ベクトル解析

4. 曲　面

1 スカラー積(内積)

$\boldsymbol{r}(u,v)$: uv-平面上の領域 D 上で定義されたベクトル値関数

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ が D 上で n 階まで各階の偏導関数が存在して連続のとき $(n \geqq 1)$, 写像

$$S : (u,v) \to \boldsymbol{r}(u,v) \quad ((u,v) \in D)$$

を D 上で定義された C^n 級の曲面という.

$$S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) \quad ((u,v) \in D)$$

とも表し、曲面 S のパラメーター表示という.

成分を用いて, 次のように書くこともある

$$S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

例

有限個の C^n 級の曲面をつないでできる曲面を区分的に C^n 級の曲面という.

立方体の表面は C^∞ 級の曲面の例である

例： 平面 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を定ベクトル、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は一次独立とする.

$$\boldsymbol{r}(u, v) = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \quad (\ (u, v) \in \mathbb{R}^2\ )$$

は点 $\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で張られる平面を表わす.

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3),\ \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とすると
成分表示は

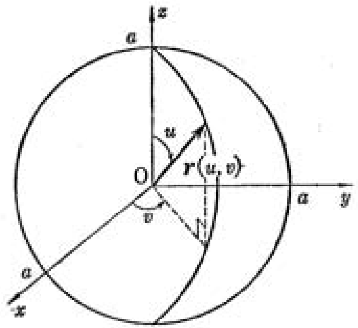
$$S : \begin{cases} x = a_1 u + b_1 v + c_1 \\ y = a_2 u + b_2 v + c_2 \\ z = a_3 u + b_3 v + c_3 \end{cases}$$

例： 球面 a を正の定数とするとき

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a\cos u)$$

$$(0 \leqq u \leqq \pi,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi)$$

は原点を中心とする半径 a の球面

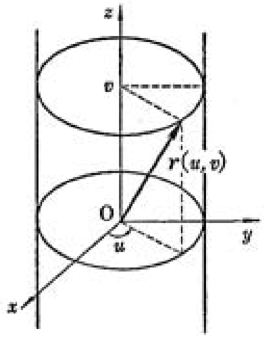


例： 円柱 a を正の定数とするとき

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$$

$$(0 \leqq u \leqq \pi,\ v \in \mathbb{R})$$

は円柱面を表わす.



グラフ状曲面

D を xy 平面の領域とする.

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

で定義される曲面をグラフ状曲面という.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad (x, y) \in D$$

は曲面のパラメーター表示を与える

接平面

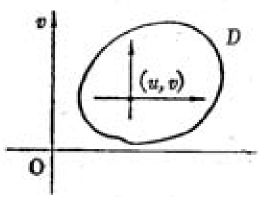
C^1 級の曲面 S のパラメーター表示

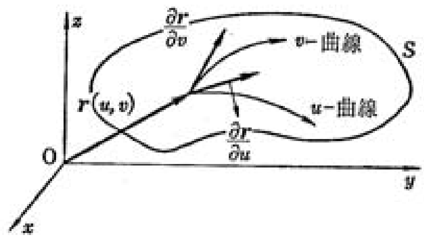
$$S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in D$$

記号：$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$

$d_0 = (u_0, v_0) \in D$ とおく。uv-平面上で $v = v_0$ を固定し，u を動かすとき，$\boldsymbol{r}(u, v_0)$ は S 上の曲線を描く．これを u-曲線という．$\boldsymbol{r}(d_0)$ におけるこの曲線の接線ベクトルは $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(d_0)$ である．

同様に、v-曲線の接ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(d_0)$ も考えられる





$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(d_0)$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(d_0)$ が平行でなく

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(d_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(d_0) = (a, b, c) \neq 0$$

を満たす時、$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(d_0)$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(d_0)$ で張られる平面を $\boldsymbol{r}(d_0)$ における曲面 S の接平面という

点 $\boldsymbol{r}(d_0) = (x(d_0), y(d_0), z(d_0))$ での接平面の方程式は

$$a(x - x(d_0)) + b(y - y(d_0)) + c(z - z(d_0)) = 0$$

$\boldsymbol{r}(d_0)$ を通り接平面と直交する直線を $\boldsymbol{r}(d_0)$ における S の法線という。$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(d_0) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(d_0) = (a, b, c)$ が法線ベクトルになる

接平面と曲面上の曲線

D 内の曲線

$$u = u(t),\ v = v(t) \quad d_0 = (u(0), v(0))$$

を考える。

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$$

は S 上の曲線で $\boldsymbol{r}(d_0) = (u(0), v(0))$ を通るものである.

よって, この曲線の $t = 0$ における接線ベクトルは

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

となるので、接平面（$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(d_0)$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(d_0)$ で張られる平面）上にある。

逆に, 接平面上にあり $\boldsymbol{r}(d_0)$ を通るベクトル $\boldsymbol{a}$ は, $p, q \in \mathbb{R}$ として

$$\boldsymbol{a} = p\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(d_0) + q\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(d_0)$$

と表されるので $\boldsymbol{r}(d_0)$ を通る曲面 S 上の曲線 $\boldsymbol{r}(u_0 + pt, v_0 + qt)$ の $t = 0$ における接線ベクトルになる

問　$z=f(x,y)$ で与えられるグラフ状曲面上の1点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ における接平面の方程式を求めよ.

[解説]　グラフ状曲面のパラメーター表示は

$$\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$$

より

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

よって

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)$$

よって, $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ における接平面の方程式は

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+1\cdot(z-f(x_0,y_0))=0.$$

より

$$z=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+f(x_0,y_0)$$

問：

球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上の点 $Q=\left(\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, -a\sin u)$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=(-a\sin u\sin v, a\cos u\sin v, 0)$$

さらに Q に対応する (u,v) は $(u,v)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$. Q において

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}&=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a,\frac{\sqrt{6}}{4}a,-\frac{1}{2}a\right)\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a,0\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}a^2,\frac{\sqrt{2}}{8}a^2,\frac{\sqrt{12}}{8}a^2\right)\end{aligned}$$

したがって、接平面の法線ベクトルは

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{8}a^2, \frac{\sqrt{2}}{8}a^2, \frac{\sqrt{12}}{8}a^2\right)$$

よって求める接平面の方程式は

$$\frac{\sqrt{2}}{8}a^2\left(x-\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}a^2\left(y-\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{12}}{8}a^2\left(z-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)=0$$

すなわち

$$\left(x-\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)+\left(y-\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)+\sqrt{6}\left(z-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)=0$$

よって

$$x+y+\sqrt{6}z=2\sqrt{2}a.$$

問　次の曲面上の点 Q での接平面の方程式を求めよ.

(1) $z = x^2 + y^2 \quad Q = (-1, -1, 2)$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad Q = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

曲面の向きづけ

C^1 級の曲面 S 上の点 P における接平面に垂直で P を通るベクトルを, P における S の法線ベクトルという.
曲面 S 上のすべての点で S の単位法線ベクトルは 2 通りある.
曲面上の各点で, 単位法線の向きの一方を正の向きと指定し,

正の向きの単位法線ベクトルが曲面上で、連続的にかわるようにできるとき,

曲面 S は向きづけ可能であるという.

向きづけ可能な曲面で正の向きの単位法線ベクトルの向かう側を表側, 反対側を裏側という.

[例] 球面やトーラス面 (ドーナツの表面) などは向きづけ可能な曲面の例である. 向きづけ不可能な曲面の例として, メビウス **(Möbius)** の帯が知られている

区分的にC^1級の曲面の向きづけ

区分的にC^1級の曲面SがC^1級の向きづけ可能な曲面$S_1, S_2, ..., S_m$をつないでできているとする. 各S_jの境界を∂S_jとし, ∂S_jと∂S_kの共通部分をw_{jk}とする.

S_jから定まる∂S_jの向きとS_kから定まる∂S_kの向きが互いに逆向きになるとき, Sは向きづけられるという.