認知科学 第 28 巻 第 1 号 (2021) 57–69　https://doi.org/10.11225/cs.2020.075
Cognitive Studies: Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society, Vol. 28, No. 1

圏論的な〈ものの見方・考え方〉入門

西郷 甲矢人 *

長浜バイオ大学

Category-theoretic way of thinking: An introduction

Hayato Saigo*

Nagahama Institute of Bio-Science and Technology

Received 4 December 2020

本稿は，著者が 2019 年 12 月 13 日に，2019 年度第 7 回山梨大学教養教育センター講座において，『すべての人に矢印を〜圏論的な「ものの見方・考え方」入門〜』と題して行った講演の書き起こしに加筆修正したものである．聴衆は主に山梨大学の教養課程の学部生であった．使用許可を下さった山梨大学教養教育センター長・時友裕紀子教授と書き起こしのために動画をご共有いただいた堀裕和教授に深く感謝する．文字起こしと校正をしていただいた長谷川一郎氏，草稿に対する貴重な助言をいただいた能美十三氏にも感謝する．また，圏・関手・自然変換の定義について述べた付録は布山美慕氏，図は高橋達二氏に作成していただいたものである．お二人に感謝する．なお，本講演全体の内容的な基盤は『圏論の歩き方』（2015, 日本評論社）の第 12 章「すべての人に矢印を」（西郷甲矢人），関数についての記述の基盤は西郷甲矢人・能美十三『指数関数ものがたり』（2018, 日本評論社）第 1 章「指数関数ってなんだ？」であり，その結果多くの内容的な重複をもつことを注記しておく．

1.　数学，まだ何かすることあるの？

長浜バイオ大学の西郷です．圏論というのは，数学の中でもとりわけ抽象性が高いとされる一分野です．私自身は圏論が専門というわけではなく，ユーザーの立場なのですが，圏論について質問される機会が増えてきました．数学や物理だけでなく，認知科学や哲学といった，数学とは一見遠い分野の考え方をつなぐ新しい言葉としても，最近は圏論が少し知られるようになってきました．

私は数学を生業にしているわけですが，飲み屋さんで隣の人と仲良くなって自己紹介すると，「数学ってまだすることあるんですか」と聞かれたりします．物理なら新発見がニュースになりますが，数学って少なくとも二千何百年くらい前からやってるし，今更やることあるんですかと．そのときに，もちろん，ええありますよと答えるわけです．

その一つは，難問を解くということです．昔から疑問に思われていて，本当だとしてもどうしてそうなのかわからない，というような問題．難問の例として，飲み屋で一番説明しやすいのは，いや飲み屋でなくてもいいんですが，コラッツの問題というのがあります．角谷の問題と呼ぶ人や，その他の呼び方をする人もいます．非常に簡単に述べられる問題です．まず，好きな正の整数を思い浮かべて下さい．それが偶数なら 2 で割り，奇数なら 3 倍して 1 を足してください．例えば 10 を思い浮かべたら，偶数なので 2 で割って 5．5 は奇数なので 3 倍して 1 を足すと 16．16 → 8 → 4 → 2 → 1．1 は奇数なの

* E-mail: h_saigoh@nagahama-i-bio.ac.jp

で 4 に．$4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1$ とループになります．実は，経験的にはどんな正の整数から始めても，不思議なことにこのループになる．もし小学生に数学を教えることがあったら，この問題は興味を持ってもらえるし，計算練習としても素晴らしいのでお勧めです．どこかで間違えても必ず $1 \to 4 \to 2$ に陥るので，満足感を持って続けてもらえます．

ところが，この「どんな正の整数から始めても」が本当にそうなのか，どうしてそうなるのか，まだわかっていません．数百京とかの大きな数から始めてもそうなるということは，計算機を用いて実証されているのですが．ポール・エルデシュという有名な数学者も，どうもまだ数学はこの種の問題を解く用意がないのではないか，というようなことを言っていたそうです．誰でも具体例で確かめられる，しかし誰も理由を知らない，そういう面白い謎があるということになれば，それは解きたくなりますよね．だから数学者はまだ失業せずに済んでいる．

2. 掘り下げる営み

もう一つ，難問を解くことと密接に関係した，大事な問題があります．難問を解くというのは，多くの人にとっておそらく，手を伸ばして高いところに到達したり，高い建造物を作るイメージです．でも高いものを建てるためには，基礎を掘り下げる必要がある．それは難問を解くことの対極なのではない．易しいと思われていることを掘り下げ，一見異なる分野のつながりを探求するというのも，数学者が日頃やっている仕事の一つです．

歴史上，その最もわかりやすい例の一つは，座標幾何です．図形の問題を，座標という数の組に落とし込んだ．例えば，円という図形の代わりに，$x^2+y^2=1$ という式を考える．図形と数式，幾何と代数という異なる分野を，デカルトという人が結びつけたわけです．

今でこそ，数学は一つであると考えられています．しかし，ほんの百年少し前は，私は幾何学者です，代数学者です，解析学者ですと名乗っていたそうです．今もその名残りはありますが，そういう区切りは無意味だということもわかっている．幾何学と代数学が同じ一つの数学なんだということを分かるためには，今まで意識していなかった重要なことを掘り下げる必要がありました．先ほどの例でいうと，「点」って一体何なんだ，ということを掘り下げないといけない．点が満たすべき性質は何だとか，色んなことを考えるなかで，座標というものが見えてくる．

難問を解くという話は自分には関係ないかなという一般の人たちにとっても，この掘り下げる方の仕事というのは，ものの見方，考え方を深める上で役立つかもしれません．

3. 数学とは「矢印」を引くことだ！

圏論というのも，二十世紀後半に始まった「掘り下げる」営みの一環といえるでしょう．非常に大雑把に言い切りますと，数学とは何か，という問題への一つの回答です．すなわち「数学とは，矢印を引くことである」と．

みなさんは数学的な「対象」，つまり「もの」を調べるという話は，なんとなくのレベルならイメージできると思います．研究するというのは，普通は「もの」を研究するものだと思いますよね．でも実は，ものとものの間の「関係」こそが科学の対象であるという見方もできます．

数学もそうです．一つ一つの対象を研究しているようでありながら，実は，他の対象との関係性を研究しているとみなした方が，より広い見方ができる．あとで実例も見ますけれども，そういうことが見い出されてきたわけです．つまり数学的な活動，数学をするということは，ものだけをじっと見つめるんじゃなくて，ものとものの間に連絡をつけたり，つなげたり，比較したりといった，「矢印」を作り出す行為と考えられる．

みなさんが今日この教室にきたときや，行ったことのない会場に行くとき，頼りになるのは矢印ですね．矢印を辿っていけば着く．つまり，人に対する指示というのは，矢印をつなぎあわせればできる．プログラミングも，やったことのある人ならわかると思いますが，「あれをやってこれをやってあれをやれ」というものですね．数学もそのような意味で，矢印のネットワークを考えることだ，と言える．

今日の講演は，圏，関手，自然変換といった圏論の基本概念に触れて帰ってもらうことが目標です．もちろん，みなさんが数学者になるわけではないかもしれないので，漠然としたイメージ，おもちゃレベルで感じてもらい，圏論的なものの見方・考え方に親しんでもらえたらいいかなと思います．

4. 振り子の法則：関数の概念

まず，学生のみなさんが一番親しんでいる数学的な矢印といえば，これはもう「関数」ですね．関数って一体何なのか．歴史的な経緯も踏まえて考えてみましょう．近代の数学の始まりは，関数という矢印を考えついたところにあります．

英語で function というこの概念は，ライプニッツという偉大な人物，ニュートンと並んで微積分学を作った人が実質的に創始した概念です．後から思えばその概念を理解するための絶好の例となっていた，振り子の法則についてお話ししましょう．

ガリレオという人がいましたね．よく聞く昔話によると，みなさんくらいの歳か，もう少し若いとき，教会でつまらないお説教を聴いていた．つまらないから天井を見ていると，シャンデリアが揺れている．そこでふと気づいた．揺れ幅がだんだん小さくなっても，揺れるリズムはあまり変わらないなと．それで自分の脈拍を数えて測ってみると，確かに一定になっている．振り子の等時性と言われるものです．まあ私が見てきたわけではないのですが [1)]．

ガリレオはさらに一つの発見をしました．振り子の周期は何によって決まるのかな，と考えたんです．ご存知かもしれませんが，空気抵抗等を無視するならば，振り子の長さ，つまり振り子の支点から錘の重心までの長さで決まる．ガリレオは「振り子の周期」と「振り子の長さ」を結びつけたわけです．私が講義で学生に聞いてみましても，長さで決まるというのは大体わかる．さらに，長い方がゆっくりなのか短い方がゆっくりなのかと質問すると，20 年近くこの世界で生活しているおかげでしょうか，ほとんどの学生がすぐに正解しますね．そう，長い方がゆったりと揺れて，短い方が小刻みに速く揺れる．だけど，どんな式で書けるか知ってますかと聞くと，殆ど知らない．つまり，ここで決定的に重要なのは，我々は，式が分かる前に，関数があることを知っている，ということです．

$$T\ (\text{振り子の周期}) \xleftarrow{F} L\ (\text{振り子の長さ})$$
$$T = F(L)$$

関数というのは，これを決めたら，それに対してこれがただ一つに決まる，という関係のことです．受験数学に慣れ親しみすぎた私たちは，関数というのはいつも何か式が先にわかっていると思いがちですが，それは正しくない．むしろ，ほとんどの場合,「何かの対応がある」ということしか予めわかっていない．この「何か」の正体を次第次第に明らかにしていこう，というのが多くの場合，数学や科学の話の進め方です．微分方程式というのもその一例で,「この謎の関数は一体何だろう」と考えていくわけです．

ちなみに振り子の周期は，長さの平方根に比例するという形の式で書けます．したがって長さを 4 倍にすると周期が 2 倍になります．だけど大事なことは，式がわかるよりも前に，矢印があることがわかるのが科学的な発見の第一歩なのだ，ということです．

5. ジャイアントケルプの減少：関数の合成

さて，私は 2012 年に，縁あってカリフォルニア大学のバークレー校というところで講演をしました．いま思うと，当時の私は実に真面目な人間で，カリフォルニアに行ったのに確かワインもろくに飲まなかった．ずっとボーッとしていたからでしょうか，ホストの人が気を利かせてドライブに誘ってくれて，今だったらワイナリーに連れて行ってもらうところですが，モントレー湾というところの水族館に行きました．そこでは，数十メートルもの長さの巨大な昆布を見ることができます．ジャイアントケルプと言って，魚たちの暮らしを養うだけでなく，モントレー近辺の産業にとっても重要なものでした．ヨウ素が取れるんですね．

ところがある時期，このジャイアントケルプが激減しました．当然ながら,「何がジャイアントケルプを激減させたのか」と問われます．人間がいきなり皆伐したわけではないのに，不思議に激減した．矢印の根本を探ることになったわけです．

その結果，何が分かったというと，ウニが急増して昆布を食べたことが直接の原因だった.「ウニの量からジャイアントケルプの量への関数がある」ということの発見です．じゃあウニはなぜ増えたのか．当然の疑問ですね．なぜ増えたと思いますか．みなさんもご存知であろう動物が関わっています．ラッコです．ラッコはウニを食べる．そのラッコが激減していた．

ラッコの量がウニの量を決めるという関数と，ウニの量がジャイアントケルプの量を決めるという関

1) どうやらこの話には信憑性がないようだ．

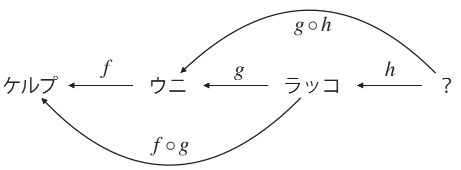

図 1 結合律：$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
関数の合成はカッコを付け替え可.

数から，ラッコの量がジャイアントケルプの量を決めるという関数が導かれる．こういうのを「関数の合成」と言います．式が分からなくても，ラッコでウニが決まり，ウニでジャイアントケルプが決まる，という二つの関数が存在し，全体としては，ラッコが決まればジャイアントケルプが決まる．これを $f \circ g$ と書いて，関数 f と g の合成と呼ぶわけです．

これで完全に納得したでしょうか．しませんよね．じゃあラッコはなんで減ったのかという疑問が残ります．これは結局，人間が獲ったからでした．毛皮が高値で売れたので，獲りすぎてしまった．ラッコの方で利益を追求したら，ケルプのほうでのところの自然環境，ひいては経済が滅びかけてしまったわけです．

こういう風に矢印をつなげていくというのが関数の「合成」という考えです（図 1）．ちなみに，人，ラッコ，ウニ，ジャイアントケルプを結ぶこれらの関数をつなげるとき，どの二つの関数をさきにつなげるかという順番は変えてもよい．これを結合律と言います．数の足し算や掛け算ではこれが成り立ちます．要注意なのは，引き算です．引き算では $f-(g-h)$ と $(f-g)-h$ は常には同じでない．ですから結合律というのは，いつも成り立つわけではない，大変ありがたいものです．しかし，関数というものの合成に関しては成り立つわけです．

6. 矢印とその合成：圏の概念

ということで「関数」というものの説明をしましたが，ここまでくると，実は「圏」という概念を理解することは容易い.「関数」という概念を非常に一般化したものが，圏の中の「射」とか呼ばれるものです．これを説明してみましょう．

圏というのは，何かの「射」つまり「矢印」たちの集まりです．さきほど，関数という矢印には根本と行先があって，合成ができるよという話をしました．射もそれと同じく，根本（ドメイン; domain）と行先（コドメイン; codomain）があって，一方の矢印の行先と他方の矢印の根本が一致するような二つの矢印は合成できます．この「根本」や「行先」の役割を果たすものは「対象」と呼ばれます．

圏とは射と対象からなるシステムで，射の合成ということが定められていて，さらに次に述べる二つの条件をみたすものです．一つは，先ほど言った「結合律」．そしてもう一つ，各対象に対応した「何もしない射」である「恒等射」とよばれる射があるという条件です．恒等射というのは，それを他の射と合成しても相手を変えないという性質をもつ射です．関数（写像）の場合は，入力 x を x 自身に対応させる「恒等関数（恒等写像）」がそれにあたります．以上の条件をみたすシステムを「圏」と呼びます．

もう一度まとめて「圏」を復習しましょう．矢印の集まりであり，矢印の根本と先があり，矢印の合成ということができて，結合律が成り立って,「何もしない」矢印がある．そういうものが圏です．これはさっきの関数の話そのままじゃないかと思うかもしれませんが，決定的な違いが一つある．矢印は関数である必要は全くない．何でもいいというところです．

これはよく誤解されるところなので，伝説的な数学者グロタンディークに登場してもらって強調します．数年前に亡くなられましたが，非常に素晴らしい数学者です．彼は代数幾何学という，永年の蓄積がある高度に発達した分野を，圏論を用いて全体的に書き直すという「暴挙」に出ました．考えてみて下さい．たとえばの話ですが，みなさんが習ってきた高校数学を，全部矢印で書き直されたらどんな気持ちになりますか．二次関数の最大値を求める問題をすべて矢印の話に書き直されたらなかなか困るでしょう．言ってみればこんな風な大がかりなことをやられたので，多くの数学者たちもうわーっとなったんです．のちにはその有効性が明らかになりましたが，これは単なるナンセンスではないかと感じられたりした．それを象徴するのが，その時期のグロタンディークが発表したときのセミナーで交わされたとされる会話です．本当かどうか私は確かめられていないのですが，いかにもと思われる逸話です．聴衆がグロタンディークに対し,「あなたが書いているその矢印にはどんな仮定があるんですか」と質問した．それに対する答えは一言,「何も仮定しない

Aucune hypothèse」. 要するに矢印，圏の射というものは，関数であろうが，プログラムであろうが，より一般に非決定性や確率的な揺らぎを含むものであろうが，その他「対応付け」ですらないものでも，その根本と先，合成が定義され，結合律があり，何もしないやつがちゃんと定義されていれば何でもいいわけです．

7. 量計算のなかの「圏」

とはいえ，慣れるまでしばらくは関数，それも典型的な関数といえる，正比例関数を例にとって，圏の説明をしていきましょう．

私は長浜バイオ大学では一般教育の教員なんですね．数学を教えさえすれば後は何をしてもいいという素晴らしい職で——といっても，最近は学内業務が増えているのですが——，その合間に研究しているわけです．もちろん学生からの質問も受けます．それで思い知るわけですが，量の単位というものがよくわかっていない学生さんが初年次ではけっこう多い．例えば，密度ってなんですかと．これは，体積を質量に変えるものですね．どういうことかというと，体積が分かれば，それに密度を掛けてあげれば，質量が出る．これが，内包量とも呼ばれる，一あたりの量，単位あたりの量です．そうすると，この「量」の計算の世界には合成があります．例えば，モル体積．ある圧力，温度のもとで，一モルの気体は何リットルあるというのがそれです．それにまた密度を掛けると，分子量が出る．ここでは掛け算が合成になっているわけです．そして，結合律もある．掛け算は結合律が成り立ちますからね（図 2）．では「何もしない」はどうか．何もしない存在．グラムに掛けても変わらないし，リットルに掛けても変わらない．量にそれを掛けても何も変わらないものは何か．これは「1」ですね．数の 1 というのは「自分に対する自分の比（倍率)」ですから，何に掛けても変わらない．

よく考えてみると，数というのは全て働きと見做すことができます．2 という数は「2 倍するという働き」と見ることができる．みなさん，お中元やお歳暮で 2 が送られてきたことはないでしょう．2 本の羊羹ならともかく，2 が送られてくることはない．それから，みなさんだったら親戚やら先輩あたりから「現実を見ろ」「結果を出せ」と言う話をされてめんどくせえなあと思うこともあるかもしれません

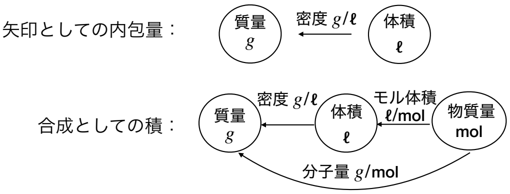

図 2 矢印としての内包量，合成としての積

が，将来はまた結構めんどくさくて，会社の上司あたりに「数値で示せ」とか言われると思います．議論はともかく現実が大事だ，だから「数」で示せとか，最近は文科省あたりがますますうるさいんですよ．しかしお言葉ですけど，数って彼らの言う「現実」なんですかね．私は数学者ですから数には慣れ親しんでいますが，それでもたとえば「2」そのものをプレゼントしていただいたことはありません．まあ現実とはそもそも何かとか考えだしたらガチの哲学にもなってきますので，あとは『〈現実〉とは何か』（西郷 甲矢人・田口 茂, 2019, 筑摩書房）などをお読みいただければ．

さて，要するに何が言いたかったかといいますと，数はものではないし，また重さや体積といった量そのものでもない．そうではなく，数というのは，量と量をつなぐ「働き」なんですね．特に「1」はとても大事です.「何もしないもの」がどうして大事なのか．数学はなぜ「何もしないもの」を考えないといけないのか．これは,「逆」ということを考えるためには,「何もしない」を定義しておかないといけないというのが大きいです．2 分の 1 とか 3 分の 1 を定義するためには，1 が必要なんです．私は何もしない奴だということで有名なんですが，つまりそれは「逆」を定義するために役立つことを毎日立派にこなしているということです．どうです，圏論というのは役に立ちますね．

8. 線型代数：オトナの算数

で，もうちょっとオトナの話をしますと，みなさんも習っているであろう線型代数です．ある種の量の全体というのは，線型空間（ベクトル空間）というものを用いてとらえられます．その要素である量はベクトルということになります．ベクトルをベクトルに変えるものは何かと言ったら，行列ですよね．で，行列も積を作れる．さきほどは一つの量を別の量にすることを考えていました．線型代数というの

は，多次元の量を多次元の量に変換することを考える．例えば，二次元の量を三次元の量に変える変換（写像）を考える．こういった変換（写像）のうちで,「線型性」という性質を満たすものを「線型写像」と言っています．線型写像というのは簡単に言えば多次元の量の正比例関数です．正比例関数の本質は，入力を足し合わせたら出力も足し合わされますよということです．それで線型写像というのは行列というもので表現でき，行列の算法はきわめて役立ち，たいへん嬉しいわけです．ちょっと抽象的な説明で恐縮なんですけれども．

行列というのは，世の中でこれほど役に立つものはないんじゃないかというくらい役に立ちます．例えば，パン工場というのは一つの行列みたいなものと考えることもできます．行列のできるパン屋ということではないですよ．小麦粉何キロ，水何リットル，と入力を並べると，その日に作るパンの量が出てくる．m 次元のベクトルを n 次元のベクトルに直すという，その働き，すなわち関数とみることができる．そして，なめらかな関数が正比例関数で近似できるのと同じように，線型写像として近似することができる．そして線型写像は行列として表現できて，いろいろと具体的な計算が可能になるわけです．あるいは，この日本社会の全体も，教育部門とか，農業部門とか，色んな部門があって，そこからどういう経済効果がもたらされるか，という行列として考えることができる．実際にもそうやって経済政策の計画を立てていて，産業連関表と言いますね．

このように，線型代数というのは一種の拡張された算数です．ここで算数というのは，読み書きそろばんといったりするように，基本を押さえるまでは大変だがいったん押さえると社会，自然のありとあらゆることに通ずる技術という含意です．算数と言ってもオトナの算数，拡張された算数です．線型写像，特に行列からなる圏の研究が線型代数であると言うことができます．

9. 数とは何か

難しい話が続きましたので，間奏としましょう．もう二十年ほど前でしょうか,『分数ができない大学生』というのが話題になりました．みなさんは分数ができると思いますが，そもそも「分数ができる」とは何かを考えてみたいと思います．そもそも「数」とは何かというところから考えましょう．さっきも

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "\times 5"'] \arrow[rd, phantom, "\times\frac{5}{3}"] & \bullet \arrow[l, "\times 1/3"'] \arrow[d, "\times 5"] \arrow[ld, dotted] \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "\times 1/3"]
\end{tikzcd}
$$

図 3　分数の概念と可換図式

言いましたが,「働き」として捉えることができる．$2\times3=6$ というのは，3 倍して 2 倍するのは 6 倍するのに等しいことだと．あるいは,「3 分の 1」というのは，3 倍するという働きの逆なのであると．では,「3 分の 5」はどうか．みなさんは普通に扱えると思いますが，これはよく考えてみるとけっこう難しい概念なんですね．例えば，5 本の羊羹を横に並べて，それをちょうど 3 等分しろと言われたら，けっこう難しい．でも，一本一本の羊羹を 3 つに切って，5 個集めてくるのは易しい．でも，なぜこの 2 つが同じだと言えるのか．みなさんは例えば，先生にこんなふうに説明されたかもしれません．羊羹を縦に 5 つ重ねて，すっと 3 等分する．これなら，なるほどと思いませんか．このときすごく重要なことを，我々は掴んでいます．何かの量を 3 分の 1 にするという操作のあとに 5 倍にするという操作をしたものと，5 倍にするという操作のあとに 3 分の 1 に圧縮するという操作をしたものが，量としては同じですよと．これを掴んだときに,「3 分の 5」を単一の概念として理解することができる（図 3）．

こういうのを専門用語では,「可換」と呼びます．ある一連の操作を合成していったものと，また別の一連の操作を合成したものとが等しくなる，というのは，非常に意味のある関係なのです．いまの場合は，ある種の操作とまた別な種類の操作を「順序を変えて」行っても同じになるということで，これを「順序を交換できる」という意味で「可換」と呼ぶわけですが，圏論ではそうした状況を含めてさらに一般に，射たちからなる図式が,「出発点から終着点へといろいろな経路で射を合成していったものが互いに等しくなる」という条件を満たす場合に「可換図式」と言います．格好いいですね．我々は人生の中で可換図式をいっぱい使ってきたわけです．

ちなみに,「順序を交換できる」という意味での可換という話のついでですが，一般に操作というものはめったに可換になりません．ハリセン（張扇）というものがありますね．大きな扇子みたいなやつで，ひと昔前のお笑い番組なんかだとこれで出演者

をぶっ叩いたりする．で，かわいそうだからとヘルメットを被せてから叩いたりするわけですが，ヘルメットを被せてから叩くのと，叩いてから被せるのでは結果が異なる．これが，可換ではないこと,「非可換」の例です．私が学生への試験で「非可換性の例を挙げよ」という問題を出したら,「勉強してからテストを受けるのと，テストを受けてから勉強するのでは成績が異なる」という解答があった．これもなかなか秀逸です．三次元の回転はどうでしょうか．これも一般には可換ではない．物体を前に倒してから横に回転させるのと，横に回転させてから前に倒すのでは，結果が異なる．ルービックキューブが面白いのはこのせいですね．一回順序を間違うと揃わないから面白いのであって，順序が関係なかったら簡単すぎます．

というわけで，非可換性は世界に満ち溢れています．量子論の世界でも位置と運動量は非可換です．圏論の文脈でより一般的にいえば，図式というのは通常はめったに「可換図式」にはならない．むしろそれだからこそ，圏において何らかの可換図式があるとき，それはとても重要な情報になるということです．

10. 関手：比喩，モデル，アナロジー

それでは，なんとなく圏というものをイメージできたと思うので，次のステップです.「関手」という概念について話します．

私の勤務する長浜バイオ大学で，学生から質問されることが多いのが，モルを用いた計算です．バイオ系ですからモルが避けられない．受験で暗記はするんだけど，実際の溶液計算とかがうまくできない．6.02×10^{23} という数がなぜそんなに重要なのかわからないという学生に対して，私が説明したのは，モルというのは米原駅みたいなものですよと（図 4）．米原駅というのは新幹線や長浜方面行の列車（その中には金沢行の特急もあります）が止まることもあって乗降者は結構多いんですが，ほとんどの利用客にとっては,「乗り換えるための駅」です．この米原駅のどこがモルに似ているのか．名古屋と京都はもちろん重要な都市ですし，長浜もまたそれに劣らず「重要」な都市ですね（なんといっても長浜バイオ大学が所在しているわけですから！）．この 3 つをつなげ，うまく乗換可能にするというのが米原駅の役割です．モルも同じです．モルを考える

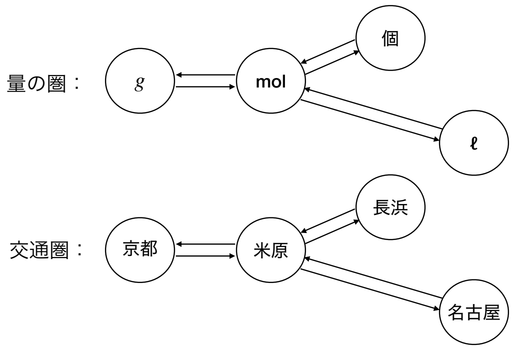

図 4 「モルは米原駅みたいなもの」

ことに何の意味があるのかというと，体積（リットル）と，原子の個数（個）と，質量（グラム）をつなげる，いいポイントにあるということ．モルを経由することで，それらの量の換算が大変便利に行えるわけです．

これは先ほどの，単位あたり量を矢印とした「量の圏」に似ています．日常語でも「交通圏」と言いますけれども,「行き方」を矢印,「行き方をつなげること」を合成,「動かないという『行き方』」を恒等射とみなせば，交通ネットワークも「圏」として考えられます．

ではここで，あえて根源的なことを聞くと，比喩とは一体何でしょうか．この二つの「圏」のなかで，モルと米原駅は，どう似ているのか．多くの人は，似ているものを似ているもので言うのが比喩であると，そう答えることでしょう．しかし今の例でいうと，モルと米原は「もの」として似ていますか？ その学生はさっきの比喩で納得したのですが，さすがに，モルと米原は「ものとしては」似てないですよね．おかしいですね．では，何が似ているんでしょうか．ものが似ているのではない．関係性が似ているんです．よく考えると，一般に比喩とか類推ってそういうことでしょう．子供が乏しい語彙でものごとを理解しようとするときに，例えば「鳥の巣」と言えないとき，鳥のおうちと言いますね．巣と家は形が全然違う．では何が似ているのか．巣と鳥のかかわりとか，土台があるとか，雨風を凌ぐとか，そういう関係性が似ている．

つまり，圏があり，また別の圏があり，それぞれの構造，つまり，対象と対象の関係性の全体が対応づいているときに比喩となり，類推が可能になる，と言い切っても過言ではないと思います．

11. 「関手」の概念：ホモロジー関手

こうした圏どうしの対応付けを「関手」と言います．これは，圏から圏への矢印のようなもの，メタレベルの矢印です．ものがものにうつるだけでなくて，関係が関係にうつる．さらに，合成したものは合成したものにうつるし，何もしないものは何もしないものにうつる．つまり一言で言うと，圏の構造を保った変換が「関手」です．

関手とはどんなもので，どういう役に立つのかということをつかんでもらうための例として，ここで，ホモロジー関手というものを説明してみます．これは，最も効果的な「数学的な比喩」の一つで，数学の世界では非常に重視されているものです．ちょっと難しい言葉ですが，「加群準同型」という言葉があります．先ほどの線型写像や行列のようなもの，つまり正比例関数を一般化したものだと思って下さい．足し算は足し算になり，特にゼロはゼロにうつりますよという，そういうものを加群準同型という．これを射とする圏を考えると，それはいわば，量の世界です．他方で，図形の世界はどうなっているか．図形と図形を関係づけるものとして，例えば，連続写像というものがあります．これは，図形を変形するイメージを持ってもらえばよい．円板を潰して線にするとか，色んな図形を変形するという操作を矢印とした世界です．で，ホモロジー関手というのが何かというと，図形の世界の各図形を，何かの量のシステム──ベクトル空間とか，加群と言われるもの──に翻訳し，しかも関係性は関係性に翻訳する，というもの．これはある意味で，デカルトの代数幾何学のように，図形の世界と代数の世界をつなぐものの現代版のひとつです．

ホモロジー関手を使うと，非常に面白い問題が解けます．図形の世界の話を，量の世界の話に持ってくるものがホモロジー関手なんですが，図形の代表選手の一人としては，円板，つまり中身の詰まった円があります．この円板を，ゼロだけからなるシステムにうつし，そして円周というものを，整数全体というシステムにうつすという，今日詳しく説明する時間はありませんが，そんな比喩が数学の世界に存在します．いわば「円周は整数のごとく円板はゼロの如し」．と言っても意味がわからないかもしれませんが，円周を整数，つまり $-1,0,1,2,\dots$ の全体にうつし，円板をゼロ一個にうつす，という「比喩」，つまり関手があることを認めてもらった上で話を進めます．

数学として今日一番難しいところなので，ちょっと気合を入れて聞いて下さい．「連続写像」というのは，破ったり切ったりせずに図形を変形することです．こんな連続写像があるかどうかを考えてみましょう．タンバリンの膜のような図形を思い浮かべて下さい．円周のところで膜が固定されています．この膜の全部を，破ったり切ったりせず，鋲止めされている枠のところも動かさず，それでいて膜全体を枠へとべちゃっとくっつけることはできるでしょうか．破れば簡単ですね．破らずにできるか．

これは，できないというのが正解です．多くの人はそう思うはずですね．でも，なぜできないのか．不思議な方法でできてしまうのではないか．数学の世界にはそういうことがザラにあります．一個の球体をうまいこと有限個に切って組み合わせると同じ半径の球体を 2 つ作れる，なんて話もあるので，油断できません．ということは，キリストがパンや魚を配ったら増えたという聖書の話もそういうことなのかもしれません．

それはともかく，円周上の点，つまり枠それ自体を円板とみなすことを i としたときに，べたっとくっつける操作を r とします．円周上の点を動かさない，i を行って r を行っても何も変わっていないという，そんな r は存在するでしょうか．

答えはもちろんノーのはずなんですが，証明は一筋縄ではいかない．これは背理法を用います．もしそういうものが図形の世界にあったとしたら，ホモロジー関手によって量の世界に翻訳できて，矛盾が出る．よって，そういうものはない，という筋書きです．

もし，図形の世界に，この r みたいなものがあったら困るという説明をします．円周を円板に埋め込んで円板をまた円周に戻すということができるとする．すると，$r\circ i$ は恒等射にならなければならない．円周上の点は動かないからです．さてここで例の「比喩」を思い出しましょう．「円周は整数の如し，円板はゼロの如し」でしたね．この「比喩」は関手ですから，恒等射 $r\circ i$ は，量の世界での恒等射にうつらないといけませんね．

だけど，おかしいんですよ．この「比喩」は関手ですから，r と i の合成である $r\circ i$ を量の世界にうつしたものは，「r を量の世界にうつしたもの」と「i

を量の世界にうつしたもの」の合成にならなければいけない．ところがですね，この「i を量の世界にうつしたもの」は，整数全てをゼロにする必要がある．なぜなら「円周は整数の如し，円板はゼロの如し」なわけだから．さてそうすると,「$r \circ i$ を量の世界にうつしたもの」，いいかえれば「r を量の世界にうつしたもの」と「i を量の世界にうつしたもの」の合成というのは，恒等射ではありえない．なぜなら,「i を量の世界にうつしたもの」は全整数を一個のゼロに潰してしまうからです．そのあとに「r を量の世界にうつしたもの」がどうあがこうが，関数というのはそれぞれ入力をただ一個の出力を対応させるものだから，結局は「整数全体がただ一個の要素に潰れる」ようなものにしかなりえない（なお,「加群準同型」の定義より，この「ただ一個の要素」というのは「ゼロ」なのですが）．これは明らかに,「何もしない」恒等射とは異なります．

要するに,「$r \circ i$ を量の世界にうつしたもの」は恒等射でなければならないのに，恒等射ではありえない，という矛盾が導かれる．したがって前提がおかしい．すなわち,「このような r は存在しない」．証明終わり，というわけです．

この証明の核心は，まさに関手の概念そのものです．合成した射は合成した射にうつらないといけないということと，恒等射は恒等射にうつらないといけないということが重要なのです．この関手という「比喩」を通じて，こういう r があっては困る，ということが明白になる．整数を全てゼロに潰したら，再びバラけさせることはできないからです．覆水盆に返らず．このようにして，タンバリンの膜を破らずにべちゃっと枠にくっつけるのは不可能であることを示すことができます．

12. 応用：ブラウワーの不動点定理

だから何だと思うかもしれませんが，この事実を用いると，非常に素晴らしいことを証明できます．有名な，ブラウワーの不動点定理というものです．ここに一つの円板があるとします．これを桶の底だと思って下さい．ここへ大きさの無視できる砂金をばら撒いて桶の底を埋め尽くします．ただの砂でもいいんですがここは景気よくいきましょう．桶の中をぐわっとかき混ぜると砂金が動きますが，そのときに少なくとも一粒，結果としてその場を動いていない砂金が必ずある，とでもいうような定理です．不思議ではないでしょうか．どんなかき混ぜ方をしても，必ず一個は最初にあった場所と同じところにいる砂金がある．先ほどの事実を使うと，これを証明できるんです．

証明は，もし「そういう点」すなわち「不動点」がなかったとしたら，ありえないことが実現できてしまう，ということを明らかにすることによってなされます．不動点が「存在しない」としましょう．つまり円板の中の任意の点 x にあった砂金が，必ず別の点に移動するとしましょう．そこで砂金が移動した先の点から砂金がさっきあった点 x へと線を真っ直ぐ引いて，その線が円周と交わった点を $F(x)$ とする．すると円板内の任意の点 x に対し必ず円周上の一点 $F(x)$ が定まります．つまりこの対応関係により関数 F が定まる．そしてこの定め方から，F は連続写像になり，しかも円周上の点は動かないことがわかります．つまり，F というのが「さっき存在を否定したばかりの関数」になるということです.「もし，f に不動点がなかったとしたら，連続な写像 F が作れるが，この F は先ほど存在を否定した r にあたるものになってしまう」．つまり，円の枠に張った膜を，破ることなく枠に押し付けるという「ありえない」関数を作れることになってしまうわけです．これは矛盾であり，よって不動点は「存在する」，という証明です．

13. 自然変換：アナロジーと，その間のアナロジー

ここまで説明してきたように，比喩・類推（アナロジー）の数学版が，関手という概念でした．さきほどのホモロジー関手もその例でしたね．さて，ステファン・バナフ（バナッハ）という，関数解析という分野の創始者のひとりでありバナッハ空間という概念でよく知られる偉大な数学者がこう言ったそうです.「よい（good）数学者はアナロジーがわかる．偉大な（great）数学者はアナロジーの間のアナロジーがわかる」と．実は，ホモロジー関手というのは色々な作り方があります．だけど，どうやって作っても本質的に同じであることが知られています．関手どうしの比較をすることは「自然変換」と言いまして，実はこれを考えようとしたことが圏論の歴史的起源です．今日は自然変換の詳しい説明をする時間がありませんが，関手と関手のあいだのアナロジーが自然変換である，と覚えておいて下さい．

とはいえ，自然変換のイメージを持ってもらうために少しだけ説明しておきましょう．関手というのは，ある圏の話を別の圏にもってくる，表現するという働きです．たとえば，物体の運動というものを，ある座標系をとって座標の変化に翻訳する，といったことも，非常に身近な例ではありますが，関手として解釈することが可能です．ところで，座標の具体的な値というものは，どのような座標系を取るかによって変わってきます．座標系を回転するだけでも，物体の座標というのはもちろんずれてくるわけですね．あるいは物体の速度といったようなものも，どういう観測者から見るかに応じてその値は変化します．しかし，それが「同じ」物体の運動であるならば，当然それらの異なった表現は関連付けられているはずです．つまり，表現＝関手の間に何らかの翻訳があってしかるべきと考えられます．実際そういう方法は存在していて，「座標変換」というのですね．座標系を回転したときに，同じ物体の座標はどうなるか，といったような計算は先ほどお話した行列を用いてシステマティックに計算できます．有名な相対性理論においては，互いに等速直線運動している観測者の座標系（「慣性系」）どうしで，空間座標のみならず時間の値までも変わってくるということで「相対性」というわけですが，みんなそれぞれ違うというだけではなく，互いに別な座標系での見え方のあいだに変換が存在するわけです．ローレンツ変換という言葉を聞いたことがある人もいるかもしれません．これも，さまざまな表現のあいだの「変換」の一例です．自然変換というのは，こうした「見方の転換」のようなものを非常に一般化して定式化したものと思ってもらえばよいです．座標を定めると，その座標についての表現ができますが，これが「関手」に一般化され，関手のあいだの変換関係が一般化されたものが自然変換なのです [2]．まあこれ以上の詳しいことは，『圏論の道案内』（西郷甲矢人・能美 十三, 2019, 技術評論社）などをお読みいただければ．

14. 矢印をめぐる冒険

あとは気楽な話をしようと思います．先ほど，グロタンディークが矢印には「何も仮定しない」と言った，という話をしました．これはすごいことで，関数である必要もない．ここに立ち戻ってみましょう．プログラムも矢印と思ってよい．脳の中で起きている「連想」というプロセスも矢印とみなせるかもしれない．新しい矢印を考えることは，新しいランドスケープを得るということです．では，数学の内外で「矢印」がどのように息づいているか，広い視野で考えてみましょう．

例えば，生態学の教科書を見ますと，矢印だらけですね．矢印の列を射と思い，その列をつなげることを合成と思えば，これは一つの圏をなしていると考えることもできるでしょう．実際に，そのような立場から色々なネットワークを理解しようとしている人もいます．大成功を収めているとはまだ言い難いですが，一つの有力な考え方です．

あるいは，代謝経路のネットワーク．これは普通はネットワーク・サイエンスと呼ばれるもので，圏論の領域とは違うと考えられていますが，数学的には近いものです．では，世の中はなぜこんなに矢印だらけなのか．数学に縁がないと思っている人の思考パターンさえ，圏論的なものにごく近いように思われます．これはなぜなのか．ジョージ・レイコフという，認知言語学を創始した人物の一人が,「数学とは何か」という問いに対して，圏論の創始者の一人であるソンダース・マックレーンの見解を踏まえた上で，こう言っています.「数学とは，人が自分の経験を理解し理路を辿るために使う構造の研究である．その構造は，概念以前の身体的経験に内在し，比喩（メタファー）を通じて抽象化される」(Lakoff, 1987)．私はこれを，非常に説得力のある見解だと思います．

15. 「てにをは」の話

例えば,「てにをは」というのは日本語を学ぶ人にとって難しい．しかし日本語のネイティヴには，「酢豚を口に入れる」や「口に酢豚を入れる」は正しくて「酢豚に口を入れる」はおかしいとわかる．なぜわかるのか．私の粗い仮説ですが,「てにをは」というのは，矢印の根本と行先を表現していると考えることができる.「を」が根本で「に」が行先ですね．

今日の講演のタイトルにある,「すべての人に矢印を」というのも，矢印をどうしたいのか言っていないのに,「に」と「を」で何となくわかる．てにをはの「て」は，何々をし「て」，という合成を表すのかもしれません.「は」は矢印にスポットライトを

2) 定義は付録を参照のこと．

当てる働きでしょうか．日本語は例えば英語に比べて非論理的という人がたまにいますが，おかしいのはそういう考え方自体ではないか．日本語を現に使える人がいるということは，そこにはきっちり論理構造があるはずで，それは圏論的な方法によって抽出されるかもしれない．

実際にそういう研究をしている人もいるようです．てにをはの話とは別ですが,「小耳に挟む」という言葉がありますね．小耳というのは何でしょうか．小さい耳ではなくて,「耳に挟む」のを「小さく」行っている．だから本来ならば「耳に小挟む」とか言うべきかもしれない.「横車を押す」というのも,「横車」っていう車はないですからね.「車を横押す」わけです．料理で「粗熱を取る」というのだって,「粗熱」というものはない.「熱を取る」という操作を「粗」く行うのです．よく考えてみると不思議なこういう言い回しの背後にある構造を,「範疇文法」というやつで理解しようという話を聞いたことがありますが (戸次, 2010)，この範疇文法というのはある種の圏論的構造として理解できて，現に圏論の専門家たちが重要な貢献をしているようです．こんなところにも圏がある．

16. 命題の間の矢印

それから，命題の間の矢印というのを考えると，これまた圏が見えてきます．論理というのを考えてみましょう．学校で習う「論理」としては，こういうものがあります.「$A \to B$」という矢印を,「A という命題から B という命題を導ける」ということと考えるとすれば，証明可能性ということですからこの矢印は高々一本です.「A から B が導ける」，そして「B から C が導ける」のであれば「A から C が導ける」というのが合成であり，恒等射は「$A \to A$」，つまり「A から A が導ける」です．推論というものには根源的に圏の構造が見出しうるわけですね．

17. 章立ての構造・基づけの関係

ところで，数学書などではしばしば,「章立ての構造」を表した図があったりする．第 i 章の知識を前提に第 j 章が書かれているとき,「第 i 章」から「第 j 章」に矢印を引いた図ですね．数学書の場合だと，ブルバキというグループやそのメンバーがやり始めたんじゃないかと思います．なかなかいいシステムですが，もちろんこの矢印は読者の理解に関して言えば「ならば」ではない．第一章を理解すれば第二章を必ず理解できるのなら素晴らしいですが，そうではない．じゃあこの矢印は何なのか．逆なんです．第二章を理解したいと思うならば第一章を理解しなければならない（もちろんすでに予備知識があるとか他の本で補うなどすれば話は別ですがここでは無視します）．第一章なしには第二章はない，という関係です.「A ならば B」ではなくて,「without A, no B」,「A でないなら B でない」という関係です．これは現象学と呼ばれる哲学界隈なら「基づけの関係」というし，時間的な順序を込めてより一般的な言葉でいえば「因果」です．

18. 因果の論理

日本語で因果というのはもともと仏教用語ですが，上に述べたような意味での因果というのはそのまま仏教の核心といえます．因と果というのは，これがなければこれがない，という関係であり，人間の苦しみには必ず原因があるのだから，逆に言えば，原因を消せば苦しみも消えるのだ．と．これが仏教の教える真理です.「これをなくせばこれがなくなる」というのは，医学や疫学にも通底する論理と言えます．

実際，この「ないとき，ない」「なくすると，なくなる」という関係性は，医学・疫学の基盤をなす「因果推論」において現代においても重要な役割を果たしています．因果推論というのは,「なにが原因なのか？」あるいはいいかえれば「何を変えると結果が変わるのか？」ということを探求する方法です．ジャイアントケルプが減少したのはなぜか，というのを探るのも，そうした種類の営みです．ウニの減少が原因だ．ではウニの減少の原因は，というふうに原因をどんどん辿っていく．たとえば疫学はもともとそういった意味での「原因」の追究をやってきた学問でしょうし，近年非常に発展している「統計的因果推論」もこういった「原因のたどり方」の体系的な方法を与えようとするものです．命題から命題への証明と似ているけれども同じではない，因果の論理というものにもっともっと注目していくべきではないでしょうか．

19. 圏論的な見方・考え方は分野横断的に役立つ

生物学や医学関係だけの話ではありません．たと

えば物理学を「因果の矢印」を軸に見ていくとどうなるか．量子論を学ぶと最近はたいがい「EPR パラドックス」という話が出てきます．アリスとボブという有名なカップルがいて，二人は随分と遠く離れていて，同じ瞬間に放たれた粒子のペアを測定するというストーリーで語られることの多い思考実験なのですが，それに対応する実際の実験において，量子論の予言はいかにも「パラドキシカル」にもかかわらず，実験結果とも整合します．しかもそれは，一見相対論に反しそうに見えても実際には反しない．「なぜ反しないのか」ということを明晰に理解するときにも，「因果とは何か」というものをしっかり考えることが大事です．この話に限らず，相対論の本質は因果のネットワークの構造として宇宙を捉えることにあり，ブラックホールがなぜ「存在しなければならない」のかといったこともこうした立場から理解できるようですが，もうかなりしゃべりすぎたのでこれぐらいにしましょう．

この講演で言いたかったことを簡単にまとめれば，圏は意外なところに見出すことができるし，圏論的なものの見方・考え方は分野横断的に役立つということです．ご清聴ありがとうございました．

謝　辞

JSPS 20H04259，17H04696 の助成を受けた．

文　献

戸次 大介 (2010). 「小耳に挟む」: 接辞繰り上げ分析と型繰り上げ分析　日本言語学会第 140 回大会予稿集, 140–145.

布山 美慕・西郷 甲矢人 (2018, March 6-7). 不定自然変換理論の構築：圏論を用いた動的な比喩理解の記述　第 8 回知識共創フォーラム

Lakoff, G. (1987). *Women, fire, and dangerous things: What categories reveal about the mind*. Chicago: University of Chicago Press.

西郷 甲矢人・能美 十三 (2017a). しゃべくり線型代数 (第 1 回)　現代数学, *50*(4), 8–17.

西郷 甲矢人・能美 十三 (2017b). しゃべくり線型代数 (第 5 回)　現代数学, *50*(8), 8–14.

付　録

A. 圏，関手，自然変換の定義

以下に圏，関手，自然変換を簡単に説明しつつ，定義を述べる．なお，本付録は西郷・能美 (2017a, 2017b) の内容を元に書かれた布山・西郷 (2018) の文章を改変して作成した．

A.1　圏の定義

圏は大まかに言えば，「対象」とその対象の間をつなぐ合成可能な「射」からなるネットワークである．圏は対象と射を含む体系で，以下の 4 つの条件を満たす．

(1)　各射 f には 2 つの対象 $dom(f)$ と $cod(f)$ とが対応づけられていて，それぞれ域（domain）と余域（codomain）と呼ばれる．$dom(f)$ と $cod(f)$ は同じ対象であっても良い．「射 f の域が X，余域が Y である」ということを

$$f : X \to Y \tag{1}$$

あるいは

$$Y \xleftarrow{f} X \tag{2}$$

と記し，こういった矢印を用いて組み上げた表記を図式と呼ぶ．

(2)　射 f, g で $cod(f) = dom(g)$ となるものがあるとき，つまり

$$Z \xleftarrow{g} Y \xleftarrow{f} X \tag{3}$$

のとき，こういった f, g に対して，これらの合成と呼ばれる射

$$Z \xleftarrow{g\circ f} X \tag{4}$$

が存在する．

(3)　次のような図式で表現される状況のとき

$$\begin{tikzcd}
W & & Y \arrow[ll, "h\circ g"'] \arrow[dl, "g"] & \\
& Z \arrow[ul, "h"] & & X \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, "g\circ f"]
\end{tikzcd} \tag{5}$$

平行四辺形の上側を通る経路と下側を通る経路が射として同じものとなるという結合律を要請する．つまり，

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{6}$$

となる．このように，域と余域を共通とする射が合成の順によらず等しいとき，その図式は可換であるという．

(4)　最後に，単位律が要請される．単位律とは，任意の X について恒等射 $1_X : X \to X$ があり，任意の射 $f : X \to Y$ に対して，次の図式が可換であることである．

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] & \\
Y & & X \arrow[ul, "1_X"'] \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "f"] \\
& Y \arrow[ul, "1_Y"] &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

つまり

$$f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f \tag{8}$$

でなければならない．対象とその恒等射は 1 対 1 で対応づけできるため，この意味では対象をその恒等射と同一視できる．言い換えれば対象を射の特殊な事例と見なすことができる．

以上をまとめると，圏は次のように定義される．

定義（圏）： 圏とは，「対象」および「射」から構成される体系で，それぞれの射には域および余域と呼ばれる対象が存在しており，合成と恒等射を備え，また結合律と単位律を満たす．

圏の例は身近に見いだせる．「集合」を対象とし「写像」を射とする圏や，「命題」を対象とし「証明」を射とする圏を考えることができる．また，交通や代謝のネットワークも一例として考えられる．

A.2　関手の定義

次に，2 つの圏の間の構造を保つ対応づけとして関手を次のように定義する．

定義（関手）： 圏 C の対象から圏 D の対象，圏 C の射から圏 D の射への対応 F が関手（functor）であるとは，以下の 3 つの条件をみたすときにいう．

（1）　C の射 $f: X \to Y$ を D の射 $F(f): F(X) \to F(Y)$ に対応させる．

（2）　C の各対象 X の恒等射 1_X について $F(1_X) = 1_{F(X)}$ が成り立つ．

（3）　C の射 f, g の合成 $f \circ g$ について $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ が成り立つ．

簡単に言うと，関手は図式あるいは圏の構造を保つ対応づけである．なお 2 つの圏の間には一般には複数の関手を考えることができることに注意．

関手を通じて，いわば一つの圏が他の圏にうつり込み，自明に異なる現象のあいだに同じさを措定することができる．

A.3　自然変換の定義

前述した通り，2 つの圏の間には一般には複数の関手を考えることができる．すると，これら複数の関手の間の「構造を保つ」変換を考えることに意味が出てくる．これが自然変換である．この自然変換の概念を導入することで，関手を対象とし，自然変換を射とする圏（「関手圏」）を考えることができるようになる．

定義（自然変換）： F，G は圏 C から圏 D への関手とする．t が F から G への自然変換（natural transformation）であるとは，以下の 2 つの条件をみたすことを言う．

（1）　t は C の各対象 X に対して，D の射 $t_X: F(X) \to G(X)$ を対応させる．（つまり自然変換は，そもそもの「身分」としては，「対象に対応付けられた射の集まり」である．）

（2）　C の各射 $f: X \to Y$ について

$t_Y \circ F(f) = G(f) \circ t_X$

が成り立つ．

自然変換をここでは $t: F \Rightarrow G$ と表すことにする．2 つめの条件については，次の図式を用いるとわかりやすいだろう．

$$\begin{array}{c|ccc} & Y & \xleftarrow{f} & X \\ \hline F & F(Y) & \xleftarrow{F(f)} & F(X) \\ \Downarrow t & \downarrow t_Y & & \downarrow t_X \\ G & G(Y) & \xleftarrow[G(f)]{} & G(X) \end{array} \tag{9}$$

右上が C での射，右下が D での射を表している．ここでは関手 F，G による f の 2 つのうつり先と自然変換 $t: F \Rightarrow G$ の関わりが描かれている．2 つめの条件は，この四角形が可換であることを要請するものである．

西郷　甲矢人

長浜バイオ大学教授．専門は数学．博士（理学）．1983 年生まれ．圏論と関係する著作に，『〈現実〉とは何か』（筑摩選書 2019，田口茂氏との共著），『圏論の道案内』（技術評論社 2019，能美十三氏との共著），『圏論の歩き方』（日本評論社 2015，圏論の歩き方委員会）等がある．現在，圏論的観点からの線型代数を主題に，『しゃべくり線型代数』（能美十三氏との共著）を『現代数学』誌（現代数学社）に連載中．