微 分 方 程 式

4. 完全微分形

1. 偏微分と全微分

関数 $f(x,y)$ は何回でも微分可能（細かいことは気にしない）

偏導関数

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

偏微分の順番は交換できる

全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x dx + f_y dy$$

dx, dy は形式的な意味（飾り）と思っておく

$$f(x,y) - f(a,b) = f_x(a,b)(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + f_y(a,b)(\mathbf{y} - \mathbf{b}) + o(r)$$

$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $o(r)$ は $(x,y) \to (a,b)$ のとき r より小さい

1. 完全微分形

1階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=0$$

を書き直して

$$(*)\qquad P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

の形にしたものを考える. いま1つの関数 $u(x,y)$ が存在して

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$$

になっているとき (*) は完全微分形であるという.

完全微分形の場合, $du(x,y):=u_x dx+u_y dy=0$ となるから, (*) の一般解はつぎの形で与えられる :

$$u(x,y)=C\quad(C\text{ は任意定数}).$$

2. 基本定理

定理　$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ が完全微分形であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

[証明]　1. 必要性　$Pdx + Qdy$ が完全微分形のときは $u(x,y)$ が存在して

$$Pdx + Qdy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

したがって $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ となる。

x と y の微分の順序は変えてもいいので

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2. 基本定理（つづき）

[証明・つづき]　2. 十分性　$P_y = Q_x$ から u を構成する。
$P(x,y)$ の y を固定し, x について積分したものを

$$F(x,y) := \int P(x,y)\,dx$$

と置くと $P = \dfrac{\partial F}{\partial x}$.
y について微分し, $P_y = Q_x$ を用いると

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$$

最後の式より

$$Q - \frac{\partial F}{\partial y} = f(y)$$

となる $f(y)$ が存在する。

2. 基本定理（十分性のつづき）

$$F(x,y)=\int P(x,y)\,dx,\ f(y)=Q-\frac{\partial F}{\partial y}$$

であった

P,Q を F,f をつかって表すと

$$\begin{aligned}P(x,y)dx+Q(x,y)dy &= \frac{\partial F}{\partial x}dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+f(y)\right)dy \\ &= d\left(F+\int f(y)\,dy\right)\end{aligned}$$

したがって、

$u=F+\int f(y)\,dy$ ととることができ、完全微分形

になっている

□

3. 完全微分形の解法

[1] 1階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = 0$$

を形式的に $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ と書き直す

[2] $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ が成り立てば完全微分形 である

[3] $F(x,y) = \displaystyle\int P(x,y)\,dx,\ f(y) = Q - \frac{\partial F}{\partial y}$ とし

$u = F + \displaystyle\int f(y)\,dy$ とおけば $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du$ であり

解は $u = F + \displaystyle\int f(y)\,dy = C$ (C は任意定数)

4. 積分因子

$Pdx + Qdy$ が完全微分形でないときでも、 ある関数 $\lambda(x, y)$ をかけて $\lambda Pdx + \lambda Qdy$ が完全微分形になるときがある。
このとき $\lambda(x, y)$ を積分因子という。

$\lambda Pdx + \lambda Qdy$ が完全微分形になる必要十分条件は,

$$\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$$

より

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y}P + \lambda\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}Q + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$$

したがって

$$\boxed{Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} - P\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\lambda.}$$

5．積分因子について

$$Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\lambda.$$

積分因子 $\lambda(x, y)$ を上の偏微分方程式の解として見いだすのは簡単ではない。簡単な特殊ケースに慣れておくと便利

微分形式の公式： $du = u_x dx + u_y dy$

$$d(xy) = ydx + xdy, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

$$d\log(xy) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \quad d\log\frac{y}{x} = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x},$$

$$d\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \quad d\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

6. 積分因子の例

微分形式 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ の積分因子を考える。

$$Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\lambda$$ を満たす関数 λ を探す

1) $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ が x の関数であるとき, それを $\phi(x)$ とおけば

積分因数は $\lambda = \exp\left(\int \phi(x)\, dx\right)$

[証明] 積分因子が y によらない、つまり $\lambda = \lambda(x)$ の場合は $Q\dfrac{d\lambda}{dx} = (P_y - Q_x)\lambda$

したがって $\lambda(x)$ は常微分方程式

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}\lambda = \phi(x)\lambda$$

の解なのでこれをといて $\lambda = C\exp\left(\int \phi(x)\, dx\right)$.

積分定数 $C = 1$ ととればよい

□

6. 積分因子の例・つづき

2) $\dfrac{P_y - Q_x}{P}$ が y の関数であるとき, それを $\psi(y)$ とおけば

積分因数は $\lambda = \exp\left(-\displaystyle\int \psi(y)\,dy\right)$

[証明] 積分因子が x によらない、つまり $\lambda = \lambda(y)$ の場合は

$$Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - P\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\lambda$$

より $-P\dfrac{d\lambda}{dy} = (P_y - Q_x)\,\lambda$

したがって $\lambda(y)$ は常微分方程式

$$\frac{d\lambda}{dy} = -\frac{P_y - Q_x}{P}\lambda = -\psi(y)\lambda$$

の解なのでこれをといて $\lambda = C\exp\left(-\displaystyle\int \psi(y)\,dy\right)$.

積分定数 $C = 1$ ととればよい

□

7. 積分因子について注意

積分因子は一意には定まらない。定数倍の自由度の他にも次のような例がある

例: $ydx - xdy = 0 \quad (P = y, Q = -x)$

$\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{2}{-x}$ より先ほどの例から積分因子は

$$\lambda = \exp\left(\int -\frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(-2\log x) = \frac{1}{x^2}$$

$\dfrac{P_y - Q_x}{P} = \dfrac{2}{y}$ でもあるので同様に積分因子は $\quad \lambda = \exp\left(-\displaystyle\int \frac{2}{y}\,dy\right) = \dfrac{1}{y^2}.$

他にも $\dfrac{1}{xy}, \quad \dfrac{1}{x^2+y^2}$ も積分因子になる:

$$\frac{1}{xy}(ydx - xdy) = d\log\left|\frac{x}{y}\right|, \quad \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = d\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

8. 演習問題

1. つぎの微分方程式を解け.

(1) $\displaystyle \left(1 - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dx + \frac{x^2}{y(x^2+y^2)}\, dy = 0,$

(2) $(x^2 y + y + 1)\, dx + x(1+x^2)\, dy = 0.$

[追加問題 5.1]

積分因子を見出して解け

(1) $(x-y)\, dx + x\, dy = 0$

(2) $2xy\, dx + (y^2 - x^2)\, dy = 0$

(3) $(y^2 - xy)\, dx + x^2\, dy = 0$

演習問題解説

1. (1) $P(x,y)=\left(1-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right), Q(x,y)=\dfrac{x^2}{y(x^2+y^2)}$ とおくと $P_y=Q_x=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ より完全微分形.

$F(x,y)=\displaystyle\int P(x,y)\,dx=x-\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)$ であり、$f(y)=Q(x,y)-F_y(x,y)=\dfrac{1}{y}$ として $u=F(x,y)+\displaystyle\int f(y)\,dy=x-\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)+\int\frac{1}{y}\,dy=x+\frac{1}{2}\log\frac{y^2}{x^2+y^2}$ とおけば $du=Pdx+Qdy$. より答: $x+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=C$.

(2) $P(x,y)=(x^2y+y+1), Q(x,y)=x(1+x^2)$ とおく $\phi(x):=\dfrac{P_y-Q_x}{Q}=-\dfrac{2x}{x^2+1}$ は x の関数なので積分因数は $\lambda=\exp\left(\displaystyle\int\phi(x)\,dx\right)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

$P_1=\dfrac{1}{1+x^2}P=y+\dfrac{1}{1+x^2}, Q_1=\dfrac{1}{1+x^2}Q=x$ とすると、

$F(x,y)=\displaystyle\int P_1(x,y)\,dx=xy+\tan^{-1}x$、$F_y=x=Q_1$ なので $dF=Pdx+Qdy$ になる。

答: $\tan^{-1}x+xy=C$.