論　説

遠アーベル幾何学の進展

星　　裕一郎

1　序文

本稿の目的は，遠アーベル幾何学の進展についての概説を与えることである．もう少し具体的には，中村–玉川–望月による [122] や玉川による [119]–[121] での遠アーベル幾何学の状況のその後の進展の概説が，本稿の主要な目的である．一方，紙幅の都合上，‘代数多様体に対する遠アーベル予想 (Grothendieck 予想)’ に関する研究の解説しか行うことができず，例えば，ここ十数年ほどの間にいくつかの進展のあった ‘セクション予想’ や ‘双有理遠アーベル幾何学’ といった遠アーベル幾何学のテーマ，そして，遠アーベル幾何学の大きな応用である ‘宇宙際タイヒミュラー理論’ [66]–[69] について，本稿ではまったく触れることができなかった．セクション予想の概説については例えば [83], [98], [124] を，双有理遠アーベル幾何学の概説については例えば [3] を，宇宙際タイヒミュラー理論の概説については例えば [6], [62], [64], [65], [111], [127], [128] を参照されたい．また，再び紙幅の都合上，‘代数多様体に対する遠アーベル予想’ の中でも，特に ‘標数 0 での遠アーベル予想’ の研究の進展の解説が本稿の内容の中心となってしまい，‘正標数での遠アーベル予想’ の研究については，9 節でいくつかの進展を羅列するに留まってしまった．本稿で詳しく論じることのできなかったこれらのテーマについては，また別の機会があればそちらに譲りたい．

著者の勝手な印象として，[122] で解説されている 1990 年代の中村，玉川，望月らの仕事によって，多くの研究者が ‘遠アーベル幾何学は終わってしまった分野’ という印象を持っているように感じる．本稿のもう一つの目的は，読者に ‘遠アーベル幾何学にはわからないことが未だにたくさんある’ といった類の認識を持っていただくことである．

序文の最後に余談を述べると，著者が遠アーベル幾何学に強い関心を持つこととなったもっとも大きなきっかけは，学生時代の私に大きな感銘を与えた中村–玉川–望月による [122] である．それと同様に，本稿をきっかけに，遠アーベル幾何学に関心を持ち，そして，実際に研究を行うという方があらわれれば，それは，著者にとって望外の喜びとするところである．

2　遠アーベル基本 ‘予想’

連結な局所ネータースキーム X とその幾何学的点 $\overline{x} \to X$ を与える．すると，X の有限次エタール被覆 $Y \to X$ が与えられる毎に，$\overline{x}$ 上のファイバー集合 $Y \times_X \overline{x}$ という有限集合が得られ，その上，X のすべての有限次エタール被覆に対するこれらファイバー集合は，自然に射影系をなす．この有限集合の射影系の自己置換全体のなす副有限群が，Grothendieck [118] によって導入された X の **(エタール) 基本群** ((étale) fundamental group) $\pi_1(X, \overline{x})$ である．例えば，スキーム X が体 k から

定まるアファインスキーム $\mathrm{Spec}(k)$ の場合，X の連結な有限次エタール被覆は，k の有限次分離拡大に対応する．その上，有限次分離拡大 K/k に対応する連結な有限次エタール被覆 Y に対するファイバー集合 $Y \times_X \overline{x}$ は，拡大 K/k を定める代数方程式の解集合に他ならない．したがって，幾何学的点 $\overline{x}$ から定まる k の分離閉包を $\overline{k}$ と書くことにすると，この場合，基本群 $\pi_1(X, \overline{x})$ は，あらゆる分離的な方程式の解の置換の総体である絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ と自然に同一視される．

位相的な基本群の場合と同様に，基点 '$\overline{x}$' の取り替えは，内部自己同型に対応する．特に，基本群の位相群としての同型類は，定義に登場する基点 '$\overline{x}$' の選択に依存しない．これらの観察により，以下，基点を省略して，$\pi_1(X, \overline{x})$ を単に $\pi_1(X)$ と書くことにする．

k を体，$\overline{k}$ をその分離閉包，X を k 上の代数多様体とすると，スキームの間の射の列 $X \times_k \overline{k} \to X \to \mathrm{Spec}(k)$ が，基本完全系列と呼ばれる基本群の間の完全系列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X \times_k \overline{k}) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow 1$$

を誘導する．Grothendieck [9]–[11] によって提唱された**遠アーベル幾何学** (anabelian geometry) における基本予想群は，X が '遠アーベル代数多様体' と呼ばれるある特別なクラスに属する代数多様体であるならば，上述の基本完全系列が X の幾何学を完全に統制するであろう，という直感を出発点とする予想群である．

基本'予想' 素体上有限生成な体 k 上の遠アーベル代数多様体 X/k は，付随する基本完全系列 $1 \to \pi_1(X \times_k \overline{k}) \to \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to 1$ から純位相群論的に '復元' できる．

ここで，'遠アーベル代数多様体' は，'アーベル群からほど遠い基本群によってその幾何学が統制される代数多様体' といったような意味で Grothendieck によって導入された用語である．与えられた代数多様体が代数曲線の場合には，その遠アーベル性は，双曲性と同値であろうと考えられていた．すなわち，非特異代数曲線 X に対して，X の (正準的な同型を除いて一意的に定まる) k 上の非特異コンパクト化 X^+ $(\supseteq X)$ の種数を g，X の無限遠因子 $(X^+ \setminus X)_{\mathrm{red}}$ $(\subseteq X^+)$ の次数を r とすると，$2 - 2g - r < 0$ という不等式を満たすことが，X の遠アーベル性の定義となるであろうと考えられていた．一方，しかしながら，Grothendieck は，2 次元以上の代数多様体に対する遠アーベル性の正確な定義を与えなかった．また，Grothendieck が定義を与えなかったというだけでなく，そもそも，高次元にも通用する '適切な定義' が存在するのかどうかすら，現時点においても不明のままである．

上述の基本 '予想' における '復元' の定式化の一つが，以下の '(相対) 遠アーベル性' である．今日までの遠アーベル幾何学では，適切な代数多様体のクラス $\mathcal{C}$ がこの遠アーベル性を持つか，という問題がしばしば研究されてきた．k を体，$\overline{k}$ をその分離閉包，$\mathcal{C}$ を k 上の代数多様体のあるクラスとする．

(相対) 遠アーベル性 $\mathcal{C}$ に属する X と Y に対して，$\mathrm{Isom}_k(X, Y)$ を X から Y への k 上の同型射のなす集合，$\mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$ を $\pi_1(X)$ から $\pi_1(Y)$ への $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の連続同型射のなす集合とすると，自然な写像

$$\mathrm{Isom}_k(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}\big(\pi_1(X), \pi_1(Y)\big)/\big(\pi_1(Y \times_k \overline{k}) \text{ による共役}\big)$$

は全単射となる．

代数多様体のクラス $\mathcal{C}$ がこの遠アーベル性を持つとき，しばしば，'$\mathcal{C}$ に対する (相対版) 遠アーベル予想 (あるいは，(相対版) Grothendieck 予想) が成立する' という表現がなされる．

体 k 上の代数多様体のあるクラス $\mathcal{C}$ に対して，遠アーベル予想が成立したとしよう．すると，簡単にわかるとおり，$\mathcal{C}$ に属する X と Y に対して，X が Y と k 上同型であることと $\pi_1(X)$ が $\pi_1(Y)$ と $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の位相群として同型であることは同値となる．したがって，$\mathcal{C}$ に対する遠アーベル予想の成立は，大雑把には，'$\mathcal{C}$ に属する代数多様体 X/k に対して，付随する基本完全系列 $1 \to \pi_1(X \times_k \overline{k}) \to \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to 1$ が X/k の同型類を完全に決定する' という主張を含んでいる．

上述のとおり，1 次元の '遠アーベル多様体' とは**双曲的曲線** (hyperbolic curve) のことだと考えられていた．双曲的曲線に対する遠アーベル予想に関する代表的な結果として，望月による以下の二つの定理を紹介しよう．[122] で述べられているとおり，これら二つの結果は，中村と玉川による先駆的な研究の後に得られたものであり，また，標数 0 の体上の双曲的曲線に対する (相対版) 遠アーベル予想に関する結果として，現時点においても最良の結果である．本稿では，素数 p に対して，有理数体の p 進完備化の有限次拡大体と同型な体のことを***p* 進局所体** (p-adic local field) と呼び，ある p 進局所体の有限生成拡大体の部分体と同型な体のことを**劣 *p* 進体** (sub-p-adic field) と呼び，そして，ある p 進局所体の最大不分岐拡大体の p 進完備化の有限生成拡大体の部分体と同型な体のことを**一般化劣 *p* 進体** (generalized sub-p-adic field) と呼ぶこととする．簡単に確認できるとおり，基本 '予想' で対象とされている有理数体上有限生成な体は，任意の素数 p に対する劣 p 進体であり，特に，任意の素数 p に対する一般化劣 p 進体である．

定理 1 ([50])　p を素数，k を劣 p 進体，$\overline{k}$ を k の代数閉包，S を k 上の非特異な代数多様体，X を k 上の双曲的曲線とする．このとき，$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の任意の連続開準同型射 $\alpha\colon \pi_1(S) \to \pi_1(X)$ に対して，$\alpha = \pi_1(f)$ となる唯一の k 上の支配的な射 $f\colon S \to X$ が存在する．特に，k 上の双曲的曲線に対する遠アーベル予想が成立する．(すなわち，k 上の双曲的曲線のなすクラスは，上で説明した遠アーベル性を持つ.)

定理 2 ([51])　p を素数，k を一般化劣 p 進体とすると，k 上の双曲的曲線に対する遠アーベル予想が成立する．

副有限群 G と素数の集合 Σ に対して，G の最大副 Σ 商を G^{Σ} と書くことにする．簡単に確認できるとおり，体 k 上の代数多様体 X に対して，自然な全射 $\pi_1(X \times_k \overline{k}) \twoheadrightarrow \pi_1(X \times_k \overline{k})^{\Sigma}$ の核は，($\pi_1(X \times_k \overline{k})$ の部分群としてだけでなく) $\pi_1(X)$ の部分群としても正規である．この正規閉部分群による $\pi_1(X)$ の商を $\pi_1^{(\Sigma)}(X)$ と書き，これを X の**幾何学的副 Σ 基本群** (geometrically pro-Σ fundamental group) と呼ぶ．基本完全系列は，副 Σ 基本完全系列と呼ばれる完全系列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X \times_k \overline{k})^{\Sigma} \longrightarrow \pi_1^{(\Sigma)}(X) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow 1$$

を誘導する．定理 1 と定理 2 は，主張に登場する '基本群 π_1' を，'素数 p を含む任意の素数の集合 Σ に対する幾何学的副 Σ 基本群 $\pi_1^{(\Sigma)}$' に取り替えても成立する非常に強力な定理である．

上述の基本 '予想' のとおり，Grothendieck は，遠アーベル幾何学を，素体上有限生成な体上でのみ展開される '大域的な設定における数論幾何学' だと認識していたようである．(この観点の背景についてのより詳しい解説が，[119] の 3 節や [122] の 4.1 節に与えられている.) しかしながら，上述の望月の仕事 (及び，その中で用いられている手法) によって，

実際には，劣 p 進体や一般化劣 p 進体上の代数多様体といった対象に対する本質的に '局

所的な現象' として，遠アーベル幾何学を理解することが可能である

ということが明らかになったのである．

3　混標数局所体上の絶対版遠アーベル予想

[121] の 1.2 節のとおり，遠アーベル幾何学における '復元' の定式化として，2 節の (相対) 遠アーベル性とは異なる，以下の '絶対版' を考えることもできる．そして，実際，例えば [122] の 3.1 節で説明されている玉川による有限体上の双曲的曲線に対する遠アーベル予想の研究は，この絶対版に関するものである．$\mathcal{C}$ を代数多様体のあるクラスとする．

絶対遠アーベル性　$\mathcal{C}$ に属する X と Y に対して，$\mathrm{Isom}(X,Y)$ を X から Y への同型射のなす集合，$\mathrm{Isom}(\pi_1(X),\pi_1(Y))$ を $\pi_1(X)$ から $\pi_1(Y)$ への連続同型射のなす集合とすると，自然な写像

$$\mathrm{Isom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Isom}\bigl(\pi_1(X),\pi_1(Y)\bigr)/\bigl(\pi_1(Y)\text{ による共役}\bigr)$$

は全単射となる．

代数多様体のクラス $\mathcal{C}$ が絶対遠アーベル性を持つとき，しばしば，'$\mathcal{C}$ に対する絶対版遠アーベル予想 (あるいは，絶対版 Grothendieck 予想) が成立する' という表現がなされる．

相対版遠アーベル予想の場合と同様に，もしも代数多様体のあるクラス $\mathcal{C}$ が絶対遠アーベル性を持つとすると，簡単にわかるとおり，$\mathcal{C}$ に属する X と Y に対して，X が Y と同型であることと $\pi_1(X)$ が $\pi_1(Y)$ と位相群として同型であることは同値となる．したがって，$\mathcal{C}$ に対する絶対版遠アーベル予想の成立は，大雑把には，'$\mathcal{C}$ に属する代数多様体 X に対して，基本群 $\pi_1(X)$ が X の同型類を完全に決定する' という主張を含んでいる．

本稿では，有理数体の有限次拡大体と同型な体を**数体** (number field) と呼び，そして，ある素数 p に対する p 進局所体のことを**混標数局所体** (mixed-characteristic local field) と呼ぶこととする．

与えられた代数多様体の基礎体が数体である場合には，相対遠アーベル性と絶対遠アーベル性の間には差がない．実際，$\square \in \{\circ,\bullet\}$ に対して，$k_\square$ を数体，$\overline{k}_\square$ を $k_\square$ の代数閉包，$X_\square$ を $k_\square$ 上の代数多様体，$\alpha\colon \pi_1(X_\circ) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_\bullet)$ を連続同型射とすると，標数 0 の代数閉体上の代数多様体の基本群の構造に関するある事実，及び，数体の絶対ガロア群の構造に関するある事実から，連続同型射 α は，いつでも可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(X_\circ \times_{k_\circ} \overline{k}_\circ) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_1(X_\circ) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & \mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_G"', "\wr"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(X_\bullet \times_{k_\bullet} \overline{k}_\bullet) \arrow[r] & \pi_1(X_\bullet) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

を定める ([76])．ここで，この可換図式の右側の垂直の連続同型射 $\alpha_G\colon \mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ に対して Neukirch–内田の定理 [107] を適用することで，体のある同型射 $k_\bullet \xrightarrow{\sim} k_\circ$ (の拡張 $\overline{k}_\bullet \xrightarrow{\sim} \overline{k}_\circ$) から α_G が生じることがわかる．そのため，その同型射 $k_\bullet \xrightarrow{\sim} k_\circ$ で $X_\bullet/k_\bullet$ を底変換することで，結論として，$(k_\circ,\overline{k}_\circ) = (k_\bullet,\overline{k}_\bullet)$，そして，$\alpha_G$ が $\mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) = \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ の恒等写像であると仮定しても一般性を失わないのである．

一方，与えられた代数多様体の基礎体が混標数局所体である場合には，Neukirch–内田の定理の混

標数局所体類似が不成立であるという事実 (例えば [79] を参照) から，絶対版遠アーベル予想を相対版遠アーベル予想に安直に (例えば，直前の数体の場合の議論のようには) 帰着することはできない．そして，実際，双曲的曲線の場合に限っても，混標数局所体上の絶対版遠アーベル予想の成否は，不明のままなのである．この

混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想

は，2000 年代初頭から今日までの遠アーベル幾何学における基本的な研究テーマの一つである．

混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想の研究の基礎は，望月による以下の定理である．

定理 3 ([53]) $\square \in \{\circ, \bullet\}$ に対して，$p_\square$ を素数，$k_\square$ を $p_\square$ 進局所体，$\overline{k}_\square$ を $k_\square$ の代数閉包，$X_\square$ を $k_\square$ 上の双曲的曲線とする．また，$X_\square$ の非特異コンパクト化を $X_\square^+$ $(\supseteq X_\square)$，$X_\square^+$ の種数を $g_\square$，$X_\square$ の無限遠因子 $(X_\square^+ \setminus X_\square)_{\mathrm{red}}$ $(\subseteq X_\square^+)$ の次数を $r_\square$ と書くことにする．そして，$\alpha\colon \pi_1(X_\circ) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_\bullet)$ を連続同型射とする．このとき，以下が成立する．

(1) 可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(X_\circ \times_{k_\circ} \overline{k}_\circ) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_1(X_\circ) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & \mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_G"', "\wr"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(X_\bullet \times_{k_\bullet} \overline{k}_\bullet) \arrow[r] & \pi_1(X_\bullet) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

が存在する．

(2) 連続同型射 α は，$X_\circ$ のカスプに付随する分解群の集合と $X_\bullet$ のカスプに付随する分解群の集合との間の全単射を定める．ここで，$X_\square$ のカスプとは，無限遠因子上の $X_\square^+$ の閉点のことである．

(3) 等式 $(p_\circ, g_\circ, r_\circ) = (p_\bullet, g_\bullet, r_\bullet)$ が成立する．特に，$X_\circ$ が $k_\circ$ 上射影的 (つまり，$r_\circ = 0$) であることと $X_\bullet$ が $k_\bullet$ 上射影的 (つまり，$r_\bullet = 0$) であることは同値となる．

(4) $X_\circ$ が $k_\circ$ の整数環上安定還元を持つことと $X_\bullet$ が $k_\bullet$ の整数環上安定還元を持つことは同値となる．

(5) $X_\circ$ が $k_\circ$ の整数環上安定還元を持つ (したがって，(4) より，$X_\bullet$ も $k_\bullet$ の整数環上安定還元を持つ) と仮定する．$k_\square$ の整数環上の $X_\square$ の安定還元の特殊ファイバーを $\underline{X}_\square$ と書くことにする．このとき，スキームの同型射 $\alpha_{\underline{X}}\colon \underline{X}_\circ \xrightarrow{\sim} \underline{X}_\bullet$ が存在する．その上，対応 '$\alpha \mapsto \alpha_{\underline{X}}$' は関手的である．特に，$X_\circ$ が $k_\circ$ の整数環上良還元を持つことと $X_\bullet$ が $k_\bullet$ の整数環上良還元を持つことは同値となる．

上述の数体上の代数多様体に対する議論と同様の議論によって，定理 1 を用いることで，

($\ddagger_1$) 定理 3 の設定のもと，連続同型射 α がスキームの同型射 $X_\circ \xrightarrow{\sim} X_\bullet$ から生じることと，定理 3 (1) の可換図式の右側の垂直の連続同型射 α_G が体のある同型射 $k_\bullet \xrightarrow{\sim} k_\circ$ から生じることは同値である

ことがわかる．一方，既に述べたとおり，数体の場合とは違い，混標数局所体の場合，いかなる体の同型射 '$k_\bullet \xrightarrow{\sim} k_\circ$' からも生じない絶対ガロア群の間の連続同型射 $\mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ が存在することが知られている．その上，より強く，一般には，絶対ガロア群の間の連続同型射 $\mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ の存在は，体 $k_\circ$ が体 $k_\bullet$ と同型であるという主張すら導かない ([110], [40])．

また，望月 [48], [60] や著者 [18] によって，そもそも，ホッジ・テイト性やクリスタル性などといった p 進表現論的性質が ‘群論的’ ではないということも明らかになっている．実際，著者 [18] による観察から，素数 p, p 進局所体 $k_\circ$ と $k_\bullet$，連続同型射 $\gamma\colon \mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$，そして，$\mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ のクリスタル的表現 ρ であって，引き戻し $\rho\circ\gamma$ がホッジ・テイト的ですらないものが存在することが確認できる．この ‘非群論性’ から，定理 3 の設定のもと，連続同型射 $\pi_1(X_\circ) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_\bullet)$ の左辺 ‘$\pi_1(X_\circ)$’ に関わる設定に付随する $p_\circ$ 進表現論的性質と右辺 ‘$\pi_1(X_\bullet)$’ に関わる設定に付随する $p_\bullet$ 進表現論的性質を安直に比較することはできない．つまり，

> 混標数局所体上の絶対版遠アーベル予想の研究は，いわゆる ‘p 進的な設定における数論幾何学の研究’ であるにも拘わらず，この研究においては，p 進表現論的性質を通じた議論が (少なくとも安直には) 適用できない

のである．現代の大部分の ‘p 進的な設定における数論幾何学の研究’ の中で p 進表現論的性質を通じた議論がその中核をなしているのは，そのような p 進表現論的議論の強力さのあらわれであろう．(実際，例えば，定理 1 や定理 2 の証明では，p 進ホッジ理論が非常に重要な役割を果たす.) そのような強力な理論の活用が許されないという点が，混標数局所体上の絶対版遠アーベル予想の研究における困難の大きな原因の一つなのである．

この 3 節の最後に，定理 3 (2) に関連する補足を与える．標数 0 の体 F とその代数閉包 $\overline{F}$ に対する以下の二つの条件を考えよう．

(a) ある素数 l が存在して，l 進円分指標 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathbb{Z}_l^\times$ の像は $\mathbb{Z}_l^\times$ の開部分群となる．

(b) F 上の任意のアーベル多様体のテイト加群の $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 不変部分は自明となる．

$\Box \in \{\circ, \bullet\}$ に対して，$F_\Box$ を標数 0 の体，$\overline{F}_\Box$ を $F_\Box$ の代数閉包，$C_\Box$ を $F_\Box$ 上の双曲的曲線とする．そして，$\overline{F}_\circ/F_\circ$ か $\overline{F}_\bullet/F_\bullet$ のいずれかが上の条件 (a) を満たすか，あるいは，$\overline{F}_\circ/F_\circ$ と $\overline{F}_\bullet/F_\bullet$ の両方が上の条件 (b) を満たすと仮定しよう．このとき，[60], [75], [97] のある議論を組み合わせることで，ある連続同型射 $\mathrm{Gal}(\overline{F}_\circ/F_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{F}_\bullet/F_\bullet)$ 上の任意の連続同型射 $\pi_1(C_\circ) \xrightarrow{\sim} \pi_1(C_\bullet)$ は，$C_\circ$ のカスプに付随する分解群の集合と $C_\bullet$ のカスプに付随する分解群の集合との間の全単射を定める，ということを証明することができる．ここで，よく知られているとおり，有理数体上有限生成な体や混標数局所体は，上の条件 (a) と (b) のいずれも満たす．

条件 (a) を満たさず条件 (b) を満たす体の例として，有理数体の最大アーベル拡大体の有限次拡大体を挙げることができる ([41])．特に，上の事実を適用することで，そのような体の上の双曲的曲線の基本群の間の適切な連続同型射が，カスプに付随する分解群の集合の間の全単射を定めることがわかる．Stix [97] は，中村 [75] の議論を基礎として，この全単射を用いて，そのような体の上の (そのコンパクト化の) 種数が 0 の双曲的曲線に対する相対版遠アーベル予想の設定におけるある結果を得た．

4 混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想の部分的解決

定理 3 を証明した後に，望月は，混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想の以下の部分的解決を得た．

定理 4 定理 3 の設定のもと，以下が成立する．

(1) 素数 $p_\circ = p_\bullet$ (定理 3 (3) を参照) が 5 以上であり，かつ，$X_\circ$ か $X_\bullet$ のいずれかが，基礎体の

整数環の剰余体上のある双曲的曲線の (通常曲線の理論 [47] の意味での) **正準持ち上げ** (canonical lifting) の生成ファイバーであるならば，$X_\circ$ と $X_\bullet$ は同型となる ([52]).

(2) 連続同型射 α が $X_\circ$ の閉点に付随する分解群の集合と $X_\bullet$ の閉点に付随する分解群の集合との間の全単射を誘導するならば，$\alpha = \pi_1(f)$ となる唯一の同型射 $f\colon X_\circ \xrightarrow{\sim} X_\bullet$ が存在する ([58], [61]).

(3) 連続同型射 α が $X_\circ$ の 3 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_3(X_\circ)$ の基本群と $X_\bullet$ の 3 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_3(X_\bullet)$ の基本群との間の連続同型射 $\pi_1(\mathrm{Cfg}_3(X_\circ)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Cfg}_3(X_\bullet))$ に持ち上がるならば，$\alpha = \pi_1(f)$ となる唯一の同型射 $f\colon X_\circ \xrightarrow{\sim} X_\bullet$ が存在する ([61], [30]). ここで，体 k 上の代数多様体 V と正整数 n に対して，V の n 個のコピーの k 上のファイバー積における様々な対角部分 ‘$\{(v_1, \ldots, v_n) \in V \times_k \cdots \times_k V \mid v_i = v_j\}$’ $(i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j)$ の補集合を $\mathrm{Cfg}_n(V)$ と書き，これを V の n 点**配置空間** (configuration space) と呼ぶ．また，もしも $X_\circ$ か $X_\bullet$ のいずれかが基礎体上非射影的ならば，主張に登場する ‘3 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_3(-)$’ を ‘2 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_2(-)$’ に取り替えた主張が成立する.

(4) $X_\circ$ か $X_\bullet$ のいずれかが**擬ベリー型** (pseudo-Belyi type) であるならば，$\alpha = \pi_1(f)$ となる唯一の同型射 $f\colon X_\circ \xrightarrow{\sim} X_\bullet$ が存在する ([60], [63], [25]). ここで，体 k 上の双曲的曲線 Z に対して，ある連結有限次エタール被覆 $W \to Z$，及び，W から k 上の 3 点抜き射影直線への支配的な射が存在するとき，Z が擬ベリー型であると言う．特に，混標数局所体上の擬ベリー型双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想が成立する.

定理 4 に関する三つの注意を与える.

• (2) より，混標数局所体上の双曲的曲線に対するセクション予想 (例えば [122] の 1.2 節を参照) の成立は，混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想の成立を導く.

• (2)，及び，[122] の 3.1 節の $(*)$ の周辺の議論と同様の議論によって，混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想の成立は，以下の主張の成立と同値となることがわかる．$\square \in \{\circ, \bullet\}$ に対して，$p_\square$ を素数，$k_\square$ を $p_\square$ 進局所体，$X_\square$ を $k_\square$ 上の射影的双曲的曲線としたとき，$\pi_1(X_\circ)$ が $\pi_1(X_\bullet)$ と位相群として同型ならば，$X_\circ$ が $X_\bullet$ と同型となる.

• 簡単に確認できるとおり，(そのコンパクト化の) 種数が 1 以下の任意の双曲的曲線は，擬ベリー型である．したがって，(4) より，混標数局所体上の種数 1 以下の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想が成立する.

次に，定理 4 の各主張の証明の大まかな方針を説明しよう．素数 $p_\circ = p_\bullet$ (定理 3 (3) を参照) を p と書くことにする．また，連続同型射 α に定理 3 (1) を適用することで得られる連続同型射 $\mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ を α_G と書くことにしよう.

まず (1) の証明を説明する．$X_\circ$ が $k_\circ$ の整数環上良還元を持ち，その上，その特殊ファイバーの正準持ち上げになっていると仮定しよう．すると，定理 3 (5) より，$X_\bullet$ も $k_\bullet$ の整数環上良還元を持つ．正整数 n に対して，$X_\square$ の良還元の ‘mod p^n’ を $(X_\square)_n$ と書くことにする．(与えられた仮定，及び，連続同型射 α_G の存在から，簡単な議論によって，$k_\circ$ も $k_\bullet$ も絶対不分岐となることに注意する.) また，再び定理 3 (5) より，同型射 $\alpha_{\underline{X}}\colon \underline{X}_\circ = (X_\circ)_1 \xrightarrow{\sim} \underline{X}_\bullet = (X_\bullet)_1$ が得られる．特に，$(X_\circ)_1$ が双曲的通常であることから，$(X_\bullet)_1$ も双曲的通常となる．$(X_\circ)_1$ の正準持ち上げである $X_\circ$ の良還元を定める $(X_\circ)_1$ 上の冪零通常固有束を $\mathcal{P}_\circ$ と書き，$\alpha_{\underline{X}}$ によって対応する $(X_\bullet)_1$ 上の冪零通常固有束を $\mathcal{P}_\bullet$ と書くことにしよう.

次に，$(X_\circ)_1$ の恒等写像と $(X_\circ)_1$ のフロベニウス射を $\mathcal{P}_\circ$ の超特異因子で貼り合わせてできる射

のある適切な p 進持ち上げの生成ファイバーとして得られる連結有限次エタール被覆 $Y_\circ \to X_\circ$ を考えよう．そして，連続同型射 α によって $Y_\circ \to X_\circ$ に対応する $X_\bullet$ の連結有限次エタール被覆を $Y_\bullet \to X_\bullet$ と書くことにする．すると，定理 3 (5) を適用することによって，被覆 $Y_\bullet \to X_\bullet$ がこれら曲線の安定還元の特殊ファイバーの間に誘導する射 $\underline{Y}_\bullet \to \underline{X}_\bullet = (X_\bullet)_1$ が，$(X_\bullet)_1$ の恒等写像と $(X_\bullet)_1$ のフロベニウス射を $\mathcal{P}_\bullet$ の超特異因子で貼り合わせてできる射となっていることがわかる．その上，局所的な計算によって，被覆 $Y_\bullet \to X_\bullet$ がこれら曲線の安定還元の 'mod p^2' の間に誘導する射の中に，$(X_\bullet)_1$ のフロベニウス射の 'mod p^2' 正準持ち上げがあらわれることもわかり，これによって，$(X_\bullet)_2$ が $(X_\bullet)_1$ の ($\mathcal{P}_\bullet$ に関する) 'mod p^2' 正準持ち上げであることがわかる．

$n \geq 3$ の場合にも，同様に，上で導入した被覆 $Y_\square \to X_\square$ を考えて，その上，持ち上げの正準性の判定に登場するような $\pi_1(X_\square)$ の階数 2 の (± 1 を除いて定まる) 表現の持つ性質を援用することで，$(X_\circ)_n$ の正準性から $(X_\bullet)_n$ の正準性を導くことができる．これにより，$X_\bullet$ が $(X_\bullet)_1$ の $\mathcal{P}_\bullet$ に関する正準持ち上げの生成ファイバーであることがわかり，特に，$X_\circ$ も $X_\bullet$ も $(X_\circ)_1 \xrightarrow{\sim} (X_\bullet)_1$ の $\mathcal{P}_\circ \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_\bullet$ に関する正準持ち上げの生成ファイバーであることから，$X_\circ$ が $X_\bullet$ と同型であることがしたがう．

次に (2) の証明を説明しよう．[58] での結果は，$X_\square$ が $k_\square$ 上非射影的である場合の結果であり，[61] での結果は，そのような仮定がなくても成立する結果となっている．また，[58] での結果は，著者 [21] によって，定理 3 (1) の可換図式と同様の可換図式が存在する 'α' に対して，混標数局所体よりも一般的な**クンマー忠実体** (Kummer-faithful field) の上の非射影的双曲的曲線の場合に一般化された．[58] での議論と [61] での議論はまったく異なる．ここでは，[58] での結果の証明の解説は省略して，より一般的な状況で適用可能な [61] での結果の証明の解説のみを与える．

定理 3 の直後の議論の ($\ddagger_1$) のとおり，α がスキームの同型射から生じることを証明するためには，連続同型射 $\alpha_G \colon \mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ が体のある同型射 $k_\bullet \xrightarrow{\sim} k_\circ$ から生じることを証明すれば充分であることを思い出そう．ここで，局所類体論によって，乗法群 $k_\square^\times$ が $\mathrm{Gal}(\overline{k}_\square/k_\square)$ の最大アーベル商に埋め込まれる．また，連続同型射 $\alpha_G \colon \mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ がこの部分商の間の同型射 $k_\circ^\times \xrightarrow{\sim} k_\bullet^\times$ を誘導することが知られている．特に，$\mathrm{Gal}(\overline{k}_\square/k_\square)$ の様々な開部分群にこの考察を適用することで，α_G から，代数閉包の乗法群の間の同型射 $\alpha_{\overline{k}^\times} \colon \overline{k}_\circ^\times \xrightarrow{\sim} \overline{k}_\bullet^\times$ を得ることができる．そして，望月 [48], [60] によって，α_G が体の同型射から生じることを証明するためには，次の主張 ($\ddagger_2$) を証明すれば充分であることが証明されている．以下，$\overline{k}_\square$ の整数環を $\mathcal{O}_{\overline{k}_\square}$，整数環 $\mathcal{O}_{\overline{k}_\square}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_{\overline{k}_\square}$ と書くことにする．

($\ddagger_2$) ある元 $a_\square, b_\square \in \mathfrak{m}_{\overline{k}_\square} \setminus \{0\}$ と $1 + a_\square \mathcal{O}_{\overline{k}_\square} \subseteq N_\square \subseteq 1 + b_\square \mathcal{O}_{\overline{k}_\square}$ なるある部分群 $N_\square \subseteq \overline{k}_\square^\times$ が存在して，同型射 $\alpha_{\overline{k}^\times} \colon \overline{k}_\circ^\times \xrightarrow{\sim} \overline{k}_\bullet^\times$ による $N_\circ$ の像が $N_\bullet$ となる．

簡単のため，$X_\circ$ は $k_\circ$ 上射影的 (したがって，定理 3 (3) より，$X_\bullet$ も $k_\bullet$ 上射影的) であると仮定する．($\ddagger_2$) を証明するために，必要ならば $X_\circ$ をその適切な連結有限次エタール被覆に取り替えることで，$X_\circ$ が $k_\circ$ の整数環上分裂安定還元を持ち，かつ，その安定還元の特殊ファイバー $\underline{X}_\circ$ の双対グラフが可縮でないと仮定しても一般性を失わない．したがって，アーベル多様体の半安定還元の理論から，$X_\circ$ のヤコビ多様体 $J_{X_\circ}$ の半安定還元の形式的完備化には 1 次元形式的トーラス '$\widehat{\mathbb{G}}_m$' が含まれる．そのような形式的トーラスが部分群 '$1 + \mathfrak{m}_{\overline{k}_\circ} \subseteq J_{X_\circ}(\overline{k}_\circ)$' を定めることに注意しよう．

ここで，例えば玉川による '非特異点の解消' [105] によって，必要ならば $k_\circ$ をその適切な有限次拡

大体に取り替えることで，以下の条件を満たす連結有限次エタール被覆 $Y_\circ \to X_\circ$ が存在する．

> $Y_\circ$ が $k_\circ$ の整数環上分裂安定還元を持ち，かつ，その安定還元の特殊ファイバー $\underline{Y}_\circ$ のある既約成分 $C_\circ \subseteq \underline{Y}_\circ$ は，被覆 $Y_\circ \to X_\circ$ がこれら曲線の安定還元の特殊ファイバーの間に誘導する射 $\underline{Y}_\circ \to \underline{X}_\circ$ によって，$\underline{X}_\circ$ の非特異な閉点に移される．

以下，ここでの条件を満たす $\underline{Y}_\circ$ の既約成分 $C_\circ$ を一つ固定する．$Y_\circ$ の閉点であって，その $Y_\circ$ の安定還元内での閉包が，$\underline{Y}_\circ$ の非特異点で $C_\circ$ と交わるものを，ここでは，'$C_\circ$ 的' な閉点と呼ぶことにしよう．必要ならば $k_\circ$ をその適切な有限次拡大体に取り替えることで，'$C_\circ$ 的' な $k_\circ$ 有理点を固定して，そして，それによる $Y_\circ$ のヤコビ多様体 $J_{Y_\circ}$ への埋め込み $Y_\circ \hookrightarrow J_{Y_\circ}$ と，被覆 $Y_\circ \to X_\circ$ が誘導する射 $J_{Y_\circ} \to J_{X_\circ}$ の合成 $j_\circ\colon Y_\circ \to J_{X_\circ}$ を考える．すると，$C_\circ$ に対する条件と一般化された Hensel の補題 [61] から，$Y_\circ$ のすべての '$C_\circ$ 的' な閉点の $j_\circ$ による像が生成する $J_{X_\circ}(\overline{k}_\circ)$ の部分群は，ヤコビ多様体 $J_{X_\circ}$ の形式的完備化の中の任意の 1 次元形式的トーラスによる部分群 '$1+\mathfrak{m}_{\overline{k}_\circ} \subseteq J_{X_\circ}(\overline{k}_\circ)$' と，($\ddagger_2$) に登場するような '$N_\circ$' の形で交わることがわかる．

直前の段落の $X_\circ$ に関する議論に登場する様々な対象に (連続同型射 α によって) 対応する $X_\bullet$ の側の対象を考えよう．すると，(2) の分解群に関する仮定と定理 3 (5) から，$X_\bullet$ の側の様々な '対応物たち' も，$X_\circ$ に関する議論の場合と同様の性質を持つことがわかる．したがって，これにより，$X_\bullet$ の側においても，($\ddagger_2$) に登場するような '$N_\bullet$' の形の交わりが得られる．最後に，これら '$N_\square$' の形の交わりをクンマー理論で基礎体のガロア群と関連付けることで，結論として，($\ddagger_2$) がしたがうのである．

この (2) は，素数 p とそれ以外のある素数を含む任意の素数の集合 Σ に対して，主張に登場する '基本群 π_1' を '幾何学的副 Σ 基本群 $\pi_1^{(\Sigma)}$' (2 節を参照) に取り替えても成立する．一方，そのような商を考えた場合，連続同型射 α によって関連付けることのできる $X_\circ$ と $X_\bullet$ の被覆に制限が生じるため，玉川による '非特異点の解消' [105] を適用することができなくなる．この理由から，[61] で与えられている (2) の実際の証明は，上で説明した議論よりもだいぶ複雑なものとなっている．

次に (3) の証明を説明する．まず最初に，**対数点配置空間** (log configuration space) を簡単に復習しよう．Deligne–Mumford [4], Knudsen–Mumford [44], Knudsen [42], [43] による双曲的な標点付き曲線のモジュライ空間のコンパクト化の理論を用いて，体 F 上の双曲的曲線 C と正整数 n に対して，n 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_n(C)$ の対数幾何学の枠組みにおける自然なコンパクト化である対数 n 点配置空間 log-$\mathrm{Cfg}_n(C)$ という F 上の対数スキームを定義することができる ([14], [70])．対数点配置空間の正確な定義はここでは省略するが，例えば C が F 上射影的な場合には，

- C の対数 1 点配置空間は，C 自身 (に自明な対数構造を導入して対数スキームと見做したもの)，
- C の対数 2 点配置空間は，$C \times_F C$ とその対角因子 '$c_1 = c_2$' が定める対数スキーム，
- C の対数 3 点配置空間は，$C \times_F C \times_F C$ の余次元 2 の閉部分スキーム '$c_1 = c_2 = c_3$' に沿ったブローアップと，対角因子 '$c_1 = c_2$', '$c_2 = c_3$', '$c_3 = c_1$' の狭義変換，及び，ブローアップの例外因子のなす (四つの既約成分を持つ) 正規交差因子が定める対数スキーム

となる．一般的な場合にも，対数点配置空間 log-$\mathrm{Cfg}_n(C)$ は，F 上のある非特異射影的代数多様体とその正規交差因子から定まる対数スキーム (特に，対数的正則) として得られ，また，その内部 (つまり，対数構造が自明となっている，下部スキームの最大の開部分スキーム) は，n 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_n(C)$ と同一視される．したがって，F の標数が 0 ならば，対数的純性定理 [8], [49] から，開埋め込み

$\mathrm{Cfg}_n(C) \hookrightarrow \text{log-}\mathrm{Cfg}_n(C)$ が誘導する外部連続準同型射 $\pi_1(\mathrm{Cfg}_n(C)) \to \pi_1^{\log}(\text{log-}\mathrm{Cfg}_n(C))$ は，外部連続同型射となる．ここで，$\pi_1^{\log}$ は，対数基本群 (例えば [8], [96], [15] を参照) を意味する．

さて, (3) の証明の説明に戻ろう．(3) で与えられた仮定により, α は, 連続同型射 $\pi_1(\mathrm{Cfg}_3(X_\circ)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Cfg}_3(X_\bullet))$ に持ち上がる．直前の解説より，この連続同型射を，対数基本群の間の連続同型射 $\pi_1^{\log}(\text{log-}\mathrm{Cfg}_3(X_\circ)) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log}(\text{log-}\mathrm{Cfg}_3(X_\bullet))$ と見做すことができる．ここで，上の対数 3 点配置空間の説明に登場した ‘ブローアップの例外因子’ を考えることで，必要ならば $k_\Box$ をその適切な有限次拡大体に取り替えることで，$k_\Box$ 上の 3 点抜き射影直線 $T_\Box$ の基本群 $\pi_1(T_\Box)$ と $\mathrm{Gal}(\overline{k}_\Box/k_\Box)$ 上同型となる $\pi_1^{\log}(\text{log-}\mathrm{Cfg}_3(X_\Box))$ の部分商が存在することがわかる．また，組み合わせ論的遠アーベル幾何学 (7 節を参照) の手法を用いることで，連続同型射 $\pi_1^{\log}(\text{log-}\mathrm{Cfg}_3(X_\circ)) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log}(\text{log-}\mathrm{Cfg}_3(X_\bullet))$ がその部分商の間の連続同型射 $\alpha_T \colon \pi_1(T_\circ) \xrightarrow{\sim} \pi_1(T_\bullet)$ を誘導することがわかる．ここで，3 点抜き射影直線は当然疑ベリー型であるので，次に解説される (4) より，この連続同型射 α_T がスキームの同型射 $T_\circ \xrightarrow{\sim} T_\bullet$ から生じることとなり，特に，定理 3 の直後の議論の ($\ddagger_1$) より，連続同型射 $\alpha_G \colon \mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ が体のある同型射 $k_\bullet \xrightarrow{\sim} k_\circ$ から生じることとなる．これにより，再び ($\ddagger_1$) から，元々の α がスキームの同型射 $X_\circ \xrightarrow{\sim} X_\bullet$ から生じることがわかる．

余談であるが, [61] の時点では, (4) は証明されていなかった．しかし, (2) と 6 節で説明するベリーカスプ化という手法によって, [61] の時点で, 混標数局所体上の (3 点抜き射影直線をその例とする) **ベリー型** (Belyi type) 双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想は, 既に解決されていた ([58]).

最後に (4) の証明である．$X_\bullet$ が擬ベリー型であると仮定する．定理 3 の直後の議論の ($\ddagger_1$) のとおり，α がスキームの同型射から生じることを証明するためには，連続同型射 $\alpha_G \colon \mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ が体のある同型射 $k_\bullet \xrightarrow{\sim} k_\circ$ から生じることを証明すれば充分である．一方，望月 [48], [60] によって，α_G が体の同型射から生じることを証明するためには，$\mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ の任意の開部分群上の準ルビン・テイト指標と呼ばれる p 進表現 (その正確な定義は省略するが，典型的な例として，有限次ガロア拡大 $k/\mathbb{Q}_p$ に対して，その整数環を $\mathcal{O}_k$ と書いた際の，合成

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)^{\mathrm{ab}} \xleftarrow[\text{局所類体論}]{\sim} (k^\times)^\wedge \xrightarrow[\text{による射影}]{\text{ある素元 } \in \mathcal{O}_k} \mathcal{O}_k^\times \xrightarrow[u \mapsto u^{-1}]{\sim} \mathcal{O}_k^\times \xhookrightarrow[\text{乗法}]{} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p \text{加群}}(k) \xrightarrow[\text{非正準的}]{\sim} \mathrm{GL}_{[k:\mathbb{Q}_p]}(\mathbb{Q}_p)$$

として生じる p 進表現が挙げられる) に対して，その α_G による引き戻しが，ホッジ・テイト重みが $\{0, 1\}$ に含まれるホッジ・テイト的な p 進表現となることを証明すれば充分であることが証明されている．また, [63] において，任意の準ルビン・テイト指標に対して，定義域である p 進局所体の絶対ガロア群の惰性群の適切な開部分群へのその制限が，虚数乗法を持つあるアーベル多様体の p 進テイト加群の部分商として得られることが証明されている．ここで，(標数 0 の体上の) 虚数乗法を持つアーベル多様体がいつでも数体上に降下可能であるという古典的事実を思い出そう．この事実と，超平面切断と基本群に関する古典的な定理によって，任意の準ルビン・テイト指標に対して，惰性群の適切な開部分群へのその制限は，ある数体上の双曲的曲線のヤコビ多様体の p 進テイト加群の部分商として得られるということがしたがう．したがって，$X_\bullet$ が疑ベリー型であるという仮定から，Belyĭ の定理によって，$\mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ の任意の開部分群上の準ルビン・テイト指標に対して，惰性群の適切な開部分群へのその制限は，$\pi_1(X_\bullet)$ のある開部分群 $H_\bullet \subseteq \pi_1(X_\bullet)$ に対する $H_\bullet \cap \pi_1(X_\bullet \times_{k_\bullet} \overline{k}_\bullet)$ の最大副 p アーベル商の部分商による p 進表現と同型であることがわかる．一方，よく知られているとお

り，$\pi_1(X_\circ)$ の任意の開部分群 $H_\circ \subseteq \pi_1(X_\circ)$ に対する $H_\circ \cap \pi_1(X_\circ \times_{k_\circ} \overline{k}_\circ)$ の最大副 p アーベル商の部分商による p 進表現は，ホッジ・テイト重みが $\{0,1\}$ に含まれるホッジ・テイト的な p 進表現である．これらの考察 (及び，任意の同型射 $\mathrm{Gal}(\overline{k}_\circ/k_\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\bullet/k_\bullet)$ が惰性群の間の同型射を誘導するというよく知られている事実) により，(4) がしたがうのである．

このように，望月によって，様々な形の部分的解決は得られているのであるが，一方，上述のとおり，混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想は，未だ完全には解決されていない．

定理 4 (2) のとおり，混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想を解決するためには，基本群の間の任意の連続同型射が閉点に付随する分解群と両立的であることを証明すれば充分である．室谷 [71] は，定理 3 (5) の ‘安定還元の特殊ファイバーの復元’ をもとに，Serre [94] の導入した i 不変量という概念を用いて，この連続同型射と分解群の両立性の研究を行った．特に，室谷により，例えば剰余標数が 2 でない混標数局所体上の双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想を解決するためには，$\pi_1(X_\circ) \cong \pi_1(X_\bullet)$ なる任意の剰余標数が 2 でない混標数局所体上の射影的双曲的曲線 $X_\circ$ と $X_\bullet$ に対して，解析多様体 $X_\circ(k_\circ)$ の i 不変量の偶奇が解析多様体 $X_\bullet(k_\bullet)$ の i 不変量の偶奇に等しいことを証明すれば充分であることが証明された．その上，定理 3 の設定のもと，$p_\circ \neq 2$, $r_\circ = 0$ であり，そして，$X_\circ$ と $X_\bullet$ のいずれも基礎体の整数環上で対数的平滑還元を持てば，$X_\circ(k_\circ)$ の i 不変量の偶奇が $X_\bullet(k_\bullet)$ の i 不変量の偶奇に等しくなるということも証明されている．

また，著者 [22] は，絶対版遠アーベル予想の設定における p 進局所体上の射影的双曲的曲線の幾何学的副 p 基本群の研究を行い，その帰結の一つとして，そのような曲線が潜在的通常還元を持つかどうかの絶対版・幾何学的副 p 版群論的判定法，及び，潜在的通常還元を持つ曲線に対する絶対版・幾何学的副 p 版群論的良還元判定法を確立した．これは，織田 [80], [81] や玉川 [101] による幾何学的副 l 版群論的良還元判定法の条件付き副 p 版であると考えられる．ここで，Andreatta–Iovita–Kim [2] の p 進良還元判定法を思い出そう．この p 進良還元判定法は，大雑把には，射影的双曲的曲線が良還元を持つことと，曲線の有理点が誘導する副 p 基本完全系列の分裂から定まるある p 進表現たちがクリスタル的表現になることが同値である，という内容の判定法である．一方，3 節で述べたとおり，p 進表現のクリスタル性は ‘群論的’ ではない．その上，著者 [17] によって，p 進局所体上の射影的双曲的曲線に付随する副 p 基本完全系列の分裂であって，曲線の有理点から生じないものが存在することが証明されている．これら二つの理由により，Andreatta–Iovita–Kim の p 進良還元判定法は，‘群論的’ ではない．特に，この p 進良還元判定法では，曲線の幾何学的副 p 基本群の純群論的な構造のみから良還元の有無を判定することはできないのである．

5　高次元代数多様体に対する遠アーベル予想

2 節で述べたとおり，Grothendieck は，2 次元以上の代数多様体に対する遠アーベル性の正確な定義を与えなかった．また，Grothendieck 自身が定義を与えなかったというだけでなく，そもそも，高次元にも通用する ‘適切な定義’ が存在するのかどうかすら，現時点においても不明のままである．一方，Grothendieck は，双曲的曲線のモジュライ空間や偏極付きアーベル多様体のモジュライ空間は遠アーベル的であろうと考えていたようである．しかし，[121] の 3.1 節でも述べられているとおり，伊原–中村 [37] によって，ジーゲルモジュラー多様体やヒルベルトモジュラー多様体の遠アーベル性に関する否定的結果が得られている．

また，Grothendieck は，**双曲的多重曲線** (hyperbolic polycurve) も遠アーベル的であろうと考えていた．ここで，双曲的多重曲線とは，大雑把には，‘双曲的曲線の反復ファイブレーション’ のことである．つまり，体 k 上のスキーム X に対して，ある正整数 n と構造射 $X \to \mathrm{Spec}(k)$ の分解

$$X = X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 = \mathrm{Spec}(k)$$

が存在して，この各々の射 $X_{i+1} \to X_i$ が双曲的曲線の族となっているとき，X が k 上の双曲的多重曲線であると言う．

双曲的多重曲線の一つの典型的な例は, 双曲的曲線の点配置空間 (定理 4 (3) を参照) である．実際, C を体 k 上の双曲的曲線としたとき，正整数 i に対して $\mathrm{Cfg}_{i+1}(C) \to \mathrm{Cfg}_i(C)$ を ‘$(c_1, \ldots, c_{i+1}) \mapsto (c_1, \ldots, c_i)$’ から定まる射影とすると，それらによる列

$$\mathrm{Cfg}_n(C) \longrightarrow \mathrm{Cfg}_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Cfg}_1(C) = C \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$$

を考えることによって，n 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_n(C)$ が双曲的多重曲線であることが確かめられる．[121] の 3.1 節で述べられているとおり，幾人かの研究者によって点配置空間に対する遠アーベル予想の研究が行われている．このテーマに関する現時点での最良の結果の一つとして，一般化劣 p 進体上の双曲的曲線の点配置空間に対する相対版遠アーベル予想の成立 (これは，[61] のある議論と [30] のある結果から直ちにしたがう) が挙げられる．ここで，よく知られているとおり，種数 0 の双曲的な標点付き曲線のモジュライ空間は，3 点抜き射影直線の点配置空間と自然に同一視される．そのため，これらの研究によって，例えば一般化劣 p 進体上の種数 0 の双曲的な標点付き曲線のモジュライ空間に対する相対版遠アーベル予想が成立することとなる．

次に，点配置空間とは限らない双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の研究を概観しよう．

まず最初に，望月 [50] は，定理 1 の応用として，劣 p 進体上の次元 2 の双曲的多重曲線に対する相対版遠アーベル予想の成立を証明した．そして，望月によるこの仕事の後に，著者によって，低次元双曲的多重曲線に対する以下の結果が得られた．

定理 5 ([20])　p を素数，k を劣 p 進体，$\overline{k}$ を k の代数閉包，S を k 上の次元 d_S の正規代数多様体，X を k 上の次元 d_X の双曲的多重曲線とする．また，$\alpha\colon \pi_1(S) \to \pi_1(X)$ を $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の連続開準同型射とする．このとき，以下の四つの条件 (1)–(4) のいずれかが成立するならば，$\alpha = \pi_1(f)$ となる唯一の k 上の支配的な射 $f\colon S \to X$ が存在する．

(1) $d_X = 1$.

(2) $d_X = 2$ であり，その上，α の核は位相的に有限生成である．

(3) $d_X = 3 \le d_S$ であり，α の核が有限であり，その上，S は **LFG 型** (LFG-type) 正規代数多様体である．ここで，標数 0 の体 F 上の正規代数多様体 V が以下の条件を満たすとき，V が LFG 型であると言う．F の任意の代数閉包 $\overline{F}$ と $\overline{F}$ 上の任意の正規代数多様体の間の射 $f\colon W \to V \times_F \overline{F}$ に対して，f の像が 1 点でないならば，外部連続準同型射 $\pi_1(W) \to \pi_1(V \times_F \overline{F})$ の像が無限群となる．(双曲的多重曲線は LFG 型である ([20]).)

(4) $d_X = 4 \le d_S$ であり，α が単射であり，その上，S は k 上の双曲的多重曲線である．

特に，k 上の次元 4 以下の双曲的多重曲線に対する相対版遠アーベル予想が成立する．

条件 (2) が成立している場合の定理 5 は，直前で述べた望月の仕事の一般化となっている．また，

その後の改良により，X が 2 次元の場合には，条件 (2) をそれよりももう少し弱い条件に取り替えられることが明らかになった ([27])．定理 5 の主張の中の様々な仮定を取り除いた場合の ‘反例’ については，[27] を参照されたい．

定理 5 の証明の出発点は，

($\ddagger_3$) 標数 0 の代数閉体上の双曲的曲線の基本群における，位相的に有限生成な正規閉部分群は，自明な部分群か開部分群となる

という事実である (例えば [70] を参照)．これは，代数多様体から双曲的曲線への射は定値的か支配的かのいずれかである，という初等的代数幾何学的事実の ‘群論版’ と考えられ，定理 5 の証明で基本的な役割を果たす．また，例えば，有理数体上有限生成な体 (より一般に，ヒルベルト体) や混標数局所体の絶対ガロア群も，($\ddagger_3$) での性質と同様の性質を持つことが知られている (例えば [7], [60] を参照)．

定理 5 の証明の方針は，X の次元に関する帰納的な議論を行うことで，定理 1 を活用しようというものである．定理 5 の設定のもと，双曲的多重曲線の定義に登場するような X の構造射の分解 $X = X_{d_X} \to X_{d_X-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 = \mathrm{Spec}(k)$ を固定して，そして，合成 $\beta\colon \pi_1(S) \overset{\alpha}{\to} \pi_1(X) \to \pi_1(X_{d_X-1})$ に対して，$\beta = \pi_1(g)$ となる k 上の支配的な射 $g\colon S \to X_{d_X-1}$ が存在すると仮定する．この状況から出発して，与えられた α が代数多様体の間の射 $S \to X$ から生じる，という条件に対する充分条件を模索しよう．(射 $g\colon S \to X_{d_X-1}$ による) X_{d_X-1} の S の中での正規化を $Z \to X_{d_X-1}$ と書き，Z の生成点を η と書くことにすると，η 上の代数多様体 $S \times_Z \eta$ と，η 上の双曲的曲線 $X \times_{X_{d_X-1}} \eta$ が得られる．また，双曲的多重曲線に関する基本的な事実により，α が η の基本群上の連続準同型射 $\pi_1(S \times_Z \eta) \to \pi_1(X \times_{X_{d_X-1}} \eta)$ を定めることがわかる．ここで，もしも

($\ddagger_4$) この連続準同型射 $\pi_1(S \times_Z \eta) \to \pi_1(X \times_{X_{d_X-1}} \eta)$ が，射 $S \times_Z \eta \to \eta$ から誘導される外部連続全射 $\pi_1(S \times_Z \eta) \twoheadrightarrow \pi_1(\eta)$ を経由しない

ことが証明できれば，上記 ($\ddagger_3$) より，連続準同型射 $\pi_1(S \times_Z \eta) \to \pi_1(X \times_{X_{d_X-1}} \eta)$ が開準同型射であることがしたがい，特に，定理 1 より，この連続準同型射が代数多様体の間の射 $S \times_Z \eta \to X \times_{X_{d_X-1}} \eta$ から生じることがわかる．そして，このことより，双曲的多重曲線に対する代数幾何学的考察から，実は α 自身が代数多様体の間の射 $S \to X$ から生じることもわかるのである．

上記 ($\ddagger_4$) の証明が，定理 5 の証明における一つの非自明な部分である．例えば $d_X = 2$ の場合には，Z は代数曲線であり，その幾何学はそれほど難しくなく，定理 5 の条件 (2) のように，比較的弱い仮定のもとで所望の ($\ddagger_4$) を証明することができる．一方，次元が $d_X - 1$ の代数多様体である Z の幾何学は，d_X が大きくなるにつれて複雑なものとなる．これが，定理 5 において，X の次元が大きくなる毎に強い仮定が必要となっていく原因である．

定理 5 のとおり，次元が 4 以下の双曲的多重曲線に対する相対版遠アーベル予想は解決されたが，一方，一般次元の双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想は未解決である．ここで，一般次元の双曲的多重曲線にも適用可能な定理を一つ紹介しよう．

定理 6 ([20], [90]) p を素数，k を一般化劣 p 進体，$\overline{k}$ を k の代数閉包とする．その上，X と Y を k 上の双曲的多重曲線とする．このとき，$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の連続同型射 $\pi_1(X) \overset{\sim}{\to} \pi_1(Y)$ の $\pi_1(Y \times_k \overline{k})$ 共役類のなす集合は，有限集合である．

一般次元の双曲的多重曲線に対する相対版遠アーベル予想の成立が証明されれば，定理 6 で議論されている集合は，集合 $\mathrm{Isom}_k(X,Y)$ との間の全単射を持ち，特に有限集合である．つまり，定理 6 による有限性は，幾何学的な同型射のなす集合 $\mathrm{Isom}_k(X,Y)$ の有限性の ‘群論版’ であると考えられる．

[20] の後に，[20] に関連した高次元代数多様体に対する遠アーベル予想のいくつかの研究が行われている．具体的には，以下のような研究が行われた．

- 木下–中山–著者 [29] による，劣 p 進体上の適切な付加構造付き楕円曲線のモジュライ空間に対する相対版遠アーベル予想の解決.
- 高尾 [100] による，劣 p 進体上の種数 2 の標点付き代数曲線のモジュライ空間の適切な連結有限次エタール被覆に対する相対版遠アーベル予想の解決.
- 澤田 [87], [88], [91] による，群コホモロジーを用いた双曲的多重曲線の数値的不変量の研究，定理 5 の幾何学的副 p 版 (2 節を参照) の研究，そして，双曲的多重曲線の基本群と点配置空間の基本群の間の同型射に関する相対版遠アーベル予想の研究.
- 著者 [25] による，一般化劣 p 進体上の**狭義単調減少型** (strictly decreasing type) 双曲的多重曲線に対する相対版遠アーベル予想の解決．ここで，体 k 上のスキーム X に対して，その構造射 $X \to \mathrm{Spec}(k)$ が $X = X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 = \mathrm{Spec}(k)$ $(n \geq 1)$ という分解を持ち，
  - この各々の射 $X_{i+1} \to X_i$ が双曲的曲線の族となっていて，そして，
  - 関数 ‘$\{1,\ldots,n\} \ni i \mapsto$ 双曲的曲線 $X_i \to X_{i-1}$ の階数 ‘$2g + \max\{0, r-1\}$’’ が狭義単調減少となっている

とき，X が k 上の狭義単調減少型双曲的多重曲線であると言う．

- 長町 [74] による，基礎体上有限生成かつ超越次元 1 の拡大体の上の双曲的曲線に対するセクション予想の成立を仮定した上での，$d_X = 2$ の場合の定理 5 の改良.

[20] とはまったく独立した双曲的多重曲線の遠アーベル幾何学の研究として，Schmidt–Stix [92] による**強双曲的アルティン近傍** (strongly hyperbolic Artin neighborhood) に対する相対版遠アーベル予想の研究が挙げられる．体 k 上のスキーム X に対して，その構造射 $X \to \mathrm{Spec}(k)$ が $X = X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 = \mathrm{Spec}(k)$ $(n \geq 1)$ という分解を持ち，

- この各々の射 $X_{i+1} \to X_i$ が双曲的曲線の族となっていて，
- この各々の射 $X_{i+1} \to X_i$ が固有射でなく，そして，
- 各 i に対して，X_i が k 上の有限個の双曲的曲線の積に埋め込める

とき，X が k 上の強双曲的アルティン近傍であると言う．定義から，強双曲的アルティン近傍は，もちろん双曲的多重曲線である．Schmidt–Stix [92] は，有理数体上有限生成な体上の強双曲的アルティン近傍に対する相対版遠アーベル予想が成立することを証明した．

その証明を簡単に説明しよう．X と Y を有理数体上有限生成な体 k 上の強双曲的アルティン近傍，そして，$\alpha\colon \pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$ を $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の連続同型射とする．ここで，Y は強双曲的アルティン近傍であるので，k 上の有限個の双曲的曲線 $C_1, \ldots, C_s$ と埋め込み $Y \hookrightarrow C_1 \times_k \cdots \times_k C_s$ が存在する．合成 $Y \hookrightarrow C_1 \times_k \cdots \times_k C_s \to C_i$ を f_i と書くことにしよう．f_i が定値的となるような C_i を取り除くことで，任意の i に対して f_i が支配的であると仮定しても一般性を失わない．このとき，合成 $\pi_1(X) \overset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \pi_1(Y) \xrightarrow{\pi_1(f_i)} \pi_1(C_i)$ に定理 1 を適用することで，この合成が，ある k 上の支配的な射 $X \to C_i$ から誘導されることがわかる．これらの射を並べることで得られる k 上の

射 $X \to C_1 \times_k \cdots \times_k C_s$ を f と書くことにしよう．したがって，もしも f の像が部分スキーム $Y \subseteq C_1 \times_k \cdots \times_k C_s$ に含まれるならば，f は k 上の射 $X \to Y$ を定める．そして，有理整数環上有限型で正則な k のモデル V と, X や Y や C_i たちの V 上の適切なモデルを考えて, その上, [122] の 3.1 節で議論されているような, 玉川による有限体上での ‘跡公式を用いた分解群の特徴付け’ を適用することによって, 所望の包含 ‘$\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$’ を証明するのである．以上が [92] の議論の大雑把な説明である．

Grothendieck は，有理数体上有限生成な体上の任意の非特異な代数多様体が ‘遠アーベル代数多様体’ からなる開基を持つであろう，という予測を与えていた ([11])．Schmidt–Stix [92] は，強双曲的アルティン近傍に対する相対版遠アーベル予想の成立の応用として，その予測の成立を証明した．そして，著者 [25] は，上述の一般化劣 p 進体上の狭義単調減少型双曲的多重曲線に対する相対版遠アーベル予想の成立の応用として，その Grothendieck の予測が任意の一般化劣 p 進体上の非特異な代数多様体に対しても成立することを証明した．

2 節の (相対) 遠アーベル性の定義の直後の ‘同型類’ に関する議論のとおり，もしも体 k 上の双曲的多重曲線に対する相対版遠アーベル予想が成立するならば，$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の固定された副有限群 Π に対して，k 上の双曲的多重曲線であって，その基本群が $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の位相群として Π と同型となるものは，k 上の同型を除いて高々一つしか存在しないことになる．澤田は，一般次元の双曲的多重曲線に対しても成立する，この観察に関連する以下の定理を証明した．

定理 7 ([90])　p を素数，k を一般化劣 p 進体，$\overline{k}$ を k の代数閉包，Π を $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の副有限群とする．このとき，k 上の双曲的多重曲線であって，その基本群が $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の位相群として Π と同型となるものは，k 上の同型を除いて高々有限個しか存在しない．

また，遠アーベル予想そのものの研究ではないが，双曲的多重曲線の基本群と幾何学の関係の研究として，長町 [72], [73] によって，双曲的多重曲線に対する良還元判定法の研究が行われている．これは，織田 [80], [81] や玉川 [101] による双曲的曲線の良還元判定法の高次元版であると考えられる．

この 5 節では，簡単のために，高次元代数多様体の相対遠アーベル性に関する結果のみについて述べてきた．しかし，これまでに説明してきた結果には，その絶対版も成立するものも存在する．詳しくは，それぞれの文献を参照されたい．

6　アルゴリズム的遠アーベル幾何学と単遠アーベル幾何学

2 節での基本 ‘予想’ の内容は，遠アーベル代数多様体はその基本完全系列から ‘復元’ される，というものであった．そして，その定式化である 2 節の相対遠アーベル性や 3 節の絶対遠アーベル性は，どちらも，二つの (遠アーベル的であろう) 代数多様体 ‘X’ と ‘Y’ が用意された際の，それらの間の同型射と，それらの基本群の間の連続同型射との関係を問題としている．つまり，この定式化による ‘遠アーベル性’ の研究とは，大雑把に言えば，適切な代数多様体のなす圏に制限された ‘π_1’ という関手の充満性や忠実性といった性質の研究であると要約される．そして，この場合，議論にしばしば登場する ‘群論的’ という用語は，‘基本群の間の任意の連続同型射で保たれる’ という性質を意味する．

望月は，基本 ‘予想’ における ‘復元’ とは何か，という問を改めて見つめ直し，[60], [61], [63] において，‘アルゴリズム的な観点による遠アーベル幾何学’，そして，より狭義な枠組みとしての**単遠アーベル幾何学** (mono-anabelian geometry) という考えを提唱した．その上，上述の ‘充満性・忠実性の観点によるこれまでの遠アーベル幾何学’ を**双遠アーベル幾何学** (bi-anabelian geometry) と呼

び，これら‘二つの遠アーベル幾何学’に区別を与えた．

アルゴリズム的な観点による遠アーベル幾何学とは，簡単に言ってしまえば，以下のような内容を持つ遠アーベル幾何学の研究のことである．

アルゴリズム的遠アーベル幾何学　与えられた代数多様体 X に対して，抽象的な位相群 $\pi_1(X)$ を‘入力データ’として，そして，代数多様体 X に付随する幾何学的対象 (例えば X それ自体) を‘出力データ’とする‘純位相群論的アルゴリズム’を確立せよ．

そして，**単遠アーベル的輸送** (mono-anabelian transport) (例えば [65] を参照) という枠組みでのその純位相群論的復元アルゴリズムの研究が，単遠アーベル幾何学である．遠アーベル幾何学の大きな応用である宇宙際タイヒミュラー理論 [66]–[69] では，このアルゴリズム的遠アーベル幾何学や単遠アーベル幾何学が中心的な役割を果たすのである．

上述の充満性・忠実性の観点による遠アーベル幾何学の場合，‘二つの代数多様体の基本群’が議論の出発点となるため，‘双’遠アーベル幾何学と呼ばれ，アルゴリズム的な観点による遠アーベル幾何学の場合，‘単一の代数多様体の基本群’が議論の出発点となるため，‘単’遠アーベル幾何学と呼ばれるのである．そして，もしも $\pi_1(X)$ から X それ自体を復元する位相群論的アルゴリズムが確立されたならば，その群論性によって，‘$\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$’という状況にそのアルゴリズムを適用することで‘$X \cong Y$’が得られるため，結論として，一般に，アルゴリズム的な観点による遠アーベル幾何学は，双遠アーベル幾何学的帰結を導くことになる．また，アルゴリズム的な観点による遠アーベル幾何学の場合，‘群論的’という用語は，‘アルゴリズムが考察下の位相群の位相群論的構造にのみ依存する言葉で言い表される’という性質を意味する．

標数 0 の体上の双曲的曲線 X に対して，X が数体上に降下可能であり，かつ，双曲的曲線 Y と (そのコンパクト化の) 種数が 0 の双曲的曲線 Z と二つの有限次エタール被覆 $X \leftarrow Y \rightarrow Z$ が存在するとき，双曲的曲線 X が**狭義ベリー型** (strictly Belyi type) であると言う．望月 [63] は，数体，あるいは，混標数局所体の上の狭義ベリー型双曲的曲線の基本群を入力データとして，その基礎体 (実際には，より強く，その代数閉包とそこへの基本群の自然な作用の組) やその関数体 (実際には，より強く，その適切なガロア拡大体とそこへの基本群の自然な作用の組) を出力データとする位相群論的アルゴリズムを確立した．これは，アルゴリズム的な観点による遠アーベル幾何学の基本的かつ重要な結果の一つである．その上，望月 [63] は，**対数フロベニウス両立性** (log-Frobenius compatibility) という単遠アーベル的輸送の枠組みにおけるこの復元アルゴリズムの単遠アーベル幾何学の研究を行った．

望月によるこの復元アルゴリズムの構成におけるもっとも重要な手法の一つは，**ベリーカスプ化** (Belyi cuspidalization) である．これは，Belyĭ の定理 (の望月による改良) を活用して，与えられた狭義ベリー型双曲的曲線の基本群から，その曲線の充分にたくさんの開部分スキームの基本群 (及び，そこから元々の基本群への，開埋め込みが誘導する外部連続全射) を復元する手法であり，大雑把には，以下のような手続きで実現される．

簡単のために，基礎体を数体としよう．X を数体 k 上の双曲的曲線とする．すると，標数 0 の代数閉体上の代数多様体の基本群の構造に関するある事実，及び，数体の絶対ガロア群の構造に関するある事実を用いて，位相群 $\pi_1(X)$ の位相群論的構造のみから

(1) その正規閉部分群 $\pi_1(X \times_k \overline{k}) \subseteq \pi_1(X)$ を復元

するアルゴリズムを確立することができる．また，3 節の最後の議論で述べられている結果を‘アルゴ

リズム的に翻訳' することによって，位相群 $\pi_1(X)$ の位相群論的構造のみから

(2) 曲線 $X \times_k \overline{k}$ のカスプに付随する惰性群として生じる $\pi_1(X)$ の閉部分群全体の集合を復元するアルゴリズムが得られる．

次に，数体 k 上の任意の (そのコンパクト化が) 種数 0 の双曲的曲線 P を固定しよう．望月 [55] による Belyĭ の定理の改良から，$X \times_k \overline{k}$ の開部分スキームであって，$P \times_k \overline{k}$ への $\overline{k}$ 上の有限エタール射を有するものたちが，$X \times_k \overline{k}$ の開基をなす．(望月 [55] 以前から，古典的な Belyĭ の定理によって，$X \times_k \overline{k}$ のそのような開部分スキームが少なくとも一つは存在することは知られていた．) 特に，X の任意の (空でない) 開部分スキーム $U \subseteq X$ に対して，必要ならば k をその適切な有限次拡大体に取り替えることで，U のある開部分スキーム $V \subseteq U$ $(\subseteq X)$，及び，k 上の有限次エタール被覆 $V \to P$ が存在する．ここで，曲線 X が狭義ベリー型であると仮定しよう．つまり，双曲的曲線 Y と種数 0 の双曲的曲線 Z と有限次エタール被覆 $X \leftarrow Y \to Z$ が存在すると仮定しよう．必要ならば Y をその適切な連結有限次エタール被覆に取り替えることで，被覆 $Y \to Z$ がガロアであると仮定しても一般性を失わない．また，必要ならば k をその適切な有限次拡大体に取り替えることで，Y も Z も k 上の双曲的曲線であるとして，そして，その上，k が総虚であるとしよう．このとき，さきほど固定した '種数 0 の双曲的曲線 P' としてこの Z を採用することで，k 上の双曲的曲線による列

$$X \xleftarrow[\text{エタール}]{\text{有限次}} Y \xrightarrow[\text{エタール，ガロア}]{\text{有限次}} Z \xleftarrow[\text{エタール}]{\text{有限次}} V \xhookrightarrow{\text{開埋め込み}} X$$

が得られ，したがって，これら曲線の基本群を考えることで，$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の副有限群の列

$$\pi_1(X) \hookleftarrow \pi_1(Y) \hookrightarrow \pi_1(Z) \hookleftarrow \pi_1(V) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$$

が得られる．構成から，副有限群によるこの列は，以下の意味による '特別な列' となっている．

> 副有限群 $\Pi_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(X)$ の開部分群 $\Pi_1 \subseteq \Pi_0$，Π_1 を正規開部分群として含む副有限群 Π_2 $(\supseteq \Pi_1)$，Π_2 のある開部分群 $\Pi_3 \subseteq \Pi_2$，連続全射 $\alpha \colon \Pi_3 \twoheadrightarrow \Pi_0$ による列
>
> $$\Pi_0 \hookleftarrow \Pi_1 \hookrightarrow \Pi_2 \hookleftarrow \Pi_3 \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \Pi_0$$
>
> が以下の三つの条件を満たすとき，ここでは，この列を '特別な列' と呼ぶこととする．
>
> (a) Π_1 に上の (1) を適用することで得られる正規閉部分群 '$\pi_1(X \times_k \overline{k})$' を $\Delta_1 \subseteq \Pi_1$ と書くと，共役による Π_2 の Π_1 $(\subseteq \Pi_2)$ への作用は，忠実であり，かつ，商 Π_1/Δ_1 に内部自己同型射を誘導する．その上，Π_2 は非自明な有限部分群を持たない．
>
> (b) $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対して，Π_i に上の (1) を適用 ((a) と定理 1 を参照) することで得られる正規閉部分群 '$\pi_1(X \times_k \overline{k})$' を $\Delta_i \subseteq \Pi_i$ と書くと，列 $\Pi_0 \hookleftarrow \Pi_1 \hookrightarrow \Pi_2 \hookleftarrow \Pi_3 \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \Pi_0$ のいずれの射も，商 'Π_i/Δ_i' の間の連続同型射を定める．そして，その上，$\Pi_0 \hookleftarrow \Pi_1 \hookrightarrow \Pi_2 \hookleftarrow \Pi_3$ による連続同型射 $\Pi_0/\Delta_0 \xleftarrow{\sim} \Pi_1/\Delta_1 \xrightarrow{\sim} \Pi_2/\Delta_2 \xleftarrow{\sim} \Pi_3/\Delta_3$ の合成の逆射と，連続全射 α によって誘導される連続同型射 $\Pi_3/\Delta_3 \xrightarrow{\sim} \Pi_0/\Delta_0$ は，共役を除いて一致する．
>
> (c) 連続全射 α の核は，Π_3 に上の (2) を適用 ((a) と定理 1 を参照) することで得られる 'カスプに付随する惰性群' の内の有限個で正規的位相的に生成される．

重要な点は，その定義から明らかなように，この '特別な列' という概念の定義が，完全に純位相群論的な条件によって与えられているという点である．

これまでの議論の一つの帰結は，開埋め込み $V \hookrightarrow X$ による連続全射 $\pi_1(V) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ は，ある '特別な列' $\Pi_0 \hookleftarrow \Pi_1 \hookrightarrow \Pi_2 \hookleftarrow \Pi_3 \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \Pi_0$ における最後の連続全射 $\alpha\colon \Pi_3 \twoheadrightarrow \Pi_0$ として生じる，というものである．また，その上，定理 1 を用いることで，

> 任意の '特別な列' $\Pi_0 \hookleftarrow \Pi_1 \hookrightarrow \Pi_2 \hookleftarrow \Pi_3 \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \Pi_0$ に対して, ある開部分スキーム $W \subseteq X$ が存在して，その '特別な列' における最後の連続全射 $\alpha\colon \Pi_3 \twoheadrightarrow \Pi_0$ は，開埋め込み $W \hookrightarrow X$ が誘導する連続全射 $\pi_1(W) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ と共役を除いて一致しなければならない

という主張の成立を確認することができる．

この議論の前半で選択した開部分スキーム '$U \subseteq X$' は, X の任意の (空でない) 開部分スキームであった．したがって, これまでの考察によって, (しばしば k をその適切な有限次拡大体に取り替える必要があったので, それに対応する形で, 位相群 $\pi_1(X)$ だけでなく, その商 $\pi_1(X)/\pi_1(X \times_k \overline{k}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の様々な開部分群から生じる $\pi_1(X)$ の開部分群も考えた上で) 様々な '特別な列' における最後の連続全射 '$\alpha\colon \Pi_3 \twoheadrightarrow \Pi_0$' を考えることで，位相群 $\pi_1(X)$ の位相群論的構造のみから，X の充分にたくさんの開部分スキームの基本群 (及び，そこから $\pi_1(X)$ への，開埋め込みが誘導する外部連続全射) を復元することができたことになる．以上が，ベリーカスプ化の大雑把な説明である．

アルゴリズム的な観点による遠アーベル幾何学，あるいは，単遠アーベル幾何学における重要な概念の一つとして，**円分物** (cyclotome) という概念がある．円分物とは，ある適切なスキーム論的設定において，'$\widehat{\mathbb{Z}}(1)$' と自然に同一視される対象のことである．例えば，C を標数 0 の代数閉体上の双曲的曲線，また，C^+ ($\supseteq C$) をその非特異コンパクト化とすると，C^+ の種数が 1 以上ならば，

- 第 2 コホモロジー群の双対 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H^2(\pi_1(C^+), \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}})$ や,
- C のカスプに付随する惰性群 $I \subseteq \pi_1(C)$

は，よく知られているとおり，'$\widehat{\mathbb{Z}}(1)$' との間の自然な同一視を有するため，特に，円分物である．

一方，円分物と '$\widehat{\mathbb{Z}}(1)$' との間の自然な同一視の構成は，通常，その設定において円分物を生じさせた幾何学的対象のスキーム論的な構造に強く依存する．そのため，遠アーベル幾何学のような '位相群論的な操作しか許されない状況' においては，そのような同一視を直ちに手に入れることはできない．例えば上の例の場合，スキーム論から生じる同一視 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H^2(\pi_1(C^+), \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}(1) \cong I$ の合成として生じる同型 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(H^2(\pi_1(C^+), \widehat{\mathbb{Z}}), \widehat{\mathbb{Z}}) \cong I$ の純位相群論的構成の存在は，少なくとも明らかではない．したがって，特に，遠アーベル幾何学では，議論に登場する様々な円分物たちを区別して扱わなければならないということになる．別の言い方をすれば，位相群論的な操作しか許されない遠アーベル幾何学において，円分物の間の自然な同型の構成は，'非自明な定理' となる．そういった円分物の間の自然な同型は，**円分同期化同型** (cyclotomic synchronization isomorphism)，あるいは，**円分剛性同型** (cyclotomic rigidity isomorphism) と呼ばれ，アルゴリズム的な観点による遠アーベル幾何学や単遠アーベル幾何学では，その構成を確立することが重要となるのである．

古典的な Neukirch–内田の定理 [107], [108] は，大域体に対して，3 節の冒頭の絶対遠アーベル性の定義に登場するような全単射性の成立を主張する双遠アーベル幾何学的結果である．一方，関数体の場合のこの定理 [108] の証明は，実際に，絶対ガロア群による関数体の位相群論的復元アルゴリズム

を与えている．内田のこの関数体の場合の証明が，澤田 [89] によってアルゴリズム的な観点から丁寧に整理されているので，興味のある読者は参照されたい．しかしながら，数体の場合 [107] には，絶対ガロア群による数体の位相群論的復元アルゴリズムをその証明から直ちに得ることはできない．著者は，いわゆる ‘内田の補題’ と呼ばれる主張 (これは，[119] の 4 節の ‘Proposition’ のような結果のことである) の ‘数体版’ を証明して ([19])，そして，それを用いて，絶対ガロア群による数体の位相群論的復元アルゴリズムを確立した ([24])．この復元アルゴリズムについての解説が [126] に与えられている．また，望月の場合と同様，[24] では，対数フロベニウス両立性という単遠アーベル的輸送の枠組みにおけるこの数体の復元アルゴリズムの単遠アーベル幾何学の研究が行われている．

混標数局所体に対するアルゴリズム的観点による遠アーベル幾何学は，それほどたくさんの予備知識を必要とすることなく理解が可能である一方で，いくつもの遠アーベル幾何学の基本的な考え方がその議論に登場するため，非常に ‘入門的’ であると考えられる．著者による [28] は，その混標数局所体に対するアルゴリズム的観点による遠アーベル幾何学の基本的な部分をまとめた文献である．興味のある読者は参照されたい．そして，著者 [23] は，[28] で展開されている基礎理論をもとに，混標数局所体に対するアルゴリズム的観点による遠アーベル幾何学の様々な話題についての研究を行った．

7　組み合わせ論的遠アーベル幾何学

複素数を係数とする形式的冪級数環 $\mathcal{O}_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C}[[t]]$ の商体 $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C}((t))$ 上の射影的な双曲的曲線 X であって，$\mathcal{O}_k$ 上に安定還元を持つものを考えよう．このとき，X に付随する基本完全系列 $1 \to \pi_1(X \times_k \overline{k}) \to \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to 1$ において，よく知られているとおり，右側の位相群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ は $\widehat{\mathbb{Z}}$ と同型となり，左側の位相群 $\pi_1(X \times_k \overline{k})$ はあるコンパクトリーマン面の位相的基本群の副有限完備化と同型となる．その上，それら同型を適切に選べば，基本完全系列から生じる $1 \in \widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の $\pi_1(X \times_k \overline{k})$ への外作用 (詳しくは，例えば，[119] の 1 節や [122] の 1.1 節を参照) は，そのコンパクトリーマン面の写像類群のある元による外作用 (が副有限完備化に誘導する外作用) と一致する．このような設定における望月のある仕事 [57] の一つの帰結が，以下の主張の成立である．$\Box \in \{\circ, \bullet\}$ に対して，$X_\Box$ を上の ‘X’ と同様の $k = \mathbb{C}((t))$ 上の射影的双曲的曲線とすると，$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 上の任意の連続同型射 $\alpha\colon \pi_1(X_\circ) \stackrel{\sim}{\to} \pi_1(X_\bullet)$ は，

- $X_\circ$ の $\mathcal{O}_k$ 上の安定還元の特殊ファイバーの既約成分に付随する分解群の集合と $X_\bullet$ の $\mathcal{O}_k$ 上の安定還元の特殊ファイバーの既約成分に付随する分解群の集合との間の全単射，及び，
- $X_\circ$ の $\mathcal{O}_k$ 上の安定還元の特殊ファイバーの双対グラフと $X_\bullet$ の $\mathcal{O}_k$ 上の安定還元の特殊ファイバーの双対グラフとの間の同型射

を誘導する．この主張の証明で用いられるもっとも重要な事実は，いわゆる ‘周期行列の非退化性’ (より数論幾何学的な言い回しとしては，いわゆる ‘曲線のヤコビ多様体に対する重み・モノドロミー予想の成立’) である．最大アーベル商 $\pi_1(X \times_k \overline{k})^{\mathrm{ab}}$ への $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の作用を考えよう．周期行列の非退化性によって (より数論幾何学的な言い回しとしては，‘重みフィルトレーション’ が ‘モノドロミーフィルトレーション’ と一致するという事実によって)，$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ が自明に作用する $\pi_1(X \times_k \overline{k})^{\mathrm{ab}}$ の最大部分加群を $M \subseteq \pi_1(X \times_k \overline{k})^{\mathrm{ab}}$ と書くと，任意の素数 l に対して，$(\pi_1(X \times_k \overline{k})^{\mathrm{ab}}/M) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Q}_l$ の次元は，X の安定還元の特殊ファイバーの双対グラフの第 1 ベッチ数と一致する．この考察は，‘$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ が自明に作用する’ という部分を ‘$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の充分に小さい開部分群が自明に作用する’ に取り替え

れば，$\pi_1(X)$ の任意の開部分群に対して適用可能であり，このようにして $X_\circ$ と $X_\bullet$ の様々な連結有限次エタール被覆の (幾何学的) 安定還元の特殊ファイバーの双対グラフの第 1 ベッチ数を ‘復元’・比較することで，所望の全単射や同型射を得ることができるのである．

6 節までに議論してきた ‘遠アーベル幾何学’ においては，数体や混標数局所体などといった数論的な体の絶対ガロア群 ‘$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$’ の拡大である基本群 ‘$\pi_1(X)$’ の構造から，考察下の代数多様体 ‘$X$’ の数論幾何学的情報を復元することが，研究の主な内容であった．一方，上述の望月の結果においては，リーマン面の位相的基本群 (の副有限完備化) への写像類群の外作用といった組み合わせ論的群論的な外作用から定まる拡大である基本群 ‘$\pi_1(X)$’ の構造から，曲線の安定還元の特殊ファイバーの双対グラフなどといった組み合わせ論的な情報が復元されている．後者のような結果は，組み合わせ論的遠アーベル予想型 (あるいは，組み合わせ論的 Grothendieck 予想型) の結果と呼ばれている．そして，望月 [59] は，その組み合わせ論的遠アーベル予想型の結果を，双曲的曲線の点配置空間の基本群 (つまり，適切なリーマン面上の純組紐群の副有限完備化) の外部連続自己同型群の研究に応用した．

このような，組み合わせ論的遠アーベル予想型の結果それ自体の確立や，あるいは，組み合わせ論的遠アーベル予想型の結果の応用の確立が，**組み合わせ論的遠アーベル幾何学** (combinatorial anabelian geometry) における研究の主要な内容である．

組み合わせ論的遠アーベル幾何学の一つの中心的対象は，**遠可換型の PSC 型半グラフ** (semi-graph of anabelioids of PSC-type) [57] である．(この ‘PSC’ は，pointed stable curve の略である．) これは，望月による**遠可換型** (anabelioid) [54] や**遠可換型の半グラフ** (semi-graph of anabelioids) [56] の理論を基礎として定義される概念であり，標点付き安定曲線が持つ組み合わせ論的情報をガロア圏的な観点から記述する概念である．標数 0 の代数閉体上の標点付き安定曲線 X に対して，X の双対半グラフ (つまり，X の既約成分を頂点，X の標点を開辺，X の特異点を閉辺とする半グラフ) を $\mathbb{G}$ と書くことにする．すると，

- $\mathbb{G}$ の各頂点に，その頂点に対応する既約成分から標点や特異点を除いて得られる非特異な代数曲線の有限次エタール被覆たちによる連結遠可換型 (つまり，ガロア圏) を置き，
- 各辺にも ‘同様’ の連結遠可換型 (そのガロア群は非正準的に $\widehat{\mathbb{Z}}$ と同型) を置き，そして，
- 頂点と辺の間の分岐に，辺の上の遠可換型から頂点の上の遠可換型への ‘制限’ による自然な射 (ガロア圏の言葉で言えば，頂点の上のガロア圏から辺の上のガロア圏への ‘制限’ による自然な完全関手) を置くことで，

遠可換型の半グラフが得られる．標点付き安定曲線からこのようにして得られる遠可換型の半グラフが，遠可換型の PSC 型半グラフである．遠可換型やガロア圏といった概念の代わりにその基本群を用いることで，Serre による [93] に登場する ‘群のグラフ’ という概念の枠組みで，遠可換型の PSC 型半グラフと似たような概念を定義することは，もちろん可能である．一方，その場合，遠可換型から基本群に移行するために，既約成分や標点，特異点といった，標点付き安定曲線の様々な ‘部品’ の基点を一斉に固定しなければならない．しかしながら，そういったすべての ‘部品’ の共通部分は一般には空集合であり，特に，そのような各 ‘部品’ の基点を一斉に大域的な整合性を持つ形で固定することはできない．この観点から，‘群のグラフ’ によるアプローチは，大変に不自然なものであると考えられる．

以下，遠可換型の PSC 型半グラフを，短く，PSC 型遠半グラフと呼ぶことにしよう．

PSC 型遠半グラフの ‘第 2 コンパクト台コホモロジー群’ の双対として，PSC 型遠半グラフに付随

する円分物 (6 節を参照) を定義することができる ([32]). また，ガロア圏に対する基本群の構成と類似の構成によって，(基点を固定すれば) PSC 型遠半グラフの基本群を定義することができる．そして，下部半グラフの頂点の ‘分解群’ として，**頂点部分群** (verticial subgroup) と呼ばれる基本群の閉部分群が定まる．この 7 節の冒頭の議論に登場する基本群 ‘$\pi_1(X \times_k \overline{k})$’ を，$X$ の $\mathcal{O}_k$ 上の安定還元の特殊ファイバーとして生じる複素数体 $\mathbb{C}$ 上の安定曲線に付随する PSC 型遠半グラフの基本群と見做すことができる．その上，この同一視は，既約成分の分解群と，それに対応する頂点に付随する頂点部分群との間の同一視を定める．

PSC 型遠半グラフの自己同型射の中で，**副有限デーン多重捻り** (profinite Dehn multi-twist) が特に重要である．$\mathcal{G}$ を PSC 型遠半グラフ，$\Lambda_{\mathcal{G}}$ を $\mathcal{G}$ に付随する円分物としよう．$\mathcal{G}$ の自己同型射であって，$\mathcal{G}$ の下部半グラフに恒等写像を誘導して，その上，各頂点や各辺の上の遠可換型にも自明な自己同型射を誘導するものを，副有限デーン多重捻りと呼ぶ．$\mathcal{G}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ の中の副有限デーン多重捻りのなす部分群を $\mathrm{Dehn}(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ と書くことにしよう．[32] で確立された副有限デーン多重捻りの一般論から，$\mathrm{Dehn}(\mathcal{G})$ は，$\mathcal{G}$ の各閉辺でラベル付けされた円分物 $\Lambda_{\mathcal{G}}$ の直和 $\bigoplus_{\mathcal{G}\text{ の閉辺}} \Lambda_{\mathcal{G}}$ と自然に同型となる．副有限デーン多重捻り $\iota = (\lambda_\nu)_\nu \in \bigoplus \Lambda_{\mathcal{G}} \cong \mathrm{Dehn}(\mathcal{G})$ を固定しよう．任意の閉辺 ν に対して，$\lambda_\nu \in \Lambda_{\mathcal{G}}$ によって位相的に生成される閉部分群が $\Lambda_{\mathcal{G}}$ の開部分群となるとき，ι が**狭義ノード非退化型** (strictly nodally nondegenerate)，あるいは，短く，**SNN 型** (SNN-type) であると言う．そして，ι が SNN 型であり，かつ，任意の二つの閉辺 ν, ν' に対して，ある正整数 a, b が存在して $a\lambda_\nu = b\lambda_{\nu'}$ となるとき，ι が **IPSC 型** (IPSC-type) であると言う．また，$\mathcal{G}$ の自己同型射に対して，その適切な非零整数冪が SNN 型となるときに，その自己同型射が**ノード非退化型** (nodally nondegenerate)，あるいは，短く，**NN 型** (NN-type) であると言う．(ここで述べた SNN 型，IPSC 型，NN 型の定義は，[31] で与えられた定義とは異なる．しかし，[32] での PSC 型遠半グラフの副有限デーン多重捻りとスキーム論的モノドロミー作用の比較によって，これらの定義がそれぞれ一致することが確認されている.) この 7 節の冒頭の議論の設定において，基本完全系列から生じる $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の位相的生成元の $\pi_1(X \times_k \overline{k})$ への外作用による外部連続自己同型射は，X の $\mathcal{O}_k$ 上の安定還元の特殊ファイバーに付随する PSC 型遠半グラフの IPSC 型自己同型射から生じる外部連続自己同型射となっている．また，任意の IPSC 型自己同型射は，このような ‘完備離散付値体上の安定還元を持つ双曲的曲線に付随する外ガロア作用’ によって生じることが知られている ([32]).

この 7 節の冒頭で述べた望月による組み合わせ論的遠アーベル予想型の結果は，その後，以下のように改良された．

定理 8 $\square \in \{\circ, \bullet\}$ に対して，$\mathcal{G}_\square$ を PSC 型遠半グラフ，$\Pi_{\mathcal{G}_\square}$ を $\mathcal{G}_\square$ の基本群，$\iota_\square \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_\square)$ を $\mathcal{G}_\square$ の NN 型自己同型射，$I_\square \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_\square)$ を $\iota_\square$ で位相的に生成される閉部分群，$1 \to \Pi_{\mathcal{G}_\square} \to \Pi_{I_\square} \to I_\square \to 1$ を $I_\square \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_\square)$ による $I_\square$ の $\Pi_{\mathcal{G}_\square}$ への外作用から定まる拡大とする．そして，$\alpha\colon \Pi_{I_\circ} \to \Pi_{I_\bullet}$ をある連続同型射 $I_\circ \xrightarrow{\sim} I_\bullet$ 上の連続同型射とする．このとき，以下の条件 (a), (b) のいずれかが満たされるならば，連続同型射 $\alpha\colon \Pi_{I_\circ} \to \Pi_{I_\bullet}$ は，$\Pi_{\mathcal{G}_\circ}$ の頂点部分群の集合と $\Pi_{\mathcal{G}_\bullet}$ の頂点部分群の集合との間の全単射を誘導する．

(a) $\iota_\circ$ か $\iota_\bullet$ のいずれかが IPSC 型である ([57], [33], [26]).

(b) $\Pi_{\mathcal{G}_\circ}$ のある頂点部分群に含まれる非自明な元 $\gamma \in \Pi_{\mathcal{G}_\circ}$ が存在して，その像 $\alpha(\gamma) \in \Pi_{\mathcal{G}_\bullet}$ が $\Pi_{\mathcal{G}_\bullet}$ のある頂点部分群に含まれる ([31], [33]).

8 組み合わせ論的遠アーベル幾何学の応用と進展

定理8の組み合わせ論的遠アーベル予想型の結果の応用として，双曲的曲線の点配置空間の基本群の連続自己同型射に関する成果を得ることができるので，それを紹介しよう．n を正整数，k を標数0の代数閉体，X を k 上の双曲的曲線とする．また，X の非特異コンパクト化を X^+ $(\supseteq X)$，X^+ の種数を g，X の無限遠因子 $(X^+ \setminus X)_{\mathrm{red}}$ $(\subseteq X^+)$ の次数を r と書くことにする．そして，X の n 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_n(X)$ (定理4 (3) を参照) の基本群を $\Pi_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\mathrm{Cfg}_n(X))$ と書き，その上，副有限群 Π_n の外部連続自己同型射のなす群を $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ と書くことにしよう．このとき，'$\mathrm{Cfg}_n(X)$ の n 個の成分の置換' を考えることで得られる n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathrm{Cfg}_n(X)$ への作用は，単射

$$\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$$

を誘導する．以下，この単射によって，$\mathfrak{S}_n$ を $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ の部分群と見做すことにする．ここで，k が複素数体の場合，よく知られているとおり，基本群 Π_n は，X に付随するリーマン面上の n 本の糸の純組紐群と呼ばれる群の副有限完備化と同型である．

$\{1,\ldots,n\}$ の部分集合 $S=\{i_1,\ldots,i_{\sharp S}\}\subseteq\{1,\ldots,n\}$ $(i_1<\cdots<i_{\sharp S})$ に対して，'$(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(x_{i_1},\ldots,x_{i_{\sharp S}})$' によって定まる射影 $\mathrm{Cfg}_n(X)\to\mathrm{Cfg}_{\sharp S}(X)$ は，基本群の間の外部連続全射 $p_S\colon\Pi_n\twoheadrightarrow\Pi_{\sharp S}$ を定める．ある S に対する p_S の核として得られる Π_n の正規閉部分群を**ファイバー部分群** (fiber subgroup) と呼ぶ．$\mathrm{Out}(\Pi_n)$ の元であって，Π_n の任意のファイバー部分群を保つもの全体のなす部分群を $\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)\subseteq\mathrm{Out}(\Pi_n)$ と書くことにしよう．すると，外部連続全射 $p_S\colon\Pi_n\twoheadrightarrow\Pi_{\sharp S}$ は，自然に準同型射

$$\Phi_{n\to\sharp S}\colon \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)\longrightarrow\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_{\sharp S})$$

を誘導する．望月と著者 [59], [32] によって，この準同型射は，$\sharp S$ にしか依存しないということ (つまり，$\sharp T=\sharp S$ なる任意の $T\subseteq\{1,\ldots,n\}$ による p_T から定まる準同型射 $\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)\to\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_{\sharp T})=\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_{\sharp S})$ が先の準同型射と一致するということ) が証明されている．

ファイバー部分群の特別な場合として，$m\in\{1,\ldots,n\}$ に対する $F_m\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Ker}(p_{\{1,\ldots,m\}})\subseteq\Pi_n$，$F_0\stackrel{\mathrm{def}}{=}\Pi_n$ という正規閉部分群がある．ホモトピー完全系列の一般論から，Π_n の部分商 F_{m-1}/F_m を，'$(x_1,\ldots,x_m)\mapsto(x_1,\ldots,x_{m-1})$' によって定まる射影 $\mathrm{Cfg}_m(X)\to\mathrm{Cfg}_{m-1}(X)$ の幾何学的ファイバーの基本群と見做すことができる．$\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$ の元であって，任意の $m\in\{1,\ldots,n\}$ に対して，それが定める F_{m-1}/F_m の連続自己同型射の Π_m 共役類が，射影 $\mathrm{Cfg}_m(X)\to\mathrm{Cfg}_{m-1}(X)$ の幾何学的ファイバーのカスプに付随する分解群の Π_m 共役類の集合の自己全単射を誘導するもの全体のなす部分群を $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n)\subseteq\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$ と書くことにしよう．

(g,r) が $(0,3)$ か $(1,1)$ の場合には，ファイバー部分群だけでなく，それを一般化した**一般化ファイバー部分群** (generalized fiber subgroup) を考える設定が自然である．以下では，簡単のために，ファイバー部分群だけ考察すれば充分である $(g,r)\notin\{(0,3),(1,1)\}$ の場合の定理8の応用を述べよう．ファイバー部分群だけでなく一般化ファイバー部分群も考慮に入れれば，(g,r) が $(0,3)$ や $(1,1)$ の場合にも以下の結果の類似が成立する．

定理9 n, g, r, Π_n などを上のように定める．また，$(g,r)\notin\{(0,3),(1,1)\}$ と仮定する．準同型射 $\Phi_{(n+1)\to n}\colon\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_{n+1})\to\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$ を Φ と書くことにする．このとき，以下が成立する．

(1) 準同型射 $\Phi\colon \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_{n+1}) \to \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$ の像は $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n) \subseteq \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$ に含まれる ([32]).

(2) 準同型射 Φ の制限 $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{n+1}) \to \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n)$ は単射である．また，その上，$(r,n) \neq (0,1)$ ならば，準同型射 $\Phi\colon \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_{n+1}) \to \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$ は単射である ([59], [31], [33]).

(3) 群 $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ は，二つの部分群 $\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$, $\mathfrak{S}_n \subseteq \mathrm{Out}(\Pi_n)$ で生成される．また，もしも $(r,n) \neq (0,2)$ ならば，等式 $\mathrm{Out}(\Pi_n) = \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n) \times \mathfrak{S}_n$ が成立する ([70], [33], [30]).

(4) $n \geq 4$ ならば，等式 $\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n) = \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n)$ が成立して，その上，準同型射 $\Phi\colon \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_{n+1}) \to \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$ は全単射である．また，もしも $r \neq 0$ ならば，‘$n \geq 4$ ならば’ を ‘$n \geq 3$ ならば’ に取り替えた主張が成立する ([59], [33], [30]).

定理 9 (1) に関連する事実についての解説が，著者 [125] によって与えられている．

l を素数とすると，定理 9 の四つの主張は，いずれも，その副 l 版 (つまり，‘Π_n’ をその最大副 l 商に取り替えた主張) も成立する．また，定理 9 (2) に類似する主張の副 l 版は，1990 年代に，伊原–金子 [36] や上野–高尾–中村 [78] などによって，リー代数を用いたアプローチによって盛んに研究されていた．そして，そういった研究群をもとに，定理 9 (2) の ‘$\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}$’ に対する単射性の副 l 版は，高尾 [99] によって既に証明されていた．

定理 9 (2) の数論的応用として，以下の Belyĭ の忠実性定理の一般化が得られる．対象となる双曲的曲線 ‘C’ が 3 点抜き射影直線の場合がいわゆる有名な Belyĭ の忠実性定理であり，そして，Belyĭ のこの定理は，松本 [45] によって，‘C’ が非射影的な双曲的曲線の場合に一般化されていた．

定理 10 ([31]) 数体か混標数局所体 F 上の双曲的曲線 C に対して，基本完全系列 $1 \to \pi_1(C \times_F \overline{F}) \to \pi_1(C) \to \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to 1$ から定まる $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の $\pi_1(C \times_F \overline{F})$ への外作用は忠実である．

この定理，及び，定理 8 からどのように定理 9 (2) のような結果を導くかについての解説が，著者 [123] によって与えられている．また，飯島 [38] は，この忠実性定理を用いて，双曲的な標点付き曲線のモジュライ空間に付随する外ガロア作用に対する同様の忠実性を証明した．

次に，$(g,r) = (0,3)$ の場合の定理 9 の (3) と (4) の類似から，グロタンディーク・タイヒミュラー群 GT についての応用が得られるので，それを紹介しよう．ここでは，(g,r) が $(0,3)$ であると仮定する．グロタンディーク・タイヒミュラー群とは，Drinfel'd [5] によって定義された $\mathrm{Out}(\Pi_1)$ の部分群である．よく知られているとおり，$(g,r) = (0,3)$ の場合には，n 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_n(X)$ は，‘$n+3$ 個の標点付きの種数 0 の代数曲線のモジュライ空間’ との間の同一視を有するため，‘標点の順序の置換’ を考えることで，(既に登場した対称性 $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$ を拡張する) 対称性 $\mathfrak{S}_{n+3} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$ が得られる．また，再びよく知られているとおり，自然な埋め込み $\mathrm{GT} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_1)$ が一意的に $\mathrm{GT} \hookrightarrow \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n)$ に持ち上がり，これにより，GT を $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ の部分群と見做すことができる．これら二つの単射 GT, $\mathfrak{S}_{n+3} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$ に関する事実として，Harbater–Schneps [12] による GT の表示や高尾–中村 [77] による点配置空間の基本群の構造に関する研究，そして，$(g,r) = (0,3)$ の場合の定理 9 の (3) と (4) の類似を用いることで，南出–望月–著者 [30] は，以下の定理を証明した．

定理 11 ([30]) n, g, r, Π_n などをこの 8 節の冒頭の議論のように定める．また，$(g,r) = (0,3)$, $n \geq 2$ を仮定する．このとき，単射 GT, $\mathfrak{S}_{n+3} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$ は，同型射 $\mathrm{GT} \times \mathfrak{S}_{n+3} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Out}(\Pi_n)$ を定める．

この定理についての解説が，南出 [129] によって与えられている．

望月と著者は，組み合わせ論的遠アーベル幾何学に関する様々な話題の研究を行ってきた．これま

でに説明したテーマの他に，[32]–[35] では，例えば，以下のテーマが研究されている．

(a) PSC 型遠半グラフに対する基本的な操作の整備．

(b) PSC 型遠半グラフに対する円分同期化 (6 節を参照) の理論．

(c) 双曲的曲線に対する相対版遠アーベル予想の ‘位相幾何学的類似’ の研究．

(d) **三点基同期化** (tripod synchronization) の理論．

(e) **組み合わせ論的カスプ化** (combinatorial cuspidalization) の貼り合わせの理論．

(f) (André [1] のある結果の一般化を含む) **緩和基本群** (tempered fundamental group) の理論への応用．

(g) (Pop–Stix [82] のある結果の一般化を含む) セクション予想の ‘組み合わせ論版’ の研究．

(h) 離散版組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究．

(i) 代数的リーマン面上のサイクルの正準持ち上げの理論．

そして，これらの研究の更なる進展として，以下の研究が行われた．

• 飯島 [39]：望月–著者 [33] による上記 (d) の三点基同期化の理論から，$n \geq 4$ の場合には，**三点基準同型射** (tripod homomorphism) $\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n) \twoheadrightarrow \mathrm{GT}$ というグロタンディーク・タイヒミュラー群 GT への全射を構成することができる．そして，この全射は，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の r 個の標点付き種数 g の代数曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,r}$ に付随する基本完全系列に登場する全射 $\pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ‘組み合わせ論的類似’ と見做されている．一方，例えば，‘完全退化な曲線’ を考えることで，後者の全射 $\pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が分裂を持つことが簡単に確認できる．飯島 [39] は，この事実の ‘組み合わせ論的類似’ として，三点基準同型射 $\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_n) \twoheadrightarrow \mathrm{GT}$ も分裂を持つことを証明した．

• 陽 [112]：7 節の冒頭で紹介した望月 [57] の仕事において，そこで述べたとおり，‘PSC 型遠半グラフの IPSC 型自己同型射の周期行列の非退化性’ が非常に重要な役割を果たしている．したがって，7 節の冒頭の IPSC 型自己同型射に関する組み合わせ論的遠アーベル予想型の結果を NN 型自己同型射の場合に拡張するための (より具体的には，定理 8 の主張から仮定 (a) や (b) を取り除くための) 一つのアプローチとして，SNN 型自己同型射の周期行列がいつでも非退化であるという主張を証明するというアプローチが考えられる．一方，しかしながら，望月–著者 [32] によって，退化する周期行列を持つ SNN 型自己同型射が存在することが確認された．陽 [112] は，この研究の自然な延長線上にある研究として，与えられた PSC 型遠半グラフに対して，それが周期行列の退化する SNN 型自己同型射を持つための必要充分条件を確立した．

• 東山 [13]：定理 4 (3) の証明の解説のとおり，対数 n 点配置空間 $\text{log-Cfg}_n(X)$ は，自然に n 点配置空間 $\mathrm{Cfg}_n(X)$ を含み，その補集合が $\text{log-Cfg}_n(X)$ の (下部スキームの) 正規交差因子 D を定め，そして，対数的純性定理によって，開埋め込み $\mathrm{Cfg}_n(X) \hookrightarrow \text{log-Cfg}_n(X)$ から誘導される外部連続準同型射 $\Pi_n = \pi_1(\mathrm{Cfg}_n(X)) \to \pi_1^{\log}(\text{log-Cfg}_n(X))$ が外部連続同型射となる．対数点配置空間 $\text{log-Cfg}_n(X)$ の点であって，対数階数が最大となるものは，**対数充満点** (log-full point) と呼ばれる．東山 [13] は，$r \neq 0$ という仮定のもとで，位相群 Π_n，及び，すべての対数充満点の分解群というデータから，因子 D の既約成分の分解群やその幾何学的情報，その上，Π_n の一般化ファイバー部分群を復元する，という研究を行った．

• 辻村 [106]：2 節で説明した相対版遠アーベル予想の設定において，‘基礎体の絶対ガロア群’ の部分を ‘写像類群の副有限完備化’，つまり，‘双曲的曲線のモジュライ空間の基本群’ に取り替えること

で，相対版遠アーベル予想の‘位相幾何学的類似’を考えることができる．副有限デーン多重捻りの理論の応用として，この‘位相幾何学的類似’を解決した研究が，上記の (c) である．望月–著者 [32] によるこの仕事の後，辻村 [106] は，やはり副有限デーン多重捻りの理論を精巧に用いることで，‘双曲的曲線のモジュライ空間の基本群’を更に‘フルヴィッツ空間の基本群’に取り替えた類似を解決した．

最後に，純数論幾何学的な設定における‘従来の遠アーベル幾何学’の研究とは異なり，組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究において，難しい数論 (幾何学) 的事実に関する知識はそれほど必要ない．また，その上，組み合わせ論的遠アーベル幾何学の設定では，混標数・正標数での代数幾何学に必然的にあらわれる複雑な‘暴分岐的現象’もまったくあらわれない．そのため，組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究は，例えばいわゆる‘学生’の方でも比較的容易に取り組むことが可能であるように思われる．このような観点から，組み合わせ論的遠アーベル幾何学は，特に‘遠アーベル幾何学の入門’に適したテーマの一つなのではないかと考えている．

9　正標数での遠アーベル幾何学

この 9 節では，正標数での遠アーベル予想の研究の進展を簡単に紹介する．(しかしながら，紙幅の都合上，‘結果の羅列’のみになってしまう．)

正標数での遠アーベル幾何学における進展として，[121] の 2.1 節でも述べられているとおり，玉川 [101] と望月 [46] の議論を基礎として，Stix [95], [96] によって，有限体上有限生成な体の上の双曲的曲線に対する相対版遠アーベル予想の類似が研究された．

その後の進展は，以下のとおりである．

(A) 正標数代数閉体上の双曲的曲線に対する遠アーベル幾何学

よく知られているとおり，標数 0 の代数閉体上の双曲的曲線の基本群は，高々曲線の型‘(g,r)’にしか依存せず，特に，そこから元々の曲線の深い幾何学的情報を引き出すことは不可能である．一方，正標数の代数閉体上の双曲的曲線の基本群は，元々の曲線の情報を多く含んでおり，実際，[121] の 2.2 節での説明のとおり，玉川によって，以下の結果が得られている．

(A-1) 正標数代数閉体上の双曲的曲線 X と Y とそれらの基本群の間の連続同型射 $\pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$ に対して，定理 3 の (2) と (3) と同様の帰結が得られる ([102])．また，その**従順基本群** (tame fundamental group) 版 ([103])．

(A-2) 有限体の代数閉包上の双曲的曲線 X と Y に対して，X か Y のいずれかのコンパクト化の種数が 0 ならば，位相群の同型 $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ が存在することとスキームの同型 $X \cong Y$ が存在することは同値となる ([102])．また，その従順基本群版 ([103])．

(A-3) Π を副有限群とすると，有限体の代数閉包上の双曲的曲線であって，その基本群が Π と同型となるものは，同型を除いて高々有限個しか存在しない．また，その従順基本群版 ([104])．

玉川によるこれらの研究の進展として，以下の研究が行われた．

- 陽 [113], [115]–[117] による，(A-1)–(A-3) の標点付き安定曲線への部分的一般化．
- 更科 [86] による，基礎体の標数が 2 でない場合の，‘基本群’に対する (つまり，従順基本群版でない) (A-2) の 1 点抜き楕円曲線への一般化．

(B) 有限体上の双曲的曲線に対する遠アーベル予想

[122] の 3.1 節で解説されている玉川による有限体上の非射影的双曲的曲線に対する絶対版遠アー

ベル予想の解決は，[121] の 2.1 節で述べられているとおり，望月 [58] によって，有限体上の (非射影的とは限らない一般の) 双曲的曲線に対する絶対版遠アーベル予想の解決に一般化された．

一方，(A) でのいくつかの結果が示すとおり，有限体上の双曲的曲線の場合，その幾何学的基本群 '$\pi_1(X \times_k \overline{k})$' のみを考える設定においても，元々の曲線がかなり限定されてしまう．そこで，基礎体である有限体の標数を含まない素数の集合 Σ に対する幾何学的基本群 '$\pi_1(X \times_k \overline{k})$' の最大副 Σ 商を考えよう．この商は，標数 0 の場合と同様に，高々曲線の型 '(g, r)' にしか依存しない．特に，そのような Σ に対する幾何学的副 Σ 基本群 '$\pi_1^{(\Sigma)}(X)$' (2 節を参照) に対して，(A) での結果の適用や，あるいは，(A) での結果による現象と類似的な現象を期待することはできない．このような観点から，'幾何学的副 Σ 基本群 $\pi_1^{(\Sigma)}(X)$ からの X の復元' という問題は，(上述のように玉川と望月によって既に解決されている) '基本群 $\pi_1(X)$ からの X の復元' という問題とは一線を画す．そして，この

基礎体の標数 $\notin \Sigma$ なる Σ に対する有限体上の双曲的曲線の絶対版遠アーベル予想の幾何学的副 Σ 版

は，正標数での遠アーベル幾何学における重要な研究テーマの一つとなっている．

Saïdi–玉川 [84] は，まず最初に，'$\Sigma = \{$すべての素数$\} \setminus \{$基礎体の標数$\}$' に対する有限体上の双曲的曲線の絶対版遠アーベル予想の幾何学的副 Σ 版を解決した．そして，その後に，Saïdi–玉川 [85] 自身によって，より小さい 'Σ' (例えば，すべての素数の集合の中での有限部分集合の補集合となっている Σ) に対する幾何学的副 Σ 版の解決という発展が得られた．また，これら幾何学的副 Σ 版に関する研究の成果 (や定理 2) などを用いて，陽 [114] によって，有限体 (や一般化劣 p 進体) 上の双曲的曲線の間の 'だいたい開埋め込み' という射に関する遠アーベル幾何学の研究が行われている．

上述の望月による玉川の結果の一般化や，Saïdi–玉川による幾何学的副 Σ 版の研究において，望月 [58] による有限体上の射影的双曲的曲線に対する副 l カスプ化が重要な役割を果たす．この副 l カスプ化とは，有限体上の射影的双曲的曲線の基本群の間のフロベニウス保存的な連続同型射が，それら曲線の 2 点配置空間の基本群の 'カスプ的最大副 l 商' の間の連続同型射に延長される，という結果である．この副 l カスプ化は，著者 [16] によって，'2 点配置空間' の部分が任意の正整数 n に対する 'n 点配置空間' へと一般化され，そして，最終的に，若林 [109] によって，組み合わせ論的遠アーベル幾何学の技術を援用することで，'射影的双曲的曲線' の部分も '任意の双曲的曲線' へと一般化された．

謝辞　まず最初に，本論説の執筆の機会を著者に与えてくださった '数学' 編集部の方々に感謝申し上げます．そして，本論説を丁寧にご閲読くださり，また，本論説の改善のための多くの有益なご指摘をくださった査読者の方々，及び，編集委員の方々に感謝申し上げます．

文献

[1] Y. André, On a geometric description of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ and a p-adic avatar of $\widehat{GT}$, Duke Math. J., **119** (2003), 1–39.

[2] F. Andreatta, A. Iovita and M. Kim, A p-adic nonabelian criterion for good reduction of curves, Duke Math. J., **164** (2015), 2597–2642.

[3] F. Bogomolov and Y. Tschinkel, Introduction to birational anabelian geometry, In: Current Developments in Algebraic Geometry, (eds. L. Caporaso, J. McKernan, M. Mustaţă and M. Popa), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **59**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, pp. 17–63.

[4] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **36** (1969), 75–109.

[5] V. G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Algebra i Analiz, **2** (1990), 149–181; translation in Leningrad Math. J., **2** (1991), 829–860.

[6] I. Fesenko, Arithmetic deformation theory via arithmetic fundamental groups and non-

archimedean theta-functions, notes on the work of Shinichi Mochizuki, Eur. J. Math., **1** (2015), 405–440.

[7] M. D. Fried and M. Jarden, Field Arithmetic. 2nd ed., Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **11**, Springer, 2005.

[8] K. Fujiwara and K. Kato, Logarithmic étale topology theory, manuscript, 1994.

[9] A. Grothendieck, La longue marche à travers la théorie de Galois, https://agrothendieck.github.io/galoispoincaregrothendieck/galois.pdf.

[10] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme, In: Geometric Galois Actions. 1: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme, (eds. L. Schneps and P. Lochak), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **242**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 5–48.

[11] A. Grothendieck, Brief an G. Faltings, In: Geometric Galois Actions. 1: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme, (eds. L. Schneps and P. Lochak), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **242**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 49–58.

[12] D. Harbater and L. Schneps, Fundamental groups of moduli and the Grothendieck–Teichmüller group, Trans. Amer. Math. Soc., **352** (2000), 3117–3148.

[13] K. Higashiyama, Reconstruction of inertia groups associated to log divisors from a configuration space group equipped with its collection of log-full subgroups, Math. J. Okayama Univ., **61** (2019), 37–73.

[14] Y. Hoshi, On the fundamental groups of log configuration schemes, Math. J. Okayama Univ., **51** (2009), 1–26.

[15] Y. Hoshi, The exactness of the log homotopy sequence, Hiroshima Math. J., **39** (2009), 61–121.

[16] Y. Hoshi, Absolute anabelian cuspidalizations of configuration spaces of proper hyperbolic curves over finite fields, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **45** (2009), 661–744.

[17] Y. Hoshi, Existence of nongeometric pro-p Galois sections of hyperbolic curves, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **46** (2010), 829–848.

[18] Y. Hoshi, A note on the geometricity of open homomorphisms between the absolute Galois groups of p-adic local fields, Kodai Math. J., **36** (2013), 284–298.

[19] Y. Hoshi, On the field-theoreticity of homomorphisms between the multiplicative groups of number fields, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **50** (2014), 269–285.

[20] Y. Hoshi, The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **21** (2014), 153–219.

[21] Y. Hoshi, On the Grothendieck conjecture for affine hyperbolic curves over Kummer-faithful fields, Kyushu J. Math., **71** (2017), 1–29.

[22] Y. Hoshi, On the pro-p absolute anabelian geometry of proper hyperbolic curves, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **25** (2018), 1–34.

[23] Y. Hoshi, Topics in the anabelian geometry of mixed-characteristic local fields, Hiroshima Math. J., **49** (2019), 323–398.

[24] Y. Hoshi, Mono-anabelian reconstruction of number fields, In: On the Examination and Further Development of Inter-Universal Teichmüller Theory, RIMS, 2015, (eds. S. Mochizuki), RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B76**, RIMS, 2019, pp. 1–77.

[25] Y. Hoshi, A note on an anabelian open basis for a smooth variety, Tohoku Math. J. (2), **72** (2020), 537–550.

[26] Y. Hoshi, Reconstruction of profinite graphs from profinite groups of PIPSC-type, Hokkaido Math. J., **49** (2020), 399–430.

[27] Y. Hoshi, Homotopy sequences for varieties over curves, Kobe J. Math., **37** (2020), 41–66.

[28] Y. Hoshi, Introduction to mono-anabelian geometry, to appear in Proceedings of the conference "Fundamental Groups in Arithmetic Geometry", Paris, France, 2016.

[29] Y. Hoshi, R. Kinoshita and C. Nakayama, The Grothendieck conjecture for the moduli spaces of hyperbolic curves of genus one, Kodai Math. J., **40** (2017), 625–637.

[30] Y. Hoshi, A. Minamide and S. Mochizuki, Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups, RIMS Preprint, **1870**, March, 2017.

[31] Y. Hoshi and S. Mochizuki, On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations, Hiroshima Math. J., **41** (2011), 275–342.

[32] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: inertia groups and profinite Dehn twists, In: Galois–Teichmüller theory and arithmetic geometry, Adv. Stud. Pure Math., **63**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012, pp. 659–811.

[33] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves II: tripods and combinatorial cuspidalization, RIMS Preprint, **1762**, November, 2012.

[34] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves III: tripods and tempered fundamental groups, RIMS Preprint, **1763**, November, 2012.

[35] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves IV: discreteness and sections, RIMS Preprint, **1788**, September, 2013.

[36] Y. Ihara and M. Kaneko, Pro-l pure braid

groups of Riemann surfaces and Galois representations, Osaka J. Math., **29** (1992), 1–19.

[37] Y. Ihara and H. Nakamura, Some illustrative examples for anabelian geometry in high dimensions, In: Geometric Galois Actions. 1: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme, (eds. L. Schneps and P. Lochak), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **242**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 127–138

[38] Y. Iijima, Galois action on mapping class groups, Hiroshima Math. J., **45** (2015), 207–230.

[39] Y. Iijima, The existence of GT-sections for fundamental groups of configuration spaces of hyperbolic curves, RIMS Preprint, **1827**, June, 2015.

[40] M. Jarden and J. Ritter, On the characterization of local fields by their absolute Galois groups, J. Number Theory, **11** (1979), 1–13.

[41] N. M. Katz and S. Lang, Finiteness theorems in geometric classfield theory, Enseign. Math. (2), **27** (1981), 285–319.

[42] F. F. Knudsen, The projectivity of the moduli space of stable curves, II: The stacks $M_{g,n}$, Math. Scand., **52** (1983), 161–199.

[43] F. F. Knudsen, The projectivity of the moduli space of stable curves, III: The line bundles on $M_{g,n}$, and a proof of the projectivity of $\overline{M}_{g,n}$ in characteristic 0, Math. Scand., **52** (1983), 200–212.

[44] F. F. Knudsen and D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on "det" and "Div", Math. Scand., **39** (1976), 19–55.

[45] M. Matsumoto, Galois representations on profinite braid groups on curves, J. Reine Angew. Math., **474** (1996), 169–219.

[46] S. Mochizuki, The profinite Grothendieck conjecture for closed hyperbolic curves over number fields, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **3** (1996), 571–627.

[47] S. Mochizuki, A theory of ordinary p-adic curves, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **32** (1996), 957–1152.

[48] S. Mochizuki, A version of the Grothendieck conjecture for p-adic local fields, Internat. J. Math., **8** (1997), 499–506.

[49] S. Mochizuki, Extending families of curves over log regular schemes, J. Reine Angew. Math., **511** (1999), 43–71.

[50] S. Mochizuki, The local pro-p anabelian geometry of curves, Invent. Math., **138** (1999), 319–423.

[51] S. Mochizuki, Topics surrounding the anabelian geometry of hyperbolic curves, In: Galois Groups and Fundamental Groups, (ed. L. Schneps), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **41**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, pp. 119–165.

[52] S. Mochizuki, The absolute anabelian geometry of canonical curves: Kazuya Kato's fiftieth birthday, Doc. Math., Extra Vol. (2003), 609–640.

[53] S. Mochizuki, The absolute anabelian geometry of hyperbolic curves, In: Galois Theory and Modular Forms, Tokyo, 2001, (eds. K.-i. Hashimoto, K. Miyake and H. Nakamura), Dev. Math., **11**, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2004, pp. 77–122.

[54] S. Mochizuki, The geometry of anabelioids, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **40** (2004), 819–881.

[55] S. Mochizuki, Noncritical Belyi maps, Math. J. Okayama Univ., **46** (2004), 105–113.

[56] S. Mochizuki, Semi-graphs of anabelioids, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **42** (2006), 221–322.

[57] S. Mochizuki, A combinatorial version of the Grothendieck conjecture, Tohoku Math. J. (2), **59** (2007), 455–479.

[58] S. Mochizuki, Absolute anabelian cuspidalizations of proper hyperbolic curves, J. Math. Kyoto Univ., **47** (2007), 451–539.

[59] S. Mochizuki, On the combinatorial cuspidalization of hyperbolic curves, Osaka J. Math., **47** (2010), 651–715.

[60] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry I: generalities, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **19** (2012), 139–242.

[61] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry II: decomposition groups and endomorphisms, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **20** (2013), 171–269.

[62] S. Mochizuki, A panoramic overview of inter-universal Teichmüller theory, In: Algebraic Number Theory and Related Topics 2012, RIMS, 2012, (eds. A. Shiho, T. Ochiai and N. Otsubo), RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B51**, RIMS, 2014, pp. 301–345.

[63] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry III: global reconstruction algorithms, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **22** (2015), 939–1156.

[64] S. Mochizuki, Bogomolov's proof of the geometric version of the Szpiro conjecture from the point of view of inter-universal Teichmüller theory, Res. Math. Sci., **3** (2016), Paper No. 6.

[65] S. Mochizuki, The mathematics of mutually alien copies: from Gaussian integrals to inter-universal Teichmüller theory, In: Inter-universal Teichmüller Theory Summit 2016, RIMS, 2016, (eds. Y. Hoshi and S. Mochizuki), RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B84**, RIMS, 2021, pp. 23–192.

[66] S. Mochizuki, Inter-universal Teichmüller theory I: construction of Hodge theaters, Publ. Res. Inst. Math. Sci, **57** (2021), 3–207.

[67] S. Mochizuki, Inter-universal Teichmüller theory II: Hodge–Arakelov-theoretic evaluation, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **57** (2021), 209–401.

[68] S. Mochizuki, Inter-universal Teichmüller theory III: canonical splittings of the log-theta-lattice,

Publl. Res. Inst. Math. Sci., **57** (2021), 403–626.

[69] S. Mochizuki, Inter-universal Teichmüller theory IV: log-volume computations and set-theoretic foundations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **57** (2021), 627–723.

[70] S. Mochizuki and A. Tamagawa, The algebraic and anabelian geometry of configuration spaces, Hokkaido Math. J., **37** (2008), 75–131.

[71] T. Murotani, A p-adic analytic approach to the absolute Grothendieck conjecture, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **55** (2019), 401–451.

[72] I. Nagamachi, On a good reduction criterion for proper polycurves with sections, Hiroshima Math. J., **48** (2018), 223–251.

[73] I. Nagamachi, Criteria for good reduction of proper polycurves, arXiv:math.NT/1801.08728.

[74] I. Nagamachi, On the Hom version of the Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of dimension 2, arXiv:math.NT/1902.02058.

[75] H. Nakamura, Galois rigidity of the étale fundamental groups of punctured projective lines, J. Reine Angew. Math., **411** (1990), 205–216.

[76] H. Nakamura, Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **1** (1994), 71–136.

[77] H. Nakamura and N. Takao, Galois rigidity of pro-l pure braid groups of algebraic curves, Trans. Amer. Math. Soc., **350** (1998), 1079–1102.

[78] H. Nakamura, N. Takao and R. Ueno, Some stability properties of Teichmüller modular function fields with pro-l weight structures, Math. Ann., **302** (1995), 197–213.

[79] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg, Cohomology of Number Fields. 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss., **323**, Springer, 2008.

[80] T. Oda, A note on ramification of the Galois representation on the fundamental group of an algebraic curve, J. Number Theory, **34** (1990), 225–228.

[81] T. Oda, A note on ramification of the Galois representation on the fundamental group of an algebraic curve, II, J. Number Theory, **53** (1995), 342–355.

[82] F. Pop and J. Stix, Arithmetic in the fundamental group of a p-adic curve. On the p-adic section conjecture for curves, J. Reine Angew. Math., **725** (2017), 1–40.

[83] M. Saïdi, Around the Grothendieck anabelian section conjecture, In: Non-abelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory, (eds. J. Coates, M. Kim, F. Pop, M. Saïdi and P. Schneider), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **393**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, pp. 72–106.

[84] M. Saïdi and A. Tamagawa, A prime-to-p version of Grothendieck's anabelian conjecture for hyperbolic curves over finite fields of characteristic $p > 0$, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **45** (2009), 135–186.

[85] M. Saïdi and A. Tamagawa, A refined version of Grothendieck's anabelian conjecture for hyperbolic curves over finite fields, J. Algebraic Geom., **27** (2018), 383–448.

[86] A. Sarashina, Reconstruction of one-punctured elliptic curves in positive characteristic by their geometric fundamental groups, Manuscripta Math., **163** (2020), 201–225.

[87] K. Sawada, Cohomology of the geometric fundamental group of hyperbolic polycurves, J. Algebra, **508** (2018), 364–389.

[88] K. Sawada, Pro-p Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **54** (2018), 781–853.

[89] K. Sawada, Algorithmic approach to Uchida's theorem for one-dimensional function fields over finite fields, In: Inter-universal Teichmüller Theory Summit 2016, RIMS, 2016, (eds. Y. Hoshi and S. Mochizuki), RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B84**, RIMS, 2021, pp. 1–21.

[90] K. Sawada, Finiteness of isomorphism classes of hyperbolic polycurves with prescribed fundamental groups, RIMS Preprint, **1893**, September, 2018.

[91] K. Sawada, Reconstruction of invariants of configuration spaces of hyperbolic curves from associated Lie algebras, RIMS Preprint, **1896**, November, 2018.

[92] A. Schmidt and J. Stix, Anabelian geometry with étale homotopy types, Ann. of Math. (2), **184** (2016), 817–868.

[93] J.-P. Serre (trans. J. Stillwell), Trees, Springer Monogr. Math., Springer, 2003.

[94] J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups: 1964 Lectures Given at Harvard University. 2nd ed., Lecture Notes in Math., **1500**, Springer, 2006.

[95] J. Stix, Affine anabelian curves in positive characteristic, Compositio Math., **134** (2002), 75–85.

[96] J. Stix, Projective anabelian curves in positive characteristic and descent theory for log-étale covers, Bonn, 2002, Bonner Math. Schriften, **354**, Universität Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 2002.

[97] J. Stix, On cuspidal sections of algebraic fundamental groups, In: Galois–Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry, (eds. H. Nakamura, F. Pop, L. Schneps and A. Tamagawa), Adv. Stud. Pure Math., **63**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012, pp. 519–563.

[98] J. Stix, Rational Points and Arithmetic of Fundamental Groups: Evidence for the Section Conjecture, Lecture Notes in Math., **2054**, Springer, 2013.

[99] N. Takao, Braid monodromies on proper curves and pro-ℓ Galois representations, J. Inst. Math.

Jussieu, **11** (2012), 161–181.
[100] N. Takao, On anabelian properties of the moduli spaces of curves of genus two, RIMS Preprint, **1842**, January, 2016.
[101] A. Tamagawa, The Grothendieck conjecture for affine curves, Compositio Math., **109** (1997), 135–194.
[102] A. Tamagawa, On the fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic > 0, Internat. Math. Res. Notices, **16** (1999), 853–873.
[103] A. Tamagawa, On the tame fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic > 0, In: Galois Groups and Fundamental Groups, (ed. L. Schneps), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **41**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, pp. 47–105.
[104] A. Tamagawa, Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups, J. Algebraic Geom., **13** (2004), 675–724.
[105] A. Tamagawa, Resolution of nonsingularities of families of curves, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **40** (2004), 1291–1336.
[106] S. Tsujimura, Geometric version of the Grothendieck conjecture for universal curves over Hurwitz stacks, RIMS Preprint, **1886**, May, 2018.
[107] K. Uchida, Isomorphisms of Galois groups, J. Math. Soc. Japan, **28** (1976), 617–620.
[108] K. Uchida, Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields, Ann. of Math. (2), **106** (1977), 589–598.
[109] Y. Wakabayashi, On the cuspidalization problem for hyperbolic curves over finite fields, Kyoto J. Math., **56** (2016), 125–164.
[110] S. Yamagata, A counterexample for the local analogy of a theorem by Iwasawa and Uchida, Proc. Japan Acad., **52** (1976), 276–278.
[111] G. Yamashita, A proof of the abc conjecture after Mochizuki, manuscript, 2017.
[112] Y. Yang, Degeneration of period matrices of stable curves, Kodai Math. J., **41** (2018), 125–153.
[113] Y. Yang, On the admissible fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic $p > 0$, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **54** (2018), 649–678.
[114] Y. Yang, Group-theoretic characterizations of almost open immersions of curves, J. Algebra, **530** (2019), 290–325.
[115] Y. Yang, On a weak Hom-version of the Grothendieck conjecture for curves of type $(0, n)$ over algebraically closed fields of characteristic $p > 0$, RIMS Preprint, **1879**, September, 2017.
[116] Y. Yang, The combinatorial mono-anabelian geometry of curves over algebraically closed fields of characteristic $p > 0$, RIMS Preprint, **1883**, January, 2018.
[117] Y. Yang, Finite quotients of fundamental groups and moduli spaces of curves in positive characteristic, RIMS Preprint, **1884**, April, 2018.
[118] Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1), Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–61, Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Doc. Math. (Paris), **3**, Soc. Math. France, Paris, 2003.
[119] 玉川安騎男, 代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想, 第 41 回代数学シンポジウム報告集, 1996.
[120] 玉川安騎男, Galois 群や基本群から元の対象を復元する問題に関する歴史と最近の発展, 代数的整数論とその周辺の研究 所収, (金子昌信 編), 京大数理研, 1996, 数理解析研究所講究録, **998**, 京大数理研, 1997, pp. 174–187.
[121] 玉川安騎男, 代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想, その後, 第 49 回代数学シンポジウム報告集, 2004.
[122] 中村博昭・玉川安騎男・望月新一, 代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想, 数学, **50** (1998), 113–129.
[123] 星裕一郎, 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分について, In: Algebraic Number Theory and Related Topics 2008, RIMS, 2008, (eds. H. Nakamura, T. Ichikawa and K. Matsuno), RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B19**, RIMS, 2010, pp. 81–106.
[124] 星裕一郎, Grothendieck による遠アーベルセクション予想について, 第 56 回代数学シンポジウム報告集, 2011.
[125] 星裕一郎, 位相曲面に対するある Grothendieck 予想型の結果について, 第 10 回城崎新人セミナー報告集, 2013.
[126] 星裕一郎, 絶対 Galois 群による数体の復元, 早稲田大学整数論研究集会 2014 報告集, 2014.
[127] 星裕一郎, 続・宇宙際 Teichmüller 理論入門, In: Algebraic Number Theory and Related Topics 2015, RIMS, 2015, (eds. H. Takahashi, Y. Ohno and T. Tsushima), RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B72**, RIMS, 2018, pp. 209–307.
[128] 星裕一郎, 宇宙際 Teichmüller 理論入門, In: On the Examination and Further Development of Inter-Universal Teichmüller Theory, RIMS, 2015, (ed. S. Mochizuki), RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B76**, RIMS, 2019, pp. 79–183.
[129] 南出新, The Grothendieck–Teichmüller group as an open subgroup of the outer automorphism group of the étale fundamental group of a configuration space, In: Profinite Monodromy, Galois Representations, and Complex Functions, 京大数理研, 2018, (金子昌信 編), 数理解析研究所講究録, **2120**, 京大数理研, 2019, pp. 166–171.

(2019 年 2 月 28 日提出)
(ほし ゆういちろう・京都大学数理解析研究所)