論　説

極小モデル理論の新展開

藤　野　　　修

1　はじめに

代数多様体の双有理分類論は代数幾何学の中心問題のひとつである．19 世紀の Riemann による曲線論, 20 世紀初頭のイタリア学派による曲面論などに始まり, 小平の複素解析曲面の分類論やロシアの Shafarevich 学派の研究などを経て, 低次元の代数多様体に関してはほぼ満足のいく分類が得られている．3 次元以上の代数多様体の双有理分類を初めて組織的におこなったのは飯高 [I1] であろう．70 年代初め, 一般の代数多様体に対して小平次元なる概念を導入し, 双有理分類論への第一歩を踏み出した．対数的小平次元の定義, 小平次元に関する飯高加法予想など, 様々な貢献があった ([I2])．これらを総称して飯高計画と呼ぶ．80 年代に入ると森による森理論 (ここでは極小モデル理論と呼ぶことにする) が双有理分類論の標準理論になる．Hartshorne 予想の解決 [M1] の際にあみ出した手法を駆使し, 代数多様体の双有理写像の情報を凝縮した錐定理 [M2] を証明したのである．これによって双有理分類論の進むべき道が明らかになったという画期的な仕事であった ([M5] 参照)．その後, 極小モデル理論は, 広中の特異点解消定理と川又–Viehweg 消滅定理 (小平の消滅定理の一般化, 定理 28 参照) を基礎とするコホモロジー論的な一般論と, 森による非常に精密な特異点の分類結果を積み上げていくことになる．80 年代後半には 3 次元で極小モデルの構成に成功し ([M4]), 森は 90 年に京都でフィールズ賞を受賞する．90 年代前半には極小モデル理論関連の予想は 3 次元でほぼすべて満足な形で解決されてしまった．次に考えるべき問題としては, 極小モデル理論の高次元化であった．ところが, 森による 3 次元の結果は特異点の詳細な分類結果 ([M3], [M4]) に大きく依存しており, 3 次元の手法をそのまま高次元化するのは不可能であった．大発展の後の停滞期が続いたのである．極小モデル理論の初期段階からたくさんのアイデアを出し続けていた Shokurov が 4 次元の極小モデルの構成を完成させたと主張したのは 2000 年頃であったと思う ([Sh4])．Shokurov の論文 ([Sh2], [Sh3], [Sh4]) はアイデアの宝庫であるが, その難解さも格別である．ケンブリッジのニュートン研究所での Shokurov の論文 [Sh4] の解読セミナー [BOOK][1) を経て, ここ数年, Hacon と McKernan を中心に急激な発展が再び始まった ([HM2], [BCHM])．数年前までは当分解決不能と思われていた大予想が次々に陥落しているのである．今回はその大発展の一端を紹介したいと思う．この 20 年間の Shokurov のアイデアと, Siu による乗数イデアルを用いた巧妙な拡張定理の手法 [Si1] の出会いが, 今回の大発展の切っ掛けである．手っ取り早く大結果のひとつを述べておく．

定理 1 ([BCHM])　X を複素数体上定義された非特異射影代数多様体とする．このとき, 標準環 $\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ は有限生成次数付き $\mathbb{C}$-代数である．

もちろん X の次元は任意である．代数幾何学を少し勉強したことのある人なら，上の定理の強力さが分かると思う．以下すべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えることにする．特異点解消定理とコホモロジーの消滅定理を自由に使うには，基礎体の標数が零である必要があるからである．1 章の残りでは [BCHM] の主定理と主な系を述べる．2 章では古典的な極小モデル理論，対数的極小モデル理論，そしてスケール付き極小モデル理論を解説する．2.2 に必要な用語をまとめてある．3 章では pl フリップと呼ばれる特別なフリップの存在問題について解説する．[HM2] の主結果である．4 章は少し話題を変えて乗数イデアルとその応用として得られた結果のいくつかを説明する．最近の極小モデル理論の発展の背後にある話題である．5 章で [BCHM] の証明のからくりについて論じる．6 章に [BCHM] で実際に証明されたことを集めておいた．最後の 7 章では，今後の課題と極小モデル理論関連の最近の結果のいくつかを述べる．

1.1　主定理と主な系

とりあえず [BCHM] の主結果を述べる．詳しい内容については追々説明していくことにする．以下の主張が理解出来なくても読み進めて欲しい．どうしても辛かったら，直接 2.1 に行くことをすすめる．

定理 2　(X,Δ) を川又対数的末端対とする．特に $K_X+\Delta$ は $\mathbb{R}$-カルティエである．$\pi: X\to U$ を擬射影多様体の間の固有射とする．Δ が π-巨大で $K_X+\Delta$ が π-擬有効，または，$K_X+\Delta$ が π-巨大とする．このとき以下が成立する．

(1)　$K_X+\Delta$ は U 上対数的末端モデルをもつ．

(2)　もし $K_X+\Delta$ が π-巨大なら，(X,Δ) は U 上対数的標準モデルをもつ．

(3)　もし $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-カルティエなら，$\bigoplus_{m\geq 0}\pi_*\mathcal{O}_X(\llcorner m(K_X+\Delta)\lrcorner)$ は有限生成 $\mathcal{O}_U$-代数である．

先に進む前に主な系を説明する．定理 2 は専門家以外には理解しがたい形で述べられているからである．すべて一般次元の話である．

系 3　X を一般型非特異射影多様体とする．つまり，K_X は巨大とする．このとき以下が成立する．

(1)　X は極小モデルをもつ．つまり，X と双有理同値な射影多様体 X' が存在し，X' は高々 $\mathbb{Q}$-分解的末端特異点のみを許し，$K_{X'}$ は数値的正である．

(2)　X は標準モデルをもつ．つまり，X と双有理同値な射影多様体 X' が存在し，X' は高々標準特異点のみを許し，$K_{X'}$ は豊富である．

(3)　標準環 $\bigoplus_{m\geq 0}H^0(X,\mathcal{O}_X(mK_X))$ は有限生成である．

上の系では (1) さえ証明出来れば，(2) と (3) は固定点自由化定理 (base point free theorem) から従う．これだけでも凄い結果である．

系 4　(X,Δ) を川又対数的末端対で，X は射影多様体，Δ は $\mathbb{Q}$-因子とする．もちろん $K_X+\Delta$ は $\mathbb{Q}$-カルティエである．このとき，対数的標準環 $\bigoplus_{m\geq 0}H^0(X,\mathcal{O}_X(\llcorner m(K_X+\Delta)\lrcorner))$ は有限生成である．

系 4 では $K_X+\Delta$ が巨大とは仮定していないことに注意が必要である．藤野と森による標準因子公式 [FM] と定理 2 の (3) をあわせると証明出来る．特別な場合を読者のためにもう一度書いておこう．

系 5　X を非特異射影多様体とする．このとき，標準環 $\bigoplus_{m\geq 0}H^0(X,\mathcal{O}_X(mK_X))$ はつねに有限生成である．

X が一般型のときは, [Si4] も系 5 を主張している.

系 6 (X, Δ) を川又対数的末端対とし, $\varphi : X \to W$ を $K_X + \Delta$ に関するフリッピング収縮射とする. このとき, φ のフリップは常に存在する.

[BCHM] の結果を使うと次の定理も証明出来る. 精密な主張は [K9] を見ていただきたい.

定理 7 ([K9] 参照) X と X' を $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点しかもたない射影多様体とし, X と X' は双有理同値とする. さらに, K_X と $K_{X'}$ が共に数値的正と仮定する. このとき, X と X' はフロップでつなげる.

ここで述べたもの以外にも [BCHM] にはたくさんの応用がある. モジュライ問題への応用をひとつ述べておこう. [Kr], [Ko2], [KeM] を使えば [BCHM] の応用として出てくる.

定理 8 モジュライ関手 $\mathcal{M}^{sm}_H$ は, スキーム S に対して S 上の n 次元潤滑化可能安定 n 次元多様体 (smoothable stable n-fold) でヒルベルト多項式 H を持つものの族の同型類を対応させる関手とする. このとき, $\mathcal{M}^{sm}_H$ の粗モジュライ空間 M^{sm}_H が存在する. ただし, M^{sm}_H は射影的なスキームである.

定理の主張を読んだだけではよく分からないと思うが, 一般型曲線のモジュライとそのコンパクト化の話の完全な一般次元化である. ただし, Mumford による幾何学的不変式論とは全く関係がない構成法である. まだまだ応用はたくさんあるが, とりあえず先に進むことにしよう.

2 極小モデル理論について

2.1 古典的極小モデル理論

ここでは古典的な極小モデル理論について解説する. 以下 X は正規多様体で, K_X は X の**標準因子**とする. まず**錐定理**(cone theorem) から思い出しておこう. 用語に関しては 2.2 を参照していただきたい.

定理 9 (錐定理) X は高々末端特異点しか持たない射影多様体とする. このとき

(1) $0 < -K_X \cdot C_j \leq 2 \dim X$ となるような高々可算無限個の有理曲線 $C_j \subset X$ が存在し,

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_j]$$

とかける. ただし, $\overline{NE}(X)$ は X の Kleiman–森錐体で, $\overline{NE}(X)_{K_X \geq 0}$ は K_X との交点数が非負になる部分をあらわす.

(2) $R \subset \overline{NE}(X)$ は K_X-負な端射線とする. このとき, $\varphi_{R*}\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Z$ を満たす射影多様体への射 $\varphi_R : X \to Z$ のうち, 曲線 $C \subset X$ に対しての条件 $\varphi_R(C) =(1$ 点$) \Leftrightarrow [C] \in R$ をみたす物が 1 つだけ存在する. また, $\rho(X) - \rho(Z) = \rho(X/Z) = 1$ が成立する.

定理 9 の (2) は**収縮定理**(contraction theorem) と呼ばれることが多い. 詳しくは初期の極小モデル理論のバイブルであった [KMM] や, 教科書 [KM], [Ma2] を見ていただきたい. 端射線の長さの評価 $0 < -K_X \cdot C_j \leq 2 \dim X$ は [K4] で得られたものであり, [MM] に依存する. したがって, この部分は正標数還元テクニックを必要とする. この長さの評価は後に説明するスケール付き極小モデル理論で重要な役割を果たすことになる. それでは, 古典的極小モデル理論について説明しよう. X は $\mathbb{Q}$-分解的で末端特異点しか持たない射影多様体とする. $X_0 = X$ からはじめて, 良いモデルを構成していくのが, 極小モデル理論の考え方である. もう少し具体的に見ていこう. $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異

点しか持たない射影多様体 X_i が既に構成できたと仮定する．もし K_{X_i} が数値的正ならば, $X^* = X_i$ とおく．X^* は X の**極小モデル**と呼ばれる．もし K_{X_i} が数値的正でなければ, K_{X_i}-負な端射線 R が存在する．それに付随する収縮写像 $\varphi_R : X_i \to Y$ を考える．もし φ_R が双有理でなければ, $X^* = X_i$ とおいて $\varphi_R : X^* \to Y$ を**森ファイバー空間**と呼ぶ．そこで, 以下 φ_R は双有理であると仮定する．

(1) φ_R が X_i 上の因子を潰すとき, φ_R は**因子収縮射**(divisorial contraction) と呼ばれる．このときは $X_{i+1} = Y$ とおいて最初の段階に戻る．

(2) φ_R が余次元 1 で同型のとき, φ_R は**フリッピング収縮射**(flipping contraction) と呼ばれる．このとき, **フリップ**(flip)

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & {X_i}^+ \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

が存在したら $X_{i+1} = {X_i}^+$ とおいて最初に戻る．フリップについては下で詳しく説明する．

(1)(2) いずれの場合も, X_{i+1} が $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点しか持たない射影多様体であることが分かる．(1) の因子収縮射はピカール数を数えることにより, 有限回しか起こらないことがすぐにわかる．したがって, 以下の二つの予想が解ければ, 有限回のステップの後, 与えられた X と双有理同値な極小モデルか森ファイバー空間が得られることがわかった．

予想 10 (フリップ予想 I: フリップの存在)　$\varphi : X \to W$ をフリッピング収縮射とする．つまり

(1) φ は射影的双有理写像で余次元 1 で同型である．

(2) $-K_X$ は φ-豊富である．

(3) X は $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点しかもたず, 相対的ピカール数 $\rho(X/W) = 1$ である．

このとき, 以下のような可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & X^+ \arrow[dl] \\ & W & \end{tikzcd}$$

ただし,

(i) X^+ は正規多様体で W 上射影的である．

(ii) $\varphi^+ : X^+ \to W$ は双有理写像で余次元 1 で同型である．

(iii) K_{X^+} は φ^+-豊富である．

この $\varphi^+ : X^+ \to W$ を $\varphi : X \to W$ のフリップと呼ぶ．

予想 11 (フリップ予想 II: フリップの停止)　フリップの列

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & X_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_2 \arrow[r, dashed] \arrow[dl] & \cdots \\ & W_0 & & W_1 & & \end{tikzcd}$$

は有限回の後, 必ず停止する．言いかえると, フリップの無限列は存在しない．

2次元ではフリッピング収縮射が存在しないことと, 末端特異点は非特異点に他ならないという事実から, 極小モデル理論の各段階は単に (-1)-曲線を潰しているだけである. 3次元多様体に対しては, 上記予想は80年代に解かれた. フリップ予想 II は Shokurov が難度 (difficulty) という概念を導入して鮮やかに解いた ([Sh1]). 証明はアイデア一発だけで, 非常に簡単である. フリップ予想 I は森によって解かれた ([M4]). 森の証明は, $\varphi_R : X \to W$ で潰れる曲線の解析的近傍の状態を詳しく調べ尽くし, すべての場合にフリップが存在することを個別に確認していくという大変なものであった. ともかく, 最初の非自明な場合である3次元の場合は, 極小モデル理論の誕生から10年も経たないうちに完成したのである. 80年代は極小モデル理論の黄金時代であった. 極小モデルの分類論における位置付けや初期の発展については, [K10] と [K11] を読むことを強くすすめる. 4次元フリップ予想 I に関しては, 川又 [K3] がいち早く結果を出したが, その後は可知による [Kc1], [Kc2] と高木による [Tk1], [Tk3] しか結果はなかった. [Tk3] は初めて拡張定理 ([Si1], [N2], [K8] を参照) をフリップの構成に用いた論文であったが, 世に出るのが早過ぎたかもしれない.

2.2 用語と準備

ここで, 今まで説明無しで使ってきた用語のいくつかを解説し, さらに進んだ話題へ進むための準備をしよう.

1 (因子) $\mathbb{Q}$-因子 (または, $\mathbb{R}$-因子) $D=\sum_i d_i D_i$ とは, 有理数 (または, 実数)d_i を係数とする素因子 D_i の形式的有限和である. 各係数の整数部分をとることにより, 切り下げ $\llcorner D \lrcorner$ が定義できる. $\{D\} = D - \llcorner D \lrcorner$ を分数部分, $\ulcorner D \urcorner = -\llcorner -D \lrcorner$ を切り上げという. 因子 D が $\mathbb{Q}$-カルティエ (または $\mathbb{R}$-カルティエ) とは, D がカルティエ因子の $\mathbb{Q}$-(または $\mathbb{R}$-) 線形結合として書けることとする. 2つの $\mathbb{R}$-因子 D と D' が $\mathbb{R}$-線形同値 (または $\mathbb{Q}$-線形同値, もしくは線形同値) とは, 有理関数 $f_1, \cdots, f_k$ と実数 (または有理数, もしくは整数)$r_1, \cdots, r_k$ が存在し, $D - D' = \sum_{i=1}^k r_i(f_i)$ と書けることとする. このとき, $D \sim_{\mathbb{R}} D'$(または $D \sim_{\mathbb{Q}} D'$, もしくは $D \sim D'$) とかく. ただし, (f_i) は f_i に付随する主因子である. カルティエ因子に対する豊富 (ample), 半豊富 (semi-ample), 数値的正 (nef) などの概念は $\mathbb{Q}$-カルティエ因子や $\mathbb{R}$-カルティエ因子に対しても定義出来る. ただし, $\mathbb{R}$-カルティエ因子に対しては技術的に微妙に難しくなる部分もある. $\mathbb{Q}$-因子を導入することによりコホモロジー論的手法が著しく発展したのが80年代の極小モデル理論である. ある種の極限操作まで許そうとすると, $\mathbb{R}$-因子まで必要となる. 正規多様体 X 上の任意の素因子が $\mathbb{Q}$-カルティエのとき, X は **$\mathbb{Q}$-分解的**($\mathbb{Q}$-factorial) という. この条件は見た目より強力で, おまじないのように仮定することが多い.

2 (食い違い係数) X は正規多様体で, Δ は X 上の $\mathbb{R}$-因子とする. $K_X + \Delta$ を $\mathbb{R}$-カルティエ因子とし, $f : Y \to X$ を正規多様体 Y からの双有理射とする. $K_Y = f^*(K_X + \Delta) + \sum_E a(E, X, \Delta)E$ と書いたときの実数 $a(E, X, \Delta)$ を (X, Δ) に関する E の**食い違い係数**(discrepancy) とよぶ. ただし, E は Y 上の素因子すべてを動くとする. X を正規多様体で K_X が $\mathbb{Q}$-カルティエとなるものとする. 任意の正規多様体からの双有理射 $f : Y \to X$ と任意の f-例外因子 E に対し, $a(E, X, 0) > 0$(または $a(E, X, 0) \geq 0$) となるとき, X は高々**末端特異点**(または, **標準特異点**) を持つという. X を曲面とすると, 末端特異点は非特異点にほかならず, 標準特異点は高々 Du Val 特異点である. 3次元の特異点の様子については [R] を見ていただきたい.

3 (錐体) 正規多様体 X と S の間の固有射 $f : X \to S$ を考える. f に対する相対的 1-サイクル $C = \sum_j c_j C_j$ とは, $f(C_j)$ が S 上の1点になるような曲線 C_j 達の形式的な整形数1次結合のことで

ある．X 上のカルティエ因子 D, D'(または, 相対的 1-サイクル C, C') が S 上相対的に数値的同値とは, $(D\cdot C)=(D'\cdot C)$(または, $(D\cdot C)=(D\cdot C')$) が任意の相対的 1-サイクル C(または, カルティエ因子 D) に対して成立することをいい, $D\equiv D'$(または, $C\equiv C'$) とかく．このとき, 互いに双対な有限次元実線形空間 $N^1(X/S)=(\{$ カルティエ因子 $\}/\equiv)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, $N_1(X/S)=(\{$ 相対的 1-サイクル $\}/\equiv)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ が定義される．相対的ピカール数は $\rho(X/S)=\dim_{\mathbb{R}} N^1(X/S)$ で定義する．$N_1(X/S)$ の中で $f(C)$ が 1 点になるような曲線 C 達の数値的同値類全体で張られる閉じた錐体を $\overline{NE}(X/S)$ で表し, **Kleiman-森錐体**という．$\mathbb{R}$-カルティエ因子 D に対して, $N_1(X/S)$ 上の線形汎関数 h_D が $h_D(C)=(D\cdot C)$ で定まる．D が ***f*-数値的正**というのは, h_D が $\overline{NE}(X/S)$ 上で非負となることである．f が射影射のとき, D が f-豊富となるためには, h_D が $\overline{NE}(X/S)\setminus\{0\}$ 上で正となることが必要十分である．$N^1(X/S)$ の中で有効カルティエ因子の数値的同値類全体で張られる閉じた錐体を $PE(X/S)$ で表す．同値類が $PE(X/S)$ に入る X 上の $\mathbb{R}$-カルティエ因子を ***f*-擬有効**という．$\mathbb{R}$-カルティエ因子 D の数値的同値類が $PE(X/S)$ の内点を定めるとき, D は ***f*-巨大**という．S が 1 点のときは, $N_1(X/S)$, $N^1(X/S)$, $\overline{NE}(X/S)$, $\rho(X/S)$ を $N_1(X)$, $N^1(X)$, $\overline{NE}(X)$, $\rho(X)$ とかき, f-を省略する．

4 (対)　正規多様体 X とその上の $\mathbb{R}$-因子 B の対 (X,B) が**因子対数的末端対**(dlt) とは, B の係数が全て 1 以下の非負な実数で, K_X+B が $\mathbb{R}$-カルティエ因子となり, さらに以下のような特異点解消が存在することとする．$f:Y\to X$ は非特異多様体からの固有双有理射で, $\mathrm{Exc}(f)$ と $\mathrm{Exc}(f)\cup f_*^{-1}B$ は共に単純正規交差因子になり, $K_Y+B_Y=f^*(K_X+B)$, $-B_Y=\sum_j b_jB'_j$ と書くと, $B'_j\subset\mathrm{Exc}(f)$ となるような全ての j に対して $b_j>-1$ が成立する．ただし, $f_*^{-1}B$ は B の f^{-1} による厳密変換 (strict transform) で, $\mathrm{Exc}(f)$ は f の例外集合である．(X,B) が因子対数的末端対で $\llcorner B\lrcorner=0$ となるとき, (X,B) を**川又対数的末端対**(klt) と呼ぶ．また, (X,B) が因子対数的末端対で $\llcorner B\lrcorner$ が正規のとき, (X,B) を**純対数的末端対**(plt) という．定義から明らかなように, 川又対数的末端対なら純対数的末端対で, 純対数的末端対は因子対数的末端対である．X を非特異多様体とし, $\sum_i B_i$ を単純正規交差因子の既約分解とする．このとき, $(X,\sum_i b_iB_i)$ が因子対数的末端対 (または, 川又対数的末端対) というのは, $0\le b_i\le 1$(または, $0\le b_i<1$) が全ての i に対して成立することと同値である．$(X,\sum_i b_iB_i)$ が因子対数的末端対のとき, $\sum_{b_i=1}B_i$ が非特異というのと $(X,\sum_i b_iB_i)$ が純対数的末端対というのは同じことである．この因子対数的末端対, 純対数的末端対, 川又対数的末端対の使い分けが出来ないことには極小モデル理論の専門家になれない．詳しくは [Ko4] や [F5] を見ていただきたい2)．後のためにもうひとつだけ定義しておこう．正規多様体 X とその上の有効 $\mathbb{R}$-因子 B の対 (X,B) で K_X+B が $\mathbb{R}$-カルティエになるものを考える．任意の正規多様体からの双有理射 $f:Y\to X$ と Y 上の全ての素因子 E に対し $a(E,X,B)\ge -1$ が成立するとき, (X,B) は**対数的標準対**(log canonical pair) という．(X,B) が因子対数的末端対なら (X,B) が対数的標準対であることはすぐに確認できる．また, $a(E,X,B)=-1$ なる E の f での像を**対数的標準中心**(log canonical center) と呼ぶ．

2.3　(対数的) 極小モデル理論

森による 3 次元フリップの存在証明のずっと前から, 極小モデル理論の枠組みの拡張は行われていた．代数幾何なら常に考えられる相対化と, 飯高計画の影響を受けた対数化である ([KMM] 参照)．古典的極小モデル理論で考えた話は, $\mathbb{Q}$-分解的な因子対数的末端対 (X,Δ) で, 固定された多様体 S 上射影的なものに対して全く同様に機能する．錐定理と収縮定理が相対的な因子対数的末端対で成立す

るので, 結局残った問題は以下の 2 つの予想である．これらの予想が解決したら, 古典的極小モデル理論のところで説明したように, 与えられた因子対数的末端対 (X, Δ) から始めて有限回の操作の後, **対数的極小モデル**か**対数的森ファイバー空間**に到達することがわかる．対数化, 相対化はたんなる一般化のための一般化ではなく, 各種問題を次元による帰納法などで解く場合にはさけて通れないのである．対数化, 相対化まで込めて考えないと, [BCHM] の証明はうまく機能しない．重要なポイントである．

予想 12 ((対数的) フリップ予想 I: (対数的) フリップの存在)　$\varphi : X \to W$ をフリッピング収縮射とする．つまり

(1) φ は射影的双有理写像で余次元 1 で同型である．

(2) $-(K_X + \Delta)$ は φ-豊富である．

(3) X は $\mathbb{Q}$-分解的で (X, Δ) は因子対数的末端対である．さらに, 相対的ピカール数 $\rho(X/W) = 1$ である．

このとき, 以下のような可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & X^+ \arrow[dl] \\ & W & \end{tikzcd}$$

ただし,

(i) X^+ は正規多様体で W 上射影的である．

(ii) $\varphi^+ : X^+ \to W$ は双有理写像で余次元 1 で同型である．

(iii) $K_{X^+} + \Delta^+$ は φ^+-豊富である．ここで Δ^+ は Δ の厳密変換である．

この $\varphi^+ : X^+ \to W$ を $\varphi : X \to W$ の (対数的) フリップと呼ぶ．

もし (X^+, Δ^+) が存在すれば, (X^+, Δ^+) は因子対数的末端対で, X^+ が $\mathbb{Q}$-分解的になることも証明出来る．フリップ予想 I 内の Δ は一般には $\mathbb{R}$-因子であるが, Δ の係数を揺することにより, Δ は $\mathbb{Q}$-因子と仮定してよい．後のために次のよく知られた補題を用意しておこう．今述べたことから, 補題内の Δ は $\mathbb{Q}$-因子としてよい．

補題 13　フリッピング収縮射 $\varphi : X \to W$ のフリップが存在するための必要十分条件は, 次数付き $\mathcal{O}_W$-代数 $\bigoplus_{m\geq 0} \varphi_* \mathcal{O}_X(\llcorner m(K_X + \Delta) \lrcorner)$ が有限生成であることである．また, このとき, $X^+ = \mathrm{Proj}_W \bigoplus_{m\geq 0} \varphi_* \mathcal{O}_X(\llcorner m(K_X + \Delta) \lrcorner)$ である．特に, フリップ予想 I は W に関して局所的な問題である．

予想 14 ((対数的) フリップ予想 II: (対数的) フリップの停止)　(対数的) フリップの列

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & X_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dl] \arrow[r, dashed] & \cdots \\ & W_0 & & W_1 & & \end{tikzcd}$$

は有限回の後必ず停止する．言いかえると, (対数的) フリップの無限列は存在しない．

フリップ予想 II では Δ を $\mathbb{Q}$-因子と仮定することは出来ない．Δ が $\mathbb{Q}$-因子か $\mathbb{R}$-因子かによって微妙に問題の難しさに差が出てくる．この点は注意が必要である．

ここで述べた話は, 対数的極小モデル理論のように, 対数的という冠をつけることもあるし, 省略することも多い．フリップ予想 I は一般次元で因子対数的末端対に対して完全に解かれた．川又対数的末端対の場合 (系 6) から従う．フリップ予想 II は完全解決には至っていない．特殊な設定のもとでフリップの無限列が存在しないという話が [BCHM] の主題のひとつである．先に進む前に極小モデルと対数的標準モデルの厳密な定義を与えておこう．

定義 15 (対数的末端モデル, 対数的標準モデル)　$\pi : X \to U$ を正規擬射影多様体の間の射影射とする．(X, Δ) は因子対数的末端対, $\phi : X \dashrightarrow Y$ は U 上の双有理射で ϕ^{-1} は因子を潰さないとする．ここで $\Gamma = \phi_* \Delta$ とおく．$K_Y + \Gamma$ が U 上豊富で, $a(E, X, \Delta) \leq a(E, Y, \Gamma)$ が任意の ϕ-例外因子 E に対して成立するとき, Y は (X, Δ) の**対数的標準モデル**(log canonical model) という．(Y, Γ) が $\mathbb{Q}$-分解的因子対数的末端対で, $K_Y + \Gamma$ は U 上数値的正, さらに $a(E, X, \Delta) < a(E, Y, \Gamma)$ が任意の ϕ-例外因子 E に対して成立するとき, Y は (X, Δ) の**対数的末端モデル**(log terminal model) という．または, 簡単に (**対数的**) **極小モデル**((log) minimal model) ということも多い．対数的極小モデル理論の結果として出てくる極小モデルは, この定義 15 の意味での極小モデルになっていることに注意しておこう．

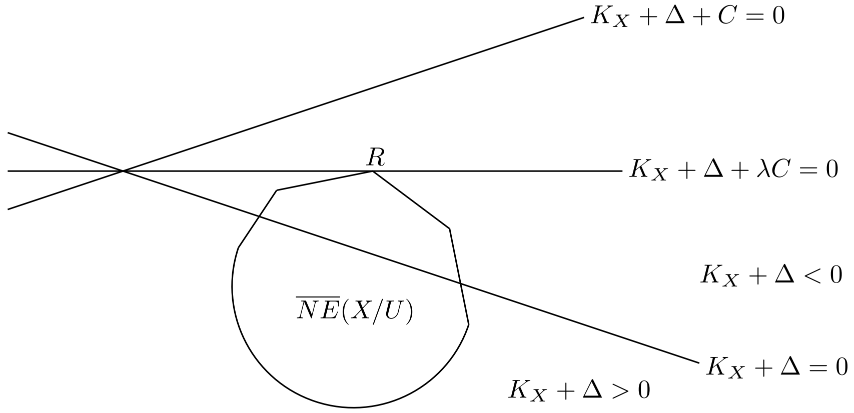
3 次元対数的フリップ予想 I は [Sh2] で証明された．この論文は非常に難解で, 本当に細部まで理解した人は皆無であると思われる．[Tk2] は [Sh2] を解読したとされる論文である．3 次元対数的フリップ予想 II を解決した論文 [K6] の手法と森の大結果 [M4] を合わせると [Sh2] の結果が復元出来ることが [CK][3), [Ko3] 内で証明されている．とにかく, [Sh2] は極小モデル理論の世界に非常にたくさんの新しい概念とアイデアと問題をもたらした論文であった[4)．

2.4　スケール付き極小モデル理論

ここでスケール付き極小モデル理論 (Minimal Model Program with scaling) を説明しよう．考え方自体は以前からあったと思うが, これを有効に活用したのが [BCHM] の成功の秘訣であろう．

$\pi : X \to U$ は正規擬射影多様体の間の射影射とする． 相対的な考え方が嫌いな人は U を一点としてもよい．(X, Δ) を $\mathbb{Q}$-分解的因子対数的末端対とする．さらに有効 $\mathbb{R}$-因子 C が存在し, $K_X + \Delta + C$ は U 上数値的正で因子対数的末端とする．もし $K_X + \Delta$ が U 上数値的正なら, (X, Δ) 自身が (X, Δ) の U 上の対数的末端モデルである．よって, $K_X + \Delta$ は U 上数値的正でないとする．このとき, $(K_X + \Delta)$-負な端射線 $R \subset \overline{NE}(X/U)$ と $0 < \lambda \leq 1$ なる実数 λ が存在し, $K_X + \Delta + \lambda C$ は U 上数値的正で $(K_X + \Delta + \lambda C) \cdot R = 0$ とできる．このような R の存在は, 端射線の長さの評価 (定理 9 (1) 内の $\leq 2 \dim X$) から従う．この R に付随した収縮射 $\varphi_R : X \to Y$ を考える．φ_R が双有理でなければ $\varphi_R : (X, \Delta) \to Y$ は対数的森ファイバー空間と呼ばれるものになる．以下 φ_R は双有理とする．もし φ_R が因子収縮射なら X を Y, Δ を $f_* \Delta$, C を $\lambda f_* C$ で取りかえる．もし φ_R がフリッピング収縮射ならフリップ $X \dashrightarrow X^+$ をほどこし, X を X^+, Δ をその厳密変換 Δ^+, C をその厳密変換の λ 倍である λC^+ で取り替えてやる．そうすると, $K_X + \Delta + C$ が U 上数値的正で因子対数的末端になることが分かる．そこで上の操作を繰り返してやる．結局のところ, 上の操作は $K_X + \Delta$ に関する通常の極小モデル理論を実行しているだけなのであるが, $(K_X + \Delta)$-負な端射線を選ぶときに, $\overline{NE}(X/U)$ と超平面 $K_X + \Delta + \lambda C = 0$ が $N_1(X/U)$ 内で接するところの端射線 R をとってくるのである (下図も参照)．この条件付きの極小モデル理論を (C に関する) **スケール付き極小モデル理論**という．どんどん C を減らしながら極小モデル理論を実行していくのである．[BCHM] では, (X, Δ) が

川又対数的末端対で Δ が巨大のとき, スケール付き極小モデル理論が一般次元で成立することを証明している. 定理として述べておこう.



定理 16 $\pi : X \to U$ を正規擬射影多様体の間の射影射とする. (X, Δ) を $\mathbb{Q}$-分解的川又対数的末端対とし, Δ を π-巨大とする. $K_X + \Delta + C$ が川又対数的末端で π-数値的正のとき, U 上で C に関するスケール付き極小モデル理論が成立する. つまり, 途中で必要となるフリップは必ず存在し, フリップの無限列が存在しないこともわかる.

3 PL フリップの存在

少し唐突であるが, この章では [HM2] による pl フリップの存在証明について解説したい. [HM3] にそって説明していこう. まず pl フリッピング収縮射の定義を思い出そう. この概念も [Sh2] によって導入されたものである. 非常に巧妙な概念で, その有難さは後の章にすすむと段々分かってくるであろう.

定義 17 正規多様体の間の双有理写像 $f : X \to Z$ が以下の条件をみたすとき, **pl フリッピング収縮射**であるという.

(1) f は余次元 1 で同型であり, 相対的ピカール数は 1 である.

(2) X は $\mathbb{Q}$-分解的で, Δ は $\mathbb{Q}$-因子である.

(3) (X, Δ) は純対数的末端対で, $S = \llcorner \Delta \lrcorner$ は既約である.

(4) $-(K_X + \Delta)$ と $-S$ は共に f-豊富である.

この $f : X \to Z$ に対するフリップ $f^+ : X^+ \to Z$ を **pl フリップ**という.

[HM2] の主定理は以下の通りである.

定理 18 $n-1$ 次元で極小モデル理論が成立するとする. つまり, フリップ予想 I と II が $n-1$ 次元で正しいとする. このとき, n 次元で pl フリップが存在する.

それでは [HM3] に従って証明の概略を説明しよう. まずひとつ定義を思い出しておこう.

定義 19 正規多様体 X 上の整因子 D を考える. 線形系 $|D|$ は空でないと仮定する. このとき, $F = \mathrm{Fix}D$ を $|D|$ の固定部分 (fixed part) とし, $\mathrm{Mob}D = D - F$ と書く. $\mathrm{Mob}D$ は D の可動部分 (mobile part) と呼ばれる.

以下問題は局所的なので (補題 13 を参照), Z は常にアフィンと仮定する. 結局次数付き $\mathcal{O}_Z$-代

数 $\mathfrak{R} = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + \Delta)))$ が有限生成であることを示せばよい．$\{\Delta\} = B$ とおいて，$(K_X + S + B)|_S = K_S + B_S$ とかく[5)]．制限写像

$$\rho : \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + S + B))) \to \bigoplus_{m \geq 0} H^0(S, \mathcal{O}_S(m(K_S + B_S)))$$

の像を $\mathfrak{R}_S$ と書くことにする．簡単に分かることであるが，$\mathfrak{R}$ の有限生成性と $\mathfrak{R}_S$ の有限生成性は同値である．pl フリッピング収縮射の定義の (1) と (4) の条件から簡単に従う事実である．もし ρ が全射なら次元による帰納法により $\mathfrak{R}_S$ が有限生成であることが示せる．しかし，一般には ρ が全射かどうかよくわからない．そこで実際の証明は以下のような筋道で行う．まず，非特異多様体からの射影的双有理射 $g : Y \to X$ を考える．$K_Y + \Gamma = g^*(K_X + \Delta) + E$ と書く．ただし，$g_*\Gamma = \Delta$ で，E は有効な例外因子とする．$k(K_X + \Delta)$ をカルティエとすると，

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mk(K_X + \Delta))) \simeq H^0(Y, \mathcal{O}_Y(mk(K_Y + \Gamma)))$$

が任意の正の整数 m に対して成立する．ここで $G_m = (1/mk)\mathrm{Fix}(mk(K_Y + \Gamma)) \wedge \Gamma$ とおく．つまり，$(1/mk)\mathrm{Fix}(mk(K_Y + \Gamma)) = \sum_j a_j D_j$，$\Gamma = \sum_j b_j D_j$ と表せたとき，$G_m = \sum_j \min\{a_j, b_j\} D_j$ とおく．すると，

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(mk(K_Y + \Gamma))) \simeq H^0(Y, \mathcal{O}_Y(mk(K_Y + \Gamma_m)))$$

が成立する．ただし，$\Gamma_m = \Gamma - G_m$ とおいた．ここまでは当たり前のことしか言っていない．ここで $g : Y \to X$ を適当にとると，制限写像

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(mk(K_Y + \Gamma_m))) \to H^0(T, \mathcal{O}_T(mk(K_T + \Theta_m)))$$

が全射にできる．ただし，T は S の厳密変換であり，$\Theta_m = (\Gamma_m - T)|_T$ である．ここに Siu の論文 [Si1] に始まる乗数イデアルをつかった拡張定理を巧妙につかう (定理 20 を参照せよ)．m に応じて $g : Y \to X$ を適当に選ばないといけない点に注意が必要である．つまり，Y は添字 m に依存する．ところが，T は m に依存しないようにとれるのである．

定理 20 (拡張定理)　Y を非特異多様体で $T \subset Y$ を Y 上の非特異因子とする．$\pi : Y \to Z$ は正規アフィン多様体 Z への射影射とする．L を Y 上のカルティエ因子，m を正の整数とし，$L \sim_{\mathbb{Q}} m(K_Y + T + B)$ とする．ここで以下を仮定する．

(1)　$T + B$ の台は単純正規交差因子で，T と B は共通成分をもたない．B は有効 $\mathbb{Q}$-因子で $\lfloor B \rfloor = 0$.

(2)　$B \sim_{\mathbb{Q}} A + C$ と書ける．ただし，A は豊富な $\mathbb{Q}$-因子で，C は有効 $\mathbb{Q}$-因子とする．さらに，C の台は T を含まない．

(3)　正の整数 p が存在し，$(Y, T + \lceil B \rceil)$ のどの対数的標準中心も $|pL|$ の固定点集合に含まれないとする．

すると，自然な制限写像 $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(L)) \to H^0(T, \mathcal{O}_T(L))$ は全射である．

少し注意を加えておこう．実際に我々が必要とするのは π が双有理写像の時で，(1) から (3) までの条件は応用上ほとんど問題にならない．見た目が凄く人工的な条件になっているが，ここは我慢が必要である．このようなタイプの定理は，90 年代後半の Siu の論文 [Si1] の出現までの極小モデル理論には欠落

していたように思う．詳しくは 4 章を参照せよ．話を元に戻そう．$\mathfrak{R}_T = \bigoplus_{m\geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(mk(K_T + \Theta_m)))$ とおくと $\mathfrak{R}_S \simeq \mathfrak{R}_T$ が分かるので，$\mathfrak{R}_T$ の有限生成性を示すことが問題である．正の整数 k と s を適当にとり，$l = ks$ とおいて $\mathfrak{R}_T(s) = \bigoplus_{m\geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(ml(K_T + \Theta_m)))$ を考える． すると $\mathfrak{R}_T(s)$ は以下の性質を持つ．

(1) $i\Theta_i + j\Theta_j \leq (i+j)\Theta_{i+j}$ という不等式が全ての i, j に対して成立する．この条件は**凸**と呼ばれる．また，$\Theta = \lim_{i\to\infty} \Theta_i$ が存在する．この条件は**有界**と呼ばれる．

(2) (T, Θ) は川又対数的末端対である．ここで Θ は一般には $\mathbb{R}$-因子である[6)]．

(3) $M_m = \mathrm{Mob}(ml(K_T + \Theta_m))$ とおき，$D_m = M_m/m$ とする．すると，$D = \lim_{m\to\infty} D_m$ は半豊富な $\mathbb{R}$-因子である．

(4) T 上に $\ulcorner F \urcorner \geq 0$ を満たす $\mathbb{Q}$-因子 F が存在し，$\mathrm{Mob}\ulcorner jD_{is} + F\urcorner \leq jD_{js}$ が任意の $i \geq j \gg 0$ に対して成立する．

ひとつずつ説明を加えていこう．(1) と (2) は構成方法からほぼ明らかである．(4) は**漸近的充満条件**(asymptotically saturated) と呼ばれる条件で，Shokurov[Sh4] が発見したすばらしい条件である．記号が込み入っているので分かりにくいと思うが，(4) の証明は川又–Viehweg 消滅定理を使うだけである．(3) は $n-1$ 次元の極小モデル理論から従う．極小モデルの有限性を使うのである．これは後に出てくるので，そこでもう一度詳しく述べることにしよう (5.5 参照)．大雑把にいうと，(T, Θ_m) の極小モデルが m に依らずに共通にとれるということを使う．ここに極小モデルの有限性という問題が自然に現れる．(3) と (4) の条件があると，ある正の数 m_0 が存在し，$D_{m_0} = D$ が分かる． ここにはディオファントス近似の話が必要である ([K2] も参照)．とくに D が半豊富な $\mathbb{Q}$-因子になってしまう． これが分かれば，結局 $\bigoplus_{m\geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(mD))$ の有限生成性から $\mathfrak{R}_T(s)$ の有限生成性が従う．少し議論が必要であるが，これから $\mathfrak{R}_T \simeq \mathfrak{R}_S$ の有限生成性を得る．よって pl フリップの存在が示せた．最後に (4) の条件を Y がアフィン曲線の時に見てみよう．フリップの問題を考える場合は Y の次元は 3 以上であるが，この部分のアイデアを見るには曲線のときが非常に分かりやすいのである． $\mathrm{Mob}\ulcorner jD_{is} + F\urcorner \leq jD_{js}$ を考えるのであるが，簡単のために $s = 1$ としてしまおう．$D_i = \sum d_{m,i} P_m$ と表示し，$F = \sum a_m P_m$ と書く．仮定より $-1 < a_m$ である．$D = \lim_{i\to\infty} D_i = \sum d_m P_m$ とおく．$\mathrm{Mob}\ulcorner jD_i + F\urcorner \leq jD_j$ なる条件は $\ulcorner jd_{m,i} + a_m\urcorner \leq jd_{m,j}$ を意味する．$i \to \infty$ とすると，$\ulcorner jd_m + a_m\urcorner \leq jd_{m,j} \leq jd_m$ が従う．これが全ての j で成立するので，d_m が有理数であることが分かる．さらにある j_0 に対して $d_{m,j_0} = d_m$ となることもわかる．従って $D_{j_0} = D$ である．一般の時はもう少し大変だが，からくりは同じである．

4　乗数イデアル層

4.1　乗数イデアル層とその応用

ここで少し話題を変えてみよう．pl フリップの存在証明の中でも使われた**乗数イデアル**(multiplier ideal) 層とその応用について考えてみたい．ファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の研究の際，Nadel は乗数イデアルという概念を導入した ([Nd])．設定は異なるが，乗数イデアルという考え方自体は Kohn が $\bar{\partial}$-ノイマン問題の研究の際に導入していたことを注意しておきたい ([Kh], [Si3] 参照)．その後，乗数イデアルは Demailly, Siu, 辻達によって線形系の固定点自由化問題に積極的に使われていくことになる．特異エルミート計量やそれに付随する乗数イデアル層の定義は，[D2] などを

見ていただくことにする．代数幾何学への応用で用いる特異エルミート計量は，大半が $\mathbb{Q}$-因子に付随するものである．この状況では以下の定義で十分である．

定義 21　X を非特異多様体とし，D を有効 $\mathbb{Q}$-因子とする． $f : Y \to X$ を非特異代数多様体からの固有双有理射で，$\mathrm{Supp} f^*D \cup \mathrm{Exc}(f)$ が単純正規交差因子になっているものとする．このとき，$\mathcal{I}(D) = f_*\mathcal{O}_Y(K_{Y/X} - \llcorner f^*D \lrcorner) \subset \mathcal{O}_X$ を D に付随した乗数イデアル層という．ただし，$K_{Y/X} = K_Y - f^*K_X$ である．

解析的な手法の説明をさぼったのであまり詳しいことは書けないが，小平の消滅定理においてエルミート計量を特異なものにまで広げた物が Nadel の消滅定理といわれるもので，その特殊な場合が川又–Viehweg 消滅定理である (定理 28 も参照)．$\mathbb{Q}$-因子に付随する特異エルミート計量のみを考えている限り，Nadel の消滅定理と川又–Viehweg 消滅定理に差はない ([D1] と [D2] を参照)．代数幾何における乗数イデアルの応用の初期の結果で最も重要なのは，[AS] であろう．[AS] の結果の一つを書いておく．

定理 22　X を n 次元非特異射影多様体とし，L を豊富なカルティエ因子とする．$m > n(n+1)/2$ のとき，$K_X + mL$ は大域切断で生成される．

この論文は結果自身も素晴らしいのであるが，大沢-竹腰拡張定理 [OT] を代数幾何の問題に初めて応用した点が重要である．結局この部分に関しては，川又–Viehweg 消滅定理の系として出てくる**逆同伴定理**(inversion of adjunction) を用いることで完全に代数的な議論で置き換えることが出来た ([Ko4] と [L] も参照)．大沢-竹腰拡張定理の重要性に気付いた Siu が示した次の大結果は多重種数の変形不変性 [Si1] である．

定理 23　$f : X \to S$ を非特異擬射影多様体の間の滑らかな固有射とする[7)]．さらに，すべてのファイバー $X_s = f^{-1}(s)$ は一般型と仮定する．このとき，任意の正の整数 m に対し，多重種数 $P_m(X_s) = h^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}(mK_{X_s}))$ は $s \in S$ に依らない．

この定理は極小モデル理論が完全に完成した暁には系として出てくることが知られていた [N1] が，Siu は直接証明してしまったのである．論文 [Si1] 内では大沢-竹腰拡張定理と Skoda の割り算定理という複素解析の結果が用いられているが，川又と中山は証明を代数化することに成功した ([K7], [N2])．さらに様々な一般化までおこなった．[K7] では標準特異点の変形不変性，[N2] では末端特異点の変形不変性を示している．あわせて書くと以下の通りである．

定理 24　$f : X \to S$ を代数多様体の芽から非特異曲線の芽への平坦射とし，中心ファイバー $X_0 = f^{-1}(0)$ は高々標準特異点 (または，末端特異点) しか持たないとする．このとき，X は高々標準特異点 (または，末端特異点) しか持たない．特に，すべてのファイバー $X_s = f^{-1}(s)$ も高々標準特異点 (または，末端特異点) しか持たない．

これらの話題は [K8] や [L] などで詳しく解説されている．この手法の一般化によって得られたのが，pl フリップの証明のなかで有効に使われた定理 20 である．その後，Siu は [Si2] で最終的に以下の結果を得た．

定理 25　$f : X \to S$ を非特異擬射影多様体の間の滑らかな固有射とする．このとき，任意の正の整数 m に対し，多重種数 $P_m(X_s) = h^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}(mK_{X_s}))$ は $s \in S$ に依らない．

つまり，ファイバーが一般型という仮定を外すことに成功し，多重種数の変形不変性については完全な解答を得た ([Ty2] も参照)．ファイバーが一般型とは限らないときは解析的な証明しか知られてい

ないことに注意が必要である．最終的に, Paun[P] によって Siu の証明は著しく簡略化された．少し大袈裟に言うと, そこでは大沢-竹腰拡張定理を上手く使うだけで, Skoda の割算定理も難しい消滅定理や Hörmander 流の $\bar{\partial}$-方程式の話も何もいらない．ただ, L^2 評価付きで拡張が出来るという大沢-竹腰拡張定理の主張だけを使うのである．もし Siu がいきなり Paun の方法で多重種数の変形不変性を解決していたら [K7], [K8], [N2] もすぐには存在しなかったわけで, そうなっていたら歴史は違う方向に行っていたかもしれない．別の応用としては, [HM1] と [Ty1] による次の素晴らしい結果もある．どちらの論文も [Ts] を元ネタにしているので, 同時期に同じような手法で同結果を得ているのは単なる偶然ではない．[Ts] と異なり, [HM1] も [Ty1] も純粋に代数的な証明である．定理 20 は定理 26 の証明のために作られたと言ってよい．

定理 26　X を n 次元一般型非特異射影多様体とする．このとき, n のみに依存する正の整数 m_n が存在し, 任意の $m \geq m_n$ に対して線形系 $|mK_X|$ は双有理写像を与える．

この章で述べた結果のいくつかについては解析的な証明が先行したが, [Si2] と [P] 以外はすべて代数的な証明が知られている．ただし, 榎 [E] による Kollár の単射性定理 [Ko1] の証明などを見ると, 後から得られた解析的証明の方が優れている場合もあるような気がする．折角なので [E] のアイデアを見てみよう．

4.2　単射性定理と消滅定理

すでにお気付きのように, 今まで出て来たほとんど全ての定理の証明は川又–Viehweg 消滅定理を使っている．ここではその一般化である Kollár の単射性定理を思い出してみよう．この節では以下の設定で考える．X を n 次元非特異射影多様体とし, L を X 上のカルティエ因子, D を X 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子とする．

定理 27 (Kollár の単射性定理)　$H \sim_{\mathbb{Q}} L - D$ は半豊富とする．正の整数 m が存在し, mH がカルティエで s は $\mathcal{O}_X(mH)$ の零でない大域切断とする．このとき, $\otimes s$ によって引き起こされるコホモロジー間の写像 $\times s : H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(D)) \to H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L + mH) \otimes \mathcal{I}(D))$ は任意の i に対し単射である．

もっと一般的な主張が [F7] と [F8] にある．定理 27 の究極の一般化は [F9] で得られている (定理 41 参照)．ただし, [F9] は完全に代数的な話である．定理 27 の系として以下を得る．

定理 28 (川又–Viehweg–Nadel 消滅定理)　$L - D$ を数値的正かつ巨大と仮定する．このとき, $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(D)) = 0$ が任意の $i > 0$ に対して成立する．

まず定理 28 を見てみよう．小平の補題と乗数イデアルの簡単な性質を用いると, $L - D$ を豊富と仮定できる．すると, Serre の消滅定理と定理 27 より定理 28 を得る．次に定理 27 の証明を [F7] にそって見てみよう ([F12] も参照)．k を正の整数で, $kL \sim kH + kD$, kH と kD は共にカルティエになるものとする．有効因子 kD に自然に付随する $\mathcal{O}_X(kD)$ の特異エルミート計量を h_1, 非特異で曲率が半正になる $\mathcal{O}_X(kH)$ の計量 h_2 を考え, $\mathcal{O}_X(L)$ の計量 h_L を $(h_1h_2)^{1/k}$ で定義する．h_L は $Y = X \setminus \mathrm{Supp}D$ 上で非特異な計量である．Y に適当に完備ケーラー計量を構成し, これらの計量で Y 上で調和積分論を展開する．すると, $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(D))$(または $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L + mH) \otimes \mathcal{I}(D))$) は $\mathcal{O}_X(L)$(または $\mathcal{O}_X(L + mH)$) に値をとる Y 上の調和 (n, i)-形式のなすベクトル空間 $\mathcal{H}^{n,i}(Y, L)$(または $\mathcal{H}^{n,i}(Y, L + mH)$) で実現される．中野の公式をつかうと, $\otimes s$ は $\mathcal{H}^{n,i}(Y, L)$ を $\mathcal{H}^{n,i}(Y, L + mH)$ に移すことがわかる．ここで h_L の曲率についての条件をつかったのである．明

らかに $\otimes s : \mathcal{H}^{n,i}(Y,L) \to \mathcal{H}^{n,i}(Y,L+mH)$ は単射なので, 目的の結果をえる．この証明は分岐被覆や特異点解消を繰り返しつかう代数的な証明よりも定理の条件を鮮明にしてくれる．また, X でなくて Y 上で考えることにより, L^2 理論でいつも出てくる特異エルミート計量の近似の話も不要である．$D=0$ のときは上の証明はかなり簡単になる．$Y=X$ で, 特異エルミート計量を考える必要もない．このときは定理 27 は榎の定理 [E] に含まれる．日本語での解説が [F12] にある[8]．

5　極小モデルの存在

この章では定理 2 の証明の概略を説明する．(X,Δ) を n 次元射影的川又対数的末端対とし, Δ が巨大で $K_X+\Delta$ が擬有効のとき, (X,Δ) に対して極小モデルを構成したい．次元 n による帰納法で証明していく．紙面の都合上, $n-1$ 次元スケール付き極小モデル理論から n 次元極小モデルの存在を示す部分のみを詳しく述べることにしよう．[BCHM] の 4 章と 5 章あたりである．

5.1　PL フリップの存在

これはすでに説明済みであるが, 次元による帰納法の観点から見直してみよう．3 章では $n-1$ 次元の極小モデル理論を仮定して n 次元 pl フリップの存在を証明した．実は証明を見なおすと, 3 章の証明には $n-1$ 次元 $\mathbb{Q}$-分解的川又対数的末端対 (X,Δ) で Δ が巨大 $\mathbb{R}$-因子となっているものに対するスケール付き極小モデル理論で十分であることがわかる．よって, 以下では n 次元 pl フリップの存在は自由につかってよい．

5.2　特殊停止定理

ここでは特殊停止定理 (special termination) と呼ばれる重要な定理を説明しよう．以下, (X,Δ) を因子対数的末端対とし, $\llcorner \Delta \lrcorner = S$ とする．

定理 29　スケール付き極小モデル理論が $n-1$ 次元以下で成り立つとする．(X,Δ) に対してスケール付き極小モデル理論 $X=X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_i \dashrightarrow X_{i+1} \dashrightarrow \cdots$ が走っているとする．すると有限回の操作のあと, $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ は S_i の近傍で同型になる．これを, スケール付き極小モデル理論は $\llcorner \Delta \lrcorner$ の近傍で停止した, という．

この定理も [Sh2] に始まる．一般次元の主張は [Sh4] の出発点である．厳密な証明は [F6] で得られた[9]．もちろん, 上記論文ではスケール付き極小モデル理論という設定で書かれていないが, [F6] の証明は上の設定でも全く問題なく機能する．ポイントだけ述べよう．$(X,S+B)$ を因子対数的末端対とする．S を被約な素因子とし, $B=\sum_j b_jB_j$ $(0<b_j\le 1)$ と書く．$(K_X+S+B)|_S = K_S+B_S$ で B_S を定義する．このとき, B_S の係数は 1 でなければ

$$\mathcal{S}(B) = \left\{ 1-\frac{1}{m}+\sum_j \frac{r_jb_j}{m} \,\middle|\, m\in\mathbb{Z}_{>0}, r_j\in\mathbb{Z}_{\ge 0} \right\}$$

に入る．いわゆる**同伴公式**(adjunction formula) である ([F5] を参照)．元々は Shokurov[Sh2] による．S の余次元 1 の状態, つまり, X の余次元 2 の特異点の影響がここに表れる．曲面の因子対数的末端対の分類結果がここに使われていることになる．(S,B_S) は $n-1$ 次元なので, 仮定よりスケール付き極小モデル理論が使える．B_S の係数が入る $\mathcal{S}(B)$ という集合の性質とスケール付き極小モデル理論から, 目的の主張が示せる．結局, スケール付き極小モデル理論が $n-1$ 次元以下で成立したら, n 次元でスケール付き極小モデル理論は $\llcorner \Delta \lrcorner$ の近傍だけではあるが, 止まることが分かった．この特殊

停止定理は見た目より強力で, 極小モデルの構成にはこの程度の停止定理で十分なのである. 以下でそれを見てみよう. これも最初のアイデアは [Sh2] にあり, [FA] や [KM] にも載っている. [F6] で言うところの, 特殊停止定理を認めての還元定理 (reduction theorem) が次のステップに相当する. pl フリップと特殊停止定理があれば一般のフリップの存在が示せるというのが [Sh2] の主なアイデアであった.

5.3　極小モデルの構成

まずは簡単な補題から準備しよう.

補題 30　n 次元で特殊停止定理 (定理 29) が正しいとする. さらに以下の条件を仮定する.

(1)　(X, Θ) は n 次元 $\mathbb{Q}$-分解的因子対数的末端対とする.

(2)　ある正の実数 c と有効 $\mathbb{R}$-因子 H と F が存在し, $K_X + \Theta \sim_{\mathbb{R}} cH + F$ と書ける.

(3)　$(X, \Theta + H)$ は因子対数的末端対で, $K_X + \Theta + H$ は数値的正とする.

(4)　$\mathrm{Supp}(F) \subset \llcorner \Theta \lrcorner$ とする.

このとき, $(X, \Theta + tH)$ の極小モデルが任意の $0 \leq t \leq 1$ に対して存在する.

証明はスケール付き極小モデル理論を走らせるだけである. 条件 (3) があるので, H に関するスケール付き極小モデル理論を走らせることが出来る. 錐定理と収縮定理は一般次元で成り立つので全く問題ない. 各段階で選ぶ端射線 R はスケール付き極小モデル理論という仮定から $H \cdot R > 0$ と $(K + \Theta) \cdot R < 0$ を満たす. ここで条件 (2) から $F \cdot R < 0$ が従い. 条件 (4) を使うとフリッピング収縮射は pl フリッピング収縮射になることが分かる. pl フリップの存在はすでに知っているので, 極小モデル理論を実行することができる. 問題はこの操作が有限回で止まることを確認する点だけである. もしこの極小モデル理論が止まらなければ, 各段階はつねに $\llcorner \Theta \lrcorner$ の内部で起こることが, $F \cdot R < 0$ と $\mathrm{Supp}(F) \subset \llcorner \Theta \lrcorner$ より分かる. これは特殊停止定理に矛盾する. 従って止まるのである.

実際の極小モデルの構成は以下の通りである. 定理の形で書いておこう[10)]. 定理 31 は n 次元対数的フリップ予想 I を解決したことにもなっている.

定理 31　(X, Δ) は n 次元川又対数的末端対で Δ は巨大とし, $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{R}} D \geq 0$ とする. n 次元で特殊停止定理が正しいとする. このとき, (X, Δ) の極小モデルが存在する.

証明は以下の通りである. 面倒なので考える因子はすべて $\mathbb{Q}$-因子としよう. 実際は $\mathbb{R}$-因子まで一般化しておかないと, 極小モデルの有限性の証明がうまくいかなくなる. 特異点解消定理を使うことにより, 以下の条件を仮定してよい.

(1)　X は非特異で $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} D \geq 0$. ただし, $\mathrm{Supp}(\Delta + D)$ は単純正規交差因子である.

(2)　有効で豊富な $\mathbb{Q}$-因子 A と有効な $\mathbb{Q}$-因子 B が存在して $\Delta = A + B$ と書ける.

(3)　$D = rM + F$ と書ける. ただし, M は動く有効因子で, 有効 $\mathbb{Q}$-因子 F の任意の既約成分は D の安定固定点集合に入っている. つまり, 任意の正の整数 m に対し, $\mathrm{Fix}|mD|$ に入っている.

(4)　Δ と M は共通成分をもたない.

$F = \sum_{i=1}^{k} a_i \Delta_i$, $\Delta = \sum_{i=1}^{l} b_i \Delta_i$ と書く. ただし, $k \leq l$ である. このとき, $\Delta' = \sum_{i=1}^{k} (1 - b_i)\Delta_i$ とおいて, $F' = F + \Delta'$, $\Theta = \Delta + \Delta'$ と定義する. 作り方より, $\mathrm{Supp}(F') \subset \llcorner \Theta \lrcorner$ である. 適当な豊富因子 H を取ってくると, $(X, \Theta + M + H)$ は因子対数的末端対, $K + \Theta + M \sim_{\mathbb{Q}} 0 \cdot H + (r + 1)M + F'$, $K + \Theta + M + H$ は数値的正, $\mathrm{Supp}(M + F') \subset \llcorner \Theta + M \lrcorner$ とできる. $(X, \Theta + M)$ に H に関するスケール付き極小モデル理論を適用すると, 補題 30 より, $(X, \Theta + M)$ の極小モデルが存在

する．よって，$(X, \Theta + M)$ は初めから極小モデルだったと仮定してよい．故に，$K + \Theta \sim_{\mathbb{Q}} rM + F'$ で $K + \Theta + M$ は数値的正，さらに $\mathrm{Supp}(F') \subset \llcorner \Theta \lrcorner$ である．ここで M に関するスケール付き極小モデル理論をつかうと，再び補題 30 により，(X, Θ) の極小モデルの存在が言える．少し議論が必要であるが，(X, Θ) の極小モデルは (X, Δ) の極小モデルになっていることが分かる[11]．これで極小モデルの存在は言えた．問題は，次元による帰納法を完成させるには，n 次元でスケール付き極小モデル理論の停止問題まで証明しないといけないという点である．さらに，定理 31 では $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} D \geq 0$ を仮定しているが，定理 2 では $K_X + \Delta$ が擬有効としか仮定していない．この辺りの微妙な違いが技術的にはかなり厄介である．

5.4　スケール付き極小モデル理論の停止

ここでは n 次元スケール付き極小モデル理論の停止問題を考えてみよう．とりあえず設定を確定しよう．(X, Δ) を因子対数的末端対とし，$K_X + \Delta + H$ は数値的正で因子対数的末端とする．このとき H に関するスケール付き極小モデル理論を走らせることが出来た．

定理 32　$(X, \Delta + tH)$ の極小モデルが $0 \leq t \leq 1$ に対して高々有限個しかないとすると，H に関するスケール付き極小モデル理論はとまる．

これはほぼ明らかである．スケール付き極小モデル理論の各段階 $X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_i \dashrightarrow X_{i+1} \dashrightarrow \cdots$ をみると，実数の減少列 $1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots$ が存在し，$K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ は $K_X + \Delta + t_i H$ の極小モデルになっている．したがって，仮定からフリップの無限列が存在しないことは明らかである．そもそもモデルの可能性が有限個しかないからである．そこで極小モデルの有限性が重要な問題として出てくる．

5.5　極小モデルの有限性

ここでは非常に簡単な場合に極小モデルの有限性を見てみる．pl フリップの存在証明にはこの程度の主張で十分であるが，[BCHM] の完全証明には技術的にもっと込み入った主張が必要になる (定理 36 参照)．まず準備である．V を X 上のヴェイユ因子のなす実ベクトル空間内の有限次元アフィン部分空間で有理数体上定義されているものとする．A は X 上の $\mathbb{R}$-因子で，A は V の元と共通成分を持たないとする．$V_A = \{\Delta \mid \Delta = A + B, B \in V\}$ とし，$\mathcal{L}_A = \{\Delta \in V_A \mid (X, \Delta)$ **は対数的標準対** $\}$ とする．すぐに分かるが，$\mathcal{L}_A$ はコンパクトな凸多面体である[12]．

定理 33　(X, Δ) が n 次元川又対数的末端対，Δ は巨大で $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{R}} D \geq 0$ のとき，(X, Δ) の極小モデルは常に存在すると仮定する．X を n 次元正規射影多様体とし，A を X 上の一般豊富 $\mathbb{Q}$-因子とする．以下，A は常に固定しておく．$\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_A$ を有理多面体とし，任意の $\Delta \in \mathcal{C}$ に対して $K_X + \Delta$ は川又対数的末端対で $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{R}} D \geq 0$ が成立すると仮定する．このとき，有限個の有理写像 $\phi_i : X \dashrightarrow Y_i$(ただし，$1 \leq i \leq k$) が存在し，任意の $\Delta \in \mathcal{C}$ に対しある i が存在し，$(Y_i, \phi_{i*}\Delta)$ は (X, Δ) の極小モデルになる．

証明は以下の通りである．まず，$\Delta_0 \in \mathcal{C}$ を一つ取ってくる．$\mathcal{C}$ のコンパクト性より，この Δ_0 の近傍で定理を証明すれば十分である．以下必要なら $\mathcal{C}$ は Δ_0 の近傍に縮めておく．仮定より $K_X + \Delta_0$ の極小モデル $\phi : X \dashrightarrow Y$ を取ってくる．簡単な議論で分かることだが，(X, Δ_0) を $(Y, \phi_*\Delta_0)$ で取り替えて議論してもよい．ここでは最初から (X, Δ_0) を $(Y, \phi_*\Delta_0)$ で取り替えて議論してしまおう．こうすると，固定点自由化定理が使える[13]．写像 $f : X \to Z$ が存在し，$K_X + \Delta_0 \sim_{\mathbb{R}, Z} 0$ となる[14]．Δ_0 の十分近傍のみを考えるのなら，Z 上の相対的極小モデルは通常の意味で極小モデルとなること

がわかる．よって, 以下すべて Z 上で考えてよい．$\Theta \in \mathcal{C}$ を一つ取ってくる．$\mathcal{C}$ の境界にある因子 Δ をとってきて, Θ は Δ_0 と Δ を結ぶ線分の上にあるようにできる．すると, $0 < \lambda \leq 1$ が存在し, $\Theta - \Delta_0 = \lambda(\Delta - \Delta_0)$ と書ける．$K_X + \Theta \sim_{\mathbb{R},Z} \lambda(K_X + \Delta)$ に注意すると, $\phi : X \dashrightarrow Y$ が (X, Θ) の Z 上の極小モデルであることと, $\phi : X \dashrightarrow Y$ が (X, Δ) の Z 上の極小モデルであることの同値性がわかる．Δ は $\mathcal{C}$ の境界上の因子なので, $\mathcal{C}$ の次元による帰納法で定理は従う．

これで極小モデルの有限性の意味は分かっていただけたと思う．極小モデルの有限性が n 次元で分かれば, n 次元でスケール付き極小モデル理論の停止問題が解決し, 次元による帰納法が完成する．

5.6　不足していること

今までの説明で大体のからくりは分かっていただけたと思う．ただし, 不足している部分がいくつかある．最も大きな部分は $K_X + \Delta$ の擬有効性から $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{R}} D \geq 0$ を示すところである．この部分は完全に省略した．ある意味 [BCHM] の最も新しい部分は, この**非消滅定理**と呼ばれるところである (定理 37 を参照)．さらに, 極小モデルの有限性のところでは, 川又対数的末端対しか扱わなかったが, 実際はもう少し一般的な設定にしておかないと帰納法はうまく回らない．さらに, フリップの停止問題のためには定理 33 よりも強い意味での有限性が必要となる (定理 36 参照)．定理 33 の議論を用いて対数的標準モデルの有限性を示し, 最終的には**弱対数的標準モデル**の有限性を示す．かなり技術的な部分である．(X, Δ) が川又対数的末端対で Δ が巨大のとき, $\overline{NE}(X)$ の $(K_X + \Delta)$-負な端射線が有限本しかないという事実が重要となってくる．論説で解説するのに適当な話題とは思えないので, 原論文 [BCHM] の 6 章と 7 章を読んでいただきたい．逆にいうと, [BCHM] の 6 章と 7 章の約 10 ページほどの議論以外はこの論説ですべてカバー出来ている．

6　実際証明されたこと

ここでは [BCHM] で実際に証明されたことを述べておく．すでに 5 章の解説でこれらの定理の意味と役割は大体理解されていると思う．主張を述べた後に, 非消滅定理の証明について少し説明を加えることにする．

定理 34 (PL フリップの存在)　$f : X \to Z$ を n 次元純対数的末端対 (X, Δ) からの pl フリッピング収縮射とする．このとき, フリップ $f^+ : X^+ \to Z$ が存在する．

定理 35 (対数的末端モデルの存在)　正規擬射影多様体の間の射影射 $\pi : X \to U$ を考える．ただし, X は n 次元とする．(X, Δ) を川又対数的末端対とし, Δ は U 上巨大と仮定する．もし有効な $\mathbb{R}$-因子 D が存在し, $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{R},U} D$ なら, $K_X + \Delta$ は U 上対数的末端モデルを持つ．

定理 36 (モデルの有限性)　正規擬射影多様体の間の射影射 $\pi : X \to U$ を考える．ただし, X は n 次元とする．U 上の一般豊富 $\mathbb{Q}$-因子 A を固定する．ある Δ_0 が存在し, $K_X + \Delta_0$ は川又対数的末端対とする．$\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_A$ を有理凸多面体とし,

(1) 任意の $\Delta \in \mathcal{C}$ に対し, $K_X + \Delta$ は U 上巨大,

もしくは,

(2) $\mathcal{C} = \mathcal{L}_A$

のいずれかを満たすとする．このとき, $\{Y | \Delta \in \mathcal{C}$ で Y は (X, Δ) の U 上の弱対数的標準モデル $\}$ の同型類は有限集合である．

定理 37 (非消滅定理)　正規擬射影多様体の間の射影射 $\pi : X \to U$ を考える．ただし, X は n 次元

とする．もし $K_X+\Delta$ が π-擬有効なら, 有効 $\mathbb{R}$-因子 D が存在し, $K_X+\Delta\sim_{\mathbb{R},U} D$ となる．

3 章と 5.1 で説明したように, $n-1$ 次元以下のスケール付き極小モデル理論を仮定すると n 次元 pl フリップの存在が証明できる．これが定理 34 である．すると 5.3 の議論により, 極小モデルの存在 (定理 35) が証明出来る．つぎに, モデルの有限性を定理 36 の (1) の条件のもとで証明する．$K+\Delta\sim_{\mathbb{R},U} D\geq 0$ となる有効 $\mathbb{R}$-因子 D の存在は $K+\Delta$ の π-巨大性から従うので, すでに証明した定理 35 が使える．5.5 で説明した議論を用いて定理 36 を (1) の仮定のもとで得るのである．ちなみに, 定理 36 は川又対数的末端対だけに対して考えているのでは不十分なので, 凄く人工的な設定になっている．主張自身も極小モデルではなく, 弱対数的標準モデルの同型類の有限性である．このあたりの微妙さは, オリジナルの論文 [BCHM] を見ていただきたい．非消滅定理の証明は定理 36 の (1) の場合を使って証明する．中山 [N3] の議論と Shokurov の古典的な非消滅定理の議論 [Sh1] とモデルの有限性の話を巧妙に組み合わせて証明する．ここが [BCHM] の最も新しい部分であろう．$\mathbb{Q}$-因子ではなくて $\mathbb{R}$-因子まで扱わないといけないことが証明を難しくしている．いったん非消滅定理 (定理 37) が証明されたら, 定理 35 は $K_X+\Delta$ が π-擬有効という弱い仮定で成立することがわかる．最後にこれを使って定理 36 の残りの部分を証明する．ここの議論は基本的に 5.5 で説明したものである．これで次元による帰納法は一回りする．モデルの有限性 (定理 36) があると n 次元スケール付きの極小モデル理論の停止問題が解決されるからである (5.4 参照).

7　今後の課題

最後にいくつか関連する未解決問題を見てみよう．

7.1　フリップの停止問題

フリップの停止問題は最も重要な未解決問題のひとつである．現在までのところ, 3 次元では完全に解決されている．[Sh1], [K6], [Sh3] である ([Ko3] も参照せよ). 4 次元では [KMM] に始まり, [Ma1], [F2], [F3], [F4] と続き, [AHK] が現在最良の結果と思われる．ただし, 完全解決には至っていない．これらの論文は基本的に [Sh1] で導入された難度 (difficulty) なる概念の一般化を用いての証明である．全く違う方向からのアプローチとしては [B1] や [Sh5] などがある．ここではフリップ予想 II 解決へのアプローチのひとつを [Sh5] にそって解説しておこう．

X を n 次元正規多様体, Δ は X 上の有効 $\mathbb{R}$-因子で $K_X+\Delta$ は $\mathbb{R}$-カルティエとする． Δ の係数のなす集合を $\Gamma\subset[0,1]$ と書いておこう． **極小対数的食い違い関数**(minimal log discrepancy function)$\mathrm{mld}: X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ を以下で定義する． $\mathrm{mld}(x)=\inf_E a(E,X,\Delta)+1$． ただし, x は X のスキーム論的な点であり, 正規代数多様体からの双有理射 $f: Y\to X$ と Y 上の素因子 E で $f(E)=x$ なるもの全てを動かして下限をとることとする．$\mathrm{mld}(x)=a(x,X,\Delta)+1$ と書くことも多い．このとき以下のふたつの予想が基本的である[15)].

予想 38 (昇鎖列条件)　$A(\Gamma,m)=\{a(y,Y,B)+1\in\mathbb{R}\}$ とおく．ただし, Y は m 次元正規多様体, B は係数が Γ に入る $\mathbb{R}$-因子で K_Y+B は $\mathbb{R}$-カルティエ, y は Y の閉点とする．これらの条件をみたす Y, B, y を全て動かして考えて $A(\Gamma,m)$ を定義するのである．このとき, $A(\Gamma,m)$ は昇鎖列条件 (ascending chain condition) をみたす．つまり, $a_i\in A(\Gamma,m)$ で $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_k\leq\cdots$ なら, ある k_0 が存在し, $a_k=a_{k_0}$ が任意の $k\geq k_0$ に対して成立する．

予想 39 (下半連続性)　Y は m 次元正規多様体, B は係数が Γ に入る Y 上の $\mathbb{R}$-因子, K_Y+B は

$\mathbb{R}$-カルティエとする． このとき任意の閉点 $y \in Y$ に対して y の近傍 $U \subset Y$ が存在し，$\mathrm{mld}(y) = \inf_{y' \in U} \mathrm{mld}(y')$ が成立する． ただし，y' は U の閉点で，$\mathrm{mld}(y) = a(y, Y, B) + 1$ と $\mathrm{mld}(y') = a(y', Y, B) + 1$ である ([A1] も参照).

これらふたつの予想から以下の定理が従う.

定理 40 $X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_i \dashrightarrow X_{i+1} \dashrightarrow \cdots$ は (X, Δ) から始まるフリップの列とする. また, 全てのフリップ $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ は固定された多様体 S 上射影的であるとする. 予想 38 と予想 39 が $\dim X$ 以下で成立したら, 上のフリップの列は有限回で停止する.

したがって予想 38 と予想 39 の解決で極小モデル理論は完成ということになるのである. Y が局所完全交叉特異点しか持たないときには, 予想 39 はジェットスキームの理論を用いて証明されている ([EMY] と [EM] 参照). 一般のときは未解決である. 予想 38 に関しては, Shokurov を中心に幾つかの試みがあるが, 現在のところ未解決である ([BS], [Sh5] 参照).

7.2 対数的標準対についての極小モデル理論

極小モデル理論は最終的には対数的標準対に対して成立すると信じられている. そのためには極小モデル理論の出発点である錐定理と収縮定理を対数的標準対について証明できないことにはお話にならない. そこで錐定理の証明を思い出してみると, 結局のところ, 川又–Viehweg 消滅定理に行き着く. 川又対数的末端対の世界では川又–Viehweg 消滅定理が成立するので, この消滅定理を使って上手く次元による帰納法を行うのである. これは川又によって繰り返し使われた方法で, X-論法 (X-method) と呼ばれている. Ambro は [A2] の中で, Kollár の消滅定理と捻れ不在定理 (torsion-free theorem)([Ko1] 参照) の一般化が埋め込まれた正規交差対 (embedded normal crossing pair) に対して証明出来れば X-論法が擬対数多様体 (quasi-log variety) の世界で上手く機能し, 最終的に対数的標準対に対しても錐定理と収縮定理が証明出来ることに気付いた. 対数的標準対に対する川又–Viehweg 消滅定理の一般化 ([F9] 参照) は帰納法には不十分であることを注意しておく. 結局問題は Kollár の定理の一般化を示すことに集約されたわけである[16]. ここでは [F9] に従って対数的標準対の極小モデル理論で必要となる Kollár の定理の一般化を説明する. M を非特異代数多様体とし, Y を M 上の被約な単純正規交差因子とする. D は M 上の $\mathbb{R}$-因子で, $D = \sum_i d_i D_i$ と書いたとき, 全ての i に対して $0 \le d_i \le 1$ が成立するとする. さらに, D と Y は共通成分を持たず, $\mathrm{Supp}(D + Y)$ は M 上の単純正規交差因子とする. このとき $B = D|_Y$ とおく. 以下, 対 (Y, B) について考える. $\nu : Y' \to Y$ を Y の正規化とし, $K_{Y'} + B_{Y'} = \nu^*(K_Y + B)$ とおくと, $(Y', B_{Y'})$ は対数的標準対である. Y の既約成分と, $(Y', B_{Y'})$ の対数的標準中心の ν での像を (Y, B) の階層 (stratum) とよぶ. さらに, Y 上の $\mathbb{R}$-カルティエ因子 A の台が (Y, B) のどの階層も含まないとき, A は許容可 (permissible) と呼ぶ. すると, Kollár の単射性定理 [Ko1] の一般化として次の定理を得る.

定理 41 Y は完備と仮定する. L を Y 上のカルティエ因子とし, A を Y 上の有効カルティエ因子で (Y, B) に関して許容可とする. さらに次を仮定する.

(1) $L \sim_{\mathbb{R}} K_Y + B + H$.

(2) H は半豊富な $\mathbb{R}$-カルティエ因子である.

(3) (Y, B) に関して許容可な有効 $\mathbb{R}$-カルティエ因子 A' と正の実数 t が存在し, $tH \sim_{\mathbb{R}} A + A'$ とかける.

このとき, 包含射 $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y(A)$ から自然に引き起こされる $H^q(Y, \mathcal{O}_Y(L)) \to H^q(Y, \mathcal{O}_Y(L + A))$

は任意の q に対し単射である．

定理 41 から次の定理を得る．(i) は Kollár の捻れ不在定理の一般化で, (ii) は Kollár の消滅定理の一般化である．

定理 42　$f : Y \to X$ を固有射とし, L を Y 上のカルティエ因子とする．さらに, $H \sim_{\mathbb{R}} L - (K_Y + B)$ は f-半豊富と仮定する．このとき, 以下の 2 つの主張を得る．

(i)　$R^q f_* \mathcal{O}_Y(L)$ の全ての (零でない) 局所切断の台は (Y, B) の幾つかの階層の f での像を含む．

(ii)　$\pi : X \to V$ を射影射とし, X 上の π-豊富な $\mathbb{R}$-カルティエ $\mathbb{R}$-因子 H' によって $H \sim_{\mathbb{R}} f^* H'$ と書けるとする．このとき, $R^p \pi_* R^q f_* \mathcal{O}_Y(L) = 0$ がすべての $p > 0$ と $q \geq 0$ に対して成立する．

詳しい証明は [F9] を見ていただきたい．非コンパクトな V-正規交差多様体というべきものの上でコンパクトな台をもったコホモロジー群を考え, そこに入る混合ホッジ構造を解析するという非常に面倒な証明である．ともかく, この定理のおかげで対数的標準対についての極小モデル理論の枠組みは完成したわけである．このときも極小モデル理論の完成にはフリップ予想 I と II の解決が必要である．フリップ予想 II に関しては川又対数的末端対に対して証明出来れば対数的標準対に対しても正しいことが簡単にわかる．詳しくは [F6] と [F10] を見ていただきたい．したがって, 問題はフリップの存在問題である．3 次元のときは [KK] で証明されていた．4 次元のときは [F1] をつかって [F10] で証明されたが, 3 次元の可約な多様体に関するアバンダンス定理を使うという大変な証明になっている．そこで最後にアバンダンス予想について見てみよう．

7.3　アバンダンス予想

アバンダンス予想とは以下の通りである．いろいろなバージョンが存在するが, 以下の主張が一番一般的であろう．予想されてから 20 年以上経ったが, 4 次元以上では今のところ大きな発展はない．

予想 43　(X, Δ) を対数的標準対とし, $\pi : X \to S$ を固有射とする．もし $K_X + \Delta$ が S 上数値的正なら $K_X + \Delta$ は S 上半豊富である．

川又による解説 [K11] 以降, [KMMc1] ([KMMc2] も参照) で 3 次元対数的アバンダンス予想は解決された．現在のところ, 3 次元半対数的標準対という可約な多様体までアバンダンス予想は一般化されている ([F1] 参照)．これは 4 次元のアバンダンス予想への第一歩と考えられる．実際上で述べたように, 4 次元の対数的標準対に対するフリップ予想の解決に利用できた．アバンダンス予想は他の予想よりもかなり深い予想のような気がするが, 実際のところはよくわからない．上記予想の特殊な場合を書いておこう．

予想 44　X を高々末端特異点しか持たない射影多様体とする．K_X が数値的正のとき K_X は半豊富である．

この予想は, 極小モデルは自然に**飯高ファイバー空間**の構造を持つ, と主張している．予想 44 解決の出発点になるべき次の予想もまだ未解決である．

予想 45　X を非特異射影多様体とし, K_X を擬有効とする．このとき, ある正の整数 m が存在し, $H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)) \neq 0$ である．つまり, 小平次元 $\kappa(X)$ は非負である．

射影多様体 X の擬有効錐体 $PE(X)$ のひとつの特徴付けが [BDPP] で得られた ([L] も参照)．これと森–宮岡 [MM] の結果を合わせると次を得る．

定理 46　X を非特異射影多様体とする．このとき, K_X が擬有効でないことと, X が単線織的 (uni-ruled) であることは同値である．

したがって, 予想 45 は X が単線織的でないとき $\kappa(X) \geq 0$ となることを主張している. 直接的な進歩ではないが, 予想 45 解決の道具になるであろう宮岡の定理 ([Mi] と [S] を参照) は [KST] でかなり簡略化されたように思う. ただし, [KST] は大結果 [GHS] に依存している. 最近は [GHS] のおかげで有理連結多様体 (rationally connected variety) 関連の話はかなり見通しがよくなっている. ここで少し [K1] について注意しておこう. [K1] の主定理の直接的な系として以下のことがよく知られている.

定理 47 (X, Δ) を川又対数的末端対で Δ は $\mathbb{Q}$-因子とし, $K_X + \Delta$ は数値的正とする. 小平次元 $\kappa(X, K_X + \Delta)$ と数値的小平次元 $\nu(X, K_X + \Delta)$ が一致するとき, $K_X + \Delta$ は半豊富である.

よって, (X, Δ) が川又対数的末端対のときは, アバンダンス予想は小平次元と数値的小平次元の一致を主張している. [K1] の証明は, やはり X-論法とよばれる次元による帰納法である. ただし, 通常の固定点自由化定理の時と違い, 川又–Viehweg 消滅定理が成り立たない状況なので, Kollár の単射性定理の一般化を用いる. 次元による帰納法を上手く実行するためには, 一般化正規交差多様体 (generalized normal crossing variety) に対して Kollár の結果 [Ko1] を証明しなくてはいけない. これは [A2] と非常によく似た状況である. というより, [A2] の元ネタが [K1] と言うべきである. ごく一部の専門家しか気付いていないが, [K1] の証明には穴がある[17]. [F9] と同様の議論で穴を埋めることは可能だと思うが, 私の知る限り [K1] の証明の穴を補う出版物は存在しない. そこで, [F11] で [K1] の主定理の別証明を与えた. [F11] は [K1] の穴を埋めるのではなく, 全く異なる方法で [K1] の主定理を復元する. 標準因子公式を用い, よく知られた通常の固定点自由化定理に帰着させるのである. [K1] は可約な多様体の混合ホッジ構造に訴える証明だが, [F11] はホッジ束の標準接続の理論をつかうホッジ構造の変形理論に依存した証明である. ともかく, [K1] の主定理は安心して使えるようになった.

謝辞: 科学研究費若手 (A)♯17684001 の援助と稲盛財団からの援助を受けている. 感謝する. [BCHM] の解読には高木寛通さん (東大) と川北真之さん (数理研) の助けが大いに役立った. お二人に深く感謝したい. 美しい図を描いてくれた齋藤夏雄さん (広島市大) に感謝する. 最後に, 川北真之さん, 高木寛通さん, 高山茂晴さん (東大), 安田健彦さん (数理研) にたくさんの有益なコメントをいただいた. 感謝する.

注 釈

1) [BOOK] の執筆者は F. Ambro, A. Corti, O. Fujino, C. Hacon, J. Kollár, J. McKernan, H. Takagi の 7 名である. 本と言うよりは論文集と言った方が良いかもしれない. 実際のセミナーの主要メンバーは A. Corti を中心に, F. Ambro, O. Fujino, M. Kawakita, J. McKernan, H. Takagi の 6 名であった. ちなみに, [Sh2] の解読セミナーは J. Kollár を中心に Utah で行われ, [FA] としてまとめられている. A. Corti と J.McKernan は Utah でのセミナーの参加者であるが, 他のメンバーは若手である.

2) 基本文献 [KMM], [FA], [KM], [Ma2] の対数的末端 (log terminal) の定義がすべて異なっている点に注意が必要である. この辺の事情は [F5] が詳しい.

3) この論説を書くために [CK] を読み直して気付いたのだが, [CK] の (5.1.2) の後半の条件は, E の中心は $\llcorner D \lrcorner$ に含まれる曲線である, とすべきである.

4) 因子対数的末端対, 純対数的末端対をはじめとする大量の対数的末端対の概念, 後に出てくる逆同伴定理や pl フリップと特殊停止定理のアイデアもここで導入された. 連結性補題 (connectedness lemma) という有名な結果もある.

5) $(X, S + B)$ が純対数的末端対なら (S, B_S) は川又対数的末端対である. (S, B_S) が川又対数的末端対なら $(X, S + B)$ が S の近傍で純対数的末端対になるというのが逆同伴定理である.

6) ここで初めて $\mathbb{R}$-因子が登場する. 次の性質 (3) の証明で極小モデルの有限性という問題が自然に出てくるのであるが, そこの議論には有理数では不十分で, 実数の連続性が必要になる.

7) 定理 23 と定理 25 では S は開円板としてよい.

8) 代数幾何の専門家にはほとんど知られていなかったが, [E] 以降, [Tg] や [O] でこの方面の研究は続いていた.

9) 3 次元の特殊停止定理の特別な場合は [Sh2] で示された. 3 次元の一般的な主張と証明は [KMa] にある. 一般次元でのもの凄く一般的な主張は [Sh4] にある. た

だし, [Sh4] には 4 次元で特別な設定の元での証明のスケッチしかない. [F6] では, 次元による帰納法が上手く機能するような定式化と厳密な証明が一般次元で述べてある.

10) この定理は [B2] で一般化と簡略化がなされている. そこでは Δ の巨大性は不要である. しかし, Δ の巨大性の仮定は次の極小モデルの有限性のところで必要になってくる. ここでは [BCHM] を尊重することにした. [CHKLM] 内の Kollár の解説も参照せよ.

11) この部分に Δ の巨大性が必要である. この条件のおかげで, $K+\Theta$ が数値的正なら半豊富になるということが言える.

12) $\mathbb{Q}$-因子では不十分で, $\mathbb{R}$-因子まで考えないといけない理由がここにある.

13) ここに Δ_0 の巨大性がかなり効いている.

14) Z 上に $\mathbb{R}$-カルティエ因子 C が存在し, $K_X+\Delta_0 \sim_{\mathbb{R}} f^*C$ ということである.

15) [Sh5] ではもっと一般的な設定で論じている.

16) Ambro 自身は Kollár の定理の一般化も証明出来たと主張しているが, 残念ながら彼の証明は非特異射影多様体に対しても上手く機能しない.

17) [K1] の定理 4.3 に穴がある. 定理 4.3 の主張は正しそうだし, 証明内の議論も正しいのだが, 最後の部分で必要な議論がかなり欠落しているように思える.

文　献

[AHK] V. Alexeev, C. Hacon, Y. Kawamata, Termination of (many) 4-dimensional log flips, Invent. Math. **168** (2007), no. 2, 433–448.

[A1] F. Ambro, On minimal log discrepancies, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 5-6, 573–580.

[A2] F. Ambro, Quasi-log varieties, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233

[AS] U. Angehrn, Y.-T. Siu, Effective freeness and point separation for adjoint bundles, Invent. Math. **122** (1995), no. 2, 291–308.

[B1] C. Birkar, Ascending chain condition for log canonical thresholds and termination of log flips, Duke Math. J. **136** (2007), no. 1, 173–180.

[B2] C. Birkar, On existence of log minimal models, preprint (2007).

[BS] C. Birkar, V. V. Shokurov, Mld's vs thresholds and flips, preprint (2006).

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, and J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, preprint (2006).

[BDPP] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Paun, T. Peternell, The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension, preprint (2004).

[BOOK] Flips for 3-folds and 4-folds (Alessio Corti, ed.), Oxford University Press, 2007.

[C] A. Corti, 3-fold log flips after Shokurov, 18–48 in [BOOK].

[CHKLM] A. Corti, P. Hacking, J. Kollár, R. Lazarsfeld, M. Mustaţă, Lectures on flips and minimal models, preprint (2007).

[CK] A. Corti, J. Kollár, Existence of canonical flips, 69–73 in [FA].

[D1] J.-P. Demailly, Transcendental proof of a generalized Kawamata–Viehweg vanishing theorem, Geometrical and algebraical aspects in several complex variables (Cetraro, 1989), 81–94, Sem. Conf., **8**, EditEl, Rende, 1991.

[D2] J.-P. Demailly, Multiplier ideal sheaves and analytic methods in algebraic geometry. School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000), 1–148, ICTP Lect. Notes, **6**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001.

[EM] L. Ein, M. Mustaţă, Inversion of adjunction for local complete intersection varieties, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 6, 1355–1365.

[EMY] L. Ein, Lawrence, M. Mustaţă, T. Yasuda, Jet schemes, log discrepancies and inversion of adjunction, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 519–535.

[E] I. Enoki, Kawamata–Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds, Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sanda, 1990), 59–68, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **145**, Dekker, New York, 1993.

[FA] J. Kollár et al., Flips and Abundance for Algebraic Threefolds, Astérisque **211**, (1992).

[F1] O. Fujino, Abundance theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.

[F2] O. Fujino, Termination of 4-fold canonical flips, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), no. 1, 231–237.

[F3] O. Fujino, Addendum to: "Termination of 4-fold canonical flips"[F2], Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 1, 251–257.

[F4] O. Fujino, On termination of 4-fold semi-stable log flips, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 2, 281–294.

[F5] O. Fujino, What is log terminal?, 49–62 in [BOOK].

[F6] O, Fujino, Special termination and reduction to pl flips, 63–75 in [BOOK].

[F7] O. Fujino, A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem, preprint (2007).

[F8] O. Fujino, A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem II, preprint (2007).

[F9] O. Fujino, Vanishing and injectivity theorems for LMMP, preprint (2007).

[F10] O. Fujino, Notes on the log minimal model program, preprint (2007).

[F11] O. Fujino, On Kawamata's theorem, preprint (2007).

[F12] 藤野　修, On Kollár's injectivity theorem(コ

ラールの単射性定理について) 数理解析研究所講究録, no. 1550 (2007), 131–140.

[FM] O. Fujino, S. Mori, A canonical bundle formula, J. Differential Geom. **56** (2000), no. 1, 167–188.

[GHS] T. Graber, J. Harris, J. Starr, Families of rationally connected varieties, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[HM1] C. Hacon, J.McKernan, Boundedness of pluricanonical maps of varieties of general type, Invent. Math. **166** (2006), no. 1, 1–25.

[HM2] C. Hacon, J. McKernan, On the existence of flips, preprint (2005).

[HM3] C. Hacon, J. McKernan, Extension theorems and the existence of flips, 76–110 in [BOOK].

[I1] 飯高　茂, 代数多様体の種数と分類 I, 数学, **24** (1972), 14–27.

[I2] 飯高　茂, 代数と幾何—代数多様体の種数と分類 II—, 数学, **29** (1977), 334–349.

[Kc1] Y. Kachi, Flips of semi-stable 4-folds whose degenerate fibers are unions of Cartier divisors which are terminal factorial 3-folds, Math. Ann. **307** (1997), no. 4, 647–662.

[Kc2] Y. Kachi, Flips from 4-folds with isolated complete intersection singularities, Amer. J. Math. **120** (1998), no. 1, 43–102.

[Kr] K. Karu, Minimal models and boundedness of stable varieties, J. Algebraic Geom. **9** (2000), no. 1, 93–109.

[K1] Y. Kawamata, Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties, Invent. Math. **79** (1985), no. 3, 567–588.

[K2] Y. Kawamata, The Zariski decomposition of log-canonical divisors, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 425–433, Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[K3] Y. Kawamata, Small contractions of four-dimensional algebraic manifolds, Math. Ann. **284** (1989), no. 4, 595–600.

[K4] Y. Kawamata, On the length of an extremal rational curve, Invent. Math. **105** (1991), no. 3, 609–611.

[K5] Y. Kawamata, Abundance theorem for minimal threefolds, Invent. Math. **108** (1992), no. 2, 229–246.

[K6] Y. Kawamata, Termination of log flips for algebraic 3-folds, Internat, J. Math. **3** (1992), no. 5, 653–659.

[K7] Y. Kawamata, Deformations of canonical singularities, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 1, 85–92.

[K8] Y. Kawamata, On the extension problem of pluricanonical forms, Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998), 193–207, Contemp. Math., **241**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[K9] Y. Kawamata, Flops connect minimal models, preprint (2007).

[K10] 川又　雄二郎, 高次元代数多様体の分類理論, 数学, **40**, (1988), 1–18.

[K11] 川又　雄二郎, 極小モデル理論の最近の発展について, 数学, **45**, (1993), 330–345.

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, Introduction to the minimal model problem, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 283–360, Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[KST] S. Kebekus, L. Solá Conde, M. Toma, Rationally connected foliations after Bogomolov and McQuillan, J. Algebraic Geom. 16 (2007), no. 1, 65–81.

[KK] S. Keel, J. Kollár, Log canonical flips, 95–101 in [FA].

[KMMc1] S. Keel, K. Matsuki, J. McKernan, Log abundance theorem for threefolds. Duke Math. J. **75** (1994), no. 1, 99–119.

[KMMc2] S. Keel, K. Matsuki, J. McKernan, Corrections to: "Log abundance theorem for threefolds"[KMMc1], Duke Math. J. **122** (2004), no. 3, 625–630.

[KeM] S. Keel, S. Mori, Quotients by groupoids, Ann. of Math. (2) **145** (1997), no. 1, 193–213.

[Kh] J. J. Kohn, Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions, Acta Math. **142** (1979), no. 1-2, 79–122.

[Ko1] J. Kollár, Higher direct images of dualizing sheaves, I, Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 1, 11–42.

[Ko2] J. Kollár, Projectivity of complete moduli, J. Differential Geom. **32** (1990), no. 1, 235–268.

[Ko3] J. Kollár, Crepant descent, 75–87 in [FA].

[Ko4] J. Kollár, Singularities of pairs, Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, 221–287, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[KMa] J. Kollár, K. Matsuki, Termination of 3-fold log flips near the reduced boundary, 89–93 in [FA].

[KM] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店, 1998.

[L] R. Lazarsfeld, Positivity in algebraic geometry. II. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals, Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **49**. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+385 pp.

[Ma1] K. Matsuki, Termination of flops for 4-folds, Amer. J. Math. **113** (1991), no. 5, 835–859.

[Ma2] K. Matsuki, Introduction to the Mori program, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002. xxiv+478 pp.

[Mi] Y. Miyaoka, Deformations of a morphism along a foliation and applications, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 245–268, Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[MM] Y. Miyaoka, S. Mori, A numerical criterion for uniruledness, Ann. of Math. (2) **124** (1986), no. 1, 65–69.

[M1] S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 593–606.

[M2] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 1, 133–176.

[M3] S. Mori, On 3-dimensional terminal singularities, Nagoya Math. J. **98** (1985), 43–66.

[M4] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 1, 117–253.

[M5] 森　重文, Hartshorne 予想と extremal ray, 数学, **35**, (1983), 193–209.

[Nd] A. Nadel, Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 3, 549–596.

[N1] N. Nakayama, Invariance of the plurigenera of algebraic varieties under minimal model conjectures, Topology **25** (1986), no. 2, 237–251.

[N2] N. Nakayama, Invariance of plurigenera of algebraic varieties, preprint RIMS-1191, 1998.

[N3] N. Nakayama, Zariski-decomposition and abundance, MSJ Memoirs, **14**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. xiv+277 pp.

[O] T. Ohsawa, On a curvature condition that implies a cohomology injectivity theorem of Kollár-Skoda type, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 3, 565–577.

[OT] T. Ohsawa, K. Takegoshi, On the extension of L^2 holomorphic functions, Math. Z. **195** (1987), no. 2, 197–204.

[P] M. Paun, Siu's invariance of plurigenera: a one-tower proof, J. Differential Geom. **76** (2007), no. 3, 485–493.

[R] M. Reid, Young person's guide to canonical singularities, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 345–414, Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[S] N. I. Shepherd-Barron, Miyaoka's theorems on the generic seminegativity of T_X and on the Kodaira dimension of minimal regular threefolds, 103–114 in [FA].

[Sh1] V. V. Shokurov, The nonvanishing theorem, Math. USSR-Izv. **26** (1985), no. 3, 591–604.

[Sh2] V. V. Shokurov, 3-fold log flips, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **40** (1993), no. 1, 95–202

[Sh3] V. V. Shokurov, 3-fold log models, Algebraic geometry, **4**. J. Math. Sci. 81 (1996), no. 3, 2667–2699.

[Sh4] V. V. Shokurov, Prelimiting flips, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 82–219; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 75–213

[Sh5] V. V. Shokurov, Letters of a bi-rationalist. V. Minimal log discrepancies and termination of log flips, (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova **246** (2004), Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 328–351; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2004, no. 3 (246), 315–336

[Si1] Y.-T. Siu, Invariance of plurigenera, Invent. Math. **134** (1998), no. 3, 661–673.

[Si2] Y.-T. Siu, Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type, Complex geometry (Göttingen, 2000), 223–277, Springer, Berlin, 2002.

[Si3] Y.-T. Siu, Multiplier ideal sheaves in complex and algebraic geometry, Sci. China Ser. A **48** (2005), suppl., 1–31.

[Si4] Y.-T. Siu, A General Non-Vanishing Theorem and an Analytic Proof of the Finite Generation of the Canonical Ring, preprint (2007).

[Tk1] H. Takagi, Remarks on Gorenstein terminal fourfold flips, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **5** (1998), no. 1, 149–164.

[Tk2] H. Takagi, 3-fold log flips according to V.V.Shokurov, preprint (1998).

[Tk3] H. Takagi, The Existence of Gorenstein terminal fourfold flips, preprint (1999).

[Ty1] S. Takayama, Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type, Invent. Math. **165** (2006), no. 3, 551–587.

[Ty2] S. Takayama, On the invariance and the lower semi-continuity of plurigenera of algebraic varieties, J. Algebraic Geom. **16** (2007), 1-18.

[Tg] K. Takegoshi, Higher direct images of canonical sheaves tensorized with semi-positive vector bundles by proper Kähler morphisms, Math. Ann. **303** (1995), no. 3, 389–416.

[Ts] H. Tsuji, Pluricanonical systems of projective varieties of general type, preprint (1999).

(2007 年 9 月 13 日提出)

(ふじの　おさむ・名古屋大学大学院多元数理科学研究科)