ベクトル解析

12. 積分定理の応用

1 発散,回転の物理的解釈

$\boldsymbol{v}$: 流体の速度ベクトル場

C : 向きのついた閉曲線

S : C を周とする曲面

C の単位接線ベクトル: $\boldsymbol{t} = \left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right)$ に対して

$\boldsymbol{v}$ の C に沿う単位時間あたりの循環: $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}$

ストークスの定理によって

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\,ds = \int_C \boldsymbol{v}\cdot\,d\boldsymbol{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}}\,dS$$

積分の平均値の定理

$f(x,y)$ を領域 S の上の連続関数, $m(S)$ は S の面積とする.
ある点 $Q\in S$ が存在して

$$\iint_S f(x,y)\,dxdy = m(S)f(Q)$$

回転の物理的解釈

ストークスの定理と平均の定理から、ある点 $Q \in S$ が存在して

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = m(S)(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}}(Q)$$

点 P を固定して、点 P を 通る平面上に P を中心とする半径 ε の円板 Σ_ε の境界を Γ_ε とすると、ある点 $Q \in \Sigma_\varepsilon$ が存在して

$$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}}(Q) = \frac{1}{m(\Sigma_\varepsilon)} \int_{\Gamma_\varepsilon} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}\, ds$$

したがって $\varepsilon \to 0$ の極限を取ると $Q \to P$ なので

$$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m(\Sigma_\varepsilon)} \int_{\Gamma_\varepsilon} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}\, ds$$

循環 $\displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}\, ds$: Γ_ε のまわりの流体の総速度

$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}}(P)$:軸 $\boldsymbol{v}$ のまわりの流体の回転効果

発散の物理的解釈

$\boldsymbol{v}$: 流体の速度ベクトル場

S : 閉曲面　　V : S の内部

単位時間あたりに S から外に向かう流体の流出量 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}} dS$

ガウスの発散定理と平均値の定理から

$$\iint_S \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dxdydz = m(V) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(Q)$$

($m(V)$: V の体積, Q は V の中の適当な点)

V_ε: P を中心とする半径 ε の球体

S_ε: V の境界

$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(P)$ は点 P における湧出率を表わす:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{m(V_\varepsilon)} \iint_{S_\varepsilon} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}\, dS$$

$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(P) > 0$ のとき、点 P に湧き出しがあるといい,

$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(P) > 0$ のとき、点 P に吸い込みがあるという.

保存力場

復習

$\boldsymbol{a}$: D 上定義された C^1 級のベクトル場

$\boldsymbol{a}$ が保存力場とは

$$\boldsymbol{a} = -\mathrm{grad}\, f$$

をみたす C^2 級のスカラー場 f が存在することをいう

定理 $\boldsymbol{a}$ が保存力場であれば $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

証明　公式 $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = \mathbf{0}$ より明らか

※ $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ となるベクトル場 $\boldsymbol{a}$ を渦なしベクトル場という
つまり「保存力場ならば渦なしベクトル場」

逆に、ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ が保存力場になる条件を見つける

保存力場になる条件

定理　領域 D 上の C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ が保存力場であるための**必要十分条件**は, D 内の任意の C^1 級の閉曲線 C に対し次が成立：

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

証明・必要性

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とする。今、$\boldsymbol{a}$ が保存力場である、すなわち

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -\mathrm{grad}\, f$$

とする。2 点 P, Q を結ぶ D 内の C^1 級の曲線 C に対して

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz \\ &= \int_C \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\,dx - \frac{\partial f}{\partial y}\,dy - \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\right) = f(P) - f(Q)\end{aligned}$$

C が閉曲線のとき $P = Q$ なので最後の式は 0 である.

十分性

D 内の 1 点 P_0 を固定しておく. P を D 内の任意の点とする.
仮定より D 内で P_0 と P を結ぶ曲線 C に対して, 線積分

$$\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

の値は曲線 C の取り方によらない. Δ $\varDelta$
従って, この値を $f(P)$ とかくことにする .

以下では $\mathrm{grad}\, f = \boldsymbol{a}$ を示す。
まず、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を考える。
$\varDelta x$ は十分小さいとして $P(x, y, z), Q(x + \varDelta x, y, z) \in D$ とする

$$f(x + \varDelta x, y, z) - f(x, y, z) = \int_{PQ} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$$

線分 PQ のパラメーター表示は

$$x(t) = x + t\varDelta x,\ y(t) = y,\ z(t) = z \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

十分性・続き

パラメーター表示

$$x(t) = x + t\Delta x,\ y(t) = y,\ z(t) = z \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

を用いて線積分を行なう：

$$\int_{PQ} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left\{ a_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + a_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} \right.$$
$$\left. + a_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right\} dt$$
$$= \Delta x \int_0^1 a_1(x + t\Delta x, y, z)$$

積分の平均値の定理より, 適当な θ $(0 < \theta < 1)$ をとれば

$$\Delta x \int_0^1 a_1(x + t\Delta x, y, z) = \Delta x \cdot a_1(x + \theta\Delta x, y, z)$$

以上によって

$$f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)=\int_{PQ}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=\Delta x\cdot a_1(x+\theta\Delta x,y,z)$$

が示されたので

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}a_1(x+\theta\Delta x,y,z)\\&=a_1(x,y,z)\end{aligned}$$

. 同様にして $\frac{\partial f}{\partial y}=a_2$, $\frac{\partial f}{\partial z}=a_3$ であることもわかる

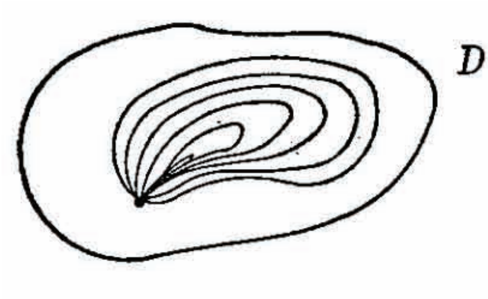
よって $\operatorname{grad} f=\boldsymbol{a}$ を得る. □

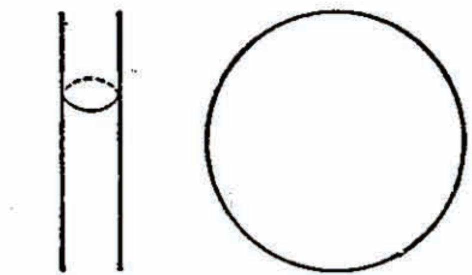
単連結

空間内の領域 D 内の任意の閉曲線を D 内で連続的に変形して 1 点に縮める ことができるとき, D を単連結領域という.

例）空間から一直線や円環領域の表面および内部を除いて得られる領域は単連結でない.

例）空間から有限個の点を除いて得られる領域および球の内部などは単連結である.





渦なしベクトル場は保存力ベクトル場

以前, 保存力場は渦なし場となることを示したが, 特に領域 D が単連結のとき, 逆も成り立つ.

定 理　領域 D が単連結とする。
D 上の C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ が渦なしベクトル場,
すなわち $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となるとき、$\boldsymbol{a}$ は保存力ベクトル場となる.

証明　仮定より $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.
C を C^1 級の閉曲線とする。
D は単連結だから C を境界とする D 内の曲面 S が存在して、
S はストークスの定理の仮定をみたす.
ストークスの定理を適用すれば

$$\int_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{n}}\, dS = 0$$

がわかる. 前の定理より $\boldsymbol{a}$ は保存力場であることがわかる.　□

ベクトルポテンシャル

領域 D 上で定義された C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対し, $\boldsymbol{a} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$ をみたす D 上の C^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ のベクトルポテンシャルという.

1) $\boldsymbol{a}$ がベクトルポテンシャル $\boldsymbol{b}$ をもつとき

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b} = 0.$$

2) 逆に, 式 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 0$ をみたすベクトル場 $\boldsymbol{a}$ がベクトルポテンシャルをもつか否かは, D の形状による（D に穴が空いている時は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 0$ でもベクトルポテンシャルを持たないことがある）。

参考（$\boldsymbol{a}$ を領域 D 上で定義された C^1 級のベクトル場とする。D に含まれる任意の閉曲面 S に対して

$$\iint_S \boldsymbol{a_n}\,dS = 0$$

が成り立つことと、$\boldsymbol{a}$ がベクトルポテンシャルをもつことは同値。

※ド・ラームの定理が必要になるので説明は省略

ベクトルポテンシャルの存在

定理　D が空間全体のとき, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 0$ をみたす C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ がつねにベクトルポテンシャルをもつ。

証 明 $a = (a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z))$ とおく．仮定より

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_1}{\partial z} = 0$$

まず

$$a_2 = \frac{\partial b_2}{\partial x}, \quad a_3 = \frac{\partial b_3}{\partial x}$$

をみたす関数 $b_2(x,y,z), b_3(x,y,z)$ を積分で求めて、ベクトル場 $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b} = (0, b_2, -b_3)$ で定義する．このとき

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b} = \left(-\frac{\partial b_2}{\partial y} - \frac{\partial b_3}{\partial z}, \frac{\partial b_2}{\partial x}, \frac{\partial b_3}{\partial x}\right) = \left(-\frac{\partial b_2}{\partial y} - \frac{\partial b_3}{\partial z}, a_2, a_3\right)$$

ベクトル場 $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$ とおけば $\boldsymbol{c} = (c, 0, 0)$ の形になる．

具体的には

$$c = a_1 + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z}$$

であるが $\operatorname{div} \boldsymbol{c} = \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{b} = 0$ なので $\dfrac{\partial c}{\partial x} = 0$. よって c は y, z の関数である.

次に $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = -c$ をみたす y, z の関数 $Q(y, z)$ を積分で求める.
ベクトル場 $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{d} = (0, Q, 0)$ とおけば

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d} = \left(-\frac{\partial Q}{\partial y} z, 0, 0 \right) = (c, 0, 0) = \boldsymbol{c}$$

であるから,

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})$$

となって $\boldsymbol{a}$ のベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$ となる。 □

D が球や円柱、平行六面体の内部のときも同様.

問題

次のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ のベクトルポテンシャルを求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = (x^2, y, -(2xz + z))$

(2) $\boldsymbol{a} = (z - y, x - z, y - x)$

ベクトル場の分解とラプラシアン

問題 領域 D 上の C^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ を, D 上のスカラー場 f とベクトル場 $\boldsymbol{b}$ により

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} f + \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$$

の形に分解せよ.

まず、この分解が存在したと仮定する. 両辺の div をとると

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

となる。 $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ は $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ となっているので, 記号

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を導入して、ラプラシアンと呼ぶ。

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$$

となる.

ポアソンの方程式

D 上の関数 $g(x,y,z)$ に対して

$$\Delta f = g$$

なる偏微分方程式を関数 f に対するポアソンの方程式という.
ポアソンの方程式の解の 1 つは次の定理で与えられる.

定 理 領域 V が閉曲面 S で固まれ, 関数 $g(x,y,z)$ は V および S を含む開集合で C^1 級とすれば, 関数

$$f(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{g(x,y,z)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,d\xi d\eta d\zeta$$

は V 上で C^2 級で, V においてポアソンの方程式 $\Delta f = g$ をみたす.

証明は省略する.

ヘルムホルツの定理

上の定理を用いて, 領域 V が球の内部の場合に式 (6.9) の分解がつねに可能であることを示そう.

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \Delta f$$

をみたす f を求める.

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a} - \mathrm{grad}\,f) = 0$$

から定理 より

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\,f + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$$

をみたすベクトル場 $\boldsymbol{b}$ が存在する. これをヘルムホルツの定理という.

問題

1　V を有界な閉集合で，その境界が閉曲面 S からなっているとする. そのとき

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\,dS = \begin{cases} 0 & \text{原点が } S \text{ の外部の時} \\ 4\pi & \text{原点が } V \text{ に含まれる時} \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ.

問題2

空間の中の領域 D で定義された関数 $f(x, y, z)$ が

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

を満たすとき、f を**調和関数**という

[問題]　空間の中の領域 D で定義された調和関数と D 内の閉曲面 S に対して

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS$$

が成り立つことを証明せよ. また S の内部の点 P に対して

$$f(P) = \frac{1}{4\pi} = \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} - f \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS$$

が成立することを証明せよ. ここで $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ は S の単位法線方向の方向微分, r は S 内の動点 A と P との距離を表わす.