り一般に K を任意の体とするとき、K-有理点は点の各々の座標値が体 K に属するような点と定義される。同様に、特別な場合である K-整数点は、各座標値が数体 K 内の代数的整数の環の元である点と定義される。

代数多様体上の有理点や K-有理点

スキームの有理点s

スキーム論の用語では、スキーム X の K-有理点は、まさに射 $\operatorname{Spec} K \to X$ のことである。K-有理点の集合を通常、$X(K)$ で表す。

体 k 上に定義されたスキームや多様体 X に対し、剰余体 $k(x)$ が k に同型であれば、点 $x \in X$ も**有理点**と呼ばれる。

関連項目

参考文献

2018/11/3 21:39

Xがf(x[1], x[2], ..., x[n])=0となる既約な代数方程式でかける時、
代数多様体Xのk有理点とは、
{(x[1], x[2], ..., x[n])∈k^{n}|f(x[1], x[2], ..., x[n])=0}
となる点全体のことです。
これをスキームで書き表すと、
X=Spec(k[x[1], x[2], ..., x[n]]/(f(x[1], x[2], ..., x[n])))
とおくと、
Hom(Spec(k), X)
={φ:Spec(k)→X|φはk上のスキームの射}
をk有理点と言います。
Hom(Spec(k), X)
={φ:Spec(k)→X|φはk上のスキームの射}
={φ*:k[x[1], x[2], ..., x[n]]/(f(x[1], x[2], ..., x[n]))→k| φ*はk代数準同型写像}
={(x[1], x[2], ..., x[n])∈k^{n}|f(x[1], x[2], ..., x[n])=0}

る。例えば、$k = \mathbf{R}$ であれば、素イデアル $(x^2 + 1)$ は $\mathbf{C}$ と同型な剰余体を持つ。

性質

- 体 k 上の局所有限型（英語版）のスキームに対し、点 x が閉であることと、$k(x)$ が基礎体 k の有限次拡大であることとは同値である。これはヒルベルトの零点定理の幾何学的定式化である。上記の例では、1種類目の点は閉で、剰余体 k を持ち、2種類目の点は生成点（英語版）で、k 上超越次数 1 である。
- K をある体として、射 $\mathrm{Spec}(K) \to X$ は、点 $x \in X$ と体拡大 $K/k(x)$ を与えることと同じである。
- 体上の有限型のスキームのクルル次元は、生成点の剰余体の超越次数に等しい。

脚注

1. ^ 直感的には、点の剰余体は局所不変量であ