が関与するので正規直交枠でなければ成り立たないし，∇ も計量と両立しないと成り立たないのでレビ･チビタ接続でなければならない.) ここにマイナスの符号は部分積分のマイナス符号によるものである．実際 1 次微分形式に対する式 (2.43) は，例 2.5.26 で得た δ の式と同じである．

以上の考察をケーラー多様体上で正則正規座標を用いて繰り返そう．複素 n 次元ケーラー多様体において $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ を正則接束の局所正規直交枠とし，実単位接ベクトル場 $\boldsymbol{u}_i$ に対し

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_i-iJ\boldsymbol{u}_i)$$

であるとする．$\boldsymbol{u}_1,J\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n,J\boldsymbol{u}_n$ は局所正規直交枠であるが，この双対枠を $\theta^1,\tau^1,\cdots,\theta^n,\tau^n$ とすると，$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ の双対枠 $\boldsymbol{e}^1,\cdots,\boldsymbol{e}^n$ は

$$\boldsymbol{e}^i=\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^i+i\tau^i)$$

により与えられる．もちろん $\boldsymbol{e}^i(\overline{\boldsymbol{e}_j})=0$ であり．ケーラー形式 ω は

$$\omega=\sum_{i=1}^n i\,\boldsymbol{e}^i\wedge\overline{\boldsymbol{e}^i}=\sum_{i=1}^n\theta^i\wedge\tau^i$$

により与えられる．さて $\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{e}^i\wedge)\circ(\nabla_{\boldsymbol{e}_i})$ および $\sum_{i=1}^n(\overline{\boldsymbol{e}^i}\wedge)\circ(\nabla_{\overline{\boldsymbol{e}_i}})$ は局所（正規直交）枠の取り方によらない．しかも点 p における正則正規座標 $z^1,\cdots,z^n$ に対し $\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial}{\partial z^i}$ とすると，点 p において

$$\partial=\sum_{i=1}^n(\boldsymbol{e}^i\wedge)\circ(\nabla_{\boldsymbol{e}_i}),\qquad\overline{\partial}=\sum_{i=1}^n(\overline{\boldsymbol{e}^i}\wedge)\circ(\nabla_{\overline{\boldsymbol{e}_i}}) \tag{2.44}$$

である．よって (2.44) は至る所成立する．(2.44) の形式的随伴作用素を取ると

$$\partial^* = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{\overline{\boldsymbol{e}_i}}) \circ i(\boldsymbol{e}_i), \qquad \overline{\partial}^* = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{\boldsymbol{e}_i}) \circ i(\overline{\boldsymbol{e}_i}) \tag{2.45}$$

を得る．第 1 式の共変微分に共役がつくのは内積の反線形性からである．次に $L = \omega\wedge : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p+1,q+1}$ とおき，その随伴作用素を L^* とすると，次のよく知られた関係が成り立つ．

$$[\partial^*, L] = -i\,\overline{\partial}, \qquad [\overline{\partial}^*, L] = i\,\partial, \tag{2.46}$$

$$[L^*, \partial] = i\,\overline{\partial}^*, \qquad [L^*, \overline{\partial}] = -i\,\partial^*. \tag{2.47}$$

実際 (2.46) の第 1 式は

$$\begin{aligned}\partial^*(\omega\wedge\alpha) - \omega\wedge\partial^*\alpha &= -\sum_{i=1}^{n}\nabla_{\overline{\boldsymbol{e}_i}}(i(\boldsymbol{e}_i)(\omega\wedge\alpha)) + \sum_{i=1}^{n}\omega\wedge\nabla_{\overline{\boldsymbol{e}_i}}(i(\boldsymbol{e}_i)\alpha)\\ &= -i\sum_{j=1}^{n}\overline{\boldsymbol{e}^j}\wedge\nabla_{\overline{\boldsymbol{e}_j}}\alpha\end{aligned}$$

より従う．第 2 式はこれの共役を取ればいい．また (2.47) の第 1 式は正則正規座標を用いて

$$\begin{aligned}&-i\sum_{j=1}^{n} i(\overline{\boldsymbol{e}_j})i(\boldsymbol{e}_j)\partial\alpha + \partial\left(i\sum_{j=1}^{n} i(\overline{\boldsymbol{e}_j})i(\boldsymbol{e}_j)\alpha\right)\\ &\quad= -i\sum_{i,j} i(\overline{\boldsymbol{e}_j})i(\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}^i\wedge\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\alpha) + i\sum_{i,j}\boldsymbol{e}^i\wedge\nabla_{\boldsymbol{e}_i}(i(\overline{\boldsymbol{e}_j})i(\boldsymbol{e}_j)\alpha)\\ &\quad= -i\sum_{i=1}^{n} i(\overline{\boldsymbol{e}_i})\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\alpha = -i\sum_{i=1}^{n}\nabla_{\boldsymbol{e}_i}(i(\overline{\boldsymbol{e}_i})\alpha) = i\,\overline{\partial}^*\end{aligned}$$

から従う．第 2 式はこれの共役を取ればよい．ここで

$$\Delta_\partial = \partial^*\partial + \partial\partial^*, \qquad \Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}^*\,\overline{\partial} + \overline{\partial}\,\overline{\partial}^*$$

とおく．$\Delta_{\overline{\partial}}$ は **$\overline{\partial}$-ラプラシアン**と呼ばれる．通常のラプラシアンは $\Delta = \delta d + d\delta$ であった．

定理 2.5.37　ケーラー多様体に対し，$\Delta = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\overline{\partial}}$.

証明　まず，(2.47) と $\partial^2 = 0$ より

$$\partial\overline{\partial}^* = -i\,\partial[L^*, \partial] = -i\,\partial L^*\partial = i\,[L^*, \partial]\partial = -\overline{\partial}^*\partial,$$

よって $\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial = 0$ を得る．同様に $\overline{\partial}\partial^* + \partial^*\overline{\partial} = 0$ も得られる．また，やはり (2.47) を用いると

$$i\,\overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + i\,\overline{\partial}^*\,\overline{\partial} = \overline{\partial}(L^*\partial - \partial L^*) + (L^*\partial - \partial L^*)\overline{\partial},$$

$$i\,\partial\partial^* + i\,\partial^*\partial = -\partial(L^*\overline{\partial} - \overline{\partial}L^*) - (L^*\overline{\partial} - \overline{\partial}L^*)\partial$$

となるが，$\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$ より両式の右辺は等しい．よって $\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_\partial$ が得られた．更に $\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial = 0$ と $\overline{\partial}\partial^* + \partial^*\overline{\partial} = 0$ を用いると

$$\begin{aligned}\Delta = d\delta + \delta d &= (\partial + \overline{\partial})(\partial^* + \overline{\partial}^*) + (\partial^* + \overline{\partial}^*)(\partial + \overline{\partial})\\ &= \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}}\end{aligned}$$

を得る． □

$\Delta_{\overline{\partial}}\alpha = 0$ となる微分形式 α を **$\overline{\partial}$-調和形式**という．一般に，次のことが知られている．

定理 2.5.38（ホッジ・小平・ド･ラーム）（ケーラーとは限らない）コンパクト複素多様体 M に対し，ドルボーコホモロジー群 $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$ と (p,q) 型の $\overline{\partial}$-調和微分形式全体とはベクトル空間として同型である．

これの証明は $\Delta_{\overline{\partial}}$ に対するホッジ分解

$$\alpha = \mathbb{H}\alpha + \Delta_{\overline{\partial}}G_{\overline{\partial}}\alpha$$

より得られる．ここに $G_{\overline{\partial}}$ は $\Delta_{\overline{\partial}}$ に対するグリーン作用素であるが，調和射影は Δ の場合と一致しているし，$\Delta = 2\Delta_{\overline{\partial}}$ であるから $G_{\overline{\partial}} = 2G$ である．

定理 2.5.25，2.5.27，2.5.38 より次を得る．

系 2.5.39　コンパクトケーラー多様体 M に対し，ド･ラームコホモロジー群とドルボーコホモロジー群の間の同型

$$H^k_{DR}(M,\mathbb{C}) \cong \sum_{p+q=k} H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$$

が成立する．

$b^{p,q} = \dim H^{p,q}_{\overline{\partial}}$ とおく．コンパクトケーラー多様体 M に対しては調和形式の実部も虚部も調和形式であるから共役をとっても調和形式であるという性質は保たれる．よって $b^{1,0} = b^{0,1}$ となり，従って b^1 は偶数にならなくてはならない．例えば，$\mathbb{C}^2 - \{\boldsymbol{o}\}$ を同値関係 $\boldsymbol{z} \sim 2\boldsymbol{z}$ で割った商空間には自然な複素構造が入る．この 2 次元複素多様体は**ホップ曲面**と呼ばれている．ホップ曲面は可微分多様体としては $S^1 \times S^3$ と微分同相であるから $b_1 = 1$ であり，ケーラー多様体にはなりえない．特に代数多様体にもなりえない．この議論は，最も基本的な調和積分論の応用例である．

命題 2.5.40 コンパクトケーラー多様体上の実完全 (p,p) 形式 α に対し，実 $(p-1,p-1)$ 形式 η で $\alpha = i\,\partial\overline{\partial}\eta$ をみたすものが存在する．

証明 α は完全であるから $\alpha = d\beta$ をみたす $2p-1$ 次実微分形式 β が存在する．型の関係と β が実微分形式であることから $(p,p-1)$ 形式 β'' に対し $\beta = \beta'' + \overline{\beta''}$ であるとしてよい．このとき

$$\alpha = d\beta = \overline{\partial}\beta'' + \partial\beta'' + \overline{\partial}\,\overline{\beta''} + \partial\overline{\beta''}$$

であるので，各項の型を比較して $\alpha = \partial\beta'' + \overline{\partial}\,\overline{\beta''}$，$\overline{\partial}\beta'' = 0$ である．Δ_{∂} に対するホッジ分解により

$$\beta'' = \mathbb{H}\beta'' + \overline{\partial}\gamma$$

をみたす $(p-1,p-1)$ 形式 γ が存在する．このとき

$$\alpha = \partial\overline{\partial}(\gamma - \overline{\gamma})$$

であり，$\eta = -i(\gamma - \overline{\gamma})$ が求めるものである． □

次にケーラー多様体の曲率テンソルについて見る．ケーラー多様体においてはレビ·チビタ接続は正則接束 $T'M$ の標準接続と一致している（定理 2.2.41）．よって，その接続形式 θ および曲率形式 Θ は

$$\theta = g^{-1}\partial g, \qquad \Theta = \overline{\partial}\theta = \overline{\partial}(g^{-1}\partial g)$$

により与えられる（命題 2.2.25）．曲率テンソルは行列値 2 次微分形式として $\Theta = (R_{p\overline{q}}{}^{i}{}_{j}\, dz^p \wedge dz^{\overline{q}})$ により与えられるので，クリストッフェル記号と曲率テンソルは

$$\Gamma^k_{ij} = g^{k\overline{l}}\frac{\partial g_{j\overline{l}}}{\partial z^i}, \qquad R_{i\overline{j}k\overline{l}} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial z^{\overline{j}}} g_{m\overline{l}}$$

と表される．注意すべきことは，曲率形式は $(1,1)$ 形式であるから，

$$R_{ijAB}，R_{\overline{i}\overline{j}AB}$$

の形のものは 0 であるということである．よって $R_{i\overline{j}k\overline{l}}$ の形のもの，および曲率テンソルの対称性，交代性を用いて得られるもの（例えば $R_{\overline{j}ik\overline{l}}$）以外は 0 である．クリストッフェル記号の式は，命題 2.5.36 の (1) $\Longrightarrow$ (3) の証明中でも仮定 (1) から自然に得られたことに注意しよう．この式と曲率テンソルの定義式（定義 2.2.4 参照）からも R_{ijAB}，$R_{\overline{i}\overline{j}AB}$ の形のものが 0 であることがわかる．または，$\nabla J = 0$ より $R(X,Y)J = JR(X,Y)$，よって

$$g(R(X,Y)JW, JZ) = g(JR(X,Y)W, JZ) = g(R(X,Y)W, Z)$$

であることからも $R_{ABij} = R_{AB\overline{i}\overline{j}} = 0$ がわかる．また，ビアンキ恒等式より

$$R_{i\bar{j}}{}^{k}{}_{k} = R_{i}{}^{k}{}_{\bar{j}k} \tag{2.48}$$

である．命題 2.2.37 により左辺は $c_1(M)$ を代表する第 1 チャーン形式の係数である．一方右辺の 2 倍はリッチ曲率になる．実際，$\boldsymbol{e}_1$，$J\boldsymbol{e}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$，$J\boldsymbol{e}_n$ を TM の正規直交基底とすると，$\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_j - iJ\boldsymbol{e}_j)$，$(1 \leq j \leq n)$，が $T'M$ の正規直交基底である．よって

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} R\left(X, \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_j - iJ\boldsymbol{e}_j), X, \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_j + iJ\boldsymbol{e}_j)\right) \\ = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\big(R(X, \boldsymbol{e}_i, X, \boldsymbol{e}_i) + R(X, J\boldsymbol{e}_i, X, J\boldsymbol{e}_i)\big)\end{aligned}$$

となり，(2.48) の右辺はリッチ曲率の 1/2 倍である．言葉を濫用して $R_{i\bar{j}}$ をケーラー多様体のリッチ曲率と呼ぶことが多い．

$$\rho_g := -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\det g = \frac{i}{2\pi}R_{i\bar{j}}\,dz^i \wedge d\overline{z}^j \tag{2.49}$$

を g の定めるリッチ形式，または**第 1 チャーン形式**と呼ぶ．リッチ曲率がリーマン計量と比例するとき，そのリーマン計量をアインシュタイン計量と呼ぶのであった（定義 2.2.8）．特にケーラー計量がアインシュタイン計量であるときは**ケーラー・アインシュタイン計量**と呼ばれる．従ってケーラー計量 g のケーラー形式を ω_g，リッチ形式を ρ_g とすると，g がケーラー・アインシュタイン計量であるということは，ある $k \in \mathbb{R}$ に対し

$$\rho_g = \frac{k}{2\pi}\omega_g \tag{2.50}$$

が成り立つということである．今，正の定数 c に対し cg はケーラー計量を定めるが，cg の接続形式は g の接続形式と同じであり，$\rho_{cg} = \rho_g$ である．よって $k \neq 0$ のときは $c = |k|$ と取り，cg をあらためて g とおくと (2.50) は

$$\rho_g = \frac{\epsilon}{2\pi}\omega_g, \qquad \epsilon = -1,\, 0,\ \text{または}\, 1 \tag{2.51}$$

となる．複素多様体 M がいつケーラー・アインシュタイン計量を持つかは E. カラビ（E. Calabi）により 1950 年代に問題提起された．特に $\epsilon = 0$ の場合は後述する有名なカラビ予想を証明するのと同じ非線形偏微分方程式を解くことに帰着される．以下にこの問題に関して知られていることをまとめておく．

定義 2.5.41　M をコンパクトな複素多様体とする．M の第 1 チャーン類が正（または負）であるとは，第 1 チャーン類を代表する実 $(1,1)$ 形式 $\widetilde{\rho}$ で

$$\widetilde{\rho} = \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\rho}_{i\bar{j}}\,dz^i \wedge d\overline{z}^j,$$

ただし $(\widetilde{\rho}_{i\bar{j}})$ は正値（または負値）エルミート行列

と表されるものが存在するときをいう．代数幾何学の用語では第 1 チャーン類が正（または負）のとき，反標準束 K_M^{-1}（または標準束 K_M）が**豊富**（ample）であるという．第 1 チャーン類が 0 であるとはド·ラーム類 $c_1(M)$ が 0 のときをいう．($c_1(M)$ は本来 $\mathbb{Z}$ 係数で定義されるので，その意味で厳密にいうと $c_1(M)$ が捩れのときである．）記号では，$c_1(M)$ が正，0 または負であることを，各々 $c_1(M) > 0$, $= 0$, < 0 により表す．

$c_1(M)$ が正または負ならば定義から明らかに M はケーラー計量を持つ．より一般に，豊富な直線束を持つ複素多様体は射影代数的である（小平の埋め込み定理）ので，$c_1(M)$ が正または負の場合複素射影空間への埋め込みが存在する．

補題 2.5.42　コンパクトなケーラー多様体 M がケーラー・アインシュタイン計量を持つならば $c_1(M)$ は正，0，または負である．

証明　ケーラー・アインシュタイン計量の定義式 (2.51) において，$\epsilon = -1$, 0, 1 に応じ，$c_1(M) < 0$, $= 0$, > 0 である．　□

問題は逆に $c_1(M)$ が正，0，または負ならば M はケーラー·アインシュタイン計量を持つかということである．しかし松島予三による次の結果により，$c_1(M)$ が正の場合は一般には逆は成立しないことが 1950 年代から知られていた．

定理 2.5.43（松島予三）　M がケーラー・アインシュタイン計量を持つならば，M の正則ベクトル場のなす複素リー環はコンパクトリー群のリー環の複素化である（このようなリー環は**簡約可能**（reductive）であるといわれる）．

この定理の証明は概略のみ述べる．詳細は例えば [4] を参照せよ．まず正則ベクトル場のなす複素リー環はキリングベクトル場のなす実リー環の複素化として得られることが示される．ところがコンパクトリーマン多様体の等長変換群はコンパクトリー群であるので定理の結論が得られる．

さて，ボホナーの定理により，リッチ曲率が負ならばキリングベクトル場のなすリー環は $\{0\}$ であり，非正ならアーベルリー環である．よって簡約可能である．すなわち上の定理は $c_1(M) > 0$ のときのみ意味を持つ．

演習問題 2.5.44　M をコンパクトなケーラー多様体とする．もしリッチ曲率が負定値であれば正則ベクトル場は 0 しか存在しないことをボホナーテクニックを用いて示せ．また，もしリッチ曲率が非正なら正則ベクトル場のなす複素リー環はアーベルリー環であることを示せ．

定理 2.5.45（カラビ・オーバン・ヤウ（Calabi–Aubin–Yau））　コンパクトケーラー多様体 M において，$c_1(M) < 0$ の場合と，$c_1(M) = 0$ の場合はケーラー・アインシュタイン計量が存在する．$c_1(M) < 0$ の場合はド･ラーム類 $-c_1(M)$ に一意的に存在する．また $c_1(M) = 0$ の場合は各ケーラー類に一意的に存在する．

特に，$c_1(M) = 0$ の場合はヤウにより最終的に証明されたので，$c_1(M) = 0$ の場合のケーラー・アインシュタイン計量，すなわちリッチ曲率が恒等的に 0 になるケーラー計量を**カラビ・ヤウ計量**といい，そのような計量を持つ多様体，すなわちある十分大きな自然数 N に対し直線束 $K_M^{\otimes N}$ が自明であるようなコンパクトケーラー多様体を**カラビ・ヤウ多様体**という．カラビ・ヤウ計量は**リッチ平坦ケーラー計量**とも呼ばれる．(後で述べるハイパーケーラー多様体と区別するためにホロノミー群がちょうど $SU(n)$ になる多様体をカラビ・ヤウ多様体という場合もあるようである.)

以下，定理 2.5.45 の証明方法について述べる．まず，ケーラー類 Ω を決めたい．$c_1(M) > 0$ の場合，$\epsilon = 1$ に対し (2.51) をみたすケーラー形式は $c_1(M)$ を代表する．よって $\Omega = c_1(M)$ と取らなければならない．全く同様に $c_1(M) < 0$ の場合は $\Omega = -c_1(M)$ と取らなければならない．$c_1(M) = 0$ の場合は式 (2.51) はケーラー類の取り方に制限は与えないので，Ω はケーラー形式を含む任意のド･ラーム類とする．さてこのように Ω を取り，Ω の中に (2.51) をみたすケーラー形式を見つけたい．まず ω を任意に取り，そのリッチ形式を ρ_ω とする．ϵ のいずれの符号の場合も $\rho_\omega - \frac{\epsilon}{2\pi}\omega$ は 0 にコホモロガス，すなわち完全形式である．よって命題 2.5.40 により，

$$\rho_\omega - \frac{\epsilon}{2\pi}\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}F \tag{2.52}$$

をみたす実数値 C^∞ 級関数 F が存在する．さて，ω を Ω 内で $\widetilde{\omega} \in \Omega$ に変形して (2.51) をみたすようにしたい．再び命題 2.5.40 により

$$\widetilde{\omega} - \omega = i\,\partial\overline{\partial}\varphi \tag{2.53}$$

をみたす実数値 C^∞ 級関数 φ が存在する．$\widetilde{\omega}$ が (2.51) をみたすこと

$$\rho_{\widetilde{\omega}} = \frac{\epsilon}{2\pi}\widetilde{\omega} \tag{2.54}$$

を φ を用いて表現したい．(2.52)，(2.53)，(2.54) より

$$\rho_{\widetilde{\omega}} - \rho_\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}(\epsilon\varphi - F) \tag{2.55}$$

を得る．左辺に (2.49) を用いると

$$\frac{\det\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right)}{\det(g_{i\bar{j}})} = e^{-\epsilon\varphi + F} \tag{2.56}$$

となる．実際には上式において F ではなくある定数 C に対し $F+C$ でなければならない．しかし，$F+C$ をあらためて F とおいて上式を得る．よって (2.56) に条件

$$\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \, \partial \bar{z}^j}\right) \text{ は正定値} \tag{2.57}$$

を付け加えたものをみたす φ を求めればよい．(2.56) は**複素モンジュ・アンペール（Monge–Ampère）方程式**と呼ばれる非線形楕円型偏微分方程式であるが，$\epsilon = -1$ または 0 のときは解 φ の存在が証明されたのである．注意すべきは，存在が証明されたのであり，具体的な多様体において解が具体的に書けるようになった訳ではない，ということである．

$\epsilon = 0$ の場合に (2.56)，(2.57) の解 φ の存在を示したことは，同時に次のカラビ予想を証明したことにもなっている．

定理 2.5.46（カラビ予想，ヤウにより解決） M をコンパクトケーラー多様体，Ω をケーラー類とする．$\widetilde{\rho}$ を $c_1(M)$ を代表する $(1,1)$ 型実閉微分形式とすると，ケーラー形式 $\omega \in \Omega$ でそのリッチ形式が $\widetilde{\rho}$ に等しいものが一意的に存在する．

証明　ケーラー形式 $\omega = \sum_{i=1}^{n} i \, g_{i\bar{j}} \, dz^i \wedge d\bar{z}^j \in \Omega$ を任意に取り固定する．実数値 C^∞ 級関数 F を

$$\widetilde{\rho} - \rho_\omega = \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} F \tag{2.58}$$

をみたすものとする．このとき，ケーラー形式

$$\widetilde{\omega} = \omega + i \, \partial\overline{\partial}\varphi \tag{2.59}$$

で

$$\rho_{\widetilde{\omega}} = \widetilde{\rho} \tag{2.60}$$

をみたすもの，すなわちリッチ形式が $\widetilde{\rho}$ になるものを見つけたい．(2.58)，(2.59)，(2.60) より φ は

$$\frac{\det\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right)}{\det(g_{i\bar{j}})} = e^F$$

をみたせばよい．この方程式は (2.56) の $\epsilon = 0$ の場合である．この場合は，解の存在はヤウによって証明された場合である． □

2.5.4　リーマン多様体のホロノミー群の分類

本部分節では多様体 M は断らなくても連結と仮定する．主束 $P_G \to M$ におけるホロノミーについては定義 2.3.23 で定義した．$x \in M$ 上のファイバーの点 p と，x を出発し x に戻る区分的に滑らかな曲線 $c(t)$，$0 \leq t \leq 1$ に対し，p の $c(t)$ に沿った平行移動を $p(t)$ とするとき $p(1) = p(0)h$ となる $h \in G$ を $c(t)$ に沿ったホロノミーというのであった．このような h をすべて集めた集合 $Hol(p)$ は G の部分群をなすのでホロノミー群と呼ばれるのであった．ホロノミーは初期値 $p \in (P_G)_x$ を $pg \in (P_G)_x$ に取り替えると g による共役に変わるのであった（例題 2.3.24）．線形代数学で学ぶように，ベクトル空間の一次変換を基底を取って行列で表現するとき，基底を取り替えると表現行列は共役により変換されるのであった．その意味でベクトル束 E の場合はホロノミーは E の自己同型束 $\mathrm{Aut}(E)$ の元を定める．一般の主束の場合にこれにあたるのは**随伴束** $\mathrm{Ad}(P_G)$ である：

$$\mathrm{Ad}(P_G) = P_G \times_{\mathrm{Ad}} G := P_G \times G/\sim.$$

ここに同値関係 $\sim$ は

$$(p, h) \sim (pg, g^{-1}hg)$$

により与えられる．明らかにホロノミー h は x 上のファイバー $\mathrm{Ad}(P_G)_x$ の元である．

定義 2.5.47　$\mathrm{Ad}(P_G)$ の切断を**ゲージ変換**という．ゲージ変換の全体のなす群を**ゲージ変換群**という．

ゲージ変換群自体ホロノミーと直接関係はなく，配列が余り良くないが，ここで定義した．むしろここで取り上げたかったのは随伴束 $\mathrm{Ad}(P_G)$ である．G のベクトル空間 V への表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられると，同伴ベクトル束 $E = P_G \times_\rho V$ が定まる．

補題 2.5.48　$\mathrm{Ad}(P_G)_x$ の元は x の E のファイバー E_x に作用する．

証明　任意の $h = (p, k) \in \mathrm{Ad}(P_G)_x$ と $v = (p, w) \in E_x$ に対し，

$$hv = (p, k) \cdot (p, w) = (p, kw)$$

により定義する．この定義は well-defined である．何故なら，

$$(p, k) \sim (pg, g^{-1}kg), \qquad (p, w) \sim (pg, g^{-1}w)$$

であるが

$$(pg, g^{-1}kg)\cdot(pg, g^{-1}w) = (pg, g^{-1}kgg^{-1}w) = (pg, g^{-1}kw) \sim (p, kw)$$

であるからである.（これは形式的には上述の大学 1 年次で学ぶ線形代数における基底の取り替えと同じである．[17] 3.5 節参照.） $\square$

従ってホロノミー群は同伴ベクトル束のファイバー E_x に作用する．もし E が平行な切断 s（すなわち $\nabla s = 0$ をみたす）を持てば，そのようなものは任意の閉じた道 $c(t)$，$0 \le t \le 1$ に対し P_G の水平リフト $p(t)$ と $w \in V$ が存在して $s(c(t)) = (p(t), w)$ と表される．$c(0) = c(1)$ であるから $s(c(0)) = s(c(1))$ であり，

$$(p(0), w) = (p(1), w) = (p(0)h, w) \sim (p(0), hw),$$

よって $hw = w$ を得る．よってホロノミーは平行切断に自明に作用する．このことは平行切断が存在すればホロノミー群は G より真に小さくなることを意味する．

これから紹介するベルジェ･サイモンスの定理はリーマン多様体のホロノミー群が $SO(n)$ より真に小さくなるのはごく特別なリーマン多様体しかないということを主張する．まずいくつかの基本事項と定義を述べる．直積リーマン多様体 $M = N \times L$ に対してはホロノミー群は N と L の各々のホロノミー群の直積となることは明らかである．この事実の逆が成立するかを考えよう．一点 x を基点とする区分的に滑らかな閉じた道の中で一点にホモトピックなものだけを考え，それらに沿った平行移動からなるホロノミーを**制限ホロノミー**といい，制限ホロノミー全体のなす群を**制限ホロノミー群**という．制限ホロノミー群が部分群 $H_1 \subset SO(n_1)$，$H_2 \subset SO(n_2)$，ただし $n_1 + n_2 = n$，の直積 $H_1 \times H_2$ になるならば，x の近傍で n_1 次元と n_2 次元の分布 $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$ が平行移動を用いて定義される（ホロノミーの分解が平行移動による定義が well-defined であることを保証する）．レビ･チビタ接続が捩れを持たないことを使うと，この 2 つの分布は積分可能（包合的）であることがわかる．よってフロベニウスの定理により 2 つの横断的葉層構造が得られる．$x_1, \cdots, x_{n_1}$ を $\mathcal{D}_1$ に沿った局所座標，$y_1, \cdots, y_{n_2}$ を $\mathcal{D}_2$ に沿った局所座標とし，この両者を x の近傍の局所座標として用いてリーマン計量を書き下したとする．このとき 2 つの分布は直交するので，リーマン計量は

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g_{ab} \end{pmatrix}$$

の形に書き表される．ただし i，j は x 座標，a，b は y 座標の添字を表す．これがリーマン計量としての直積であることを見るには g_{ij} が y^a によらないこと，g_{ab} が x^i によらないことを示せばよい．実際レビ･チビタ接続の性質と $\mathcal{D}_2$ が平行移動で不変であること，よって共変微分でも不変であること，および $\mathcal{D}_1$ と

$\mathcal{D}_2$ が直交していることより

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^a} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^a}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^a}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$
$$= g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial y^a}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial y^a}\right) = 0$$

となる．同様に $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i} = 0$ も証明できる．もし M が単連結なら 2 つの分布は M 全体に定義される．この状況でアンブローズ（Ambrose）の定理を用いた議論を加えると M は二つのリーマン多様体の直積として表されることが証明できる（詳細は [7] の第 III 章 6 節に譲る）．以上により制限ホロノミーが $SO(n)$ の部分群のいくつかの直積に表されるとき，M の普遍被覆はいくつかのリーマン多様体の直積に分解されることがわかった．これを**ド・ラーム分解**という．リーマン多様体 M が**既約**であるとは M の普遍被覆が非自明なド・ラーム分解を持たないことである．

1955 年に M. ベルジェ（M. Berger）は既約なリーマン多様体の制限ホロノミー群を分類した．一つ一つの意味は後で説明することにして，まずベルジェのリストをあげよう．M を局所対称空間でない n 次元既約リーマン多様体とする．このとき M の制限ホロノミー群は次のいずれかである．

(1)	$SO(n)$	一般の多様体
(2)	$U(m)$	（$n = 2m$，ケーラー多様体）
(3)	$SU(m)$	（$n = 2m$，リッチ曲率 0 のケーラー多様体）
(4)	$Sp(m)$	（$n = 4m$，ハイパーケーラー多様体）
(5)	$Sp(m) \cdot Sp(1)$	（$n = 4m$，四元数ケーラー多様体）
(6)	G_2	（$n = 7$）
(7)	$Spin(7)$	（$n = 8$）

当初ベルジェのリストには $Spin(9)$ が含まれていたが，その後の研究で $Spin(9)$ は局所対称空間にしか現れないことがわかったので，上では除外してある．また，1962 年に J. サイモンス（J. Simons）は局所対称空間でない既約リーマン多様体のホロノミー群は S^{n-1} に推移的に作用する $SO(n)$ の部分群であることを証明した．このことからも上のリストが得られるので，サイモンスの結果はベルジェの分類の別証明を与える．この事情から，上の分類は**ベルジェ・サイモンスの分類**と呼ばれることもある．上のリストの各々を実際にホロノミー群に持つリーマン多様体が存在するかが，その後の研究問題として残った．例えば前部分節で述べたカラビ・ヤウのリッチ平坦ケーラー計量の存在定理（1978 年）は，$SU(m)$ と $Sp(m)$ をホロノミー群に持つ最初のコンパクトな例を与えた．(1) と (2) 以外のホロノミー群はごく特殊な多様体のみに現れるように思われるが，それぞれの場合に豊富な幾何構造を内包しているようにも思われる．例えば対称空間はエリー・カルタン（Élie Cartan）により分類

されており，有限個の系列からなっていることがわかっているが，例えば対称空間に作用する離散部分群の研究はまだ十分に解明されていない重要な研究分野のひとつである．以下，それぞれの場合の意味を述べておく．

(0)　リーマン多様体 M の点 p に対し，p を固定する M の（大域的）等長変換 s_p で，s_p の p における微分 $(s_p)_{*p} : T_pM \to T_pM$ が恒等写像の -1 倍である（すなわち $(s_p)_{*p} = -\mathrm{id}$ である）ものを**測地的対称変換**という．各点 p において測地的対称変換が存在するとき M を**対称空間**と呼ぶ．等長変換群は M に推移的に作用するので M は等質空間 G/H になる．原点 $o = [H] \in G/H$ における接空間は $\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ における直交補空間 $\mathfrak{m}$ と同一視できる．$(s_o)_{*o} = -\mathrm{id}$ であるから $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\theta|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{id}$，$\theta|_{\mathfrak{m}} = -\mathrm{id}$ とおくと θ は $\mathfrak{g}$ のリー環としての自己同型になる．すなわち

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h} \tag{2.61}$$

をみたす．逆にこの関係をみたす G とその部分群 H に対し G/H は対称空間になる．対称空間として現れる G/H はエリー･カルタンにより分類されている．**局所対称空間**とは普遍被覆が対称空間であるものをいう．局所対称空間は $\nabla R = 0$ で特徴付けられる．ここではあらましのみを述べたが，より詳しくは [7]，[22]，[21] などを参照されたい．

(1)　$SO(n)$ は特殊直交群である．いうまでもなく，リーマン計量は平行であるからホロノミーはリーマン計量を保つ．よって任意のリーマン多様体の制限ホロノミー群は $SO(n)$ の部分群である．この場合は制限ホロノミー群が $SO(n)$ 全体になる場合である．

(2)　$U(m)$ はユニタリ群である．ケーラー多様体は $\nabla J = 0$ をみたすので，ホロノミーは内積と概複素構造を不変にする．よって $U(m)$ の部分群になる．この場合は制限ホロノミー群が $U(m)$ 全体になる場合である．

(3)　$SU(m)$ は行列式が 1 のユニタリ行列全体のなす群，特殊ユニタリ群である．ここでの基本事項はホロノミー群が $SU(m)$ の部分群になることと，リーマン計量がリッチ平坦ケーラー計量であることとは同値であるということである．まず，ホロノミー群が $SU(m)$ の部分群になるとすると $SU(m)$ は $U(m)$ の部分群であるから計量はケーラー計量である．さらにレビ･チビタ接続は $SU(m)$ 接続から誘導されるということであるから，接続形式は $\mathfrak{su}(m)$ 値 1 次微分形式になり，また曲率形式も同じく $\mathfrak{su}(m)$ 値 2 次微分形式になる．よってリッチ形式（第 1 チャーン形式でもある）は曲率形式のトレースを取ったものであるから 0 になる．すなわち，計量はリッチ平坦ケーラー計量になる．逆に与え

られたリーマン計量がリッチ平坦ケーラー計量であったとする．反標準直線束 $K_M^{-1} = \wedge^m T'M$ に $T'M$ のレビ･チビタ接続から自然に誘導される接続の曲率がリッチ曲率であるから，K_M^{-1} は接続を込めて自明な直線束になる．すると

$$K_M^{-1} = P_{U(m)} \times_{\det} \mathbb{C}$$

であるから枠束 $P_{U(m)}$ のホロノミーは $SU(m)$ に入っていなければならない．従ってこの場合はリッチ平坦ケーラー多様体で，制限ホロノミーが $SU(m)$ 全体になる場合である．前述の通り，$SU(m)$ ホロノミーのコンパクトリーマン多様体の例はヤウのカラビ予想の解決により初めて得られた．

(4)　$U(2m)$ の元を実部と虚部に分けて $A+iB$ と表してから，実 $4m$ 次行列として $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ の形に表す．このような行列は $I = \begin{pmatrix} 0 & -E_{2m} \\ E_{2m} & 0 \end{pmatrix}$ と可換である．ただし E_k は k 次単位行列を表す．$U(2m)$ の部分群 $Sp(m)$ を $J = \begin{pmatrix} I_{2m} & 0 \\ 0 & -I_{2m} \end{pmatrix}$ と可換なもののなす全体とする．ただし $I_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$ である．$K = IJ$ とおくと I，J，K は四元数の関係

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E_{4m}, \quad IJ = K, \quad JK = I, \quad KI = J$$

をみたす．もちろん定義から $Sp(m)$ の各元は I，J，K と可換である．また $Sp(m)$ は $SU(2m)$ の部分群になっている．このことを見るにはリー環レベルで見るのが簡単である．$\mathfrak{sp}(m) \subset \mathfrak{u}(2m)$ の元は複素行列としては $A+iB$ と表されるので，これが $\mathfrak{su}(2m)$ に入っていることを見るには A と B のトレースが 0 であることを見ればよい．$\operatorname{tr} A = 0$ は $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交群のリー環の元，すなわち歪対称行列であることから従う．$\operatorname{tr} B = 0$ は $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が I と可換であることから $B = I_{2m} B I_{2m} = -I_{2m}^{-1} B I_{2m}$ が成り立つことから従う．

$Sp(m)$ を制限ホロノミー群に持つリーマン多様体は**ハイパーケーラー多様体**と呼ばれる．まず $Sp(m)$ は $SU(2m)$ の部分群であるから，I リッチ平坦ケーラー多様体になる．更に I，J，K のいずれも制限ホロノミー群により保存されるのでこの三つは平行である．更に $a^2+b^2+c^2=1$ をみたす実数 a，b，c に対し，$aI+bJ+cK$ は平行な概複素構造を定める．よって S^2 でパラメーター付けられるリッチ平坦ケーラー構造を定める複素構造の族が得られる．

$m=1$ のときは $Sp(1) \cong SU(2)$ であることに気をつけよう．単連結でコンパクトな場合 $c_1(M)=0$ となる複素 2 次元多様体 M は $\boldsymbol{K3}$ **曲面**と呼ばれる複素曲面である．これがもっとも次元の低い非自明なリッチ平坦ケーラー多様

体の例であり，またハイパーケーラー多様体の例でもある．

リッチ平坦ケーラー計量の既約コンパクトリーマン多様体は $SU(m)$ ホロノミーであるか $Sp(m)$ ホロノミーであるかのいずれかであるが，トッド（Todd）種数が 2^k の形でないなら $Sp(m)$ ホロノミーであることが知られている．(これはホロノミーのコホモロジーへの表現を見ることによりわかる．[27]，p.368，参照．藤木明のコンパクトハイパーケーラー多様体の構成が紹介されている．)

$Sp(m)$ ホロノミーの微分幾何は次の $Sp(m)\cdot Sp(1)$ ホロノミーと一緒に調べる方が見通しが良い一面がある．

(5)　$Sp(m)$ は $\mathbb{Z}_2 \cong \{\pm E_{4m}\}$ を部分群として含んでいる．そこで $\mathbb{Z}_2$ は $Sp(m)$ と $Sp(1)$ の両方への作用を考え $Sp(m)\cdot Sp(1) = Sp(m)\times Sp(1)/\mathbb{Z}_2$ とおく．この群を制限ホロノミーに持つ多様体を**四元数ケーラー多様体**という．

制限ホロノミーが $Sp(m)\cdot Sp(1)$ の部分群になるとき，四元数の関係をみたす 3 つの概複素構造 I，J，K が局所的に存在し，この 3 つで張られる接束の自己準同型の 3 次元線形空間が共変微分で不変になっている．すなわち，任意の接ベクトル X に対し，$\nabla_X I$，$\nabla_X J$，$\nabla_X K$ が I，J，K の一次結合で書かれるのである．$\nabla_X I$，$\nabla_X J$，$\nabla_X K$ のいずれかが 0 になるとすべて 0 になり，この場合はハイパーケーラー多様体になる．よって四元数ケーラー多様体においては I，J，K は決して積分可能ではない（[21]，14.36)．(すなわち四元数ケーラー多様体は決してケーラー多様体ではない．このことは四元数ケーラー多様体という名前から誤解されやすいので気をつけた方がよい．）四元数ケーラー多様体はアインシュタイン多様体になる（[21]，14.39)．リッチ曲率は決して 0 ではない．一般的に $Sp(m)\cdot Sp(1)$ の部分群を制限ホロノミーに持つリーマン多様体がリッチ平坦ならその部分群は $Sp(m)$ になる．以上あらましのみを述べたが，[21] に石原繁による証明が紹介されている．事実のみでなく証明自体も極めて興味深いので一読を勧める．局所対称空間で知られている例以外に，コンパクト四元数ケーラー多様体の例が存在するかどうかは現在のところわかっていない．これは有名な未解決問題である．

(6) および (7)　$Spin(k)$ については次章で解説するが，概略は次の通りである．$k \geq 3$ に対し $\pi_1(SO(k)) \cong \mathbb{Z}_2$ であるので，2 重被覆による $SO(k)$ の普遍被覆群が存在する．これが $Spin(k)$ である．$Spin(k)$ はクリフォード代数 Cl_k の中に実現できる．$Spin(7)$ は $\mathbb{R}^8$ への既約表現を持つ．これは $Cl_7 \cong \mathbb{R}^8 \oplus \mathbb{R}^8$ からもわかるし（[27]，p.28，参照)，ケーリー（Cayley）代数 $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$ への表現を直接つくることによってもわかる（同じく [27]，p.52，参照)．$\mathbb{R}^8$ に $Spin(7)$ 不変内積を与える．既約性から $Spin(7)$ は単位球面 S^7 に推移的に作用する．一点の固定部分群を G_2 とおく．よって $S^7 = Spin(7)/G_2$ である．G_2 は固定する点の接空間に等方表現として作用する．よって G_2 の 7 次元表現が得られた．ベ

ルジェのリストに現れるものはこの 2 つの表現であり，従って $Spin(7)$ は 8 次元多様体，G_2 は 7 次元多様体である．この 2 つの場合は例外ホロノミーといわれ，現在も活発に研究されている．特徴的なことはどちらの場合もリッチ平坦なアインシュタイン多様体であるということである．これはレビ·チビタ接続が各々$Spin(7)$ および G_2 接続から誘導されることから曲率テンソルがこれらのリー環に値を取っていることを用いて確かめることができる．もう一つ特徴的なことは $Spin(7)$ は $\mathbb{R}^8$ のある 4 次の微分形式を不変にし，G_2 はある 3 次の微分形式を不変にすることで特徴づけられるということである．よってこれらをホロノミーに持てば平行な 4 次および 3 次微分形式を持つ．

さて，この 2 つの例外ホロノミーを実現するリーマン多様体が存在するかは重要な問題であったが，1980 年代，1990 年代に大きな進展をみた．まず R. Bryant が局所的に（すなわち 1 点の近傍で）2 つの例外ホロノミーを実現できることを証明した．次に S. Salamon が完備非コンパクトリーマン多様体の例を構成した．そして D. Joyce がコンパクトな例を構成した．

第 3 章
$Spin$ 構造とディラク作用素

本章では $Spin$ 多様体とディラク作用素，リヒネロウィッツ公式などについて述べる．$Spin(n)$ は $SO(n)$ の 2 重被覆群である．$SO(n)$ 表現から来ない $Spin(n)$ の既約表現を $Spin(n)$ 表現という．$Spin$ 表現はクリフォード代数を用いて記述される．第 4 章においては $n=4$ の場合のみを扱うので，一般次元のクリフォード代数の基本事項はスケッチのみにとどめる．

3.1 $Spin$ 構造と $Spin^c$ 構造

まず 2 つの例から始めよう．

例 3.1.1 $SU(2) \cong S^3$.

証明 ユニタリ群 $U(2)$ の元 A は ${}^t\overline{A}A = E$ となる 2 行 2 列の複素行列である．このような行列は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ なる複素数 α，β を用いて

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta}e^{i\theta} \\ \beta & \overline{\alpha}e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

の形に書ける．よって特殊ユニタリ群 $SU(2)$ は

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \middle| \, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \cong S^3 \end{aligned}$$

となる． □

例 3.1.2 2 重被覆 $p : SU(2) \to SO(3)$ が存在する．特に，$SO(3)$ は 3 次元

実射影空間 $\mathbb{RP}^3$ と微分同相であり，$\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ である．

証明　$SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{su}(2)$ は

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & -i\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

により与えられるので $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ となる．

$$X = \begin{pmatrix} i\alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & -i\alpha \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} i\gamma & -\overline{\delta} \\ \delta & -i\gamma \end{pmatrix}$$

に対し，

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} XY &= -2(\alpha\gamma + \mathrm{Re}(\beta\overline{\delta})) \\ &= -2(\alpha\gamma + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2) \end{aligned}$$

となる．ここに $\mathrm{Re}(\cdot)$ は実部を表し，

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2,\ \delta = \delta_1 + i\delta_2, \quad \beta_1,\ \beta_2,\ \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbb{R}$$

である．従って

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} XY$$

は $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ の標準的内積を与える．$A \in SU(2)$ に対し，

$$\begin{aligned} \langle AXA^{-1}, AYA^{-1} \rangle &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} AXA^{-1}AYA^{-1} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} A(XY)A^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} XY = \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

であるから

$$\mathrm{Ad}(A) : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2), \quad \mathrm{Ad}(A)X := AXA^{-1}$$

は直交変換を定める．更に $SU(2)$ は連結だから $\mathrm{Ad}(SU(2)) \subset SO(\mathfrak{su}(2)) \cong SO(3)$ となる．しかも容易に確かめられるように Ad の単位元における微分 Ad_* の核は $\{\boldsymbol{o}\}$ であり，従って Ad_* は同型である．よって $\mathrm{Ad}(SU(2)) = SO(\mathfrak{su}(2)) \cong SO(3)$ となる．また $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \{\pm 1\}$ であるから $p := \mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ は 2 重被覆であり，

$$SU(2)/\{\pm 1\} \cong SO(3)$$

となる．　□

$\rho : Spin(3) = S^3 \to SO(3)$ は次のようにしても実現される．$\mathbb{H}$ を四元数体とする．$\|q\| = 1$ なる $q \in \mathbb{H}$ に対し $\rho(q) : \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \to \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ を $\rho(q) \cdot x = qxq^{-1}$ により定義すると $\rho(q)$ は $SO(\mathrm{Im}\,\mathbb{H})$ の元を定める．ただし $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ は実部が 0 の四元数全体を表す．

補題 3.1.3　$n \geq 3$ に対し $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}_2$ である．

証明　等質空間として $SO(n+1)/SO(n) = S^n$ であるから，ファイバー束に対するホモトピー群の完全系列（[7] 参照）

$$\pi_2(S^n) \to \pi_1(SO(n)) \to \pi_1(SO(n+1)) \to \pi_1(S^n)$$

より $\pi_1(SO(n)) \cong \pi_1(SO(n-1)) \cong \cdots \cong \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ となる．　□

定義 3.1.4　$SO(n)$ の連結な 2 重被覆群を $Spin(n)$ により表す．

例 3.1.5　$SO(2) \cong S^1$ であるから $Spin(2) \cong S^1$ である．

例 3.1.6　上の例により，$Spin(3) \cong SU(2) \cong S^3 \cong Sp(1)$ である．

$n=4$ の場合，$SO(4) = S^3 \times_{\mathbb{Z}_2} S^3$ である．これは次のようにしてみることができる．$\|q_1\| = \|q_2\| = 1$ なる q_1，$q_2 \in \mathbb{H}$ に対し $\rho : S^3 \times S^3 \to SO(\mathbb{H})$ を

$$\rho(q_1, q_2) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \qquad \rho(q_1, q_2)x = q_1 x q_2^{-1} \tag{3.1}$$

により定義すると，ρ の核は $\{(1,1),\ (-1,-1)\} \cong \mathbb{Z}_2$ である．よって

$$Spin(4) = S^3 \times S^3 \cong SU(2) \times SU(2) \tag{3.2}$$

を得る．これを $SU(2)$ を用いて直接記述すると次のようになる．

例 3.1.7　$SO(4) \cong SU(2) \times_{\mathbb{Z}_2} SU(2)$ であり，従って $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ である．

証明　$SU(2) \times SU(2)$ が $SO(4)$ の 2 重被覆であることを示せばよい．2 つの $SU(2)$ を $SU(2)^+$，$SU(2)^-$ と区別する．S^+ と S^- を $SU(2)^+$ と $SU(2)^-$ の自然な 2 次元表現空間とする．S^+ はエルミート内積

$$\langle \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2,\ \mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \mu_2 \boldsymbol{e}_2 \rangle = \overline{\lambda}_1 \mu_1 + \overline{\lambda}_2 \mu_2$$

とシンプレクティック形式

$$(\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2,\ \mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \mu_2 \boldsymbol{e}_2) = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$$

を持ち，$SU(2)^+$ の S^+ への作用はこの両方を保つ．S^- についても同様である．よって $S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-$ は $SU(2)^+ \times SU(2)^-$ 不変なエルミート形式と非退化対称 2 次形式を持つ．実際 $\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$ を S^- の正規直交基底とすると

$$\left\langle \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j,\ \sum_{i,j=1}^{2} \mu_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j \right\rangle = \overline{\lambda}_{11}\mu_{11} + \overline{\lambda}_{12}\mu_{12} + \overline{\lambda}_{21}\mu_{21} + \overline{\lambda}_{22}\mu_{22},$$

によりエルミート形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が,

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} \lambda_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j,\ \sum_{i,j=1}^{2} \mu_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j \right) = \lambda_{11}\mu_{22} + \lambda_{22}\mu_{11} - \lambda_{12}\mu_{21} - \lambda_{21}\mu_{12}$$

により非退化 2 次形式 $(\cdot,\cdot)$ が $S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-$ に定まる.

ここでこのエルミート形式と非退化 2 次形式が一致する $S^+ \otimes_{\mathbb{C}} S^-$ の実線形部分空間を V とする. V の元 $\sum \lambda_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j$ は

$$\left\langle \sum \lambda_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j,\ \sum \lambda_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j \right\rangle = \left(\sum \lambda_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j,\ \sum \lambda_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j \right),$$

すなわち,

$$\overline{\lambda}_{11} = \lambda_{22}, \qquad \overline{\lambda}_{12} = -\lambda_{21}$$

をみたすものの集合である. よって

$$V = \{ v = a\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_1 + b\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_2 - \overline{b}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_1 + \overline{a}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_2 \mid a,\ b \in \mathbb{C} \}$$

となる. V は実 4 次元ユークリッド空間である. 証明を終えるためには $SU(2)^+ \times SU(2)^-$ の自然な V への作用は $SO(V)$ への 2 重被覆準同型写像を定めることを見ればよい. $SU(2)^+ \times SU(2)^-$ の元を

$$(A,B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & -\overline{\delta} \\ \delta & \overline{\gamma} \end{pmatrix} \right)$$

と表すとき, $v = a\, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_1 + b\, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_2 - \overline{b}\, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_1 + \overline{a}\, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_2 \in V$ への作用は,

$$\begin{aligned}
(A,B)v &= a(\alpha\, \boldsymbol{e}_1 + \beta\, \boldsymbol{e}_2) \otimes (\gamma\, \boldsymbol{f}_1 + \delta\, \boldsymbol{f}_2) \\
&\quad + b(\alpha\, \boldsymbol{e}_1 + \beta\, \boldsymbol{e}_2) \otimes (-\overline{\delta}\, \boldsymbol{f}_1 + \overline{\gamma}\, \boldsymbol{f}_2) \\
&\quad - \overline{b}(-\overline{\beta}\, \boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}\, \boldsymbol{e}_2) \otimes (\gamma\, \boldsymbol{f}_1 + \delta\, \boldsymbol{f}_2) \\
&\quad + \overline{a}(-\overline{\beta}\, \boldsymbol{e}_1 + \overline{\alpha}\, \boldsymbol{e}_2) \otimes (-\overline{\delta}\, \boldsymbol{f}_1 + \overline{\gamma}\, \boldsymbol{f}_2) \\
&= (a\alpha\gamma - b\alpha\overline{\delta} + \overline{b\beta}\gamma + \overline{a\beta\delta})\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_1 \\
&\quad + (a\alpha\delta + b\alpha\overline{\gamma} + \overline{b\beta}\delta - \overline{a\beta\gamma})\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_2 \\
&\quad + (a\beta\gamma - b\beta\overline{\delta} - \overline{b\alpha}\gamma - \overline{a\alpha\delta})\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_1 \\
&\quad + (a\beta\delta + b\beta\overline{\gamma} - \overline{b\alpha}\delta + \overline{a\alpha\gamma})\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_2
\end{aligned}$$

となる. よって, 任意の $v \in V$ に対し $(A,B)v = v$ となる (A,B) は $(A,B) = (E,E)$ または $(A,B) = (-E,-E)$ である. よって自然な写像 $SU(2)^+ \times SU(2)^- \to SO(V)$ は 2 重被覆準同型写像を定める. $\square$

定義 3.1.8 (i) ユニタリ表現 $\rho : G \to GL(V)$ が**実表現**であるとは，ある実線形部分空間 $W \in V$ で，$W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V$ をみたすものが存在するときをいう．
(ii) ユニタリ表現 $\rho : G \to GL(V)$ が**四元数表現**であるとは，V は $\mathbb{H}$ 加群であり，任意の $q \in \mathbb{H}$ に対し，$\rho(g) \circ \mu_q = \mu_q \circ \rho(g)$ が成り立つときをいう．ただし μ_q は $q \in \mathbb{H}$ の V への作用を表す．

次の事実はよく知られている（例えば Bröcker–tom Dieck[20] 参照）．

(1) コンパクトリー群 G のユニタリ表現 $\rho : G \to GL(V)$ につき次の 3 条件は同値である．
  (1.a) ρ は実表現である．
  (1.b) V は $\rho(G)$ で不変な非退化対称 2 次形式を持つ．
  (1.c) 共役線形な写像 $J : V \to V$ で $J^2 = \mathrm{id}$ をみたし，$\rho(G)$ と可換なものが存在する．
(2) コンパクトリー群 G のユニタリ表現 $\rho : G \to GL(V)$ につき次の 3 条件は同値である．
  (2.a) ρ は四元数表現である．
  (2.b) V は $\rho(G)$ で不変な非退化反対称 2 次形式を持つ．
  (2.c) 共役線形な写像 $J : V \to V$ で $J^2 = -\mathrm{id}$ をみたし，$\rho(G)$ と可換なものが存在する．

上の証明において $S^+ \otimes S^-$ は非退化な対称 2 次形式を持つ．よって実表現である．すなわち $S^+ \otimes S^- = V \otimes \mathbb{C}$ をみたす V が存在する．上の証明ではこの V を具体的に与えたものである．

対称 2 次形式 $(\cdot,\cdot)$ を使った同型 $S^- \cong (S^-)^*$ により

$$\boldsymbol{f}_1 \mapsto -\boldsymbol{f}_2^*, \qquad \boldsymbol{f}_2 \mapsto \boldsymbol{f}_1^*$$

と写される．ただし，$\boldsymbol{f}_1^*$，$\boldsymbol{f}_2^*$ は $\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$ の双対基底である．更に同型 $S^+ \otimes (S^-)^* \cong \mathrm{End}(S^-, S^+)$ により同型

$$S^+ \otimes S^- \cong \mathrm{End}(S^-, S^+)$$

が得られるが，この同型により V は

$$\begin{aligned}
&a\,\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_1 - b\,\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_2 + \overline{b}\,\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_1 + \overline{a}\,\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_2 \\
&\mapsto a\,\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_2^* + b\,\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_1^* + \overline{b}\,\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_2^* - \overline{a}\,\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_1^* \\
&\mapsto \begin{pmatrix} b & -\overline{a} \\ a & \overline{b} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と写される．このとき

$$J\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\lambda}_2 \\ \overline{\lambda}_1 \end{pmatrix}$$

により表現される $J : S^{\pm} \to S^{\pm}$ を定義すると V は J 同変準同型全体 $\mathrm{Hom}_J(S^-, S^+)$ と同型である．

$$V \cong \mathrm{Hom}_J(S^-, S^+) \cong \left\{ \begin{pmatrix} b & -\overline{a} \\ a & \overline{b} \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{C} \right\}$$

となる．よって $\tau : SU(2)^+ \times SU(2)^- \to SO(V)$ はこの同型対応を通して

$$\tau(A, B) \cdot \begin{pmatrix} b & -\overline{a} \\ a & \overline{b} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b & -\overline{a} \\ a & \overline{b} \end{pmatrix} B^*$$

と表現される．これによっても $\tau : SU(2)^+ \times SU(2)^- \to SO(V)$ の核は $\{(E, E), (-E, -E)\}$ となることがわかる．

定義 3.1.9 V を（実)ユークリッド空間，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ をその内積とする．V のテンソル代数 $\otimes V = \sum_{p=0}^{\infty} \otimes^p V$ のイデアル $\mathcal{I}$ を $x \otimes x + \langle x, x \rangle$ で生成されるものとする．このとき商代数

$$Cl(V) = (\otimes V)/\mathcal{I}$$

を**クリフォード（Clifford）代数**と呼ぶ．

定義により

$$\begin{aligned} 0 &\sim (x+y) \otimes (x+y) + \langle x+y, x+y \rangle \\ &= x \otimes x + \langle x, x \rangle + y \otimes y + \langle y, y \rangle + x \otimes y + y \otimes x + 2\langle x, y \rangle \\ &\sim x \otimes y + y \otimes x + 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

となる．V の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に関して上の関係 $\sim$ を表現すると

$$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \sim -1, \qquad \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \sim -\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i \quad (i \neq j)$$

となる．$Cl(V)$ における積は $\otimes$ を省略して表すことにし，$\sim$ は $=$ で表すことにする．この記号のもとで $\boldsymbol{e}_i^2 = -1$，$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i$ となる．$Cl(V)$ の代数としての同型類は $\dim V$ のみによるので $\dim V = n$ のとき $Cl(V) = Cl_n$ と表す．

例 3.1.10 $Cl_1 = \{a + b\boldsymbol{e} \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$，$\boldsymbol{e}^2 = -1$，であるから $Cl_1 \cong \mathbb{C}$ である．

例 3.1.11 $\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = -1$ に対し,

$$Cl_2 = \{a + b\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2 + d\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}.$$

明らかに $(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)^2 = -1$ であり，$i = \boldsymbol{e}_1$，$j = \boldsymbol{e}_2$，$k = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ とおくと i，j，k は四元数の関係 $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j$ の関係をみたす．よって Cl_2 は四元数体 $\mathbb{H}$ と同型である：

$$Cl_2 \cong \mathbb{H}.$$

定義 3.1.12 $\mathbb{C}l_n := Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とおく．

事実 3.1.13 (1) $M(m, \mathbb{C})$ により m 次複素行列全体のなす代数を表すとき，次の同型が成立する．

$$\mathbb{C}l_1 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},$$
$$\mathbb{C}l_{2k+1} \cong M(2^k, \mathbb{C}) \oplus M(2^k, \mathbb{C}),$$
$$\mathbb{C}l_{2k} \cong M(2^k, \mathbb{C}).$$

(2) $Spin(n)$ は Cl_n の部分集合として実現される．

証明の概略 (1) $\mathbb{C}l_1$ の元は $a,\ b \in \mathbb{C}$ に対し

$$a + b\boldsymbol{e} = (a + ib)\frac{1 - i\boldsymbol{e}}{2} + (a - ib)\frac{1 + i\boldsymbol{e}}{2}$$

と分解され，

$$\frac{1 - i\boldsymbol{e}}{2}\frac{1 + i\boldsymbol{e}}{2} = 0$$

であるから $\mathbb{C}l_1 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ が得られる．(1) の残りの 2 つの同型についてはモーガン [25] の第 2.4 節（系 2.4.2）を参照されたい．

(2) 長さ 1 の V の元で生成される Cl_n の部分群を $Pin(n)$ とし，

$$G = Pin(n) \cap Cl_n^0$$

とおく．ただし Cl_n^0 は V の元の偶数個の積で表されるもの全体で生成される部分代数を表す．$\mathrm{Ad} : Pin(n) \to GL(V)$ を

$$\mathrm{Ad}(\phi)v = \phi v \phi^{-1}$$

により定義する．長さが 1 の元 $e \in V$ と e に直交する $v \in V$ に対し，

$$-\mathrm{Ad}(e)e = -e, \qquad -\mathrm{Ad}(e)v = v$$

である．すなわち $-\mathrm{Ad}(e)$ は e に直交する超平面に関する反転である．一般

に直交群は超平面に関する反転を2つ合成したもの全体で生成される．よって $\mathrm{Ad}(G) = SO(V)$ となる．また，$\mathrm{Ad} : G \to SO(V)$ は $SO(V)$ への2重被覆であることが次のようにしてわかる．$v \in G$ を $\mathrm{Ad}(v) = 1$ なるものとする．V の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に関し v を表示し，$\boldsymbol{e}_1$ を含むものと含まないものに分けて

$$v = v_0 + \boldsymbol{e}_1 v_1$$

とする．仮定 $\mathrm{Ad}(v) = 1$ より $\mathrm{Ad}(v)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$，よって

$$(v_0 + \boldsymbol{e}_1 v_1)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1(v_0 + \boldsymbol{e}_1 v_1)$$

であるから

$$\boldsymbol{e}_1 v_0 = v_0 \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}_1^2 v_1 = \boldsymbol{e}_1 v_1 \boldsymbol{e}_1$$

である．v_1 は $\boldsymbol{e}_1$ 以外のものの奇数個の積で書かれるので

$$v_1 \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 v_1$$

である．よって

$$\boldsymbol{e}_1^2 v_1 = \boldsymbol{e}_1 v_1 \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1^2 v_1,$$

すなわち $v_1 = 0$ である．よって v は $\boldsymbol{e}_1$ を含まない．全く同様に $\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を含まない．従って $v \in \mathbb{R}$ である．$v \in G$ より $v = \pm 1$ である．従って G は $SO(V)$ の2重被覆群，すなわち $G = Spin(n)$ である． □

事実 3.1.14（cf. [25]，第2.5節） (1) $Spin(2k) \subset Cl_{2k} \subset \mathbb{C}l_{2k} \cong M(2^k, \mathbb{C})$．よって $Spin(2k)$ は 2^k 次元複素表現を持つ．この表現空間を Δ で表し，スピン表現という．Δ は既約ではなく

$$\Delta = \Delta^+ \oplus \Delta^-, \qquad \dim \Delta^+ = \dim \Delta^- = 2^{k-1},$$

と分解し，Δ^+ と Δ^- は同値ではない．Δ^+ と Δ^- を半スピン表現という．$\Delta^\pm$ は $\omega_{\mathbb{C}} = i^k \boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_{2k}$ の固有値 ± 1 の固有空間である．ここに，

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{C}}^2 &= (-1)^k \boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_{2k} \boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_{2k} \\
&= (-1)^k (-1)^{(2k-1)+(2k-2)+\cdots+1} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_{2k} \boldsymbol{e}_{2k} \\
&= (-1)^k (-1)^{(2k-1)k} (-1)^{2k} = 1
\end{aligned}$$

であることに注意しよう．

(2) $Spin(2k+1) \subset Cl_{2k+1} \subset \mathbb{C}l_{2k+1} \cong M(2^k, \mathbb{C}) \oplus M(2^k, \mathbb{C})$．よって $Spin(2k+1)$ は2つの 2^k 次元複素表現を持つが，この2つは互いに同値であり，既約である．この場合もこの規約表現を Δ で表し，スピン表現と呼ぶ．

例 3.1.15　$Spin(3) \cong SU(2)$ であるから，$Spin(3)$ は 2 次元複素表現を持つがこれがスピン表現である．

例 3.1.16　$Spin(4) \cong SU(2)^{+} \times SU(2)^{-}$ であるから $Spin(4)$ は 2 つの 2 次元既約表現 S^{+} と S^{-} を持つが，$S^{\pm} = \Delta^{\pm}$ である．

定義 3.1.17　$Spin(n) \subset Cl_n$ は自然にスカラーとして部分群 $\mathbb{Z}_2 \cong \{\pm 1\}$ を含んでいる．また $U(1)$ も $\mathbb{Z}_2 \cong \{\pm 1\}$ を部分群として含んでいる．この 2 つに注意して，

$$Spin^c(n) := Spin(n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) = (Spin(n) \times U(1))/\!\sim$$

とおく．ただし $k \in \mathbb{Z}_2$ に対し

$$(g_1, g_2) \sim (g_1 k^{-1}, k g_2)$$

である．

$U(1)$ は長さ 1 の複素数倍として作用できるので，$Spin(n)$ の任意の複素表現は $Spin^c(n)$ の複素表現になる．

命題 3.1.18　$\rho : U(n) \to SO(2n)$ を標準的埋め込みとするとき，次の図式が可換になるような埋め込み $j : U(n) \to Spin^c(2n)$ が存在する．

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \xrightarrow{j} & Spin^c(2n) = Spin(2n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) \\ \| & & \downarrow \\ U(n) & \xrightarrow{\rho \times \det} & SO(2n) \times U(1) \end{array}$$

証明　$A \in U(n)$ は正規行列であるから，あるユニタリ行列 $U = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ が存在して

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

となる．$\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ の標準的複素構造を J で表す．(実際上 J は i 倍に他ならない.) このとき $\boldsymbol{u}_1, J\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m, J\boldsymbol{u}_m$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の正規直交基底になる．そこで

$$\begin{aligned} j(A) &= \prod_{k=1}^{n} \left(\cos\frac{\theta_k}{2} + \sin\frac{\theta_k}{2}\, \boldsymbol{u}_k J \boldsymbol{u}_k \right) \times e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k} \\ &\in Spin^c(2n) = Spin(2n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) \end{aligned}$$

と定義できる．この定義は well-defined である．実際 $\theta_k \mapsto \theta_k + 2\pi$ と置き換

えても $j(A)$ は不変であり，また $\boldsymbol{u}' = \cos\varphi\,\boldsymbol{u}_k + \sin\varphi\,J\boldsymbol{u}_k$ と置き換えても

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}'J\boldsymbol{u}' &= (\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_k + \sin\varphi\,J\boldsymbol{u}_k)(-\sin\varphi\,\boldsymbol{u}_k + \cos\varphi\,J\boldsymbol{u}_k)\\ &= \boldsymbol{u}_k J\boldsymbol{u}_k\end{aligned}$$

であるから $j(A)$ はやはり不変である． □

X を向き付けられた n 次元リーマン多様体とする．X の各点 x における接空間 T_xX の正の向きを与える正規直交基底全体のなす集合を

$$P_{SO(n)} = \{\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \mid \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \text{ は } T_xX \text{ の正の正規直交基底,}\ x \in X\}$$

とおくと，$P_{SO(n)}$ は主 $SO(n)$ 束になる．

定義 3.1.19　向き付けられた n 次元多様体 X の ***Spin* 構造**とは，主 $Spin(n)$ 束 $P_{Spin(n)}$ と $Spin(n)$ 同変 2 重被覆 $\pi : P_{Spin(n)} \to P_{SO(n)}$ の組のことである．

ここで ***Spin*(*n*) 同変**とは，$\mathrm{Ad} : Spin(n) \to SO(n)$ を標準的 2 重被覆とするとき，$p \in P_{Spin(n)}$ と $g \in Spin(n)$ に対し，

$$\pi(pg) = \pi(p)\,\mathrm{Ad}(g)$$

をみたすときをいう．

定義 3.1.20　X が ***Spin* 多様体**であるとは X が $Spin$ 構造を持つときをいう．

命題 3.1.21　X が $Spin$ 多様体であるための必要十分条件は第 2 シュティッフェル・ホイットニー（Stiefel–Whitney）類 $w_2(X)$ が 0 であることである．

証明　一般に主 G 束の同型類全体のなす集合は G に値を持つ C^∞ 関数の芽の層の 1 次元コホモロジー $H^1(X, G)$ と同型である．この同型は主 G 束 P に対し P の変換関数の定める元 $[P] \in H^1(X, G)$ を対応させることにより得られる．短完全系列

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(n) \to SO(n) \to 1$$

は完全系列

$$H^1(X, Spin(n)) \to H^1(X, SO(n)) \xrightarrow{\partial^*} H^2(X, \mathbb{Z}_2)$$

を誘導する．よって X が $Spin$ であるための必要十分条件は $[P_{SO(n)}] \in H^1(X, SO(n))$ が $H^1(X, Spin(n))$ の像であることであり，これは

$$\partial^*[P_{SO(n)}] = 0$$

と同値である．一方

$$w_2(X) := \partial^*[P_{SO(n)}]$$

が $w_2(X)$ の定義であるから，結局 X が $Spin$ であるための必要十分条件は $w_2(X) = 0$ である． □

次の事実もよく知られている．

事実 3.1.22（[27]，p.82，Theorem 1.7）
X の $Spin$ 構造の全体は $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ と同型である．

事実 3.1.23（[12]，p.6） X が単連結な 4 次元多様体のとき，X が $Spin$ であるための必要十分条件は X の交点形式が偶数に値を持つことである．

定義 3.1.24 向き付けられた n 次元多様体 X の正の向きを与える正規直交枠全体のなす主 $SO(n)$ 束を $P_{SO(n)}$ とする．X の $\boldsymbol{Spin^c}$ **構造**とは，ある主 $U(1)$ 束 $P_{U(1)}$，主 $Spin^c(n)$ 束 $P_{Spin^c(n)}$，$Spin^c(n)$ 同変 2 重被覆 $P_{Spin^c(n)} \to P_{SO(n)} \times_X P_{U(1)}$ の 3 つ組のことである．ここに，$\pi_1 : P_{SO(n)} \to X$，$\pi_2 : P_{U(1)} \to X$ とするとき，

$$P_{SO(n)} \times_X P_{U(1)} = \{(p_1, p_2) \in P_{SO(n)} \times P_{U(1)} \mid \pi_1(p_1) = \pi_2(p_2)\}$$

である（このような構成を**ファイバー積**という）．$Spin^c$ 構造を持つ多様体を $\boldsymbol{Spin^c}$ **多様体**という．また複素直線束 $L = P_{U(1)} \times_{U(1)} \mathbb{C}$ をこの $Spin^c$ 構造の**行列式直線束**という．

命題 3.1.25 多様体 X が $Spin^c$ 構造を持つための必要十分条件はある $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ が存在して c の $\mathbb{Z}_2$ 簡約化 $\widetilde{c} \in H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ は $w_2(X)$ に等しいことである．またこのことは $W_3(X) = 0$ と同値である．ここに，短完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

の誘導する準同型 $H^2(X, \mathbb{Z}_2) \to H^3(X, \mathbb{Z})$ の $w_2(X)$ の像を $W_3(X)$ で表す．

証明 短完全系列

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin^c(n) \to SO(n) \times U(1) \to 1$$

の誘導する完全系列

$$H^1(X, Spin^c(n)) \to H^1(X, SO(n)) \times H^1(X, U(1)) \to H^2(X, \mathbb{Z}_2)$$

より，X が $Spin^c$ 構造を持つということの定義は，正の正規直交枠のなす束 $P_{SO(n)}$ とある複素直線束の同型類の組

$$([P_{SO(n)}],[L]) \in H^1(X,SO(n)) \times H^1(X,U(1))$$

が $H^1(X,Spin^c(n))$ からの像になっているということである．したがって $([P_{SO(n)}],[L])$ の $H^2(X,\mathbb{Z}_2)$ における像 $w_2(X)+\widetilde{c}_1(L)$ が 0 であることが必要十分条件である．よって

$$\widetilde{c}_1(L) = w_2(X)$$

となる $c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z})$ の存在が必要十分条件である.（複素直線束の同型類全体と $H^2(X,\mathbb{Z})$ とは 1 対 1 に対応することに注意せよ.） □

事実 3.1.26（[25]，第 3.1 節） 閉 4 次元多様体は常に $Spin^c$ 構造を持つ.

補題 3.1.27 X が $Spin$ であるか，または概複素多様体のとき，X は $Spin^c$ である.

証明 まず X が $Spin$ のときは L を自明な束と取ればよい．次に X が実 $2n$ 次元概複素多様体のとき L として反標準束 K_X^{-1} と取る.（標準束 K_X は $(n,0)$ 型の微分形式のなす直線束である.）このとき

$$c_1(K_X^{-1}) = c_1(TX), \qquad w_2(X) = \widetilde{c}_1(TX)$$

（cf. [24] 9.5, または [27] Remark 1.8）であるから $w_2(X) = \widetilde{c}_1(L)$ である．□

注意 3.1.28 まず，任意の概複素多様体はエルミート計量を持つことに注意しよう．次に $j : U(n) \to Spin^c(2n)$ によりエルミート計量を持つ複素多様体は標準的な $Spin^c$ 構造

$$P_{Spin^c(2n)} = P_{U(n)} \times_j Spin^c(2n)$$

を持つ．一方 $j : U(n) \to Spin^c(2n)$ と 2 重被覆 $Spin^c(2n) \to SO(2n) \times U(1)$ の合成写像により $A \in U(n)$ は $(i(A), \det A) \in SO(2n) \times U(1)$ に写される．よって上記の標準的 $Spin^c$ 構造の行列式直線束は反標準束 K_X^{-1} である.

定義 3.1.29 X を $Spin$ 多様体，その $Spin$ 構造を $P_{Spin(n)} \to P_{SO(n)}$ とする．$\rho : Spin(n) \to GL(\Delta)$ をスピン表現とするときベクトル束

$$S(X) = P_{Spin(n)} \times_\rho \Delta$$

を**スピノル束**という．ただし

$$P_{Spin(n)} \times_\rho \Delta = P_{Spin(n)} \times \Delta/\sim,$$
$$(p,\boldsymbol{v}) \sim (pg^{-1}, \rho(g)\boldsymbol{v})$$

である．

　また，$\dim X = 2m$ のとき，半スピン表現への直和分解 $\Delta = \Delta^+ \oplus \Delta^-$ に対応してベクトル束の直和分解

$$S(X) = S^+(X) \oplus S^-(X)$$

が得られるが，$S^\pm(X)$ を**半スピノル束**という．

　X が $Spin^c$ 多様体のときにもスピノル束が

$$S_c(X) = P_{Spin^c(n)} \times_\rho \Delta$$

により定義される．半スピノル束についても同様である．

補題 3.1.30　大域的に well-defined なクリフォード積

$$\Gamma(TX) \otimes \Gamma(S(X)) \to \Gamma(S(X))$$

が定義できる．ここに $\Gamma(E)$ はベクトル束 E の C^∞ 級切断の全体を表す．

　証明　2 重被覆 $\mathrm{Ad} : Spin(n) \to SO(n)$ は

$$\mathrm{Ad}(g)v = g \cdot v \cdot g^{-1}$$

により与えられるのであった．ここに $\cdot$ はクリフォード積を表す（以下 $\cdot$ は省略する）．このことから，接束 TX の同伴主束は $P_{SO(n)}$ とも $P_{Spin(n)}$ ともみなせる：

$$TX = P_{SO(n)} \times_{SO(n)} \mathbb{R}^n = P_{Spin(n)} \times_{\mathrm{Ad}} \mathbb{R}^n.$$

そこで TX も $S(X)$ も $P_{Spin(n)}$ の（2 つの異なる表現による）同伴ベクトル束とみなし，$\Gamma(TX)$ と $\Gamma(S(X))$ の元を

$$\Gamma(TX) \ni (p, v) \sim (pg^{-1}, \mathrm{Ad}(g)v) = (pg^{-1}, gvg^{-1}),$$
$$\Gamma(S(X)) \ni (p, s) \sim (pg^{-1}, gs)$$

と表す．そこで積 $\Gamma(TX) \otimes \Gamma(S(X)) \to \Gamma(S(X))$ を

$$(p, v) \cdot (p, s) = (p, vs)$$

により定義する．これが well-defined であることを見ればよい．実際，

$$\begin{aligned}(pg^{-1}, gvg^{-1}) \cdot (pg^{-1}, gs) &= (pg^{-1}, gvg^{-1}gs) = (pg^{-1}, gvs) \\ &\sim (p, vs)\end{aligned}$$

であるので well-defined である．　□

また $Spin^c$ 構造の場合も，自然な写像 $Spin^c(n) \to SO(n)$ により，$P_{Spin^c(n)}$ を TM の同伴主束とみなすことができ，上と全く同じ議論によりスピノル束にクリフォード積が定義される．

補題 3.1.31　X を $2k$ 次元 $Spin$ 多様体，U を X の開集合とする．$\boldsymbol{e}$ を長さが 1 の U 上のベクトル場とする．このとき $\boldsymbol{e}$ のクリフォード積は

$$\boldsymbol{e} : \Gamma(S^{\pm}(X)|_U) \to \Gamma(S^{\mp}(X)|_U)$$

を誘導する．

証明　$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}$ とおき，これに $\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{2k}$ を付け加えて正の向きを与える正規直交枠を作る．$\omega_{\mathbb{C}} = i^k \boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_{2k}$ に対し

$$\boldsymbol{e}\omega_{\mathbb{C}} = -\omega_{\mathbb{C}}\boldsymbol{e}$$

であるから $s \in \Gamma(S^+(X)|_U)$ に対し，

$$\omega_{\mathbb{C}}\boldsymbol{e}s = -\boldsymbol{e}\omega_{\mathbb{C}}s = -\boldsymbol{e}s$$

となり，$\boldsymbol{e}s \in \Gamma(S^-(X)|_U)$ を得る．　□

3.2　ディラク作用素

X の $Spin$ 構造が与えられると，レビ･チビタ接続から定まる $P_{SO(n)}$ の水平分布は 2 重被覆 $P_{Spin(n)} \to P_{SO(n)}$ により $P_{Spin(n)}$ の水平分布に一意的に持ち上がる．これにより $P_{Spin(n)}$ に接続が定まる．よって，$P_{Spin(n)}$ に同伴する任意のベクトル束に接続が誘導される．特にスピノル束に線形接続 ∇ が誘導される．

定義 3.2.1　X を $Spin$ 多様体とする．**ディラク（Dirac）作用素**

$$D : \Gamma(S(X)) \to \Gamma(S(X))$$

とは

$$Ds = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \nabla_{\boldsymbol{e}_i} s$$

により定義される 1 階の微分作用素である．ここに $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は正の正規直交枠である．この定義が正規直交枠の取り方によらないことは容易に検証できる．

$\nabla\omega_{\mathbb{C}} = 0$ に注意すると X が偶数次元のとき ∇ は

$$\nabla : \Gamma(S^{\pm}(X)) \to \Gamma(T^*X \otimes S^{\pm}(X))$$

を誘導する．よってディラク作用素 D は

$$D : \Gamma(S^{\pm}(X)) \to \Gamma(S^{\mp}(X))$$

を誘導する．

定義 3.2.2　$Spin^c$ 多様体 X に対し，$Spin^c$ 構造を定める $U(1)$ 束 $P_{U(1)}$ の接続 A を一つ選ぶと $P_{SO(n)}$ のレビ･チビタ接続とともに $P_{SO(n)} \times_M P_{S^1}$ の接続が決まり，更にその 2 重被覆 $P_{Spin^c(n)}$ に接続が決まる．よって同伴束であるところのスピノル束 S の接続が自然に定まり，$D_A : \Gamma(S_c(X)) \to \Gamma(S_c(X))$ が

$$D_A s = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \nabla_{\boldsymbol{e}_i} s$$

により定義される．この D_A を $\boldsymbol{Spin^c}$ **ディラク作用素**，または単にディラク作用素という．X が偶数次元のときは

$$D_A : \Gamma(S_c^{\pm}(X)) \to \Gamma(S_c^{\mp}(X))$$

が誘導される．接続 A に依存していることを特に強調する必要のないときは単に D により表す．

定理 3.2.3　X をケーラー多様体とし，標準的 $Spin^c$ 構造を考える．このとき次が成立する．

(1) $S_c^+(X) = \wedge^{0,\,\mathrm{even}}$，$S_c^-(X) = \wedge^{0,\,\mathrm{odd}}$.

(2) $Spin^c$ ディラク作用素は $D = \sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ で与えられる．

証明　(Step 1)　$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{C}^n$ のエルミート内積とする．$v \in \mathbb{C}^n$ に対し $\mathbb{C}$ 線形写像 $v\rfloor : \wedge^p \mathbb{C}^n \to \wedge^{p-1}\mathbb{C}^n$ を

$$v\rfloor(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \langle v, v_i \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_p$$

により定義する．(本書のノーテイションではエルミート内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は

$$\langle \alpha u, \beta v \rangle = \overline{\alpha}\beta \langle u, v \rangle$$

となるように定義してあったことを思い出そう.）このとき

(i)　$\deg \varphi = p$ のとき

$$v\rfloor(\varphi \wedge \psi) = (v\rfloor\varphi) \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge (v\rfloor\psi).$$

(ii)　$v\rfloor \circ v\rfloor = 0$.

(iii)　$(\lambda v)\rfloor = \overline{\lambda}(v\rfloor)$.

が成立する．この証明は明らかであろう．

(Step 2)　$v \in \mathbb{C}$ に対し $f_v : \wedge^*\mathbb{C}^n \to \wedge^*\mathbb{C}^n$ を

$$f_v(\varphi) = v \wedge \varphi - v\rfloor\varphi$$

により定義すると $f_v \circ f_v = -\|v\|^2 \,\mathrm{id}$ をみたす．この証明も明らかなので省略する．

(Step 3)

(i)　Step 2 の f_v は $f : Cl_{2n} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\wedge^*\mathbb{C}^n, \wedge^*\mathbb{C}^n)$ に拡張する．

(ii)　更に $f \otimes \mathbb{C} : \mathbb{C}l_{2n} = Cl_{2n} \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(\wedge^*\mathbb{C}^n, \wedge^*\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}l_{2n}$ の既約表現を与える．

［証明］　(i) は次のクリフォード代数の普遍性から従う．すなわち，$\mathcal{A}$ を 1 を持つ代数，$f : V \to \mathcal{A}$ を線形かつ

$$f(v) \cdot f(v) = -\|v\|^2 \cdot 1$$

をみたすものとするとき，f は一意的に $f : Cl(V) \to \mathcal{A}$ に拡張する．$Cl(V)$ はこの性質を持つ唯一の代数である．

(ii) ヴェーダーバーン（Waederburn）の定理により $M(l, \mathbb{C})$ の既約表現は標準的 l 次元表現のみである．一方，$\mathbb{C}l_{2n} \cong M(2^n, \mathbb{C})$，$\wedge^*\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{2^n}$ であるから $\wedge^*\mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}l_{2n}$ の既約表現である．■

(Step 4)　表現 $U(n) \hookrightarrow Spin^c(2n) \hookrightarrow \mathbb{C}l_{2n} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\wedge^*\mathbb{C}^n, \wedge^*\mathbb{C}^n)$ は $U(n)$ の自然な $\wedge^*\mathbb{C}^n$ への作用と一致する．

［証明］　各 $A \in U(n)$ に対し，A をユニタリ行列で対角化し，各 1 次元固有空間に対し考察すればよい．実際

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &\mapsto \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \boldsymbol{e}J\boldsymbol{e},\ e^{\frac{i}{2}\theta}\right) \\ &\mapsto e^{\frac{i}{2}\theta}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\,\boldsymbol{e}(i\boldsymbol{e})\right) \\ &\mapsto e^{\frac{i}{2}\theta}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = e^{i\theta} \end{aligned}$$

となる．ただし最後の写像は

$$f_{\boldsymbol{e}} f_{i\boldsymbol{e}} \boldsymbol{e} = f_{\boldsymbol{e}}(i\,\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{e} - (i\boldsymbol{e})\rfloor\boldsymbol{e}) = f_{\boldsymbol{e}} i = i\boldsymbol{e}$$

を用いた．■

(Step 5)　$S_c^+(X) = \wedge^{0,\,\mathrm{even}}$，$S_c^-(X) = \wedge^{0,\,\mathrm{odd}}$.

［証明］　Step 4 より

$$
\begin{aligned}
S_c(X) &= P_{Spin^c(2n)} \times_\rho \Delta \\
&= (P_{U(n)} \times_j Spin^c(2n)) \times_\rho \Delta \\
&= \wedge^* T'X \cong \wedge^* (T''X)^* = \wedge^{0,*} X
\end{aligned}
$$

となる．ここで $A \in U(n)$ に対し $(A^*)^{-1} = A$ であるから $U(n)$ の T'_pX への表現と $\overline{(T'_pX)}^* \cong (T''_pX)^*$ への表現は同値であること，従って $T'X$ と $(T''X)^*$ はエルミートベクトル束として同型であることを用いた．この同型 $S_c(X) \cong \wedge^{0,*}X$ のもとに $\omega_{\mathbb{C}}$ は

$$
\omega_{\mathbb{C}} = i^n f_{e_1} f_{ie_1} \cdots f_{e_n} f_{ie_n}
$$

により表される．なぜなら $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{C}$ 上の正規直交基底であるなら $\boldsymbol{e}_1, i\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ の正の向きの $\mathbb{R}$ 上の正規直交基底であるからである．$S_c^{\pm}$ は $\omega_{\mathbb{C}}$ の固有値 ± 1 に対する固有空間であった．さて Step 4 の計算と同様にして $k \in \{i_1, \cdots, i_p\}$ のとき

$$
f_{\boldsymbol{e}_k} f_{i\boldsymbol{e}_k} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} = i\, \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}
$$

である．同様の計算より $k \notin \{i_1, \cdots, i_p\}$ に対し

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{e}_k} f_{i\boldsymbol{e}_k} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} &= f_{\boldsymbol{e}_k}(i\, \boldsymbol{e}_k \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}) \\
&= -i\, \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}
\end{aligned}
$$

である．よって $\alpha \in \wedge^p \mathbb{C}^n$ に対し

$$
\omega_{\mathbb{C}} \alpha = i^n i^p (-i)^{n-p} = (-1)^p
$$

であるから

$$
\omega_{\mathbb{C}} = \begin{cases} 1 & \text{on } \wedge^{0,\,\mathrm{even}} \\ -1 & \text{on } \wedge^{0,\,\mathrm{odd}} \end{cases}
$$

となる．■

以上で定理 3.2.3 の (1) の証明を終わる．□

(Step 6)　$D = \sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$.

［証明］　一般に複素ベクトル束 E の下部実ベクトル束を $E_{\mathbb{R}}$ により表すことにする．ケーラー計量を用いた次の同型

$$
TX \cong (T'X)_{\mathbb{R}} \cong (\overline{T'X})^*_{\mathbb{R}} = (T^{0,1})^*_{\mathbb{R}}
$$

において

$$\frac{\partial}{\partial x} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}d\overline{z},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right) = i\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z} \mapsto \frac{i}{\sqrt{2}}d\overline{z}$$

と写されるので

$$f_{\frac{\partial}{\partial x}} \mapsto \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z}\wedge - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z}\rfloor \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}d\overline{z}\wedge - \sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right),$$
$$f_{\frac{\partial}{\partial y}} \mapsto i\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z}\wedge - i\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z}\rfloor \mapsto \frac{i}{\sqrt{2}}d\overline{z}\wedge + i\sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$

と写される．ここに $\iota(Y)$ はベクトル場 Y による内部積を表す．よって一点における正則正規座標を用いると

$$\begin{aligned}
D\alpha &= \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{2}}d\overline{z}^i \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial x^i} - \sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial x^i}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{i}{\sqrt{2}}d\overline{z}^i \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial y^i} + i\sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial y^i}\right)\\
&= \sum_i \sqrt{2}\,d\overline{z}^i \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial \overline{z}^i} - \sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}\right)\left(2\frac{\partial\alpha}{\partial z^i}\right)\\
&= \sqrt{2}\,\overline{\partial}\alpha + \sqrt{2}\,\overline{\partial}^*\alpha
\end{aligned}$$

となる．ここで，例えば複素 1 次元のとき

$$\begin{cases} g_{1\bar{1}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{1}{4}g\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}, \\ g^{1\bar{1}} = 2 \end{cases}$$

であることを用いた．■

以上で定理 3.2.3 の (2) の証明を終わる．□

次の目標はいわゆる**リヒネロウィッツ公式**を証明することである．

補題 3.2.4 $\mathrm{Ad}_* : \mathfrak{spin}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ は

$$\mathfrak{spin}(n) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \mid i \neq j\}$$

と同一視するとき（span は線形包を表す）

$$\mathrm{Ad}_*(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j) = 2\,\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$$

により表される．ここに $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$ は $v \in \mathbb{R}^n$ に

$$(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j)(v) = (v, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j - (v, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_i$$

により作用する線形写像で，その行列表示は

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} & i & & j & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix}
\end{array}
$$

により与えられる．

証明 $Spin(n) \subset Cl_n^0$ の 1 パラメーター部分群 $\gamma(t) = \cos t + \sin t\, \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j, \\
&\mathrm{Ad}(\gamma(t))v = \gamma(t) v \gamma^{-1}(t)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_*(\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j) v &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\gamma(t)) v = \dot{\gamma}(0) v - v \dot{\gamma}(0) \\
&= \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j v - v \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \\
&= \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j v + (\boldsymbol{e}_i v + 2\langle v, \boldsymbol{e}_i \rangle) \boldsymbol{e}_j \\
&= \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j v + (-\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j v - 2\langle v, \boldsymbol{e}_j \rangle \boldsymbol{e}_i + 2\langle v, \boldsymbol{e}_i \rangle \boldsymbol{e}_j) \\
&= 2\langle v, \boldsymbol{e}_i \rangle \boldsymbol{e}_j - 2\langle v, \boldsymbol{e}_j \rangle \boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
$$

であるから補題の主張を得る． □

命題 3.2.5 $P_{SO(n)}$ のレビ･チビタ接続を $P_{Spin(n)}$ に持ち上げると，その接続形式は

$$
-\sum_{i<j} \frac{1}{2} \theta_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j
$$

により与えられる．ここに (θ_{ij}) は $P_{SO(n)}$ のレビ･チビタ接続の正規直交枠 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に関する接続行列である．

証明 前補題より

$$
\mathrm{Ad}_*\left(-\sum_{i<j} \frac{1}{2} \theta_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i<j} (-\theta_{ij})
\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} & i & & j & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix}
\end{array}
= \theta
$$

であるからである． □

定理 3.2.6（リヒネロウィッツ（**Lichnerowicz**）公式） X をスピン多様体，$E \to X$ を接続を与えられたベクトル束とする．このときクリフォード積は自然に $\Gamma(S(X) \otimes E)$ に拡張するのでディラク作用素も

$$D : \Gamma(S(X) \otimes E) \to \Gamma(S(X) \otimes E)$$

に拡張する．このとき

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\kappa}{4} + R^E$$

が成立する．ここに κ は X のスカラー曲率，$R^E \in \Gamma(\wedge^2 T^* X \otimes \mathrm{End}(E))$ は E の曲率形式である．

証明 接ベクトル束 TX の枠 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を，レビ･チビタ接続 ∇ に対しある点で $\nabla \boldsymbol{e}_i = 0$ となるように取り，その点で考える（正規座標を取ればよい）．このとき

$$[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j] = \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \boldsymbol{e}_j - \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \boldsymbol{e}_i = 0$$

となる．よって E の任意の接続に対し $S(X) \otimes E$ の接続 ∇ の曲率形式 R は（少々記号が混乱するかも知れないがどの束の接続も ∇ で表すことにする）

$$R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_j} - \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \nabla_{\boldsymbol{e}_i}$$

により表される．$\phi \in \Gamma(S(X))$，$\psi \in \Gamma(E)$ に対し

$$D(\phi \otimes \psi) = \sum_j \bigl((\boldsymbol{e}_j \cdot \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \phi) \otimes \psi + (\boldsymbol{e}_j \phi) \otimes \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \psi\bigr),$$

$$\begin{aligned}
&D^2(\phi \otimes \psi) \\
&= \sum_{i,j} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \bigl(\nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \phi \otimes \psi + \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \phi \otimes \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \psi + \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \phi \otimes \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \psi + \phi \otimes \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \psi\bigr) \\
&= \sum_i \bigl(-\nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \phi \otimes \psi - \phi \otimes \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \psi - 2 \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \phi \otimes \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \psi\bigr) \\
&\quad + \sum_{i<j} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \bigl(R^S_{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j} \phi \otimes \psi + \phi \otimes R^E_{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j} \psi\bigr) \\
&= \nabla^* \nabla (\phi \otimes \psi) + \sum_{i<j} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j R^S_{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j} \phi \otimes \psi + \sum_{i<j} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \phi \otimes R^E_{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j} \psi
\end{aligned}$$

を得る．ここに R^S はスピノル束の曲率形式，R^E は E の曲率形式である．従って

$$\sum_{i<j} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j R^S_{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j} \phi = \frac{\kappa}{4} \phi$$

を示せばよい．スピノル束の接続形式は $-\frac{1}{2} \sum_{k<l} \theta_{kl} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l$ であることからその

曲率形式は $R^S_{\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j} = -\frac{1}{2}\sum_{k<l} R_{ijkl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l$ により与えられることがわかる．(このことは，考えている点で $\theta_{kl}=0$ であるからその点で $R=d\theta$ であることに注意すると容易にわかる.) これより

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}&\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j R^S_{\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j}\phi\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i<j,\,k<l} R_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\phi\\ &= -\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\phi \end{aligned}\tag{3.3}$$

を得る．もし j，k，l が相異なると，ビアンキの恒等式により

$$\begin{aligned}R_{ijkl}&\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l + R_{iklj}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_j + R_{iljk}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\\ &= (R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk})\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l = 0\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8}&\sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\phi\\ &= -\frac{1}{8}\times 2\sum_{i,j,k} R_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j\phi\\ &= -\frac{1}{4}\sum_{i,k} R_{ik}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k\phi = \frac{1}{4}\left(\sum_i R_{ii}\right)\phi = \frac{\kappa}{4}\phi\end{aligned}$$

を得る．ここで 2 行目において 2 倍がつくのは $j=k$ の場合と $j=l$ の場合をひとまとめにしたからである． □

X を $Spin^c$ 多様体とし，その行列式直線束を L とする．L には $U(1)$ 接続（すなわちあるエルミート計量を保つ接続）A が与えられているとする．このとき $Spin^c(2n) \subset \mathbb{C}l_{2n}$ よりスピノル束

$$S_c^{\pm} = P_{Spin^c(2n)} \times_{\rho^{\pm}} \Delta^{\pm}$$

およびディラク作用素

$$D_A = \sum_{i=1}^{2n} \boldsymbol{e}_i \nabla_{\boldsymbol{e}_i} : \Gamma(S_c^{\pm}) \to \Gamma(S_c^{\mp})$$

が定義されるのであった（定義 3.2.2）．$U(1)$ のリー環 $\mathfrak{u}(1)$ を $\mathfrak{u}(1)=i\mathbb{R}$ とみなし，L の曲率は $i\Theta$，ただし Θ は実 2 次微分形式，と表されるとする．

定理 3.2.7　$D_A^2 = \nabla^*\nabla + \frac{\kappa}{4} + \frac{i\Theta}{2}$．ただし $i\Theta$ はクリフォード積により $\Gamma(S_c^{\pm})$ に作用する．(この了解のもとに $i\Theta$ の作用は自己随伴であることに注意せよ.)

証明　議論は局所的であるから $S_c = S \otimes L^{\frac{1}{2}}$ であると考えてよい．よって前定理が適用でき，

$$R^E = R^{L^{\frac{1}{2}}} = \sum_{i<j} \frac{i}{2}\Theta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \frac{i}{2}\Theta$$

である．　□

例 3.2.8　$X = \mathbb{R}$ の標準的 $Spin$ 構造の場合：$n = 1$ である．$Cl_1 = \{a + b\boldsymbol{e}\}$，$\boldsymbol{e}^2 = -1$，であるから $Cl_1 \cong \mathbb{C}$，$\boldsymbol{e} = i$ となる．よってディラク作用素は

$$D = \boldsymbol{e}\frac{\partial}{\partial x} = i\frac{\partial}{\partial x}$$

により与えられる．

最後に $X = \mathbb{R}^4$ の標準的 $Spin$ 構造の場合のディラク作用素について調べよう．もちろん $n = 4$ である．よく知られたクリフォード代数の同型により $Cl_4 \cong \mathbb{H}(2)$，$\mathbb{C}l_4 \cong \mathbb{C}(4)$ である（[27] の Chapter I，§4 参照）．また

$$Spin(4) = S^3 \times S^3 \subset Cl_4^0 \cong Cl_3 \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$$

となっている．この最後の同型を具体的に見てみよう．Cl_4^0 は $\omega_{\mathbb{C}} = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4$ の ± 1 固有空間

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbb{R}\frac{1 - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4}{2} \oplus \mathbb{R}\frac{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4}{2} \\ &\qquad \oplus \mathbb{R}\frac{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4\boldsymbol{e}_2}{2} \oplus \mathbb{R}\frac{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}{2}, \\ V_2 &= \mathbb{R}\frac{1 + \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4}{2} \oplus \mathbb{R}\frac{-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4}{2} \\ &\qquad \oplus \mathbb{R}\frac{-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4\boldsymbol{e}_2}{2} \oplus \mathbb{R}\frac{-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}{2} \end{aligned}$$

に分解する．よって $\Delta^+ \cong V_1$，$\Delta^- \cong \boldsymbol{e}_1 V_1$ とみなせる．そこで

$$\begin{aligned} 1 &:= \frac{1 - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4}{2}, & i &:= \frac{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4}{2}, \\ j &:= \frac{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4\boldsymbol{e}_2}{2}, & k &:= \frac{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}{2} \end{aligned}$$

とおくことにより

$$\Delta^+ \cong V_1 \cong \mathbb{H}, \qquad \Delta^- \cong \boldsymbol{e}_1 V_1 \cong \mathbb{H}$$

と同一視する．更に

$$\begin{aligned} 1' &:= \frac{1 + \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4}{2}, & i' &:= \frac{-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4}{2}, \\ j' &:= \frac{-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4\boldsymbol{e}_2}{2}, & k' &:= \frac{-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}{2} \end{aligned}$$

とおくと

$$\boldsymbol{e}_1 1 = 1'\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 i = i'\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 j = j'\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 k = k'\boldsymbol{e}_1$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1(1,i,j,k) = (1',i',j',k')\boldsymbol{e}_1,\\
&\boldsymbol{e}_2(1,i,j,k) = (-i',1',-k',j')\boldsymbol{e}_1 = -i'(1',i',j',k')\boldsymbol{e}_1,\\
&\boldsymbol{e}_3(1,i,j,k) = (-j',k',1',-i')\boldsymbol{e}_1 = -j'(1',i',j',k')\boldsymbol{e}_1,\\
&\boldsymbol{e}_4(1,i,j,k) = (-k',-j',i',1')\boldsymbol{e}_1 = -k'(1',i',j',k')\boldsymbol{e}_1
\end{aligned}$$

となる．上の 4 つの式の最後の項の形よりディラク作用素

$$D : \Gamma(S^+) = \Gamma(\mathbb{R}^4, \mathbb{H}) \to \Gamma(S^-) = \Gamma(\mathbb{R}^4, \mathbb{H})$$

は

$$\begin{aligned}
D &= \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \boldsymbol{e}_4 \frac{\partial}{\partial x^4}\\
&= \frac{\partial}{\partial x^1} - i' \frac{\partial}{\partial x^2} - j' \frac{\partial}{\partial x^3} - k' \frac{\partial}{\partial x^4}
\end{aligned}$$

の形に表される．また

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1(1',i',j',k') = (-1,-i,-j,-k) = -(1,i,j,k),\\
&\boldsymbol{e}_2(1',i',j',k') = (-i,1,-k,j) = -i(1,i,j,k),\\
&\boldsymbol{e}_3(1',i',j',k') = (-j,k,1,-i) = -j(1,i,j,k),\\
&\boldsymbol{e}_4(1',i',j',k') = (-k,-j,i,1) = -k(1,i,j,k)
\end{aligned}$$

より同様にディラク作用素 $D : \Gamma(S^-) = \Gamma(\mathbb{R}^4, \mathbb{H}) \to \Gamma(S^+) = \Gamma(\mathbb{R}^4, \mathbb{H})$ は

$$D = -\frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} - j \frac{\partial}{\partial x^3} - k \frac{\partial}{\partial x^4}$$

の形に表される．i'，j'，k' をあらためて i，j，k と表し，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q} &:= \frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} - j \frac{\partial}{\partial x^3} - k \frac{\partial}{\partial x^4},\\
\frac{\partial}{\partial \overline{q}} &:= \frac{\partial}{\partial x^1} + i \frac{\partial}{\partial x^2} + j \frac{\partial}{\partial x^3} + k \frac{\partial}{\partial x^4}
\end{aligned}$$

とおくとディラク作用素 $D : \Gamma(S^+ \oplus S^-) \to \Gamma(S^+ \oplus S^-)$ は

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial \overline{q}} \\ \frac{\partial}{\partial q} & 0 \end{pmatrix}$$

と表される．

上において $I = -i'$，$J = -j'$ とおくと $K = k'$ である．よって $D : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$ は

$$
\begin{aligned}
D = \frac{\partial}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial x^1} + I\frac{\partial}{\partial x^2} + J\frac{\partial}{\partial x^3} - K\frac{\partial}{\partial x^4} \\
&= \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \oplus J\frac{\partial}{\partial \overline{w}}
\end{aligned}
$$

と表される．ただし，最後の等号は $q = z + Jw$，$z = x^1 + Ix^2$，$w = x^3 + Ix^4$ により $\mathbb{H}$ と $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ を同一視した．よって

$$
\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + J\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right)(f + Jg) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial w} + J\frac{\partial f}{\partial \overline{w}} + J\frac{\partial g}{\partial z}
$$

を得る．この最後の結果はケーラー多様体として $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ のディラク作用素が $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ であることとうまく合致する．

演習問題 3.2.9　上の最後の式が $D = \sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ と同値であることを示せ．

演習問題 3.2.10　$q = z + jw$，$z = x^1 + ix^2$，$w = x^3 + ix^4$ により $\mathbb{H}$ と $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ を同一視するとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial q} = \sigma_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \sigma_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \sigma_3\frac{\partial}{\partial x^3} + \sigma_4\frac{\partial}{\partial x^4}, \\
&\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表されることを示せ.（σ_1，σ_2，σ_3，σ_4 は**パウリ（Pauli）行列**と呼ばれる.）

第 4 章
サイバーグ・ウィッテン方程式

本章ではサイバーグ・ウィッテン方程式について解説する．まず，微分構造の不変量であるサイバーグ・ウィッテン不変量の構成方法について述べる．次にウィッテンの原論文にある議論を用いて，$K3$ 曲面の $Spin^c$ 構造で 0 でないサイバーグ・ウィッテン不変量を持つものは自明な $Spin^c$ 構造のみであることを証明する．

4.1　接続の空間

接続については第 2 章で詳しく論じたが，そこでは多くの場合一つ一つの接続について論じた．しかし，反自己双対ヤン・ミルズ（Yang–Mills）接続の理論（ドナルドソン（Donaldson）理論）やサイバーグ・ウィッテン理論においては接続全体の空間を考える．例えばドナルドソン理論においては接続を未知関数とする反自己双対方程式を考える．この方程式の解が反自己双対接続であり，ヤン・ミルズ接続の特別な場合になっている．このような解の全体は接続全体の空間 $\mathcal{A}$（無限次元）の部分多様体 $\mathcal{S}$ をなす（やはり無限次元）．次にゲージ群 $\mathcal{G}$ はやはり無限次元であるが，反自己双対方程式はゲージ不変であり，解空間 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{G}$ の作用で保たれる．軌道空間 $\mathcal{S}/\mathcal{G}$ は有限次元になる．反自己双対方程式はリーマン計量に依存するが，$\mathcal{S}/\mathcal{G}$ の $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ におけるボルディズム類（大胆に言うとホモロジー類）はリーマン計量の摂動により不変であるから，この類が可微分構造に依存する不変量であるというのがドナルドソン理論のあらましであった．

サイバーグ・ウィッテン方程式においては $Spin^c$ 構造の行列式直線束の接続とスピノル場が未知関数となる．やはり接続全体のなす空間を取り扱う必要があるので，本節でその取り扱いについて述べたい．

X をコンパクト，向き付け可能，連結 4 次元多様体とする．主 G 束 $\pi : P \to X$

の接続全体の集合を $\mathcal{A}(P)$ とおく．$\tilde{\theta}$ と $\tilde{\theta}'$ を P の 2 つの接続形式とする．$A \in \mathfrak{g}$ の定める基本ベクトル場 A^*（定義 2.3.9 参照）に対し，定理 2.3.15 より

$$\tilde{\theta}(A^*) - \tilde{\theta}'(A^*) = A - A = 0 \tag{4.1}$$

である．また P の右不変水平ベクトル場 ξ に対し

$$\begin{aligned}((\tilde{\theta} - \tilde{\theta}')(\xi))_{pg} &= (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}')(R_{g*}\xi_p) \\ &= \mathrm{Ad}(g)((\tilde{\theta} - \tilde{\theta}')(\xi))_p \end{aligned} \tag{4.2}$$

である．一般に表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられると同伴ベクトル束 $P \times_\rho V$ が

$$P \times_\rho V := P \times G/\sim, \qquad (pg^{-1}, \rho(g)v) \sim (g, v)$$

により定まるのであった．このベクトル束の切断を $(p, s(p))$ と表すと

$$(pg, s(pg)) \sim (p, s(p))$$

でなければならないが，$(pg, \rho(g^{-1})s(p)) \sim (p, s(p))$ であるから

$$s(pg) = \rho(g^{-1})s(g)$$

となる．すなわち同伴ベクトル束 $P \times_\rho V$ の切断は G 同変写像 $s : P \to V$ と同一視される．よって (4.1)，(4.2) より $\tilde{\theta} - \tilde{\theta}'$ は $T^*X \otimes \mathrm{ad}(P)$ の切断と同一視される．ここに $\mathrm{ad}(P) = P \times_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$ である．従って一つの接続 $\tilde{\theta}_0$ を固定すると接続の全体 $\mathcal{A}(P)$ は

$$\mathcal{A}(P) = \tilde{\theta}_0 + \Gamma(T^*X \otimes \mathrm{ad}(P))$$

と表される．

実質的に繰り返しに過ぎないが次のように言い表すこともできる．部分群 $G \subset GL(r, \mathbb{R})$ に対し，ベクトル束 E の G 接続の場合を考えよう．∇' と ∇ を 2 つの共変微分とすると

$$\begin{aligned}(\nabla' - \nabla)(fs) &= (df \otimes s + f\nabla' s) - (df \otimes s + f\nabla s) \\ &= f(\nabla' - \nabla)s.\end{aligned}$$

よって $\nabla' - \nabla$ はテンソルである（松島与三，多様体入門，p.124 の定理参照）．よって $\nabla' - \nabla \in \Gamma(X, T^*X \otimes \mathrm{End}(E))$ である．仮定により 2 つの接続は G 接続であるから E の同伴主 G 束 P_G の接続から誘導されている．よって P_G の局所切断 p を取ると p は E の局所枠であり，p に関する ∇，∇' の接続行列 θ，θ' は $\mathfrak{g}$ に値を持つ 1 次微分形式である．$g \in G$ に対し，p を pg に取り替えると接続行列は $g^{-1}\theta g$，$g^{-1}\theta' g$ に変わる（線形代数における基底の取り替えによ

る表現行列の変形の議論）．よって $\theta-\theta' \in \Gamma(X, T^*X \otimes \mathrm{ad}(P))$ である．よって接続全体のなす空間は $\mathcal{A}=\nabla_0+\Omega^1(\mathrm{ad}(P))$ と記述される．ここに ∇_0 は固定した G 接続である．

主束 P の**ゲージ群** $\mathcal{G}$ とは束自己同型群

$$\mathcal{G}=\{h : P \to P \mid \pi h=\pi,\ G\text{ 作用と可換 }\}$$

である．この群は

$$\mathcal{G}=\Gamma(\mathrm{Ad}(P))=\Gamma(P \times_{\mathrm{Ad}} G).$$

とも記述される．なぜなら G の G への通常の左作用を l とすると $P=P\times_l G$ であり，この右側の表示に関し $\sigma \in \mathcal{G}$ が $\sigma(p,k)=(p,hk)$，$\sigma(pg^{-1},gk)=(pg^{-1},h'gk)$ であるとすると $(p,k)\sim(pg^{-1},gk)$ より，

$$(pg^{-1},h'gk)\sim(p,g^{-1}h'gk)$$

であるから $h'=ghg^{-1}$ であるからである．

$\mathcal{G}$ は同伴ベクトル束 E の切断全体 $\Gamma(E)=\Gamma(P\times_\rho \mathbb{R}^r)$ に作用する．なぜなら，$\mathcal{G}$ の元を (p,h)，$\Gamma(E)$ の元を (p,v) により表し，

$$(p,h)\cdot(p,v)=(p,hv)$$

により作用を定義すると，

$$(p,h)\sim(pg^{-1},ghg^{-1}),\quad (p,v)\sim(pg^{-1},gv)$$

であるが

$$(pg^{-1},ghg^{-1})\cdot(pg^{-1},gv)=(pg^{-1},ghv)\sim(p,hv)$$

であるから well-defined であるからである．これも大学 1 年次の線形代数で学ぶ線形写像の表現行列に関する基底の取り替えの議論と同じである．

また $\mathcal{G}$ は $\mathcal{A}(P)$ にも次のように作用する．$\nabla \in \mathcal{A}(P)$ と $\sigma \in \mathcal{G}$ に対し $\sigma(\nabla)\in\mathcal{A}(P)$ を

$$\sigma(\nabla)=\sigma\circ\nabla\circ\sigma^{-1}$$

により定義する．命題 2.1.13 により ∇ の接続形式を θ とするとき $\sigma(\nabla)$ の接続形式は

$$-d\sigma\cdot\sigma^{-1}+\sigma\theta\sigma^{-1}=\sigma\cdot d\sigma^{-1}+\sigma\theta\sigma^{-1}$$

により与えられる．∇ と $\sigma(\nabla)$ は**ゲージ同値**であるといわれる．

さて，ここまで共変微分を ∇，接続形式を θ で表して来たが，ゲージ理論で

は接続と接続形式を同一視してどちらも A により表し，A により定まる共変微分を ∇_A により表すのが一般的慣習である．次節以降この慣習に従うことにする．従ってゲージ変換 σ による A の変換は

$$\sigma(A) = \sigma \cdot d\sigma^{-1} + \sigma A \sigma^{-1}$$

により与えられる．

4.2 サイバーグ・ウィッテン理論

$Spin^c$ 構造を定める $U(1)$ 束 $P_{U(1)}$ の接続 A を一つ選ぶと $P_{SO(n)}$ のレビ･チビタ接続とともに $P_{SO(n)} \times_X P_{S^1}$ の接続が決まり，更にその 2 重被覆 $P_{Spin^c(n)}$ に接続が決まる．よって同伴ベクトル束であるところのスピノル束 S の接続が自然に定まり，$Spin^c$ ディラク作用素 $D_A : \Gamma(S_c) \to \Gamma(S_c)$ が

$$D_A s = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \nabla_{\boldsymbol{e}_i} s$$

により定義されるのであった（定義 3.2.2）．X が偶数次元のときは

$$D_A : \Gamma(S_c^{\pm}) \to \Gamma(S_c^{\mp})$$

が誘導される．

また自然な写像 $Spin^c(n) \to SO(n)$ により，$P_{Spin^c(n)}$ を TX の同伴主束とみなすことができ，スピノル束にはクリフォード積が定義されるのであった（補題 3.1.30 の後の但書き参照）．スピノル表現 Δ は $Pin^c(n) := Pin(n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1)$ の作用で不変な内積を持つが，$Spin^c(n) \subset Pin^c(n)$ であるからスピノル束の大域的なエルミート内積を定める．この内積はクリフォード積で不変である．

X をコンパクト，向き付け可能，連結 4 次元リーマン多様体とする．任意の 4 次元多様体はスピン構造を持つことが知られている（事実 3.1.26 参照）．$P_{U(1)}$ の接続 A と $\Gamma(S_c^+)$ の元 ψ の組 (A, ψ) を未知関数とする次の偏微分方程式を**サイバーグ・ウィッテン（Seiberg–Witten）方程式**という．

$$\begin{cases} D_A \psi = 0 \\ \mu(F_A^+) = \psi \otimes \psi^* - \frac{|\psi|^2}{2} \mathrm{id} \in \Gamma(\mathrm{End}\, S_c^+) \end{cases} \tag{4.3}$$

第 1 式を**ディラク方程式**，第 2 式を**曲率方程式**と呼ぶことにしよう．第 1 式の意味は明らかであるが，第 2 式は説明を要する．まず第 2 式は $\Gamma(\mathrm{End}\, S_c^+)$ における等式である．右辺が $\Gamma(\mathrm{End}\, S_c^+)$ の元であることは明らかであろう．内積を用いた同型 $\overline{S_c^+} \cong S^{+*}$ により

$$S_c^+ \to S_c^+ \otimes \overline{S_c^+} \cong S_c^+ \otimes S_c^{+*} \cong \mathrm{End}(S_c^+) \to \mathrm{End}_0(S_c^+)$$

（下付きの 0 はトレースが 0 である部分のことを表す）による $\psi \in \Gamma(S_c^+)$ の像が (4.3) の第 2 式の右辺である．より具体的には次のように書き表される．$s \in \Gamma(S_c^+)$ に対し $\psi \otimes \psi^*$ は $\Gamma(\mathrm{End}(S_c^+))$ の元としては

$$\psi \otimes \psi^*(s) = (s, \psi)\psi$$

と表現される．S_c^+ の正規直交枠 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を用いて $\psi = \psi^1 \boldsymbol{e}_1 + \psi^2 \boldsymbol{e}_2$ と表し，ψ を列ベクトル $\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$ と同一視すると $\psi \otimes \psi^* - \frac{|\psi|^2}{2}\,\mathrm{id}$ の行列表示

$$\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi}^1 & \overline{\psi}^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}|\psi|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|\psi^1|^2 - |\psi^2|^2}{2} & \psi^1 \overline{\psi}^2 \\ \psi^2 \overline{\psi}^1 & \frac{-|\psi^1|^2 + |\psi^2|^2}{2} \end{pmatrix}$$

となる．上式の右辺を $(\psi\psi^*)_0$ により表す．

次に (4.3) の第 2 式の左辺を説明しよう．$F_A^+ = (dA)^+$ は S^1 のリー環 $i\mathbb{R}$ に値を持つ 2 次微分形式の Ω^+ 部分である．2 次微分形式のクリフォード積による $S_c^+ \oplus S_c^-$ への作用を μ により表す：

$$\mu : \wedge^2 \to \mathrm{End}(S_c^+ \oplus S_c^-).$$

この作用は $\pm$ の分解に応じて分解 $\wedge^+ \oplus \wedge^-$ を誘導する．すなわち $\wedge^+$ の元は S_c を S_c^+ に写し，$\wedge^-$ の元は S_c を S_c^- に写す．実際 $S_c^\pm$ は $\omega_{\mathbb{C}} = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4$ の ± 1 固有空間であったが，例えば

$$\omega_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4) = (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)$$

であるからである．また

$$\left(\frac{i}{2}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + \omega_{\mathbb{C}})$$

であるからこの作用素は S_c^+ への射影である．よって $\frac{i}{2}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)|_{S_c^+}$ の固有値は ± 1 であり，特にトレースは 0 である．以上により方程式 (4.3) は意味を持つことがわかった．クリフォード代数の構造を使ったより包括的な説明が [25]，4.1 節にあるのでそちらも参照されたい．

サイバーグ・ウィッテン方程式の解全体のなす空間を

$$Sol = \{(A, \psi) \mid \text{サイバーグ・ウィッテン方程式の解}\}$$

により表す．ここでのゲージ群 $\mathcal{G}$ は[*1)]

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= \{\sigma \in \Gamma(\mathrm{Ad}(P_{Spin^c(4)})) \mid \sigma \text{ は } \Gamma(\mathrm{Ad}(P_{SO(4)})) \text{ の id に落ちる}\} \\ &\cong C^\infty(X, S^1) = \{\sigma_0 : X \to S^1\} \end{aligned}$$

*1)　ここでいうゲージ群は主束の自己同型群という意味ではなく，サイバーグ・ウィッテン方程式を不変にする変換全体のなす群という意味である．

である．ここに σ は S_c^+ に $\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$ の形で作用し，$\det\sigma = \sigma_0^2$ は行列式直線束 L の同伴主束 P_{S^1} のゲージ群 $\Gamma(\mathrm{Ad}(P_{S^1}))$ の元になる．P_{S^1} の接続全体のなす空間を $\mathcal{A}(P_{S^1})$ により表すと未知関数全体のなす空間は $\mathcal{A}(P_{S^1}) \times \Gamma(S_c^+)$ である．σ のこの空間の元 (A,ψ) への作用は

$$\begin{aligned}\sigma(A,\psi) = ((\det\sigma)(A), \sigma\psi) &= (A + \det\sigma \cdot d(\det\sigma)^{-1}, \sigma\psi) \\ &= (A - d(\det\sigma)\cdot(\det\sigma)^{-1}, \sigma\psi)\end{aligned}$$

により与えられる．この作用はサイバーグ・ウィッテン方程式の解の空間 Sol を保つ．何故なら，まず

$$D_{(\det\sigma)A}(\sigma\psi) = (\sigma\circ D_A \circ \sigma^{-1})(\sigma\psi) = \sigma D_A\psi = 0$$

であるから $((\det\sigma)A, \sigma\psi)$ は (4.3) の第 1 式をみたし，

$$F^+_{(\det\sigma)A} = F^+_A, \qquad \sigma\psi\otimes(\sigma\psi)^* = \psi\otimes\psi^*$$

であるから第 2 式もみたす．そこで**サイバーグ・ウィッテンモデュライ空間**を

$$\mathcal{M} := Sol/\mathcal{G}$$

と定義する．これは実際には $Spin^c$ 構造の選び方に依存するので $\mathcal{M}(P_{Spin^c(4)})$ または $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ と表すべきであるが，しばしば略記して $\mathcal{M}$ により表すことにする．

補題 4.2.1　解 (A,ψ) と 1 でない $\sigma\in\mathcal{G}$ に対し，$\sigma(A,\psi) = (A,\psi)$ であるならば $\psi = 0$ かつ σ は定値写像である．すなわち解 (A,ψ) が非自明な固定部分群を持つならば $\psi = 0$ であり，そのとき固定部分群は S^1 と同型である．

証明　$\sigma\psi = \psi$，$\sigma \neq 1$ であるので ψ は空でない開集合上（すなわち $\sigma\neq 1$ となる開集合上）で 0 である．ψ は楕円型偏微分方程式の解であるから一意接続性により多様体 X 上 0 である．また

$$(\det\sigma)(A) = A + \det\sigma\cdot d(\det\sigma^{-1}) \equiv A$$

であるから $\det\sigma = \mathrm{constant}$，よって $\sigma = \mathrm{constant}$ でなければならない．□

定義 4.2.2　$\psi\neq 0$ なる解を**既約解**[*2)]という．

*2)　この用語の語感を理解しがたく感ずるのは自然である．サイバーグ・ウィッテン理論に先立つ理論であった自己双対ヤン・ミルズ方程式の理論においては固定部分群が自明でない解（自己双対接続）は同伴ベクトル束の非自明な直和分解に対応していた．すなわち，固定部分群が自明な解は同伴ベクトル束が既約であるということで特徴づけられていたので既約解と呼ばれていた．このような歴史的理由から固定部分群が自明な解を既約解と呼ぶのである．

$$Sol^* = \{(A, \psi) \in Sol \mid \psi \neq 0\}$$
$$\mathcal{M}^* := Sol^*/\mathcal{G}$$

とおく．

サイバーグ・ウィッテンモデュライ空間 $\mathcal{M}$ が滑らかな多様体であるために，すべての解の固定部分群が自明であること（$\mathcal{G}$ の作用が自由であること），すなわち

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$$

であることが望ましい．これは後述するようにリーマン計量を摂動することにより実現できる．このことを含め，モデュライ空間を用いて微分位相不変量を構成する手続きは次の（ア），（イ），（ウ）の 3 つのステップからなる．この 3 つをあらかじめ述べてから，その各々を詳述することにする．

（ア）（$\mathcal{M}$ の接空間，楕円型複体，次元）

写像 $F : \mathcal{A}(P_{S^1}) \times \Gamma(S_c^+) \to \Gamma(i\wedge^+) \times \Gamma(S_c^-)$ を

$$F(A, \psi) = (F_A^+ - \mu^{-1}((\psi\psi^*)_0),\ D_A\psi) \tag{4.4}$$

により定義する．もちろん $Sol = F^{-1}(0, 0)$ である．記号の簡略化のため

$$q(\psi) = \mu^{-1}((\psi\psi^*)_0)$$

とおくことにする．以下写像 F を可微分多様体間の写像とみなし，解 (A, ψ) における F の微分

$$DF_{(A,\psi)} : \Gamma(i\wedge^1) \times \Gamma(S_c^+) \to \Gamma(i\wedge^+) \times \Gamma(S_c^-) \tag{4.5}$$

を調べる．$DF_{(A,\psi)}$ の核が Sol の接空間である：

$$\mathrm{Ker}\, DF_{(A,\psi)} = T_{(A,\psi)} Sol.$$

これの $\mathcal{G}$ の作用の軌道 $\mathcal{G}(A, \psi)$ の接空間による商空間がモデュライ空間の接空間である：

$$T_{(A,\psi)} Sol / T_{(A,\psi)} \mathcal{G}(A, \psi) = T_{[A,\psi]} \mathcal{M}.$$

そこでこれらの 2 つの空間 $T_{(A,\psi)} Sol$，および $T_{(A,\psi)} \mathcal{G}(A, \psi)$ を具体的に記述したい．まず，接続の空間 $\mathcal{A}(P_{S^1})$ の接空間は $i\mathbb{R}$ 値 1 次微分形式の全体である．また $\Gamma(S_c^+)$ はベクトル空間であるから，その接空間は $\Gamma(S_c^+)$ 自身である．そこで $a \in T_A\mathcal{A}(P_{S^1}) \cong i\wedge^1$，$\phi \in T_\psi \Gamma(S_c^+) \cong \Gamma(S_c^+)$ とすると F の微分は

$$F_*(a, \phi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big(F_{A+ta}^+ - \mu^{-1}((\psi + t\phi)(\psi + t\phi)^*)_0,\ D_{A+ta}(\psi + t\phi)\big)$$

$$= \left(d^+a - Dq_\psi(\phi),\ \frac{a}{2}\psi + D_A\phi\right)$$

により与えられる．ここに d^+a は da の自己双対部分を表す：

$$d^+a = \frac{1}{2}(da + *da).$$

次にゲージ群の軌道の接空間を記述しよう．

$$\left.\frac{d}{dt}((\det\sigma_t)A, \sigma_t\psi)\right|_{t=0} = (-2d\dot{\sigma}_0, \dot{\sigma}\psi)$$

であるから，$T_{(A,\psi)}\mathcal{G}(A,\psi)$ はこの右辺の形のベクトル全体になる（σ_0 はゲージ群の説明のところで述べたものである）．$\sigma \in \mathcal{G}$ に対し

$$s(\sigma) = \sigma(A,\psi)$$

とおくと，以上のベクトル空間は

$$0 \to \Gamma(i\wedge^0) \xrightarrow{s_*} \Gamma(i\wedge^1) \times \Gamma(S_c^+) \xrightarrow{F_*} \Gamma(i\wedge^+) \times \Gamma(S_c^-) \to 0, \tag{4.6}$$

$$s_*(\dot{\sigma}) = (-2d\dot{\sigma}_0, \dot{\sigma}\psi), \tag{4.7}$$

$$F_*(a,\phi) = \left(d^+a - Dq_\psi(\phi), \frac{a}{2}\psi + D_A\phi\right) \tag{4.8}$$

という形に記述される．(4.6) は完全系列という意味ではなく，今から見るように複体であるという意味である．上で見たように (A,ψ) が解であるとき $\sigma(A,\psi)$ も解である．よって

$$F(\sigma(A,\psi)) = 0$$

であるから

$$F_* \circ s_* = 0 \tag{4.9}$$

となる．よって (4.6) は楕円型複体になる（楕円型複体についての解説は後回しにする．ここではド･ラーム複体のようなコチェイン複体とみなして先へ進んで欲しい）．この複体の 1 次元コホモロジーがモデュライ空間の接空間になる：

$$H^1 = T_{(A,\psi)}Sol/T_{(A,\psi)}\mathcal{G}(A,\psi) = T_{[A,\psi]}\mathcal{M}. \tag{4.10}$$

もし $H^0 = H^2 = 0$ ならば

$$\dim\mathcal{M} = \dim H^1 = -\mathrm{index}$$

である．ここに $\mathrm{index} = \dim H^0 - \dim H^1 + \dim H^2$ である（つまり複体のオイラー標数）．$H^0 = 0$ は $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ と同値であるから（後述すると前述した通り）リーマン計量の摂動により $H^0 = 0$ とすることができ，またサイバーグ・ウィッテン方程式を摂動することにより $H^2 = 0$ とすることができる．この状況で $\mathcal{M}$ は $-\mathrm{index}$ 次元の滑らかな多様体である．しかも，後述するよう

に，コンパクトな多様体になる．更に，ここまでの議論に必要な摂動のもとで $\mathcal{M}$ の $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の中でのボルディズム類は不変である．このボルディズム類が多様体 X の可微分構造から定まる不変量である．

$-\mathrm{index} < 0$ の場合はモデュライ空間は空集合である．以下 $-\mathrm{index} \geq 0$ と仮定する．

（イ） $H^2 = 0$ とするための摂動方程式を考える．$\delta \in \Gamma(i\wedge^+)$ とする．

$$\begin{cases} D_A\psi = 0 \\ \mu(F_A^+ + \delta) = (\psi\psi^*)_0 \end{cases} \tag{4.11}$$

この方程式の既約解のモデュライ空間を $\mathcal{M}_\delta^*$ により表す．非摂動方程式の場合と同様に写像 $F : \mathcal{A}(P_{S^1}) \times \Gamma(S_c^+) \times \Gamma(i\wedge^+) \to \Gamma(i\wedge^+) \times \Gamma(S_c^-)$ を

$$F(A, \psi, \delta) = (F_A^+ + \delta - \mu^{-1}((\psi\psi^*)_0),\, D_A\psi) \tag{4.12}$$

により定義する．このとき

- generic な δ に対し 0 は正則値になる．よって

$$F^{-1}(0)/\mathcal{G} = \bigcup_{\delta\in\Gamma(i\wedge^+)} \mathcal{M}_\delta^* =: \mathcal{M}_\Delta^*$$

は滑らかな多様体になる．

- $\pi(\mathcal{M}_\delta)^* = \delta$ により定義される $\pi : \mathcal{M}_\Delta^* \to \Gamma(i\wedge^+)$ は**フレドホルム（Fredholm）写像**になる．（これらの議論を正確にするには適当なソボレフ空間を設定しなければならないが，ここでは省略する．）フレドホルム写像とはその微分写像が接空間の間の線形写像としてフレドホルム（核も余核も有限次元であるということ）であるということである．generic な δ に対し $\mathcal{M}_\delta^*$ は，この**フレドホルム指数**（= 核の次元 − 余核の次元）次元の滑らかな部分多様体である．もちろん指数が負のときは空集合である．
- δ_1，δ_2 を 2 つの正則値とする．generic な道 $\{\delta_t\}_{0\leq t\leq 1}$ に対し $\pi^{-1}(\{\delta_t\}) = \bigcup_{0\leq t\leq 1} \mathcal{M}_{\delta_t}^*$ はフレドホルム指数に 1 を加えた次元の滑らかな境界付き部分多様体である．$t = 0$ と $t = 1$ の部分が境界であり，この多様体が両端 $\mathcal{M}_{\delta_0}$ と $\mathcal{M}_{\delta_1}$ のボルディズムを与える．(図 4.1.)

（ウ） $H^0 = 0$ とするためにリーマン計量を摂動する．記述を簡単にするため $\delta = 0$ とする．もしサイバーグ・ウィッテン方程式 (4.3) が $\psi = 0$ なる解を持ったとすると

$$F_A^+ = \mu^{-1}((\psi\psi^*)_0) = 0.$$

このとき F_A は調和形式になる．何故なら，A は $U(1)$ 接続であるから $c_1(P_{S^1}) = \frac{i}{2\pi}F_A$ であり $dF_A = 0$ であるが，更に $*F_A = -F_A$ であるから

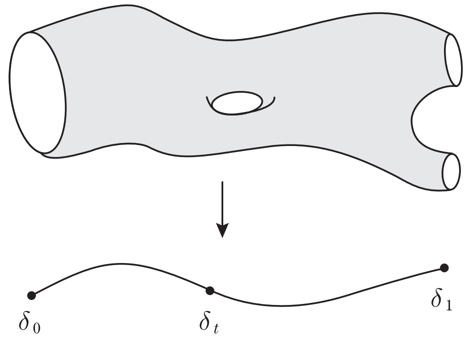


図 4.1

$$d^*F_A = *d*F_A = -*dF_A = 0$$

であるからである．よって F_A は反自己双対調和形式全体のなすベクトル空間 $\mathcal{H}^-(g)$ に属する．以上，要するにリーマン計量に無関係なド･ラーム類 $c_1(P_{S^1})$ がリーマン計量に依存する反自己双対調和形式により代表される部分空間に入っている．よってリーマン計量を少し変えると反自己双対調和形式も少し変わり，この部分空間が少しずれるので，このような状況にはならなくなる．すなわち generic なリーマン計量に対してはサイバーグ・ウィッテン方程式は既約解のみしか持たない．

次にこのような意味での generic なリーマン計量の全体の連結成分を調べたい．

• まず $c_1(P_{S^1})$ が $\mathcal{H}^-(g)$ に属するような g の全体の余次元は b^+ であることに気をつけよう．ここに $b^+ = \dim \mathcal{H}^+(g)$ であり，この数は交点形式の正の固有値の個数に等しい．よって $b^+ \geq 2$ ならば $c_1(L) \notin \mathcal{H}^-(g)$ なるリーマン計量 g の全体は弧状連結である．

• よって generic な (g_0, δ_0)，(g_1, δ_1) に対し $H^0 = H^2 = 0$．$\mathcal{M}_{(g_0,\delta_0)}$，$\mathcal{M}_{(g_1,\delta_1)}$ は滑らかな多様体であり，しかも generic な道 $(g_t, \delta_t)_{0 \leq t \leq 1}$ に対し

$$\bigcup_{0 \leq t \leq 1} \mathcal{M}_{(g_t,\delta_t)}$$

は滑らかなコンパクト境界付き多様体となる．これは $\mathcal{M}_{(g_0,\delta_0)}$ と $\mathcal{M}_{(g_1,\delta_1)}$ のボルディズムを与える．

• $b^+ = 1$ とする．このとき 2 次元ド･ラームコホモロジー群の元で交点数が正になるものの全体は連結成分が 2 つからなる開凸錐をなす．$c_1^2(P_{S^1}) < 0$ とすると $c_1(P_{S^1})$ はこの錐の外にあり，交点形式に関する $c_1(P_{S^1})$ の直交補空間はこの錐（の各成分を）を 2 つの領域に分ける．この直交補空間を**壁**という．さて既約解でない解があるということは $F_A^+ = 0$ ということであった．このことは $c_1(P_{S^1}) \in \mathcal{H}^-(g)$，すなわち $\mathcal{H}^+ \in c_1(P_{S^1})^\perp$ と同値である．よって既約解のみを持つリーマン計量から決まる 1 次元の $\mathcal{H}^+(g)$ は 2 つの領域のいずれかに属し，同じ領域に属する者同士は弧状連結である．よって 2 つのボルディズム類が得られる．

$c_1^2(P_{S^1}) \geq 0$ のときは領域は 1 つである．

以上が先に述べた 3 つのステップである．詳細は後回しにしてサイバーグ・ウィッテン不変量の定義をしよう．

注意 4.2.3 (g,δ) を組にして考えるとき $\psi = 0$ と $F_A^+ + \delta = 0$ は同値である．このとき $c_1(P_{S^1})^+ = -H^+(\delta)$ であり，これをみたす (g,δ) 全体が壁である．同じ領域に属する組 (g,δ) は同値であるといい，この同値類を $[g,\delta]$ により表す．

ここまではモデュライ空間の向き付けについては何もふれなかったが，未知関数の空間 $\mathcal{A}(P_{S^1}) \times \Gamma(S_c^+)$ 上に定まる行列式直線束 $\det H^1/\det H^0 \otimes \det H^2$ が自明な束になることにより $\mathcal{M}_{g,\delta}$ には自然な向きが入ることが知られている．詳細は [25]，[12] に譲る．ボルディズムも向きをこめたものである．また次節で証明するようにモデュライ空間はコンパクトである（定理 4.3.4）．このことを認めた上で次のように定義する．

定義 4.2.4 $o \in X$ を固定し，

$$\mathcal{G}_0 = \{\sigma \in \mathcal{G} \mid \sigma(o) = 1 \in S^1\}$$

とおく．S^1 束 $\mathcal{A}/\mathcal{G}_0 \to \mathcal{A}/\mathcal{G}$ を Q_{S^1} により表す．

$$c_1(Q_{S^1})[\mathcal{M}_{g,\delta}] \in \mathbb{Z}$$

を**サイバーグ・ウィッテン不変量**といい $SW(\widetilde{P},[g,\delta])$ により表す．

ただし，モデュライ空間の次元が 0 のときは向きを無視して $\sharp\mathcal{M} \mod 2$ をサイバーグ・ウィッテン不変量と定義することもある．

さて，上の 3 つのステップ（ア），（イ），（ウ）をもう少し丁寧に述べよう．

（ア）の説明

式 (4.9) までは説明の要はないであろう．そこで楕円型複体の説明から始める．E_i，$i = 0,\cdots,n$ を複素ベクトル束とする．1 階の微分作用素 $d_i : \Gamma(E_i) \to \Gamma(E_{i+1})$ が与えられ $d_{i+1} \circ d_i = 0$ をみたすとする．局所的に d_i は

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \tau_i,$$

$$\sigma_i^j,\ \tau_i \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1}))$$

と表される．$\sum_{j=1}^n \xi_j\, dz^j \in T_x^* X$ に対し

$$\sigma_i(\xi) = i\sum_{j=1}^{n} \sigma_i^j \xi_j \in \mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1}) \tag{4.13}$$

とおき，σ_i を d_i の**主表象**という．この定義が局所座標の取り方によらないことは，第 1 章で説明した TX の基底と T^*X の双対基底に関する係数が本質的に同じであることから従う．

定義 4.2.5　上の状況で

$$0 \to E_{0x} \xrightarrow{\sigma_0(\xi)} E_{1x} \xrightarrow{\sigma_1(\xi)} \cdots \xrightarrow{\sigma_n(\xi)} E_{nx} \to 0 \tag{4.14}$$

が任意の $\xi \neq 0$ に対し完全系列であるとき

$$E : 0 \to E_{0x} \xrightarrow{d_0} E_{1x} \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_n} E_{nx} \to 0 \tag{4.15}$$

を**楕円型複体**という．

$$H^i := \mathrm{Ker}(d_i)/\,\mathrm{Im}(d_{i-1})$$

をこの複体の i 次コホモロジー群という．

大切なことは次の事実である．

事実 4.2.6（例えば [27] Chapter III Theorem 5.8 参照）　H^i は有限次元である．

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i$$

を楕円型複体 E の**指数**，または**オイラー・ポアンカレ標数**という．以後指数と呼ぶことにし，χ でなく，index により表すことにする．**アティヤ・シンガー（Atiyah–Singer）指数定理**の主張することは，この楕円型複体の（解析的）指数は特性類を用いて表される数（= 位相的指数）に等しいということである．一般的な式はここでは省略し，ド・ラーム複体および，サイバーグ・ウィッテン方程式に関係する 2 つの特別な複体のみを扱うことにする．その前に，一つの重要な注意をしたい．楕円型複体において微分作用素の 0 次の項を摂動しても指数は変わらない．これはひと口にいうと，楕円型偏微分作用素は（適当なソボレフ空間の設定のもとに）フレドホルム作用素であり，低次の項はコンパクト作用素になるが，一方フレドホルム指数はコンパクト作用素による摂動で不変であるからである．

例 4.2.7　X をコンパクト，向き付け可能，連結 n 次元多様体とする．ド・ラー

ム複体

$$0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n \to 0$$

は楕円型複体である．$\alpha \in \Omega^p$ に対し，$d\alpha$ は局所座標を用いると

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial x^i}$$

により与えられるので，主表象 $\sigma(\xi)$ は

$$\sigma_p(\xi)\alpha = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \xi_i \alpha = \xi \wedge \alpha$$

により与えられる．((4.13) における i 倍は無視することにする．さもなくば Ω^p を複素化せよ．）$\xi \neq 0$ に対し

$$\sigma_p(\xi)\alpha = 0 \iff \alpha = \xi \wedge \beta = \sigma_{p-1}(\xi)\beta$$

であるから

$$\operatorname{Ker} \sigma_p = \operatorname{Im} \sigma_{p-1}$$

であり，主表象の列 (4.14) は完全系列になるから従ってド･ラーム複体は楕円型複体である．H^i は i 次元ド･ラームコホモロジー群であり，指数は多様体 X のオイラー数である．オイラー数はオイラー類 χ を基本ホモロジー類 $[X]$ で値をとることにより得られる．これがアティヤ・シンガー指数定理の原型と言うべき例である．

例 4.2.8　X をコンパクト，向き付け可能，連結 4 次元リーマン多様体とする．複体

$$0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d^+} \Omega^+ \to 0 \tag{4.16}$$

は楕円型複体であることを見よう．ここに Ω^+ は自己双対 2 次微分形式全体であり，

$$d^+ a = \frac{1}{2}(da + *da)$$

である．まず $d^+ \circ d = 0$ は明らかである．次に

$$\sigma_0(\xi) = \xi\wedge, \qquad \sigma_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + *)\xi\wedge$$

であるが，$\xi = \boldsymbol{e}^1$ と仮定してよい．(主表象の定義についている i 倍はここでも無視することにする．さもなくば Ω^p を複素化せよ．）このとき

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^3 \wedge \boldsymbol{e}^4) = \frac{1}{2}(1 + *)\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2,$$
$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3 + \boldsymbol{e}^4 \wedge \boldsymbol{e}^2) = \frac{1}{2}(1 + *)\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3,$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^4 + \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3) = \frac{1}{2}(1+*)\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^4$$

であるから

$$\wedge^+ = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}(1+*)\boldsymbol{e}^1 \wedge : \wedge^1 \to \wedge^+\right)$$

である．すなわち $\sigma_1(\xi)$ は全射である．次に $\mathrm{Ker}\,\sigma_1(\xi) = \mathrm{Im}\,\sigma_0(\xi)$ を見よう．$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{e}^i \in \wedge^1$ に対し

$$\frac{1}{2}(1+*)\boldsymbol{e}^1 \wedge \alpha = 0$$

とすると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1+*)\boldsymbol{e}^1 \wedge \alpha &= \frac{1}{2}(1+*)(\alpha_2\,\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 + \alpha_3\,\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \alpha_4\,\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_4) \\
&= \frac{\alpha_2}{2}(\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^3 \wedge \boldsymbol{e}^4) + \frac{\alpha_3}{2}(\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3 + \boldsymbol{e}^4 \wedge \boldsymbol{e}^2) \\
&\quad + \frac{\alpha_4}{2}(\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^4 + \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3) \\
&= 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0
\end{aligned}$$

であるから $\alpha = \alpha_1 \boldsymbol{e}^1$ となる．すなわち

$$\alpha \in \mathrm{Im}(\boldsymbol{e}^1 \wedge : \wedge^0 \to \wedge^1)$$

である．以上により (4.16) が楕円型複体になることが示された．

複体 (4.16) の H^0，H^1 は明らかに 0 次元および 1 次元ド·ラームコホモロジー群である．

補題 4.2.9 複体 (4.16) の H^2 は自己双対調和 2 次微分形式全体 $\mathcal{H}^+$ と同型である．

証明 $H^2 = \Omega^+/\,\mathrm{Im}\,d^+$ であるから，この右辺が $\mathcal{H}^+$ と同型であることを示せばよい．調和積分論により $\alpha \in \Omega^2$ は

$$\alpha = h + d\beta + d^*\gamma = h + d\beta + *d*\gamma, \qquad \Delta h = 0$$

と L^2 直交分解される．更に $*\alpha = \alpha$ とすると

$$h + d\beta + *d*\gamma = *h + *d*(*\beta) + d*\gamma$$

であるから，

$$h = *h, \qquad \beta = *\gamma$$

である．($*$ と Δ は可換であるから $*h$ は調和形式であることを使った.) よって

$$\alpha = h + \frac{1}{2}(1+*)d(2\beta) = h + d^+(2\beta)$$

となる．よって $\Omega^+/\operatorname{Im} d^+ \cong \mathcal{H}^+$ となる． □

$\mathcal{H}^-$ を反自己双対 2 次調和微分形式全体のなすベクトル空間とし

$$b^{\pm} = \dim \mathcal{H}^{\pm}$$

とおく．このとき複体 (4.16) の指数は

$$\text{index} = b^0 - b^1 + b^+ \tag{4.17}$$

により与えられる．これを特性類を用いて表したい．

$$\sigma(X) := b^+ - b^- \tag{4.18}$$

を**符号数**といい

$$\sigma(X) = \frac{1}{3}\langle p_1(X), [X]\rangle$$

により計算されることが知られている．(もっと一般に，$4k$ 次元多様体の $2k$ 次元ホモロジーの交点形式の，正の固有値の個数 − 負の固有値の個数を符号数といい，これはポントリャーギン類の多項式で表される L 多項式というもので基本ホモロジー類 $[X]$ の値を取ったものに等しい（F. ヒルツェブルフ（Hirzebruch）の定理)．($k=1$ の場合の L 多項式が $\frac{1}{3}p_1$ である.）X のオイラー数を χ により表すと

$$\chi = b^0 - b^1 + b^2 - b^3 + b^4 = 2 - 2b^1 + b^+ + b^- \tag{4.19}$$

である．よって (4.17)〜(4.19) により複体 (4.16) の指数は

$$\text{index} = \frac{\chi + \sigma}{2} \tag{4.20}$$

である．

例 4.2.10 *Spin*^{c} 多様体のディラク作用素

$$0 \ \to\ \Gamma(S_c^+) \xrightarrow{D_A} \Gamma(S_c^-) \ \to\ 0 \tag{4.21}$$

は楕円型複体をなすことを見よう．この場合主表象が同型を誘導することを示せばよい．リーマン計量を用いた同型 $T^*X \cong TX$ により $\xi \in T_x^*X$ は $\xi^\sharp \in T_xX$ に対応するとする．このとき主表象は

$$\sigma_0(\xi) = i\xi^\sharp \cdot$$

により与えられる．ただし右辺は $i\xi^\sharp$ によるクリフォード積を表す．

$$(i\xi^\sharp)^2 = |\xi^\sharp|^2$$

であるから $\sigma_0(\xi)$ は $\xi \neq 0$ に対し同型である．よって (4.21) は楕円型複体である．

(4.21) の指数はまさにフレドホルム指数であり，核の次元マイナス余核の次元である．アティヤ・シンガー指数定理によればその指数は

$$\mathrm{index} = \left(e^{\frac{1}{2}c_1(L)}\widehat{A}(X)\right)[X] \tag{4.22}$$

により与えられる（[27] p.399，または [18] 8.3 節参照）．ここに $\widehat{A}$ はポントリャーギン類の多項式である．また L は $Spin^c$ 構造の行列式直線束である．4 次元の場合 (4.22) の右辺の特性類は

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{2}c_1(L)+\frac{1}{8}c_1^2(L)\right)\left(1-\frac{1}{24}p_1(X)\right)[X] &= \left(\frac{1}{8}c_1^2(L)-\frac{1}{24}p_1(X)\right)[X] \\ &= \frac{1}{8}c_1^2(L)-\frac{\sigma}{8} \end{aligned}\tag{4.23}$$

と計算される．ただし左辺は 4 次元コホモロジーの部分だけを $[X]$ で値を取るという意味である．

さてサイバーグ・ウィッテンモデュライ空間の接空間を記述する複体 (4.6) の主表象のなす列は (4.16) と (4.21) の主表象のなす完全系列を組み合わせたものに他ならない．よって (4.6) の主表象も完全系列をなし，(4.6) は楕円型複体になる．0 次の項を摂動しても指数は変わらないので，(4.6) の指数は

$$\begin{aligned}(4.16)\text{ の指数} - 2\times(4.21)\text{ の指数} &= \frac{\chi+\sigma}{2} - \frac{1}{4}(c_1^2(L)-\sigma) \\ &= -\frac{1}{4}c_1^2(L) + \frac{2\chi+2\sigma}{4}\end{aligned}\tag{4.24}$$

となる．(4.21) の指数に 2 倍がつくのは，ここでは実次元を計算しており，(4.22) の指数は複素ベクトル空間としての次元であるからである．

定義 4.2.11　サイバーグ・ウィッテンモデュライ空間の接空間を記述する複体 (4.6) に対し，$h^i = \dim H^i$ とおき，

$$d(L) = h^1 - h^0 - h^2 = \left(\frac{1}{4}c_1^2(L) - \frac{2\chi+3\sigma}{4}\right)[X]$$

を**形式的次元**と呼ぶ．

もちろん $h^0 = h^2 = 0$ ならば $d(L)$ が実際モデュライ空間の次元である．以上の議論は摂動サイバーグ・ウィッテン方程式 (4.11) にも有効である．以上で（ア）の説明を終わる．

（イ）の説明

これらの簡潔かつ厳密な証明は [25] の 6.2 節および 6.5 節にもある．ここで扱っている無限次元の場合は，有限次元多様体の場合によく知られていることの無限次元へのアナロジーであるので，本書では有限次元の設定で説明を与えてアイデアを理解してもらうことにする．

定義 4.2.12　$f : P \to Q$ を有限次元多様体 P，Q の間の滑らかな写像とする．

(1) $x \in P$ が f の**正則点**であるとは，$df_x : T_xP \to T_{f(x)}Q$ が全射であるときをいう．
(2) $y \in Q$ が f の**正則値**であるとは，任意の $x \in f^{-1}(y)$ が f の正則点であるときをいう．

$f^{-1}(y) = \emptyset$ のときは y は正則値であることに注意しよう．

定理 4.2.13（サード（Sard）の定理）　$f : P \to Q$ を有限次元多様体の間の滑らかな写像とする．

(1) 任意の $x \in P$ に対し次のような開近傍 $U \subset P$ が存在する：$f|_U : U \to Q$ の正則値全体のなす集合は Q において稠密な開集合である．
(2) $f : P \to Q$ の正則値全体のなす集合は，高々可算無限個の稠密な開集合の共通部分として表される．よって特に，正則値全体は稠密な部分集合である．

この定理は通常の多様体論の範疇に属するので証明は省略する．例えば [23] を見よ．

命題 4.2.14　P，Q は連結と仮定する．y_0，y_1 が $f : P \to Q$ の正則値のとき，次をみたす曲線 $\gamma : [0,1] \to Q$ が存在する：$\gamma(0) = y_0$，$\gamma(1) = y_1$ であり，

$$W_\gamma := \{(x,t) \in P \times [0,1] \mid f(x) = \gamma(t)\}$$

は滑らかな $(p-q+1)$ 次元境界付き多様体である．ただし $p = \dim P$，$q = \dim Q$ とする．

証明をする前に次のことを注意しよう．W_γ は自然に P に写像され，$f^{-1}(y_0)$ と $f^{-1}(y_1)$ のボルディズムを与える．特に $H_{p-q}(P, \mathbb{Z})$ において $[f^{-1}(y_0)]$ と $[f^{-1}(y_1)]$ はホモロガスである．

証明　写像 $f : P \to Q$ と 3 つ目の多様体 R に対し，滑らかな写像 $h : R \to Q$

が f に**横断的**であるとは，$f(p)=h(r)$ となる任意の $(p,r)\in P\times R$ に対し

$$T_{f(p)}Q=\mathrm{Im}(df)_p+\mathrm{Im}(dh)_r$$

となるときをいう．

特に，$\dim P+\dim R<\dim Q$ のときは，h が f に横断的であるための必要十分条件は $\mathrm{Im}\, f\cap\mathrm{Im}\, h=\emptyset$ であることである．

$h:R\to Q$ が $f:P\to Q$ に横断的のとき

$$Z=\{(p,r)\in P\times R\mid f(p)=h(q)\}$$

は余次元 $\dim Q$ の部分多様体になる．これは陰関数定理から明らかである．

よって $f:P\to Q$ に対し横断的な $\gamma:[0,1]\to Q$ が取れることを示せば命題の証明は終わる．以下，γ を勝手に与え，γ を摂動すれば横断的な γ が得られることを示そう．実際，$[0,1]$ でなく一般次元の多様体 R からの写像 $h:R\to Q$ に対し示そう．

$f:P\to Q$，$h:R\to Q$ が与えられたとする．$\underline{h}:R\times S\to Q$ は次をみたすとする：

(i) $h_s(r)=\underline{h}(r,s)$ とおくとある $s_0\in S$ に対し $h_{s_0}=h$.
(ii) $\underline{h}$ は f に横断的.
(iii) 閉集合 $G\subset R$ 上で既に横断的なら $(r,s)\in G\times S$ に対し $\underline{h}(r,s)=h(r)$.

このとき上の段落により

$$\underline{Z}=\{(p,r,s)\in P\times R\times S\mid f(p)=\underline{h}(r,s)\}$$

は滑らかな部分多様体になる．このとき

主張 4.2.15 $\pi:\underline{Z}\to S$ を射影とするとき，もし $s\in S$ が π の正則値であるならば $h_s:R\to Q$ は f に横断的である．

［証明］ p^i，r^j，s^k をそれぞれ P，R，S の局所座標とし，$\underline{Z}$ の接ベクトルを

$$T_{(p,r,s)}\underline{Z}\ni\xi+\eta+\tau=\sum\xi^i\frac{\partial}{\partial p^i}+\sum\eta^j\frac{\partial}{\partial r^j}+\sum\tau^k\frac{\partial}{\partial s^k}$$

と表すと

$$f_*(\xi)=\underline{h}_*(\eta)+\underline{h}_*(\tau),$$
$$\pi_*(\xi+\eta+\tau)=\tau$$

である．このとき π_* が点 (p,r,s) において全射であるということは，任意の $\tau\in T_sS$ に対し，

$$\underline{h}_*\tau=f_*\xi-\underline{h}_*\eta$$

をみたす $\xi \in T_pP$，$\eta \in T_rR$ が存在することを意味する．

今，仮定 (ii) により $\underline{h}$ は f に横断的であるから任意の $\lambda \in T_qQ$ に対し

$$\lambda = f_*\xi' - \underline{h}_*\eta' - \underline{h}_*\tau'$$

をみたす $\xi' + \eta' + \tau' \in T_{(p,r,s)}P \times R \times S$ が存在する．更に $s \in S$ が π の正則値であること，すなわち π_* が全射であることから

$$\underline{h}_*\tau' = f_*\xi - \underline{h}_*\eta$$

をみたす ξ，η が存在する．よって

$$\lambda = f_*(\xi' - \xi) - \underline{h}_*(\eta' - \eta) = f_*(\xi' - \xi) - \underline{h}_{s*}(\eta' - \eta)$$

を得る．よって h_s は f に横断的である．よって主張は示された．■

もちろん $h_{s_0} = h$ が f に横断的でないなら s_0 は π の正則値ではない．しかしサードの定理により s_0 の十分近くに π の正則値が存在し，その s に対し h_s は f に横断的である．以上により，(i)，(ii)，(iii) をみたす $\underline{h}$ を見つけることができれば命題の証明は終わる．

簡単のため R はコンパクトとする．(我々の必要な場合は $R = [0,1]$ でありコンパクトである．) 開球 B_i，$i \in I$，による Q の開被覆を取る．R のコンパクト性により次をみたす有限開被覆 $\{R_n \mid 1 \le n \le N\}$ が存在する：各 n に対し $h(\overline{R_n}) \subset \frac{1}{2}B_{i(n)}$ をみたす $i(n)$ が存在する．

更に $\overline{R_n'} \subset R_n$ をみたす開被覆 $\{R_n' \mid 1 \le n \le N\}$ を取り，R の滑らかな関数 ψ_n を

$$\psi_n = \begin{cases} 1 & R_n' \text{ 上} \\ 0 & R_n \text{ の外で} \end{cases}$$

と取る．$S_1 = \frac{1}{2}B_{i(1)}$ とし $\underline{h}_1 : R \times S_1 \to Q$ を

$$\underline{h}_1(r, s_1) = \begin{cases} h(r) + \psi_1(r)s_1 & r \in R_1 \text{ のとき} \\ h(r) & r \notin R_1 \end{cases}$$

とおく．ただし $+$ は $B_{i(n)}$ における和である．$\underline{h}_1$ は $R_1' \times \frac{1}{2}B_{i(1)}$ 上 f と横断的である．以下帰納的に

$$\underline{h}_n : R \times \epsilon_1 B_1 \times \cdots \times \epsilon_n B_n \to Q$$

と $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n > 0$ で次の条件

(1_n) $\underline{h}_n|_{(R_1 \cup \cdots \cup R_n) \times \epsilon_1 B_1 \times \cdots \times \epsilon_n B_n}$ は f と横断的，
(2_n) $\underline{h}_n(\overline{R_{n+1}} \times \epsilon_1 B_1 \times \cdots \times \epsilon_n B_n) \subset \frac{1}{2}B_{i(n+1)}$

をみたすものが存在したとき，

$$\underline{h}_{n+1} : R \times \epsilon_1 B_1 \times \cdots \times \epsilon_{n+1} B_{n+1} \to Q$$

を

$$\underline{h}_{n+1}(r, s_1, \cdots, s_n, s_{n+1}) = \begin{cases} \underline{h}_n(r, s_1, \cdots, s_n) + \psi_{n+1}(r) s_{n+1} & r \in R_{n+1} \text{ のとき} \\ \underline{h}_n(r, s_1, \cdots, s_n) & r \notin R_{n+1} \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すると，必要なら $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n > 0$ を十分小さく取り替え，$\epsilon_{n+1} > 0$ を十分小さくとると $\underline{h}_{n+1}$ は (1_{n+1})，(2_{n+1}) をみたす．この操作を N 回繰り返すと $\underline{h}_N : R \times \epsilon_1 B_1 \times \cdots \times \epsilon_N B_N \to Q$ は f と横断的である．ここまでは条件 (iii) については考慮しなかったが，条件 (iii) をみたすように構成できることを見るのは容易である．これにより命題の証明を終わる．なおこの証明は [12] を参考にした． □

次に無限次元のサードの定理であるところのサード・スメイル（Sard–Smale）の定理の説明に移る．P，Q をバナハ多様体，$f : P \to Q$ を滑らかなフレドホルム写像とする．この意味は f の微分 $df_x : T_x P \to T_{f(x)} Q$ がフレドホルム写像である，つまり df_x の核と余核が有限次元であるということである．このときフレドホルム指数

$$\operatorname{ind} df_x = \dim \operatorname{Ker} df_x - \dim \operatorname{Coker} df_x$$

は x によらず一定である．何故ならフレドホルム指数はフレドホルム写像全体の空間の連結成分上で一定であるからである．$T_x P$ と $T_{f(x)} Q$ の直和分解

$$T_x P = U \oplus F, \qquad T_{f(x)} Q = V \oplus G$$

を $L := df_x|_U : U \to V$ は同型，F，G は有限次元線形部分空間で $\operatorname{ind} df_x = \dim F - \dim G$ となるように取る．逆関数定理を用いると $x \in P$ の近傍 P' の局所座標 ξ，η と $f(x)$ の近傍の局所座標を上の分解に関し

$$f(\xi, \eta) = (\xi, \alpha(\xi, \eta))$$

となるように取ることができる．このとき $(\zeta, \theta) \in Q$ が $f|_Q$ の正則値であるための必要十分条件は θ が $f_\zeta := \alpha|_\zeta \times F : \zeta \times F \to G$ の正則値であることである．よって有限次元のサードの定理により P' を十分小さく取り直すと $f|_{P'}$ の正則値の全体は Q の稠密な開集合になる．P の可算開被覆を取りベール（Baire）のカテゴリー定理を用いると次のサード・スメイルの定理が得られる．

定理 4.2.16（サード・スメイルの定理）　$f : P \to Q$ をパラコンパクトなバナハ多様体 P，Q の間の滑らかなフレドホルム写像とすると，f の正則値全体の集合は Q において稠密である．

陰関数定理，横断性定理も有限次元の場合と同様な証明により成立する．

定理 4.2.17（陰関数定理）　$f : P \to Q$ を前定理の通りとする．P が連結のとき正則値 $y \in Q$ に対し f^{-1} は $\mathrm{ind}(f)$ 次元の滑らかな部分多様体である．

定理 4.2.18（フレドホルム横断性定理）　$f : P \to Q$ を滑らかなフレドホルム写像，$h : R \to Q$ を有限次元多様体 R からの滑らかな写像とする．このとき h に十分近い $h' : R \to Q$ で f に横断的なものが存在する．もし h がある閉集合 $G \subset R$ 上既に横断的であれば G 上 $h' = h$ となるように取ることができる．

さて，ここから再び摂動方程式 (4.11) に戻ろう．$\delta \in \Gamma(i\wedge^+) = i\Omega^+$ に対し (4.11) の既約解のモデュライ空間を $\mathcal{M}^*_\delta$ により表し，

$$\mathcal{M}^*_\Delta := \bigcup_{\delta \in i\Omega^+} \mathcal{M}^*_\delta$$

と置くのであった．繰り返しになるが（イ）の主張は次の定理にまとめられる．

定理 4.2.19　(1) $\mathcal{M}^*_\Delta$ は滑らかな多様体である．

(2) 射影 $\pi : \mathcal{M}^*_\Delta \to i\Omega^+$ は指数

$$d(L) = \frac{1}{4}(c_1^2(L) - (2\chi + 3\sigma))$$

のフレドホルム写像である．ここに χ はオイラー数，σ は符号数である．

(3) π の正則点全体は $i\Omega^+$ において稠密であり，正則点 δ に対し $\mathcal{M}^*_\delta$ は $d(L)$ 次元の滑らかな多様体である．$\big((\mathcal{A}(P) \times \Gamma(S_c^+))/\mathcal{G}\big) \times i\Omega^+$ におけるボルディズム類 $[\mathcal{M}^*_\delta]$ は δ によらない．

証明　**(1) の証明**　(A, ψ) を (4.11) に対する既約解，すなわち $\psi \neq 0$，とする．(4.12) により与えられる写像 $F : \mathcal{A}(P_{S^1}) \times \Gamma(S_c^+) \times i\Omega^+ \to i\Omega^+ \times \Gamma(S_c^-)$ の (A, ψ, δ) における微分

$$DF_{(A,\psi,\delta)} : i\Omega^1 \times \Gamma(S_c^+) \times i\Omega^+ \to i\Omega^+ \times \Gamma(S_c^+)$$

は $(a, \phi, \epsilon) \in i\Omega^1 \times \Gamma(S_c^+) \times i\Omega^+$ に対し

$$DF_{(A,\psi,\delta)}(a, \phi, \epsilon) = \Big(d^+ a + \epsilon - Dq_\psi(\phi),\ D_A\phi + \frac{a}{2}\psi\Big) \qquad (4.25)$$

により与えられる．これが全射であることを示せば 0 は F の正則値であるか

ら，既約解の全体 Sol^* は滑らかな多様体になる．(厳密には，ここで設定している無限次元多様体はバナハ多様体ではないので，適当なソボレフ空間を設定して議論しなければならないが，この議論は幾分形式的になるのでここでは省略する．) ゲージ群 $\mathcal{G}$ は Sol^* に自由に作用するので $\mathcal{M}_\Delta^*$ は滑らかな多様体になる．以下 $DF_{(A,\psi,\delta)}$ が全射であることを示す．

$DF_{(A,\psi,\delta)}$ の像に直交する $(\kappa,\tau)\in i\Omega^+\times\Gamma(S_c^+)$ は $(0,0)$ しかないことを示せば $DF_{(A,\psi,\delta)}$ の全射性が言える．まず任意の $\epsilon\in\Omega^+$ に対し

$$\big(DF_{(A,\psi,\delta)}(0,0,\epsilon),(\kappa,\tau)\big)_{L^2}=(\epsilon,\kappa)_{L^2}=0$$

であるから $\kappa=0$ である．次に任意の $a\in i\Omega^1$ に対し

$$\big(DF_{(A,\psi,\delta)}(a,0,0),(0,\tau)\big)_{L^2}=\left(\frac{a}{2}\psi,\tau\right)_{L^2}=\left(\psi,\frac{a}{2}\tau\right)_{L^2}=0$$

である．τ の台 $\operatorname{supp}\tau$ において $\psi=0$ でなければならないが ψ は楕円型方程式 $D_A\psi=0$ の解であるので，もし空でない開集合上で 0 なら X 全体で 0 でなければならない．よって $\operatorname{supp}\tau=\emptyset$，すなわち $\tau\equiv 0$ となる．以上により (1) の証明を終わる．

(2) の証明　$\mathcal{M}_\delta$ の次元の計算は複体 (4.6) の指数の -1 倍として計算されることは（ア）で述べた通りである．しかし，ここではモデュライ空間を多様体としてとらえる必要があり，ゲージ群の軌道空間としての多様体の構造を考えなければならない．このような構造を入れる方法は**スライス**というものを導入するやり方である．この方法によると (4.6) の長さ 2 の複体

$$0\to\Omega^0\to\Omega^1\to\Omega^+\to 0$$

でなく長さ 1 の複体

$$0\to\Omega^1\xrightarrow{d^++d^*}\Omega^+\oplus\Omega^0\to 0$$

の指数が自然に現れる．d^* の余核と核はそれぞれ d の核と余核に同型であることを用いると両方の複体の指数は -1 倍しか違わないことがわかる．

さて，実際にスライスを導入しよう．$[(A,\psi,\delta)]\in\mathcal{M}_\Delta^*$ に対し (A,ψ,δ) のゲージ群 $\mathcal{G}$ の作用の軌道は

$$\{(A-\det\sigma^{-1}d(\det\sigma),\sigma\psi,\delta)\mid\sigma\in\mathcal{G}\}$$

により与えられる．よって $\mathcal{M}_\Delta^*$ における $[(A,\psi,\delta)]$ のまわりの座標近傍として $\mathcal{A}(P_{S^1})\times\Gamma(S_c^+)\times i\Omega^+$ における $\mathcal{G}$ 軌道に直交する切り口（スライス）を取る．これは

$$\begin{aligned}U=\{(a,\phi,\epsilon)\in\operatorname{Ker}DF_{(A,\psi,\delta)}\mid\|a\|^2+\|\phi\|^2+\|\epsilon\|^2<\varepsilon,\\((a,\phi,\epsilon),(idu,iu\psi,0))_{L^2}=0,\ \forall u\in C^\infty(X)\}\end{aligned}$$

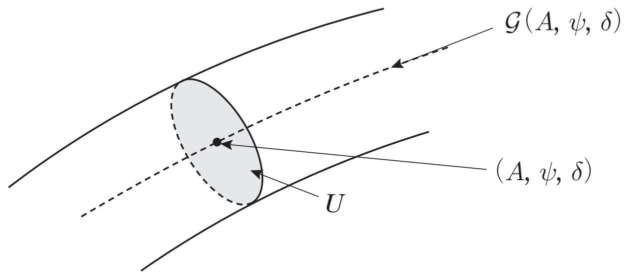


図 4.2

と微分同相であるので U を座標近傍とすることができる.(図 4.2.) ここで 2 番目の条件は

$$
\begin{aligned}
((a,\phi,\epsilon),(idu,iu\psi,0))_{L^2} &= (d^*a,iu)_{L^2} + (\phi,iu\psi)_{L^2} \\
&= 0 \quad \forall u \in C^\infty(X)
\end{aligned}
$$

であるから

$$d^*a + \psi^*\phi = 0, \quad \text{ただし } \psi^*\phi = (\phi,\psi) \tag{4.26}$$

と同じである．また条件 $(a,\phi,\epsilon) \in \operatorname{Ker} DF_{(A,\psi,\delta)}$ は (4.25) より

$$d^+a + \epsilon - Dq_\psi(\phi) = 0, \tag{4.27}$$

$$D_A\phi + \frac{a}{2}\psi = 0 \tag{4.28}$$

と同値である．よって U は

$$U = \{(a,\phi) \in i\Omega^1 \oplus \Gamma(S_c^+) \mid (4.26)\sim(4.28) \text{ をみたす} \}$$

と表現され，$d\pi_{[(A,\psi,\delta)]}$ は

$$d\pi_{[(A,\psi,\delta)]}(a,\phi) = \epsilon = -d^+a + Dq_\psi(\phi) \tag{4.29}$$

により表現される．よって $\pi : \mathcal{M}_\Delta^* \to i\Omega^+$ のフレドホルム指数は

$$V = \{(a,\phi,0) \in i\Omega^1 \times \Gamma(S_c^+) \times i\Omega^+ \mid \|a\|^2 + \|\phi\|^2 < \varepsilon\}$$

上の $DF_{(A,\psi\delta)} \oplus (d^* + \psi^*)$ の指数と一致する．この微分作用素 $DF_{(A,\psi,\delta)} \oplus (d^* + \psi^*)$ は 0 次の項を無視すると

$$D_A + d^+ + d^* : V \to \Gamma(S_c^- \times i\wedge^+ \times i\wedge^0), \tag{4.30}$$

$$(D_A + d^+ + d^*)(a,\phi,0) = (D_A\phi, d^+a, d^*a)$$

となる．よってこれの指数は

$$
\begin{aligned}
&2\operatorname{index}(D_A) + \operatorname{index}(d^+ + d^* : \Omega^1 \to \Omega^0 \oplus \Omega^+) \\
&\quad = \frac{1}{4}(c_1^2(L) - \sigma) - \frac{1}{2}(\chi + \sigma) = d(L)
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

となる．よって (2) が示された．

(3) の証明　サード・スメールの定理により正則値全体の集合は稠密であり，またフレドホルム写像の陰関数定理により正則点の逆像は滑らかな部分多様体でその次元は指数に等しい．また横断性定理によりボルディズム類は正則点の取り方によらない．□

（ウ）の説明

非摂動方程式の場合の説明としては補足することはない．ここでは摂動方程式を考える．一つ一つの δ に対し領域構造を考えるのでなくパラメーター付きモデュライ空間 $\mathcal{M}_\Delta$ の領域構造をどう定義するかを論じよう．

補題 4.2.1 によりゲージ群 $\mathcal{G}$ の作用による固定部分群が自明であること，$\psi \neq 0$ であることは同値であり，このとき接空間を記述する複体 (4.6) において $H^0 = 0$ であるのであった．また $\psi \neq 0$ なる解を既約解というのであった．リーマン計量の全体を Met により表そう．ここでやりたいことは既約解でない解をもつ組 $(\delta, g) \in \Omega^+ \times Met$ 全体は $\Omega^+ \times Met$ の壁をなすが，これをどう記述するかである．ここでは上述の（ウ）の記述とは異なるものを与えたい．リーマン計量 g に対し $\mathcal{H}(g)$ を自己双対閉微分形式（このようなものは必然的に調和形式である）で代表される 2 次元ド･ラームコホモロジー群の線形部分空間とし，$c_1^+(g)$ を $c_1(L)$ の $\mathcal{H}^+(g)$ への直交射影とする．$\psi = 0$ とすると

$$F_A^+ + \delta = 0 \tag{4.32}$$

である．

補題 4.2.20　g をリーマン計量とする．$\delta \in i\Omega^+$ に対し δ の調和部分 $-i\delta_H$ がド･ラームコホモロジーにおいて $2\pi c_1^+(g)$ を代表しないならば摂動方程式の任意の解は既約である．

証明　もし $\psi = 0$ ならば $\delta = -F_A^+$ である．よって

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi}(F_A)\right] = \left[-\frac{i}{2\pi}\delta + F_A^-\right],$$

すなわち，$c_1^+(L) = [-\frac{i}{2\pi}\delta_H]$ である．□

上の証明において，一般に α が閉形式でも α^+ は閉形式とは限らないことに注意せよ．特に F_A は閉形式であるが F_A^+ は閉形式とは限らない．

定義 4.2.21　(1) 補題 4.2.20 の仮定がみたされるとき (g, δ) を有効な組ということにする．

(2) 有効な組の弧状連結成分を領域（**chamber**）という．

補題 4.2.22　$b^+ > 1$ ならただ 1 つの領域しかない．$b^+ = 1$ ならちょうど 2 つの領域からなる．

証明　リーマン計量全体の空間 Met を底空間とし，その計量に関する自己双対閉形式で代表されるもの全体のなす 2 次元ド･ラームコホモロジー群の線形部分空間 $\mathcal{H}^+(g)$ をファイバーとするベクトル束を $\mu : H^+ \to Met$ とする．$\lambda : Met \times \Omega^+ \to H^+$ を $\lambda(g,\delta) = [\delta_H]$ とする．

$$c_1^+ := \{c_1^+(g) \mid g \in Met\}$$

は H^+ の切断を与える．(g,δ) が有効な組であるための必要十分条件は

$$\lambda(g,\delta) \neq 2\pi c_1^+(g)$$

であることである．$\lambda^{-1}(H^+ - 2\pi c_1^+)$ の弧状連結成分は $b^+ > 1$ なら 1 つ，$b^+ = 1$ なら 2 つである．　□

補題 4.2.23　$b^+ = 1$，$c_1(L) \neq 0$，$c_1^2(L) \geq 0$ なら $(g,0)$ は任意の g に対し有効な組である．

証明　背理法による．もし $(g,0)$ が有効な組でないなら $c_1^+ = 0$ となる．よって $c_1 = c_1^- \neq 0$ となり $c_1^2 = (c_1^-)^2 < 0$ であるから矛盾である．　□

（ウ）の説明を終わる前に,（イ）と（ウ）は同時にやらなければならないことに注意しよう．このことは（イ）のステップにおいて $\delta \in \Omega^+$ をパラメーターとするモデュライ空間の族 $\mathcal{M}^*_\Delta$ を考えたが，実際は $(\delta,g) \in i\Omega^+ \times Met$ をパラメーターとするモデュライ空間（$\mathcal{M}^*_{\Delta\times Met}$ と表す）を考えなければならないことを意味する．しかし，定理 4.2.19 と同様に次が成り立つ．

定理 4.2.24　(1) $\mathcal{M}^*_{\Delta\times Met}$ は滑らかな多様体である．

(2) 射影 $\pi : \mathcal{M}^*_{i\Delta\times Met} \to i\Omega^+ \times Met$ は指数

$$d(L) = \frac{1}{4}\bigl(c_1^2(L) - (2\chi + 3\sigma)\bigr)$$

のフレドホルム写像である．ここに χ はオイラー数，σ は符号数である．

(3) π の正則点全体は $i\Omega^+ \times Met$ において稠密であり，正則点 (δ,g) に対し $\mathcal{M}^*_{(\delta,g)}$ は $d(L)$ 次元の滑らかな多様体である．$\bigl((\mathcal{A}(P) \times \Gamma(S_c^+))/\mathcal{G}\bigr) \times i\Omega^+$ におけるボルディズム類 $[\mathcal{M}^*_{(\delta,g)}]$ は (δ,g) の属する領域にしかよらない．

4.3 Vanishing theorem とコンパクト性

摂動サイバーグ・ウィッテン方程式 (4.11)

$$\begin{cases} D_A\psi = 0 \\ \mu(F_A^+ + \delta) = (\psi\psi^*)_0 \end{cases}$$

の解 ψ にリヒネロウィッツの公式（定理 3.2.7）を適用する：

$$D_A^* D_A\psi = \nabla_A^*\nabla_A\psi + \frac{s}{4}\psi + \frac{1}{2}\mu(F_A^+)\psi.$$

ここでは少し記号を変えて，s はスカラー曲率 $s = \sum_{i,j}(R_{\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$ であり（R はレビ･チビタ接続の曲率テンソル），μ はクリフォード積による作用を表す．また共変微分 ∇_A もディラク作用素 D_A も行列式直線束の接続 A に依存することを明示するように添字 A をつけてある．

補題 4.3.1 摂動サイバーグ・ウィッテン方程式 (4.11) の解 (A, ψ) に対し，

$$|\psi|^2 \leq \max\{0, -s + 2|\mu(\delta)|\}$$

が成り立つ．

証明 $|\psi|$ が最大値を取る点において

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta|\psi|^2 &= \nabla_A^*\nabla_A(\psi,\psi) = 2(\nabla_A^*\nabla_A\psi,\psi) - 2(\nabla_A\psi,\nabla_A\psi) \\ &\leq 2(\nabla_A^*\nabla_A\psi,\psi) = 2\left(-\frac{s}{4}\psi - \frac{1}{2}(\psi\psi^*)_0\psi + \frac{1}{2}\mu(\delta)\psi,\ \psi\right) \end{aligned}$$

となる．一方

$$((\psi\psi^*)_0\psi,\psi) = \frac{|\psi|^4}{2}$$

であるので，$|\psi|$ が最大値を取る点において

$$|\psi|^4 \leq -s|\psi|^2 + 2|\mu(\delta)|\,|\psi|^2$$

を得る．よって $\psi \neq 0$ なるところで

$$|\psi|^2 \leq -s + 2|\mu(\delta)|$$

が成立する． □

定理 4.3.2 X をコンパクト，向き付け可能，連結 4 次元リーマン多様体とし，スカラー曲率（これは X 上の C^∞ 級関数である）が至る所正であるとする．このとき十分小なる generic な δ に対し (g, δ) の属する領域のサイバーグ・ウィッテン不変量 $SW(P_{Spin^c(n)}, [g,\delta])$ は 0 である．

証明　補題 4.3.1 より十分小なる δ に対し $\psi = 0$ でなければならない．しかし generic な (g, δ) に対し既約解しか持たないので $\mathcal{M}$ は空集合でなければならない．(g の十分小さい摂動に対し $s > 0$ は保たれることにも注意せよ．)　□

次の目標であるサイバーグ・ウィッテンモデュライ空間のコンパクト性を示すために，線形楕円型偏微分方程式論からの準備をしよう．

$E \to X$ をコンパクト n 次元多様体 X 上のベクトル束とする．X はリーマン計量，E はファイバー計量および線形接続 D を持つものとし，体積要素 dv や内積，ノルムなどはそれらの計量に関するものとする．$f \in \Gamma(E)$ に対し

$$\|f\|_{L^p_k} = \left(\int_X \sum_{0 \le j \le k} |D^j f|^p dv \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおき**ソボレフ（Sobolev）ノルム**と呼ぶ．このノルムによる $\Gamma(E)$ の完備化（すなわち $\Gamma(E)$ を含む最小の完備な距離空間）を $L^p_k(E)$ により表し**ソボレフ空間**という．ソボレフ空間はもちろんバナハ（Banach）空間になる[*3]．C^l 級切断全体の空間 $C^l(E)$ は

$$\|f\|_{C^l} = \sum_{0 \le j \le l} \sup_{x \in X} |D^j f|(x)$$

によりバナハ空間になる．$k - \frac{n}{p} > l$ のとき連続かつコンパクトな埋め込み $L^p_k(E) \to C^l(E)$ が存在する．ここに埋め込みがコンパクトであるとは $L^p_k(E)$ の有界列は $C^l(E)$ において収束する部分列を含むということである（**ソボレフの埋め込み定理**）．また自然な埋め込み $L^p_{k+1}(E) \to L^p_k(E)$ もコンパクトである（レリッヒ（Rellich）の補題）．$F \to X$ をもう一つのベクトル束とする．l 階偏微分作用素 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ はその主表象が同型であるとき**楕円型**であるという．楕円型偏微分作用素 P に対し，ある定数 C が存在し任意の $f \in L^p_{k+l}(E)$ に対し

$$\|f\|_{L^p_{k+l}} \le C(\|Pf\|_{L^p_k} + \|f\|_{L^p}) \tag{4.33}$$

が成立する．以上の基本事項については [2] を参照せよ．次の補題もよく知られている．

補題 4.3.3　ある定数 C が存在して $\operatorname{Ker} P$ に直交する任意の f に対して

$$\|f\|_{L^p_{k+l}} \le C\|Pf\|_{L^p_k}$$

が成立する．

---

*3）　完備なノルム空間をバナハ空間という．

証明　定数はすべて C により表すことにする．(4.33) より

$$\|f\|_{L^p} \leq C\|Pf\|_{L^p_k}$$

を証明すればよい．背理法による．もしそうでないとすると $\|f_i\|_{L^p} = 1$ で $\|Pf_i\|_{L^p_k} \to 0$ となる列 f_i が存在する．(4.33) により f_i は L^p_{k+l} で有界である．レリッヒの補題により必要なら部分列を取り直して f_i は L^p において収束するとしてよい．このことと $\|Pf_i\|_{L^p_k} \to 0$ と (4.33) より f_i は L^p_{k+l} においてコーシー列をなすのでその極限を g とすると，

$$Pg = \lim_{i\to\infty} Pf_i = 0,$$

$$\|g\|_{L^p} = \lim_{t\to 0} \|f_i\|_{L^p} = 1$$

となる．一方 f_i は $\mathrm{Ker}\, P$ に直交しているのでその極限 g も $\mathrm{Ker}\, P$ に直交しなければならない．これは矛盾である．　□

定理 4.3.4　摂動サイバーグ・ウィッテンモデュライ空間 $\mathcal{M}$ はコンパクト多様体である．

証明　(Step 1)　$B \in \mathcal{A}(P_{S^1})$ を一つ固定する．$\{(A_i, \psi_i)\}$ を解の列とするときある部分列 $\{(A_{i'}, \psi_{i'})\}$ とあるゲージ群の元の列 $\sigma_{i'}$ を取ると $\{\sigma_{i'}(A_{i'}, \psi_{i'})\}$ が収束するということを示せばよい．

(Step 2)　ある $\sigma_i \in \mathcal{G}$ が存在して $B - \sigma_i(A_i) = a_i$，$d^* a_i = 0$ となる．

［証明］　$A_i = B + a_i$ とおく．ただし $a_i \in i\Omega^1$ である．$u_i \in C^\infty(M)$ に対し $\sigma_i = e^{-iu_i}$ とおくと

$$\sigma_i(A_i) = B + ia_i + idu_i$$

を得る．a_i をホッジ分解して

$$a_i = h + d\alpha + d^*\beta, \qquad h \text{ は調和形式},$$

とするとき $u_i = -\alpha$ と取ると

$$\sigma_i(A_i) - B = h + d^*\beta,$$

よって $d^*(\sigma_i(A_i) - B) = 0$ となる．■

(Step 3)　$C^\infty_0(X, S^1) = \{e^{iu} \mid u \in C^\infty(X)\}$ とおくと

$$C^\infty(X, S^1)/C^\infty(X, S^1)_0 \cong H^1(X, \mathbb{Z}).$$

［証明］　$\underline{i\mathbb{R}}$，$\underline{S^1}$ を $i\mathbb{R}$，S^1 に値を持つ X 上の C^∞ 級関数の芽の層とする．$\mathbb{Z}$ により定数層を表すとき層の完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \underline{i\mathbb{R}} \to \underline{S^1} \to 0$$

を得る．これの誘導する長完全系列

$$\to H^0(X, \underline{i\mathbb{R}}) \to H^0(X, \underline{S^1}) \to H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \underline{i\mathbb{R}})$$

において $\underline{i\mathbb{R}}$ は細層であるから $H^1(X, \underline{i\mathbb{R}}) = 0$ である．（細層（fine sheaf）については例えば [29] を見よ．）また

$$H^0(X, \underline{i\mathbb{R}}) = C^\infty(X), \qquad H^0(X, \underline{S^1}) = C^\infty(X, S^1)$$

であるから求めたい結果を得る．■

(Step 4)　$g \in C^\infty(X, S^1)$ に対し $\lambda = -idg \cdot g^{-1}$ は 1 次閉微分形式である．g に対し $\frac{[\lambda]}{2\pi}$ を対応させることにより $C^\infty(X) \to H^1(X, \mathbb{Z})$ が得られるがこれが Step 3 の同型を誘導する．このことは長完全系列の連結準同型の定義から明らかである．

(Step 5)　Step 4 を用いると，ゲージ群の元 σ_i をうまく取って $\sigma_i(A_i) - B$ の調和部分が $H^1(X, \mathbb{R})/H^1(X, \mathbb{Z})$ の基本領域の中に入るように取ることができる．特に $\sigma_i(A_i) - B$ の調和部分は任意のソボレフノルムに関し一様に有界であるとしてよい．

(Step 6)　Step 2 と Step 5 により $\det \sigma_i(A_i)$ をあらためて A_i とおくと $A_i - B = h_i + d^*\beta := a_i$ で，h_i は調和 1 次微分形式であり $\|h_i\|_{L^p_k}$ は一様に有界であると仮定してよい．方程式の第 2 式は $F^+_{A_i} = -\delta + \mu^{-1}((\psi_i\psi_i^*)_0)$ であった．$F^+_{A_i} = F^+_B + d^+a_i = F^+_B + d^+d^*\beta_i$ であり，

$$(d^+ + d^*)d^*\beta_i = d^+d^*\beta_i = -F^+_B - \delta + \mu^{-1}((\psi_i\psi_i^*)_0) \tag{4.34}$$

である．ここで $d^+ + d^*$ は楕円型である．そして大事なことは補題 4.3.1 により $|\psi_i|^2$ は i によらず有界である．よって (4.34) の右辺は任意の $p > 1$ に対し L^p に属す．すると補題 4.3.3 により $\|a_i\|_{L^p_1}$ は i によらず有界である．ソボレフの埋め込み定理により十分大なる p に対し連続埋め込み $L^p_1 \subset C^0$ が存在するから（つまりある正定数 C に対し $\|a_i\|_{C^0} \leq C\|a_i\|_{L^p_1}$ ということ）$\|a_i\|_{C^0}$ は i によらない定数により有界である．

(Step 7)　$\sigma_i\psi_i$ をあらためて ψ_i とおくと $D_{A_i}\psi_i = 0$，すなわち

$$D_B\psi_i = -a_i\psi_i$$

であり，右辺は L^p で有界である．よって $\|\psi_i\|_{L^p_1}$ も有界である．

(Step 8)　結局 (4.34) の右辺が L^p で有界なら (a_i, ψ_i) は L^p_1 でも有界であることが示された．このことは (4.34) の右辺が L^p_1 で有界であること意味し，このことから上の議論と同様に (a_i, ψ_i) が L^p_2 でも有界であることがわかる．これを繰り返して任意の k に対し (a_i, ψ_i) が L^p_k で有界であることがわかる．ソ

ボレフの埋め込み定理により十分大なる k に対し $L_k^p \subset C^l$ であり，埋め込みはコンパクトである．すなわち部分列は C^l で収束する．さらに対角線論法を加えると C^∞ で収束する部分列が選べる． □

4.4 ケーラー曲面の場合

注意 3.1.28 により任意の概複素多様体 X は標準的 $Spin^c$ 構造を持ち，その行列式直線束は反標準束 K_X^{-1} である.（標準束 K_X は $(n, 0)$ 型の微分形式のなす直線束である.）c_1 の mod 2 簡約化を $\widetilde{c}_1$ で表すとき，よく知られている特性類の性質

$$c_1(K_X^{-1}) = c_1(TX), \qquad w_2(X) = \widetilde{c}_1(TX) \qquad \text{（[24] 参照）}$$

により $w_2(X) = \widetilde{c}_1(K_X^{-1})$ であるから，命題 3.1.25 とも合致する．

さらに X がケーラー多様体の場合は定理 3.2.3 の (1) よりスピノル束は

$$S_c^+ \cong \wedge^{0,0} \oplus \wedge^{0,2}, \qquad S_c^- \cong \wedge^{0,1} \tag{4.35}$$

と同一視され，この同一視のもとに標準的 $Spin^c$ 構造に対するディラク作用素は

$$D = \sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$$

と同一視されるのであった（定理 3.2.3 の (2)）．

以後 $\dim_{\mathbb{C}} = 2$ と仮定する．$z^j = x^j + iy^j$，$j = 1, 2$ を局所正則座標，dx^1, dy^1, dx^2, dy^2 を T^*X の正の正規直交基底とすると第 1 章の (1.3) 式より

$$\wedge_{\mathbb{C}}^+ = \mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}(dz^1 \wedge dz^2) \oplus \mathbb{C}(d\overline{z}^1 \wedge d\overline{z}^2), \tag{4.36}$$

$$\wedge_{\mathbb{C}}^- = \{\alpha \in \wedge^{1,1} \mid \alpha \perp \omega\} \tag{4.37}$$

となることがわかる．

補題 4.4.1 $\mathcal{M}$ の形式的次元 $d(K_X^{-1})$ は 0 である．

証明 定義 4.2.11 により

$$\dim \mathcal{M} = \frac{c_1(X)^2 - 2\chi - 3\sigma}{4}$$

が 0 であることを示せばよい．ここに χ は X のオイラー数であり，よって $\chi = \langle c_2(X), [X] \rangle$ である．また σ は符号数でこれは $\langle p_1(X), [X] \rangle / 3$ に等しい．p_1 の定義により

$$p_1(X) = -c_2(TX \otimes \mathbb{C}) = -c_2(T'X \oplus T''X) = c_1^2(X) - 2c_2(X)$$

である（これらの特性類についての基本性質については [24] を参照せよ）．以上を合わせると $\dim \mathcal{M} = 0$ を得る． □

同一視 $S_c^+ \cong \wedge^{0,0} \oplus \wedge^{0,2}$ のもとにサイバーグ・ウィッテン方程式が $\wedge^{0,0} \oplus \wedge^{0,2}$ に作用するどのような方程式と同一視されるかを見たい．ディラク作用素 D が $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ と同一視されることは上で述べた通りであり，これは定理 3.2.3 の証明の Step 6 で証明された．よってサイバーグ・ウィッテン方程式のうち，ディラク方程式は $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ を施して 0 になるという方程式と同一視される．もう一つの曲率方程式については，$F_A^+ + \delta$ のクリフォード積の意味を定理 3.2.3 の証明の Step 6 における同一視と同じ手続きで $\wedge^{0,0} \oplus \wedge^{0,2}$ へのどのような作用と同一視されるかを見なければならない．

そこで $\psi \in S_c^+$ をこの分解に応じて

$$\psi = (f, \phi) = \left(f,\ \phi \frac{d\overline{z}^1 \wedge d\overline{z}^2}{2}\right)$$

と書き表す．$L = K_X^{-1}$ であるから，これの接続 A は $A =$ レビ・チビタ $+ a$ の形であるとする．

補題 4.4.2 サイバーグ・ウィッテン方程式は同一視 $S_c^+ \cong \wedge^{0,0} \oplus \wedge^{0,2}$ のもとに

$$D_A\psi = 0 \ \longleftrightarrow\ \overline{\partial} f + \overline{\partial}^* \phi + \mu(a)(f, \phi) = 0 \ \longleftrightarrow\ \overline{\partial}_A f + \overline{\partial}_A^* \phi = 0,$$
$$\mu(F_A^+ + \delta) = (\psi\psi^*)_0 \ \longleftrightarrow\ F_A^+ + \delta = i\frac{|f|^2 - |\phi|^2}{4}\omega + i\,\mathrm{Im}(\bar{f}\phi)$$

と同一視される．

証明 定理 3.2.3 の (2) より第 1 式は明らかであるから，第 2 式のみ示す．$\mu(dz^1 \wedge dz^2)$ などを計算しなければならない．そのためには定理 3.2.3 の証明中の Step 6 と同じ同一視 $T^*X \cong TX \cong T'X \cong \wedge^{0,1}X$ に従い

$$dx^i \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - i\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z^i} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} d\overline{z}^i,$$
$$dy^i \mapsto \frac{\partial}{\partial y^i} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y^i} + i\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sqrt{2}\, i\frac{\partial}{\partial z^i} \mapsto \frac{i}{\sqrt{2}} d\overline{z}^i$$

として．同じクリフォード積の同一視に従い計算しなければならない．これを実行するとまず $\mu(\omega)$ は

$$\mu(\omega)\left(1,\ \frac{d\overline{z}^1 \wedge d\overline{z}^2}{2}\right) = \mu(dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2)\left(1,\ \frac{d\overline{z}^1 \wedge d\overline{z}^2}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} d\overline{z}^1 \wedge -\sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}\right)\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}} d\overline{z}^1 \wedge + \sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}\right)\right)\left(1,\ \frac{d\overline{z}^1 \wedge d\overline{z}^2}{2}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} d\overline{z}^2 \wedge -\sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^2}\right)\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}} d\overline{z}^2 \wedge + \sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^2}\right)\right)\left(1,\ \frac{d\overline{z}^1 \wedge d\overline{z}^2}{2}\right)$$

$$= \left(1,\ \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

となる．同様に

$$\mu(dz^1 \wedge dz^2) \left(1,\ \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) = \left(1,\ \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu\left(d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}\right) \left(1,\ \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) = \left(1,\ \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} &\mu(\alpha\omega + \beta\, dz^1 \wedge dz^2 + \gamma\, d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}) \left(1,\ \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) \\ &\qquad = \left(1,\ \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) \begin{pmatrix} -2i\alpha & -4\beta \\ 4\gamma & 2i\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．この最後の行列が

$$\begin{pmatrix} \frac{|f|^2 - |\phi|^2}{4} & f\overline{\phi} \\ \bar{f}\phi & \frac{-|f|^2 + |\phi|^2}{4} \end{pmatrix}$$

に等しいためには $\alpha = i\frac{|f|^2 - |\phi|^2}{4}$，$\beta = -\overline{\gamma} = -\frac{f\overline{\phi}}{4}$ でなければならない．このようにしてきまったものに $F_A^+ + \delta$ が等しいというのが方程式であるから欲しい式を得る． □

例 4.4.3　X をコンパクトケーラー曲面，s をスカラー曲率とする．

$$\delta := i(s+1)\frac{\omega}{4}, \tag{4.38}$$

$$\psi = (1, 0) \in \Omega^{0,0} \oplus \Omega^{0,2} \cong \Gamma(S_c^+), \tag{4.39}$$

$$A = K_X^{-1} \text{ のレビ·チビタ接続} \tag{4.40}$$

とおくと (A, ψ) は摂動サイバーグ・ウィッテン方程式の一意的な解になる．これは既約解であり，横断的である．

証明　解であることのみ示す．正則正規座標を用いると

$$F_A^+ = (R_{1\bar{1}}\, dz^1 \wedge d\overline{z}^{\,1} + R_{2\bar{2}}\, dz^2 \wedge d\overline{z}^{\,2})^+ = -\frac{i}{4} s\omega$$

となる．よって

$$F_A^+ + \delta = -\frac{i}{4} s\omega + i(s+1)\frac{\omega}{4} = \frac{i}{4}\omega.$$

一方 $(f, \phi) = (1, 0)$ より

$$i\frac{|f|^2-|\phi|^2}{4}\omega+i\operatorname{Im}\bar{f}\phi=\frac{i}{4}\omega$$

であるから解である． □

系 4.4.4 X をコンパクトなケーラー曲面とすると，もし $b^+>1$ ならば標準的 $Spin^c$ 構造に対しサイバーグ・ウィッテン不変量は ±1 である．また，もし $b^+=1$ ならば標準的 $Spin^c$ 構造のサイバーグ・ウィッテン不変量は少なくとも一つの領域に対し ±1 である．

系 4.4.5 X を正のスカラー曲率を持つコンパクトケーラー曲面とすると $b^+=1$ である．

実際にはもっと具体的に，このようなケーラー曲面は小平次元が $-\infty$，すなわち rational surface か ruled surface であることが知られている．

ここまではケーラー曲面の標準的 $Spin^c$ 構造を扱った．次に一般の $Spin^c$ 構造を扱う．

$\widetilde{P}$ を別の $Spin^c$ 構造とする．$L=\det\widetilde{P}$ をその行列式直線束とする．このとき $L=K_X\otimes L_0^2$ となる L_0 が存在する．

$$L_0=(L\otimes K_X)^{\frac{1}{2}}$$

と表すことにする．更に自明な直線束を $\mathcal{O}_X$ により表すと

$$S_c^+=(\wedge^{0,0}\oplus\wedge^{0,2})\otimes L_0=(\mathcal{O}_X\oplus K_X^{-1})\otimes(L\otimes K_X)^{\frac{1}{2}} \tag{4.41}$$

$$=(L\otimes K_X)^{\frac{1}{2}}\oplus(L\otimes K_X^{-1})^{\frac{1}{2}} \tag{4.42}$$

となる．この分解に対応して $\psi\in\Gamma(S_c^+)$ を $\psi=(\alpha,-i\overline{\beta})$ とおく．

$$\beta\in\Gamma\big((L\otimes K_X^{-1})^{-\frac{1}{2}}\big)=\Gamma\big((K_X\otimes L^{-1})^{\frac{1}{2}}\big)$$

であることに注意しよう．以上により摂動サイバーグ・ウィッテン方程式は

$$\begin{cases}\overline{\partial}\alpha-i\overline{\partial}^*\overline{\beta}+\mu(a)(\alpha-i\overline{\beta})=0 \;\longleftrightarrow\; \overline{\partial}_A\alpha-i\overline{\partial}_A^*\overline{\beta}=0\\ F_A^++\delta=i\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{4}\omega-i\operatorname{Re}(\alpha\beta)\end{cases}$$

となるが，更に第 2 式は

$$\begin{cases}(F_A+\delta)^{2,0}=-\frac{i}{2}\alpha\beta\\ (F_A+\delta)^{1,1}=i\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{4}\omega\\ (F_A+\delta)^{0,2}=-\frac{i}{2}\overline{\alpha}\overline{\beta}\end{cases} \tag{4.43}$$

となる．リヒネロウィッツ公式を用いると

$$\frac{1}{2}\int_X |\mu(F_A^+ + \delta) - (\psi\psi^*)_0|^2 dv + \int_X |D_A\psi|^2 dv$$
$$= \int_X \left(\frac{1}{2}|F_A^+|^2 + |\nabla_A\psi|^2 + \frac{s}{4}|\psi|^2\right) dv + \int_X F_A^+ \wedge \delta$$
$$+ \frac{1}{2}\int_X |\mu(\delta) - (\psi\psi^*)_0|^2 dv \tag{4.44}$$

を得る．ここで $\delta = 0$ の場合を考える．

$$\frac{1}{2}|(\psi\psi^*)_0|^2 = \frac{|\psi|^4}{8}, \qquad \psi = (\alpha, -i\overline{\beta})$$

であるから

$$(4.44) = \int_X \left\{\frac{1}{2}|F_A^+|^2 + |\nabla_A\alpha|^2 + |\nabla_A\beta|^2 + \frac{s}{4}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \frac{1}{8}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2\right\} dv \tag{4.45}$$

となる．$(A, \psi = (\alpha, -i\overline{\beta}))$ が解であることと (4.44) の左辺が 0 であることとは同値であるから，もちろん (4.45) の右辺が 0 であることとも同値である．一方 $\widehat{\psi} := (\alpha, i\overline{\beta})$ とおくと $(A, \widehat{\psi} = (\alpha, i\overline{\beta}))$ も (4.45) の右辺を 0 にする．よって $(A, \widehat{\psi})$ も摂動サイバーグ·ウィッテン方程式の解である．この解 $(A, \widehat{\psi} = (\alpha, i\overline{\beta}))$ に関し (4.43) を書くと（ただし $\delta = 0$）

$$\begin{cases} (F_A)^{2,0} = \frac{i}{2}\alpha\beta \\ (F_A)^{1,1} = i\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{4}\omega \\ (F_A)^{0,2} = \frac{i}{2}\overline{\alpha}\overline{\beta} \end{cases} \tag{4.46}$$

となる．(4.43) と (4.46) より $F_A^{2,0} = F_A^{0,2} = 0$ であり，$\alpha = 0$ または $\beta = 0$ となる．

$$J = 2\pi c_1(L) \cdot [\omega] = -\int_X \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{4}\omega \wedge \omega$$

とおく．

定理 4.4.6 ∇_A は L に正則構造を定め，

$$J < 0 \implies \beta = 0,\ \alpha \neq 0,\ \alpha \in H^0(X, (K \otimes L)^{\frac{1}{2}}),$$
$$J > 0 \implies \alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ \beta \in H^0(X, (K \otimes L^{-1})^{\frac{1}{2}}).$$

証明 上で見たように $\alpha\beta = 0$ であるから F_A は $(1,1)$ 型である．このような接続 A は $\overline{\partial}_A$ が $\overline{\partial}$-作用素に等しくなるような L の正則直線束の構造を定める（例えば [12] を見よ）．この正則構造に関し α，β が正則切断になることは

$$D_A\psi = 0 \iff \overline{\partial}_A\alpha = 0,\ \overline{\partial}_A\beta = 0 \tag{4.47}$$

より従う．以下にこのことを証明する．$A=$ レビ·チビタ $+a$ とし，$L^{\frac{1}{2}}$ の局所枠 $\boldsymbol{f}$ に関し[*4)]

$$a = i(\alpha_1\,dx^1 + \beta_1\,dy^1 + \alpha_2\,dx^2 + \beta_2\,dy^2)$$

と表されるとすると

$$\begin{aligned} a &= \frac{i\alpha_1 - \beta_1}{2} d\overline{z}^{\,1} + \frac{i\alpha_2 - \beta_2}{2} d\overline{z}^{\,2} + \frac{i\alpha_1 + \beta_1}{2} dz^1 + \frac{i\alpha_2 + \beta_2}{2} dz^2 \\ &= a^{0,1} - \overline{a^{0,1}} \end{aligned}$$

と表される．さてクリフォード積は定理 3.2.3 の証明の Step 6 の同一視により計算しなければならないのであった．それに従うと

$$\begin{aligned} &\mu(a)\left(1,\, \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) \\ &= \left(i\alpha_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} d\overline{z}^{\,1} \wedge -\sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^{\,1}}\right)\right) \right. \\ &\quad + i\beta_1 \left(\frac{i}{\sqrt{2}} d\overline{z}^{\,1} \wedge +i\sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^{\,1}}\right)\right) \\ &\quad + i\alpha_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} d\overline{z}^{\,2} \wedge -\sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^{\,2}}\right)\right) \\ &\quad \left. + i\beta_2 \left(\frac{i}{\sqrt{2}} d\overline{z}^{\,2} \wedge +i\sqrt{2}\,\iota\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^{\,2}}\right)\right)\right) \left(1,\, \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{i\alpha_1 - \beta_1}{\sqrt{2}} d\overline{z}^{\,1} + \frac{i\alpha_2 - \beta_2}{\sqrt{2}} d\overline{z}^{\,2},\, \frac{-i\alpha_1 - \beta_1}{\sqrt{2}} d\overline{z}^{\,2} + \frac{i\alpha_2 + \beta_2}{\sqrt{2}} d\overline{z}^{\,1} \right) \\ &= \left(\sqrt{2}\, a^{0,1},\, \frac{1}{\sqrt{2}}(i\alpha_2 + \beta_2) d\overline{z}^{\,1} - \frac{1}{\sqrt{2}}(i\alpha_1 + \beta_1) d\overline{z}^{\,2} \right) \end{aligned}$$

となる．$K^{\frac{1}{2}}$ の正則枠を $\boldsymbol{e}$ とし，

$$\alpha - i\overline{\beta} = u\,\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f} + \varphi \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2} \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f}$$

とするとディラク方程式は

$$\begin{aligned} D_A(\alpha - i\overline{\beta}) &= \sqrt{2}\,\overline{\partial} u \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f} + \sqrt{2}\,\overline{\partial}^* \left(\varphi \frac{d\overline{z}^{\,1} \wedge d\overline{z}^{\,2}}{2} \right) \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f} \\ &\quad + \sqrt{2}\, u a^{0,1} \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f} \\ &\quad + \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(i\alpha_2 + \beta_2) d\overline{z}^{\,1} - \frac{1}{\sqrt{2}}(i\alpha_1 + \beta_1) d\overline{z}^{\,2} \right) \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f} \\ &= \sqrt{2}\,\overline{\partial}_A(u\,\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f}) + \left(-\sqrt{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z^1} d\overline{z}^{\,2} + \sqrt{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z^2} d\overline{z}^{\,1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}(i\alpha_2 + \beta_2)\varphi\, d\overline{z}^{\,1} - \frac{1}{\sqrt{2}}(i\alpha_1 + \beta_1)\varphi\, d\overline{z}^{\,2} \right) \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f} \end{aligned}$$

---

*4) 話は局所的であるから $K^{\frac{1}{2}}$ も $L^{\frac{1}{2}}$ も存在するとする．

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2}\,\overline{\partial}_A(u\,\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f}) + \left(-\sqrt{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z^1}+\frac{i\alpha_1+\beta_1}{2}\varphi\right)d\overline{z}^2\right.\\
&\qquad \left. +\sqrt{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z^2}+\frac{i\alpha_2+\beta_2}{2}\varphi\right)d\overline{z}^1\right)\otimes\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

と表される．よって $D_A\psi = 0$ は

$$
\overline{\partial}_A\alpha = 0, \tag{4.48}
$$

$$
\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{z}^1} - \frac{i\alpha_1-\beta_1}{2}\overline{\varphi} = 0, \tag{4.49}
$$

$$
\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{z}^2} - \frac{i\alpha_2-\beta_2}{2}\overline{\varphi} = 0 \tag{4.50}
$$

と同値である．しかし $-a^{0,1}$ は $L^{-\frac{1}{2}}$ の接続形式であるから (4.49)，(4.50) は

$$
\overline{\partial}_A\beta = 0
$$

と同値である． □

系 4.4.7 特に $L = K_X^{-1}$，すなわち標準的 $Spin^c$ 構造 P_{can} のとき，

- $K_X^{-1}\cdot[\omega] = c_1(X)\cdot[\omega] < 0 \Longrightarrow (\alpha,\beta) = (\alpha, 0)$，
- $K_X^{-1}\cdot[\omega] > 0 \Longrightarrow SW(P_{can},[g]) = 0$.

証明 最初の主張は定理 4.4.6 より明らかである．2 番目の主張を証明しよう．もし解があるとすると $\alpha = 0$，$\beta \neq 0$ であり，$\beta \in H^0(X, K_X)$ であるが，すると $K_X\cdot[\omega] = \int_{\mathrm{div}(\beta)}\omega \geq 0$ であるから，$K_X\cdot[\omega] < 0$ に矛盾する．ただし $\mathrm{div}(\beta)$ は β の定める因子である． □

定義 4.4.8 コンパクト複素曲面 X に対し**小平次元** $\kappa(X)$ を

$$
\begin{aligned}
\kappa(X) &= \limsup_{m\to\infty}\,(\log h^0(X, \mathcal{O}(K_X^{\otimes m}))/\log m)\\
&\in \{-\infty,\ 0,\ 1,\ 2\}
\end{aligned}
$$

により定義する．

十分大なる m に対し $h^0(K_X^{\otimes m}) = m^\kappa$ であり，また自然な写像

$$
X \to \mathbb{P}H^0(X, K_X^{\otimes m})^*
$$

の像の次元でもある．極小曲面（すなわち自己交叉数が -1 の $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を持たない曲面）は κ によって次のように分類されている．

- $\kappa=-\infty$　$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$，または ruled（$\mathbb{P}^1$ 束）．この場合 $b^+=1$ である．正のスカラー曲率のケーラー計量が存在するので一つの領域に対してはサイバーグ・ウィッテン不変量は 0 である．
- $\kappa=0$　**$K3$ 曲面，複素トーラス**．$b^+=3$.
- $\kappa=1$　**楕円曲面**．$SW(\widetilde{P})\neq 0 \iff L=rK_X^{\pm}$, $|r|\leq 1$.
- $\kappa=2$　**一般型**．$SW(\widetilde{P})\neq 0 \iff L=K_X^{\pm}$.

$Spin^c$ 構造 $\widetilde{P}$ の行列式直線束を L とするとき，補題 4.4.1 と同じ計算により，形式的次元は $L\cdot L-K\cdot K$ であるから，考慮すべき場合は $L\cdot L\geq K\cdot K$ である．$\kappa=1$，2 の場合 $K\cdot K\geq 0$ であるから $L\cdot L\geq 0$ であり，領域は一つである．$\kappa=1$，2 の場合の $SW(\widetilde{P})$ の計算は [25] にある．[25] には $K3$ 曲面は扱われていないのでここで，補足する．以下 $K3$ 曲面（$b_1=0$，K_X 自明）に対しても

$$SW(\widetilde{P})\neq 0 \iff L=K_X=\mathcal{O}_X$$

であることを示す．$p_g:=\dim H^0(X,K_X)$ とおくと

$$b_2^+=1+2p_g=3$$

であるから $p_g=1$ である．η を 0 でない正則 2 次微分形式とし，

$$\delta=-\frac{i}{2}(\eta+\overline{\eta})$$

とおく．この δ に対する摂動サイバーグ・ウィッテン方程式の曲率方程式は

$$\begin{cases} F_A^{2,0}=\frac{i}{2}(\eta-\alpha\beta), \qquad F_A^{0,2}=\frac{i}{2}(\overline{\eta}-\overline{\alpha}\overline{\beta}), \\ F_A^{1,1}=\frac{i}{4}(|\alpha|^2-|\beta|^2)\omega \end{cases}$$

となる．非摂動方程式は解を持つとしてよい．何故なら，もしそうでないなら不変量は 0 であるからである．よって $c_1(L)$ は $(1,1)$ 型の微分形式で代表される．よって

$$\int_X F_A\wedge\eta=0$$

である．従って

$$\begin{aligned}\int_X \frac{1}{2}|\mu(F_A^+ +\delta)-(\psi\psi^*)_0|^2dv+\int_X|D_A\psi|^2dv \\ =\int_X\Big(\frac{1}{2}|F_A^+|^2+|\nabla_A\alpha|^2+|\nabla_A\beta|^2 \\ +\frac{s}{4}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\frac{1}{2}|\mu(i\delta)-(\psi\psi^*)_0|^2\Big)dv \end{aligned} \tag{4.51}$$

となる．最後の項は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2+\frac{1}{2}|\eta-\alpha\beta|^2$$

に等しい．変換 $A \to A$，$\alpha \to \alpha$，$\beta \to -\beta$，$\eta \to -\eta$ により右辺は不変である．よって $\delta = \frac{i}{2}(\eta + \overline{\eta})$ としたときの摂動サイバーグ・ウィッテン方程式に対し $(A, \alpha, -\beta)$ は解である．よって 2 つの摂動方程式より $F_A^{2,0} = \frac{1}{2}(-\eta + \alpha\beta)$ かつ $F_A^{2,0} = \frac{1}{2}(\eta - \alpha\beta)$ であるから，結局 $F_A^{2,0} = 0$ である．よって

$$\eta = \alpha\beta$$

を得る．以上，要するに（ここまでは $K3$ 曲面に限らず一般のケーラー曲面に対し通用する議論であった），$\eta \in H^0(X, K_X)$ に対し α，$\beta \in H^0(X, (K_X \otimes L^{\pm})^{\frac{1}{2}})$ で $\eta = \alpha\beta$ をみたすものを見つければそれが摂動サイバーグ・ウィッテン方程式の解である，ということである．

さて我々の $K3$ 曲面の場合，K_X は自明である（$K_X = \mathcal{O}_X$）．よって η は至る所 0 でない．よって α も β も至る所 0 でない．従って $L = \mathcal{O}_X$ となり，$\widetilde{P}$ は標準的 $Spin^c$ 構造でなければならない．

参考文献

[1] 伊藤光弘/茂木勇，微分幾何とゲージ理論，共立出版，1986.

[2] T. Aubin, Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère equations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[3] 小平邦彦，複素多様体論，岩波講座 基礎数学，1981.

[4] S. Kobayashi, Transformation groups in Differential Geometry, Springer-Verlag, 1972.

[5] 小林昭七，接続の微分幾何とゲージ理論，裳華房，1989.

[6] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, vol. I (1963), vol. II (1969), Interscience Publishers, New York.

[7] 酒井隆，リーマン幾何学，裳華房，1992.

[8] D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy, Oxford University Press, 2000.

[9] N. Stennrod, Topology of fibre bundles, Princeton University Press, 1974.

[10] J. Cheeger and J. Simons, Differential characters and geometric invariants, Lecture Notes in Math., 1167(1985), 50–80, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

[11] S.S. Chern and J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, Ann. of Math., 99(1974), 48–69.

[12] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, Geometry of four manifolds, Clarendon, Oxford, 1990.

[13] F. ヒルツェブルフ，代数幾何における位相的方法，1970，(竹内勝訳)，吉岡書店.

[14] 深谷賢治，ゲージ理論とトポロジー，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995.

[15] 深谷賢治，モノポール方程式とトポロジー，別冊・数理科学，現代物理と現代幾何，2002.

[16] A. Futaki, Kähler-Einstein manifolds and integral invariants, Lecture Notes in Math., vol.1314(1988), Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

[17] 二木昭人，基礎講義線形代数学，培風館，1999.

[18] 古田幹雄，指数定理，岩波講座現代数学の展開，岩波書店，2002.

[19] 古田幹雄，数学から見た場の理論 —Donaldson 理論と Seiberg-Witten 理論，別冊・数理科学，現代物理と現代幾何，2002.

[20] T. Bröcker and T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1985.

[21] A. Besse, Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1987.

[22] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and symmetric spaces, Academic Press, Orland, 1978.

[23] 松島与三，多様体入門，裳華房，1965.

[24] J.W. ミルナー/J.D. スタシェフ，特性類講義，2001，(佐伯修／佐久間一浩訳)，シュプリン

ガー・フェアラーク東京.
（原書 J.W. Milnor and J. D. Stasheff: Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1976）.
[25] J.W. モーガン，サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー，1998,（二木昭人訳），培風館.
（原書 J.W. Morgan: The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds, Princeton Univ. Press, 1996）.
[26] 森田茂之，微分形式の幾何学，岩波講座現代数学の基礎，岩波書店，1996.
[27] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn, Spin Geometry, Princeton University Press, 1989.
[28] 吉田朋好，ディラック作用素の指数定理，共立出版，1998.
[29] F.G. Warner, Introduction to differentiable manifolds and Lie groups, Springer-Verlag, New York, 1983.

索　引

タ

ナ

欧字

著者略歴

二木 昭人
ふたき あきと

1981 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程中退
現　在　東京大学大学院数理科学研究科教授
理学博士

専　門　微分幾何学，複素幾何学
主要著書
Kähler-Einstein metrics and integral invariants (Springer-Verlag, 1988).
J. モーガン著，サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー（翻訳，培風館，1998）.
基礎講義線形代数学（培風館，1999）.

臨時別冊・数理科学 **SGC** ライブラリ- **23**
『微分幾何講義　一般理論と現代物理への応用』

著　者　二木 昭人
ISBN 978–4–7819–9905–0
2003 年 4 月 25 日　初版発行

数　理　科　学　編　集　部　　発行人　森　平　敏　孝
TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで.

発行所　©　株式会社　**サイエンス社**　TEL.(03)5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25

組版　三美印刷