ベクトル解析

1. ベクトル

1 ベクトルの概念

空間（もしくは平面）の2点を結ぶ線分に方向を考えた有向線分を
ベクトルという

空間の2点をP, Q に対して

P, Q を結ぶ線分 PQ

P を始点, Q を終点とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

二つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ は平行移動で移り合う時に同値といい

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$$

と表す。

始点P と終点Q が一致してるベクトルを零ベクトルといい
$\vec{0}$ とかく

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に対して、2点P, Q の間の距離を
ベクトルの大きさといい $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ と表す

2 ベクトルの概念

2つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して, 点Pからベクトル $\boldsymbol{a}$ を引き,
その終点をQとし, 次に, Qからベクトル $\boldsymbol{b}$ を引き,
その終点をRとする.
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ という

ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して, 大きさが等しく反対方向のベクトルを
$\boldsymbol{b}$ の逆ベクトル $-\boldsymbol{b}$ という.

ベクトルの和 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ を引いた差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ という

公式

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

3 スカラー倍(実数倍)

実数 k とベクトル $\boldsymbol{a}$ が与えられたとき, ベクトル $\boldsymbol{a}$ の k 倍を

・k が正の数のとき, $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで大きさが $k|\boldsymbol{a}|$ のベクトル

・k が負の数のとき, $\boldsymbol{a}$ と反対向きで大きさが $|k|\cdot|\boldsymbol{a}|$ のベクトル

・$k=0$ のとき零ベクトル

と定める.

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の k 倍を $k\boldsymbol{a}$ と表わす.

公式

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

$$(km)\boldsymbol{a}=k(m\boldsymbol{a})$$

$$(k+m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}$$

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$$

注） 二つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ が平行 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ とは

$$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}\quad(k\text{ は実数})$$

4 ベクトルの成分表示

Oxyz:直交座標系

原点 O と、直交する x 軸, y 軸, z 軸 を定めて固定

右手系 とする

右手系 = x, y, z 軸の正の方向がそれぞれ

右手の中指, 親指, 人差し指のさす方向に

向きづけられている

基本ベクトル

原点 O を始点とし, 終点の座標がそれぞれ $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ のベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ で表わし, 基本ベクトルという.

位置ベクトル

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と等しく O を始点とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を位置ベクトルとよぶ.

4 ベクトルの成分表示(つづき)

以下、ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を座標を使って成分表示する

点 P を通り yz 平面, xz 平面, xy 平面と平行な平面と x 軸, y 軸, z 軸との交点をそれぞれ A, B, C とすると

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

点 P の座標を (a_1, a_2, a_3) とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a_1\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = a_2\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = a_3\boldsymbol{k}$$

となり一意的に

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

と表わされる.

a_1, a_2, a_3 をそれぞれ $\boldsymbol{a}$ の直交座標系 $\mathrm{O}xyz$ に関する x 成分, y 成分, z 成分といい、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とかく.

4 ベクトルの成分表示(公式)

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

さらに k は実数とする

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ベクトルの加法・減法, 実数倍の成分表示

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3),$$
$$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

5 スカラー積(内積)

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき,
$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ で与えられる量を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積といい
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ または $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ という記号で表わす.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

定義より $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ $(\neq 0)$ のとき,

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \quad (\text{直交}) \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$$

6 内積の成分表示

余弦定理より

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とすれば,

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

よって

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

この公式より

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$(k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + m\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

7 ベクトル積

空間のベクトル　$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

とおき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のベクトル積または外積という.

形式的な行列式表現：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

公式

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

$$(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

8 平行四辺形の面積と外積

定義より、ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する:

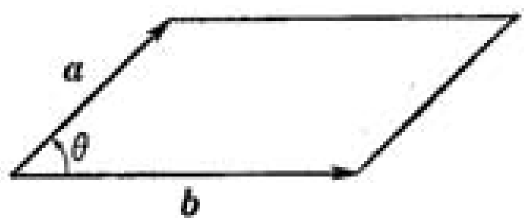
$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0,\quad(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0.}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で作られる平行四辺形の面積に等しい

[証明] 2つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ でつくられる平行四辺形の面積を S とすれば

$$S=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

この S を外積を使って表そう



$S = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin\theta$ に対し

$$\begin{aligned} S^2 &= |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\theta = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

他方で

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = S^2. \end{aligned}$$

従って, ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ でつくられる平行四辺形の面積に等しい. □