分岐理論と有限平坦Galois表現

服部 新
北海道大学理学研究院
shin-h@math.sci.hokudai.ac.jp

平成19年12月3,5,6日

概 要

局所体上の古典的な分岐理論が剰余体非完全の完備離散付値体に一般化できることがAbbes-齋藤によって発見された. また, 彼らの手法を用いると, 完備離散付値環の分岐だけでなく, より特異性の悪い環 (完備離散付値環上有限平坦完全交差な環) の分岐の度合いも計ることができる. 有限平坦群スキームのaffine環はそのような環の一種であり, このあたらしい分岐理論によって, これまで1次元の場合でしか証明できなかった有限平坦群スキームの諸性質を高次元化することが可能になった. 本稿ではAbbes-齋藤による分岐理論と, その有限平坦群スキームへの応用について概説する. [1]

1 古典理論の復習

1.1 完備離散付値体の拡大

Kを完備離散付値体, $\mathcal{O}_K$をKの整数環, m_Kを極大イデアル, $\pi = \pi_K$を素元とする. 本稿では剰余体$k := \mathcal{O}_K/m_K$の標数は$p > 0$であるとする. Kの離散付値v_Kを, $v_K(\pi) = 1$とnormalizeして考える. v_Kの, Kの分離閉包K^{sep}上への拡張も同じ記号で表す. さらに, 実数$0 < \theta < 1$をfixし, $x \in K^{\mathrm{sep}}$に対し$|x| := \theta^{v_K(x)}$とおく.

L/Kを完備離散付値体の有限次分離拡大とする. $e(L/K) = v_L(\pi)$をL/Kの分岐指数, Lの剰余体lのk上の拡大次数$f(L/K) = [l : k]$をL/Kの剰余次数と呼ぶ. このとき, 整数環$\mathcal{O}_L$は有限生成$\mathcal{O}_K$加群で, Lにおける$\mathcal{O}_K$の整閉包と一致し, 等式

$$[L : K] = e(L/K)f(L/K)$$

が成立するのだった ([16, Chapter II]).

定義 1.1

- 完備離散付値体の有限次分離拡大L/Kが**不分岐** (unramified) であるとは, $e(L/K) = 1$かつl/kが分離拡大であること.
- L/Kが**完全分岐** (totally ramified) であるとは, $l = k$であること.
- L/Kが**従順分岐** (または**馴分岐**, tamely ramified) であるとは, $p \nmid e(L/K)$かつl/kが分離拡大であることを言う. そうでないとき, L/Kは**野性分岐** (または**暴分岐**, wildly ramified) であると言われる.

[1] 文中, 敬称は省略させて頂きました.

- L/K が**獰猛分岐** (fiercely ramified) であるとは, l/k が分離拡大ではないこと.

さらに, L/K を Galois 拡大とし, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とする. $s \in G$ の L への作用は $\mathcal{O}_L$ や m_L への作用を引き起こす. そこで, 整数 $i \geq 0$ に対し,

$$\begin{aligned} G_i &:= \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_L/m_L^{i+1})) \\ &= \{s \in G \mid \text{全ての } x \in \mathcal{O}_L \text{に対し}, s(x) \equiv x \bmod m_L^{i+1}\} \end{aligned}$$

とおき, これを L/K の**第 i 下付き分岐群** (i-th lower numbering ramification group) と呼ぶ. 特に $G_0 = \{s \in G \mid \text{全ての } x \in \mathcal{O}_L \text{に対し}, s(x) \equiv x \bmod m_L\}$ のことを**惰性群** (inertia subgroup) と言うのだった. これらは G の減少フィルトレーションを定めている. つまり

$$G = G_{-1} \supseteq G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \cdots.$$

さらに, 十分大きい i で $G_i = 0$ となることもすぐに分かる. また, G_0 の p-Sylow 部分群は L/K の**野性分岐群** (または**暴分岐群**, wild inertia subgroup) と呼ばれる. K の絶対 Galois 群 $G_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ の部分群

$$\begin{aligned} I_K &:= \{s \in G_K \mid \text{任意の有限次 Galois 拡大 } L/K \text{ に対し}, s|_L \in \mathrm{Gal}(L/K)_0\} \\ &:= \mathrm{Ker}(G_K \to \mathrm{Aut}_k(k^{\mathrm{sep}})), \\ P_K &:= \{s \in G_K \mid \text{任意の有限次 Galois 拡大 } L/K \text{ に対し}, s|_L \in (\mathrm{Gal}(L/K)_0 \text{ の } p\text{-Sylow 部分群})\} \end{aligned}$$

も, それぞれ惰性群, 野性分岐群と言う. 全射 $G_K \to \mathrm{Gal}(L/K)$ によるこれらの像が L/K の惰性群, 野性分岐群である.

下付き分岐群の重要な性質として, **部分と両立する**ことが挙げられる. つまり, $H = \mathrm{Gal}(L/K') \subseteq G = \mathrm{Gal}(L/K)$ に対し, 定義から

$$H_i = H \cap G_i$$

が成り立つことが分かる.

1.2 下付き分岐群の構造定理

1.3 整数環の単生成性

以上の準備のもとで, 剰余体 k が完全な場合の分岐理論を [16, Chapter IV] に沿った形で復習しておく. k が完全体の場合, 次の事実が分岐群の解析を著しく容易にしていた.

補題 1.2 K の剰余体 k が完全であるとする. L/K を完備離散付値体の有限次分離拡大とすると, 整数環 $\mathcal{O}_L$ は $\mathcal{O}_K$ 上単生成. つまり, ある $x \in \mathcal{O}_L$ が存在して $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$.

証明. l/k は分離的なので, $l = k(\bar{x})$ となる $\bar{x} \in l$ が存在. $\bar{x}$ の $\mathcal{O}_L$ への lift x を取ると,

$$\{\pi_L^i x^j \mid 0 \leq i < e(L/K),\ 0 \leq j < f(L/K)\}$$

が $\mathcal{O}_L$ の $\mathcal{O}_K$ 上の基底になっていることがすぐ分かる. そこで, $R(x)$ が L の素元となるような monic な多項式 $R(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ が存在するように $\bar{x}$ の lift x を取り換えられれば補題が示せる.

$\bar{R}(X) \in k[X]$ を $\bar{x}$ の k 上の最小多項式とし, $R(X)$ をその $\mathcal{O}_K[X]$ への monic な lift とする. 定義から $R(x) \in m_L$ であり, $v_L(R(x)) = 1$ のときは x が条件を満たす. $v_L(R(x)) \geq 2$ であるとすると, 任意の $h \in m_L \setminus m_L^2$ に対して $x + h$ (これも $\bar{x}$ の lift である) が条件を満たす. 実際,

$$R(x+h) = R(x) + hR'(x) + h^2 b,\ b \in \mathcal{O}_L$$

と書けるが, l/k が分離的であることから $R'(\bar{x}) \neq 0$ であり, $R'(x)$ は $\mathcal{O}_L$ の可逆元だと分かる. 従って $v_L(R(x+h)) = 1$.

□

注 1.3 k が完全でない場合, 補題 1.2 には反例がある. 例えば, $k = \mathbb{F}_p(x, y)$ ($\mathbb{F}_p$ 上の二変数有理関数体) は完全体ではないが,

$$K := \mathbb{F}_p(x,y)((T))\ (k \text{ 上の Laurent 巾級数体})$$
$$L := K[X,Y]/(X^p - TX - x, Y^p - TY - y)$$

と置くと L/K は完備離散付値体の有限次分離拡大であり, 次数より L の剰余体は $l = \mathbb{F}_p(x^{1/p}, y^{1/p})$ となる. 拡大 l/k は単拡大ではないことが示せるので, $\mathcal{O}_L$ も $\mathcal{O}_K$ 上単生成ではありえない.

□

さらに L/K を Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ を Galois 群とする. k が完全であるとし, $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$ とする. このとき, 定義から,

$$s \in G_i \Longleftrightarrow v_L(s(x) - x) \geq i + 1$$

が成り立つ. そこで関数 $i_G : G \to \mathbb{Z}$ を

$$i_G(s) := v_L(s(x) - x)$$

で定義する. 容易に分かるように, この関数 i_G は生成元 x の取り方によらない類関数になっている.

1.4 分岐群の構造定理

以下しばらく, K の剰余体 k は完全であると仮定する. L/K を完備離散付値体の有限次 Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とする. 体の拡大 l/k は分離的だから, L の中での K の最大不分岐拡大 M の剰余体は l であるが, 定義から分岐群 $G_0, G_1, \cdots$ は L/K で考えても L/M で考えても変わらないことが分かる. 従って (k が完全の仮定のもとでは), 分岐群を調べる際に L/K は完全分岐であるとしてもよい. この場合, $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$ である.

L の単数群 $U_L = \mathcal{O}_L^\times$ の減少フィルトレーションを

$$U_L^0 := \mathcal{O}_L^\times,\ U_L^i := 1 + m_L^i\ (i \geq 1)$$

で定義する. これらは次のような次数商を持つ.

- $i = 0$ のとき,

$$U_L^0/U_L^1 \cong l^\times$$
$$a \mapsto a \bmod m_L$$

- $i \geq 1$ のとき,

$$U_L^i/U_L^{i+1} \cong m_L^i/m_L^{i+1}$$
$$a \bmod U_L^{i+1} \mapsto a-1 \bmod m_L^{i+1}$$

さらに m_L^i の生成元 t を選ぶごとに, 次のような同型を得られる.

$$m_L^i/m_L^{i+1} \cong l$$
$$\lambda \cdot t \bmod m_L^{i+1} \leftarrow\!\shortmid \lambda$$

剰余体完全の場合, このフィルトレーションと下付き分岐群を比べることによって分岐群の構造を調べる事ができた. 実際, $i \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} s \in G \text{ が } G_i \text{ に入る} &\iff v_L(s(\pi_L) - \pi_L) \geq i+1 \\ &\iff s(\pi_L)/\pi_L \in U_L^i \end{aligned}$$

であるので, 単射準同型

$$\begin{aligned} \theta_i : G_i/G_{i+1} &\to U_L^i/U_L^{i+1} \\ s &\mapsto s(\pi_L)/\pi_L \end{aligned}$$

を得る (θ_i が素元 π_L の取り方によらないことも容易にわかる). ここから次のことが従う.

- 各次数商 G_i/G_{i+1} は Abel 群.
- G_0/G_1 は位数が p と素な巡回群.
- $i \geq 1$ のときは, G_i/G_{i+1} は p で消える Abel 群.
- G_1 は p 群. 従って, G_1 は G の野性分岐群と一致し, G_0 や G_1 は可解群.

1.5 上付き分岐群

これまでは K の有限次 Galois 拡大の Galois 群の分岐群を調べて来たが, K の絶対 Galois 群 $G_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ にも同様の分岐群を定義したい. つまり, G_K の正規部分群 $G_{K,i}$ で, 任意の有限次 Galois 拡大 L/K に対し,

$$\mathrm{Gal}(L/K) \text{ の第 } i \text{ 分岐群} = \mathrm{Im}(G_{K,i} \subseteq G_K \to \mathrm{Gal}(L/K))$$

となるようなものを構成したい. そのためには $G_i \subseteq G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の構成が**商と両立**していなければならない. すなわち, K'/K を L/K に含まれる Galois 拡大, $H = \mathrm{Gal}(L/K')$ とするとき,

$$(G/H)_i = \mathrm{Im}(G_i \subseteq G \to G/H) = G_iH/H$$

が成立しなければならない. ところが下付き分岐群はこれを満たさないので, G_K に高次分岐群を定義するためには $\mathrm{Gal}(L/K)$ における別の分岐フィルトレーションを考える必要がある. これが上付き分岐群と呼ばれる分岐群であり, K の剰余体が完全である場合, 古典的には Herbrand 関数 $\varphi_{L/K}, \psi_{L/K}$ を使って下付き分岐群の番号を付け変えることで定義されていた.

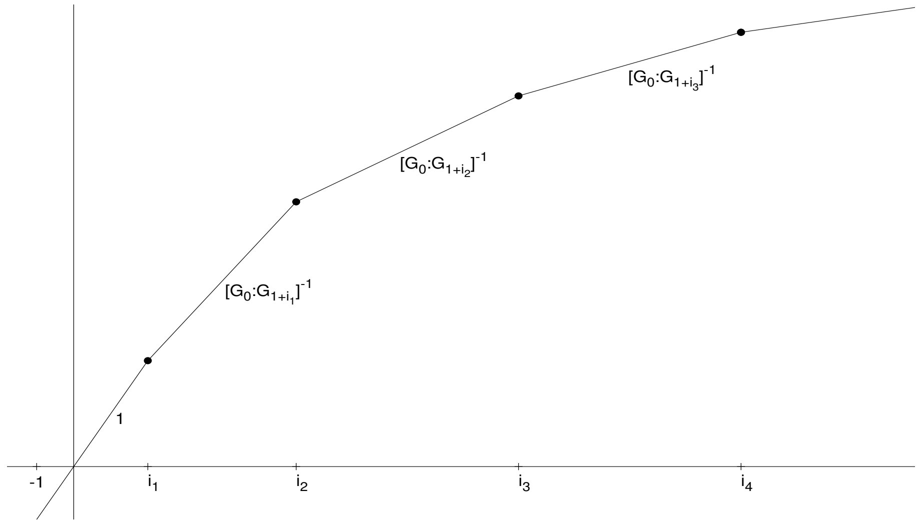

図 1: Herbrand 関数 $v = \varphi_{L/K}(u)$.
ただし $G_0 = \cdots = G_{i_1} \supsetneq G_{1+i_1} = \cdots = G_{i_2} \supsetneq G_{1+i_2} = \cdots$ とし, 各切片の下には傾きを記した.

定義 1.4 K を剰余体完全な完備離散付値体, L/K を完備離散付値体の有限次 Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とする.

- 関数 $\varphi_{L/K} : \mathbb{R}_{\geq -1} \to \mathbb{R}_{\geq -1}$ を次のように定義する.
  - $u \geq 0$ のときは,
  $$\varphi_{L/K}(u) := \int_0^u \frac{dt}{[G_0 : G_t]}.$$
  ただし, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し, $n \geq t$ なる最小の整数 n を取るとき, $G_t := G_n$ と定める.
  - $-1 \leq u \leq 0$ のときは,
  $$\varphi_{L/K}(u) := -u.$$

  $v = \varphi_{L/K}(u)$ は連続, 単調増加, 上に凸な折れ線関数である.
- $\varphi_{L/K}$ の逆関数を $u = \psi_{L/K}(v)$ とおく.
- $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し, L/K の**第 v 上付き分岐群** (v-th upper numbering ramification group) G^v を次のように定める;
  $$G^v := G_{\psi_{L/K}(v)}.$$
- $\{G^v\}_{v \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ は G の減少フィルトレーションを定めるが, これは L/K の上付き分岐フィルトレーションと呼ばれる.

つまり, 上付き分岐群は, 下付き分岐群と出て来る群は同じだが, その番号の付け方を変えている, と言うことである. 従って, 定義と下付き分岐群に関して行った考察から次の主張が従う.

- G^0 は惰性群であり, 十分大きい v に対して $G^v = 0$.
- $G^{v+} = \cup_{v' > v} G^{v'}$ とおくと, G^{0+} は p 群.

- 次数商 G^v/G^{v+} は有限個の v を除いて 0. 次数商が 0 にならないような v を上付き分岐フィルトレーション $\{G^v\}_{v\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ の **jump** と言う．gap, break などとも言う．このとき, $\{G^v\}_{v\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ の jump は $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の元.
- 次数商 G^0/G^{0+} は位数が p と素な巡回群で, $v>0$ における次数商は p で消える Abel 群.
- G^{0+} は野性分岐群と一致.

さらに, 上付き分岐群が商と両立することを示すことができる．つまり, 次の定理が成り立つ (証明は [16, Chapter IV, §3] を参照. ただし, 第 4 節で Abbes-齋藤による別証明を与える).

定理 1.5 *H を $G=\mathrm{Gal}(L/K)$ の正規部分群とすると,*

$$(G/H)^v = G^v H/H.$$

□

そこで, K の絶対 Galois 群 G_K に対しても, 第 v 上付き分岐群を

$$G_K^v := \{s\in G_K \mid \text{任意の有限次 Galois 拡大 } L/K \text{ に対し, } s|_L\in\mathrm{Gal}(L/K)^v\}$$

と定めれば, これが

$$\mathrm{Gal}(L/K)^v = \mathrm{Im}(G_K^v \subseteq G_K \to \mathrm{Gal}(L/K))$$

を満たす G_K の正規部分群になっている．

1.6 Hasse-Arf の定理, Artin 導手と Swan 導手

K の剰余体が完全の場合, 上のように定義された上付き分岐群に関して次の重要な定理を示すことができる (証明は [16, Chapter V] を参照).

定理 1.6 (Hasse-Arf) *K を剰余体が完全な完備離散付値体, L/K を完備離散付値体の有限次 Abel 拡大とし, $G=\mathrm{Gal}(L/K)$ とおく．このとき, 上付き分岐フィルトレーション $\{G^v\}_{v\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ の jump は非負整数.*

□

一般に, L/K を有限次分離拡大とするとき,

$$c_K(L) := 1+\inf\{v\in\mathbb{R}_{\geq 0} \mid G_K^v\subseteq G_L\}$$

を L/K の **Artin 導手** (Artin conductor) と言う (記号は standard なものではない) が, Hasse-Arf の定理は特に, Abel 拡大 L/K の Artin 導手が非負整数であることを主張している．

この定理の応用を述べるために, G_K の連続表現の分岐の様子を計る大事な不変量を定義する (詳細は [16, Chapter VI], [15, 19 章] を参照).

定義 1.7 • L を K の Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とする．このとき, L/K の **Artin 指標** (Artin character) を次のように定義する.

$$a_{L/K}(s) := \begin{cases} 0 & (s \notin G_0) \\ -f(L/K)i_G(s) & (s \neq 1 \in G_0) \\ f(L/K)\sum_{s\neq 1\in G_0} i_G(s) & (s=1). \end{cases}$$

L/K の **Swan 指標** (Swan character) も同様に定義する;

$$sw_{L/K}(s) := \begin{cases} 0 & (s \notin G_0) \\ -f(L/K)(i_G(s)-1) & (s \neq 1 \in G_0) \\ f(L/K)\sum_{s\neq 1\in G_0} (i_G(s)-1) & (s=1). \end{cases}$$

これらは類関数であることが定義から分かる.

• G_K の $\mathbb{C}$ 係数の有限次元連続表現 V を考える．このとき $G_K \to \mathrm{Aut}(V)$ はある有限次 Galois 拡大 L/K の Galois 群を factor する．そこで, χ_V で V の指標を表すとき,

$$\mathrm{Art}_K(V) := (a_{L/K}, \chi_V) := \frac{1}{[L:K]}\sum_{s\in G} a_{L/K}(s)\chi_V(s^{-1})$$
$$\mathrm{Sw}_K(V) := (sw_{L/K}, \chi_V) := \frac{1}{[L:K]}\sum_{s\in G} sw_{L/K}(s)\chi_V(s^{-1})$$

とおくとこれらは L の取り方によらないことが分かる．これらをそれぞれ, V の **Artin 導手** (Artin conductor), **Swan 導手** (Swan conductor) と呼ぶ.

これらは具体的には次のような量であり, a priori には $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の元である.

$$\mathrm{Art}_K(V) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{[G_0 : G_i]} \dim(V/V^{G_i})$$
$$\mathrm{Sw}_K(V) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[G_0 : G_i]} \dim(V/V^{G_i})$$

また, V が一次元表現の場合は, $\mathrm{Ker}(G_K \to \mathrm{Aut}(V))$ に対応する K の有限次 Abel 拡大を L とおくと, Artin 導手の間の等式 $\mathrm{Art}_K(V) = c_K(L)$ が成立する．さらに,

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Art}_K(V) \\ \mathrm{Sw}_K(V) \end{array}\right\} = 0 \iff G_K \text{の } V \text{ への作用が} \left\{\begin{array}{l} \text{不分岐} \\ \text{従順} \end{array}\right.$$

であり (P_K が自明に作用することを, G_K 作用が**従順** (tame) であると言う), 従って Artin 導手と Swan 導手はそれぞれ, V の分岐と野性分岐を計る量であることが分かる．一方, Hasse-Arf の定理と Brauer induction ([15, 10 章, 定理 19]) を組み合わせると, 次の系を示すことができる.

系 1.8 $\mathrm{Art}_K(V)$, $\mathrm{Sw}_K(V)$ は非負整数.

□

このことから, 有限次 Galois 拡大 L/K の Artin 指標や Swan 指標が $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ のある有限次元連続表現の指標であることも分かる (この表現をそれぞれ **Artin 表現**, **Swan 表現**と言う).

この整数 $\mathrm{Art}_K(V)$ を使うと, Artin L 関数の関数等式に現れる係数 (の指数部分) を分岐の言葉で書き表すことができる (詳細は [6] を参照). F を代数体, $G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする. G_F の $\mathbb{C}$ 係数有限次元連続表現 V に対し, V の **Artin L 関数** $L(V,s)$ を次のように定義する.

$$L(V,s) := \prod_{v<\infty} \det(1 - \mathrm{Frob}_v q_v^{-s} \mid V^{I_v})^{-1},$$

ただし, s は複素変数で, v は F の有限素点を走り, q_v は v の剰余体 $k(v)$ の位数, I_v は F_v の惰性群 (F 上の埋め込み $\bar{F} \to \bar{F}_v$ をひとつ fix して, これにより I_v を G_F の部分群だと思う), Frob_v は $\overline{k(v)}$ の geometric Frobenius (つまり, $\overline{k(v)}$ の自己同型で $x \mapsto x^{-q_v}$ で定まるもの). a priori には $L(V,s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束するが, より強く $L(V,s)$ が全平面に有理型に解析接続されることも示せる (Brauer induction と Hecke theory の帰結). V が non-trivial な既約表現なら $L(V,s)$ は整関数であると予想されている (Artin 予想).

さらに,

$$\Lambda(V,s) := L(V,s) \times (V \text{ の無限素点への制限の様子から決まる } \Gamma \text{ 因子})$$

とおくと, $\Lambda(V,s)$ は次の形の関数等式を満たす.

$$\Lambda(V,s) = AB^{-s}\Lambda(V^*, 1-s),$$

ただし V^* は V の反傾表現で, $A, B \in \mathbb{C}^\times$ は定数. このとき定数 A, B は次のような表示を持つことが示せる.

$$\begin{aligned} A &= (\text{絶対値 } 1 \text{ の複素数}) \cdot (f(V)|d_{F/\mathbb{Q}}|^{\dim(V)})^{1/2} \\ B &= (f(V)|d_{F/\mathbb{Q}}|^{\dim(V)}), \end{aligned}$$

ここで $d_{F/\mathbb{Q}}$ は代数体 F の絶対判別式で $|d_{F/\mathbb{Q}}|$ はその実絶対値, $f(V)$ は各有限素点 v での F の完備化 F_v における V の Artin 導手を掛け合わせたもの;

$$f(V) := \prod_{v<\infty} q_v^{\mathrm{Art}_{F_v}(V|_{G_{F_v}})}.$$

2 Herbrand 関数と幾何的連結成分

K を剰余体 k が完全であるような完備離散付値体, L を K の n 次完全分岐 Galois 拡大, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とする. 前節では G の上付き分岐群を, Herbrand 関数による下付き分岐群の番号付け変えとして定義した. 本節では, 上付き分岐群の剰余体非完全な場合への一般化に向けて, まず剰余体完全の場合の上付き分岐群を幾何的に解釈しなおすことを考える.

$f(X) \in \mathcal{O}_K[X]$ を L の素元 π_L の K 上の最小多項式とし, $f(X)$ の根を $z_1, \ldots, z_n$ と書く. このとき, $j \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し,

$$X^j(\mathcal{O}_L) := \{x \in \mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}} \mid v_K(f(x)) \geq j\}$$

とおく. 以下, この集合 $X^j(\mathcal{O}_L)$ の "連結成分" 全体の集合が G の上付き分岐群と等価であることを説明する.

定義から,

$$v_K(f(x)) = \sum_{k=1,\ldots,n} v_K(x - z_k)$$

である．そこで，$v_K(x-z_k)$ $(k=1,\ldots,n)$ の中で最も大きい値を取るのが $v_K(x-z_i)$ だとすると，

$$v_K(x-z_k)=v_K(x-z_i+(z_i-z_k))$$

であるので，

$$\begin{aligned}v_K(x-z_i)\le v_K(z_i-z_k)&\Longrightarrow v_K(x-z_k)=v_K(x-z_i)\\ v_K(x-z_i)>v_K(z_i-z_k)&\Longrightarrow v_K(x-z_k)=v_K(z_i-z_k)\end{aligned}$$

となる．従って，

$$v_K(f(x))=\sum_{v_K(x-z_i)\le v_K(z_i-z_k)\text{ なる }k}v_K(x-z_i)+\sum_{v_K(x-z_i)>v_K(z_i-z_k)\text{ なる }k}v_K(z_i-z_k)$$

と書ける． この式と，$z_1,\ldots,z_n$ たちが G の作用で互いに移りあうことから，$v_K(f(x))$ の値は $\max_{k=1,\ldots,n}v_K(x-z_k)$ の値にしかよらないことが分かる．そこで，

$$u=\max_{k=1,\ldots,n}v_K(x-z_k)\mapsto v_K(f(x))$$

で定まる自然な関数 $\tilde{\varphi}:\mathbb{R}_{\ge0}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ を考える．定義からこれは原点を通る連続な折れ線関数である．$u=\max_{k=1,\ldots,n}v_K(x-z_k)=v_K(x-z_i)$ に対し，点 $(u,\tilde{\varphi}(u))$ がグラフの直線部分にいるとするとき，この点での傾きは，

$$\begin{aligned}(u\le v_K(z_i-z_k)\text{ なる }k\text{ の個数})&=\sharp\{s\in G\mid v_K(s(z_i)-z_i)\ge u\}\\&=\sharp\{s\in G\mid v_L(s(z_i)-z_i)\ge e(L/K)u\}\\&=\sharp G_{e(L/K)u-1}.\end{aligned}$$

原点を通る連続な折れ線関数は直線部分の各点での傾きで決まるので，等式

$$\tilde{\varphi}(u)=\varphi_{L/K}(e(L/K)u-1)+1$$

を得る．従って，$j=\tilde{\varphi}(u)$ の逆関数 $u=\tilde{\psi}(j)$ は次のように書ける;

$$\tilde{\psi}(j)=\frac{1}{e(L/K)}(\psi_{L/K}(j-1)+1).$$

この関数 $\tilde{\psi}(j)$ により，$X^j(\mathcal{O}_L)$ を次の形に書き表すことができる．

$$X^j(\mathcal{O}_L)=\bigcup_{k=1,\ldots,n}D(z_k,\theta^{\tilde{\psi}(j)}).$$

ただし，$z\in\mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}}$, $r\in\mathbb{R}_{\ge0}$ に対し，

$$D(z,\theta^r):=\{w\in\mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}}\mid |z-w|\le\theta^r\}.$$

一般に，$s\in\mathbb{R}_{\ge0}$ に対し，$\mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}}$ 上の同値関係 $\sim_s$ を，

$$z\sim_s z'\Longleftrightarrow v_K(z-z')\ge s$$

で定義する．この同値関係は次を満たす．

$$\begin{aligned}z\sim_s z'&\Longleftrightarrow D(z,\theta^s)=D(z',\theta^s)\\ z\not\sim_s z'&\Longleftrightarrow D(z,\theta^s)\cap D(z',\theta^s)=\emptyset\end{aligned}$$

従って, R_s を $\{z_1,\ldots,z_n\}/\sim_s$ の完全代表系とするとき,

$$X^j(\mathcal{O}_L)=\coprod_{z_k\in R_{\tilde{\psi}(j)}} D(z_k,\theta^{\tilde{\psi}(j)}).$$

さてここで, $\{z_1,\ldots,z_n\}=\{s(\pi_L)\mid s\in G\}$ であるが, $s,t\in G$ に対し,

$$\begin{aligned}
s(\pi_L)\sim_{\tilde{\psi}(j)} t(\pi_L) &\Longleftrightarrow v_K(s(\pi_L)-t(\pi_L))\geq\tilde{\psi}(j)\\
&\Longleftrightarrow v_L(s(\pi_L)-t(\pi_L))\geq e(L/K)\tilde{\psi}(j)=\psi_{L/K}(j-1)+1\\
&\Longleftrightarrow v_L(s^{-1}t(\pi_L)-\pi_L)\geq\psi_{L/K}(j-1)+1\\
&\Longleftrightarrow s^{-1}t\in G_{\psi_{L/K}(j-1)}=G^{j-1}
\end{aligned}$$

となる. つまり, $R_{\tilde{\psi}(j)}\cong G/G^{j-1}$ であり, $X^j(\mathcal{O}_L)$ は

$$X^j(\mathcal{O}_L)=\coprod_{s\in G/G^{j-1}} D(s(\pi_L),\theta^{\tilde{\psi}(j)})$$

と分解する. 各々の $D(s(\pi_L),\theta^{\tilde{\psi}(j)})$ は円板の類似なので “連結” であると思うことにすると, この分解は, $X^j(\mathcal{O}_L)$ の “連結成分” 全体の集合 $\pi_0(X^j(\mathcal{O}_L))$ が G の上付き分岐群による商 G/G^{j-1} と同一視できることを意味している.

さらに, 定義から $f(X)$ の根 $z_1,\ldots,z_n$ は $X^j(\mathcal{O}_L)$ の元であることに注意する. 全単射

$$\begin{aligned}
&G\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg.}}(\mathcal{O}_L,K^{\mathrm{sep}})\cong(f(X)\text{ の根全体})\\
&s\mapsto s(\pi_L)
\end{aligned}$$

と写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg.}}(\mathcal{O}_L,K^{\mathrm{sep}})&\to\pi_0(X^j(\mathcal{O}_L))\\
z_k&\mapsto(z_k\text{ のいる “連結成分”})
\end{aligned}$$

の合成を考えると, この合成写像は上の同一視のもとで標準写像 $G\to G/G^{j-1}$ と一致する. ここで, $X^j(\mathcal{O}_L)$, 従って $\pi_0(X^j(\mathcal{O}_L))$ には定義から G が作用しているが, いま示したことから, (π_L のいる連結成分) $\in\pi_0(X^j(\mathcal{O}_L))$ の G 作用による固定部分群として上付き部分群 G^{j-1} が復元できることが分かった.

以上の考察を踏まえて, K の剰余体 k が非完全の場合にも上付き分岐群を定義するための Abbes-齋藤によるアイデアを述べる. L を K の有限次 Galois 拡大, $G=\mathrm{Gal}(L/K)$ とする. この場合, $\mathcal{O}_L$ は $\mathcal{O}_K$ 上単生成ではないので, 一般には

$$\mathcal{O}_L\cong\mathcal{O}_K[T_1,\ldots,T_r]/(f_1,\ldots,f_s),\ f_i(T_1,\ldots,T_r)\in\mathcal{O}_K[T_1,\ldots,T_r]$$

と言う形に書けている. そこで, 集合

$$X^j(\mathcal{O}_L):=\left\{(t_1,\ldots,t_r)\in\mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}}^r\ \middle|\ \begin{matrix}v_K(f_1(t_1,\ldots,t_r))\geq j\\ \vdots\\ v_K(f_s(t_1,\ldots,t_r))\geq j\end{matrix}\right\}$$

に対し, その “連結成分” 全体の集合 $\pi_0(X^j(\mathcal{O}_L))$ と, 写像

$$\begin{aligned}
G\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg.}}(\mathcal{O}_L,K^{\mathrm{sep}})=(f_1,\ldots,f_s\text{の共通零点})&\to\pi_0(X^j(\mathcal{O}_L))\\
t=(t_1,\ldots,t_r)&\mapsto(t\text{ のいる “連結成分”})
\end{aligned}$$

とを考え, この写像による単位元の像の固定部分群を, G の第 j 上付き部分群と定義すればよい. 実際にこのアイデアに従うと商と両立する分岐フィルトレーションが定義できることを第 4 節で説明する.

ただし, 円板 $D(z, \theta^r)$ は p 進位相では全不連結なので, これが連結に見えるような別の位相で連結成分を考えなければならない. 次節で説明する, Affinoid 多様体上の Zariski 位相はこのような位相のひとつである.

3 Affinoid 多様体

K を完備離散付値体とする. K 上の r 次元の **Tate algebra** を

$$K\langle T_1, \ldots, T_r\rangle := (\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r]^{\wedge}) \otimes_{\mathcal{O}_K} K$$

で定義する. ただし $\wedge$ は π 進完備化. 定義から,

$$K\langle T_1, \ldots, T_r\rangle = \left\{ f = \sum_{i_1, \ldots, i_r \geq 0} a_{i_1, \ldots, i_r} T_1^{i_1} \cdots T_r^{i_r} \;\middle|\; \begin{array}{c} a_{i_1, \ldots, i_r} \in K \\ \lim\limits_{i_1 + \cdots + i_r \to \infty} |a_{i_1, \ldots, i_r}| = 0 \end{array} \right\} \subseteq K[[T_1, \ldots, T_r]].$$

Tate algebra $K\langle T_1, \ldots, T_r\rangle$ 上には **Gauss ノルム**

$$|f| := \max_{i_1, \ldots, i_r} |a_{i_1, \ldots, i_r}|$$

が入り, この位相で K-Banach algebra になる (以下, 詳細は [5] を参照).

Tate algebra の剰余環と同型な K-algebra を K**-affinoid algebra** と言う. このような環は Noether な Jacobson 環であることが示せる. K-affinoid algebra $A = K\langle T_1, \ldots, T_r\rangle / I$ は, **residue ノルム**

$$|a| := \inf_{f \in K\langle T_1, \ldots, T_r\rangle,\ f \mapsto a} |f|$$

により K-Banach algebra の構造を持つ.

K-affinoid algebra A に対し, 組 $\mathrm{Sp}(A) := (\mathrm{Spm}(A), A)$ を K**-affinoid 多様体**と言う. 底空間 $\mathrm{Spm}(A)$ には Zariski 位相を入れる.

K-affinoid 多様体 $X = \mathrm{Sp}(A)$ と, 完備離散付値体の有限次分離拡大 L/K に対し, 完備テンソル積 $A \hat{\otimes}_K L$ は L-affinoid algebra になることが分かる. これが定める L-affinoid 多様体は $X_L := \mathrm{Sp}(A \hat{\otimes}_K L)$ と書かれる. X の連結成分の集合を $\pi_0(X)$ と書き, X の幾何的連結成分の集合を

$$\pi_0(X_{K^{\mathrm{sep}}}) := \varprojlim_{L/K\,:\,\text{有限次分離}} \pi_0(X_L)$$

で定義する.

例 3.1 (i) $A = K\langle T_1, \ldots, T_r\rangle$ の場合, K-affinoid 多様体 $\mathrm{Sp}(A)$ の K^{sep} 値点は

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont.}}_{K\text{-alg}}(A, K^{\mathrm{sep}}) &= \{(t_1, \ldots, t_r) \in \mathcal{O}^r_{K^{\mathrm{sep}}} \mid v_K(t_i) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, r)\} \\ &= D(0, 1)^r. \end{aligned}$$

(ii) $j \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し, $j = k/l$ $(k, l \in \mathbb{Z}_{>0})$ と表す. このとき,

$$\begin{aligned}
A_0 &:= (\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r, X_1, \ldots, X_r]/(\pi^k X_1 - T_1^l, \ldots, \pi^k X_r - T_r^l))^\wedge \\
&= \mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r, \frac{T_1^l}{\pi^k}, \ldots, \frac{T_r^l}{\pi^k}]^\wedge, \\
A &:= A_0 \otimes_{\mathcal{O}_K} K \\
&= K\langle T_1, \ldots, T_r, X_1, \ldots, X_r\rangle/(\pi^k X_1 - T_1^l, \ldots, \pi^k X_r - T_r^l)
\end{aligned}$$

とおく. A は定義から K-affinoid algebra であり, $\mathrm{Sp}(A)$ の K^{sep} 値点は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}^{\text{cont.}}_{K\text{-alg}}(A, K^{\mathrm{sep}}) &= \{(t_1, \ldots, t_r) \in \mathcal{O}^r_{K^{\mathrm{sep}}} \mid v_K(t_i) \geq 0,\ v_K(\frac{t_i^l}{\pi^k}) \geq 0\ (i = 1, \ldots, r)\} \\
&= \{(t_1, \ldots, t_r) \in \mathcal{O}^r_{K^{\mathrm{sep}}} \mid v_K(t_i) \geq \frac{k}{l} = j\ (i = 1, \ldots, r)\} \\
&= D(0, \theta^j)^r.
\end{aligned}$$

どちらの例でも, 完備離散付値体の任意の有限次分離拡大 L/K に対し, $A\hat{\otimes}_K L$ は整域なので, $\mathrm{Sp}(A)$ は絶対連結. つまり, この位相に関し $D(0,1)^r$ や $D(0,\theta^j)^r$ は確かに連結になっている.

4 Abbes-齋藤の分岐理論

4.1 管状近傍

L/K を完備離散付値体の有限次分離拡大とし, $\mathcal{O}_K$ 上の $\mathcal{O}_L$ の生成元を $t_1, \ldots, t_r$ とする. 生成元を選んだことにより定まる全射

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] &\to \mathcal{O}_L \\
T_i &\mapsto t_i
\end{aligned}$$

を考え, この核を $I = (f_1, \ldots, f_s)$ とおく. $j = k/l \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し,

$$A_K^j := K\langle T_1, \ldots, T_r, X_1, \ldots, X_s\rangle/(\pi^k X_1 - f_1^l, \ldots, \pi^k X_s - f_s^l).$$

とおき, この全射の**第 j 管状近傍** (j-th tubular neighborhood) を

$$X_K^j(\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_L) := \mathrm{Sp}(A_K^j)$$

で定義する. これは K-affinoid 多様体であり, 表示 $j = k/l$ によらないことが示せる. また, その K^{sep} 値点は

$$X_K^j(\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_L)(K^{\mathrm{sep}}) = \left\{ (t_1, \ldots, t_r) \in \mathcal{O}^r_{K^{\mathrm{sep}}} \;\middle|\; \begin{array}{c} v_K(f_1(t_1, \ldots, t_r)) \geq j \\ \vdots \\ v_K(f_s(t_1, \ldots, t_r)) \geq j \end{array} \right\}$$

となる ($j \notin \mathbb{Q}$ のときは, この集合は affinoid 多様体にならないことに注意しておく). さらに, $X_K^j(\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_L)$ の幾何的連結成分の集合 $\pi_0(X_K^j(\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_L)_{K^{\mathrm{sep}}})$ が生成元 $t_1, \ldots, t_r$ の取り方によらないことも示せるので,

$$F^j(L) := \pi_0(X_K^j(\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_L)_{K^{\mathrm{sep}}})$$

と書く．定義から $F^j(L)$ は, K の絶対 Galois 群 G_K が連続作用する有限集合である．このような集合は**有限 G_K 集合**と呼ばれる．さらに

$$F(L) := \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, K^{\mathrm{sep}}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}})$$

とおくと, F や F^j は, K 上の有限 etale スキーム全体のなす圏から有限 G_K 集合の圏への共変関手を定める．$j' > j$ に対しては, 管状近傍の自然な埋め込み

$$X_K^{j'}(\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_L) \to X_K^j(\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_L)$$

が関手の射 $F^{j'} \to F^j$ を定めることも分かる．また, 写像

$$\begin{aligned} F(L) = (f_1, \ldots, f_s \text{ の共通零点}) &\to F^j(L) \\ t = (t_1, \ldots, t_r) &\mapsto (t \text{ のいる連結成分}) \end{aligned}$$

によって関手の射 $F \to F^j$ が得られる．

以上で第 2 節に述べたアイデアが正当化されたが, 実際は管状近傍 $X_K^j(\mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] \to \mathcal{O}_L)$ の構成は全射

$$\mathbb{A} := \varprojlim \mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r]/I^n \to \mathcal{O}_L$$

にしかよらない．このとき $\mathbb{A}$ は $\mathcal{O}_K$ 上 formally smooth な完備 Noether 局所環で, 上の全射は同型 $\mathbb{A}/\mathrm{rad}(\mathbb{A}) \cong \mathcal{O}_L/m_L$ を引き起こしている．

そこで, もっと一般に, 有限平坦 $\mathcal{O}_K$-algebra A と, $\mathcal{O}_K$ 上 formally smooth な完備 Noether 半局所環 $\mathbb{A}$, $\mathcal{O}_K$-algebra の全射 $\mathbb{A} \to A$ で同型 $\mathbb{A}/\mathrm{rad}(\mathbb{A}) \cong A/\mathrm{rad}(A)$ を引き起こすもの, の三つ組に対して第 j 管状近傍 $X_K^j(\mathbb{A} \to A)$ を定義する．すなわち, $j = k/l \in \mathbb{Q}_{>0}$, $I = \mathrm{Ker}(\mathbb{A} \to A)$ とおくとき,

$$\begin{aligned} A_0^{k,l} &:= \mathbb{A}[\frac{I^l}{\pi^k}]^\wedge = \mathbb{A}[\frac{g}{\pi^k} \mid g \in I^l]^\wedge \\ A_K^j &:= A_0^{k,l} \otimes_{\mathcal{O}_K} K \\ X_K^j(\mathbb{A} \to A) &:= \mathrm{Sp}(A_K^j) \end{aligned}$$

と定める．幾何的連結成分 $\pi_0(X_K^j(\mathbb{A} \to A)_{K^{\mathrm{sep}}})$ は A のみによることが示せるので, これを $F^j(A)$ と書く．F^j はテンソル積と両立する．つまり, functorial な同型

$$F^j(A \otimes_{\mathcal{O}_K} B) \cong F^j(A) \times F^j(B)$$

が存在する．さらに, さっきと同様に射

$$F(A) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(A, \mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}}) \to F^j(A)$$

が定義でき, 共変関手

$$F, F^j : (\text{有限平坦スキーム}/\mathcal{O}_K) \to (\text{有限 } G_K \text{ 集合})$$

と関手の射 $F \to F^j$, $F^{j'} \to F^j$ $(j' > j)$ を得る．さっきの $F(L)$ や $F^j(L)$ は, 今回の記号だと $F(\mathcal{O}_L)$, $F^j(\mathcal{O}_L)$ と一致する．

4.2 完全交差性と管状近傍

上付き分岐群の一般化について述べる前に, $\mathcal{O}_K$-algebra A のよい拡大 B に対し, A の管状近傍と B の管状近傍との間によい被覆写像が存在する, と言うことを説明しておく.

定義 4.1 (i) Noether 局所環 R が**完全交差** (complete intersection) であるとは, 完備 Noether 正則局所環 S と S の正則イデアル J とが存在して, R の完備化が S/I と同型になること.

(ii) Noether 環 A と, Noether 平坦 A-algebra B に対し, B が A 上**完全交差** (relative complete intersection over A) であるとは, 任意の A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, 幾何的ファイバー環 $B \otimes_A \overline{k(\mathfrak{p})}$ の各局所環が完全交差であること.

$\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦 algebra の間の平坦完全交差な射について, 次の補題が成り立つ.

補題 4.2 ([3], Lemma 1.2) *A, B を有限平坦 $\mathcal{O}_K$-algebra で, $\mathcal{O}_K$-algebra の射 $f : A \to B$ によって B が A 上平坦, 完全交差になるとする. このとき, 上のような全射 $\mathbb{A} \to A$, $\mathbb{B} \to B$ と $\mathcal{O}_K$-algebra の有限平坦射 $\mathbf{f} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ で, 次の図式を cartesian にするものが存在.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle \mathbf{f}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{B} & \longrightarrow & B \end{array}$$

$\square$

定義から $(f, \mathbf{f})$ は K-affinoid 多様体の射

$$f^j : X_K^j(\mathbb{B} \to B) = \mathrm{Sp}(B_K^j) \to X_K^j(\mathbb{A} \to A) = \mathrm{Sp}(A_K^j)$$

を引き起こすが, 図式から $B_K^j = \mathbb{B} \otimes_{\mathbb{A}} A_K^j$ であるので, f^j は K-affinoid 多様体の有限平坦射だと分かる.

ところで,

$$F(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(A, \mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}}) \subseteq X_K^j(\mathbb{A} \to A)(K^{\mathrm{sep}}) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont.}}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(A_K^j, K^{\mathrm{sep}})$$

の像は, $I = \mathrm{Ker}(\mathbb{A} \to A)$ と書くとき

$$g : A_K^j \to K^{\mathrm{sep}},\ g(I) = 0$$

なる連続写像と同一視できる. この元が定める点 $y \in X_K^j(\mathbb{A} \to A)(K^{\mathrm{sep}})$ の f^j による逆像は,

$$h : B_K^j \to K^{\mathrm{sep}},\ h(I\mathbb{B}) = 0$$

なる連続写像全体と同一視される. 従って

$$(f^j)^{-1}(F(A)) = F(B) \subseteq X_K^j(\mathbb{B} \to B)(K^{\mathrm{sep}})$$

が分かった. このことから次の補題を得る.

補題 4.3 *B を有限平坦完全交差な $\mathcal{O}_K$-algebra とすると, $F(B) \to F^j(B)$ は全射.*

証明. B は局所環であるとしてよい. すると上の補題で $A=\mathcal{O}_K$, $\mathbb{A}=\mathcal{O}_K[[T_1,\ldots,T_r]]$, $\mathbb{A}\to A$ は各 T_i を 0 に移す射, とできる. 管状近傍の射は

$$f^j : X_K^j(\mathbb{B}\to B)\to X_K^j(\mathbb{A}\to A)=D(0,\theta^j)^r$$

であり, target が連結なので, source の各連結成分においてこの有限平坦射 (ゆえに開かつ閉射) は全射. 従って $(f^j)^{-1}((0,\ldots,0))=F(B)$ は各連結成分と交わる.

□

さらに, j を動かして $X_K^j(\mathbb{B}\to B)$ をアニュラス上の family と思うことにより, 次の補題を示すことができる.

補題 4.4 ([2], Theorem 5.1) *B を有限平坦完全交差な $\mathcal{O}_K$-algebra とすると, $\{F^j(B)\}_{j\in\mathbb{Q}_{>0}}$ の jump は $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の元.*

□

4.3 上付き分岐群の一般化

定理 4.5 ([2]) *G_K の正規部分群 G_K^j からなる減少フィルトレーション $\{G_K^j\}_{j\in\mathbb{Q}_{>0}}$ が存在して次を満たす ; K の任意の有限次分離拡大 L に対し functorial な全単射*

$$F^j(L)\cong F(L)/G_K^j$$

が存在.

□

この G_K^j のことを, G_K の (non-log) **第 j 上付き分岐群**と言う. これを使って, 有限次 Galois 拡大 L/K に対し,

$$\mathrm{Gal}(L/K)^j := \mathrm{Im}(G_K^j\subseteq G_K\to \mathrm{Gal}(L/K))$$

と定めれば, 定義から $\mathrm{Gal}(L/K)^j$ は商と両立する. 第 2 節で述べたことにより, K の剰余体が完全である場合には

$$G_K^j = G_{K,\mathrm{classical}}^{j-1}$$

となっている. ただし右辺は Herbrand 関数を使って定義した古典的な上付き分岐群 (つまり, 上の定理から第 1 節で定義した上付き分岐群が商と両立することが従う). 一方, K の剰余体が非完全な場合は, 上付き分岐フィルトレーション $\{\mathrm{Gal}(L/K)^j\}_{j\in\mathbb{Q}_{>0}}$ が下付き分岐フィルトレーション $\{\mathrm{Gal}(L/K)_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の番号の付け変えでは書けない例が存在する.

性質 4.6 *(i) ([2]) $0<j\leq 1$ なら G_K^j は惰性群と一致. また, $G_K^{1+}=\overline{\cup_{j>1}G_K^j}$ (上の横線は閉包を表す) は野性分岐群と一致.*

(ii) ([2]) 有限次 Galois 拡大 L/K に対しては, $\{\mathrm{Gal}(L/K)^j\}_{j\in\mathbb{Q}_{>0}}$ の jump は $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の元であり, j が十分大きければ $\mathrm{Gal}(L/K)^j=0$.

(iii) ([3]) K の標数が 0 のときは p が K の素元ではないと仮定する. このとき, $j>1$ に対し次数商 $\mathrm{Gal}(L/K)^j/\mathrm{Gal}(L/K)^{j+}$ は可換な p 群.

□

4.4 定理 4.5 の証明の概略

関手

$$F : (\text{有限 etale スキーム}/K) \to (\text{有限集合})$$
$$\mathrm{Spec}(L) \mapsto \mathrm{Hom}_{K\text{-alg.}}(L, K^{\mathrm{sep}})$$

は, $F(L)$ への自然な G_K 作用によって圏同値

$$F : (\text{有限 etale スキーム}/K) \cong (\text{有限 } G_K \text{ 集合})$$

を引き起こす. このような圏と関手の組を, 一般に Galois category と言う.

定義 4.7 (詳細は [12] を参照) $\mathcal{C}$ を圏, $F : \mathcal{C} \to (\text{有限集合})$ を関手とする. $(\mathcal{C}, F)$ が **Galois category** であるとは, profinite 群 G が存在して, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $F(X)$ には G が連続作用し, この作用によって F が圏同値

$$F : \mathcal{C} \cong (\text{有限 } G \text{ 集合})$$

を引き起こすこと.

一方補題 4.3 より関手の射 $F \to F^j$ は, 任意の L に対し $F(L) \to F^j(L)$ を全射にする. 次の命題は, このような関手の射から G_K の正規部分群で条件を満たすものを構成できるための条件を与えている.

命題 4.8 ([2], Proposition 2.1) *G を profinite 群, $F : \mathcal{C} \cong (\text{有限 } G_K \text{ 集合})$ を Galois category とする. 関手 $F' : \mathcal{C} \to (\text{有限 } G_K \text{ 集合})$ と関手の射 $F \to F'$ で, 次を満たすものが与えられているとする.*

(i) 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対し, $F(X) \to F'(X)$ は全射.

(ii) $\mathcal{C}$ における射 $u : X \to Y$ で $F(u) : F(X) \to F(Y)$ が全射になるものに対し, 図式

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F'(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(Y) & \longrightarrow & F'(Y) \end{array}$$

は *co-cartesian.*

このとき, $\mathcal{C}'$ を $F(X) \to F'(X)$ が全単射となるような $X \in \mathcal{C}$ たちからなる $\mathcal{C}$ の *full subcategory* とし, G の正規部分群 N を

$$N := \bigcap_{X \in \mathcal{C}'} \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Aut}(F(X)))$$

と定めると, F の $\mathcal{C}'$ への制限

$$F|_{\mathcal{C}'} : \mathcal{C}' \to (\text{有限 } G/N \text{ 集合})$$

は *Galois category* で, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $F(X) \to F'(X)$ は全単射

$$F(X)/N \cong F'(X)$$

を引き起こす.

□

あとはこの命題の条件をさっきの $F \to F^j$ について確かめればよい. (i) は補題 4.3 で示した. (ii) を確かめる. 一般に, 有限 G_K 集合の全射 $f: Z \to X$, $g: Z \to Y$ に対し, これらの双対ファイバー積は Y/R で与えられる. ここで, R は $Y \times Y$ 上の同値関係で,

$$\{(y, y') \in Y \times Y \mid \text{ある } z, z' \in Z \text{ で}, f(z) = f(z') \text{ を満たすものが存在して}, g(z) = y,\ g(z') = y'\}$$

が生成するもの. このことと $F \to F^j$ の定義から, 次の主張を確かめればよいことが分かる.

> E/L を有限次分離拡大, $B = \mathcal{O}_E$, $A = \mathcal{O}_L$ とする. B は A 上平坦かつ完全交差なので, 補題 4.2 の条件を満たす $\mathbb{A} \to A$, $\mathbb{B} \to B$ が取れる. 管状近傍の間の有限平坦射
>
> $$f^j : X_K^j(\mathbb{B} \to B) \to X_K^j(\mathbb{A} \to A)$$
>
> を考える. $y, y' \in F(L)$ を, $X_K^j(\mathbb{A} \to A)$ の同じ連結成分にいる二つの元とするとき, $x, x' \in F(E)$ で, $X_K^j(\mathbb{B} \to B)$ の同じ連結成分に属し, かつ $f^j(x) = y$, $f^j(x') = y'$ となるものが存在する.

この主張は, 補題 4.3 の証明と同様に, f^j が開かつ閉射であることから従う.

□

4.5 有限平坦完全交差 $\mathcal{O}_K$-algebra の導手

B を $\mathcal{O}_K$ 上有限平坦かつ完全交差な $\mathcal{O}_K$-algebra で, $B \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ が K 上 etale であるものとする. このとき,

$$c(B) := \inf\{j \in \mathbb{Q}_{>0} \mid F(B) \to F^j(B) \text{ が全単射 }\}$$

を B の**導手** (conductor) と呼ぶ. 補題 4.3, 4.4 より, $c(B) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ と分かる. L を K の有限次分離拡大, $B = \mathcal{O}_L$ とすると, この場合は

$$F(\mathcal{O}_L)/G_K^j \cong F^j(\mathcal{O}_L)$$

だったので,

$$\begin{aligned} c(\mathcal{O}_L) &= \inf\{j \in \mathbb{Q}_{>0} \mid \mathrm{Hom}_{K\text{-alg.}}(L, K^{\mathrm{sep}}) \text{ に } G_K^j \text{が自明に作用 }\} \\ &= \inf\{j \in \mathbb{Q}_{>0} \mid G_K^j \subseteq G_L\} \end{aligned}$$

となる. K の剰余体が完全の場合と同様に, この値を L/K の **Artin 導手**と呼び, $c_K(L)$ で表す.

補題 4.9 *B を上のような $\mathcal{O}_K$-algebra, L を K の有限次分離拡大とする. このとき, $B \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ の $\mathcal{O}_L$-algebra としての導手 $c(B \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L)$ は $e(L/K)c(B)$ に等しい.*

証明. $\mathbb{B} \to B$ を管状近傍を定義する時に取る全射とする. このとき $\mathbb{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L \to B \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ も条件を満たすので, 管状近傍 $X_L^j(\mathbb{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L \to B \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L)$ を定義でき,

$$X_L^{je(L/K)}(\mathbb{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_L \to B \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L) = X_K^j(\mathbb{B} \to B)\hat{\otimes}_K L$$

が成立することが分かる. 主張はここから従う.

$\square$

補題 4.10 *B_1, B_2 を上のような $\mathcal{O}_K$-algebra で, $B_1 \subseteq B_2$ かつ $B_1 \otimes_{\mathcal{O}_K} K = B_2 \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ であるようなものとする. このとき, $c(B_1) \geq c(B_2)$.*

証明. 次の可換図式と導手の定義からただちに分かる.

$$\begin{array}{ccc} F(B_2) & \longrightarrow & F^j(B_2) \\ \| & & \downarrow \\ F(B_1) & \longrightarrow & F^j(B_1) \end{array}$$

$\square$

B を上のような $\mathcal{O}_K$-algebra とし, A を $B \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ における $\mathcal{O}_K$ の整閉包とする. このとき $A \subseteq B$ は上の補題の条件を満たすから $c(A) \leq c(B)$ を得るが, さっき述べたことから, $c(A)$ は $B \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ の Artin 導手に等しい. つまり, B の導手 $c(B)$ は B の generic fiber への Galois 作用の分岐を上から抑えている. 一般に Galois 表現の分岐を上から評価することは難しい問題だが, 有限平坦完全交差 $\mathcal{O}_K$-algebra から来ている Galois 表現の場合はこのように Abbes-齋藤の導手で分岐を抑えることができる. 整閉包の構成は係数拡大と両立しないため, Artin 導手は係数拡大に対してよい振舞いをしないが, Abbes-齋藤の導手は整数環以外の環についてもその分岐を計ることができ, 係数拡大と両立している. そのため Abbes-齋藤の導手に関しては何らかの評価を比較的容易に得ることができる. このようにして得られる分岐の評価は必ずしも良いものであるとは限らないが, B が $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームの affine 環の場合はこの手法によって非常に良い評価が得られることを第 5 節で述べる.

4.6 log 分岐群

これまでに定義した G_K の上付き分岐群 G_K^j とは別の, 上付き log 分岐群と呼ばれる高次分岐群 $G_{K,\log}^j$ を定義する. こちらの分岐群は L/K の野性分岐を計ることに特化した分岐群だが, K の剰余体が非完全な場合, 実は高次分岐群の正しい一般化はこちらの方である. 例えば, Hasse-Arf の定理の類似は普通の (non-log) 分岐群ではなく log 分岐群の方での成立が予想されている. この小節では簡単に log 分岐群の定義と性質を紹介する (本稿の目標である有限平坦群スキームへの応用に関しては, non-log と log のどちらを考えても同じなので, log 分岐群に関する詳細は述べないことにする. [2] を参照).

K の有限次拡大 L に対し, $\mathcal{O}_K$ 上の $\mathcal{O}_L$ の生成元 $t_1, \ldots, t_r$ を取る. 前と同様に, 全射

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K[T_1, \ldots, T_r] &\to \mathcal{O}_L \\ T_i &\mapsto t_i \end{aligned}$$

とその核 $I = (f_1, \ldots, f_s)$ を考える. $\{t_1, \ldots, t_r\}$ には L の素元が含まれていなければならないが, 部分集合 $\mathcal{P} \subseteq \{1, \ldots, r\}$ を, $\{t_i \mid i \in \mathcal{P}\}$ の中に L の素元 t_ι が含まれ, かつ 0 は含まれないようなものとする. $e = e(L/K)$, $e_i = v_L(t_i)$ とおき, $\mathcal{O}_L$ の可逆元

$$\frac{t_i^e}{\pi^{e_i}},\ \frac{t_n^{e_m}}{t_m^{e_n}}\ (m, n \in \mathcal{P})$$

の上の全射による lift をそれぞれ g_i, $h_{m,n}$ とおく．これらと $j \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し, K-affinoid 多様体 $Y_K^j(\mathcal{O}_K[T_1,\dots,T_r] \to \mathcal{O}_L, \mathcal{P})$ を,

$$Y_K^j(\mathcal{O}_K[T_1,\dots,T_r] \to \mathcal{O}_L, \mathcal{P})(K^{\mathrm{sep}}) = \left\{ t = (t_1,\dots,t_r) \in \mathcal{O}_{K^{\mathrm{sep}}}^r \;\middle|\; \begin{array}{l} v_K(f_i(t)) \geq j \ (i = 1,\dots,r) \\ v_K(t_i^e - \pi^{e_i} g_i(t)) \geq j + e_i \ (i \in \mathcal{P}) \\ v_K(t_n^{e_m} - t_m^{e_n} h_{m,n}(t)) \geq j + \frac{e_m e_n}{e} \ (m,n \in \mathcal{P}) \end{array} \right\}$$

で定まるものと定義する (**第 j-log 管状近傍**). この K-affinoid 多様体の幾何的連結成分を

$$F_{\log}^j(L) := \pi_0(Y_K^j(\mathcal{O}_K[T_1,\dots,T_r] \to \mathcal{O}_L, \mathcal{P})_{K^{\mathrm{sep}}})$$

とおくと, これが L にしかよらないことも示せる．前と同様に関手の射 $F \to F_{\log}^j$ や $F_{\log}^{j'} \to F_{\log}^j$ ($j' > j$) も定義できる．命題 4.8 の条件を確かめることで, G_K の正規部分群 $G_{K,\log}^j$ で

$$F(L)/G_{K,\log}^j \cong F_{\log}^j(L)$$

なるものが定まる．これを**第 j 上付き log 分岐群** (j-th upper numbering logarithmic ramification group) と言う．有限次 Galois 拡大 L/K に対する log 分岐群 $\mathrm{Gal}(L/K)_{\log}^j$ も前と同様に定義する．log 管状近傍の定義は不自然に見えるかもしれないが, $\mathcal{O}_L$ と $\mathcal{O}_K[T_1,\dots,T_r]$ に log 構造

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \to \mathcal{O}_L & & \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathcal{P}} \to \mathcal{O}_K[T_1,\dots,T_r] \\ 1 \mapsto t_\iota, & & (1,0) \mapsto \pi \\ & & (0,\mathbf{e}_i) \mapsto T_i \end{array}$$

(ただし $\mathbf{e}_i$ は標準基底) をそれぞれ入れたとき, log 構造付きの全射 $\mathcal{O}_K[T_1,\dots,T_r] \to \mathcal{O}_L$ に対して定まる自然な管状近傍になっている ([3] を参照).

log 分岐群は次のような性質を持つ.

性質 4.11 *(i) ([2])* $G_{K,\log}^{0+} = \overline{\cup_{j>0} G_K^j}$ は野性分岐群と一致.

(ii) ([2]) 有限次 *Galois* 拡大 L/K に対しては, $\{\mathrm{Gal}(L/K)_{\log}^j\}_{j \in \mathbb{Q}_{>0}}$ の *jump* は $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ の元であり, j が十分大きければ $\mathrm{Gal}(L/K)_{\log}^j = 0$.

(iii) ([3]) $j > 0$ に対し次数商 $\mathrm{Gal}(L/K)_{\log}^j / \mathrm{Gal}(L/K)_{\log}^{j+}$ は可換な p 群.

(iv) ([13]) K の標数を p とする．このとき, $j > 0$ に対し次数商 $\mathrm{Gal}(L/K)_{\log}^j / \mathrm{Gal}(L/K)_{\log}^{j+}$ は p で消える可換群.

注 4.12 性質 (iv) が混標数の場合でも成り立つことも, 齋藤によって announce されている.

log 分岐群に関して, 次のことが予想されている.

予想 4.13 *L/K が有限次 Abel 拡大のとき,* $\{\mathrm{Gal}(L/K)_{\log}^j\}_{j \in \mathbb{Q}_{>0}}$ *の jump は非負整数.*

この予想は, K が等標数の場合は Xiao ([19]) によって証明された.

5　有限平坦群スキーム

次節で有限平坦群スキームの分岐理論を説明するのに先立って, この節では有限平坦群スキームについて簡単に復習しておく. 詳細は例えば [17], [18] などを参照のこと.

5.1　群スキームの定義と例

定義 5.1 S をスキームとし, $\mathcal{G}$ を S 上のスキームとする. $\mathcal{G}$ が**群スキーム**であるとは, S 上の射の組

$$m : \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \to \mathcal{G} \text{ (積構造)},\ e : S \to \mathcal{G} \text{ (単位元)},\ i : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \text{ (逆元)}$$

が与えられていて, 群の公理に出て来る可換図式を満たすこと.

可換図式は例えば次のようなものである. 左のものは群の結合法則を, 右のものは単位元を掛ける写像が恒等写像であることを意味している.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{G} \times_s \mathcal{G} \arrow[r, "m"'] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \times_S \mathcal{G} \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] & \mathcal{G} \times_s \mathcal{G} \arrow[d, "m"] & \mathcal{G} \times_S S \arrow[l, "\mathrm{id}\times e"'] \\
\mathcal{G} \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, equal] & \mathcal{G} \arrow[r, equal] & \mathcal{G} \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

このとき, S 上の任意のスキーム T に対し, $\mathcal{G}$ の T 値点の集合 $\mathcal{G}(T)$ には自然に群構造が入る. $\mathcal{G}$ が**可換**であるとは, 任意の T に対し $\mathcal{G}(T)$ が Abel 群であること. これは次の図式の可換性と同値.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \arrow[r, "(g,g')\mapsto(g',g)", "\sim"'] \arrow[d, "m"'] & \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{G} \arrow[r, equal] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

以下, 本稿では可換な群スキームしか考えない.

S 上の群スキーム $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ の間の**準同型**は, S 上のスキームの射でその群構造と可換なもの, として定める. $\mathcal{G}$ の N **倍写像**とは, 次のようにして定まる群準同型 $[N] : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ のこと.

$$\mathcal{G} \longrightarrow \overbrace{\mathcal{G} \times_S \cdots \times_S \mathcal{G}}^{N} \xrightarrow{m\times\mathrm{id}\times\cdots\mathrm{id}} \overbrace{\mathcal{G} \times_S \cdots \times_S \mathcal{G}}^{N-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \xrightarrow{m} \mathcal{G}$$

ただし一番左の矢は対角射.

$\mathcal{G}$ が S 上の群スキームなら, 任意の S 上のスキーム T に対しファイバー積 $\mathcal{G} \times_S T$ は自然に T 上の群スキームの構造を持つ. $\mathcal{G}$ がスキームとして連結 (*resp.* 正則, 正規……) なとき, $\mathcal{G}$ は連結 (*resp.* 正則……) な群スキームと呼ばれる. また, $\mathcal{G}$ がスキームとして S 上有限 (*resp.* 平坦, smooth, etale……) であるとき, $\mathcal{G}$ のことを S 上有限 (*resp.* 平坦, ……) な群スキームと言う. S 上の群スキームの準同型 $\mathcal{H} \to \mathcal{G}$ がスキームの射として閉移入であるとき, $\mathcal{H}$ を $\mathcal{G}$ の閉部分群スキームと言う. $\mathcal{G}$ が S 上有限局所自由であるとき, そのスキームとしての階数を $\mathcal{G}$ の S 上の階数と言う. 連結な Noether スキーム上有限平坦な可換群スキームはその階数 N で消えることが知られている. つまり, N 倍写像 $[N] : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ が $e : S \to \mathcal{G}$ を factor する.

例 5.2 R を可換環とする.

(i) 加法群. $\mathrm{Spec}(R[T])$ には R 上の群スキームの構造が,

$$m^* : T \mapsto T \otimes 1 + 1 \otimes T,\ e^* : T \mapsto 0,\ i^* : T \mapsto -T$$

によって定まる. この群スキームを $\mathbb{G}_{\mathrm{a},R}$ と書く. これは R 上 smooth な affine 可換群スキーム.

(ii) 乗法群. $\mathrm{Spec}(R[T, T^{-1}])$ には R 上の群スキームの構造が,

$$m^* : T \mapsto T \otimes T,\ e^* : T \mapsto 1,\ i^* : T \mapsto T^{-1}$$

によって定まる. この群スキームは $\mathbb{G}_{\mathrm{m},R}$ と書かれる. これも R 上 smooth な affine 可換群スキーム.

(iii) 定数群. C を有限群とするとき, $B := \mathrm{Map}(C, R) \cong \prod_C R$ は自然に有限生成自由 R-algebra になるが, $\mathrm{Spec}(B)$ 上には群構造が

$$\begin{aligned} m^* : B &\to B \otimes_R B = \mathrm{Map}(C \times C, R) \\ f &\mapsto ((c, c') \mapsto f(c + c')) \end{aligned}$$

で定まる. これは index を C に持つ $\mathrm{Spec}(R)$ の disjoint union $\coprod_C \mathrm{Spec}(R)$ に, index の群構造を使って群構造を入れたものと同じ.

(iv) 準同型の核. $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ を S 上の群スキームの準同型とするとき, ファイバー積 $\mathrm{Ker}(f) := \mathcal{G} \times_{\mathcal{H}} S$ には自然に群スキームの構造が入る. ただし射 $S \to \mathcal{H}$ は $\mathcal{H}$ の単位元の射. これを f の核と言う. 一般に, $\mathcal{G}$ の N 倍写像 $[N] : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ の核を $\mathcal{G}[N]$ で表す.

(v) 乗法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m},R}$ の N 倍写像の核を μ_N と書く. 具体的には, $\mathbb{G}_{\mathrm{m},R}$ の閉部分スキーム

$$\mu_N = \mathrm{Spec}(R[T]/(T^N - 1))$$

に $\mathbb{G}_{\mathrm{m},R}$ から定まる自然な群構造を入れたもの.

(vi) Abel スキーム. S 上の proper smooth 可換群スキーム A で, 各ファイバーが絶対連結なものを Abel スキームと言う. S が体のときは特に Abel 多様体と言う. S 上相対次元 1 の Abel スキームを楕円曲線と言う.

5.2 群スキームの closure

R を PID, $K = \mathrm{Frac}(R)$ とする. $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(B)$ を R 上の有限平坦群スキーム, $\mathcal{H}_K$ を $\mathcal{G}_K$ の閉部分群スキームとする. この閉移入の定義イデアルを $I_K \subseteq B \otimes_R K$ とする. このとき, R-algebra $B' := B/I_K \cap B$ を考えると, 定義から B' は R 上有限平坦. さらに, $\mathcal{G}$ の群構造は $\mathrm{Spec}(B')$ 上に自然な群構造を定義することが分かる. この有限平坦群スキームを $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H}$ は $\mathcal{G}$ の閉部分群スキームであり, 閉埋め込み $\mathcal{H} \to \mathcal{G}$ を K に base change したものが $\mathcal{H}_K \to \mathcal{G}_K$ である. この $\mathcal{H}$ を, $\mathcal{G}$ **における** $\mathcal{H}_K$ **の closure** と呼ぶ.

5.3 Cartier 双対

R を Noether 環, $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(B)$ を R 上の有限平坦可換群スキームとする. このとき,

$$B^\vee := \mathrm{Hom}_R(B, R)$$

には自然に有限平坦 R-algebra の構造が入る. つまり, $\mathcal{G}$ の群構造を定義する環準同型

$$m^* : B \to B \otimes_R B$$

が引き起こす射

$$\begin{aligned} B^\vee \otimes_R B^\vee \cong \mathrm{Hom}_R(B \otimes_R B, R) &\to \mathrm{Hom}_R(B, R) = B^\vee \\ f_1 \otimes f_2 &\mapsto (b \mapsto (f_1 \otimes f_2) \circ m^*(b)) \end{aligned}$$

によって $B^\vee$ の積構造を定める. この積構造の単位元は, $\mathcal{G}$ の単位元の射を定義する環準同型

$$(e^* : B \to R) \in \mathrm{Hom}_R(B, R) = B^\vee$$

である. さらに, B の環構造を定義する環準同型

$$B \otimes_R B \to B$$

を使って, $\mathrm{Spec}(B^\vee)$ に R 上の可換群スキームの構造を定義できる. つまり, 群構造を

$$\begin{aligned} B^\vee &\to B^\vee \otimes_R B^\vee \cong \mathrm{Hom}_R(B \otimes_R B, R) \\ f &\mapsto (b_1 \otimes b_2 \mapsto f(b_1 b_2)) \end{aligned}$$

が引き起こす射と定める. この群構造の単位元の射は

$$\begin{aligned} B^\vee &\to R \\ f &\mapsto f(1), \end{aligned}$$

逆元の射は, $\mathcal{G}$ の逆元の射を定める環準同型を $i^* : B \to B$ とおくと

$$\begin{aligned} B^\vee &\to B^\vee \\ f &\mapsto (b \mapsto f(i^*(b))), \end{aligned}$$

がそれぞれ引き起こす射である. このようにして定まる R 上の有限平坦可換群スキームを $\mathcal{G}^\vee$ と書き, $\mathcal{G}$ の **Cartier 双対** (Cartier dual) と言う. Cartier 双対は $\mathcal{G} \cong (\mathcal{G}^\vee)^\vee$ を満たし, R 上の有限平坦可換群スキームの圏からそれ自身への, base change と可換な反圏同値を定める. このとき, 任意の R-algebra A に対し, functorial な同型

$$\mathcal{G}^\vee(A) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{ 上の群スキーム}}(\mathcal{G}_A, \mathbb{G}_{\mathrm{m},A})$$

が存在することが示せる.

例 5.3 定数群 $\mathbb{Z}/p^n$ の Cartier 双対は μ_{p^n} である.

体 K 上の群スキーム $\mathcal{G}$ に対し, その K^{sep} 値点 $\mathcal{G}(K^{\mathrm{sep}})$ には自然に K の絶対 Galois 群 G_K が作用する. この対応により, 圏同値

$$\begin{aligned}(K \text{ 上の有限 etale 可換群スキーム}) &\to (\text{有限 } G_K \text{ 加群})\\ \mathcal{G} &\mapsto \mathcal{G}(K^{\mathrm{sep}})\end{aligned}$$

を得る. K の標数が 0 なら, 下に述べる性質 5.4 (i) により, $\mathcal{G}$ の Cartier 双対 $\mathcal{G}^\vee$ も K 上 etale である. この圏同値で Cartier 双対は, 関手

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$$

に移る.

5.4 体上の有限群スキームの構造定理

R は Noether 環とする.

性質 5.4 *(i)* $\mathcal{G}$ を R 上の有限平坦可換群スキームで階数 N のものとする. このとき, N が R において可逆なら, $\mathcal{G}$ は R 上 *etale.*

(ii) R を標数 $p>0$ の閉体とする. このとき, R 上の連結な有限可換群スキームの *affine* 環は次のような形をしている ;

$$R[T_1, \ldots, T_r]/(T_1^{p^{n_1}}, \ldots, T_r^{p^{n_r}}).$$

□

この性質 (i) のために, 例えば今まで考えてきたような完備離散付値体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキーム $\mathcal{G}$ は, 基本的には p 巾階数のものしか非自明なものがないことが分かる. さらに, $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_K} K$ が K 上 etale ならば, 性質 (ii) から $\mathcal{G}$ が $\mathcal{O}_K$ 上有限平坦完全交差であることが従う. つまり, $\mathcal{G}$ に対してこれまで展開して来た分岐理論を適用することができる. 次節では, このような $\mathcal{G}$ の分岐を調べることにより, 有限平坦群スキームから来る Galois 表現の詳しい性質が導かれることを説明する.

6 有限平坦群スキームの分岐

6.1 分岐フィルトレーション

K を完備離散付値体とする. $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(B)$ を $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦可換群スキームで階数 p 巾であり, かつ $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_K} K$ が K 上 etale なものとする. 例えば K の標数が 0 なら, 性質 5.4 の (i) より最後の条件は自動的に満たされる.

前節で述べたように, B は $\mathcal{O}_K$ 上有限平坦完全交差であるので, 分岐理論の関手 F, F^j を適用できる. $F(B)$, $F^j(B)$, $c(B)$ をそれぞれ $F(\mathcal{G})$, $F^j(\mathcal{G})$, $c(\mathcal{G})$ と書く. 定義から, $F(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(K^{\mathrm{sep}})$ である. また, F^j がファイバー積と両立することから, $F^j(\mathcal{G})$ には可換群の構造が入り, $F(\mathcal{G}) \to F^j(\mathcal{G})$ は有限 G_K 加群の全射であることが分かる. そこで

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^j(K^{\mathrm{sep}}) &:= \mathrm{Ker}(\mathcal{G}(K^{\mathrm{sep}}) = F(\mathcal{G}) \to F^j(\mathcal{G}))\\ \mathcal{G}^{j+}(K^{\mathrm{sep}}) &:= \bigcup_{j'>j} \mathcal{G}^{j'}(K^{\mathrm{sep}})\end{aligned}$$

とおく．また, $\mathcal{G}^j$, $\mathcal{G}^{j+}$ を $\mathcal{G}$ におけるこれらの closure とする．$\mathcal{G}^j$ や $\mathcal{G}^j(K^{\mathrm{sep}})$ を, $\mathcal{G}$ の**第 j 上付き分岐部分群スキーム**と呼ぶ.

6.2 有限平坦 Galois 表現の分岐の評価

$\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦可換群スキーム $\mathcal{G}$ の K^{sep} 値点 $\mathcal{G}(K^{\mathrm{sep}})$ は自然に有限 G_K 加群になる．このようにして得られる有限 G_K 表現を**有限平坦** (finite flat) な G_K 表現と言う.

定理 6.1 ([7],[8]) K の標数は 0 であると仮定する．$\mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦可換群スキームで, p^N で消えるものとする．このとき, $j > e(K)(N+1/(p-1))$ であれば, 第 j 上付き分岐群 G_K^j は $\mathcal{G}(\bar{K})$ に自明に作用する．ここで $e(K) = v_K(p)$ は K の絶対分岐指数.

注 6.2 K の剰余体が完全の場合は Fontaine の定理 ([7])．以下では, [8] に沿って剰余体一般で成り立つ証明を述べる.

証明. $\mathcal{G}_K := \mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_K} K = \mathrm{Spec}(L_1 \times \cdots \times L_s)$ と書く．$c(\mathcal{O}_{L_i})$ は L_i の Artin 導手と一致していたので,

$$c(\mathcal{O}_{L_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{L_s}) \leq e(K)(N + 1/(p-1))$$

を示せばよい．$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{L_s})$ は $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_K} K$ の中での $\mathcal{G}$ の整閉包なので, 補題 4.10 より, $c(\mathcal{G}) \leq e(K)(N + 1/(p-1))$ を示せばよい．補題 4.9 より, この両辺はともに係数拡大で分岐指数倍されるので, K を十分大きい体と取り換えて示せばよい．そこで, $\zeta_{p^N} \in K$ かつ G_K が $\mathcal{G}(\bar{K})$ に自明に作用する, と仮定してこの不等式を示す.

K の取り方より, $\mathcal{G}$ の Cartier 双対 $\mathcal{G}^\vee$ の $\bar{K}$ 値点 $\mathcal{G}^\vee(\bar{K})$ にも G_K が自明に作用する．つまり $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}_K^\vee \cong \mathbb{Z}/p^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{n_r}$ (定数群の直和) と書ける．従って, $\mathcal{O}_K$ 上の群スキームの射

$$\mathbb{Z}/p^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{n_r} \to \mathcal{G}^\vee$$

で, K 上では恒等写像であるようなものが存在する．Cartier 双対を取って, 結局 $\mathcal{O}_K$ 上の群スキームの射

$$\mathcal{G} \to \mu_{p^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \mu_{p^{n_r}}$$

で, K 上恒等写像を引き起こすものを得る．補題 4.10 より

$$c(\mathcal{G}) \leq c(\mu_{p^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \mu_{p^{n_r}}) = \max_i c(\mu_{p^{n_i}})$$

となる．ところが, 一般に

$$c(\mu_{p^n}) = n(e(K) + 1/(p-1))$$

となることが容易に分かるので, ここから求める評価を得る.

□

注 6.3 Fontaine はこの評価を使って $\mathbb{Z}$ 上の Abel スキームが存在しないことを証明している ([7]).

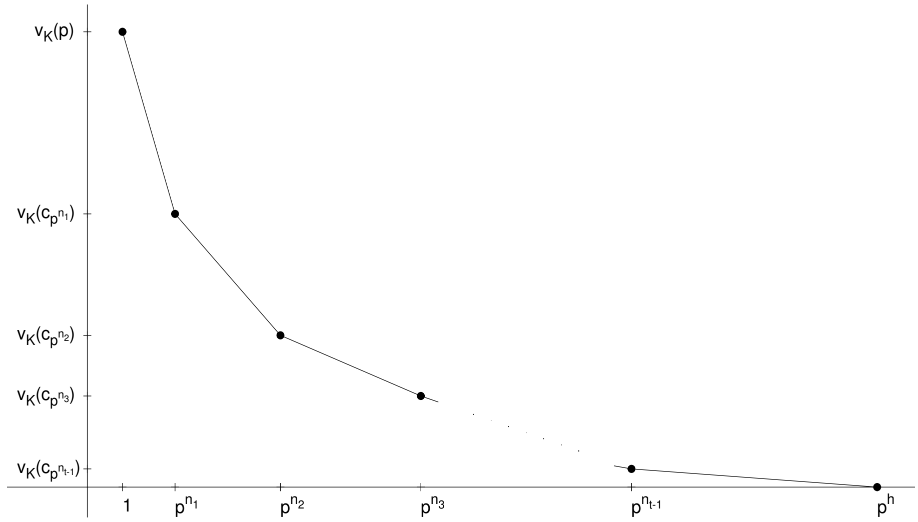

図 2: $[p](X)$ の Newton 多角形.

6.3 有限平坦 Galois 表現の半単純化と分岐

一般に, 代数幾何から来る G_K 表現 V に対し, その惰性群への制限の半単純化 $(V|_{I_K})^{\mathrm{ss}}$ には幾何的な情報が内包されているが, これを幾何的に (例えば, 整 p 進 Hodge 理論を使って) 調べることは K の絶対分岐指数が大きい場合困難であることが多い. 例外的に容易なのは次のような場合である. K の標数は 0 であるとし, $\mathcal{O}_K$ 上の height $h<\infty$ の 1 次元形式群 Γ の p 倍の核 $\Gamma[p](\bar{K})$ を考える. G_K 表現 $V:=\Gamma[p](\bar{K})\otimes_{\mathbb{F}_p}\bar{\mathbb{F}}_p$ の惰性群への制限の半単純化は以下のように記述される ([14]). Γ の p 倍公式

$$[p](X)=pX+c_2X^2+\cdots+c_iX^i+\cdots$$

に対し, 座標平面に点 $(i,v_K(c_i))$ をプロットする. これらと $(0,+\infty)$ の合併集合の凸包を $[p](X)$ の **Newton 多角形** (Newton polygon) と言う. この多角形のうち負の傾き $-s$ の切片を考える. この切片の横幅が n だとすると, 方程式 $[p](X)=0$ は $m_{\bar{K}}$ の中に $v_K(x)=s$ なる根を丁度 n 個持つことが知られている. このことから I_K 作用と可換な単射

$$\{x\in\Gamma[p](\bar{K})\mid v_K(x)\geq s\}/\{x\in\Gamma[p](\bar{K})\mid v_K(x)>s\}\to m_{\bar{K}}^s/m_{\bar{K}}^{s+}\cong\bar{\mathbb{F}}_p$$

を得る. 右辺への I_K の作用は次のようにして書ける. 有理数 s を p と素な分母を持つ分数 k/l と p 巾分母の分数の和に分解するとき, $\sigma\in I_K$ の右辺への作用は

$$(\sigma(\pi^{1/l})/\pi^{1/l})^k \bmod m_{\bar{K}}$$

で与えられる. こうして得られる指標 $I_K\to\bar{\mathbb{F}}_p^\times$ や, その任意の p 巾のことを, **レベル s の基本指標** (fundamental character of level s) と言う. つまり, Γ の p 倍公式 $[p](X)$ の Newton 多角形の負の傾きを $\{-s_1,\ldots,-s_r\}$ とするとき, $V|_{I_K}\otimes_{\mathbb{F}_p}\bar{\mathbb{F}}_p$ の半単純化はレベル s_i の基本指標たちの直和.

ところが, この Newton 多角形を使った議論は「根の付値が取れる」という 1 次元の特殊事情に依拠しており, これをそのまま高次元の (つまり, 単生成でない) 群スキームに一般化することはできない. しかし, これまで述べて来たような分岐理論を使うと次のことが示せる.

定理 6.4 ([9]) K を完備離散付値体とし, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦可換群スキームで $\mathcal{G}\otimes_{\mathcal{O}_K} K$ が K 上 *etale* であるようなものとする.

(i) $j>0$ に対し, 次数商 $\mathcal{G}^j(K^{\mathrm{sep}})/\mathcal{G}^{j+}(K^{\mathrm{sep}})$ は p で消える. さらに, ここへの G_K 作用は従順.

(ii) I_K 加群 $\mathcal{G}^j(K^{\mathrm{sep}})/\mathcal{G}^{j+}(K^{\mathrm{sep}})\otimes_{\mathbb{F}_p}\bar{\mathbb{F}}_p$ は, レベル j の基本指標たちの直和.

□

証明は, 上に述べた 1 次元の場合の証明を管状近傍の閉ファイバーへの還元を使って自然に一般化するとできる. この定理は上付き分岐群の構造定理の有限平坦可換群スキームにおける類似であるが, 局所体の場合, はじめの次数商に $l^\times$ (つまり剰余体上の $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$), 残りの次数商に l (つまり剰余体上の $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$) が現れていた. 上で述べた 1 次元の場合, $m_K^s/m_K^{s+}\cong\bar{\mathbb{F}}_p$ として確かに剰余体上の $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ が現れているが, 一般の場合もそれと同じ状況が起こっていることを示すのが証明のポイントになる (この場合はじめの次数商が剰余体上の finite height な形式群で, 残りの次数商が $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ の直積になる).

6.4 Abel 多様体の canonical subgroup

p 進楕円保型形式の基本定理のひとつに「レベル $\Gamma_0(p)$ の保型形式は過収束 (overconvergent)」と言うものがある (詳細は [11] を参照). この定理は, レベル $\Gamma_0(p)$ の古典的な楕円保型形式の Fourier 展開が, レベル 1 の楕円保型形式の Fourier 展開の p 進極限として書けることを意味している. このようにレベルが p と素な保型形式の p 進極限として書ける巾級数には, 係数の間に p 進的な強い結び付きがある. その結び付きを利用することで総実代数体の p 進 ζ 関数を構成できる, と言うのが p 進保型形式の研究の初期段階における主定理だった.

この定理は次のようにして得られる. 楕円保型形式は楕円曲線のある種の同型類全体の集合に定義域を持つ関数と思えるが, レベル $\Gamma_0(p)$ の楕円保型形式は楕円曲線とその位数 p の閉部分群スキームの組の同型類全体, また過収束な p 進楕円保型形式は supersingular だが not too supersingular な楕円曲線 (意味は後述) の同型類全体をそれぞれ定義域に持つ. そこで, supersingular だが not too supersingular な楕円曲線 E に対してその位数 p の閉部分群スキーム H を与える functorial な手続きの存在を示せれば, 保型形式の引き戻し

$$f\mapsto(E\mapsto f(E,H))$$

によってレベル $\Gamma_0(p)$ の楕円保型形式から過収束楕円保型形式を作れることになる.

簡単のため以下混標数の完備離散付値体 K 上で考える. $\mathcal{O}_K$ 上の楕円曲線 E に対し, E の原点での formal completion$\hat{E}_{\mathcal{O}_K}$ は $\mathcal{O}_K$ 上の 1 次元形式群である. その p 倍公式を

$$[p](X)=pX+\cdots+c_pX^p+\cdots+c_{p^2}X^{p^2}+\cdots$$

とし, $e:=e(K)$, $f:=v_K(c_p)$ とおく. E が ordinary であることと $f=0$ とは同値である. E が ordinary の場合は, $E[p]$ の単位成分がこのような部分群 H を与える. 問題は E が supersingular な場合だが, $f>0$ が十分 0 に近ければ, E は supersingular だがそれほど supersingular らしくもない, と考えることができる. 実際, $[p](X)$ の Newton 多角形を見ることにより, $f<pe/(p+1)$ なら $E[p](\bar{K})$ に位数 p の部分群が存在することが分かる (これは, supersingular な楕円曲線の中に ordinary に近い性質を持つクラスが存在する, ということを意味している. このような中間的なク

ラスの存在は K の絶対分岐指数 e が大きい場合に特有の現象である). この部分群の $E[p]$ における closure を取れば求める位数 p の閉部分群スキーム H が得られる.

一方, Siegel 保型形式に対しても同様の p 進理論が考えられるが, 楕円保型形式の場合の類似としてレベル $\Gamma_0(p)$ の Siegel 保型形式の過収束性を示そうと思うと, 上の議論はこのままでは一般化できない. Newton 多角形を使った議論は形式群が 1 次元でないとうまくいかないからである. ところが, 前の小節で述べたことと同様に, 1 次元の場合に Newton 多角形を使ってしたのと本質的には同じ議論が Abbes-齋藤の分岐理論を使うと高次元でも実行できる, と言うことを Abbes-Mokrane は証明した.

定理 6.5 ([1]) *K は標数 0 で剰余体が完全, 剰余標数 $p \geq 3$ であるものとする. A を $\mathcal{O}_K$ 上相対次元 g の Abel スキームとし, $A_1 := A \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p$ とおく. $H^1(A_1, \mathcal{O}_{A_1})$ への p 乗 Frobenius φ の作用を考え, その行列式の付値 $v_K(\det \varphi)$ が*

$$\min\left(\frac{e}{p(p-1)}, \frac{e(p-2)}{(p-1)(2g(p-1)-p)}\right)$$

よりも小さいとする. このとき, $j = e/(p-1)$ に対し, 第 $j+$ 上付き分岐部分群スキーム $A[p]^{j+}$ は階数 p^g であり, A が ordinary の場合には $A[p]$ の単位成分に一致.

□

証明のアイデアは次の通り. perfect pairing

$$A[p](\bar{K}) \times H^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}/p) \to \mathbb{Z}/p$$

による零化空間 $(A[p]^{j+})^{\perp} \subseteq H^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}/p)$ を考える. これと, $A/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ の消滅サイクル層に symbol map を使って入れる標準的なフィルトレーションから来る $H^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}/p)$ の部分空間とが一致することが示せる (このような一致はもっと一般に予想されているが, 今のところ証明はされていない. この場合に証明がうまく行くポイントは, Galois 群が p で消える Abel 群であるような完備離散付値体の Galois 拡大が, 整数環が単生成であるような拡大を積み重ねてできることである). あとは p 進消滅サイクルの理論 ([10]) を使って位数を計算すればよい.

注 6.6 定理 6.5 については, Andreatta-Gasbarri によって別証明と条件の改善 ([4]) が与えられている.

参考文献

[1] A. Abbes and A. Mokrane: *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adiques pour les variétés abéliennes*, Publ. Math. IHES **99** (2004), 117-162

[2] A. Abbes and T. Saito: *Ramification of local fields with imperfect residue fields I*, Amer. J. Math. **124** (2002), 879-920

[3] A. Abbes and T. Saito: *Ramification of local fields with imperfect residue fields II*, Documenta Math. Extra volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 5-72

[4] F. Andreatta and C. Gasbarri: *The canonical subgroup for families of abelian varieties*, Compos. Math. **143** (2007), 566-602

[5] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert: *Non-Archimedean Analysis*, Springer-Verlag, 1984

[6] P. Deligne: *Les constantes des equations fonctionnelles des fonctions L*, in *Modular functions in one variable II*, LNM **349**, 1975

[7] J.-M. Fontaine: *Il n'y a pas de variété abélienne sur $\mathbb{Z}$*, Invent. Math. **81** (1985), 515-538

[8] S. Hattori: *Ramification of a finite flat group scheme over a local field*, J. of Number Theory **118** (2006), 145-154

[9] S. Hattori: *Tame characters and ramification of finite flat group schemes*, to appear in J. of Number Theory

[10] K. Kato: *On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing)*, Adv. Stud. Pure Math. **10** (1987), 207-251

[11] N. Katz: *p-adic properties of modular schemes and modular forms*, in *Modular functions of one variable III* LNM **350**, 1973

[12] J. Murre: *Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathmatics **40**, 1967

[13] T. Saito: *Wild ramification and the characteristic cycle of an l-adic sheaf*, preprint

[14] J.-P. Serre: *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), 259-331

[15] J.-P. セール: 有限群の線形表現, 岩波書店, 1974 年

[16] J.-P. Serre: *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics **67**, Springer, 1979

[17] J. Tate: *Finite flat group schemes*, in *Modular forms and Fermat's last theorem*, G. Cornell, J. Silverman and G. Stevens eds., Springer, 1997

[18] W. C. Waterhouse: *Introduction to Affine Group Schemes*, Springer-Verlag, 1979

[19] L. Xiao: *On Abbes-Saito's ramification filtrations and p-adic differential equations I*, preprint