



Title	圏論と構造主義
Author(s)	深山, 洋平
Citation	研究論集, 12, 31(左)-46(左)
Issue Date	2012-12-26
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/51910">http://hdl.handle.net/2115/51910</a>
Type	bulletin (article)
File Information	002_FUKAYAMA.pdf



[Instructions for use](#)

# 圏論と構造主義

深 山 洋 平

## 要 旨

ヘルマン (Geoffrey Hellman) は 2003 年の著作 “Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?” (Hellman, 2003) において、マックレーン (Saunders Mac Lane) による数学の圏論的基礎付け (Mac Lane & Moerdijk, 1992) とアウディ (Steve Awodey) の圏論を用いる構造主義 (Awodey, 1996) を誤って結びつけた。彼がどのように誤ったかは、アウディの圏論を用いる構造主義の実際を見ることで理解できる。さらにアウディの構造主義に特徴的な「図式」の概念 (Awodey, 2004) に対してヘルマンは数学的真理の所在と射のみの立場の一貫性の観点から疑問を呈している (Hellman, 2009)。前者の問いは図式の指示の観点から実際に問題であり、後者の疑問は不適切な問題設定であると思われる。

## 1 はじめに

ヘルマン (Geoffrey Hellman) の 2003 年の著作 “Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?” (Hellman, 2003) は圏論と数学における構造主義の関わりの議論に刺激を与え、主として *Philosophia Mathematica* 誌上で論争を引き起こしてきた。ヘルマンの議論はアウディ (Steve Awodey) の次のような見解がマックレーン (Saunders Mac Lane) による、ある数学の基礎付けに依存していると主張し、さらにマックレーンの基礎付けおよびそれに近い見解を批判した後で、圏論の独自の背景理論を展開するものである。問題となるアウディの見解は次のようである。

圏論の方法によってまとめあげられる、数学についての構造的視点は、「純粋数学の主題は不変の形式であって、論理的原子から成る数学の対象の宇宙ではない」というスローガンに要約できるかもしれない。(中略) 私のここでの狙いは哲学的構造主義の論拠を挙げるこ

とでなく、それはフレーゲ以来の論理的原子論者によって展開されるもの以外の専門的道具立てを用いて追求されるべきである、と示唆することだった。その道具立ては数学の遺産を十分実質的にし、数学の応用を十分一様にし、「構造」の概念に基づく数学という観点に意義を与えるものである (Awodey, 1996, pp. 235-236)。

構造主義に基づく数学の対象は論理的原子から成るものではない、という点が重要である。これに対してヘルマンは次のように反応する。

これは興味深い示唆である。それは、圏論は集合論の代替物として数学の自律的基礎を提供するという、マックレーンの度重なる主張の文脈で自然に考察される。このことの理由は明らかではなく、むしろ究極的には集合論の範囲内で展開されると見なされねばならないとしよう。するとアウディの示唆は少なくとも、集合論を読む標準的な仕方、つまり（恐らく「論理的原子」の集合から成る）「累積的階層」についての中心的諸事実を公理化するという読み方では、実現されえないかもしれない。したがって、マックレーンのテーゼを（再）検討することなしに、我々がアウディの示唆を評価できる望みは無い (Hellman, 2003, pp. 129-130)。

ヘルマンの狙いはアウディの示唆を批判することではなく、マックレーンとアウディの見解のつながりを明らかなものとした上で、マックレーンの基礎付けに問題があり、それゆえアウディの見解の実現の妨げになることを示し、自らが適切と考える圏論の背景理論を提示することにある。本論文はマックレーンとアウディの見解のつながりが明らかなものでなく、実際区別すべきだということを確認するものである。その区別はアウディ自身が後の論文で主張するが (Awodey, 2004)、本論文では上に引用したアウディの1996年の論文における「数学についての構造的視点」なるものがどのようなものか、そしてヘルマンが何を誤ったのかを明らかにしながら、そのアウディの主張に至る。さらにアウディの構造主義に特徴的な「図式」という概念に触れ、それに対するヘルマンの疑問を取り上げ、その疑問に対する私見を添える。

## 2 マックレーンによる数学の基礎付け：トポス理論

アウディの議論に触れる前に、マックレーンによる数学の基礎付けがどのようなものか、本節で簡単に見ておく。マックレーンによる集合論に依存しない数学の基礎付けは圏論の言葉で与えられるので、基本的な概念である圏の定義の仕方の一つを記し、次いでマックレーンが基礎付けに使う圏である（初等）トポスの諸公理を記す。

## 2.1 圏

圏は**対象** (object) の集まりと<sup>1</sup>, 対象から対象への**射** (arrow) の集まりを指定し, さらに射同士の**合成** (composition) という演算を定義することで得られる。通常, 対象は  $A, B, C, \dots$  の文字で, 射は  $f, g, h, \dots$  の文字で表す。射  $f$  が対象  $A$  から対象  $B$  へのものであることを  $f: A \rightarrow B$  または  $A \xrightarrow{f} B$  と表す。 $f: A \rightarrow B$  のとき,  $A$  と  $B$  をそれぞれ  $f$  の**ドメイン** (domain), **コドメイン** (codomain) と呼ぶ。合成演算  $\circ$  は, 射の組

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

に対して射

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

を割り当てる。以下, 対象と射, 合成が従うべき公理を挙げる。まず, 射の合成は結合的であることが求められる。すなわち, 射の組

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

が与えられたとき,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  が成り立たねばならない。次に, 各対象  $A$  について特別な射  $\text{id}_A: A \rightarrow A$  が存在して, これが合成の単位元であることが求められる。すなわち,

$$A \xrightarrow{\text{id}_A} A \xrightarrow{f} B$$

ならば  $f \circ \text{id}_A = f$  であり,

$$C \xrightarrow{g} A \xrightarrow{\text{id}_A} A$$

ならば  $\text{id}_A \circ g = g$  でなければならない。 $\text{id}_A$  は  $A$  上の**恒等射** (identity) と呼ばれる。以上 2 点が圏の公理であって, 圏はこれらの公理を満たす任意のものである。

上記のように, 圏の公理を述べ, 任意の種類のものによる解釈を許容する定義は, マックレーンの概念の枠組みでは圏でなく**メタ圏** (metacategory) を定める。彼によると, 圏は圏の公理を**集合論の範囲内で解釈**した任意のものを意味する (Mac Lane, 1998, p. 10)。例えば任意の集合を対象とする圏を考えようとする, 集合全体の集まりは集合でないため<sup>2</sup>, 対象全体の集まり

<sup>1</sup> 本論文では「集まり」という語を広範な意味で用いる。その語で指されるものは ZFC の対象かもしれないし, vNBG の意味での集合や真クラス (proper class) かもしれないし, 演算や順序, 位相のような構造を持つものかもしれない。

<sup>2</sup> 集合全体の集まり  $V$  を集合とすることはパラドクスを生み出す。ZF では  $V$  の部分集合  $R = \{x | x \notin x\}$  の存在が証明可能となり, ラッセルのパラドクスが導かれる。vNBG では  $R$  が集合であることが証明可能となり, そこから同様のパラドクスが導かれる。

を集合と解釈することができなくなる。したがって任意の集合を対象とするメタ圏は考えられるが、そのような圏は考えられないことになる。

現在はメタ圏も圏と呼ぶことが一般的である。マックレーン自身、メタ圏の定義に「圏の定義」という表現で言及することがあり (Mac Lane, 1998, p. 24), それゆえ彼がメタ圏も圏と呼びうる立場に立つと解することもできる (Mac Lane, 1998, 翻訳 p. 31 注 14)。したがって本論文では、特に必要が無い限り、「メタ圏」と「圏」は区別せずに用いることにする。

## 2.2 初等トポスの諸公理

初等トポスの公理系は圏の諸公理にいくつかの公理を付け加えて得られる。言い換えれば、初等トポスは公理が指定するいくつかの性質を満たす圏として定義される。初等トポス理論を取り扱う文献毎に公理系の提示の仕方は微妙に異なる。以下に述べる定式化は McLarty (1995) によるものを最も参考としている。

まず、任意の2つの対象に対してそれらの積が存在することが求められる。より厳密には、当該の圏の任意の対象  $A$  と  $B$  に対して対象  $A \times B$  と射の組

$$A \xleftarrow{p} A \times B \xrightarrow{q} B$$

が存在して、任意の対象  $T$  と任意の  $f: T \rightarrow A$ , 任意の  $g: T \rightarrow B$  に対して、 $p \circ u = f$  かつ  $q \circ u = g$  を満たす  $u: T \rightarrow A \times B$  がただ一つ存在しなければならない<sup>3</sup>。

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & f \swarrow & \downarrow u & \searrow g & \\ A & \xleftarrow{p} & A \times B & \xrightarrow{q} & B \end{array}$$

次に、**終対象** (terminal object) と呼ばれる特別な対象が存在することが求められる。終対象は当該の圏の対象であって、各対象からその対象へただ一つの射が存在するものである。終対象は記号  $1$  で表記される。

次に、平行な2本の射に対してそれらの**等化** (equalizer) が存在することが求められる。すなわち、射の対

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

に対して対象  $E$  と射  $e: E \rightarrow A$  が存在して、以下の二つの条件が成り立たねばならない。

<sup>3</sup> この定義の書き方は、 $A$  と  $B$  の積があたかも一意に定まるかのように書いている点で厳密でない。実際には積の公理を満たす射の組が一意に定まるとは限らない。これは後述する様々な構成に関しても同様である。この問題を回避する方法については McLarty (1995, pp. 68–69) を参照。

- $f \circ e = g \circ e$
- 任意の対象  $T$  と任意の射  $h : T \rightarrow A$  が  $f \circ h = g \circ h$  を満たすならば、 $e \circ u = h$  を満たす射  $u : T \rightarrow E$  がただ一つ存在する

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \\ & \nearrow u & \nearrow h & & \\ & T & & & \end{array}$$

次に任意の2つの対象に対して、それらから成るべき乗 (exponential) が存在することが求められる。これは当該の圏の任意の2つの対象が積を持つことを前提する。その上で、当該の圏の任意の対象  $A$  と  $B$  に対して対象  $B^A$  および評価 (evaluation) と呼ばれる射

$$B^A \times A \xrightarrow{e_{A,B}} B$$

が存在して、任意の対象  $T$  と任意の射  $f : T \times A \rightarrow B$  に対して  $e_{AB} \circ (u \times \text{id}_A) = f$  を満たす射  $u : T \rightarrow B^A$  がただ一つ存在しなければならない。

$$\begin{array}{ccccc} B^A & & B^A \times A & \xrightarrow{e_{A,B}} & B \\ \uparrow u & & \uparrow u \times \text{id}_A & & \nearrow f \\ T & & T \times A & & \end{array}$$

ここで射  $u \times \text{id}_A$  は、 $u : T \rightarrow B^A$  および  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  に加えて、 $B^A$  と  $A$  の積

$$B^A \xleftarrow{p} B^A \times A \xrightarrow{q} A$$

および  $T$  と  $A$  の積

$$T \xleftarrow{p'} T \times A \xrightarrow{q'} A$$

を用いて下図によって定義されている。

$$\begin{array}{ccccc} & & T \times A & & \\ & \swarrow p' \circ u & \downarrow u \times \text{id}_A & \searrow q' \circ \text{id}_A & \\ B^A & \xleftarrow{p} & B^A \times A & \xrightarrow{q} & A \end{array}$$

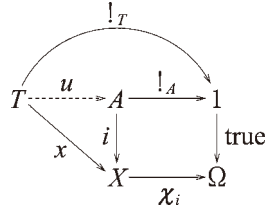
圏が積、終対象、等化、べき乗を持つとき、その圏はデカルト積に関して閉じている (cartesian closed) と言う。

射  $f : A \rightarrow B$  がモニック (monic) であるとは、任意の対象  $T$  と任意の射  $h : T \rightarrow A$  および  $k : T \rightarrow A$  に対して、 $f \circ h = f \circ k$  ならば  $h = k$  であることを言う。

終対象  $1$  を持つ圏において、部分対象分類子 (subobject classifier) とは当該の圏の対象  $\Omega$  と

射  $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$  であって、任意の対象  $X$  をコドメインとする任意のモニック射  $i : A \rightarrow X$  に対して以下の2つの条件を満たす射  $\chi_i : X \rightarrow \Omega$  がただ一つ存在するものを言う。

- $\chi_i \circ i = \text{true} \circ !_A$
- 任意の対象  $T$  と任意の射  $x : T \rightarrow X$  に対して、 $\chi_i \circ x = \text{true} \circ !_T$  ならば、 $i \circ u = x$  となる射  $u : T \rightarrow A$  がただ一つ存在する。



ここで射  $!_A$  と  $!_T$  はそれぞれ、終対象  $1$  の定義によって対象  $A$  と  $T$  をドメインとしてただ一つ存在する射である。

デカルト積に関して閉じている圏が部分対象分類子を持つとき、その圏は（初等）トポス（elementary topos）と呼ばれる<sup>4</sup>。

マックレーンは複数の著作でトポスを用いた数学の基礎付けに言及しており、Mac Lane & Moerdijk (1992) に比較的詳しい言及がある。トポスを用いる数学の基礎付けは、公理的集合論による数学の基礎付けの代替と位置付けられる。つまりそれは、数学を記述する公理系として公理的集合論の公理系でなく、適切なトポスの公理系を採用することを意味する。彼らは数学を基礎付けるために最低限必要な強さを持つ公理系として、単なるトポスでなく、さらに圏論の意味での選択公理が成り立ち、“well-pointed”と呼ばれる性質を持ち、さらに自然数対象という特殊な対象を持つトポスを採用する。彼らはそれが現在の標準的な公理的集合論である ZFC よりも弱い公理系と equiconsistent であることを示している。その論点に本論文は立ち入らない (Mac Lane & Moerdijk, 1992, pp. 332–343)。以下では、上記3つの性質についても述べておく。自然数対象の定義は後に回し、先に選択公理と well-pointed 性について記す。

圏論における選択公理を述べるためにエピックな射の定義を与える。エピック射の定義はモニック射の定義と対称的な形で得られる。つまり射  $f : A \rightarrow B$  がエピック (epic) であるとは、任意の対象  $T$  と任意の射  $h : B \rightarrow T$  および  $k : B \rightarrow T$  に対して、 $h \circ f = k \circ f$  ならば  $h = k$  であることを言う。圏論における**選択公理** (the axiom of choice) は任意のエピック射  $f : A \rightarrow B$  に対して逆向きの射  $g : B \rightarrow A$  が存在して  $f \circ g = \text{id}_B$  となることを主張する。集合と関数の圏においてこの定義はいくつかの述べられ方がある選択公理と同値になる。しかし射のみで与えられたこの述べ方は、集合の圏のみならず圏一般に適用されうる。

<sup>4</sup> 「初等」 (elementary) の語は、この節で述べてきた諸性質が一階の言語で述べられることに由来する (Mac Lane, 1998, p. 24)。

*well-pointed* 性は、集合論的に言えば関数とその値によって区別されることを意味する。すなわちある圏の任意の射  $f: A \rightarrow B$  と  $g: A \rightarrow B$  について、 $f \neq g$  ならば  $a: 1 \rightarrow A$  が存在して  $f \circ a \neq g \circ a$  のとき、当該の圏は *well-pointed* であると言う。

これまで見てきたように、圏論の一部としてのトポス理論は対象間にある射の振る舞いを公理で定めるのであって、公理的集合論 ZFC のように専ら集合間の要素関係  $\in$  の振る舞いを定めるのではない。それは同じ概念を別の側面から見ることにつながる。ZFC の無限公理 (the axiom of infinity) は、集合  $N$  が存在して、空集合がその要素であり、そして  $x$  が  $N$  の要素ならば  $x \cup \{x\}$  もまた  $N$  の要素であると主張する。基礎付けに使われるトポスにおいて  $N$  に対応する概念は**自然数対象** (natural number object) と呼ばれる。これは対象  $N$  と射  $0: 1 \rightarrow N$ ,  $s: N \rightarrow N$  から成り、任意の対象  $X$  と任意の射  $x: 1 \rightarrow X$  および  $f: X \rightarrow X$  に対して以下の 2 条件を満たす射  $h: N \rightarrow X$  がただ一つ存在するものである。

- $h \circ 0 = x$
- $h \circ s = f \circ h$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \xrightarrow{0} & N & \xrightarrow{s} & N \\
 & \searrow x & \downarrow h & & \downarrow h \\
 & & X & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

自然数対象が存在することは、集合と関数の圏においては、関数  $h$  を自然数  $x$  と関数  $f$  から帰納的に定義できることを保証している。すなわち上記の 2 条件は

- $h(0) = x$
- $n$  を自然数として、 $h(n+1) = f(h(n))$

に相当する。これは ZFC とトポス理論で同じ概念に対してアプローチが異なる好例の一つである。無限公理は何か集合  $N$  の要素であるかを定め、それに対して自然数対象は自然数が関数 (すなわちトポスにおける対象間の射) という脈絡でどのように使われるかを定め、それをもって  $N$  を特徴付けている。対象の詳細を要素によって指定し、結果として自然数全体の集合として使えるものを存在せしめるのではなく、どのように使われるかを写像によって直接記述し、対象の詳細な記述には関わらないという態度は、次節に見るアウディの数学的構造主義の理念と一致するものである。

### 3 アウディの数学的構造主義

本節では Awodey (1996) を中心に、数学的構造および構造主義に対する彼の考えを見ていく。彼の目標は以下のように記されている。



数学的構造という哲学的に有用な考え方は、まさにこの数学の実践の内に、「数学的構造主義者」たちによって展開される諸方法によく注意を向けることによって見出される。私のここでの狙いはそのことを示唆することである。デデキントからネーターを経てアイレンバーグとマックレーンに至るまで<sup>5</sup>、数学的構造がばらばらの数学的諸対象の特徴によってでなく、諸対象と**それらの写像**の体系によって決定されることははっきり現れている (pp. 209-210, 強調原文)。

アウディは数学的構造主義 (mathematical structuralism) と哲学的構造主義 (philosophical structuralism) を区別する。ここで「哲学的構造主義」は数学の哲学以外の哲学の分野における構造主義を意図しているのではなく、数学の哲学として数学的構造に関する認識論的あるいは存在論的探求を試みるものである。哲学的構造主義の研究者であるシャピロは構造主義のスローガンをごく簡潔に「数学は構造の科学だ」と述べるが (シャピロ, 2012, p.341), しかしアウディが考える数学的構造主義は単に数学を構造の科学と見なす考えではなく、数学的構造に関する知識を得ることに対する写像の寄与を重視するものである。彼は、哲学的構造主義の研究が進められる一方で、彼が考える意味での数学的構造主義の実際の方法、すなわち圏論を用いる方法が無視されていると指摘する。

数学的構造を、演算や順序、位相のような特徴を備えた集合と見なすのはごくありふれたことである<sup>6</sup>。例えば群は結合的な二項演算を備える集合であって、その二項演算が単位元を持ち、さらに任意の元がその演算に関する逆元を持つものである。すなわち  $G$  を集合、 $e$  を  $G$  の要素として、 $G$  上の二項演算  $\cdot$  が次の諸公理を満たすとき、 $G$  は群である、とされる。

- $\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
- $\forall x (e \cdot x = x = x \cdot e)$
- $\forall x (x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x)$

一例として、整数全体の集合は加法に関して群を成し、単位元は 0、逆元は整数  $k$  に対し  $-k$  である。上記のような群の定義の仕方は、より厳密には、群論の言語を定め、そこに現れる記号の振る舞いを公理で規定しているものと理解できる。すると整数の加法群のような具体的な群は、その言語を集合論の範囲内で解釈したものであり、必要な公理を充足するモデルであると考えられる。アウディは構造に関するそのような「モデル論的思考方」 (model-theoretic concep-

<sup>5</sup> Recharad Dedekind (1831-1916), Emmy Noether (1882-1935), Samuel Eilenberg (1913-1998), Saunders Mac Lane (1909-2005).

<sup>6</sup> Adámek (1983) の用語法では、集合  $X$  に対してその上の二項演算や開集合系として構造  $\alpha$  が定義され、具体的な群や位相空間は  $(X, \alpha)$  と書かれて集合と構造の対となる。本論文ではそのような用語法は用いない。

tion) を、「今日の数学的対象の考え方を形作り」、「数学的対象が持つ少なくともいくつかの特徴、数学的対象についての数学的諸事実が、その構造のみに依存することを明らかにした」と評価する (p.211)。しかしその一方で現代の数学研究の対象はむしろ、同型まで一意に定められる数学的対象や<sup>7</sup>、類似した構造を持つ諸対象の様々な関係や、対象上の様々な種類の構造の関係であるとし、そのような研究に寄与する写像の重要性を述べ、写像の一般理論である圏論の出現を数学の要請に応えるものとしている (p.212)。

圏論による数学的構造主義の方法についてアウディが例示しているもののうち、ここでは位相構造に関するものを見ておく。ある集合が与えられたとき、その集合上に位相を定める手段は複数（開集合、閉集合、閉包作用素など）あることが知られている。それらの手段はある意味で同等である。例えば開集合系の公理によって位相を定めた場合、開集合によって定義される閉集合は、位相空間に関する閉集合系の公理を満たす。逆に閉集合系の公理によって位相を定めた場合、閉集合によって定義される開集合は、位相空間に関する開集合系の公理を満たす。アウディの数学的構造主義によると、

一般に（中略）何らかの手段で我々が特定の種類の構造を対象と射の観点から指定したとしよう。すると、その指定の元々の手段から独立に、その圏がその種類の構造を特徴付ける (p.213)。

開集合系や閉集合系はそれぞれの仕方で位相空間を定め、そこから連続写像の概念が定義される。すると、そのように定義された位相空間と連続写像の圏が位相構造を特徴付けるというのである。ここで「位相構造を特徴付ける」とは「所与の空間の位相が、そこから他の諸空間への写像と、他の諸空間からそこへの写像によって定められる」という意味である (p.213)。例えば各位相空間からただ一つ連続写像が存在するような空間を考える。一点集合上に、開集合系が空集合とその集合自身のみであるような位相、すなわち密着位相 (indiscrete topology) を入れたものは、そのような空間になる。その空間を  $1$  と呼ぼう。では他にそのような空間は無いだろうか。仮にあるとして  $1'$  と呼ぶことにすると、 $1'$  から  $1$  へ、そして  $1$  から  $1'$  へ、それぞれただ一つずつ連続写像が存在することになる。それらを  $f: 1' \rightarrow 1$ ,  $g: 1 \rightarrow 1'$  としよう。すると  $f$  が全単射であることを示すことができる。実際、 $1$  が一点集合なので  $f: 1' \rightarrow 1$  は明らか

---

<sup>7</sup> ある性質を持つ任意の 2 つの数学的構造が同型であるとき、その性質を持つ数学的構造は**同型まで一意** (unique up to isomorphism) であると言う。同型性の概念は構造ごとに異なるが、圏論は圏一般の諸対象に対して同型性の概念の定義を与えることができる。すなわち、圏の対象  $A$  と  $B$  に対して、 $A$  と  $B$  が同型であるのは、射  $f: A \rightarrow B$  と  $g: B \rightarrow A$  が存在して、 $g \circ f = \text{id}_A$  かつ  $f \circ g = \text{id}_B$  が成り立つときである。

に全射である。さらに同じ理由で合成関数  $g \circ f : 1 \rightarrow 1$  は 1 上の恒等関数  $\text{id}_1$  と一致するから、 $x, y \in 1'$  に対して  $f(x) = f(y)$  を仮定すると、

$$x = \text{id}_1(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = g \circ f(y) = \text{id}_1(y) = y$$

が従う。よって  $f$  は単射でもある。こうして  $f : 1' \rightarrow 1$  は連続な全単射である。そして  $g$  が  $f$  の逆写像であることを示すことができるから、 $1'$  と  $1$  は同相 (homeomorphic) であることが分かる。つまり、各位相空間からただ一つ連続写像が存在するような空間は、同相な空間を同一視すれば、一つしか無い。これは連続写像の観点から記述された条件が空間に入る位相を制約する例である。このような例の積み重ねは、開集合系や閉集合系、あるいはその他の何らかの概念によって連続写像の定義を与えることさえできれば、連続写像を用いた議論によって様々な結果を得ることができることを示す。ところで位相空間をモデルとして記述した場合、開集合系による位相の記述と閉集合系による位相の記述は、たとえ定められる位相が一致するとしても、異なるものとなる。それに対して連続写像による位相の決定は、元々の位相の記述の仕方に依存しない。このことをアウディは「構文不変」(syntax invariant) と言い表し、写像による構造記述の一つの利点と位置付ける (p.214)。つまり、射による概念の記述は理論の基本的な部分の記述の仕方によらずに実際の議論を可能にする道具としての意義を持つと考えられている。

アウディは写像によって構造を記述することの利点をもう一つ挙げている。それは、ある構造がある性質を持つことを写像の観点だけから示すと、その構造と同型な構造もまたその性質を持つ、ということである (p.214)。同型な構造は集合論的に異なる構成を持ちうるが、少なくとも構造主義の観点からは、そのような構成の違いは無関係である。写像の観点から構造への帰属が示される性質は、細かな構成の違いに依存する性質ではなく、同型な構造が普遍的に持つような性質である。その意味で写像の観点は構造主義のアプローチを自然に与えていると彼は考えている。

アウディは圏論による数学的構造主義の応用例として、トポスによる集合論の構造的取り扱い、および論理の構造的取り扱いの特徴付けについて論じている。ここで彼が「構造的」(structural) という語を用いるのは、これまでの議論も示唆するように、何かが構造間の写像によって特徴付けられているときである。実際に「内部言語」(internal language) を適切に定めることでトポスがその言語上の高階直観主義論理のモデルになることや、ある種の集合論を展開できるようになること、それらに付随する諸結果については、アウディ自身の議論や初等トポスに関する教科書を参照されたい<sup>8</sup>。ここで問題にしなければならないのは、集合論や論理を含めて様々な数学の理論が構造的に、つまり圏の射の観点から取り扱うことができることに対する

<sup>8</sup> McLarty (1995), Mac Lane & Moerdijk (1992) など。

アウディの評価である。彼は次のように述べる。

圏論の方法によってまとめあげられる、数学についての構造的視点は、「純粋数学の主題は不変の形式であって、論理的原子から成る数学の対象の宇宙ではない」というスローガンに要約できる。(中略)私のここでの狙いは哲学的構造主義の論拠を挙げることでなく、それはフレーゲ以来の論理的原子論者によって展開されるもの以外の専門的道具立てを用いて追求されるべきである、と示唆することだった。その道具立ては数学の遺産を十分実質的にし、数学の応用を十分一様にし、「構造」の概念に基づく数学という観点に意義を与えるものである (Awodey, 1996, pp. 235–236)。

アウディが言う構造的視点、すなわち圏の射による概念の特徴付けという観点によって、構造が「構文不変」に特徴付けられることは既に見た。これは、集合のような論理的原子によって構成が細かに指定された構造を、その指定の仕方にとらわれずに扱えるようになることを意味する。したがってアウディの数学的構造主義は集合のような論理的原子による基礎付けを志向するものではない。ヘルマンはこのことからアウディが論理的原子によらない数学の基礎付けを志向すると誤って考え、マックレーンのトポス理論による数学の基礎付けの考えとアウディを結びつけた。そしてこの見解は後にアウディによって否定されることになる。それは節を改めて見ることにしよう。

#### 4 基礎付けの否定と図式的数学

アウディは後にヘルマンの誤解を指摘しつつ、圏論を用いた数学の図式的 (schematic) 側面を強調している (Awodey, 2004)。彼はヘルマンの考えを以下のように否定している。

[私の提案の要点は、] この基礎付けやあの基礎付けが好ましいというものではなく、圏論を用いて「基礎付け」の仕事全体を回避することである。マックレーンに関しては、「圏論的基礎付け」について語ることはみな、基礎作りより橋渡しだった。圏論を行う人に、自分たちはいつか全数学が生じる一つの「真のトポス」に行き着くだろう、と考える人はいない。トポス理論 (および他の圏) の中に集合論を翻訳することが意図しているのは、トポスのような圏を用いて、**集合論で数学を行うことに慣れた人々**が多くの数学を行えるようにする、ということである (強調原文)。そのような翻訳は、トポス理論が新しく普遍的な、集合論を置き換えることを意図された「基礎付けの体系」であることを示すことにはならない (p.55)。

アウディは圏論による基礎付けの営み自体を拒否することを示唆する。前節で見たとおり、彼によると基礎が何であれ、必要な概念が射の観点から適切に特徴付けられるならば、圏論の言葉遣いを用いて数学を展開できる。したがって圏論は基礎付けの営みに関わるものでなく、その後に使われるものと考えられている。ゆえに圏論の言葉遣いで語られるトポスも、数学の基礎付けに使われて集合論を置き換えるものでなく、それを使って数学を行うものと位置付けられる。こうして基礎付けなしに実行される数学を彼はその論文内で一貫して**図式的**(schematic)と言い表す。

アウディは図式性を数学の言明一般に見出すのだが、ここでは直接圏論に関わる例を見ておきたい。圏が与えられたとき、その中で群の構造を持つ対象について論じられることがある。終対象と積を持つ圏において、圏の中の群とは当該の圏の対象  $G$  であって、それに付随する  $m: G \times G \rightarrow G$ ,  $e: 1 \rightarrow G$ ,  $i: G \rightarrow G$  が以下の3つの条件を満たすものである。

- $m \circ (m \times \text{id}_G) \circ \alpha = m \circ (\text{id}_G \times m)$
- $m \circ (\text{id}_G \times e) = p$  かつ  $m \circ (e \times \text{id}_G) = q$
- $m \circ (\text{id}_G \times i) \circ \delta_G = e \circ !_G$

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times (G \times G) & \xrightarrow{\alpha} & (G \times G) \times G & \xrightarrow{m \times \text{id}_G} & G \times G & 1 \times G & \xrightarrow{e \times \text{id}_G} & G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times e} & G \times 1 \\
 \text{id}_G \times m \downarrow & & & & \downarrow m & & \searrow q & \downarrow m & \swarrow p & \\
 G \times G & \xrightarrow{m} & G & & & & & G & & \\
 \\ 
 G & \xrightarrow{\delta_G} & G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times e} & G \times G & & & & & \\
 !_G \downarrow & & & & \downarrow m & & & & & \\
 1 & \xrightarrow{e} & G & & & & & & & 
 \end{array}$$

ここで  $\alpha: G \times (G \times G) \rightarrow (G \times G) \times G$  はそのドメインとコドメインの同型を示す射として積の定義から得られるものであり、 $p: G \times 1 \rightarrow G$  および  $q: 1 \times G \rightarrow G$  はそれぞれ積  $G \times 1$  と  $1 \times G$  に付随する射であり、 $\delta_G: G \rightarrow G \times G$  は  $\text{id}_G: G \rightarrow G$  と積の定義から得られる射である。この3つの条件は群の公理に相当する。つまり圏の中の群とは、圏における対象であって、それに付随する射が、射の観点から書かれた群の公理を満たすものである。それと同様の発想で、圏が与えられたとき、その対象であって圏の構造を持つものを考えることがある。このとき前者の圏を**周囲圏** (ambient category)、後者の圏を**内部圏** (internal category) と呼ぶ。つまり内部圏とは、圏における対象であって、それに付随する射が、射の観点から書かれた圏の公理を満たすものである (詳細は Mac Lane (1998) pp.267-269 を参照)。アウディはデカルト積に関して閉じた圏  $E$  の内部に、群  $G$  を持つ圏  $C$  がある状況を考える。

その圏  $E$  はどこから来たのか。我々はそれを、デカルト積に関して閉じた圏に対する一握りの諸公理によって記述し、ついでさらに、我々が何であれ関心を持っていた諸性質、特



に群  $G$  を持つという性質を持つ圏  $C$  がその圏  $E$  の中にあると想定する。それは我々が出発したところの同じ圏  $C$  なのか。その問いは意味を成さない。ここでは  $G$  も  $C$  も  $E$  もはっきり指定された (specific) ものではない。それらは言わば図式的構造であって、対象と射の諸設定およびそれらに関する諸条件によって指定ないし決定される。その諸条件は様々に異なる状況において成り立つよう想定されたり、成り立つことが見いだされうる。その状況というのもまた図式的かもしれない。(略)我々が  $C$  についてもともとと言っていたこと (例えばその中に群があること) は何であれ、我々が何らかの周囲圏  $E$  の中にそれを置いた後でもなお  $C$  について言うことができる。なぜなら我々ははじめにそれについて何も特に想定していなかったからである (Awodey, 2004, p. 62)。

我々が圏に関して完全に基礎付け主義的アプローチをとっているとすれば、 $C$  も  $E$  も細部まで指定されているのだから、もともと  $G$  を持つよう想定していた  $C$  をそのまま  $E$  の中にとれるか否かが問題になってしまう。確実性を求めるならば、 $G$  は  $C$  の部分であり、 $C$  は  $E$  の部分なのだから、まず  $G$  の構成を定め、ついでそれを含むように  $C$  の構成を定め、ついでそれを含むように  $E$  の構成を定めておかねばならないだろう。しかし実際に圏の中の群や圏を論じる時には、そのような細かな指定を行ってから議論をするのではなく、まず一つの圏を考え、その内側で特殊な対象を考えるという手順を踏む。その際、 $E$  が実際に内部圏を持つか否か、 $C$  が実際に群を持つか否か、といったことは問題にならない。それらを問題にせずとも議論が可能である理由は、議論に現れている  $G$  や  $C$  や  $E$  が細部まで指定されていない、つまり図式的なものであるからだ、アウディは考えている。このような図式的考え方と前節の内容のつながりは容易に見て取られる。数学的構造をそれに付随する写像の観点から扱うことは、その構造の詳細な構成に言及せずに構造を扱うことになる。したがってそのように扱われる構造に言及する言明は図式的になる。言い換えれば、その構造の例となるような、様々な仕方で構成される諸々のものに言及する言明となる。アウディはこの点をもって圏論が構造主義にとって良い言語であると論じている。

## 5 ヘルマンの批判とその検討

アウディの図式的考え方に対して、後にヘルマンが二点の疑問を提示している (Hellman, 2006)。それらを紹介した上で私見を述べたい。

第一の疑問は以下のものである。ヘルマンによると、「我々に実際に提示されるものは一種の形式主義であって、そこにおいては、条件文の形式を持つ定理と定義が数学に対して存在するすべてである。すなわち我々は演繹論理の妥当性を超えるものとしての数学的真理の概念を放棄することになる (p.158)。」ここで「条件文」と呼ばれているのは、アウディの図式的言明で

あろう。実際、アウディは数学の定理が図式的であることを述べる際に、それが各々条件文であることに注目している (Awoodey, 2004, p. 58)。ただし文字通り「もし……ならば……」という形式を持つとは限らず、「有限生成されたアーベル群はある分解を持つ」のような言明も条件文に含まれる。この言明は、あるものがアーベル群であって有限生成されているという条件を満たしていれば、その細かな構成は問わずに、ある分解を持つと主張している点で図式的である。定義についても同じ意味で図式的性格を持つことは容易に理解できる。ヘルマンの議論に戻ろう。彼はもともとマックレーンのトポス理論による数学の基礎付けを批判し、圏論に対する独自の背景理論を提案していた (Hellman, 2003, Section 6)。その理論は集合論とは異なる形式を持ちつつも、圏論を展開できるだけの領域を提供するものとされるので、ヘルマンにとって圏論を枠組みとして数学を行い、定理を得ることは、その領域に関する事実を述べるものとして理解できる。それに対してアウディの図式的数学は、各言明が図式的であるがゆえに、それが何について語っているのかが不明であり、したがって単なる形式主義なのではないか、とヘルマンは考えているように見える。私見では、確かに指示による意味論の観点から、図式的言明の数学的真理性を追求することは難しいと想われる。ある図式が何について語っているのか、何を指示するのか、ということは不明である。その不明さは、様々なものがその図式の例になることを意図している。例えば連続写像の観点から位相空間を扱うことは、位相の与え方に様々なものがあり、それゆえ同じ位相を持つ空間でも記述の仕方が様々であることを見込んでいた。アウディは以下のような、より極端な図式の例も挙げている (pp.57-58)。単位元を持つ半環<sup>9</sup>の元  $x$  について  $x^2+x+1=x$  ならば  $x^5=x$  であることを証明できる。アウディが注目するのは、それらの式に類似したものが数学の別の分野でも証明できることである。例えば集合  $X$  について  $X^2+X+1\cong X$  ならば  $X^5\cong X$  であることを証明でき、より一般に、有限積と有限余積<sup>10</sup>を持ち、それらが分配律を満たすような圏であれば、同じ事を証明できる。彼はそのような事実によって、それらの等式に図式性を見出している。彼が考える図式は、様々な仕方で記述される位相空間のように特定の種類の構造を例とするだけでなく、様々な種類の構造を例にしうるほど広範なものである。よって図式の指示対象は実に様々なものでありうる。記号に対して指示対象を与えるような意味論に基づいて数学的真理を追求しようとする限り、求められる意味論の複雑さはそのような指示の多様性を受け入れられるものである。

ヘルマンの第二の疑問は、アウディが射のみの観点を一貫できるか、ということである (p. 159)。アウディは構造を射 (写像) の観点から扱う。その意味で射はアウディにとって原始的な概念のはずである。しかし射は圏の構成要素であり、すなわち圏の公理を充足するものである。ここからヘルマンは「公理の充足」という概念もまたアウディの思想の一部を為し、した

<sup>9</sup> 可換だが逆元を持たない和と、単位元を持つ積を備える。

<sup>10</sup> 圏における積の定義に現れる射をすべて反転させることで定義されるもの。

がって射によって説明されるべきだと考える。私見では、これは適切な指摘ではない。射について語るための言語を厳密に定め、それを対象言語として扱う意味論を圏論の言葉で記述しようとするならば、ヘルマンの指摘どおり充足の概念を射の観点で与える必要があるだろう。しかしアウディはそのようなことをしているのではない。何が射の例になるのかが分かっているところから出発するのが彼の数学的構造主義なのだから、何かが圏の公理を満たすか否かというのは彼が考える圏論の役割の外側にある。そして実際、例えば連続関数が射の公理を満たすことの証明法は連続関数の定義のされ方に依存するから、その部分は集合論であるかもしれない。しかしそのことはアウディの見解を損なうものではない。圏論が使われるのは何かが圏の公理を満たすことが示された後だからである。

## 6 まとめと展望

マックレーンのトポスによる数学の基礎付けとアウディの構造主義のつながりに関するヘルマンの誤解、そしてアウディの図式的数学の構想およびヘルマンの疑問について概観し、若干の私見を添えた。アウディの数学的構造主義はどのような哲学的含意を持つか、その点は未だ、アウディが言う「哲学的構造主義者」たちによって、アウディが意図するようには主だって取り上げられていないように見える。アウディの数学的構造主義は数学の基礎付けを積極的に無視し、実践の仕方を論じるものであるから、その含意を見出すことは、数学の基礎でなく実践の中に哲学の問題を見出すことになる。すなわち、数学を実行する言語として日常の言葉遣いに加えて集合論の言語でなく圏論の言語を使うことで、我々が正しいと考えることやその正当化の概念がどう拡張されたかを見ることが求められる。

(ふかやま ようへい・思想文化学専攻)

## 参考文献

- Adámek, J. (1983). *Theory of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel.
- Awodey, S. (1996). Structure in mathematics and logic: A categorical perspective. *Philosophia Mathematica*, 4, 209–237.
- Awodey, S. (2004). An answer to Hellman’s question: “Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?” *Philosophia Mathematica*, 12, 54–64.
- Hellman, G. (2003). Does category theory provide a framework for mathematical structuralism? *Philosophia Mathematica*, 11, 129–157.
- Hellman, G. (2009). What is categorical structuralism? In J. van Benthem; G. Heinzmann; M. Rebuschi & H. Visser (Eds.), *The age of alternative logics: Assessing philosophy of logic and mathematics today* (pp. 151–161). Dordrecht: Springer.
- Mac Lane, S. (1998). *Categories for the working mathematician* (2nd ed.). New York: Springer. (翻訳：



- マックレーン, S. (2005). 『圏論の基礎』(三好博之・高木理訳). 東京: シュプリンガー.)
- Mac Lane, S. & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. New York: Springer.
- McLarty, C. (1995). *Elementary categories, elementary toposes*. Oxford logic guides 21. Oxford: Clarendon Press.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics*. New York: Oxford University Press. (翻訳: シャピロ, S. (2012). 『数学を哲学する』(金子洋之訳). 東京: 筑摩書房.)