微 分 方 程 式 2

9. 定数係数線型常微分方程式

ラプラス変換と有理関数

$a_1, a_2, ...a_n$ がすべて定数である時、n 階線型方程式をとく

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f(t)$$

初期条件

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0, \cdots, y^{n-1}(0) = y_0^{(n-1)}$$

定理（復習）　$f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}$ はすべて $0 < t < \infty$ で連続, 指数 α 位の関数, $\lim_{t \to +0} f^{(j)}$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ が存在し, $f^{(n)}(t)$ は $0 < t < \infty$ で区分的に連続ならば

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - s^{n-1} f(+0) - s^{n-2} f'(+0)$$
$$- \cdots - s f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0),\ (\mathrm{Re}\, s > \alpha).$$

微分方程式とラプラス変換

微分方程式の解は定理の条件を満たしているとすると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y^{(k)}\right\} &= s^k\mathcal{L}\{y\} - s^{k-1}y(0) - s^{k-2}y'(0) - \cdots - sy^{(k-2)}(0) - y^{(k-1)}(0) \\
&= s^k\mathcal{L}\{y\} - s^{k-1}y_0 - s^{k-2}y_0' - \cdots - sy_0^{(k-2)} - y_0^{(k-1)}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{L}\left\{y^{(k)}\right\}$ は $s^k\mathcal{L}\{y\}$ と初期値を係数とする s の $k-1$ 次多項式の和になる

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\}, \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}$$

とおくと、微分方程式

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = f(t)$$

をラプラス変換した式は

$$P(s)Y(s) = Q(s) + F(s)$$

となる。ここで

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

であり、$Q(s)$ は初期値を係数にする $n-1$ 次多項式.

ラプラス変換を用いた微分方程式の解法

微分方程式をラプラス変換した式は

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{F(s)}{P(s)}$$

したがって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(s)}{P(s)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{P(s)}\right\}$$

右辺第 **1** 項は有理関数なので前回の方法で逆ラプラス変換できる

注意：右辺第 **2** 項は $F(s)$ が有理関数でないかもしれない

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s)}\right\} = p(t)$ をもとめて合成積の定理で

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P(s)} \cdot F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)p(t-\tau)\,d\tau$$

となって解を求めることができる

例題

$$y'' + y = \sin t,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -\frac{1}{2}$$

両辺をラプラス変換して

$$s^2Y(s) - s + \frac{1}{2} + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s^3 - s^2 + 2s + 1}{2(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{2(s^2+1)^2} \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right). \end{aligned}$$

逆ラプラス変換を求めると

$$y(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right\} = \cos \mathbf{t} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{t}\cos \mathbf{t}$$

例題

$$y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$$

両辺をラプラス変換して

$$s^2 Y(s) - s - 3 - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = 0$$

したがって

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 - 3s + 2} = -\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-2}.$$

逆ラプラス変換を求めると

$$y(s) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-2}\right\} = \mathbf{-e^{t} + 2e^{2t}}$$

例題

$$y'' + 2y' - 3y = t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$$

両辺をラプラス変換して

$$s^2Y(s) - 1 + 2sY(s) - 3Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

したがって

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+2s-3)} = -\frac{2}{9}\frac{1}{s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{5}{18}\frac{1}{s+3}.$$

逆ラプラス変換を求めると

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2+1}{s^2(s^2+2s-3)} \\ &= -\frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{5}{18}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\ &= \mathbf{-\frac{2}{9} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{5}{18}e^{-3t}} \end{aligned}$$

例題

$$y'' - y' - 2y = e^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

両辺をラプラス変換して

$$s^2Y(s) - s - (sY(s) - 1) - 2Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

したがって

$$Y(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{(s^2 - s - 2)(s-1)} = \frac{s^2 - 2s + 2}{(s-1)(s+1)(s-2)}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{5}{6}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-2}$$

逆ラプラス変換を求めると

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{t}} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}}.$$

例題

$$y'' + 2y' + y = \sin t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$$

両辺をラプラス変換して

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

したがって

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+2s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

逆ラプラス変換を求めると

$$Y(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t}.$$

例題

$$y'' + 2y' + 2y = \cos t,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$$

両辺をラプラス変換して

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{(s^2+2s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{5}\frac{s+2}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{s+4}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{3}{5}\frac{1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

逆ラプラス変換を求めると

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\cos\mathbf{t} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\sin\mathbf{t} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\mathbf{e}^{-\mathbf{t}}\cos\mathbf{t} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\mathbf{e}^{-\mathbf{t}}\sin\mathbf{t}. \end{aligned}$$

例題

$$y'' + \omega^2 y = f(t),\ \ y(0) = a,\ \ y'(0) = b$$

両辺をラプラス変換して

$$s^2 Y(s) - as - b + \omega^2 Y(s) = F(s)$$

したがって

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{as+b}{(s^2+\omega^2)} + \frac{1}{(s^2+\omega^2)}F(s) \\ &= a\frac{s}{(s^2+\omega^2)} + \frac{b}{\omega}\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)} + \frac{1}{\omega}\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}F(s) \end{aligned}$$

逆ラプラス変換を求めると

$$\begin{aligned} Y(s) &= a\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+\omega^2)}\right\} + \frac{b}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}\right\} + \frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}F(s)\right\} \\ &= \mathbf{a}\cos\omega\mathbf{t} + \frac{\mathbf{b}}{\omega}\sin\omega\mathbf{t} + \frac{\mathbf{1}}{\omega}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{f}(\tau)\sin\omega(\mathbf{t}-\tau)\,\mathbf{d}\tau. \end{aligned}$$

問題

ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解け

(1) $y'' + 4y = \sin t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

(2) $y''' + y' = e^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

(3) $y'' + y = t,\ y(\pi) = 0,\ y'(0) = 1$

(4) $y'''' - 2y''' + 5y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(\pi/4) = 0$