微 分 方 程 式 2

10. 連立線形微分方程式

連立 1 階線形微分方程式

未知関数 $y_1(t), y_2(t)$ が次の連立 1 階線形微分方程式を満たすとする:

$$\dot{y}_1 = ay_1 + by_2$$
$$\dot{y}_2 = cy_1 + dy_2.$$

ここで、a, b, c, d は定数とする

線形代数の方法で連立方程式を解く

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \ \dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

連立 1 階線形微分方程式の行列表示：

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}}$$

A が対角化可能の場合

A が対角化可能とする, すなわち, ある正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

の形にできるとする. ここで α_1, α_2 は A の固有値であった

$$P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

とすると, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は **1** 次独立であり A の固有値の固有ベクトルとなっていて

$$A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{p}_2$$

この P を用いて, 新しい未知関数 $z_1(t), z_2(t)$ を定める：

$$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}, \quad \text{ただし } \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

連立方程式の変形

連立 1階線形微分方程式 $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ において $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ とおく。

$$\dot{\boldsymbol{y}} = P\dot{\boldsymbol{z}}$$

に注意すると

$$P\dot{\boldsymbol{z}} = AP\boldsymbol{z}$$

となるので両辺に左から P^{-1} をかけて

$$\dot{\boldsymbol{z}} = P^{-1}AP\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}.$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

となって

$$\dot{z}_1 = \alpha_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = \alpha_2 z_2.$$

より

$$z_1 = C_1 e^{\alpha_1 t}, \quad z_2 = C_2 e^{\alpha_2 t}.$$

連立方程式の解

$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ だったので

$$z_1 = C_1 e^{\alpha_1 t}. \quad z_2 = C_2 e^{\alpha_2 t}.$$

を代入して

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\alpha_1 t} \\ C_2 e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 p_{11} e^{\alpha_1 t} + C_2 p_{12} e^{\alpha_2 t} \\ C_1 p_{21} e^{\alpha_1 t} + C_2 p_{22} e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

が解になる。ここで C_1, C_2 は 任意定数.

Aが対角化不可能の場合

Aが対角化できないのは, Aの固有値を α とすると, 重複度が 2 でありこれに属する 1次独立な固有ベクトルが 1個となる場合である. この場合, Aを三角行列に直す

初めに $\boldsymbol{p}_1$ を Aの固有値 α の固有ベクトルとする.
次に, 連立方程式

$$(A - \alpha E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1$$

の解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_2$ とする。このとき

$$A\boldsymbol{p}_1 = \alpha\boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \alpha\boldsymbol{p}_2$$

このとき, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は 1次独立となるので, $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2]$ は正則行列であり,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

続き

Aが対角化可能な場合と同様に, 新しい未知関数 $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ と定義する. $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ より、$P\dot{\boldsymbol{z}} = AP\boldsymbol{z}$ となり

$$\dot{\boldsymbol{z}} = P^{-1}AP\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha z_1 + z_2 \\ \alpha z_2 \end{bmatrix}.$$

まず $\dot{z}_2 = \alpha z_2$ を解いて,

$$z_2 = C_2 e^{\alpha t} \quad (C_2 \text{は任意定数})$$

これを z_1 の式に代入して,

$$\dot{z}_1 = \alpha z_1 + C_2 e^{\alpha t}$$

続き

この微分方程式 $\dot{z}_1 = \alpha z_1 + C_2 e^{\alpha t}$ の解 z_1 は定数変化法で

(1) 斉次方程式 $\dot{z}_1 = \alpha z_1$ を解いて $z_1 = Ce^{\alpha t}$,

(2) $z_1 = C(t)e^{\alpha t}$ を代入して $\dot{C} = C_2$ より $C(t) = C_2 t + C_1$.

したがって

$$z_1 = (C_2 t + C_1)e^{\alpha t} \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ だったので

$$z_1 = (C_2 t + C_1)e^{\alpha t} \quad z_2 = C_2 e^{\alpha t}.$$

を代入して

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_2 t + C_1)e^{\alpha t} \\ C_2 e^{\alpha t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (p_{11}C_2 t + p_{11}C_1 + p_{12}C_2)e^{\alpha t} \\ (p_{21}C_2 t + p_{21}C_1 + p_{22}C_2)e^{\alpha t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

と求められる. C_1, C_2 は任意定数である

例題1

次の連立微分方程式を解け

$$\dot{y}_1 = 6y_1 - 5y_2$$
$$\dot{y}_2 = 4y_1 - 3y_2$$

解 $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ の固有多項式

$$|tE_2 - A| = (t-1)(t-2)$$

より A の固有値は $1, 2$. 固有ベクトルは

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

より $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ であり、$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

続き

したがって A の対角化は

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ として $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ を求めると

$$\dot{\boldsymbol{z}} = P^{-1}AP\boldsymbol{z}, \text{ すなわち } \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

これを解いて $z_1 = C_1 e^t$. $z_2 = C_2 e^{2t}$. よって求める解 $\boldsymbol{y}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} C_1 e^t + 5C_2 e^{2t} \\ C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例題 2

次の連立微分方程式を解け

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \quad 8y_1 + 4y_2 \\ \dot{y}_2 &= -9y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

解 $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$ の固有多項式

$$|tE_2 - A| = (t-2)^2$$

固有値が 2 の固有ベクトルは

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

の定数倍だけなので対角化不能.

続き

$$(A - 2E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1$$

を解いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ がとれる。

$$A\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{p}_1, \quad A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2$$

なので $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ とおく A の対角化はできないが

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ として $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ を求めると

$$\dot{\boldsymbol{z}} = P^{-1}AP\boldsymbol{z}, \text{ すなわち } \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

続き

連立方程式

$$\dot{z}_1 = 2z_1 + z_2, \quad \dot{z}_2 = 2z_2$$

を z_2 から解いて

$$z_2 = C_2 e^{2t}, \quad \dot{z}_1 = 2z_1 + C_2 e^{2t}$$

後ろの方程式は定数変化法で解けて

$$z_1 = (C_2 t + C_1) e^{2t}$$

よって求める解 $\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_2 t + C_1) e^{2t} \\ C_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (2C_2 t + 2C_1 + C_2) e^{2t} \\ (-3C_2 t - 3C_1 - C_2) e^{2t} \end{bmatrix}.$$

例題 3

2 階常微分方程式 $y'' - 7y' + 12y = 0$ を解け

解 $y_1 = y, y_2 = y'$ とおくと連立系に書ける：

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \qquad\qquad y_2 \\ \dot{y}_2 &= -12y_1 + 7y_2 \end{aligned}$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ とおくと, 行列を用いて

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$$

A の固有多項式は $|tE_2 - A| = t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4)$.
A の固有値は $3, 4$. 固有ベクトルは

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

より $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ とおいて $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ として $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ を求める

続き

したがって A の対角化は

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

であり

$$\dot{\boldsymbol{z}} = P^{-1}AP\boldsymbol{z}, \text{ すなわち } \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

これを解いて $z_1 = C_1 e^{3t}.\quad z_2 = C_2 e^{3t}$. よって求める解 $\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} \\ C_2 e^{4t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t} \\ 3C_1 e^{3t} + 4C_2 e^{4t} \end{bmatrix}.$$

問題

次の微分方程式を解け

(1)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = 3y_1 + 4y_2 \\ \dot{y}_2 & = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = 4y_1 + \ \ y_2 \\ \dot{y}_2 & = -y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

(3) $$y'' + 13y' + 42y = 0$$

(4) $$y'' + 14y' + 49y = 0$$