2021 理

〔 1 〕 以下の記述の $\boxed{}$ にあてはまる数を解答欄に記入しなさい。ただし，分母を有理化して答えなさい。分数は既約分数で答えなさい。

(1) 放物線 $y=x^2-6x+2$ の頂点の座標は $\boxed{ア}$ である。

(2) サイコロ1個を4回連続して投げるとき，出た目の積が偶数となる確率は $\boxed{イ}$ ，出た目の和が7未満となる確率は $\boxed{ウ}$ である。

(3) 247と133の最大公約数は $\boxed{エ}$ で，最小公倍数は $\boxed{オ}$ である。

(4) $a>0$ で $a^{2k}=5$ のとき，$\dfrac{a^{3k}-a^{-3k}}{a^k-a^{-k}}$ の値は $\boxed{カ}$ である。

(5) $16^{\log_2 3}$ の値を計算すると $\boxed{キ}$ となる。

〔 2 〕 △ABCにおいて，$AB=2\sqrt{5}$，$BC=5$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ とする。以下の記述の $\boxed{}$ にあてはまる数を解答欄に記入しなさい。ただし，分母を有理化して答えなさい。

(1) 辺ACの長さは $\boxed{ア}$ である。

(2) $\sin\angle BAC$ の値は $\boxed{イ}$ である。

(3) △ABCの面積は $\boxed{ウ}$ である。

(4) 頂点Aを通り辺BCに平行な直線と△ABCの外接円との2つの交点のうち，頂点Aと異なる点をDとするとき，線分ADの長さは $\boxed{エ}$ であり，四角形ABCDの面積は $\boxed{オ}$ である。

)

12

〔 3 〕 x の3次関数 $y=-x^3+6x^2-9x$ とそのグラフ G について，以下の記述の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を解答欄に記入しなさい。ただし，分数は既約分数で答えなさい。

(1) 3次関数 y は $x=\boxed{ア}$ で極小値 $\boxed{イ}$ をとる。

(2) 原点で G と接する直線 ℓ の方程式は $y=\boxed{ウ}$ であり，ℓ と G の共有点で原点以外の点の座標は $\boxed{エ}$ である。

(3) G と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{オ}$ である。

〔 4 〕 座標平面上に2つの円 $C_1:(x+1)^2+y^2=4$，$C_2:(x-2)^2+y^2=9$ がある。以下の記述の $\boxed{}$ にあてはまる数を解答欄に記入しなさい。ただし，分母を有理化して答えなさい。

(1) 円 C_1 と円 C_2 の2つの交点のうち y 座標が正である交点の座標は $\boxed{ア}$ である。

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

(2) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，傾きが正であるものの傾きは $\boxed{イ}$ である。その共通接線と C_1，C_2 との接点をそれぞれP，Qとしたとき，P，Q間の距離は $\boxed{ウ}$ である。

$2\sqrt{2}$

(3) 円 C_1 と円 C_2 の2つの交点および点(1，4)を通る円の中心の座標は $\boxed{エ}$，半径は $\boxed{オ}$ である。

(5，0)

$4\sqrt{2}$

2021理

2021年度　入学試験　解答用紙　数　学

志望学部(学校)	志望学科(専攻)	志望コース	受験番号	フリガナ	
	(　　　)			氏名	

〔全問必須問題〕

13/22

59%

〔1〕

ア	$(3, -7)$	イ	$\frac{15}{16}$	ウ	$\frac{5}{432}$
エ	19	オ	1729	カ	$\frac{6\sqrt{5}}{5}$ $\left(\frac{6}{5}\sqrt{5}\text{も可}\right)$
キ	81				

小計

〔2〕

ア	5	イ	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\text{も可}\right)$	ウ	10
エ	1	オ	12		

小計

〔3〕

ア	1	イ	-4	ウ	$-9x$
エ	$(6, -54)$	オ	$\frac{27}{4}$		

小計

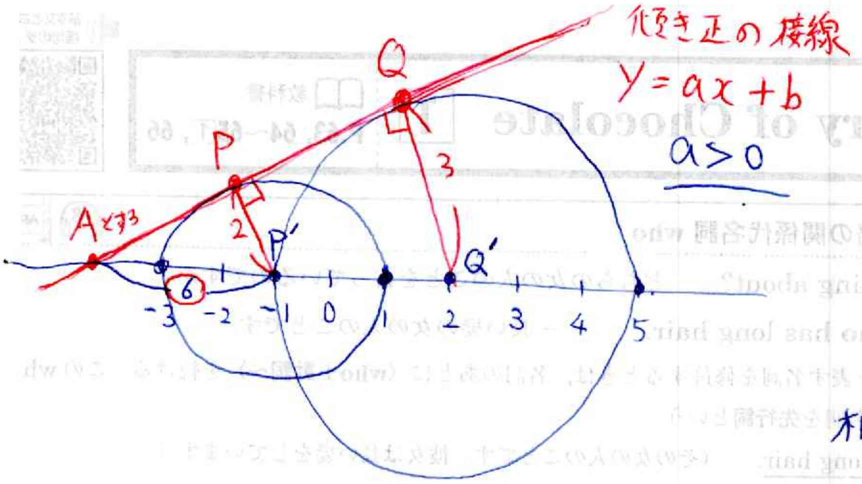
〔4〕

ア	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$	イ	$\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\text{も可}\right)$	ウ	$2\sqrt{2}$
エ	$(5, 0)$	オ	$4\sqrt{2}$		

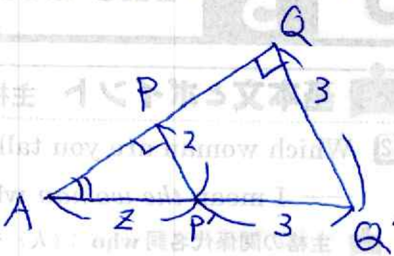
小計

合計

[4] (2) C_1, C_2をかいてみる!



$A(p, 0)$とする!



相似より $z:(z+3) = 2:3$

これをといて $z=6$

〜〜> これから $A(-7, 0)$ がわかる!

~~[illegible]~~, $y=ax+b$ に代入!

$$0=-7a+b$$

$$b=7a \quad —① $$

$y=ax+b$

$ax-y+b=0$

PP'を求める!

$$PP' = \frac{|a\times(-1)-0+b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|-a+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

PP' = 2 だったから, $\dfrac{|b-a|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \quad —②$

①を②に代入して, $\dfrac{|6a|}{\sqrt{a^2+1}} = 2$

$$|6a| = 2\sqrt{a^2+1}$$

$$36a^2 = 4(a^2+1)$$

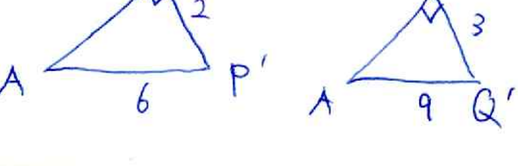
$$a^2 = \frac{1}{8} \xrightarrow{a>0より} a = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

イ

(また, $b = 7a = \dfrac{7\sqrt{2}}{4}$)

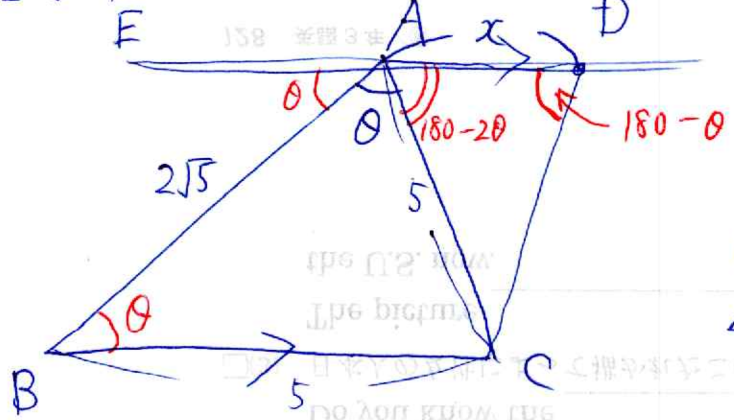
三平方の定理を使って, AP, AQを求める!

$AP = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $AQ = \sqrt{81-9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$



$$PQ = AQ - AP = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

[2](4)



$\theta = \angle BAC$ とおく

$AC = CB$ より $\angle CBA = \theta$

四角形ABCDは円に内接するから

$\angle ADC + \angle ABC = 180°$

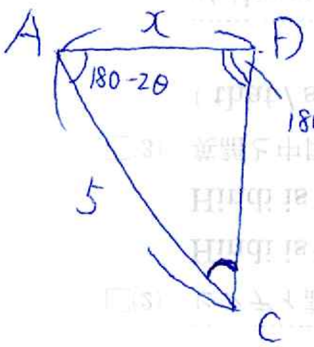
$\angle ADC = 180° - \angle ABC$

$= 180° - \theta$

$AD \parallel BC$ より $\angle BAE = \theta$

$\angle CAD = 180 - 2\theta$

$AD = x$ とおく!



$\angle DCA = 180 - \angle CAD - \angle CDA$

$= 180 - (180 - 2\theta) - (180 - \theta)$

$= 3\theta - 180$

正弦定理より

$$\frac{x}{\sin(3\theta - 180)} = \frac{5}{\sin(180 - \theta)}$$

$$x = \frac{5\sin(3\theta - 180)}{\sin(180 - \theta)} \text{ —— ①}$$

ここで, $\sin(180 - \theta) = \sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3倍角の公式

$\sin(3\theta - 180) = -\sin 3\theta = -(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ だった!

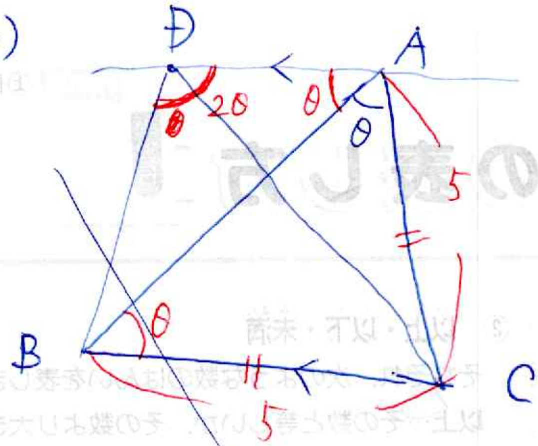
$= 4\sin^3\theta - 3\sin\theta$

$= 4 \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^3 - 3 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{4 \times 8 \times 5\sqrt{5}}{5^{3}} - \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{32\sqrt{5} - 30\sqrt{5}}{25} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$

①より $x = 5 \times \frac{2\sqrt{5}}{25} \times \frac{5}{2\sqrt{5}} = 1$

[2] (4)



$AB = 2\sqrt{5}$, $BC = AC = 5$

$\theta = \angle BAC$ とおくと

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

がわかってる！

四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle ACB + \angle ADB = 180°$

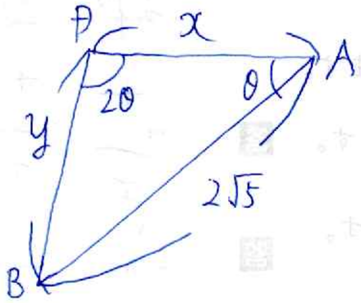
$(180 - 2\theta) + \angle ADB = 180°$

$\angle ADB = 2\theta$

そして

DA // BC より $\angle DAB = \angle ABC = \theta$

DA $= x$ とおく！ DB $= y$ とおく！



~~$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\dfrac{10}{25} = \dfrac{4}{5}$~~

正弦定理より

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sin 2\theta} = \frac{y}{\sin\theta}$$

$$\rightarrow y = \frac{2\sqrt{5}\sin\theta}{\sin 2\theta} = \frac{2\sqrt{5}\cancel{\sin\theta}}{2\cancel{\sin\theta}\cos\theta} = \frac{\sqrt{5}}{\cos\theta} = 5$$

余弦定理より

$$(2\sqrt{5})^2 = x^2 + y^2 - 2xy\boxed{\cos 2\theta} \xleftarrow{\text{代入}}$$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= \dfrac{2}{5} - 1 = -\dfrac{3}{5}$

$$20 = x^2 + 25 - 10x \times \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$20 = x^2 + 25 + 6x$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x+5)(x+1) = 0$$

$$x = -1, -5$$

[4] (3) 円の交点を求める!

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 & \text{―①} \\ (x-2)^2 + y^2 = 9 & \text{―②} \end{cases}$$

① − ② より $(x+1)^2 - (x-2)^2 = -5$

$$x^2+2x+1-(x^2-4x+4) = -5$$

$$6x - 3 = -5$$

$$6x = -2$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

これを①に代入

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}$$

$$y = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

交点 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

これらと (1, 4) を通る円の方程式を求める!

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

中心の座標 (a, b)

方程式に代入していって.

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{3}-a\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-b\right)^2 = r^2 & \text{―①} \\ \left(-\frac{1}{3}-a\right)^2 + \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}-b\right)^2 = r^2 & \text{―②} \\ (1-a)^2 + (4-b)^2 = r^2 & \text{―③} \end{cases}$$

① − ② より、$\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-b\right)^2 + \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}-b\right)^2 = 0$

$$(-2b) \times \frac{8\sqrt{2}}{3} = 0$$

$$-2b = 0$$

$$b = 0$$

これを②, ③に代入して

aを求める!

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{3}-a\right)^2 + \frac{32}{9} = r^2 \\ (1-a)^2 + 16 = r^2 \end{cases}$$

両辺ひき算して

$$\left(-\frac{1}{3}-a\right)^2 - (1-a)^2 + \frac{32}{9} - 16 = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}-2a\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{32}{9} - 16 = 0$$

$\left(-\frac{3}{4}\right)$ をかけると

$$\frac{2}{3} - 2a - \frac{8}{3} + 12 = 0$$

$$-2a + 10 = 0$$

$$a = 5$$

よって, 中心は (5, 0)