論　文

多重ゼータ関数と高次元ランダムウォーク

Multiple Zeta Functions and High-Dimensional Random Walks

青山 崇洋

Takahiro Aoyama

1　はじめに

本論説では筆者がふとした拍子に思いつき，取り組み始めた数学について紹介する．他者の文献では見ることのない筆者独自の表現により支配された文章を多々含んではいるが，読者には所詮「対岸の火事」といった気持ちで目を通して頂ければ幸いである．また本論説を執筆するにあたり，京都産業大学の難波隆弥氏には日頃から積み重なる御恩に加える形で多くの助言を賜った．同氏のお力添えにより多くの読者にとって「対岸の火事」が「他山の石」となることを期待しつつ本題に入ることとする．

d を自然数とする．$\mathbb{R}^d$ 上の測度 μ に対し，その Fourier 変換は

$$\widehat{\mu}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\mu(\mathrm{d}x), \qquad t \in \mathbb{R}^d$$

で定められる．特に μ が確率分布であるとき，$\widehat{\mu}$ は**特性関数**と呼ばれ，確率論や確率過程論において非常に重要な役割を果たす．一般にある多変数関数 f が与えられたとき，それがある確率分布の特性関数となるか否かについて判定することは困難である．その方法としては測度の半正値性を確認するための Bochner の定理等いくつか存在するが，実際には対応する測度が確率分布となることがほぼ自明な関数しか取り扱われていない．特に多次元の無限個の点に重みをもつ離散分布に対応する関数については，ただ単に分布を定義する，もしくはその非無限分解可能性までを示した結果はいくつか存在するが，それ以外の有用な情報は殆ど得られていない．

そこで筆者らは [9][14] において扱われた 1 次元ゼータ分布に着目しそれらを多次元に拡張することで，無限個の点に重みをもつ多次元離散型確率分布のクラスを導入した（cf. [1][2][3]）．さらにこのクラスに属する確率分布が無限分解可能性を備えるための十分条件も見出した．多重ゼータ分布の具体的な確率論への応用については，[6][7][8] を参照頂きたい．

また，上記の分布のクラスと無限分解可能性の関わりを通じて，Lévy 過程等の重要な確率過程を極

[筆者紹介]

あおやま　たかひろ．岡山理科大学理学部応用数学科．1979 年生．2008 年 3 月慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻後期博士課程修了．博士（理学）．東京理科大学理工学部助教，立命館大学理工学部助教，佐賀大学文化教育学部准教授，同教育学部准教授，岡山大学大学院環境生命科学研究科准教授，同学術研究院准教授を経て，2021 年より岡山理科大学理学部応用数学科教授．専門は解析学．特に解析的整数論を用いた高次元測度論と確率論への応用に関する研究に従事．著作「統計学リテラシー」（培風館），「統計学とデータ解析の基礎」(学術図書出版社)．日本数学会．

限過程として捉える**極限定理**への応用も可能になると期待される．確率論における極限定理は連続と離散の世界をスケール極限の考え方により繋ぐ主張の総称であり，大数の法則や中心極限定理，大偏差原理等がその典型例としてよく研究されている．Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ に代表される連続空間における確率過程は，離散空間に値をとる**ランダムウォーク**のスケール極限として理解されることが屡々ある．そこで本論説では，筆者の最近の共同研究 [4] に従い 2 種類の多重ゼータ関数を紹介し，高次元格子上を運動する様々なランダムウォークの確率分布との関係について述べる．

2 Riemann のゼータ関数とゼータ分布

本節ではまず Riemann のゼータ関数と対応する確率分布について紹介する．Riemann ゼータ関数に関連する基礎事項は [16] 等を参照頂きたい．

定義 2.1（Riemann ゼータ関数，Euler 積）． $s \in \mathbb{C}$ とする．Riemann ゼータ関数は以下の級数または Euler 積で定義される．

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, \qquad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ただし，$\prod_p$ は素数全体にわたる積とする．

Riemann ゼータ関数は $1 < \sigma := \mathrm{Re}\, s$ で絶対収束し，その領域において Euler 積表示から零点をもたない．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は全 s 平面の有理型関数に解析接続されるが，本論説では絶対収束領域 $\sigma > 1$ のみを扱う．

絶対収束領域 $\sigma > 1$ において，Riemann ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が古くから知られている．

定義 2.2（Riemann ゼータ分布）． $n \in \mathbb{N}$，$\sigma > 1$ に対して，確率変数 $\mathcal{X}_\sigma$ が以下の分布に従うとき Riemann ゼータ確率変数，その分布を Riemann ゼータ分布という．

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{X}_\sigma = -\log n\right) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}.$$

また，その特性関数 $f_\sigma(t)$，$t \in \mathbb{R}$ は以下の様にゼータ関数を正規化した形で与えられる．

$$f_\sigma(t) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathcal{X}_\sigma}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\log n} \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)} = \frac{\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)}{\zeta(\sigma)}.$$

この Riemann ゼータ分布は最も古い文献として [11] に記されている．また，[9] には以下の命題がある．

命題 2.3． $\mathbb{R}$ 上の Riemann ゼータ分布は複合ポアソンであり，その Lévy 測度 N_σ は有限かつ次のように書ける．

$$N_\sigma(\mathrm{d}x) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} p^{-r\sigma} \delta_{r\log p}(\mathrm{d}x). \tag{2.1}$$

[14] では Riemann ゼータ関数の代わりに Dirichlet 級数 $D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} c(n)n^{-s}$，ただし，$c(n)$ は非負で恒等的に 0 ではない，について扱っている．さらに $c(n)$ が完全乗法的，すなわち任意の

$m, n \in \mathbb{N}$ に対して $c(mn) = c(m)c(n)$ であるとき，$g_\sigma(t) := D(\sigma + \mathrm{i}t)/D(\sigma)$ は無限分解可能な特性関数になることを示し，その Lévy 測度も具体的に求めている．また [10] において代表的なゼータ関数の一つである Hurwitz ゼータ関数を用いて表現されるの Hurwitz ゼータ分布が導入され，同じくそれらの無限分解可能性に関しても示されている．

3 多次元多重新谷ゼータ関数と高次元ランダムウォーク

本節では Barnes 多重ゼータ関数等の級数により定義される多重ゼータ関数の一般化として，多次元多重新谷ゼータ関数を導入し，その $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークとの関係について述べる．多重ゼータ関数に関連する基礎事項は [15] 等を参照頂きたい．

定義 3.1（多次元多重新谷ゼータ関数）. $m, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}^d$，$(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ とする．また，$j = 1, 2, \dots, r$, $\ell = 1, 2, \dots, m$ に対して，$u_j > 0$，$c_\ell \in \mathbb{R}^d$ とし，さらに $\lambda_{\ell j} \geq 0$ をある j_0 に対して $\lambda_{\ell j_0} \neq 0$ となるものとする．$\mathbb{C}$-値関数 $\theta(n_1, n_2, \dots, n_r)$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|\theta(n_1, n_2, \dots, n_r)| = O\big((n_1 + n_2 + \cdots + n_r)^\varepsilon\big)$ を満たすとする．このとき，**d 次元多重新谷ゼータ関数** $Z_S(s)$ を次の式で定義する．

$$Z_S(s) := \sum_{n_1, n_2, \dots, n_r = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, n_2, \dots, n_r)}{\prod_{\ell=1}^m \big(\sum_{j=1}^r \lambda_{\ell j}(n_j + u_j)\big)^{\langle c_\ell, s\rangle}}. \tag{3.1}$$

ただし，$s = \sigma + \mathrm{i}t$, $\sigma, t \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\langle c_\ell, s\rangle = \langle c_\ell, \sigma\rangle_{\mathbb{R}^d} + \mathrm{i}\langle c_\ell, t\rangle_{\mathbb{R}^d}$ である．

注意 3.2. ここで「d 次元」とは変数 s の空間 $\mathbb{C}^d$ の次元に由来する．もし $\lambda_{\ell j} > 0$ ならば領域 $\min\{\mathrm{Re}\,\langle c_\ell, s\rangle \,|\, \ell = 1, 2, \dots, m\} > r/m$ 上で $Z_S(s)$ は絶対収束する．

以下，簡単のため関数 θ は定符号であると仮定する．また，$c_\ell = (c_{\ell 1}, c_{\ell 2}, \dots, c_{\ell d})$ と表記する．d 次元多重新谷ゼータ関数を用いて，新しい d 次元離散確率分布のクラスを導入する．

定義 3.3（$\mathbb{Z}^d$ 上の多次元新谷ゼータ分布）. $\sigma \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ とする．$\mathbb{Z}^d$-値確率変数 $\mathcal{Y}_\sigma$ が **d 次元新谷ゼータ分布**に従うとは，任意の $k = 1, 2, \dots, d$ に対して $-\sum_{\ell=1}^m c_{\ell k} \log\big(\sum_{j=1}^r \lambda_{\ell j}(n_j + u_j)\big) \in \mathbb{Z}$ であって，$\mathcal{Y}_\sigma$ の確率分布が

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\Bigg(\mathcal{Y}_\sigma = \Bigg(-\sum_{\ell=1}^m c_{\ell 1} \log\Big(\sum_{j=1}^r \lambda_{\ell j}(n_j + u_j)\Big), \dots, -\sum_{\ell=1}^m c_{\ell d} \log\Big(\sum_{j=1}^r \lambda_{\ell j}(n_j + u_j)\Big)\Bigg)\Bigg)\\ &= \frac{\theta(n_1, n_2, \dots, n_r)}{Z_S(\sigma)} \prod_{\ell=1}^m \Big(\sum_{j=1}^r \lambda_{\ell j}(n_j + u_j)\Big)^{-\langle c_\ell, \sigma\rangle}, \qquad (n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \end{aligned} \tag{3.2}$$

で与えられるときをいう．

なお $\lambda_{\ell j} > 0$ ならば，σ を特に (3.1) の絶対収束域 $\min\{\langle c_\ell, \sigma\rangle \,|\, \ell = 1, 2, \dots, m\} > r/m$ から選ぶことができる．さて，d 次元新谷ゼータ確率変数 $\mathcal{Y}_\sigma$ の特性関数は次のような表示をもつ．これは直接計算により容易に示される．

定理 3.4. d 次元新谷ゼータ確率変数 $\mathcal{Y}_\sigma$ の特性関数 f_σ は

$$f_\sigma(t) = \frac{Z_S(\sigma + \mathrm{i}t)}{Z_S(\sigma)}, \qquad t \in \mathbb{R}^d$$

で与えられる.

d 次元正方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークは最も基本的な離散確率モデルであり，その推移の様子ごとに多数の定式化が知られている．今回はランダムウォークの 1 歩に対応する $\mathbb{Z}^d$-値確率変数のとりうる値が高々有限個である場合のみを扱い，定義 3.3 で定めた多次元新谷ゼータ分布との関連について述べる.

定理 3.5. $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}^d$ とする．$\mathbb{Z}^d$-値確率変数 $\mathcal{X}$ の確率分布が

$$\mathbf{P}\big(\mathcal{X} = a_\ell\big) = \beta_\ell, \qquad \ell = 1, 2, \ldots, m \tag{3.3}$$

で与えられているとする．ただし，$\beta_\ell \geq 0$, $\ell = 1, 2, \ldots, m$ かつ $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m = 1$ とする．このとき，$\mathcal{X}$ は d 次元新谷ゼータ確率変数である.

証明. $r = m$ とし，$j_1, j_2, \ldots, j_m$ を相異なる 2 以上の自然数とする．$\ell, j = 1, 2, \ldots, m$ に対して，$c_\ell = -(\log j_\ell)^{-1} a_\ell$, $\lambda_{\ell j} = \delta_{\ell j}$, $u_j = 1$ とおき，勝手な $\sigma \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ をとって，

$$\begin{aligned}&\theta(n_1, n_2, \ldots, n_m)\\ &:= \begin{cases} \beta_\ell \mathrm{e}^{-\langle a_\ell, \sigma\rangle} & (n_1, \ldots, n_\ell, \ldots, n_m) = (0, \ldots, j_\ell - 1, \ldots, 0),\ \ell = 1, 2, \ldots, m \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}\end{aligned}$$

とおいて定義される d 次元新谷ゼータ確率変数 $\mathcal{Y}_\sigma$ の特性関数を計算すると

$$\begin{aligned} Z_S(s) &= \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, n_2, \ldots, n_m)}{\prod_{\ell=1}^m \big(\sum_{j=1}^m \lambda_{\ell j}(n_j + u_j)\big)^{\langle c_\ell, s\rangle}} \\ &= \sum_{\ell=1}^m \frac{\beta_\ell \mathrm{e}^{-\langle a_\ell, \sigma\rangle}}{j_\ell^{\langle c_\ell, s\rangle}} = \sum_{\ell=1}^m \frac{\beta_\ell \mathrm{e}^{-\langle a_\ell, \sigma\rangle}}{\mathrm{e}^{-\langle a_\ell, s\rangle}} = \sum_{\ell=1}^m \beta_\ell \mathrm{e}^{\langle a_\ell, s - \sigma\rangle}, \qquad s \in \mathbb{C}^d \end{aligned}$$

であることと $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m = 1$ より，

$$f_\sigma(t) = \frac{Z_S(\sigma + \mathrm{i}t)}{Z_S(\sigma)} = \frac{\sum_{\ell=1}^m \beta_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a_\ell, t\rangle}}{\sum_{\ell=1}^m \beta_\ell} = \sum_{\ell=1}^m \beta_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle a_\ell, t\rangle} = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, \mathcal{X}\rangle}], \qquad t \in \mathbb{R}^d$$

となる. □

一般に，確率分布の**畳込**は対応する確率変数の独立なコピーの和（ランダムウォーク）が従う確率分布を与える．従って，定理 3.5 より

> 1 歩の推移を表す確率変数の確率分布が (3.3) の形で与えられるようなランダムウォークはすべて d 次元新谷ゼータ分布の畳込により表される

ことがわかる．そこで次の定義をおく.

定義 3.6 (d 次元多重新谷ゼータ関数により生成されるランダムウォーク). $\sigma \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ とする．$\mathbb{Z}^d$-値確率変数列 $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^\infty$ が ***d* 次元多重新谷ゼータ関数により生成されるランダムウォーク**であるとは，$\mathcal{W}_0 = 0$ a.s. であって，増分 $\mathcal{W}_n - \mathcal{W}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ が独立かつ d 次元新谷ゼータ分布に従うときをいう．つまり，$\mathcal{W}_1$ は d 次元新谷ゼータ分布に従い，その特性関数を $f_\sigma(t)$ と書くとき，

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, \mathcal{W}_n\rangle}] = f_\sigma(t)^n, \qquad t \in \mathbb{R}^d,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

となる.

定理 3.4 で扱ったように，多次元新谷ゼータ分布の特性関数は多次元多重新谷ゼータ関数の正規化として簡単に計算される一方で，それらが無限分解可能であるか否かを判定することは一般に容易でない．これは d 次元新谷ゼータ分布がなす分布のクラスが $\mathbb{Z}^d$ 上のすべての離散型確率分布のクラスの中でかなり広いということを表している．そこで次節にて，対応する確率分布が無限分解可能であるかの判定が容易であるような多重ゼータ関数のサブクラスを導入する．

4 多変数 Euler 積と高次元ランダムウォーク

本節では有限 Euler 積で定められる多重ゼータ関数を導入し，その正規化として表される関数がいつ $\mathbb{Z}^d$ 上の無限分解可能分布の特性関数となるかについて考察する．さらにそれらの $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークとの関係について述べる．

定義 4.1（d 次元多変数有限 Euler 積）． $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}^d$ とする．$\ell = 1, 2, \dots, m$ に対して，$-1 \leq \alpha_\ell \leq 1$ を満たす実数 α_ℓ 及び $a_\ell \in \mathbb{Z}^d$ をとる．このとき，**d 次元多変数有限 Euler 積** $Z_{fE}(s)$ を次の式で定義する．

$$Z_{fE}(s) := \prod_{\ell=1}^{m} \left(1 - \alpha_\ell \mathrm{e}^{-\langle a_\ell, s\rangle}\right)^{-1}. \tag{4.1}$$

注意 4.2. Euler 積 (4.1) は領域 $\min\{\mathrm{Re}\langle a_\ell, s\rangle \,|\, 1 \leq \ell \leq m\} > 0$ において絶対収束する．

注意 4.3. Riemann ゼータ関数が級数表示のみならず Euler 積表示をもつように，d 次元多変数有限 Euler 積も級数表示をもつことが確認できる．実際，(4.1) は

$$Z_{fE}(s) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m = 0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1}{\mathrm{e}^{\langle a_1, s\rangle}}\right)^{k_1} \left(\frac{\alpha_2}{\mathrm{e}^{\langle a_2, s\rangle}}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{\alpha_m}{\mathrm{e}^{\langle a_m, s\rangle}}\right)^{k_m}$$

と表せ，右辺の無限級数は領域 $\min\{\mathrm{Re}\langle a_\ell, s\rangle \,|\, 1 \leq \ell \leq m\} > 0$ において絶対収束する．特に，$Z_{fE}(s)$ は d 次元多重新谷ゼータ関数でもある．

さて，$\sigma \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ に対し，

$$f_\sigma(t) = \frac{Z_{fE}(\sigma + \mathrm{i}t)}{Z_{fE}(\sigma)}, \qquad t \in \mathbb{R}^d \tag{4.2}$$

とおく．このとき，定理 3.4 と同様に $f_\sigma(t)$ がある確率分布の特性関数を表すことが期待される．以下の定理は多変数有限 Euler 積のパラメータ α_ℓ や a_ℓ が適当な条件を満たすとき，$f_\sigma(t)$ の表示，そして対応する確率分布の性質が具体的にわかることを主張するものである．

定理 4.4. $a_\ell \in \mathbb{Z}^d$, $\ell = 1, 2, \dots, m$ は $\mathbb{R}^d$ 上 1 次独立であると仮定する．また $\sigma \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ をとる．(4.2) で定義される関数 $f_\sigma(t)$ がある $\mathbb{Z}^d$ 上の確率分布の特性関数となるための必要十分条件は $\alpha_\ell \geq 0$, $\ell = 1, 2, \dots, m$ となることである．さらにこのとき，$f_\sigma(t)$ は

$$N_\sigma(\mathrm{d}x) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{1}{r} \alpha_\ell^r \mathrm{e}^{-r\langle a_\ell, \sigma\rangle} \delta_{ra_\ell}(\mathrm{d}x) \tag{4.3}$$

で与えられる $\mathbb{Z}^d$ 上の有限 Lévy 測度をもつ複合 Poisson 分布の特性関数である．ただし，$\delta_{ra_\ell}(\mathrm{d}x)$ は点 $ra_\ell \in \mathbb{Z}^d$ におけるデルタ測度を表す．

証明の概略.　もし $\alpha_\ell < 0$ なる ℓ が存在すると仮定すると，$|f_\sigma(t_0)| > 1$ となるような $t_0 \in \mathbb{R}^d$ が存在する，つまり f_σ が特性関数とならないことが解析的整数論における **Kronecker の第一近似定理**に **Baker の定理**を応用することにより証明される（詳細は [4] を参照）.

次に $\alpha_\ell \geq 0$ を仮定する．すると，$t \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\log f_\sigma(t) = \log \frac{Z_{fE}(\sigma + \mathrm{i}t)}{Z_{fE}(\sigma)} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{1}{r} \alpha_\ell^r \mathrm{e}^{-r\langle a_\ell, \sigma\rangle} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\langle a_\ell, t\rangle} - 1) = \int_{\mathbb{Z}^d} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t, x\rangle} - 1)\, N_\sigma(\mathrm{d}x)$$

となる．さらに $v := \min\{\mathrm{Re}\langle a_\ell, s\rangle \,|\, 1 \leq \ell \leq m\} > 0$ とすると

$$N_\sigma(\mathbb{Z}^d) = \int_{\mathbb{Z}^d} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{1}{r} \alpha_\ell^r \mathrm{e}^{-r\langle a_\ell, \sigma\rangle} \delta_{ra_\ell}(\mathrm{d}x) \leq m \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \mathrm{e}^{-rv} \leq m \sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-rv} = \frac{m}{\mathrm{e}^v - 1} < +\infty$$

であるので，Lévy–Khintchine の公式より f_σ は無限分解可能（特に複合 Poisson）であり，(4.3) は $\mathbb{Z}^d$ 上の有限 Lévy 測度であることがわかる．　□

一部の読者は多変数有限 Euler 積 (4.1) の定義において，なぜ各因子の中身に e のべきが現れるのか不思議に感じたかもしれない．その理由は，対応する Lévy 測度の質点が 1 次独立なベクトル $a_\ell \in \mathbb{Z}^d$, $\ell = 1, 2, \ldots, m$ の自然数倍の点に集中するように補正するためであり，本質的なことではない．しかしながら以下で見るように，多変数有限 Euler 積と $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークとの関係を述べる際に重要である．いま，$\mathbb{Z}^d$-値確率変数 $\mathcal{X}$ が従う確率分布を

$$\mathbf{P}(\mathcal{X} = -ra_\ell) := \frac{1}{N_\sigma(\mathbb{Z}^d)} \frac{\alpha_\ell^r \mathrm{e}^{-r\langle a_\ell, \sigma\rangle}}{r}, \qquad r \in \mathbb{N},\ \ell = 1, 2, \ldots, m \tag{4.4}$$

と定める．$\mathcal{X}$ の独立なコピーを $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ とし，$\mathcal{X}$ と独立なパラメータ $\lambda = N_\sigma(\mathbb{Z}^d)$ の Poisson 分布に従う確率変数を $\mathcal{K}_\sigma$ と表す．すると f_σ は $\mathcal{Y}_\sigma = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \cdots + \mathcal{X}_{\mathcal{K}_\sigma}$ で定義される $\mathbb{Z}^d$-値複合 Poisson 確率変数 $\mathcal{Y}_\sigma$ の特性関数であることがわかる．そこで次の定義をおく．

定義 4.5（**d 次元多変数有限 Euler 積により生成されるランダムウォーク**）．　$a_\ell \in \mathbb{Z}^d$, $\ell = 1, 2, \ldots, m$ は $\mathbb{R}^d$ 上 1 次独立であるとする．また，$\sigma \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\alpha_\ell \geq 0$, $\ell = 1, 2, \ldots, m$ とする．$\mathbb{Z}^d$-値確率変数列 $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ が **d 次元多変数有限 Euler 積により生成されるランダムウォーク**であるとは，$\mathcal{W}_0 = 0$ a.s. であって，増分 $\mathcal{W}_n - \mathcal{W}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ が独立かつその特性関数が (4.2) で与えられるときをいう．つまり，定理 4.4 と合わせて

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, \mathcal{W}_n\rangle}] = \exp\Bigl(n \int_{\mathbb{Z}^d} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t, x\rangle} - 1)\, N_\sigma(\mathrm{d}x)\Bigr), \qquad t \in \mathbb{R}^d,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

となる．

Lévy 測度は跳躍の頻度を測る指標であるので，少々粗い表現であるが (4.5) で与えられるランダムウォーク $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ の推移の様子は N_σ が本質的に支配しているといえる．$\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は定義より $m\,(\leq d)$ 個の 1 次独立な方向 a_ℓ ごとに無限個の重みをもつ Lévy 測度 N_σ により特徴づけられる複合 Poisson 分布の畳込として表現されるので，複数の独立な方向への無限遠の跳躍を許容する確率モデルを多変数有限 Euler 積という具体的な数式により定式化したことになる．筆者の知る限り，ランダムウォークにこのような視点を取り込んだ研究は他に類を見ない．また，一般に無限分解可能分布，すなわちある Lévy 過程の時刻 1 における周辺分布は複合 Poisson 分布の弱収束極限で表されることが知られている．よって定理 4.4 と定義 4.5 より，ランダムウォーク $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ の長時間挙動を詳しく調べることで，Lévy 過程の極限定理の理解へ向けた新しい研究の発展が期待できる．

5 具体例

本節では，1 次元正方格子 $\mathbb{Z}$，2 次元正方格子 $\mathbb{Z}^2$ 上の多重ゼータ関数の例を与え，それぞれの格子上を運動する典型的なランダムウォークが実際に多重ゼータ関数で生成されることを見る．

例 5.1（1 次元格子 $\mathbb{Z}$ の場合）． $m = r = 2$ とし，$\lambda_{\ell j} = \delta_{\ell j}$, $u_j = 1$, $\ell, j = 1, 2$ とする．ただし，$\delta_{\ell j}$ は Kronecker のデルタである．また，$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 及び定符号の $\mathbb{C}$-値関数 $\theta(n_1, n_2)$ をとり，

$$Z_S(s) := \sum_{n_1, n_2 = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, n_2)}{(n_1+1)^{c_1 s}(n_2+1)^{c_2 s}}, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{5.1}$$

で定義される 1 次元多重新谷ゼータ関数を考える．j_1, j_2 を相異なる 2 以上の自然数とし，$c_1 = -(\log j_1)^{-1}$, $c_2 = (\log j_2)^{-1}$ とおく．また

$$\theta(n_1, n_2) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\sigma} & (n_1, n_2) = (j_1 - 1, 0) \text{のとき} \\ \beta \mathrm{e}^{\sigma} & (n_1, n_2) = (0, j_2 - 1) \text{のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とおく．ただし，$\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, $\sigma > 1$ である．すると

$$Z_S(s) = \frac{\alpha \mathrm{e}^{-\sigma}}{j_1^{-(\log j_1)^{-1} s}} + \frac{\beta \mathrm{e}^{\sigma}}{j_2^{(\log j_2)^{-1} s}} = \alpha \mathrm{e}^{s-\sigma} + \beta \mathrm{e}^{-s+\sigma}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

を得る．ゆえに (5.1) に対応する 1 次元新谷ゼータ分布の特性関数 $f_\sigma(t)$ は

$$f_\sigma(t) = \frac{Z_S(\sigma + \mathrm{i}t)}{Z_S(\sigma)} = \frac{\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{\alpha + \beta} = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

と計算される．この右辺は確率分布が $\mathbf{P}(\mathcal{Y} = 1) = \alpha$，$\mathbf{P}(\mathcal{Y} = -1) = \beta$ で与えられる $\mathbb{Z}$-値確率変数 $\mathcal{Y}$ の特性関数に一致する．特に，$\alpha = \beta = 1/2$ ならば，この 1 次元多重新谷ゼータ関数が生成するランダムウォークは $\mathbb{Z}$ 上の原点を出発点とする単純ランダムウォークに他ならない．なお，確率変数 $\mathcal{Y}$ は 2 点分布であるので無限分解可能ではない．このことから，新谷ゼータ分布は無限分解可能でない確率分布をも例として含む巨大なクラスを形成していることが理解できる．

例 5.2（2 次元格子 $\mathbb{Z}^2$ の場合）． 次で与えられる 2 次元多重新谷ゼータ関数 $Z_S(s)$ 及び多変数有限 Euler 積 $Z_E(s)$ を考えよう．

$$Z_S(s) := \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, n_2, n_3, n_4)}{\prod_{\ell=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{4} \lambda_{\ell j}(n_j + u_j) \right)^{\langle c_\ell, s \rangle}}, \qquad s \in \mathbb{C}^2, \tag{5.2}$$

$$Z_{fE}(s) := (1 - \alpha_1 \mathrm{e}^{-\langle a_1, s \rangle})^{-1}(1 - \alpha_2 \mathrm{e}^{-\langle a_2, s \rangle})^{-1}, \qquad s \in \mathbb{C}^2. \tag{5.3}$$

ただし，$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ とする．

(ア) はじめに (5.2) において，j_1, j_2, j_3, j_4 を相異なる 2 以上の自然数として $\lambda_{\ell j} = \delta_{\ell j}$, $u_j = 1$, $\ell, j = 1, 2, 3, 4$ とおく．さらに $c_1 = (-(\log j_1)^{-1}, 0)$, $c_2 = ((\log j_2)^{-1}, 0)$, $c_3 = (0, -(\log j_3)^{-1})$,

$c_4=(0,(\log j_4)^{-1})$ ととり，

$$\theta(n_1,n_2,n_3,n_4)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\sigma_1} & (n_1,n_2,n_3,n_4)=(j_1-1,0,0,0)\text{のとき}\\ \alpha\mathrm{e}^{\sigma_1} & (n_1,n_2,n_3,n_4)=(0,j_2-1,0,0)\text{のとき}\\ \beta\mathrm{e}^{-\sigma_2} & (n_1,n_2,n_3,n_4)=(0,0,j_3-1,0)\text{のとき}\\ \beta'\mathrm{e}^{\sigma_2} & (n_1,n_2,n_3,n_4)=(0,0,0,j_4-1)\text{のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$$

と定める．ただし，$\alpha,\alpha',\beta,\beta'\geq 0$, $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'=1$, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}Z_S(s)&=\frac{\alpha\mathrm{e}^{-\sigma_1}}{j_1^{\langle c_1,s\rangle}}+\frac{\alpha'\mathrm{e}^{\sigma_1}}{j_2^{\langle c_2,s\rangle}}+\frac{\beta\mathrm{e}^{-\sigma_2}}{j_3^{\langle c_3,s\rangle}}+\frac{\beta'\mathrm{e}^{\sigma_2}}{j_4^{\langle c_4,s\rangle}}\\&=\alpha\mathrm{e}^{\langle(1,0),s\rangle-\sigma_1}+\alpha'\mathrm{e}^{\langle(-1,0),s\rangle+\sigma_1}+\beta\mathrm{e}^{\langle(0,1),s\rangle-\sigma_2}+\beta'\mathrm{e}^{\langle(0,-1),s\rangle-\sigma_2}\end{aligned}$$

となる．$s=\sigma+\mathrm{i}t=(\sigma_1,\sigma_2)+\mathrm{i}(t_1,t_2)$, $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ と表記すれば，

$$f_\sigma(t)=\frac{Z_S(\sigma+\mathrm{i}t)}{Z_S(\sigma)}=\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}+\alpha'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1}+\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2}+\beta'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_2}$$

を得る．この右辺は確率分布が

$$\mathbf{P}(\mathcal{Y}=(1,0))=\alpha,\quad \mathbf{P}(\mathcal{Y}=(-1,0))=\alpha',\quad \mathbf{P}(\mathcal{Y}=(0,1))=\beta,\quad \mathbf{P}(\mathcal{Y}=(0,-1))=\beta'$$

で与えられる $\mathbb{Z}^2$-値確率変数 $\mathcal{Y}$ の特性関数に一致する．特に $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=1/4$ のときは，2 次元多重新谷ゼータ関数 $Z_S(s)$ が生成するランダムウォークは $\mathbb{Z}^2$ 上の原点出発の単純ランダムウォークである．

(イ) 次に (5.3) において，$\alpha_1=\alpha_2=1/3$, $a_1=(1,0)$, $a_2=(0,1)$ とおく．このとき，

$$Z_{fE}(s)=\frac{3}{3-\mathrm{e}^{\langle(1,0),s\rangle}}\frac{3}{3-\mathrm{e}^{\langle(0,1),s\rangle}},\qquad s\in\mathbb{C}^2$$

となる．$\sigma=(\log 2,\log 2)\in\mathbb{R}^2$ ととれば，定理 4.4 より正規化された関数

$$f_\sigma(s)=\frac{Z_{fE}(\sigma+\mathrm{i}t)}{Z_{fE}(\sigma)}=\frac{1}{(3-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1})(3-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2})},\qquad t\in\mathbb{R}^2 \tag{5.4}$$

はある複合 Poisson 分布の特性関数であり，その $\mathbb{Z}^d$ 上の有限 Lévy 測度 N_σ は

$$N_\sigma(\mathrm{d}x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\Big(\frac{2}{3}\Big)^r\big(\delta_{(r,0)}(\mathrm{d}x)+\delta_{(0,r)}(\mathrm{d}x)\big)$$

で与えられることがわかる．いま，$N_\sigma(\mathbb{Z}^2)=2\log 3$ であるので，(4.4) より

$$\mathbf{P}\big(\mathcal{X}=(r,0)\big)=\mathbf{P}\big(\mathcal{X}=(0,r)\big)=\frac{1}{r}\Big(\frac{2}{3}\Big)^r\frac{1}{2\log 3},\qquad r\in\mathbb{N}$$

となる確率分布に従う確率変数 $\mathcal{X}$ の独立なコピーを $\{\mathcal{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$ とするとき，特性関数 (5.4) に対応する確率変数は $\mathcal{Y}=\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2+\cdots+\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$ となる複合 Poisson 分布である．ただし，$\mathcal{K}$ はパラメータ $2\log 3$ の Poisson 分布である．ゆえに，多変数有限 Euler 積 (5.3) が生成する $\mathbb{Z}^2$ 上のランダムウォーク $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathcal{W}_0=0$ a.s. かつ

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,\mathcal{W}_n\rangle}]=\big(f_\sigma(t)\big)^n=\frac{1}{(3-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1})^n(3-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_2})^n},\qquad n\in\mathbb{N},\ t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$$

で与えられる．

6 おわりに

本論説では，多重新谷ゼータ関数及び多変数有限 Euler 積を導入し，$\mathbb{Z}^d$ 上に有限個の点，さらには無限個の点に重みをもつ高次元離散型分布及びそれらの畳込により得られる $\mathbb{Z}^d$-値ランダムウォークを多重ゼータ関数及び多変数有限 Euler 積を用いて表記した．特に定理 4.4 では，多変数有限 Euler 積に対応する特性関数が無限分解可能となるための簡易な十分条件があることを見た．今回，限られた紙数のため，確率論の基本的な言葉遣い，ゼータ分布に関する先行研究については十分に説明できなかったことが悔やまれる．しかしながら，本論説の読者の中に筆者の数学に少しでも将来性を見出し，新規参入を志す方が現れるならば望外の喜びである．

最後に補足を 3 点述べて，本論説を閉じたい．

(1) 今回は簡単のため d 次元正方格子上の多重ゼータ関数のみについて紹介したが，三角格子や六角格子，カゴメ格子等を含む周期的格子のクラスとして知られる**結晶格子**上でも同様に多重ゼータ関数を定義することができる．ただし，多重ゼータ関数が結晶格子の $\mathbb{R}^d$ 内への周期的実現に依存すること，結晶格子は平行移動作用による商をとると一般には複雑な内部構造が現れること等の理由により，ランダムウォークとの関係を正確に述べるためには特別な注意を要する．詳細は筆者の難波隆弥氏との共著論文 [4] を参照されたい．また，結晶格子上の最近接ランダムウォーク及びその幾何学的な性質については [12][13] 等が基本的な文献である．

(2) 多次元多重新谷ゼータ関数や多変数有限 Euler 積が生成するランダムウォークの極限定理を考えるとき，対応する特性関数の長時間挙動を調べる必要がある．有限個の点に重みをもつ高次元離散型確率分布の畳込の長時間挙動については例えば [17][18] 等でよく研究されている．しかし，一般に無限個の点に重みをもつ高次元離散型確率分布の畳込は大変複雑であり，その長時間挙動を調べることは難しい問題である．筆者は難波隆弥氏及び筆者の研究室の学生であった大田紘己氏との共同研究 [5] において，無限個の点に重みをもつ離散型確率分布の例として Riemann ゼータ分布を扱い，その畳込に関する局所極限定理を示している．多次元多重新谷ゼータ関数や多変数有限 Euler 積が生成するランダムウォークは Riemann ゼータ分布の畳込の高次元への一般化と考えられるので，それらの長時間挙動を詳しく調べることは [5] に続く良い問題である．

(3) 4 節の結びで触れたように，無限分解可能分布は一般に複合 Poisson 分布の弱収束極限で表される．Lévy 過程は時刻 1 における周辺分布が無限分解可能となるようとなるような確率過程として特徴づけられるので，定義 4.5 のランダムウォークの適切なスケール極限は Lévy 過程として理解されることになる．よって本研究は「多変数有限 Euler 積の正規化により定まる特性関数 (4.5) はどのような無限分解可能分布の特性関数へ収束するか」という問題へと繋がる．一般に，与えられた Lévy 過程へ収束するようなランダムウォークを構成することは Brown 運動の場合を除いて困難である．逆にランダムウォーク及び時空スケールを適切に与えてある Lévy 過程へ収束させるような例も Brown 運動の場合を除けば殆ど知られていない．一方で，解析的整数論では Riemann ゼータ関数の**普遍性**という概念が知られている．これは非常に粗く言えば，Riemann ゼータ関数はあらゆる正則関数を近似する，という主張である．当然あらゆるゼータ関数が普遍性を備えているわけではない．しかし，ゼータ関数は良い関数をよく近似する，と信じることにすると，ゼータ関数から生成された複合 Poisson 分布の畳込に対応する特性関数 (4.5) は無限分解可能分布の特性関数という良い関数をよく近似する，という筆者の予想は幾分か真実味を帯びてくる．その答えを

見る日は果たして訪れるか見当もつかないが，具体例の構成から始めて地道に取り組んでみたい．

謝　辞

日本応用数理学会誌「応用数理」編集委員会をはじめとする関係者の皆様には，本論説を掲載する機会を頂戴しましたこと，また査読，修正等様々なお力添えを賜りましたことを心より御礼申し上げます．

参考文献

[1] T. Aoyama and T. Nakamura. Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view. *Mathematische Nachrichten*, Vol. 286, pp. 1691–1700, 2013.

[2] T. Aoyama and T. Nakamura. Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$. *Tokyo Journal of Mathematics*, Vol. 36, pp. 521–538, 2013.

[3] T. Aoyama and T. Nakamura. Multidimensional polynomial Euler products and infinitely divisible distributions on $\mathbb{R}^d$. *arXiv*, arXiv:1204.4041, 2013.

[4] T. Aoyama and R. Namba. Random walks on crystal lattices and multiple zeta functions. *arXiv*, arXiv:2203.02949, 2022.

[5] T. Aoyama, R. Namba, and K. Ota. Asymptotic behaviors of convolution powers of the Riemann zeta distribution. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. 63, pp. 1–12, 2023.

[6] T. Aoyama and N. Shimizu. Some results of multidimensional discrete probability measures represented by Euler products. *JSIAM Letters*, Vol. 6, pp. 45–48, 2014.

[7] T. Aoyama and K. Yoshikawa. Some examples of multidimensional Shintani zeta distributions. *JSIAM Letters*, Vol. 6, pp.41–44, 2014.

[8] T. Aoyama and K. Yoshikawa. Multinomial distributions in Shintani zeta class. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 32, pp. 33–50, 2015.

[9] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Translated from the Russian by Kai Lai Chung)*. Addison-Wesley, 1968.

[10] C. Hu, A. Iksanov, G. Lin, and O. Zakusylo. The Hurwitz zeta distribution. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, Vol. 48, pp. 1–6, 2006.

[11] A. Ya. Khinchine. *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian)*. Moscow and Leningrad, 1938.

[12] M. Kotani and T. Sunada. Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 353, pp. 1–20, 2000.

[13] M. Kotani and T. Sunada. Albanese maps and off diagonal long time asymptotics for the heat kernel. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 209, pp. 633–670, 2000.

[14] G. Lin and C. Hu. The Riemann zeta distribution. *Bernoulli*, Vol. 7, pp. 817–828, 2001.

[15] 松本耕二．多重ゼータ関数の解析的理論とその応用．数学，Vol. 50，No. 1，pp. 24–45，日本数学会，2007.

[16] 日本数学会編．岩波数学辞典　第 4 版．岩波書店，2007.

[17] E. Randles and L. Saloff-Coste. On the convolution powers of complex functions on $\mathbb{Z}$. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Vol. 21, pp. 754–798, 2015.

[18] E. Randles and L. Saloff-Coste. Convolution powers of complex functions on $\mathbb{Z}^d$. *Revista Matemática Iberoamericana*, Vol. 33, pp. 1045–1121, 2017.

[**Abstract**]

It is quite challenging to ascertain whether a certain multivariable function is a characteristic function when its corresponding measure is not trivial to be or not to be a probability measure on $\mathbb{R}^d$. In this article, we formulate multi-zeta function-based high-dimensional discrete probability distributions with infinitely many mass points on $\mathbb{Z}^d$ and $\mathbb{Z}^d$-valued random walks given by those convolutions in terms of multiple zeta functions. In particular, a necessary and sufficient condition is provided for some polynomial finite Euler products to yield characteristic functions.

Keyword: multiple zeta function, discrete probability distribution, characteristic function, random walk

キーワード：多重ゼータ関数, 離散型確率分布, 特性関数, ランダムウォーク