科学哲学 36-2 (2003)

超集合論
——circularity の論理の現在——

向井国昭

abstract

The Cantorian set theory survived the Russell Paradox by means of axiomatizing the theory into the standard theory named ZF. ZF has a set theoretical counterpart named FA (Foundation Axiom) to the vicious-circle principle of Russell's ramified type theory. Despite the principle, circular objects and phenomena are ubiquitous in many applications fields of ZF. For modeling such circular things directly as circular sets, Aczel replaced FA with his Anti-Foundation Axiom (AFA) to allow non-well-founded sets in a strong way. The foundation of the new set theory is explained in details.

1 はじめに

1.1 ラッセルの悪循環原理

ラッセルはホワイトヘッドとの共著プリンキピアマテマティカ序論 [4] の中で悪循環原理を次のように定義した.

> 不当な全体 (illegitimate totality) を排除するための原理は, 次のように述べられる.「或る集まりのすべて [の成員] を含むものは, 何であれ, その集まりの一員であってはならない.」あるいは逆に,「或る集まりが, 全体を持つと仮定するとその全体によってしか定義できないような要素を含むことになってしまう場合, その集まりは全体を持たない.」これを

「悪循環原理（Vicious-circle principle）」と呼ぼう．この原理によって，不当な全体の仮定に含まれる悪循環を回避することができるからである．（第二章　論理的タイプの理論，130 ページからの引用）

悪循環原理によれば，全体はその要素となることはできない．したがってこの原理をそのまま集合論に適用するならば，たとえば等式 x = { x } を満たす集合 x の存在は許されない．ラッセルは悪循環原理に基づいて分岐型理論を創りラッセルパラドックスに象徴される当時の「数学の危機」を救おうとした．しかし，理論の適用範囲の拡大のために導入した還元公理を正当化できなかったことが致命的となり，マルチンレーフ [6] にも明確に述べられているように，ラッセルの分岐型理論は結局失敗したとみなされる．

The principal problem that remained after Principia Mathematica was completed was, according to its authors, that of justifying the axiom of reducibility (or, as we would now say, the impredicative comprehension axiom). The ramified theory of types was predicative, but it was not sufficient for deriving even elementary parts of analysis. So the axiom of reducibility was added on the pragmatic ground that it was needed, although no satisfactory justification (explanation) of it could be provided. The whole point of the ramification was then lost, so that it might just as well be abolished.

ちなみに，マルチンレーフ自身は還元公理によらず，依存型（Dependent Type）を導入することにより強力な記述力を持つ新しい型理論を得た．

悪循環原理に基づいたラッセルの型理論は失敗したのであるが，一方集合論においては，ラッセルの悪循環原理に呼応するかのように，循環集合を排除するための公理（基礎の公理，FA）を持つ公理系 ZF（選択公理を含める）が標準になった．しかし循環集合を認めない ZF が標準になった大きな理由の一つは，ラッセルの影響はともかくとして，技術的なものであろう．具体的には，集合のメンバシップ関係∈を‘底なしの下降系列’を許さない——つまり well-founded な——順序関係にすると∈に関する超限帰納法が使える点であろう．もし x = { x } なる循環集合があると，もはや超限帰納法は無条件には使えない．言い替えると，ZF 集合論の世界は，確実なものから出発して一段一段と確実に構成していく，文字どおり足が地についた（well-founded な）世界であり，循環構造は出てこないように作られている．

数学の基礎付けにおいて，ラッセルは循環構造を認めなかった．しかし，数学の基礎ではなく応用に目を向けると様子はがらりと変わる．日常的には循環構造はごくふつうに観察される現象であり，したがって循環構造が実在すると考えることも自然である．すなわち「底なし（non-well-founded）の構造」が実在すると考えるのも同様に自然である．実際，オペレーティングシステムにおける停止しないプロセス，階乗などの関数の再帰的定義，「嘘つき文」などの自己参照的状況，すべてのデータベースのレコード数を格納するデータベースなど，non-well-founded な構造の例は豊富にある．

ここで注目すべき点は，このような循環構造を研究するためのメタ理論として，循環構造を否定する ZF が，他の数学理論におけると同様に使われてきたことである．しかしながら，ZF は循環構造を認めないのであるから，循環構造を持つ対象を集合として直接モデル化することはできない．循環構造の現象の研究においてこの点が不便に感じられてきた [3]．循環集合を認めれば循環構造を集合として直接モデル化でき，したがって集合論の強力な道具が使えることもわかってきた．もともと，FA は実際の数学の応用上には必要のない公理であることは早くからよく知られていた．

こうしてみると，ラッセルの型理論のアイデアは，カントールの集合論の公理化の過程で，ZF の中に吸収されたようにみえる．つまり，悪循環原理は基礎の公理に，そして「不当な全体」の排除原理は分離公理（集合の与えられた性質を満たす要素の全体は集合）に対応している．つまりラッセルが悪循環原理によって集合論の外から数学の基礎を与えようと目指していたことが，実は集合論の内部のわずかな応急手当で，ラッセルの型理論に頼らずとも済んでしまうことがわかった．実際カントールの素朴集合論は ZF という形で 20 世紀を通じて事実上の数学の共通言語として広く受け入れられている．そして，次節で紹介されるように，循環構造のモデルのためには FA よりももっと適切な公理があることもわかってきた．なおこの新しい集合論すなわち超集合論が ZF に関して相対的無矛盾であること，つまり ZF の中でモデルを持つことも Aczel [1] によって示されている．

さて，循環構造に対しては，帰納法ほどにはよく知られていないが，余帰納法（coinduction）という推論法が使えることもわかってきた．帰納法がいわばボトムアップ的な構成の原理であるのに対して，余帰納法はトップダウン的な構成の原理である．対象が最終的に‘地に足がついているかどうか’には関心がない．すなわち循環構造をも受け入れる論理である．しかも余帰納法は，後ほど説明されるように，帰納法とは互いに双対の関係にある．つまり，循環構造に対して従来の帰納法の原理を双対的に使うだけで，とくに新

しい原理を導入せずとも確実な演繹が得られる．余帰納法は，「悪循環」ならぬ「良循環」のための，意外とごく身近にあった強力な論理といえよう．

次節で超集合論，すなわち，基礎の公理をはずし代わりに循環集合を積極的に許す公理を導入した集合論，およびその上の余帰納法について，基本的な組み立てを正確かつ手短に紹介する．次節の内容の詳細は Aczel [1] の他に Barwise & Moss [3] を参照のこと．とくに後者は Aczel の超集合論をベースに，悪循環のモデルなどへの応用が詳細に展開されている．またそこには未解決の研究問題のリストも提示されている．

2 超集合論 ZFA

2.1 反基礎の公理

悪循環ならぬ良循環の論理として，超集合論 [1] (hyperset theory, non-well-founded theory) の組み立てを紹介する．標準の公理的集合論 ZF は既知とする．とくに集合とクラス（集合全体のなす領域の部分領域）は多用する．また，定式化のために圏論の初歩のことばを断りなく用いる．さて，ZF は次の公理 FA を持っている．

公理 1（FA（基礎の公理, Foundation Axiom）） 空でない集合は，それと交わらない集合を要素として含む．すなわち

$$\forall x (x \neq \phi \to (\exists y (x \cap y = \phi) \wedge (y \in x))).$$

この公理から自分自身を要素とする集合，たとえば $x \in x$ なる集合が排除される．次に，AFA (**反基礎の公理**, Anti-Foundation Axiom) を正確に述べよう．‘ノード’ からなる集合 N と直積 $N \times N$ の部分集合 E の順序対 $G = (N, E)$ を**グラフ**という．$(x, y) \in E$ のとき x を y の**親**，y を x の**子**とよぶ．G の各ノードに集合を割り当てる関数 d は，次の制約を満たすとき G の**デコレーション**とよばれる：G の各ノードに x を割り当てる集合 d(x) は x の子に割り当てる集合の全体である．すなわち，$d(x) = \{ d(y) \mid y \text{ は } x \text{ の子} \}$.

公理 2（AFA（反基礎の公理, Anti-Foundation Axiom）） 任意のグラフ G に対して，G のデコレーションが唯一存在する．

以下，超集合論とは，ZF の FA（基礎の公理）を AFA（反基礎の公理，Anti-

Foundation Axiom）に置き換えて得られる集合論のことである．超集合論を ZFA と書く：

$$\mathrm{ZFA} = \mathrm{ZF} - \mathrm{FA} + \mathrm{AFA}.$$

以下本稿の最後まで，V は ZFA の集合全体のクラスを指すとする．同じく，すべてのクラスの集まりを **C** であらわす．

公理 AFA は，実際の応用に便利な後述の**解補題**と同値である．その定式化のために，グラフの概念をクラスに拡張する．‘ノード’からなるクラス N と N × N の部分クラス E の順序対 $G = (N, E)$ を**システム**という．$(x, y) \in E$ のとき x を y の**親**，y を x の**子**とよぶ．**x の子の全体は集合を成す**と仮定する．G のデコレーションもグラフのそれと同様に定義される．グラフと異なり，システムのノードの全体は真のクラス（proper class）でも構わない．たとえば，集合全体のシステム $(V, \in)$ は‘大き過ぎる’ためグラフではない．

V の部分クラス X を**パラメータ**のクラスとする（$X \subseteq V$）．X は真のクラスであってもよい．各パラメータ $x \in X$ に対して，集合 $a_x \in V$ を割り当てる関数のことを**等式系**とよび，

$$x = a_x \ (x \in X)$$

と書く．ZFA の集合の世界では，代入操作を保証する次の定理が AFA から導かれる．

定理3（代入補題（substitution lemma）） X をパラメータのクラス，A を‘アトム’のクラスとし，互いに素とする（$X \cap A = \phi$）．$\theta = (b_x)_{x \in X}$ を集合族とする：$b_x = \theta(x) \in V$．そのとき，$\hat{\theta}: V \to V$ がユニークに存在して，任意の集合 $a \in V$ に対して次の等式を満たす：

$$\hat{\theta}(a) = \{\theta(y) \mid y \in a \cap X\} \cup \{y \mid y \in a \cap A\} \cup \{\hat{\theta}(y) \mid y \in a, y \notin X, y \notin A\}.$$

この $\hat{\theta}$ を割り当て θ から決まる**代入**とよぶ．これは，一階述語論理において，変数に対する割り当て θ を一般の（変数でない）項に対する代入操作 $\hat{\theta}$ へ自然に拡張できるという良く知られた事実の類似である．

注意 4　本稿では試みとして，V の要素はすべて純粋の集合であると仮定している．いわゆる urelement は用いない．当然パラメータもアトムも純粋の集合でコーディングしているという立場である．したがって，割り当て θ と代入 $\hat{\theta}$ は，パラメータあるいはアトムに対しては異なる結果を返すことがある．たとえば，パラメータを $\{\phi\}$ と ϕ（空集合）の二つのみとして，割り当て θ を $\{\phi\} \mapsto \phi$, $\phi \mapsto \phi$ とする．すると，θ の定義そのものより，$\theta(\{\phi\}) = \phi$ であるが，一方，代入 $\hat{\theta}$ の定義により，$\hat{\theta}(\{\phi\}) = \{\theta(\phi)\} = \{\phi\}$ であるから，$\theta(\{\phi\}) \neq \hat{\theta}(\{\phi\})$．本稿の方法では，$x \in V$ に対して，代入の適用 $\hat{\theta}(x)$ はたとえ x がパラメータであっても，そのことを忘れて x の各要素に対して再帰的に代入操作を行う．この点を除けば，パラメータを urelement として導入して使う Aczel [1] に比べて，コーディングが不要の分，理論の組み立てがすっきりするように思われる．

集合の等式系は左辺をノード，右辺の集合の要素を子ノードとみなすことにより有向グラフとなるから，これに対して前述のデコレーション公理を適用することにより，次の定理が証明される．

定理 5（解補題（solution lemma）） $X \subseteq V$ をパラメータのクラス，$a_x \in V$ $(x \in X)$ ならば，等式系 $x = a_x$ $(x \in X)$ は常に解をユニークに持つ．すなわち，$x \in X$ ならば $c_x \in V$ であるような集合族 $\sigma = (c_x)_{x \in X}$ がユニークに存在して

$$c_x = \hat{\sigma}(a_x) \quad (x \in X).$$

例 6　解補題により，方程式 $x = \{x\}$ は解をユニークに持つ．おなじく次の相互参照型の集合連立方程式も解をユニークに持つ．$x = \{a, y\}$, $y = \{b, x\}$．ここで a, b はアトムとする．

一般に，任意のクラス X について，F の値が X の部分集合に対する F の値の和として表せる―― $F(X) = \bigcup\{F(x) \mid x \in V, x \subseteq X\}$ ――とき，F を**集合連続**（set continuous）という．たとえばクラスに対してその部分集合全体のクラスを対応させるクラス関数 pow は集合連続であることは容易に確かめられる．pow はあとで紹介するように応用上重要な関手である．しかし残念ながらカントールが示したように一般に集合 a の巾集合 pow(a) の濃度は a の濃度よりも大きいので，集合の範囲では pow は不動点を持ちえない．

ところが次の定理が示すように，クラスまで広げると pow は不動点を持つ．このことがクラス関手を考える大きな利点の一つである．

さて，集合連続なクラス作用素について次の定理が成り立つ [1]. ここで最小あるいは最大とは集合またはクラスの意味においてである．

定理 7 集合連続なクラス作用素は，最大不動点と最小不動点を持つ．

定理 8 F が集合連続なクラス作用素ならば次は同値である．

1. X は F の最小不動点である．
2. X は $F(X) \subseteq X$ を満たす最小のクラスである．

この定理は**帰納法（induction）**の原理を与えている．たとえば，一階述語項の帰納的定義「(1) 変数も定数も項である，(2) 関数記号の後に引数リストとして項を並べた形も項である．(3) 以上のみが項である」により得られる項の全体集合の存在がこの定理により保証される．一方次の定理は**余帰納法（coinduction）**の原理を保証している．

定理 9 F が集合連続なクラス作用素ならば次は同値である．

1. X は F の最大不動点である．
2. X は $X \subseteq F(X)$ を満たす最大のクラスである．

例 10 A を‘アクション’の集合として $F(X) = A \times X$ なるクラス作用素 F は集合連続であり，F の最大不動点は A の要素からなる‘ストリーム’の全体集合 A^* である．すなわち $A^* = A \times A^*$ である．A を観察可能なアクションの集合として，A^* は，アクションの無限列の全体を意味しており，プロセス代数理論などにおいて基本的である．ちなみに，この F の最小不動点は明らかに空集合 ϕ である．

2.2 特殊終余代数定理（Special Final Coalgebra Theorem）

上述のように‘ストリーム’の全体はある適当なクラス作用素の不動点として定義された．この例が示すように，一般にデータ型を作用素の不動点として定義する方法は有力である．そのような方法論の基礎として，ZFA を用いる特殊終余代数定理（special final coalgebra theorem）がある．これについて説明しよう．

集合連続でかつ包含写像を保存するクラス関手 T を**標準関手** (**standard functor**) とよぶ：

$$T(\iota_{A,B}) = \iota_{T(A),T(B)}$$

ここで，$\iota_{X,Y}$ はクラス X から Y への包含写像を表す（$\iota_{X,Y} : X \hookrightarrow Y$）．

クラス関手 T と関数 f : A → T(A) の順序対 (A, f) を T の**余代数** (coalgebra) という．f をこの余代数の**構造射** (structural morphism) とよぶ．(A, f), (B, g) を T の余代数とする．関数 h : A → B が $T(h) \circ f = g \circ h$ を満たすならば，h を余代数 A から B への**仲介射** (mediating morphism) とよぶ．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ T(A) \arrow[r, "T(h)"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

関手 T の余代数とその間の仲介射の全体が圏をなすことは容易に確かめられる．この圏の始対象 (initial object)（任意の対象に対してそれへの射が唯一存在する），すなわち T の始代数 (initial algebra) と，終対象 (terminal object)（任意の対象からの射が唯一存在する），すなわち T の終余代数が重要である．

例11　クラス X に対してその部分集合の全体を pow(X) とおく：$\mathrm{pow}(X) = \{x \mid x \in V, x \subseteq X\}$．f : X → Y のとき，pow(f) : pow(X) → pow(Y) を $\mathrm{pow}(f)(x) = \{f(u) \mid u \in x\}(x \in \mathrm{pow}(X))$ で定義すると，pow は標準クラス関手である．V は pow の最大不動点であり，かつ，解補題から pow の終余代数であることがわかる．

例12　x, y をパラメータ，f を $\mathrm{dom}(f) = \{x, y\}$ なる関数で，$f(x) = \{x, y\}$，$f(y) = \{\phi, x\}$ とする．このとき，$(\{x, y\}, f)$ は pow-余代数である．この余代数は等式系 $x = \{x, y\}$，$y = \{\phi, x\}$ を表している．

ZFA の世界 V では,V 自身が pow の最大不動点でかつ pow-余代数であった．一般に，最大不動点が終余代数と一致するようなクラス関手の条件は何か？　すぐ上の例の f については，アトムのクラスが空で，パラメータのクラスが dom(f) として代入補題を適用すると,f に対して代入操作 $\hat{f}$ がユニークに決まる．そして，等式 pow(f)(u) = $\hat{f}$(u) が示すように，pow(f) の作用が代入操作として表された.pow のこの性質を一般化したのが次の定義である．

定義 13（射に関して一様（uniform on maps)）全クラスの圏 **C** の自己関手 T が射に関して一様（uniform on maps）であるとは次の条件が成り立つことである：任意のクラス A と u ∈ T(A) に対して次のようなふたつの集合 c_u ∈ V と X_u ∈ V が存在する：任意の f : A → V に対して，ある $f_u : X_u \to V$ が存在して

$$T(f)(u) = \hat{f}_u(c_u).$$

この定義のもと，Aczel は **AFA を仮定して**次の定理を証明した．

定理 14（特殊終余代数定理（The Special Final Coalgebra Theorem))
標準関手 T が射に関して一様ならば T の最大不動点 J(T) は T の終余代数である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & J(T) \arrow[d, equal] \\ T(X) \arrow[r, "T(h)"'] & T(J(T)) \end{tikzcd}$$

例15　C 上のクラス関手 pow は射に関して一様であり,明らかに V が pow の最大不動点である．よって pow の終余代数は V である．したがって，上例 12 の余代数 ({ x, y }, f) から V への関数 h がユニークに存在して

$$h(x) = pow(h)(f(x)) = \{ h(x), h(y) \}$$
$$h(y) = pow(h)(f(y)) = \{ \phi , h(x) \}.$$

これからも明らかなように，関手が pow のとき特殊終余代数定理は，等式系の右辺の集合がすべて‘フラット’な場合の解補題と同値である．

この定理の応用範囲は広い．とくにプロセス代数や状況理論のメタ理論としての応用が知られている．なお，余代数を等式系，終余代数を可能な解の値の領域，余代数から終余代数へのユニークな仲介射を解と見なすことにより，解補題自身を，一階述語論理の項の単一化理論やさらにはその無限木領域上の単一化理論などの拡張とみることができる．この意味でZFA は，項や木という伝統的なシンタックス的構造の集合論的拡張とみることができるだろう．

注意 16　$\mathbb{C}$ 上の恒等関手 id_C は標準関手であり，V が id_C の最大不動点である．さて，任意のシングルトン $\{x\}$ は，id_C の余代数として一意に構造射を持つ，しかしこの余代数から V への仲介射は無数に存在するから，V は id_C の終余代数ではない．実際，容易にわかるように id_C は射に関して一様ではない．

例 17（有限オートマトン）　Σ を‘入力記号集合’とする．$\Delta(S) = pow(\{\phi\} \cup \Sigma \times S)$，$f : S \to T$ とする．$u \in \Delta(S)$ に対して $\Delta(f)(u) = \{\phi \mid \phi \in u\} \cup \{(a, f(z)) \mid (a, z) \in u\} \in \Delta(T)$ と定義する．このとき，Δ は $\mathbb{C}$ 上の自己関手をなし，明らかに標準でかつ射に関して一様でもある．

有限オートマトン $(S, \Sigma, \delta, s, F)$　$(F \subseteq S,\ s \in S,\ \delta \subseteq S \times \Sigma \times S)$ に対して，次の等式で定義される Δ - 余代数 δ' が対応する：

$$\delta'(x) = \{\phi \mid x \in F\} \cup \{(a, y) \mid \delta(x, a, y)\} \quad (x \in S).$$

逆に Δ - 余代数 $\delta' : S \to \Delta(S)$ に対して，有限オートマトン $(S, \Sigma, \delta, s, F)$ は次で定義される．$s \in S$，$F = \{s \mid \phi \in \delta'(s)\}$，$\delta(x, a, y) \Leftrightarrow (a, y) \in \delta'(x)$．

終余代数定理は有限オートマトンの受理言語を定めるが詳細は省く [7]．

2.3 AFA を仮定しない終余代数定理

広い範囲の自己参照的な構造のモデルを集合で直接的に実現する点において，特殊終余代数定理の意義は大きい．しかし，自己参照的な集合が実在するかどうかという‘哲学的論争’にはコミットせずに，しかし機能的にはそ

の存在を実質的に認めることも可能である．それが次に述べる終余代数定理(final coalgebra theorem) である．終余代数定理は特殊終余代数定理の一般化であるが，FA も AFA も仮定せずに証明される．そして，終余代数定理の系として non-well-founded な集合の世界も終 pow- 余代数として簡単に構成できてしまう．以下この強力な終余代数定理を説明する．

定理 18（終余代数定理（Final Coalgebra Theorem）[2, 5]） 任意のクラス関手 T に対して T の終余代数 (A, f) が存在する：T の任意の余代数 (B, g) に対して次の図式が可換となるような ,(B, g) から (A, f) へ仲介射 h がユニークに存在する．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ T(B) \arrow[r, "T(h)"'] & T(A) \end{tikzcd}$$

この定理は，もはや **FA も AFA も使わずに**証明できる．そのかわり一般には，A は T の最大不動点ではない．しかし，終余代数の構造射が必然的に同型射になることは圏論で良く知られた命題である．

T ＝ pow とおくことにより，終 pow- 余代数が ZFA のモデルとなることを示すことも難しくない．つまり終余代数定理は ZFA のモデルの構成を特殊な場合として含んでいる．

この終余代数定理は，集合論におけるクラスの世界が情報の構造の研究の場としていかに適しているかを示していると考えられる．この定理の証明は，まず Aczel & Mendler [2] が set-based 関手に対して得た．ここでクラス関手 T が **set-based** であるとは，次の性質を満たすことである：各クラス A と，各 $a \in T(A)$ に対して，ある集合 $B \subseteq A$ と $b \in B$ が存在して，$a = T(\iota_{A,B})(b)$．そして最近，Adamek [5] らは，この結果を集合論における Tarski の濃度に関する古典的な補題を用いて，任意のクラス関手に対して終余代数定理を一般化した．特殊終余代数定理ではもれてしまった恒等関手も終余代数を持つ．

例19　$\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ は明らかに $\mathbb{C}$ 上の自己関手である．したがって終余代数定理によ

り，終 id_C- 余代数を持つ．実際，どんなシングルトンも id_C の終余代数である．

3 おわりに

一般的な循環構造としての余代数の研究は現在も盛んに研究されている．さいわい，その論文集や優れたチュートリアルは Web 上でアクセスできる．一例にすぎないが，Rutten [7] をあげる．

本稿では，Aczel に従い，クラス全体のなす圏という，巨大圏を使っている．巾クラス関手 pow のようにアイデアのポイントを端的に提示する点でもクラスは優れている．循環構造の基礎として本稿で解説した範囲のクラスの使用は基礎論的にもごく安全な範囲であり，きわどいことはしていないので，問題にならない．なお，クラスを使わない集合上の終余代数定理の証明もいくつか知られている．

なお，循環構造の記述の言語として，もちろん集合論以外でも可能である．たとえば，圏論あるいはマルチンレーフの型理論など他の基礎理論がメタ理論として選択されることは実際にもあるが，それは本稿の議論の範囲外である．

最後に，本稿の技術的工夫を一言述べる．特殊終余代数定理は，適用範囲は終余代数定理よりは狭いとはいえ，循環構造の実在性により強くコミットしている点で重要な定理であるように思われる．その特殊余代数定理を，簡潔かつ正確に紹介するために，urelement を用いず純粋集合の宇宙 V の中のみで述べ直した．Aczel のオリジナルな定式化と証明は，‘パラメータ’という urelement の使用のために ZF 集合の宇宙 V を拡張するなど無視のできない繁雑な操作が必要であった．本稿の定式化が Aczel のオリジナルなそれと等価であることは，自明に見えることもあり，省略した．しかし，厳密には等価性の証明が必要である．

参考文献

[1] P. Aczel. *Non-well-founded Sets*. CSLI Lecture Notes Number 14. CSLI Publications, Stanford University, 1988.

[2] P. Aczel and N. Mendler. A final coalgebra theorem. In P. H. Pitts, D. E. Rydeheard, P. Dybjer, A. M. Pitts, and A. Poigné, editors, *Category Theory and Computer Science*, number 389 in LNCS. Springer-Verlag, 1989.

[3] J. Barwise and L. Moss. *Vicious Circles*. CSLI Lecture Notes Number 60. CSLI Publications, 2001. ISBN 1-57586-008-2.

[4] B. ラッセル，A. N. ホワイトヘッド著／岡本賢吾，戸田山和久，加地大介訳. **プリンキピアマテマティカ序論**. 哲学書房，1988.

[5] J. Amadek, S. Milius and J. Velebil. On coalgebra based on classes. http://arxiv.org/list/cs/LO/0306, 2003.

[6] P. Martin-Löf. *Intuitionistic Type Theory*. Bibliopolis, 1984.

[7] J. J. M. M. Rutten. Automata and coinduction (an exercise in coalgebra). In 144, page 22. Centrum voor Wiskunde en Informarica (CWI), ISSN 1386-369X, 31 1998.