

# 楕円・双曲線の媒介変数表示の3通りの方法

レベル: ★入試対策 ◆二次曲線

更新日時 2021/10/15

二次曲線（円・楕円・双曲線）の媒介変数表示について、3通りの方法を紹介します。

- 三角関数を使う方法
- ワイエルシュトラス置換に関連する方法
- 双曲線関数を使う方法

## 目次

- [円の媒介変数表示](#)
- [楕円の媒介変数表示](#)
- [双曲線の媒介変数表示](#)
- [ワイエルシュトラス置換](#)

## 円の媒介変数表示

円： $x^2 + y^2 = r^2$  の媒介変数表示として、

1.  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$
2.  $x = r \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = r \cdot \frac{2t}{1+t^2}$
3.  $x = \frac{r}{\cosh \phi}, y = r \tanh \phi$

がある。

1は三角関数を用いる方法です。 $\theta$  が  $0 \leq \theta < 2\pi$  を動くとき、円周上の点全体を動きます。単位円による三角関数の定義と合わせて理解しておきましょう。→[三角関数の3通りの定義とメリットデメリット](#)

2については,

- $(1 - t^2)^2 + (2t)^2 = (1 + t^2)^2$  が成立することから,  $\left(r \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, r \cdot \frac{2t}{1 + t^2}\right)$  が円周上の点であることがわかります。
- 余談ですが, この式はピタゴラス数を求める式と似ています。→[ピタゴラス数の求め方とその証明](#)
- $t$  が実数全体を動くとき, 円周上の  $(-r, 0)$  以外の点全体を動きます。
- 2は, 1に対して  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  と置換することで得られます。この置換については, 記事の後半で補足します。

3は, 双曲線関数  $\cosh \phi = \frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}$ ,  $\sinh \phi = \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}$ ,  $\tanh \phi = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi}$  を用いた媒介変数

表示です。→[双曲線関数\(sinh,cosh,tanh\)の意味・性質・楽しい話題まとめ](#)

$\phi$  が実数全体を動くとき, 円の  $x > 0$  の部分を動きます。



## 楕円の媒介変数表示

円の媒介変数表示が理解できていれば, 楕円もほとんど同じです。

楕円:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の媒介変数表示として,

高校数学の  
美しい物語

$$2. x = a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = b \cdot \frac{2t}{1+t^2}$$

$$3. x = \frac{a}{\cosh \phi}, y = b \tanh \phi$$

がある。

- 1については、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  と  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  を比較して、 $\frac{x}{a} = \cos \theta, \frac{y}{b} = \sin \theta$  とおけばうまくいきそう、とわかります。この媒介変数表示は、例えば、[離心率の意味と関連する計算](#)で活躍します。
- 2は、1に対して  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  と置換すると得られます。 $t$  が実数全体を動くとき、楕円上の  $(-a, 0)$  以外の点全体を動きます。

## 双曲線の媒介変数表示

双曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  の媒介変数表示として、

$$1. x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta$$

$$2. x = a \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2}, y = b \cdot \frac{2t}{1-t^2}$$

$$3. x = a \cosh \phi, y = b \sinh \phi$$

がある。

- 1については、 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  と  $1 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2$  を比較して、 $\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \theta}, \frac{y}{b} = \tan \theta$  とおけばうまくいきそう、とわかります。
- 2は、1に対して  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  と置換すると得られます。 $t$  が  $\pm 1$  を除く実数全体を動くとき、双曲線上の  $(-a, 0)$  以外の点全体を動きます。
- 双曲線の1と楕円の3は似ています。双曲線の3と楕円の1は似ています！



## ワイエルシュトラス置換

途中で出てきた  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  という置換をワイエルシュトラス置換と言います。

- ワイエルシュトラス置換は、三角関数の有理式の積分で大活躍します。→[三角関数の有理式の積分](#)
- $t = \tan \frac{\theta}{2}$  とおくと、 $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  になります。
- $\theta$  が  $-\pi < \theta < \pi$  の範囲を動くとき、 $t$  は実数全体を動きます。

双曲線関数による媒介変数表示は使いませんが、三角関数による媒介変数表示と並べて観察すると楽しいです。

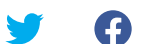
この記事の編集者



マスオ

高校数学の美しい物語の管理人。「わかりやすいこと」と「ごまかさないこと」の両立を意識している。著書に『高校数学の美しい物語』『超ディープな算数の教科書』。記事の誤植やわかりにくい等のご指摘はお気軽にメールください！

レベル: ★入試対策 ◆二次曲線



フィードバック

## 【問題集】

サイトと連携した問題集が150問になりました。検算テクニックも紹介しています。

<https://t.co/20HWSzx2D3>

— 高校数学の美しい物語 (@mathelegant) June 11, 2023

## 関連記事



# 媒介変数表示

高校数学の  
美しい物語

媒介変数表示



# 双曲線

高校数学の  
美しい物語

双曲線の漸近線の簡単な求め方と証明



# 媒介変数表示

高校数学の  
美しい物語

媒介変数表示された有名な曲線7つ



# 楕円の反射定理

高校数学の  
美しい物語

楕円の反射定理とその証明



# 極座標表示

高校数学の  
美しい物語

二次曲線（楕円，放物線，双曲線）の極座標表示



# 楕円

高校数学の  
美しい物語

楕円の面積公式の3通りの導出

## 人気記事



## 平均値・中央値・最頻値

高校数学の  
美しい物語

平均値, 中央値, 最頻値の求め方といくつかの例



## 共分散

高校数学の  
美しい物語

共分散の意味と簡単な求め方



## 部分分数分解

高校数学の  
美しい物語

部分分数分解の3通りの方法



## 1/6公式

高校数学の  
美しい物語

放物線と直線で囲まれた面積を高速で求める1/6公式



## リーマン予想

高校数学の  
美しい物語

リーマン予想の意味, 素数分布との関係



## 判別式

高校数学の  
美しい物語

二次方程式の判別式についての知識まとめ

### この記事に関連するQ&A

1  $a^2+b^2=c^2$ ならば $a,b$ のうち少なくとも1つは3の倍数であることの背理法を使う証明についてです。  $a,b$ が両方3の倍

2  $x + y + z = 10, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ という条件を満たす $x,y,z$ は全部で何組かとい

> 高校数学の美しい物語 > 楕円・双曲線の媒介変数表示の3通りの方法

## 高校数学の美しい物語

[基本的な記事](#) [入試対策の記事](#) [最難関大学受験対策の記事](#) [数学オリンピック対策の記事](#)  
[マニアックな記事](#) [大学数学レベルの記事](#) [大学数学レベルの記事その2](#)

## 高校生から味わう理論物理入門

[力学](#) [波動](#) [熱力学](#) [電磁気学](#) [原子](#) [相対性理論](#) [高校と大学の架け橋](#)

## 高校英文法の羅針盤

[文法](#) [表現](#) [文型と動詞](#) [時制](#) [分詞](#)

## Q&A掲示板 アンサーズ

[トップ](#) [質問のカテゴリ](#) [質問の一覧](#) [質問する](#)

## 運営者情報

[会社概要](#) [編集者](#) [利用規約](#) [プライバシーポリシー](#) [情報セキュリティ基本方針](#) [広告掲載基準](#)  
[特定商取引法に基づく表記](#) [推奨動作環境](#) [サイトマップ](#) [お問い合わせ](#)

**Gakken** Group

©2019-2023 Bend Inc.