はξの函数として$L^2(R^3)$に属し，$\mathfrak{F}_1^{\pm}$は$\mathfrak{H}_{ac}(H_1)$を始集合とする$L^2(R^3)$の上への準等距離作用素である．H_1の特異なスペクトルは，上述の集合σと，有限個の負の固有値に，必要なら0をつけ加えたものからなる(なお，Inversion formulaも自然な形で証明することができる).

注

7) この節のやり方は，n次元Schrödinger作用素をはじめ，もっと広い範囲の微分作用素に適用できると思われるが，本稿では最も簡単な場合に話を限る．

8) (7.4)で$q\varphi\in L^{1,\mathrm{loc}}$なることを使うと，$x$の函数として$\varphi\in L^\infty(R^n)$であることがわかる．そこで(7.5)を使えば$\varphi_1^{\pm}(x,\xi)-(2\pi)^{-3/2}\exp(ix\cdot\xi)\to 0$, $|x|\to\infty$, がわかり減少の速さも評価できる．

9) この部分の推論は，定理5.3の証明にも必要である．

(文献は18巻2号に掲載)

環のガロアの理論

大阪市立大学 原田 学
大阪市立大学 神崎 熙夫

はしがき.

古典的な可換体のガロアの理論は，非可換体の場合にN. Jacobsonによって拡張されて以来，Dieudonné，東屋，中山によって，極小条件をもつ単純環，さらに一般に極小条件をもつ環にまで拡張された．また有限でないガロア群をもつ場合についても，延澤，富永，永原によって研究されている．中山[30]において，一般の環に対しても試みられた．一方Auslander，Goldmanにより，可換環のガロア理論が導入された．それは非可換環の場合にまで拡張することが出来る．それを極小条件をもつ単純環で外部的ガロア群をもつ場合に考えれば初期のものに一致し，また中山による接合積で定義された完全外部的ガロア拡大の考え方に関連している．可換環の場合には，Chase，Harrison，Rosenberg，によって，一おう完成され，さらに最近永原[31]によって，有限でないガロア群をもつ場合にも試みられている．またHasse-Wolfによって研究された可換体上のガロア多元環の理論が，可換環上の多元環についても考えられることは自然であろう．[13]，[26]などでガロア拡大との比較がされつつある．可換環R上ガロア拡大になっているR-多元環については，[14]，[19]，[25]，[36]で調べられている．一方体K上のガロア拡大体Lを分解体としてもつ分離多元環におけるBrauer群と，そのガロア群の2次のコホモロジーとの対応は，Auslander，Chase，Goldman，Rosenberg [5]，[12]らにより上の可換環上のガロアの理論を用いて，環上の分離多元環におけるBrauer群についてまで拡張された．この論説では，Auslander-Goldmanに始まるガロアの理論及びBrauer群について概説するのがその目的である．

1. ガロア拡大の定義.

一般環のガロア理論の一つとして，Auslander，Goldman [6]によって導入された可換環のガロア拡大の定義を非可換な環にまで拡張することによって得られた結果及びChase，Harrison，Rosenberg [11]，[12]，[13]によって可換環において得られた結果をできるだけ非可換環の立場に立ってここに概説する．

ここで環Λは単位元をもつ非可換な環で，有限環自己同型群Gをもつとする．Λの部分環はつねに共通単位元を有するものを考える．

定義. 自明な因子団をもって，ΛとGの接合積$\Delta=\Delta(\Lambda,G)=\sum_{\sigma\in G}\oplus\Lambda u_\sigma$をつくり，$\Lambda$を$\Delta$-左加群と見る：

$$\sum_{\sigma\in G}\lambda_\sigma u_\sigma\cdot x=\sum\lambda_\sigma\cdot\sigma(x)$$
$$(\text{但し}\ \textstyle\sum\lambda_\sigma u_\sigma\in\Delta,\ x\in\Lambda).$$

Λの部分環Γが次の1°, 2°, 3°をみたすときΛ/ΓをG-ガロア拡大という．1°. $\Gamma=\Lambda^G$ (但しΛ^GはGの元が固定するΛの元の全体). 2°. ΛはΓ-右

加群として有限生成，かつ射影的．3°．Λ は忠実 $\Delta(\Lambda, G)$-左加群で $\mathrm{Hom}_{\Gamma_r}(\Lambda, \Lambda) \approx \Delta(\Lambda, G)$．(但し Γ_r は Λ の Γ-右乗法)．

定理 1.1. Λ は単位元を有し有限自己同型群 G をもつ環，$\Gamma = \Lambda^G$ とするとき次の条件は同値である．

a) Λ/Γ は G-ガロア拡大．

b) $\Delta(\Lambda, G) = \Lambda \cdot (\sum_{\sigma \in G} u_\sigma) \cdot \Lambda$
(但し $\Delta(\Lambda, G) = \sum_{\sigma \in G} \oplus \Lambda u_\alpha$)．

c) Λ の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $y_1, y_2, \cdots, y_n$ で
$$\sum_{i=1}^n x_i \sigma(y_i) = \begin{cases} 1 & \sigma = 1 \\ 0 & \sigma \neq 1 \end{cases}, \quad \sigma \in G,$$
をみたすものが存在する．

d) G 上 Λ-値函数全体のなす Λ-左加群 $E = \mathrm{Map}(G, \Lambda)$ に対し，写像 $h : \Lambda \otimes_\Gamma \Lambda \to E$；$h(x \otimes y)(\sigma) = x \cdot \sigma(y)$, $(x \otimes y \in \Lambda \otimes_\Gamma \Lambda, \sigma \in G)$，は全準同型である (このとき h は Λ-同型写像をなす．但し $\Lambda \otimes_\Gamma \Lambda$ は $\lambda \cdot (x \otimes y) = \lambda x \otimes y$ によって，$E = \mathrm{Map}(G, \Lambda)$ は $\lambda \cdot f(\sigma) = \lambda(f(\sigma))$, $f \in E$, $\sigma \in G$ $\lambda \in \Lambda$ によって Λ-左加群とみる)．

証明．Λ を $\Delta = \Delta(\Lambda, G)$-左，$\Gamma_r$-右加群とみれば，$\Gamma = \Lambda^G$ より $\Gamma_r = \mathrm{Hom}_\Delta(\Lambda, \Lambda)$．$\Lambda$ が Γ_r-有限生成射影的且つ $\Delta = \mathrm{Hom}_{\Gamma_r}(\Lambda, \Lambda)$ となるためには，$\mathrm{Hom}_\Delta(\Lambda, \Delta) \ni f_i$, $\Lambda \ni \lambda_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ が存在して $\sum_{i=1}^n f_i(\lambda_i) = 1$ となる事が必要十分である ([5], Appendix 参照)．容易に $f_i(1) \in (\sum_\sigma u_\sigma) \cdot \Lambda$ をうる．故に a) ならば，$\Lambda(\sum u_\sigma)\Lambda \ni \sum_i \lambda_i f_i(1) = \sum f_i(\lambda_i) = 1$ となり b) をうる．逆に b) ならば $1 = \sum_i \lambda_i (\sum u_\sigma) \mu_i$ となる $\lambda_i, \mu_i \in \Lambda$ があり $f_i(x) = x \cdot (\sum_\sigma u_\alpha) \mu_i$ とおけば，$f_i \in \mathrm{Hom}_\Delta(\Lambda, \Delta)$ となり，$\sum_i f_i(\lambda_i) = 1$ より a) をうる．b)$\rightleftarrows$c) は容易である．ε_σ を $\varepsilon_\sigma(\sigma) = 1$, $\varepsilon_\sigma(\tau) = 0$ $(\tau \neq \sigma)$ なる E の元とすれば，$E = \sum_{\sigma \in G} \oplus \Lambda \varepsilon_\sigma$ と表わされる．c) ならば，条件 c) における $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対し $h(\sum x_i \otimes \sigma^{-1}(y_i)) = \varepsilon_\sigma$ となり d) をうる．同時に h は同型写像をうる．即ち $g : E \to \Lambda \otimes_\Gamma \Lambda$；$g(f) = \sum_{\sigma \in G, i} f(\sigma) \cdot \sigma(x_i) \otimes y_i$ $(f \in E)$，は h の逆写像である．逆に $d)$ ならば $h(\alpha) = \varepsilon_1$ となる
$$\alpha = \sum x_i \otimes y_i \in \Lambda \otimes_\Gamma \Lambda$$
が存在する．即ち，$\varepsilon_1(\sigma) = \sum_i x_i \sigma(y_i) = \begin{cases} 1, & \sigma = 1 \\ 0, & \sigma \neq 1 \end{cases}$，c) をうる．

補題 1.1. $\mathrm{Tr}_G(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)$ とおくとき，単位元を有する環 Λ についての次の条件は同値．
4°．$\mathrm{Tr}_G(\Lambda) \ni 1$．4′°．$\Lambda$ は $\Delta(\Lambda, G)$-射影加群．

証明．Λ は Δ-有限生成，従って Λ が Δ-射影的であるための必要十分条件は，任意の $x \in \Lambda$ に対し $x = \sum_i \varphi_i(x) \lambda_i$ なる $\lambda_i \in \Lambda$, $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_\Delta(\Lambda, \Delta)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ が存在することである．しかるに $\varphi_i(x) = x \varphi_i(1)$, $\varphi_i(1) \in (\sum_\sigma u_\sigma)\Lambda$．従って後者は任意の $x \in \Lambda$ に対し，
$$x = x \sum_i ((\sum_\sigma u_\sigma) a_i) \cdot \lambda_i = x \cdot \mathrm{Tr}_G(\sum_i a_i \lambda_i)$$
をみたす $a_i, \lambda_i \in \Lambda$ $i = 1, 2, \cdots, n$ が存在すること，即ち $\mathrm{Tr}_G(a) = 1$ となる $a \in \Lambda$ が存在することである．

定義. Γ を Λ の共通単位元をもつ部分環とする．$\Lambda \otimes_\Gamma \Lambda$, Λ を Λ-Λ-両側加群とみて，写像 $\varphi : \Lambda \otimes_\Gamma \Lambda \to \Lambda$；$\varphi(\lambda \otimes \mu) = \lambda \mu$, が Λ-Λ-準同型写像として split するとき，Λ は Γ 上分離的とよぶ ([6], [37] 参照)．

補題 1.2. Mを忠実Λ-加群, $\Omega = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M)$ とするとき，Λ が可換環 R 上分離的多元環で，M が Λ-有限生成，射影的ならば，Ω もまた R 上分離的，M は Ω-有限生成，射影的，且つ
$$\mathrm{Hom}_\Omega(M, M) = \Lambda$$
である (証明，[23] 参照)．補題より次の定理をうる．

定理 1.2. $\Lambda \supset \Gamma$ を共通単位元をもつ R-多元環，G を Λ の有限自己同型群とするとき，Γ が R 上分離的ならば，(特に $\Gamma = R$)，Λ/Γ が G-ガロア拡大となるための条件は 2° と 3° で充分で，また 2°, 3° をみたすならば 4° もみたされる．

定義. 環 Λ, Γ について，準同型写像 $f, g : \Lambda \to \Gamma$ が Γ の中心に属する任意の巾等元 $e \neq 0$ に対し，$f(x) \cdot e \neq g(x) \cdot e$ となる $x \in \Lambda$ が存在するとき f と g は強相異であるとよぶ．

定理 1.3. 特に可換環 Λ について，$\Lambda \ni 1$, G を Λ の有限自己同型群，$\Lambda^G = \Gamma$ とするとき，次の条件 e) は Λ/Γ が G-ガロア拡大である事と同値である．

e) Λ は Γ 上分離的，且つ G の元は互に強相異．

証明．e) を仮定する．Λ は Γ 上分離的ゆえに，

$\Lambda\otimes_\Gamma\Lambda$ の元 $\sum_i x_i\otimes y_i$ で $\sum_i x_iy_i=1$，すべての $x\in\Lambda$ に対し，$\sum xx_i\otimes y_i=\sum x_i\otimes y_ix$，となるものが存在する．$\sigma\in G$ に対し，写像 $1\otimes\sigma:\Lambda\otimes_\Gamma\Lambda\to\Lambda\otimes_\Gamma\Lambda$ をほどこせば $\sum xx_i\otimes\sigma(y_i)=\sum x_i\otimes\sigma(y_ix)$．即ち $\sum xx_i\sigma(y_i)=\sum x_i\sigma(y_ix)$．$e_\sigma=\sum x_i\sigma(y_i)$ とおけば，$x\in\Lambda$ に対し $xe_\sigma=e_\sigma\sigma(x)$．また

$$e_\sigma=(\sum_i x_iy_i)e_\sigma=\sum_{\sigma,i}x_i\sigma(y_i)e_\sigma=e_\sigma^2$$

故に e_σ は巾等元．$\sigma\neq1$ ならば σ と 1 は強相異ゆえ $e_\sigma=0$．即ち定理 1.1, c) をうる．逆に Λ/Γ が G-ガロア拡大ならば，$\sigma\neq\tau\in G$ に対し，Λ の巾等元 e について，$\sigma(x)e=\tau(x)e$, $x\in\Lambda$ とすれば，定理 1.1, c) における $\{x_i,y_i\}$ をとれば，

$$\sum x_i\tau^{-1}\sigma(y_i)\tau^{-1}(e)=\sum x_iy_i\tau^{-1}(e)$$

即ち，$\tau^{-1}(e)=0$ となり σ,τ は強相異，また次の補題より Λ は Γ 上分離的．

補題 1.3.　Λ/Γ が G-ガロア拡大ならば，Λ は Γ 上分離的である ([37]参照)．

証明．　Λ/Γ が G-ガロア拡大ならば定理1.1, c) の $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ が存在する．$\sum_i x_i\otimes y_i\in\Lambda\otimes_\Gamma\Lambda$ は $\sum x_iy_i=1$，$\sum_i xx_i\otimes y_i=\sum_i x_i\otimes y_ix$，$x\in\Lambda$ をみたす．故に $\varphi:\Lambda\otimes_\Gamma\Lambda\to\Lambda$ は split し Λ は Γ 上分離的である．

2.　基本定理.

定理 2.1.　Λ/Γ を G-ガロア拡大とすれば，G の任意の部分群 H に対し Λ/Λ^H は H-ガロア拡大．H_1,H_2 を G の部分群，$H_1\neq H_2$ ならば $\Lambda^{H_1}\neq\Lambda^{H_2}$．

証明．　定理 1.1, c) 及び定義より明らか．

定理 2.2.　Λ/Γ が G-ガロア拡大，且つ 4° をみたせば，G の任意の部分群 H に対し Λ/Λ^H は 4° をみたす．また H が G の正規部分群ならば，Λ^H/Γ は G/H-ガロア拡大となり，4° をみたす．

証明．　補題 1.1 より Λ は $\Delta(\Lambda,G)$-射影的．G の部分群 H に対し $G=H+H\sigma_2+\cdots+H\sigma_r$ とすれば，$\Delta(\Lambda,G)=\sum_i\oplus\Delta(\Lambda,H)u_{\sigma_i}$．故に Λ は $\Delta(\Lambda,H)$-射影的．よって $\mathrm{Tr}_H(\Lambda)\ni1$．$H$ を G の正規部分群とする．$\mathrm{Tr}_H(z)=1$ をみたす $z\in\Lambda$，及び $\sum x_i\sigma(y_i)=\begin{cases}1 & \sigma=1\\ 0 & \sigma\neq1\end{cases}$ $\sigma\in G$ をみたす $\{x_i,y_i\}$ に対し，$x_i'=\mathrm{Tr}_H(zx_i)$，$y_i'=\mathrm{Tr}_H(y_i)$ とおけば，$x_i',y_i'\in\Lambda^H$．σ_K $(1\leqq K\leqq r)$ に対し，$\sum_i x_i'\sigma_K(y_i')=\sum_{\tau\in H}\tau(z\sum x_i\tau^{-1}\sigma_K\tau(y_i))=\begin{cases}1 & \sigma_K=\sigma_1\\ 0 & \sigma_K\neq\sigma_1\end{cases}$．故に Λ^H/Γ は G/H-ガロア拡大，$\mathrm{Tr}_G=\mathrm{Tr}_{G/H}\circ\mathrm{Tr}_H$ より 4° をみたす．

次に Λ,Γ が可換環 R 上の多元環の場合を考える．

補題 2.1.　G を有限群，Λ を単位元をもつ R-多元環，G は R-多元環 Λ の自己同型群をひきおこすとする．$\Delta(\Lambda,G)$ が R 上分離的ならば，G の任意の部分群 H に対し，$\Delta(\Lambda,H)$ はまた R 上分離的である．また $\Delta(\Lambda,G)$ が R 上分離的であるためには，Λ が R 上分離的，且つ Λ の中心 C に対し $\mathrm{Tr}_G(C)\ni1$ なることが必要且つ十分である．

証明．　H を G の任意の部分群とする．$\Delta(\Lambda,H)$ は $\Delta(\Lambda,G)$ の $\Delta(\Lambda,H)$-左および $\Delta(\Lambda,H)$-右加群として直和因子となるから，$\Delta(\Lambda,H)\otimes_R\Delta(\Lambda,H)\to\Delta(\Lambda,G)\otimes_R\Delta(\Lambda,G)$ は $\Delta(\Lambda,H)$-, $\Delta(\Lambda,H)$-両側加群として split．従つて $\Delta(\Lambda,G)$ が R 上分離的ならば $\Delta(\Lambda,H)$ も R 上分離的，特に $\Lambda=\Delta(\Lambda,(1))$ もまた R 上分離的になる．また $\Delta=\Delta(\Lambda,G)$ が R 上分離的ならば，$\Delta\otimes_R\Delta=\sum_{\sigma,\tau\in G}\Lambda\otimes_R\Lambda\cdot u_\sigma\otimes u_\tau$ の元 $\theta=\sum_{\sigma,\tau}a_{\sigma,\tau}u_\sigma\otimes u_\tau$ が存在して，

$$\varphi(\theta)=\sum\varphi(1\times\sigma(a_{\sigma,\tau}))u_{\sigma\tau}=u_1=1$$

(但し $\sigma\times\tau:\Lambda\otimes_R\Lambda\to\Lambda\otimes\Lambda$)，$\Delta(\Lambda,G)$ の任意の元 α に対し，$\alpha\cdot\theta=\theta\cdot\alpha$ をみたす．容易な計算から，$\sum_{\sigma\in G}\varphi(1\times\sigma(a_{\sigma,\sigma^{-1}}))=1$，$\varphi(a_{1,1})\in C$，$\sigma\times1(a_{\sigma^{-1},\sigma})=a_{1,1}$ $(\sigma\in G)$ をうる．故に $1=\mathrm{Tr}_G(\varphi(a_{1,1}))\in\mathrm{Tr}_G(C)$．逆に Λ が R 上分離的，$\mathrm{Tr}_G(C)\ni1$ とする．$\mathrm{Tr}_G(z)=1$ となる $z\in C$ に対して，Λ の分離性から $a\in\Lambda\otimes_R\Lambda$ が存在して，$\varphi(a)=z$，すべての $\lambda\in\Lambda$ に対し $\lambda\cdot a=a\cdot\lambda$ となる．

$$\theta=\sum_{\sigma\in G}\sigma\times1(a)u_\sigma\otimes u_{\sigma^{-1}}$$

とおけば，$\theta\in\Delta\otimes_R\Delta$ は $\varphi(\theta)=1$ となり，すべての $\alpha\in\Delta$ に対し $\alpha\cdot\theta=\theta\cdot\alpha$．よって Δ は R 上分離的である．

定義．　Λ/Γ を G-ガロア拡大とする．$\Lambda\supset\Lambda_1\supset\Gamma$ なる中間環 Λ_1 が，G の各元について，Λ_1 上で恒等写像 I に等しいかまたは Λ_1 から Λ への写像として I と強相異であるとき，Λ_1 を G-strong 部分環とよぶ．また Λ_1 の中心 C_1 上で 1 に等しいかまたは 1 と強相異であるとき Λ_1 は central G-strong 部分環とよぶ．

定理 2.3.　Λ/Γ を G-ガロア拡大，かつ R-多

元環とする．Γ が R 上分離的ならば，G の任意の部分群 H に対し，Λ^H は R 上分離的，かつ G-strong 部分環．H が正規部分群ならば Λ^H/Γ は G/H-ガロア拡大．

証明．Γ が R 上分離的ならば，補題 1.2 より $\mathrm{Hom}_{\Gamma_r}(\Lambda,\Lambda)\approx\Delta(\Lambda,G)$ も R 上分離的．従って補題 2.1 より $\Delta(\Lambda,H)$ も R 上分離的，再び補題 1.2 より $\Lambda^H\approx\Lambda_r^H=\mathrm{Hom}_{\Delta(\Lambda,H)}(\Lambda,\Lambda)$ は R 上分離的である．次に Λ^H は G-strong 部分環であることを示す．Λ/Γ は定理 1.2 より条件 4° がみたされる．$G=H+\sigma_2H+\cdots+\sigma_rH$ とすれば，定理 2.2 の証明のごとく $\sum_i x_i'\sigma_K(y_i')=\begin{cases}1 & \sigma_K=1\\ 0 & \sigma_K\neq1\end{cases}$ をみたす Λ^H の元 x_i',y_i' が存在する．故に $\sigma\neq1(H)$ ならば，Λ の中心に属する任意の巾等元 $e\neq0$ に対し $\sigma(x)e\neq xe$ となる $x\in\Lambda^H$ が存在する．Λ^H は G-strong 部分環である．

定理 2.3 の逆の場合，即ち $\Lambda\supset\Omega\supset\Gamma$ なる中間環 Ω がどのような条件のもとで，$\Omega=\Lambda^H$ となる G の部分群 H をもつか．これは一般には未解決である．しかし，今少し制限を加えて，$\Gamma=R$ 即ち Λ/R が G-ガロア拡大，かつ Λ は R-多元環になっている場合は部分的に解かれる．

定理 2.4. Λ を R-多元環，Λ/R は G-ガロア拡大とする．S が Λ の中心に含まれた R 上分離的，G-strong 部分環ならば，$S=\Lambda^H$ となる G の部分群 H が存在する．

証明．S は R 上分離的，可換環により定理 1.3 の証明のごとく，$\sum x_i\otimes y_i\in S\otimes_RS$ が存在し，$\sum x_iy_i=1$，すべての $z\in S$ に対し，$\sum zx_i\otimes y_i=\sum x_i\otimes y_iz$．$\sigma\in G$ に対し，$e_\sigma=\sum_i\sigma(x_i)y_i$ とおけば，$z\in S$ に対し，$\sigma(z)=e_\sigma=e_\sigma z$，$e_\sigma^2=e_\sigma$．$S$ の G-strong 性より $e_\sigma=\sum_i\sigma(x_i)y_i=\begin{cases}1 & \sigma|S=1\\ 0 & \sigma|S\neq1\end{cases}$.
$H=\{\sigma\in G\,;\,\sigma|S=1\}$ とするとき，$\mathrm{Hom}_S(\Lambda,\Lambda)\approx\Delta(\Lambda,H)$ を示す．$\Delta(\Lambda,G)\approx\mathrm{Hom}_R(\Lambda,\Lambda)$ より，$\mathrm{Hom}_S(\Lambda,\Lambda)\approx V_{\Delta(\Lambda,G)}(S)$ の元 $\alpha=\sum_{\sigma\in G}\lambda_\sigma u_\sigma$ をとれば，$x\in\Lambda$，$y\in S$ に対し，

$$\sum_{\sigma\notin H}\lambda_\sigma\sigma(x)\sigma(y)+\Big(\sum_{\tau\in H}\lambda_\tau\tau(x)-\sum_{\sigma\in G}\lambda_\sigma\sigma(x)\Big)y=0$$

をみたす．$y=x_i$ とおき y_i を乗じて，i について和をとれば，$\sum_{\tau\in H}\lambda_\tau\tau(x)=\sum_{\sigma\in G}a_\sigma\sigma(x)$，$(x\in\Lambda)$，を得る．即ち $\alpha=\sum_\sigma\lambda_\sigma u_\sigma=\sum_{\tau\in H}\lambda_\tau u_\tau$ は $\Delta(\Lambda,H)$ に属す．明らかに $\Delta(\Lambda,H)\subset\mathrm{Hom}_S(\Lambda,\Lambda)$．故に $\Delta(\Lambda,H)=\mathrm{Hom}_S(\Lambda,\Lambda)$ を得る．補題 1.2 より

$$S=\mathrm{Hom}_{\Delta(\Lambda,H)}(\Lambda,\Lambda)=\Lambda^H$$

を得る．

系 2.1. Λ を特に可換環，Λ/R を G-ガロア拡大とすれば，R 上分離的且つ G-strong な中間環 Ω の集合と，G の部分群の集合とは関係 $\Omega=\Lambda^H$ のもとで 1 対 1 に対応する．さらに Λ が 0，1 以外に巾等元をもたなければ Λ の R 上分離的な部分環の集合と G の部分群の集合は，1 対 1 ガロア対応がつく．

次に外部自己同型群をガロア群にもつガロア拡大を考える．

定義． Λ の自己同型群 G が，Λ の中心 C の上に忠実に作用するとき，G は外部的とよぶ．Λ/Γ が G-ガロア拡大で，且つ G は外部的であるとき，Λ/Γ は G-外部的ガロア拡大とよぶ．

定理 2.5. Λ を単位元をもち，有限外部的自己同型群をもつ環とする．C を Λ の中心とすれば，

（1） C/C^G が G-ガロア拡大ならば，Λ/Λ^G は G-外部的ガロア拡大である．

（2） R を $1\in R\subset C^G$ なる可換部分環とする．Λ が R 上分離的，且つ Λ が central G-strong ならば，Λ/Λ^G は G-外部的ガロア拡大である．またこのとき，$\Lambda\supset\Omega\supset\Lambda^G$ となる R 上分離的且つ central G-strong 中間環 Ω の集合と，G の部分群 H の集合との間に，$\Omega=\Lambda^H$ により 1 対 1 ガロア対応がつく．

（3） R を $1\in R\subset C^G$ なる可換環とする．Λ が R上分離的，且つ C は 0, 1 以外に巾等元をもたなければ，Λ/Λ^G は G-外部的ガロア拡大であり，R 上分離的な中間環の集合と G の部分群の集合との間に 1 対 1 ガロア対応がつく．

証明．(1) は定理 1.1, c) より明らか．(3) は (2) の特殊な場合である．(2) を証明するために次の補題を用う．

補題 2.2. Λ が Λ の中心 R 上分離的であるとき，Λ の部分 R-多元環 Γ が R 上分離的ならば，$V_\Lambda(\Gamma)=\{x\in\Lambda\,|\,yx=xy,\ \forall y\in\Lambda\}$ もまた R 上分離的であり $V_\Lambda(V_\Lambda(\Gamma))=\Gamma$ となる（証明は[23]定理 2 参照）．

定理の (2) を証明する．Λ は R 上分離的，従っ

て C は R 上分離的([6]参照), 従って C は C^G 上分離的. Λ は central G-strong であるから, 定理1.3より C/C^G は G-ガロア拡大. 従つて(1)より Λ/Λ^G は G-外部的ガロア拡大. C/C^G は条件4° をみたす, 即ち $\mathrm{Tr}_G(C)\ni 1$. 補題2.1より $\Delta(\Lambda, G)$ は C^G 上分離的, また $\Delta(\Lambda, G)$ の中心の元 $\sum_\sigma \lambda_\sigma u_\sigma$ はすべての $x\in C$ に対し, $\lambda_\sigma\sigma(x)=\lambda_\sigma x$ をみたす. Λ は C-射影的であるから, $\lambda_\sigma\neq 0$ ならば $c_\sigma\neq 0$ なる C の元が存在して, $c_\sigma\sigma(x)=c_\sigma x$ $(x\in C)$ をみたす. C/C^G の G-ガロア拡大なることより $\sigma\neq 1$ に対し $\lambda_\sigma=0$ を得, $\Delta(\Lambda, G)$ の中心は Λ に含まれ, 且つ C^G に一致することを得る. 即ち, $\Delta(\Lambda, G)$ は C^G 上中心分離的である. 定理2.3において, ガロア対応の前半は証明したから後半を示せばよい. そのために $C^G=R$ と仮定して充分である. 今 $\Lambda\supset\Omega\supset\Lambda^G$ なる R 上分離的 central G-strong 部分環 Ω は, $\Delta=\Delta(\Lambda, G)$ の R-部分多元環とみれば, 補題2.2より $V_\Delta(\Omega)$ は R 上分離的, $V_\Delta(V_\Delta(\Omega))=\Omega$ である. 一方 $V_\Delta(\Lambda)=C$, $V_\Delta(\Lambda^G)=\Delta(C, G)$ より, $V_\Delta(\Omega)=T$, $\Delta(C, G)=\Delta_0$ とおけば, $R\subset C\subset T\subset\Delta_0$, 且つ Δ_0 はまた R 上中心分離的. 再び補題2.2より $V_{\Delta_0}(T)$ は R 上分離的 $V_{\Delta_0}(V_{\Delta_0}(T))=T_0$, $V_{\Delta_0}(T)=S$ とおく. $V_{\Delta_0}(C)=C$, $V_{\Delta_0}(\Delta_0)=R$ より, $R\subset S\subset C$ であり,

$$S=V_{\Delta_0}(V_\Delta(\Omega))=V_\Delta(V_\Delta(\Omega))\cap\Delta_0=\Omega\cap\Delta_0=\Omega\cap C.$$

一方

$$V_\Omega(\Omega)=\Omega\cap V_\Delta(\Omega)=\Omega\cap V_\Delta(V_\Delta(T))$$
$$=\Omega\cap T\subseteqq\Omega\cap\Delta_0=S.$$

故に S は Ω の中心である. 従って S は C の G-strong 部分環, Ω の R 上分離的より, S は R 上分離的([6]参照). 故に系2.1より G の部分群 H が存在して, $S=C^H$. 従つて $\Delta(C, H)=\mathrm{Hom}_S(C, C)$. 故に, $T=V_{\Delta_0}(S)=V_{\mathrm{Hom}_R(C,C)}(S)=\mathrm{Hom}_S(C, C)=\Delta(C, H)$. 即ち, $\Omega=V_\Delta(T)=V_\Delta(\Delta(C, H))=\Lambda^H$.

系 2.2. Λ/Λ^G を定理2.5, (2)をみたす外部的ガロア拡大とすれば, $C^G=C\cap\Lambda^G$ は Λ^G の中心で, $\Lambda\approx C\otimes_{C^G}\Lambda^G$ となる.

証明. 前定理の証明から, $C^G=C\cap\Lambda^G$ は Λ^G の中心. $\Lambda^G\subset\Delta(\Lambda, G)$ は共に C^G-中心分離的, 故に

$$\Delta(\Lambda, G)\approx\Lambda^G\otimes_{C^G}V_\Delta(\Lambda^G)$$
$$=\Lambda^G\otimes_{C^G}\Delta(C, G)=\Delta(\Lambda^G\otimes_{C^G}C, G)$$

([6]参照). 故に, $\Lambda\approx C\otimes_{C^G}\Lambda^G$.

上述のような外部的ガロア拡大における環自己同型写像について次の定理を得る.

定理 2.6. Λ/Λ^G を前定理(1)をみたす外部的ガロア拡大とする. 1) Λ の Λ^G の元を動かさない環自己同型写像 ρ は次の形に表わされる; $\rho(x)=\sum e_\sigma\sigma(x)$, $x\in\Lambda$, e_σ は Λ の中心 C の互に直交する巾等元で, $\sum_{\sigma\in G}e_\sigma=1$, 且つ $\sigma\neq\tau$ に対し $e_\sigma\neq 0$, $e_\tau\neq 0$ ならば $\sigma^{-1}(e_\sigma)\neq\tau^{-1}(e_\tau)$ をみたす. 2) $e_1, e_2, \cdots, e_n$ を互に直交する C の巾等元で $\sum e_i=1$ とする. e_i, $1\leqq i\leqq n$ が, (イ) C^G に属すかまたは (ロ) C の原始巾等元であるとき, G の n 個の元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ に対し, $\sigma_i^{-1}(e_i)\neq\sigma_j^{-1}(e_j)$ $(i\neq j)$ ならば, $\rho=\sum e_i\sigma_i$ は Λ^G の元を動かさない Λ の環自己同型写像である.

証明. (1) $\rho\in\mathrm{Hom}_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda)=\Delta(\Lambda, G)$ より $\rho=\sum e_\sigma\cdot u_\sigma$ と表わされる. 環自己同型写像なることから, $e_\sigma\cdot\sigma(x)=\sum_{\tau\in G}e_\tau\tau(x)e_\sigma$ $(x\in\Lambda)$ を得る. とくに $x\in C$ をとれば C/C^G がガロア拡大であることから, $e_\sigma^2=e_\sigma$, $e_\sigma e_\tau=0$, $(\sigma\neq\tau)$, $1=\rho(1)=\sum_{\sigma\in G}e_\sigma$ を得る. 再び上式で x の代りに xy, $x\in\Lambda$, $y\in C$, をとれば, $e_\sigma\sigma(x)\sigma(y)=\sum_{\tau\in G}e_\tau\tau(x)e_\sigma\tau(y)$, 従つて $e_\sigma\sigma(x)=e_\sigma\sigma(x)e_\sigma$, $e_\tau\tau(x)e_\sigma=0$ $(\sigma\neq\tau)$, $(x\in\Lambda)$, よって $e_\sigma\in C$ を得る. $\rho(\Lambda)=\Lambda$ より, 任意の $y\in\Lambda$ に対し, $x\in\Lambda$ が存在して, $y=\sum_\sigma e_\sigma\sigma(x)$, 即ち, $\sigma^{-1}(e_\sigma y)=\sigma^{-1}(e_\sigma)x$, をみたす. 故に $\sigma\neq\tau$, $e_\sigma\neq 0$, $e_\tau\neq 0$ ならば $\sigma^{-1}(e_\sigma)\neq\tau^{-1}(e_\tau)$ を得る. (2) 容易な計算から $\rho=\sum e_i\sigma_i$ は Λ の Λ^G の元を動かさない環自己準同型写像であることが示される. (イ) の場合は逆写像 $\rho^{-1}=\sum_i e_i\sigma_i^{-1}$ をもつ. (ロ) の場合 $\sigma_i^{-1}(e_i)\neq\sigma_j^{-1}(e_j)$ $(i\neq j)$ より

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}=\{\sigma_1^{-1}(e_1), \sigma_2^{-1}(e_2), \cdots, \sigma_n^{-1}(e_n)\}$$

となり, $1=\sum\sigma_i^{-1}(e_i)$ を得る. 任意の $y\in\Lambda$ に対し, $x=\sum\sigma_i^{-1}(e_i)\sigma_i^{-1}(y)$ とおけば $\rho(x)=y$ を得る. また $\sum\sigma_i^{-1}(e_i)\sigma_i^{-1}(\rho(x))=x$ となり ρ は自己同型写像である.

系 2.3. $\Lambda\supset R\ni 1$, Λ は R 上分離的, R-多元環, Λ の中心 C は 0, 1 以外に巾等元をもたないとする. G を $\Lambda^G\supset R$ なる Λ の有限外部的自己同型群とするとき, Λ^G の元を動かさない Λ の自己同型写像はすべて G に属する.

3. ガロア多元環.

この節では R は単位元をもつ可換環, Λ は一般に単位元を仮定しない R-多元環とする.

定義. R-多元環 Λ, 有限群 G について, G は Λ に R-多元環自己同型群として作用し, Λ は群環 $R(G)$ に $R(G)$-加群として同型であるとき, Λ は G-ガロア多元環とよぶ. G-ガロア多元環 Λ_1, Λ_2 が R-多元環として, 同時に $R(G)$-加群として同型であるとき, G-ガロア多元環 Λ_1, Λ_2 は同型であるという.

G-ガロア多元環の同型類に 'Resolventenfactor' が対応つけられるが, ここで[13]に従ってこれを見たい. 群環 $R(G)$ は, これを単に $R(G)$-左加群と見て新たに適当な乗法を導入することにより, G-ガロア多元環にすることができる. また任意の G-ガロア多元環はそのようにして得た G-ガロア多元環 $R(G)$ の一つと同型である. 即ち, 任意の G-ガロア多元環の同型類の代表として, 次の条件をみたす乗法; $m: R(G)\otimes_R R(G)\to R(G)$ をもつ G-ガロア多元環 $(R(G), m)$ を考えることができる.

α) $R(G)\otimes_R R(G)$ を, $\xi\otimes\mu\in R(G)\otimes_R R(G)$, $\eta=\sum_{\sigma\in G} a_\sigma\cdot\sigma\in R(G)$ に対し

$$\eta\cdot(\xi\otimes\eta)=\sum_{\sigma\in G} a_\sigma(\sigma\xi\otimes\sigma\mu)$$

として $R(G)$-左加群と見るとき, $m: R(G)\otimes_R R(G)\to R(G)$ は $R(G)$-準同型写像であり,

β) $m\circ(m\otimes I)=m\circ(I\otimes m)$, (結合則) をみたす.

このことを $R(G)^*=\mathrm{Hom}_R(R(G), R)$ について見なおす. $f\in R(G)^*$, $\sigma,\tau\in G$ に対し, $(\sigma\cdot f)(\tau)=f(\sigma^{-1}\cdot\tau)$ により $R(G)^*$ を $R(G)$-左加群と見れば, 条件 α) は $m^*: R(G)^*\to R(G)^*\otimes_R R(G)^*$ が $R(G)$-準同型写像であることであり, β) は $(m^*\otimes 1)\circ m^*=(1\otimes m^*)\circ m^*$ となる. $\varepsilon_\sigma\in R(G)^*$ を $\varepsilon_\sigma(\sigma)=1$, $\varepsilon_\sigma(\tau)=0$ $(\sigma\neq\tau)$ とすれば, $R(G)^*=\sum_{\sigma\in G}\oplus R\varepsilon_\sigma$ は, 対応 $\varepsilon_\sigma\longleftrightarrow\sigma$ により, $R(G)$ と $R(G)$-同型となり, $R(G)^*$ と $R(G)$ を同一視すれば, α), β) をみたす $(R(G), m)$ を考えることは,

α^*) $m^*: R(G)\to R(G)\otimes_R R(G)$ は $R(G)$-準同型写像.

β^*) $(m^*\otimes I)\circ m^*=(I\otimes m^*)\circ m^*$.

をみたす $(R(G), m^*)$ を考えることにほかならない. $(R(G), m_1^*)$, $(R(G), m_2^*)$ が G-ガロア多元環の同じ同型類を代表するための条件は次のごとく与えられる.

γ^*) $R(G)$-同型写像 $\Phi: R(G)\to R(G)$ が存在して, $m_1^*=(\Phi\otimes\Phi)\circ m_2^*$ をみたす.

[38]で導入されたつぎの記号(環準同型写像)を用いる. $R(G)\ni\sum_{\sigma_i\in G} a_i\sigma_i$ に対し,

$(\sum a_i\sigma_i)^{H_1}=\sum a_i(\sigma_i\otimes 1)$, $(\sum a_i\sigma_i)^{H_2}=\sum a_i(1\otimes\sigma_i)$, $(\sum a_i\sigma_i)^{H_{12}}=\sum a_i(\sigma_i\otimes\sigma_i)$. 即ち $H_1, H_2, H_{12}: R(G)\to R(G)\otimes R(G)$. また, $\sum_i a_i\sigma_i\otimes\tau_i\in R(G)\otimes_R R(G)$ に対し, $(\sum_i a_i\sigma_i\otimes\tau_i)^{H_{12,3}}=\sum a_i\sigma_i\otimes\sigma_i\otimes\tau_i$,

$$(\sum a_i\sigma_i\otimes\tau_i)^{H_{1,23}}=\sum_i a_i\sigma_i\otimes\tau_i\otimes\tau_i,$$

$$(\sum a_i\sigma_i\otimes\tau_i)^{H_{1,2}}=\sum a_i\sigma_i\otimes\tau_i\otimes 1,$$

$$(\sum a_i\sigma_i\otimes\tau_i)^{H_{2,3}}=\sum a_i\, 1\otimes\sigma_i\otimes\tau_i.$$

即ち, $H_{*,*}: R(G)\otimes R(G)\to R(G)\otimes R(G)\otimes R(G)$. α^*) の $R(G)$-準同型写像 m^* は $m^*(1)=c\in R(G)\otimes_R R(G)$ で完全に定まる. 条件 β^*) は $m^*(1)=c$ についての次の条件;

B) $c^{H_{12,3}}\cdot c^{H_{1,2}}=c^{H_{1,23}}\cdot c^{H_{2,3}}$, (但し積は群環の乗法による $R(G)\otimes_R R(G)$ における積) に置きかえられる. 故に G-ガロア多元環 $(R(G), m)$ は, B) をみたす $R(G)\otimes_R R(G)$ の元 c をもつ $(R(G), c)$ によって定まる. $(R(G), c_1)$, $(R(G), c_2)$ が同じ同型類を代表するための条件は,

D) $u^{H_{12}}\cdot c_1=c_2\cdot u^{H_1}\cdot u^{H_2}$ をみたす群環 $R(G)$ の可逆元 u が存在することである.

注意. $G(R^0)=R$,

$$R(G^n)=\overbrace{R(G)\otimes_R R(G)\otimes\cdots\otimes R(G)}^{n\text{ 個}}$$

とおく. R-準同型写像, $H_{1,2,\cdots,k(k+1),k+2,\cdots,n+1}$: $R(G^n)\to R(G^{n+1})$ を

$$(\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\cdots\otimes\sigma_n)^{H_{1,2,\cdots,k(k+1),\cdots,n+1}}=\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\cdots\otimes\sigma_{k-1}\otimes\sigma_k\otimes\sigma_k\otimes\sigma_{k+1}\otimes\cdots\otimes\sigma_n,$$

$H_{1,2,\cdots,n}: R(G^n)\to R(G^{n+1})$ を

$$(\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\cdots\otimes\sigma_n)^{H_{1,2,\cdots,n}}=\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\cdots\otimes\sigma_n\otimes 1,$$

により, $H_{2,3,\cdots,n,n+1}: R(G^n)\to R(G^{n+1})$ を

$$(\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\cdots\otimes\sigma_n)^{H_{2,3,\cdots,n,n+1}}=1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_2\otimes\cdots\otimes\sigma_n,$$

により定義する. G がアーベル群ならば, 可換環 $R(G^n)$ の可逆元のなす乗法群 $U(R(G^n))$ において, $\delta^n: U(R(G^n))\to U(R(G^{n+1}))$ を $\delta^n=H_{2,3,\cdots,n,n+1}+\sum_{K=1}^{n}(-1)^k H_{1,2,\cdots,k(k+1),k+2,\cdots,n+1}+(-1)^n H_{1,2,\cdots,n}$

により定義すれば，$\delta^n \circ \delta^{n+1}=0$ となり，$H^n(R,G)=\ker\delta^n/\mathrm{Im}\,\delta^{n-1}$ は Harrison の n-cohomology group とよばれる．

定理 3.1. G-ガロア多元環 $(R(G),c)$ が R の G-ガロア拡大になるための条件は c が群環の直積 $R(G)\otimes_R R(G)$ の可逆元となることである．

証明．G-ガロア多元環 $(R(G),c)=(R(G),m)$，$(m^*(1)=c)$，が R の G-ガロア拡大であるための条件は，定理 1.1, d) により，$(R(G),m)$ が単位元をもち，写像 $h: R(G)\otimes_R R(G)\to E=\mathrm{Map}(G,R(G))=\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))$，$h(a\otimes b)(\gamma)=m(a\otimes\gamma b)$，$a\otimes b\in R(G)\otimes_R R(G)$，$\gamma\in G$，が同型写像であることである．まず h が同型写像ならば，G-ガロア多元環 $(R(G),m)$ は単位元をもつことを示す．$I\in\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))$ に対し，$h(\xi)=I$ なる $\xi=\sum a_{\sigma,\tau}\sigma\otimes\tau\in R(G)\otimes_R R(G)$ が存在する．すべての $\gamma\in G$ に対し

$$\gamma=I(\gamma)=h(\textstyle\sum a_{\sigma,\tau}\sigma\otimes\tau)(\gamma)=\sum a_{\sigma,\tau}m(\sigma\otimes\gamma\tau).$$

$\delta\in G$ を乗ずれば，$\delta\gamma=\sum a_{\sigma,\tau}\delta\cdot m(\sigma\otimes\gamma\tau)=\sum a_{\sigma,\tau}m(\delta\sigma\otimes\delta\gamma\tau)=h(\sum a_{\sigma,\tau}\delta\sigma\otimes\tau)(\delta\gamma)$．$h$ の1対1性より $\xi=\sum_{\sigma,\tau}a_{\sigma,\tau}\delta\sigma\otimes\tau=\sum_{\sigma,\tau}a_{\sigma,\tau}\sigma\otimes\tau$ $(\delta\in G)$ を得る．即ち，$\xi=\sum_\sigma a_\sigma u\otimes\sigma$，$(u=\sum_{\tau\in G}\tau)$，で与えられる．故に

$$1=h(\textstyle\sum a_\sigma u\otimes\sigma)(1)=\sum_\sigma a_\sigma m(u\otimes\sigma)$$
$$=(\textstyle\sum_\sigma a_\sigma\sigma)m(u\otimes 1)=m(u\otimes\sum a_\sigma\sigma).$$

$(R(G),m)$ の結合則より，

$$m(u\otimes 1)=\{\textstyle\sum a_\sigma\sigma m(u\otimes 1)\}\cdot m(u\otimes 1)$$
$$=m(u\otimes m(u\otimes\textstyle\sum a_\sigma\sigma))=m(m(u\otimes u)\otimes\sum a_\sigma\sigma).$$

任意の $\sigma\in G$ に対し，$\sigma\cdot m(u\otimes u)=m(u\otimes u)$ より $m(u\otimes u)=au$ となる $a\in R$ が存在する．故に $m(u\otimes 1)=m(au\otimes\sum a_\sigma\sigma)=a$．即ち $a=m(u\otimes 1)$ は $R(G)$ において，従つて R において可逆元．即ち $m(a^{-1}u\otimes 1)=1$，故にすべての $\sigma\in G$ に対し $m(a^{-1}u\otimes\sigma)=\sigma$ を得る．即ち，$a^{-1}u$ は $(R(G),m)$ の左単位元をなす．一方，写像

$K:\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))\to\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))$；$K(f)(\gamma)=\gamma f(\gamma^{-1})$，$(\gamma\in G)$，$f\in\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))$ は R-同型写像をなす．よって，

$$1\in\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))$$

に対し $1=K\circ h(\xi')$ となる $\xi'\in R(G)\otimes_R R(G)$ が存在し，上と同様に $\xi'=\sum_{\sigma\in G}b_\sigma\sigma\otimes u$ と表わされ，$a^{-1}u$ は $(R(G),m)$ の右単位元をなすことが示される．よって，定理を証明するためには，

'c が $R(G)\otimes_R R(G)$ の可逆元' $\rightleftarrows$ 'h が同型写像' を示せば十分．また

$$h^*:\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G)),R)\to R(G)\otimes_R R(G)\approx R(G)^*\otimes R(G)^*,$$

を考えれば 'h が同型写像' $\rightleftarrows$ 'h^* が同型写像' であり，$g\in\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))$ に対し

$$[(\sigma\otimes\tau)g](\gamma)=\sigma\cdot g(\sigma^{-1}\gamma\tau),\quad \sigma,\tau,\gamma\in G,$$

により，$\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))$ を $R(G)\otimes_R R(G)$-左加群，環 $R(G)\otimes_R R(G)$ の左乗法として，$R(G)\otimes R(G)$ を $R(G)\otimes_R R(G)$-左加群とみれば，h は $R(G)\otimes_R R(G)$-準同型写像であり，また，

$$f\in\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G)),R)$$

に対し，$[(\sigma\otimes\tau)f](g)=f((\sigma^{-1}\otimes\tau^{-1})\cdot g)$ により $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G)),R)$ を $R(G)\otimes R(G)$-左加群とみれば，h^* は $R(G)\otimes R(G)$-準同型写像である．一方，写像 $\theta: R(G)^*\otimes_R R(G)\to\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G)),R)$; $[\theta(f\otimes\sigma)](g)=f(g(\sigma))$，$f\in R(G)^*$，$g\in\mathrm{Hom}_R(R(G),R(G))$ は，$(\sigma\otimes\tau)(f\otimes\gamma)=\sigma f\otimes\sigma\gamma\tau^{-1}$，(但し $\sigma\cdot f(\gamma)=f(\sigma^{-1}\cdot\gamma)$，$\sigma,\tau,\gamma\in G$，$f\in R(R)^*$) により，$R(G)^*\otimes_R R(G)$ を $R(G)\otimes R(G)$-左加群と見れば，$R(G)\otimes_R R(G)$-同型写像である ([10], p. 120 参照)．従って，'$R(G)\otimes_R R(G)$-準同型写像 $h^*\circ\theta: R(G)^*\otimes_R R(G)\to R(G)\otimes_R R(G)$ が同型写像' $\rightleftarrows$ 'h が同型写像' を得る．$R(G)^*\otimes_R R(G)$ の生成元 $\varepsilon_\sigma\otimes\tau$，$(\sigma,\tau\in G)$ に対して，$\varepsilon_\sigma\otimes\tau=(\sigma\otimes\tau^{-1}\sigma)\cdot(\varepsilon_1\otimes 1)$ となることから，$R(G)^*\otimes_R R(G)$ は $R(G)\otimes R(G)$-左自由加群として $\varepsilon_1\otimes 1$ で生成される．また $h^*\circ\theta(\varepsilon_1\otimes 1)=m^*(1)=c$ となることから，$h^*\circ\theta$ が同型写像であるための条件は，$\mathrm{Im}(h^*\circ\theta)=R(G)\otimes R(G)\cdot c=R(G)\otimes R(G)$ かつ，$\xi\in R(G)\otimes_R R(G)$ に対し，$\xi c=0$ ならば $\xi=0$，となることである．即ち c が $R(G)\otimes_R R(G)$ の可逆元であることである．

(証明終)

特に G がアーベル群の場合を考えると，

系 3.1. G がアーベル群ならば，R 上の G-ガロア多元環の同型類の集合の中で，G-ガロア拡大をなす同型類の全体は，Harrison の2次のコホモロジー群 $H^2(R,G)$ の上に1対1に写像される．

G がアーベル群の場合において，G-ガロア多元

環の G-ガロア拡大になるための別の特長づけを考えるために，

定義. 可換環 R 上の単位元を有する多元環 Λ が，次の条件 (1), (2) をみたす $\sum_i a_i\otimes b_i\in\Lambda\otimes_R\Lambda$ をもつとき，Λ を R-強分離多元環とよぶ．

（1） すべての $\lambda\in\Lambda$ に対して
$$\sum a_i\lambda\otimes b_i=\sum_i a_i\otimes\lambda b_i.$$

（2） $\sum_i a_ib_i=1$.

補題 3.1. 次の条件は同値である．

a) Λ は R-強分離的多元環.

b) Λ は R 上分離的で，且つ $\Lambda=C\oplus[\Lambda,\Lambda]$ 但し，C は Λ の中心，$[\Lambda,\Lambda]$ は $xy-yx$, $(x, y\in\Lambda)$ で生成された C-加群（証明は[27]参照).

定理 3.2. 単位元を有する R 上の G-ガロア多元環 Λ が R-強分離的，かつ G がアーベル群ならば，Λ は R 上の G-ガロア拡大である．

証明. $\Lambda=\sum_{\sigma\in G}\oplus R\sigma(\vartheta)$, $\vartheta\in\Lambda$, とする．容易な計算から $\Lambda^G=R\cdot\mathrm{Tr}_G(\vartheta)=\mathrm{Tr}_G(\Lambda)=R\ni1$ をうる．補題3.1より $\Lambda=c\oplus[\Lambda,\Lambda]$. 従って $\mathrm{Tr}_G(c)=1$ となる $c\in C$ が存在する．補題2.1より $\Delta(\Lambda,G)$ は R 上分離的. G がアーベル群，$\Lambda=\sum\oplus R\sigma(\vartheta)$ より $\Delta(\Lambda,G)$ の中心は R, 即ち $\Delta(\Lambda,G)$ は R-中心分離的．従つて $\delta:\Delta(\Lambda,G)\to\mathrm{Hom}_R(\Lambda,\Lambda)$ は同型写像となる．即ち Λ/R は G-ガロア拡大である．

定義. σ が環 Λ の自己同型写像であるとき，$J_\sigma=\{\lambda\in\Lambda|\sigma(x)\lambda=\lambda x,\ \forall x\in\Lambda\}$ とおく．

定理 3.3. Λ/R が G-ガロア拡大ならば $\Lambda=\sum_{\sigma\in G}\oplus J_\sigma$ と表わされる．各 $\sigma\in G$ に対し $J_\sigma\cdot J_{\sigma^{-1}}$ は Λ の中心 C の巾等なイデアルで C の1つの巾等元で生成される．

証明. $\Delta=\Delta(\Lambda,G)$ と $\mathrm{Hom}_R(\Lambda,\Lambda)$ を同型写像 δ で同一視すれば，$V_\Delta(\Lambda)=\mathrm{Hom}_{\Lambda_l}(\Lambda,\Lambda)=\Lambda_r$, (但し $\Lambda_l,(\Lambda_r)$ は Λ による左（右）乗法). 一方 $V_\Delta(\Lambda)=\sum_{\sigma\in G}J_{\sigma^{-1}}u_\sigma=(\sum_{\sigma\in G}\oplus J_{\sigma^{-1}})_r$. 故に $\Lambda=\sum_{\sigma\in G}\oplus J_\sigma$. $J_\sigma J_{\sigma^{-1}}=\mathfrak{C}_\sigma\subset C$, $\mathfrak{C}_\sigma=C\cap J_\sigma\Lambda$, Λ は C-中心分離的，故に $\mathfrak{C}_\sigma\Lambda=J_\sigma\Lambda$ ([34]参照). 従って $\mathfrak{C}_\sigma J_\sigma=J_\sigma$ 即ち $\mathfrak{C}_\sigma J_\sigma J_{\sigma^{-1}}=J_\sigma J_{\sigma^{-1}}$. C は R-有限生成であるから巾等イデアル $\mathfrak{C}_\sigma$ は C の巾等元で生成される．

定理 3.4. Λ を R-分離多元環，G を Λ の有限 R-自己同型群とすれば，

1) $\Lambda=\sum_{\sigma\in G}\oplus J_\sigma$, $J_\sigma J_{\sigma^{-1}}=C$ $(\sigma\in G)$, ならば Λ/C は G-ガロア拡大である．但し C は Λ の中心.

2) $\Lambda^G=G$, 且つ $\sigma\neq1$ なるすべての $\sigma\in G$ に対し $J_\sigma=0$ ならば Λ/R は G-ガロア拡大で Λ は可換環である．

証明. 1) Λ は中心 C 上分離的，従って $\mathrm{Hom}_C(\Lambda,\Lambda)\approx\Lambda_r\otimes_C\Lambda_l$ ([6]参照), $\Lambda_r=\sum_{\sigma\in G}\oplus(J_\sigma)_r=\sum\oplus(J_\sigma)_l\cdot\sigma^{-1}$ より $\Lambda_r\otimes_C\Lambda_l=\sum\oplus(J_\sigma)_l\Lambda_l\sigma^{-1}=\sum\oplus(J_\sigma\Lambda_l\sigma^{-1}=\sum\oplus\Lambda_l\cdot\sigma^{-1}\approx\Delta(\Lambda,G)$. (但し $J_\sigma\Lambda=\Lambda J_\sigma=\Lambda$ [34]参照). 故に Λ/C は G-ガロア拡大. 2) Λ は R-分離的であるから $\sum_i x_i\otimes y_i\in\Lambda\otimes_R\Lambda$ が存在して，すべての $x\in\Lambda$ に対し $\sum xx_i\otimes y_i=\sum x_i\otimes y_ix$, $\sum x_iy_i=1$. $\sigma\in G$ に対し，$e_\sigma=\sum_i x_i\sigma(y_i)\in J_\sigma=0$ $(\sigma\neq1)$. 即ち $x_1, x_2,\cdots,x_n$, $y_1,y_2,\cdots,y_n$ は定理1.1, c) を満足する．故に Λ/R は G-ガロア拡大，従って $\Lambda=\sum_{\sigma\in G}\oplus J_\sigma=J_1=C$ は可換環.

定理 3.5. Λ/G を G-ガロア拡大，C を Λ の中心とするとき，Λ/C がガロア拡大ならば，Λ は R-強分離多元環である（証明[25]参照).

定理 3.6. R を 0, 1 以外に巾等元をもたない可換環，Λ/R を G-ガロア拡大とする．$1=e_1+e_2+\cdots+e_n$ を Λ の中心 C における互に直交する原始巾等元への分解，$T_i=\{\sigma\in G\,;\sigma(e_i)=e_i\}$, $H=\{\sigma\in G\,;\sigma|C=1\}$, $H_i=\{\sigma\in G\,;\sigma|Ce_i=1\}$ とする．$\Lambda^H=C$（即ち $\Lambda/C:H$-ガロア拡大）であるための必要且つ十分な条件は H_1 が G の正規部分群をなすことである（証明[19]参照).

定理3.5, 3.6より次の系を得る．

系 3.1. Λ/R が G-ガロア拡大，且つ G がアーベル群ならば，Λ は R-強分離多元環である（証明[25]参照).

定理 3.7. Λ/R が G-ガロア拡大，G が巡回群ならば Λ は可換環である（証明[25]参照).

定理3.2の逆として，次の定理を得る．

定理 3.8. R を半局所環，G を有限アーベル群，Λ/R を G-ガロア拡大とすれば，Λ は R 上の G-ガロア多元環になる．また Λ が可換環ならばアーベルでない群 G に対しても，Λ は R 上 G-ガロア多元環になる（証明[11], [26]参照).

4. Brauer 群.

体 K 上の中心的単純分離多元環で K の有限ガ

ロア拡大体 L を分解体として持つものの作るBrauer 群と，L のガロア群の2次のコホモロジー群との同型，および Hilbert-Speiser の定理；$H^1(G, L^*)=0$ は周知のとおりである．最近東屋，Auslander および Goldman によって任意の可換環 R 上の中心的分離多元環およびそれらの Brauer 群が定義され，上述の諸結果が東屋，Auslander, Goldman, Chase および Rosenberg[6], [12], [7] によって R 上の分離多元環にまで拡張された．ここでは[12]の方法を紹介するが頁数の関係上その概略のみにとどめておく．

I) $A(S, T)$

以下 R を可換環，R 上の多元環 Λ としては R-有限生成加群になっているもののみを考える．また Bourbaki にしたがって，R 中心的分離多元環を東屋環と呼ぶことにする．Brauer 群を定義するために次の補題が必要である．

補題 4.1. R を可換環とし，E を忠実有限 R-加群で射影的であるとする．このとき $\mathrm{End}_R(E)=\mathrm{Hom}_R(E, E)$ は R 上東屋環である．また Λ, Λ' を R-多元環で E_1, E_2 を有限生成 Λ, Λ'-射影的加群とすれば，

$$\mathrm{End}_\Lambda(E_1)\otimes_R\mathrm{End}_{\Lambda'}(E_2)\approx\mathrm{End}_{\Lambda\otimes\Lambda'}(E_1\otimes_R E_2)$$

である（[6]）．

証明．R が局所環のときは E が自由加群であるから明らか．かつ Λ の中心は $\mathrm{End}_{\Lambda^e}(\Lambda)$ で，$R\to\mathrm{End}_{\Lambda^e}(\Lambda)$, $\Lambda^e\to\mathrm{End}_R(\Lambda)$ を natural に考えて，局所化すれば Λ が R 有限射影的であることより上の二つの対応が同型であることがわかる．さらに R が可換であるから E は R/A-完全忠実であり，森田の定理[29]より Λ は Λ^e-有限射影的になる，ここに $A=\{x|\in R, xE=0\}$.

上の証明のごとく，森田の定理から R 上東屋環 Λ に対して $R=\mathrm{End}_{\Lambda^e}(\Lambda)$ を用いて $\Lambda^e=\mathrm{End}_R(\Lambda)$ となる．よって R 上東屋環 Λ_0, Λ_1 に対して同値律 $\backsim$ を次のごとく定義する．

$\Lambda_1\backsim\Lambda_2 \Longleftrightarrow$ ある有限射影 R-加群 E_1, E_2 があって

$$\Lambda_1\otimes\mathrm{End}_R(E_1)\approx\Lambda_2\otimes\mathrm{End}_R(E_2).$$

このとき $\Lambda\otimes\Lambda^0\approx\mathrm{End}_R(\Lambda)$ より $\backsim$ によって類別された R 上東屋環がアーベル群を作る．これを R 上東屋環の Brauer 群と呼び $B(R)$ で表わす．

さらに R 上東屋環 Λ に対して，R の拡大可換環 S が $\Lambda\otimes S\backsim 1$ $(\in B(S))$ をみたすとき S を Λ の分解環という．

R が体の場合はつねに分解環が存在したが，環の場合は R が局所環あるいはやや一般的に半局所環の場合に分解環の存在がわかっているのみである（[6] Thm 6.3, [16] Thm 1).

補題 4.2. Λ を R 上東屋環，S を R の拡大環で Λ を分解すると仮定する．もし S が R-有限生成射影的であれば，R 上東屋環 Γ で，Γ が S を極大可換環として含み，かつ $\Gamma\backsim\Lambda$ となるものがある（[6]).

証明．仮定より $S\otimes\Lambda^0\approx\mathrm{End}_S(E)$. ここに E は S-有限射影加群である．明らかに

$$S\otimes\Lambda^0=\mathrm{End}_S(E)\subseteq\mathrm{End}_R(E)\quad(\equiv\Omega).$$

さらに前節の結果より $\Omega=\Lambda^0\otimes V_\Omega(\Lambda^0)$. よって $\Gamma\equiv V_\Omega(\Lambda^0)\sim\Lambda$. また $\Gamma\supseteq S$ は明らか．今 $x\in V_\Gamma(S)$ とすれば x は $S\otimes\Lambda^0$ の中心 S に含まれる．よって S は Γ の極大可換環である．

逆を示すために

補題 4.3. Λ, Γ を R 上東屋環とし $h: \Lambda\to\Gamma$ を R-多元環としての準同型とする．もし $h(\Lambda)\supseteq V_\Gamma(h(\Lambda))$ ならば h は同型である（[12]).

証明．$h^{-1}(0)$ は Λ のイデアル，よって $h^{-1}(0)=A\Lambda$ とかける（[6], p. 375)．ここに A は R のイデアル．ゆえに $A=0$. また $h(\Lambda)$ は R 東屋環より，$\Gamma=h(\Lambda)\otimes V_\Gamma(h(\Lambda))=h(\Lambda)\cdot V_\Gamma(h(\Lambda))=h(\Lambda)$.

系． Λ を R 上東屋環，S を Λ の極大可換環で，Λ が S-左有限射影的とすると，S は Λ の分解環になる（[12]).

証明．$S\otimes\Lambda^0$, $\mathrm{End}_S(\Lambda)$ は S 上東屋環であり $S\otimes\Lambda^0\to\mathrm{End}_S(\Lambda)$ を自然に定義して S-準同型を得る．$V_\Lambda(S)=S$ より (4.3) からこれは同型である．

R が（半）局所環のとき Λ は分離的分解環 S を持つから [6]，上の Γ は S-射影的となる（[6], [22]).

よっていま S を分解環として持つ R 上東屋環にのみ興味をもつならば，上のことより S を極大可換部分環として含む Γ で，Γ が S-有限生成射影的であるもののみを考えればよい．

いま K_p を可換 R 多元環で R-有限生成射影的なるものとそれらの h-準同型（多元環として）か

らなるカテゴリーとし，また K を可換 R 多元環の作るカテゴリーとする．以下 A, B をもって多元環をあらわすものとする．

基礎環の拡大も考えて

定義． $(S, T)\in K_p\times K$ として A を T-東屋環で $i_A: S\otimes T\to A$ が中への同型で，A が $i_A(S\otimes T)$-有限生成左射影加群とする．さらに $i_A(S\otimes T)$ が A の極大可換部分環であるとき A を (A, i_A) とかく．$(A, i_A), (B, i_B)$ に対して $g: A\to B$ が同型でかつ

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow{\scriptstyle i_A} & & \downarrow{\scriptstyle i_B} \\ S\otimes T & = & S\otimes T \end{array}$$

が可換であるとき $(A, i_A)\backsim(B, i_B)$ とかく．この g を T-認容な同型対応という．この関係 $\backsim$ で類別したものを $A(S, T)$ で表わす．

ここでの目的の一つは $A(S, T)$ に積を定義して，それがアーベル群になることを示し，さらに $A(S, R)$ の中で T を分解環にもつ類が1次元 Amitsur コホモロジー群と同型であることを示すことである．

補題 4.4． $(h, f): (S, T)\to(S', T')$ を $K_p\otimes K$ の写像とする．$A\in A(S, T)$ に対して

$$A(h, f)(A)\equiv A'=\mathrm{End}_A(S'\otimes_S A)\otimes_T T'$$

とし $i_{A'}=L(s'\otimes t')$ とすれば $A'\in A(S', T')$ で $A'\backsim A\otimes T'$ ($B(T')$ の中で) となり，$A(\ ,\ )$ は共変的である．ここに $L(s'\otimes t')$ は $s'\otimes t'$ の自然に定義された左乗法を示し，$S'\otimes_S A$ は右 A 加群と考えている．

証明．A は $S\otimes T$-左射影的，よって $S\otimes T$ が A の直和因子になることより，$S'\otimes_S A$ が T-忠実的射影加群になる．よって $E=\mathrm{End}_T(S'\otimes_S A)$[1] は (4.1) より T-東屋環であり，$\mathrm{End}_A(S'\otimes_S A)=V_E(A^0)$ もまた T-東屋環で

$$E=A^0\otimes_T\mathrm{End}_A(S'\otimes_S A)$$

となる．よって $\mathrm{End}_A(S'\otimes_S A)\backsim A$ ($B(T)$ の中で)．即ち $A\otimes_T T'\backsim A'$ ($B(T')$ の中で)．

また A が $A^0\otimes_T A$-右射影的であることより

i) A は $(S^0\otimes T)\otimes_T A=S^0\otimes A$-右射影

ii) $S'\otimes_S A$ は $S'\otimes_S(S^0\otimes A)=S'\otimes A$-右射影

よって

iii) $S'\otimes_S A$ は A-右射影的となる．

iii) より $A'=\mathrm{End}_A(S'\otimes_S A)\otimes_T T'$ は $S'\otimes(S\otimes T)\otimes_T T'=S'\otimes T'$-左射影的であり，且つ $i_{A'}(S'\otimes T')$ は中へ同型である．iii) より

$$A'=\mathrm{End}_{A\otimes_T T'}(S'\otimes_S A\otimes_T T').$$

よって

$$\begin{aligned} V_{A'}(S'\otimes T') &= \mathrm{End}_{S'\otimes A\otimes_T T'}(S'\otimes_S A\otimes_T T') \\ &= \mathrm{End}_{S'\otimes_S(S\otimes A\otimes_T T')}(S'\otimes_S A\otimes_T T') \\ &= \mathrm{End}_{S'}(S')\otimes_S\mathrm{End}_{S\otimes A\otimes_T T'}(A\otimes_T T') \\ &\qquad ((\mathrm{i})\ 及び\ (4.1)). \\ &\approx S'\otimes_S\mathrm{End}_{S\otimes A}(A)\otimes\mathrm{End}_{T'}(T') \\ &= S'\otimes_S S\otimes T'=S'\otimes T'. \end{aligned}$$

よって $S'\otimes T'$ が A' の極大可換環である．即ち $A'\in A(S', T')$．共変性については

$$(S, T)\xrightarrow{(h,f)}(S', T')\xrightarrow{(h',f')}(S'', T'')$$

が与えられているとき，$A(h, f)$ 等の定義より

$$\begin{aligned} &(S''\otimes_{S'}A'\otimes_{T'}T'')\otimes_{A'\otimes_{T'}T''}(S'\otimes_S A\otimes_T T') \\ &\qquad\otimes_{T'}T''\xrightarrow{i}S''\otimes_S A\otimes_T T'' \end{aligned}$$

が $(S'', A\otimes T'')$-同型を示されるとよい．これは

$$\begin{aligned} &i(s''\otimes a'\otimes t_1'')\otimes\{(s'\otimes a\otimes t')\otimes t_2''\} \\ &\quad\to s''\otimes_{S'}a'(s'\otimes a\otimes t')\otimes_{T'}t_1''t_2''\in S''\otimes A\otimes T'' \end{aligned}$$

で得られる．よって

$$\begin{aligned} A'' &\equiv A'(h, f') \\ &= \mathrm{End}_{A'\otimes_{T'}T''}(S''\otimes_{S'}A'\otimes_{T'}T'')\xrightarrow{j}B \\ &\equiv A(h'\circ h, f'\circ f)\equiv\mathrm{End}_{A\otimes_T T''}(S''\otimes_S A\otimes T'') \end{aligned}$$

を $j(a)(b)=i(a, i^{-1}(b))$ で定義すればよい．ここに $a\in A''$，$b\in B$．

つぎに $A(S, T)$ の間に積を導入し，$B(R)$ と準同型対応が得られるようにする．$A, B\in A(S, T)$ とする．(4.1) より容易に $A\otimes_T B\in A(S\otimes S, T)$ を得る．$k: S\otimes S\to S$ $(k(s_1\otimes s_2)=s_1 s_2)$ および (4.4) より

$$\begin{aligned} (1)\quad A\cdot B &\equiv A(k, 1_T)(A\otimes_T B) \\ &= \mathrm{End}_{A\otimes_T B}(S\otimes_{S\otimes S}(A\otimes_T B)) \end{aligned}$$

によって積を定義する．これを簡単に表わすために，一般に左 S-加群 M, M' に対して普通のテンソル積と同様に $\{(m, m')|m\in M, m'\in M'\}$ から生成される自由加群を $\{(sm, m')-(m, sm')|s\in S\}$ から生成される部分加群で割った加群を $M_1\dot{\otimes}M_2$ であらわす．上の積は

$$A\cdot B\equiv\mathrm{End}_{A\otimes_T B}(A\dot{\otimes}_{S\otimes T}B)$$

となる．また明らかに

補題 4.5． $(S, T)\in K_p\times K$，J を $S\otimes T$-有限

生成射影加群で階数が 1 とすれば $E=\mathrm{End}_T(J)\in A(S,T)$ を得る ([9]).

定理 4.6. $(S,T)\in K_p\times K$ に対して $A(S,T)$ は $D\equiv\mathrm{End}_T(S\otimes T)$ を単位元とする積 (1) に関してアーベル準群を作る.

証明. 可換は (1) の定義より明らか. 他は (4.3), (4.4) 及び次の簡単な補題より得る.

補題 4.7. $S\in K$, U, V を R-多元環, M, N をそれぞれ S-U, S-V 加群とする. $X=\mathrm{End}_U(M)$, $Y=\mathrm{End}_V(N)$ とおけば,

$$\mathrm{End}_{X\otimes Y}(X\dot{\otimes}_S Y)\to\mathrm{End}_{U\otimes V}(M\dot{\otimes}_S N)$$

の準同型が存在する ((4.4) の最後を参照).

定義. P をカテゴリー K から Ab (アーベル群の作るカテゴリー) への函手で $T\in K$ に対して $p(T)=\{$階数 1 の有限生成 T-射影加群の同型類$\}$ とし, $T\xrightarrow{f}T'$ に対して $p(f)I=I\otimes_T T'$ で自然な対応を定義する. ここに $I\in p(T)$ ([9]). また

$B(S/R)=\{A\in B(R)\mid A\otimes S\backsim 1\ (B(S)$ の中で$)\}$.

定理 4.8. $S\in K_p$ に対して $p_1: P(S)\to A(S,R)$, $p(r_S): P(R)\to P(S)$, $p_2: A(S,R)\to B(S/R)$ を次のごとく定義する. $p_1(J)=\mathrm{End}_R(J)$, $p(r_S)$ は $r_S: R\to S$ の自然な移入に対して明らか. $p_2(A)=\{A$ の $B(S/R)$ の類$\}$. このとき

$$P(R)\xrightarrow{p(r_S)}P(S)\xrightarrow{p_1(S)}A(S,R)\xrightarrow{p_2(S)}B(S/R)\to 0$$

が完全である (いまのところ $p_2(S)$ は準群とする).

証明. $p_2(S)$ の部分に関しては (4.2) より明らか. p_1 の部分は (4.7) より p_1 の準同型がわかり, 残りに関しては次の補題を用いればよい.

補題 4.9. V, W が R-有限忠実射影加群とする. $\mathrm{End}_R(V)\approx\mathrm{End}_R(W)\Longleftrightarrow$ 次のような階数 1 の R-射影加群 (有限生成) J が存在する, $V=W\otimes_R J$ ([34]).

証明. $R, V, \mathrm{End}_R(V)$ に対して森田の定理を用いて明らかである.

これらより最初の目的に達する.

定理 4.10. $(S,T)\in K_p\times K$ とすれば, $A(S,T)$ はアーベル群 (積は (1)) で, かつ $A(\ ,\ )$ は群の準同型を与える.

証明. $A(S,R)$ も $A(S,T)$ も基礎環の拡大のみの差ゆえ $A(S,R)$ がアーベル群を示すとよい. (4.7) より, $B(S/R)$, $P(S)$ が群だから $A(S,R)$ も群である. $A(\ ,\ )$ の準同型に関しては

$$\begin{array}{ccccc}
A(S,T)\times A(S,T) & \xrightarrow{\mu} & A(S\otimes S,T) & \xrightarrow{A(k,1)} & A(S,T)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
A(S',T')\times A(S',T') & \xrightarrow{\mu'} & A(S'\otimes S',T') & \xrightarrow{A(k',1)} & A(S',T')
\end{array}$$

の可換性をいえばよい. 右側の可換性は $\boldsymbol{k}$ の定義から明らかである. 左側に関しては $A(S'\otimes S',T')$ の元

$C\equiv\mathrm{End}_{A\otimes_T B\otimes_T T'}((S'\otimes S')\otimes_{S\otimes S}(A\otimes_T B)\otimes T')$ において $(S'\otimes S')\otimes_{S\otimes S}(A\otimes_T B)\otimes T'=(S'\otimes_S A)\otimes_T(S'\otimes_S B)\otimes T'$ は (4.4) iii) より $S'\otimes_S A$ および $S'\otimes_S B$ がそれぞれ A, B 射影的, よって (4.1) より $C\approx\mathrm{End}_A(S'\otimes A)\otimes_T\mathrm{End}_B(S'\otimes B)\otimes T'$. 一方 $A(S'\otimes S',T')$ の元 $D\equiv\mathrm{End}_{A\otimes_T T'}(S'\otimes_S A\otimes_T T')\otimes_{T'}\mathrm{End}_{B\otimes_T T'}(S'\otimes_S B\otimes_T T')\approx C$ ((4.1) より).

定義. $KA(S,T)$

$$\equiv\ker(A(1,r_T): A(S,R)\to A(S,T)).$$

$A(1,r_T)(A)=\mathrm{End}_{A\otimes T}(S\otimes_S A\otimes_R T)=A\otimes_R T$ より $KA(S,T)$ とは $A(S,R)$ の中で T で分解するものの全体である.

II) Amitsur のコホモロジーと東屋環

$T\in K$ として $T^n=\overbrace{T\otimes_R T\otimes_R\cdots\otimes_R T}^{n}$ を環と考える. $\varepsilon_i: T^{n+1}\to T^{n+2}$, $(\varepsilon_i(x_0\otimes\cdots\otimes x_n)=x_0\otimes\cdots\otimes x_{i-1}\otimes 1\otimes x_i\otimes\cdots\otimes x_n)$ と定義すれば, ε_i は環準同型である.

定義より

(2) $\qquad \varepsilon_i\varepsilon_j=\varepsilon_{j+1}\varepsilon_i\quad(i\leqq j).$

を得る. F を $K\to Ab$ の函手とするとき, $C^n(T/R,F)=F(T^{n+1})$ として, $d_n: F(T^{n+1})\to F(T^{n+2})$ を

$$d_n=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i F(\varepsilon_i)$$

と定義して, そのコホモロジーを $H^n(T/R,F)$ と書く. また $f: F\to F'$, $\alpha: T\to T'$ とすれば, 自然に $H^n(1,\alpha): H^n(T/R,F)\to H^n(T'/R,F)$ および $H^n(f,1): H^n(T/R,F)\to H^n(T/R,F')$ を得る. さらに

$H^n(f,\alpha)=H^n(1,\alpha)H^n(f,1)=H^n(f,1)H^n(1,\alpha)$ と定義する.

$S\in K$ に対して $FS(T)\equiv F(S\otimes T)$ とおき $\varepsilon_i: S^{n+1}\to S^{n+2}$ を T と区別するとき ε_i^S とかく.

$Q^{n+2}F(S,T)$

$$=\mathrm{coker}\{F\varepsilon_0^S(T): FS^{n+1}(T)\to FS^{n+2}(T)\}$$

と定義して $Q'\equiv QF(S,T)$ とする. QF は共変函

手になることは明らか.

次の diagram

$$\begin{tikzcd}
F(T) \arrow[r, "Fr_S(T)"] \arrow[d, "Fr_S(T)"] & F(S\otimes T) \arrow[r] \arrow[d, "F(\varepsilon_1^S)(T)"] & QF(S, T) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\Delta^1"] & 0 \\
F(S\otimes T) \arrow[r, "F(\varepsilon_0^S)(T)"] \arrow[d, "(F\varepsilon_0^S-F\varepsilon_1^S)(T)"] & FS^2(T) \arrow[r] \arrow[d, "(F\varepsilon_1^S-F\varepsilon_2^S)(T)"] & Q^2F(S, T) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\Delta^2"] & 0 \\
FS^2(T) \arrow[r, "F(\varepsilon_0^S)(T)"] & FS^3(T) \arrow[r] & Q^3F(S, T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$ [2)]

において水平線は定義より完全である. これより

$$\Delta^1(S, T) : QF(S, T)\to Q^2F(S, T),$$
$$\Delta^2(S, T) : Q^2F(S, T)\to Q^3F(S, T)$$

を, 上の diagram を可換にするように自然に定義して

$$KF(S, T)\equiv\ker\Delta^2$$

とおけば $KF(S, T)$ は $K\times K\to Ab$ の共変函手になる. $H^n(T/R, FS)$ 等を H^nF 或は H^n_TF とかく.

定義. K_f を R-多元環で R-忠実平坦加群になっているもので作るカテゴリー, $U(T)$ を T の単元の作る群を表わす函手とする.

定理 4.11.

a) $T\in K_f$ なら $H^0_TU\sim U$ (自然的に同値).

b) K' を可換 S-多元環の作るカテゴリーとする. $S\in K_p$ に対して $\Delta(S) : QU(S,)\to KU(S,)$ は $K'\to Ab$ の自然同値函手である ($\Delta(S)\equiv\Delta^1(S, T)$ とみて).

c) $S\in K_p$, $T\in K'$ とする. $D\otimes T=\mathrm{End}_R(S)\otimes T$ の T-認容の同型対応 α に対して $U(S\otimes T)$ の元 u が存在して $\alpha(\ )=u(\ )u^{-1}$ となる([12], [34]).

証明. a) $H^0_TU(S)=\ker\{U(1\otimes\varepsilon_0)-U(1\otimes\varepsilon_1)\}$ および $T\in K_f$ より明らか.

b) $Q^iU(S, T)$ の代表元を $\bar{u}$ であらわす, ここに $u\in U(S^i\otimes T)$. $\Delta(S, T)$ が移入的なことを示す. $\Delta(S, T)\bar{u}=\overline{U\varepsilon_1^S(T)(u)}=\bar{1}$ とすれば, 上の diagram より $U(S, T)$ の元 v で $(\varepsilon_1^S\otimes 1)u=(\varepsilon_0^S\otimes 1)v$ となるものがある. いま $u=\sum s_i\otimes t_i$, $v=\sum s_i'\otimes t_i'$ とすれば, $\sum s_i\otimes 1\otimes t_i=\sum 1\otimes s_i'\otimes t_i'$. $S\in K_p$ より S から R えの射影 g で $g(1)=1$ となる R-準同型があるから, 上式に $1\otimes g\otimes 1$ を作用させて

$$u=\sum s_i\otimes t_i=\sum 1\otimes g(s_i')t_i'\in\mathrm{Im}\ U_{rs}(T),$$

即ち $\bar{u}=\bar{1}$. 逆に $US^2(T)\ni u$ に対して $\Delta^2(\bar{u})=1$ とする. このとき $US^2(T)$ の元 v で

$$\{(\varepsilon_1^S\otimes 1)u\}\{(\varepsilon_2^S\otimes 1)u\}^{-1}=(\varepsilon_0^S\otimes 1)v$$

となるものがある. 前と同様 $u=\sum s\otimes s_1\otimes t$, $v=\sum s'\otimes s_1'\otimes t'$ とおけば, 上式は $\sum s\otimes 1\otimes s_1\otimes t=(\sum 1\otimes s'\otimes s_1'\otimes t')(\sum s\otimes s_1\otimes 1\otimes t)$ となる. ここで $\kappa : S^3\otimes T\to S^2\otimes T$ を

$$\kappa(x_1\otimes x_2\otimes x_3\otimes t)=x_1\otimes x_2\otimes x_3t$$

で定義すれば $T\in K'$ を用いて, κ は環準同型であるから, 上式に κ を作用して

$$\sum s\otimes 1\otimes s_1t=(\sum 1\otimes s'\otimes s_1't')u$$

を得る. 即ち $\bar{u}=U\varepsilon_1^S(\sum s\otimes s_1t)$.

c) $D\otimes T=\mathrm{End}_T(S\otimes T)\supset i(S\otimes T)$ より

$$\alpha(\ )=v(\ )v^{-1},\quad v\in D\otimes T\Longleftrightarrow J_\alpha\approx T$$

(T-加群として), (§3 参照).

一方 α が T-認容であるから, $v\in V_D(S\otimes T)=S\otimes T$. よって $J_\alpha\approx T$ を示せばよい. まず $(S\otimes T)\otimes_T J\approx S\otimes T$ (T-加群として)を示す. T の素イデアル M に対して $J_M=T_Mx$, x は $D\otimes T_M$ で単元になる. ゆえに $J\subset D\otimes T$ より

$$\theta : (S\otimes T)\otimes_T J\to S\otimes T\ ;\ \theta((s\otimes t)\otimes j)=j(s\otimes t)$$

と定義して θ_M で考えれば同型, ゆえに θ は同型である. さらに θ の定義より θ は $S\otimes T$-同型である. よって

$$J\approx T\otimes_{S\otimes T}(S\otimes T)\otimes_T J\approx T_{S\otimes T}(S\otimes T)\approx T.$$

一般に $A\in A(S, R)$, $T\in K$ に対して,

$$\omega : A\otimes T\to A\otimes S\otimes T\quad \omega(a\otimes t)=a\otimes 1\otimes t$$

で中へ同型に移る. 以下 $A\otimes T$ と ω による像を同一視して考える.

定理 4.12. $(S, T)\in K_p\times K$ において $\mathrm{Aut}(D\otimes T)$ を $D\otimes T$ の T-認容同型全体の群とする. $KU(S, T)\ni\bar{u}(u\in US^2(T))$ に対して $\theta(\bar{u})=u^{-1}(*)u$, $(*)\in D\otimes T$ により

$$KU(S, T)\xrightarrow{\theta}\mathrm{Aut}(D\otimes T)$$

が中への同型になる ([12], [34]).

証明. $D\otimes S\otimes T\in A(S, S\otimes T)$ で $S\otimes T\in K'$ より (4.10) から $\mathrm{Aut}(D\otimes S\otimes T)\equiv\{U(S^2\otimes T)$ の元から生成される内部同型$\}$. ゆえに

$$\mathrm{Aut}(D\otimes S\otimes T)$$
$$=U(S^2\otimes T)/(U(D\otimes S\otimes T\text{ の中心})\cap U(S^2\otimes T))$$
$$=Q^2U(S, T).$$

明らかに $\mathrm{Aut}(D\otimes T)\subseteq\mathrm{Aut}(D\otimes S\otimes T)$ と考えられる. 即ち $U(S^2\otimes T)\ni u$ に対して $(D\otimes 1\otimes T)^u=D\otimes 1\otimes T$ となる u を求めればよい. それゆえ $\varepsilon_1^S : D\otimes S\otimes T\to D\otimes S^2\otimes T$, $\varepsilon_1^S(d\otimes s\otimes t)=d\otimes 1\otimes s\otimes t$ 等を直接定義にしたがつて計算すれば上の

条件が $\bar{u}\in KU(S, T)$ であることと同値となる.

定義. A を R-多元環, $T\in K'$ とする. σ : $M\otimes T^2\to M\otimes T^2$ を $\sigma(m\otimes t_1\otimes t_2)=m\otimes t_2\otimes t_1$ と定める.

定理 4.13. $(S, T)\in(K_p\times K)$ とすれば $\psi(S, T)\in\{K_p\times K\to Ab\}$ の函手で

$$\psi(S, T): KA\to H^1KU$$

なるものが存在する ([12]).

証明. i) $A\in KA(S, T)$ より $j: D\otimes T\to A\otimes T$ が T-認容となるものがある.

$$\bar{j}: D\otimes T^2 \xrightarrow[j\otimes 1]{} A\otimes T^2 \xrightarrow[\sigma]{} A\otimes T^2 \xrightarrow[j^{-1}\otimes 1]{} D\otimes T^2 \xrightarrow[\sigma]{} D\otimes T^2$$

は T^2-認容, よって (4.12) より $u\in U(S^2, T^2)$ で $\bar{u}\in c^1(T/R, KU(S,\ ))$ で $\bar{j}(*)=u^{-1}(*)u$ となるものがある. この性質, $\bar{J}$ の定義, および II) のはじめの公式 (2) を用いて $d^1(u)=\bar{1}$ 即ち $cl(u)\in H^1K(u)$ となることが計算のみで得られる.

ii) いま $\psi(S, T): A\to cl(\bar{u})$ を定義したが, これは A のとり方に無関係である. なぜなら, $A, B\in KA(S, T)$ として $g: A\approx B$ (T-認容) とする. i) のごとき j に対し

$$\begin{array}{ccc} i: D\otimes T & \longrightarrow & A\otimes T \\ \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes 1} \\ j: D\otimes T & \longrightarrow & B\otimes T \end{array}$$

が可換になるように l を取ることができる. いま上と同様に $\bar{i}(\ )=u(\ )u^{-1}$, $\bar{j}=v(\ )v^{-1}$ とすれば (4.12) より $l(\ )=c(\ )c^{-1}$ なる $\bar{c}\in KU(S, T)$ を用いて

(3)
$$\begin{array}{lccccc} \bar{i} & D\otimes T^2 & \xrightarrow{i\otimes I} & A\otimes T^2 & \xrightarrow{\sigma} & A\otimes T^2 \\ & \downarrow{\scriptstyle l_1} & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes I} & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes I} \\ j & D\otimes T^2 & \xrightarrow{j\otimes I} & B\otimes T^2 & \xrightarrow{\sigma} & B\otimes T^2 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{i^{-1}\otimes I} & D\otimes T^2 & \xrightarrow{\sigma} & D\otimes T^2 \\ & \downarrow{\scriptstyle l_1} & & \downarrow{\scriptstyle l_0} \\ \xrightarrow{j^{-1}\otimes 1} & D\otimes T^2 & \xrightarrow{\sigma} & D\otimes T^2 \end{array}$$

なる可換な diagram を得る. ここに $l_i(\ )=\varepsilon_i(c)(\ )\varepsilon_i(c)^{-1}$. これを用いて $v^{-1}ud^0(c)=\bar{1}$, 即ち $cl(\bar{u})=cl(\bar{v})$ が得られる.

iii) 上の証明より $\psi(S, T)$ は i) の j に無関係である.

iv) $\psi(S, T)$ の S に関する自然性 $S\overset{h}{\to}S'$ として $A\in KA(S, T)$ に対し $A'=A(h, 1)(S', T)\in KA(S', T)$ を示す. $A'=\mathrm{End}_A(S'\otimes_S A)$, $D'=\mathrm{End}_D(S'\otimes_S D)\approx\mathrm{End}_R(S')$ (4.10). また

$$A'\otimes T=\mathrm{End}_{A\otimes T}(S'\otimes_S A\otimes T),$$
$$D'\otimes T=\mathrm{End}_{D\otimes T}(S'\otimes D\otimes T).$$

$i: D\otimes T\approx A\otimes T$ より $i': A'\otimes T\approx D'\otimes T$, $(i'(\ )=(I\otimes i)(\ )(I\otimes i^{-1}))$. $D'\otimes T^2=\mathrm{End}_{D\otimes T^2}\times(S'\otimes_S D\otimes T^2)$ に注意して $D'\otimes T^2$ の T^2-認容は $S'\otimes_S D\otimes T^2$ の T^2-同型対応から得られる. 即ち

$$\begin{array}{ccccc} S'\otimes_S D\otimes T^2 & \xrightarrow{I\otimes i\otimes I} & S'\otimes_S A\otimes T^2 & \xrightarrow{I\otimes\sigma} & S'\otimes_S A\otimes T^2 \\ \downarrow{\scriptstyle L(a)} & & \downarrow{\scriptstyle L(a_1)} & & \downarrow{\scriptstyle L(a_2)} \\ S'\otimes_S D\otimes T^2 & \longrightarrow & S'\otimes_S A\otimes T^2 & \longrightarrow & S'\otimes_S A\otimes T^2 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{I\otimes i^{-1}\otimes I} & S'\otimes_S D\otimes T^2 & \xrightarrow{I\otimes\sigma} & S'\otimes_S D\otimes T^2 \\ & \downarrow{\scriptstyle L(a_3)} & & \downarrow{\scriptstyle L(a_4)} \\ \longrightarrow & S'\otimes_S D\otimes T^2 & \longrightarrow & S'\otimes_S D\otimes T^2, \end{array}$$

ここに $a\in D'\otimes T^2$ で $a_1=(i'\otimes I)(a)$, $a_2=\sigma(a_1)$, $a_3=(i^{-1}\otimes I)(a_2)$, $a_4=\sigma(a_3)=\bar{i}'(a)$. 上の diagram より任意の $x\in S'\otimes_S D\otimes T^2$ に対して $\bar{i}'(a)(I\otimes\bar{i})(x)=(I\otimes\bar{i})(ax)$ を得る. 即ち

(4) $\bar{i}'(\ )=(I\otimes\bar{i})(\ )(I\otimes\bar{i}^{-1})$.

いま $u\in U(S^2\otimes T^2)$ で $\bar{i}(\ )=u(\ )u^{-1}$ とする.

$$S'\otimes_S D\otimes T^2=S'\otimes_S D\otimes 1\otimes T^2$$
$$\subseteq S'\otimes_S D\otimes S\otimes T^2\overset{h}{\to}S'\otimes_S D\otimes S'\otimes T^2$$

を考えて (4) 式を用いると

$$\bar{i}(\ )=[h^2\times I\times I](u)(\ )[h^2\times I\times I](u^{-1})$$

を得る. 即ち $\psi(S, F)(cl(\bar{u}))=cl(\overline{hu})$, $cl(\bar{u})$ は $\bar{u}$ の属する $H^1(KU)$ の類である.

v) T に関する自然性. いま $f: T\to T'$ として $i: D\otimes T\to A\otimes T$, $i': D\otimes T\otimes_T T'\to A\otimes T'$ で $i'=i\otimes I_{T'}$. よって $\bar{i}'=\bar{i}\otimes I_{T^2}$ を得る. これから結果は容易である.

vi) 群として準同型. $A, B\in KA(S, T)$ とする $i: D\otimes T\to A\otimes T$, $j: D\otimes T\to B\otimes T$, $l=i\otimes j$: $D\otimes D\otimes T\to A\otimes B\otimes T$ より $A\otimes B\in KA(S\otimes S, T)$. $A\otimes T^2\ni x$, $B\otimes T^2\ni y$ として $A\otimes B\otimes T^2=(A\otimes T^2)\otimes_{T^2}(B\otimes T^2)$ の元を $x\circ y$ であらわせば, $\sigma(x\circ y)=\sigma(x)\circ\sigma(y)$ となり $\psi(S, T)(A)=cl(\bar{u})$, $\psi(S, T)(B)=cl(\bar{v})$ から $\psi(S\otimes S, T)(A\otimes B)=cl(\overline{u\circ v})$ を得る. $S\otimes S\overset{k}{\to}S$ に対して iv) を用いて

$$\psi(S, T)(A\cdot B)=cl(\overline{k(u\circ v)})=cl(\bar{u})cl(\bar{v}).$$

(証明終)

上の (4.13) をさらに強い条件のもとで

定理 4.14. $(S, T)\in K_p\times K_f$ であれば $\psi(S, T)$ は自然な同型対応である. もし $\psi(S, T)(A)=cl(\bar{u})$

とすれば$\psi^{-1}(S, T)(cl(\bar{u}))=\{x|\in D\otimes T\subseteq D\otimes S\otimes T, u\varepsilon_1(x)u^{-1}=\varepsilon_0(x)\}\equiv A(u)$.

証明はかなりやっかいな計算によるが，大体の方法はつぎの通り，まず$A(u)$がR-多元環であることは明らか．$\tilde{j}: A(u)\otimes T\to D\otimes T$, $\tilde{j}(a\otimes t)=at$ $i_u: S\to A(u)$ $(i_u(s)=i_0(s)\otimes 1)$ として $\tilde{j}(i_u\otimes 1)=i_0\otimes 1$ となる．$l: D\otimes T\to D\otimes T^2$, $l(x)=u\varepsilon_1(x)u^{-1}-\varepsilon_0(x)$ として

$$0\to A(u)\otimes T\xrightarrow{i\otimes 1}D\otimes T^2\xrightarrow{l\otimes 1}D\otimes T^3$$

が $A(u)$ の定義より完全．よって $A(u)\otimes T=\ker(l\otimes 1)$ を得る．一方 $j: D\otimes T\to D\otimes T^2$, $j(z)=u^{-1}\varepsilon_0(z)u$ は T-準同型で，$d(\bar{u})=0$ より $\mathrm{Im}\, j=A(u)\otimes T$, 及び $\tilde{j}=j^{-1}$ を得る．これより $K\in K_f$ を用いて $A(u)\in KA(S, T)$ を得る．定義及び $J^{-1}=\tilde{J}$ より $\psi(S, T)A(u)=cl(\bar{u})$ が出てくる．あとは定義と計算により $A(u)$ が $cl(\bar{u})$のみに関係すること，$\psi(S, T)\psi^{-1}(S, T)=\psi^{-1}(S, T)\psi(S, T)=I$ を得る．

東屋環の場合と全く同様に$D=\mathrm{End}_R(S)$の代りにSで置き代えて，カテゴリPにおいても前の諸定理と同じ様なことが成立する．この場合はさらに簡単である．例えば，$\mathrm{Aut}(S\otimes T)=L(U(S\otimes T))$ を得ることは明らか．(4.14) と同様に

定理 4.15. $\varphi: KP\to H^1U$ が $K\times K\to Ab$ の函手である．即ち $KP(S, T)\ni J$ に対して $j: S\otimes T\to J\otimes T$ が $S\otimes T$-同型なるものをとり

$$j: S\otimes T^2\xrightarrow{j\otimes I}J\otimes T^2\xrightarrow{\cdot\sigma}J\otimes T^2 \xrightarrow{j^{-1}\otimes I}S\otimes T^2\xrightarrow{\sigma}S\otimes T^2$$

が $S\otimes T^2$-同型になり$\bar{j}=L(u), u\in U(S\otimes T^2)$と表わせるから $\varphi(S, T)=(J)=d(\bar{u})$ で定義する ([12]).

以上の諸結果より

定理 4.16. $S\in K_p$, $T\in K_f'$ (S-多元環で R-平坦) とすれば

$$\begin{array}{ccc} KP(S, T) & \xrightarrow{p_1(S)} & KA(S, T) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi(S.T)} & & \downarrow{\scriptstyle \psi(S.T)} \\ H^1(T/R, US) & \xrightarrow[H^1(I,\pi)]{} & H^1(T/R, QU(S)) \end{array}$$

が可換になる，ここに$\pi: U(S)\to QU(S)$は自然な写像である ([12]).

III) Brauer 群とコホモロジー

この節では射影加群および東屋環の Amitsur のコホモロジーの持つ完全列について考える．

$T\in K$ として $\Omega(T)$ を忠実的平坦で可換な T-多元環で，その濃度が T の濃度と $\aleph_0$ の和以下のものの集りとする．

Bourbaki[9] により $T\in\Omega(R)$ ならば $\Omega(T)\subseteq\Omega(R)$, および $S\in K_p$ ならば $\Omega(S)\subseteq\Omega(R)$ が得られる．さらに[9]により容易に

補題 4.17. $S\in K$ でかつ R-有限生成とする．P, Q が S-有限生成射影加群で，すべての R の極大イデアル m に対して P_m, Q_m が同じ階数の自由 S_m-加群とすれば，R の元 $x_1,\cdots,x_n$ で，$\sum x_i=1$ をみたし，$T=\Sigma\oplus R_{x_i}$ について $P\otimes T\approx Q\otimes T$ ($S\otimes T$-加群として) となるものがある．

これより (4.3) 系を用いてつぎの系を得る．

系. $S\in K_p$ とする．

a) $P(S)=\bigcup_{T\in\Omega(R)}KP(S, T)$,

b) $A(S, R)=\bigcup_{T\in\Omega(R)}KA(S, T)$.

次に $\Omega(R)$ の二つの元 T, T' に対して $T\xrightarrow{f}T'$ があるとき $T\leqq T'$ と書き，$T\leqq T'$ かつ $T'\leqq T$ のとき $T\backsim T'$ と記す．この同値関係により $\Omega(R)$ を類別して，そこにおいて関係 $\leqq$ によって direct system を作る．上の系を用いて函手 F に対して

(5) $H^n(R, F)=\varinjlim H^n(T/R, F)$

が定義できる ([17]).

$S\in K_p$ に対して (4.7), (4.11, a), (4.12) 及び上の系と (5) の定義より次の diagram を可換にするような $\gamma_1(S), \gamma_2(S)$ を得る．

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ccc} KP(S, T) & \longrightarrow & P(S) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi(S.T)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1(S)} \\ H^1_TU(S) & \longrightarrow & H^1U(S) \\ KA(S, T) & \longrightarrow & A(S, R) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi(S.T)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2(S)} \\ H^1_TQU(S) & \longrightarrow & H^1QU(S) \end{array}\right.$$

さらに (4.7) より次の diagram を可換にする様な $\gamma_3(S)$ を得る

$$(7)\quad \begin{array}{ccccc} P(R) & \xrightarrow{p_{r_S}} & P(S) & \xrightarrow{p_1(S)} & A(S, R) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_1(R)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1(S)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2(S)} \\ H^1U(R) & \longrightarrow & H^1U(S) & \longrightarrow & H^1QU(S) \end{array}$$

$$\xrightarrow{p_2(S)} B(S/R) \longrightarrow 0$$
$$\downarrow{\scriptstyle \gamma_3(S)}$$
$$\xrightarrow{\delta(S)} H^2U(R) \xrightarrow{\gamma_3^*(R)} H^2U(S)$$

(ここに最後の行は $0\to U(R)\to U(S)\to QU(0)\to 0$)

から得られる完全列である).

以上に対して(4.7),(4.11, a),(4.12)等を用いて

定理 4.18. $K_p \ni S$ に対して上の γ_1, γ_2 及び $\gamma_0 : U \to H^0U$ は同値は共変函手の対応であり, $\gamma_3 : B(S/R) \to H^2(R, U)$ は自然な対応で,

$$0 \to B(S/R) \to H^2U(R) \to H^2U(S)$$

は完全である(上の $H^2(\ )$ は(5)によるもの)([12]).

以上の如く $P(S), A(S, R)$ 及び $B(S/R)$ のコホモロジーによる表現を得たが, それらの間の完全列を考えるために, Amitsur 複体の中にスペクトル列を導入する.

F を函手 $K \to Ab$ とする. $F(S^{p+1} \otimes T^{q+1})$ において $'d = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i F(\varepsilon_i^S)$, $''d = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^{p+i-1} F(\varepsilon_i^T)$ とおけば $'d''d + ''d'd = 0$ を得る. これよりいつものように全次数の複体 $Totc(S, T/R, F)$ を得る. また p, q によるフィルターづけによる2次のスペクトル $'E_2^{p,q}, ''E_2^{p,q}$ を用いて

$$H^p(S/R, H_T^q F) \underset{p}{\Rightarrow} H^n(Totc(S, T/R, F))$$

を得る. もし T が S-多元環であれば $'H^p = 0$ $(p>0)$ が得られて $(\kappa^{p,q} : s_0 \otimes \cdots \otimes s_p \otimes t_0 \otimes \cdots \otimes t_q \to s_0 \otimes \cdots \otimes s_{p-1} \otimes s_p \otimes \cdots \otimes t_q$ を用いる), $''H^{q\prime}H^0 \approx H^q(Totc(*))$ を得る. さらに $\kappa^{p,q}$ を用いて $'H^{0,q} = F(r_S \otimes 1)F(T^{q+1})$ となる, ここに $r_S : R \to S$. これより $C^{0,q}(S, T/R, F) \to C(S, T/R, F)$(入射的)から誘導されるコホモロジーで

$$\eta_{S,T}^* : H(T/R, F) \approx H(Totc(S, T/R, F))$$

が得られる.

(5)の定義と同様にスペクトル列 $'E(S, T)$ に対して

$$'E(S) = \varinjlim_{T \in \Omega(R)/\sim} {'E(S, T)}$$

と定義すれば, 上の結果より

定理 4.19. $S \in K_p$ とすれば

$$H^p(S/R, H^q F) \underset{p}{\Rightarrow} H^n(R, F),$$

(最初の H^p のみが通常のコホモロジー)([12]).

つぎに $T_0tc(S, T/R, F)$ の第1の次数によるフィルターづけを $F_{S,T}^1$, また $H(T_0t(\ ))$ のそれを $F_{S,T}^1H$ とすれば, 前と同様に direct limit をとって F^1H を定義することができる.

一般にスペクトル列に関して次の補題が成りたつ(計算による(Hochschild)).

補題 4.20. E_r がスペクトル列で, p か q が負なら $E_2^{p,q} = 0$ とする. $E_2^{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} H^n$ とすれば

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to F^1H^2 \to E_2^{1,1} \to E_2^{3,0}$$

が完全である.

この(4.20)および(4.19), $E^{p,q} = H^p(S/R, H^q F)$ (4.18)等より

定理 4.21. $S \in K_p$ とするとき,

$$0 \to H^1(S/R, U) \to P(R) \to H^0(S/R, P) \to H^2(S/R, U) \to B(S/R) \to H^1(S/R, P) \to H^3(S/R, U)$$

が完全である(上の $H^p(\ )$ は Amitsur のコホモロジー)([12]).

最後に特に S が R 上有限次のガロア拡大になっている場合を考える. G をガロア群とする. 第1節に定義された E は, S が可換ゆえ S-多元環となり $h_n : S^{n+1} \to E^n$ を $\{h_n(s_0 \otimes \cdots \otimes s_n)\}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = s_0\sigma_1(s_1) \cdots \sigma_n(s_n)$ とすれば h_n が S-多元環として同型であることがわかる([12]). さらに $\theta_i : E^n \to E^{n+1}$ を

$$\theta_0 f(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}) = \sigma_1\{f(\sigma_2, \cdots, \sigma_{n+1})\}$$
$$\theta_i f(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}) = f(\sigma_1, \cdots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \cdots, \sigma_{n+1})$$
$$\theta_{n+1} f(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}) = f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$$

で定義する.

これより S 上の函手 U, P による Amitsur コホモロジーが通常の群のコホモロジーと同型であることがわかる. よって

系. S が G による R のガロア拡大とすれば

$$0 \to H^1(G, U(S)) \to P(R) \to H^0(G, P(S)) \to H^2(G, U(S)) \to B(S/R) \to H^1(G, P(S)) \to H^3(G, U(S))$$

が完全である.

注

1) T-右加群 M に対して $\mathrm{End}_T(M)$ の元は M の左から乗ずることにする.

2) $\mathrm{Im}(F(\varepsilon_0^S))(T)$ はもし $F=U$ とすれば, $\mathrm{End}_R(S) \otimes S \otimes T^2$ の中心の元である.

文 献

[1] S. A. Amitsur, Simple algebras and cohomology groups of arbitrary fiels, Trans. Amer. Math.,

90 (1959), 73-114.

[2] ——, Homology groups and double complexes for arbitrary field, J. Math. Soc. Japan, **14** (1962), 1-25.

[3] M. Artin, Grothendieck Topology, Mimeographed Notes, Harvard.

[4] M. Auslander and D. Buchsbausm, On ramification theory in Noetherian rings, Amer. J. Math., **81** (1959), 749-765.

[5] M. Auslander and O. Goldman, Maximal order, Trans. Amer. Math. Soc., **97** (1960), 1-24.

[6] ——, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc., **97** (1960), 367-409.

[7] G. Azumaya, On maximally central algebras, Nagoya Math. J., **2** (1951), 119-150.

[8] H. Bass, The Morita theorems, Mimeographed Notes, Oregon, 1962.

[9] N. Bourbaki, Algebra commutaive, Chap. I-II, Herman, 1962.

[10] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton, 1956.

[11] S. U. Chase and A. Rosenberg and D. K. Harrison, Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Memoi. Amer. Math., No. 52 (1965).

[12] S. U. Chase and A. Rosenberg, Amitsur cohomology and the Brauer group, Memoi. Amer. Math. Soc., No. 52 (1965).

[13] ——, A theorem of Harrison, Kummer theory, and Galois' algebras, to appear.

[14] F. R. DeMeyer, Galois theory in algebra over a commutative ring. to appear.

[15] ——, Some note on the general Galois theory of ring, Osaka Math. J., **1** (1964), 117-127.

[16] ——, The Brauer groups of some separably closed rings. to appear.

[17] S. Eilenberg and N. Steenrod, Fondations of algebraic topology, Princeton, 1952.

[18] R. Godement, Theorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[19] M. Harada, Supplementary results on Galois extension. Osaka Math. J., **2** (1965), 343-350.

[20] ——, Some criterion for hereditarity of crossed products, Osaka Math. J., **1** (1964), 69-80.

[21] G. Hochschild, Simple algebras with purely inseparable splitting field of exponent one, Trans. Amer. Math. Soc., **79** (1955), 447-489.

[22] A. Hattori, Semi-simple algebras over a commutative ring, J. Math. Japan, **15** (1963), 404-419.

[23] T. Kanzaki, On commuter ring and Galois theory of separable algebras, Osaka Math. J., **1** (1964), 103-115.

[24] ——, On Galois extension of rings, Nagoya Math. J., **27** (1966), 43-49.

[25] ——, On Galois algebra over a commutative ring, Osaka Math. J., **2** (1965), 309-317.

[26] ——, A note on abelian Galois algebra over a commutative ring, Osaka Math. J. **3** (1966), 1-6.

[27] ——, Special type of separable algebra over a commutative ring, Proc. Japan Acad., **40** (1964), 781-786.

[28] S. Maclane, Homology, New York, 1965.

[29] K. Morita, Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. 6, **150** (1958), 83-142.

[30] T. Nakayama, On a generalized notion of Galois extension of a ring, Osaka Math. J., **15** (1963), 11-23.

[31] T. Nagahara, A note on Galois theory of commutative ring, to appear.

[32] B. Pareigis and A. Rosenberg, Addendum to 'Amitsur's complex for inseparable field', Osaka Math. J., **16** (1964), 33-44.

[33] A. Rosenberg and D. Zelinsky, On Amitsur's complex, Trans. Amer. Math. Soc., **97** (1960), 327-356.

[34] ——, Automorphisms of separable algebras Pacific J. Math., **11** (1961), 1107-1117.

[35] ——, Amitsur's complex for inseparable field, Osaka Math. J., **14** (1962), 219-240.

[36] Y. Takeuchi, On Galois extension over a commutative ring, Osaka Math. J., **2** (1965), 137-145.

[37] K. Sugano, and K. Hirata, Semi-simple extension and separable extension over non commutative ring, to appear.

[38] P. Wolf, Algebrische Theorie der galoisschen Algebren, Berlin, 1956.

Measurable cardinals について

東京教育大学　難　波　完　爾

古典集合論における測度 (measure) の問題に関係して，比較的最近になって数多くの興味深い結果が得られるようになった．ここに述べるものは，その中で特に 0, 1 だけを測度として持つような集合の性質である．

定義 (測度について)． 今 A を集合とし，μ を