複素多様体の双有理型幾何学

上 野 健 爾

閉リーマン面はその表示の如何にかかわらず，その上の有理型函数全体の作る体によってその解析的構造は一意的に定まるというRiemannの発見によって代数多様体の双有理幾何学は誕生した．この考えはBrill，Max Noether達によって発展させられ，イタリア学派によって代数曲面論が建設された．このイタリア学派の曲面論はKodairaによって解析曲面，すなわち2次元コンパクト複素多様体の理論に拡張され，その構造の多くが解明された．このKodairaの理論はKawaiによって3次元複素多様体に拡張され，algebraic reductionに関する基本定理や代数次元0のときのアルバネーズ写像の性質が調べられた．一方Iitakaは小平次元の概念を導入し，高次元代数多様体や複素多様体の分類理論のわく組を作ることに成功した．この論説ではIitakaによって始められた分類理論の最近の発展を論じることにする．紙数の関係もあって，主として予想$C_{m,n}$を中心とした問題を論じることにした．また代数多様体よりは複素多様体に比重をおいた形で述べてみたい．それは非代数的あるいは非ケーラー的な複素多様体に特有な現象が見出され，今後の解明が期待されるからである．

この論説では例を全く記すことができなかった．それについては[34]を参照していただきたい．また本稿はIitaka[18]の続篇と見なすこともできる．必要に応じて参照されることをお勧めしたい．

本稿では特にことわらない限り複素多様体はすべて連結かつコンパクトと仮定し，解析空間は被約(reduced)，連結かつコンパクトと仮定する．また部分多様体や部分解析空間，解析集合などはすべて閉集合と仮定する．代数多様体は$\boldsymbol{C}$上定義されており，特にことわらない限り非特異かつコンパクトと仮定する．またベクトル束や直線束は複素解析的または代数的なもののみ考えることにする．

目次

§1. 準備

この節では後に必要となるいくつかの言葉を定義し，その簡単な性質を記そう．

分類理論で一番大切なのは**双有理型同値**の概念である．複素多様体M_1から複素多様体M_2に，双有理型写像φがあるとき，M_1とM_2とは双有理型同値といわれる．すなわち次の性質をもつ$M_1\times M_2$の部分解析空間M_3が存在するときM_1とM_2とは双有理型同値といわれる．

$$\begin{tikzcd} & M_3 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ M_1 \arrow[rr, dotted, "\varphi"] & & M_2 \end{tikzcd}$$

性質BM. $M_1\times M_2$からM_iへの射影をM_3に制限したものをπ_iと記すと，$M_1\supsetneqq S_1$，$M_3\supsetneqq S_3$なる解析集合が存在して，π_1はM_3-S_3とM_1-S_1との正則同型を与える．またπ_2に対しても同様のことが成立する．

解析空間に関する特異点の除去定理[14]を使えば，上の M_3 を $M_1\times M_2$ の部分解析空間とするかわりに，単に複素多様体として，性質 BM をもつ正則写像 π_1, π_2 が存在することを M_1 と M_2 とが双有理型同値であることの定義に採用してよいことがわかる．標語的に言えば，双有理型同値とは部分解析集合の違いを無視すれば双正則同型になることを意味している．したがって M_1 と M_2 とが双有理型同値であることと双正則同値(すなわち M_1 と M_2 とが解析的同型)とは異なっていることに注意しよう．ただ1次元複素多様体(閉リーマン面)では双有理型同値と双正則同値とは一致する．2次元複素多様体では Hopf の定理[16]によって M_1 と M_2 とが双有理型同値であるための必要十分条件は M_1 を何度か blowing up し，それを何度か blowing down すると M_2 になることである[0]．

しかし3次元以上になると事態が大変複雑になって，このように簡明なことは言えなくなる[0]．

以下 M_1 と M_2 とが双有理型同値であるとき，$M_1\sim M_2$ と記すことにする．

ところで M_1, M_2 が代数多様体であるときには双有理型同値[1]の別の定義を与えることができる．一般に複素多様体 M に対してその上の有理型函数全体の作る体を $\boldsymbol{C}(M)$ と記し，M の**函数体**と呼ぶ．すると，代数多様体 M_1, M_2 に対しては $\boldsymbol{C}(M_1)$ と $\boldsymbol{C}(M_2)$ とが体として同型であることと $M_1\sim M_2$ であることとが同値になる[2]．すなわち代数多様体においては，その双有理型同値類は函数体だけで決まってしまう．一般の複素多様体では，$M_1\sim M_2$ であれば $\boldsymbol{C}(M_1)\simeq\boldsymbol{C}(M_2)$ であるが逆が成立するとは限らない[2]．

さてわれわれの目標は複素多様体の双有理型同値類を何らかの形で分類することにある．この問題は Riemann[27]によって最初に考察された．彼は閉リーマン面はその函数体によって一意的に定まることを示し，さらにモジュライ数を決定した．この観点は代数的には Brill, M. Noether, Clebsch 達にひきつがれ，代数曲線，代数曲面の双有理幾何学が建設された．複素多様体の双有理型同値類を問題にするのはこうした伝統にたってのことではあるが，実は以下で示すようにモデルを次々と自由にとりかえることによって理論を簡明にしている点が最も重要であることに注意しよう．双正則同値を考える限りでは理論は複雑になってしまう．しかし一方では双有理型写像の構造が3次元以上では複雑なため，別の面での困難が生じることは言うまでもない．

続いて双有理型不変量をいくつか導入しておこう．次節で述べるが，複素多様体 M の函数体 $\boldsymbol{C}(M)$ は有限次代数函数体となっており，その超越次数を $a(M)$ と書いて，M の**代数次元**と呼ぶ．

$$a(M)=\mathrm{tr.deg}_{\boldsymbol{C}}\,\boldsymbol{C}(M).$$

$M_1\sim M_2$ であれば $\boldsymbol{C}(M_1)\simeq\boldsymbol{C}(M_2)$ であるので，$a(M_1)=a(M_2)$，すなわち代数次元は双有理型不変量である．この他にも種々の双有理型不変量がある．複素多様体 M に対して，M 上の正則 k 次型式の芽の作る層を Ω^k と記す．このとき $g_k(M)$ を

$$g_k(M)=h^0(M,\Omega^k_M),^{3)}\qquad k=1,2,\cdots,\quad \dim_{\boldsymbol{C}} M.$$

で定義しよう．$n=\dim_{\boldsymbol{C}} M$ とすると，Ω^n_M は可逆層となる．対応する直線束を K_M と記し，M の**標準束**と呼ぶ．正整数 m に対して，M の m **種数** $p_m(M)$ を

$$p_m(M)=h^0(M,K_M^{\otimes m})$$

で定義する．$p_1(M)$ を $p_g(M)$ と書いて，M の幾何種数と呼ぶ．これは $g_n(M)$ とも等しい．これらはすべて双有理型不変量である[4]．すなわち，$M_1\sim M_2$ であれば

$$g_k(M_1)=g_k(M_2),\qquad p_m(M_1)=p_m(M_2).$$

さらにもっと一般に $p_{m_1,\cdots,m_n}=h^0(M,(\Omega^1)^{\otimes m_1}\otimes\cdots\otimes(\Omega^n)^{\otimes m_n})$ や，$g_k^m(M)=h^0(M,S(\Omega^k))$ なども $m_i\geq$

1, $i=1,2,\cdots,n$, $m\geq 1$ のときは双有理型不変量となる[4]. (ただし $S^m(\Omega^k)$ は Ω^k の m 次対称積を意味する.) さらに, 自明ではないが, M の k 次**不正則数**

$$q_k(M)=h^k(M,O_M),\qquad k=1,2,\cdots,\qquad n=\dim_{\boldsymbol{C}} M$$

も双有理型不変量であることが示される. $q_1(M)$ は以下しばしば $q(M)$ と略記される.

さて分類理論で大切な役割をする**小平次元**を定義しよう. 複素多様体 M に対して, $\boldsymbol{N}(M)=\{m\geq 1\,|\,p_m(M)\geq 1\}$ を考える. $\boldsymbol{N}(M)\ni m$ に対して $H^0(M,K_M^m)$ の底 $\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_N\}$, $N=p_m(M)-1$ をとると, 有理型写像

(1.1)
$$\begin{array}{rcl}\Phi_{mK}: M & \longrightarrow & \boldsymbol{P}^N\\ \Cup & & \Cup\\ z & \longmapsto & (\varphi_0(z):\varphi_1(z):\cdots:\varphi_N(z))\end{array}$$

が定義できる[5]. これを M の m **標準写像**と呼ぶ. Φ_{mK} は $H^0(M,K_M^m)$ の底のとり方に依存するが, それらは $\boldsymbol{P}^N$ の射影変換の違いでしかないので, 本質的には変らない. 像 $W_m=\Phi_{mK}(M)$ は $\boldsymbol{P}^N$ の一般には特異点を持つ部分多様体であり, $N\geq 1$ であれば $\dim_{\boldsymbol{C}} W_m\geq 1$ となる. (W_m が1点となれば $\varphi_0,\cdots,\varphi_N$ は1次従属になってしまう.) M の小平次元 $\kappa(M)$ は

$$\kappa(M)=\begin{cases}\max\limits_{m\in \boldsymbol{N}(M)}\dim_{\boldsymbol{C}} W_m, & \boldsymbol{N}(M)\neq\phi \text{ のとき}\\ -\infty^{6)}, & \boldsymbol{N}(M)=\phi \text{ のとき}\end{cases}$$

で定義される[7]. これも双有理型不変量である. 種々の複素多様体に関する κ の計算例や, その基本的性質に関しては[17], [18], [34]を見ていただくことにして, ここでは次の重要な性質を述べるにとどめる.

1) $\kappa(M\times N)=\kappa(M)+\kappa(N)$

2) $\varphi: M\to N$ は全射有理型写像で, $\dim M=\dim N$ とすると $\kappa(M)\geq\kappa(N)$, $p_m(M)\geq p_m(N)$, $g_k(M)\geq g_k(N)$. さらに φ が有限次不分岐被覆を与えれば $\kappa(M)=\kappa(N)$.

3) $\varphi: M\to N$ を全射正則写像とし, φ の一般ファイバー $\varphi^{-1}(x)=M_x$ は連結とする. このとき

$$\kappa(M)\leq\dim N+\kappa(M_x).$$

また $\kappa(M)$ の定義より, 次の事実が成立する.

(1.2)
$$\begin{cases}\kappa(M)=-\infty \Longleftrightarrow p_m(M)=0, & m=1,2,3,\cdots\\ \kappa(M)=0 \quad\Longleftrightarrow p_m(M)\leq 1, & m=1,2,3,\cdots \text{ かつ}\\ \qquad\qquad\qquad \text{ある } m_0\geq 1 \text{ に対して } p_{m_0}(M)=1. & \\ \kappa(M)\geq 1 \quad\Longleftrightarrow \text{ある } m_0\geq 1 \text{ に対して } p_{m_0}(M)\geq 2. & \end{cases}$$

最後に**アルバネーズ写像**について述べよう. 複素多様体 M およびその上の1点 x に対して, 次の性質をもつ複素トーラス $A(M)$, および正則写像 $\alpha_x: M\to A(M)$ を作ることができる([2]).

性質 A0) $\alpha_x(x)=0$, (ただし0は $A(M)$ の原点)

A1) $f: M\to T$ を複素トーラス T への正則写像で $f(x)=0_T$ なるものとすると, $g: A(M)\to T$ なる正則写像かつリー群としての準同型写像が存在して $f=g\circ\alpha_x$ となる.

この定義より直ちにわかることは, $A(M)$ は点 x の取り方には無関係であり, α_x と α_y とは $A(M)$ の平行移動の違いしかない. そこで点 x を適当にとって $\alpha=\alpha_x: M\to A(M)$ と略記して, $A(M)$ を M のアルバネーズ・トーラス, α をアルバネーズ写像と呼ぶ. 複素トーラスの性質によって, $M_1\sim M_2$ であれば $A(M_1)=A(M_2)$ で

$$\begin{array}{ccc}\alpha_x: M & \longrightarrow & A(M)\\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & T & \end{array}$$

あることが示される．そこで

$$t(M)=\dim \alpha(M)$$

とおいて，M の**アルバネーズ次元**と呼ぶ．$A(M)$ の構成より

$$t(M)\le g_1(M)$$

となる．M が代数多様体やケーラー多様体では等号が成立するが[8]，一般には必ずしも等号とならない．アルバネーズ次元も双有理型不変量である．

さて M が解析空間の場合にも上で定義した双有理型不変量を導入することができる．M^* を M の非特異モデルとし，たとえば $p_m(M^*)$ をもって $p_m(M)$ と定義する．M の非特異モデルはすべて双有理型同値であるのでこれは矛盾なく定義できる．他の不変量に関しても全く同様である．このように定義しておくと便利なことが多い．

§2. ファイバー空間

前節で定義した双有理型不変量の幾何学的意味をもう少し詳しく調べてみよう．

まず代数次元から始める．複素多様体 M の函数体 $\boldsymbol{C}(M)$ は代数函数体であり，その超越次数は M の次元を越えない([31])．したがって

$$a(M)\le \dim M.$$

また $a(M)$ 次元射影多様体 V で $\boldsymbol{C}(V)$ が $\boldsymbol{C}(M)$ と同型になるものが存在する．特異点の除去定理([13])によって V は非特異射影多様体と仮定してよい．$V\subset \boldsymbol{P}^N$ として $(\zeta_0:\zeta_1:\cdots:\zeta_N)$ を $\boldsymbol{P}^N$ の同次座標としよう．ζ_i/ζ_0，$i=1,\cdots,N$ を V 上に制限したものは $\boldsymbol{C}(V)$ の元であり，$\boldsymbol{C}(V)\simeq\boldsymbol{C}(M)$ より $\left.\dfrac{\zeta_i}{\zeta_0}\right|_V$ に $\varphi_i\subset\boldsymbol{C}(M)$ が対応しているとしよう．このとき有理型写像

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & M & \longrightarrow & \boldsymbol{P}^N\\ & \Cup & & \Cup\\ & z & \longmapsto & (1:\varphi_0(z):\varphi_1(z):\cdots:\varphi_N(z))\end{array}$$

を考えると，φ_i の定義より $\varphi(M)=V$ であることがわかる．$\varphi:M\to V$ は正則写像とは限らないので[9] M に何度か単項変換をほどこして複素多様体 $\hat{M}$ および自然な正則写像 $\pi:\hat{M}\to M$ を得，さらに $\hat{\varphi}=\varphi_0\pi:\hat{M}\to V$ が正則写像になるようにできる．([14]，これは有理型写像の不確定点の除去と呼ばれる．) もちろん $\hat{M}\sim M$ である．また $\boldsymbol{C}(V)\simeq\boldsymbol{C}(M)$ より，$\hat{\varphi}$ のファイバーはすべて連結であることがわかる([3])．

以下すべてのファイバーが連結となるような複素多様体の間の全射正則写像 $\psi:M\to N$ を**ファイバー空間**と呼ぶことにする．ファイバー空間 $\psi_1:M_1\to N_1$，$\psi_2:M_2\to N_2$ に対して $\pi_1:M_1\to M_2$，$\pi_2:N_1\to N_2$ なる双有理型写像が存在して，$\psi_2\circ\pi_1=\pi_2\circ\psi_1$ となるとき，この2つのファイバー空間は**双有理型同値**であると呼ぶ[10]．すると，上で複素多様体 M より作ったファイバー空間 $\hat{\varphi}:\hat{M}\to V$ の双有理型同値類は M の双有理型同値類から一意的に定まることがわかる．このファイバー空間の双有理型同値類またはその代表 $\hat{\varphi}:\hat{M}\to V$ を M の **algebraic reduction** と呼ぶ．これについては次の定理が基本的である．

$$\begin{array}{ccc}M_1 & \xrightarrow{\pi_1} & M_2\\ {\scriptstyle\psi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_2}\\ N_1 & \xrightarrow{\pi_2} & N_2\end{array}$$

定理 2.1. $\hat{\varphi}:\hat{M}\to V$ を複素多様体 M の algebraic reduction とすると，$\hat{\varphi}$ の一般ファイバー $\hat{\varphi}^{-1}(x)=\hat{M}_x$ に対して $\kappa(\hat{M}_x)\le 0$ が成立する．さらに $\dim\hat{M}_x=1$ のとき(すなわち $a(M)=\dim M-1$)は，$\kappa(\hat{M}_x)=0$ となる．

この定理によれば，M の函数体 $\boldsymbol{C}(M)$ によって射影多様体 V の双有理同値類が定まるが，そのとき $\hat{\varphi}$ の一般ファイバーには $\kappa\leq 0$ となる特殊な複素多様体しか現われないことがわかる．

同様のことは M の小平次元に関しても成立する．前節(1.1)で定義された m 標準写像 Φ_{mK}：$M\to W_m=\Phi_{mK}(M)$ を考えよう．もし $\kappa(M)>0$ であれば $m\in\boldsymbol{N}(M)$ を十分大にとれば $\dim W_m=\kappa(M)$ となる．実はさらに強く次のことが成立する．

定理 2.2([17])．$\kappa(M)>0$ のとき次の性質を持つファイバー空間 $\varphi: M^*\to W$ が存在する．

1) ある正整数 m_0 が存在し，$m\geq m_0$，$m\in\boldsymbol{N}(M)$ なる任意の m に対して $\varphi: M^*\to W$ は $\Phi_{mK}: M\to W_m$ と双有理型同値である．また W は射影多様体である．

2) W 内には高々可算個の代数集合 $S_\alpha\subsetneqq W$ が存在し，$W-\cup S_\alpha$ の各点 w に対して，w 上のファイバー $M_w^*=\varphi^{-1}(w)$ は複素多様体であり $\kappa(M_w^*)=0$.

この定理のもっと精密な定式化については[17], [34]を見られたい．この定理によれば，$\kappa(M)>0$ のときは M の双有理型同値類から性質 1), 2) を持つファイバー空間 $\varphi: M^*\to W$ の双有理型同値類が一意的に定まることになる．この同値類，もしくはその代表のファイバー空間を**標準ファイバー空間**または**飯高ファイバー空間**と呼ぶ．

以上の二定理によれば，代数次元や小平次元によって複素多様体の大まかな構造を知ることができる．複素多様体 M に対してもし $a(M)=\dim M$ であれば M は射影多様体と双有理型同値であり，もし $\dim M>a(M)>0$ であれば $M^*\sim M$ なる複素多様体が存在し，M^* は $a(M)$ 次元のある射影多様体上の一般ファイバーが $\kappa\leq 0$ となるファイバー空間となる．したがって代数次元に関しては $a(M)=0$ のときの M の構造の研究とある種のファイバー空間の構造の研究が必要となる．小平次元に関しても類似のことが成立する．$\kappa(M)=\dim M$ であれば Φ_{mK} は双有理型写像となり，$\dim M>\kappa(M)>0$ のときは一般ファイバーが $\kappa=0$ となるファイバー空間と双有理型同値となる．したがって $\kappa(M)\leq 0$ の構造の研究とファイバー空間の研究が必要となってくる．

このようにして，その双有理不変量が特別な値を持つときの多様体の研究と，そのような多様体を一般ファイバーとしてもつようなファイバー空間の研究を通して複素多様体の構造を把握しようというのが分類理論の立場である．

さてアルバネーズ写像を使うとさらに別の形のファイバー空間を得ることができる．そのために，アルバネーズ次元が正の複素多様体 M を考えよう．アルバネーズ写像 $\alpha: M\to\alpha(M)\subset A(M)$ のファイバーは必ずしも連結とは限らない．そこで Stein 分解([3])を行って $\gamma: W\to\alpha(M)$ は有限被覆，$\beta: M\to W$ のファイバーは連結になるようにする．$\alpha(M)$ や W は必ずしも非特異とは限らないので，$\beta: M\to W$ に双有理型同値なファイバー空間 $\beta^*: M^*\to W^*$ をとって**アルバネーズ・ファイバー**空間と呼ぶ．(しかし $\beta: M\to W$ をアルバネーズ・ファイバー空間と呼ぶことも多い．) $a(M)=0$ や $\kappa(M)\leq 0$ のとき，$t(M)>0$ であればあらたにファイバー空間の構造をもつことになる．このファイバー空間の構造を調べることが，分類理論の重要な課題であるが，それについては次節以降でのべることとして，ここでは次の基本的な事実をのべるにとどめよう．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \alpha(M) \\ & W \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

定理 2.3([34])．$\kappa(\alpha(M))\geq 0$ であり，$\kappa(\alpha(M))=0$ となるための必要十分条件は $\alpha(M)=A(M)$ となることである．

§3. 予想 $C_{m,n}$

アルバネーズ・ファイバー空間を使って複素多様体の構造を調べるためには次の予想が基本的である.

予想 $C_{m,n}$. $\varphi: M \to N$ を $\dim M = m$, $\dim N = n$ のファイバー空間とする. このとき, $M_x = \varphi^{-1}(x)$ を N の一般ファイバーとすると

$$\kappa(M) \geq \kappa(N) + \kappa(M_x) \tag{3.1}$$

が成立する.

この予想は Iitaka[18]によって提出されたが, 一般の複素多様体に対しては必ずしも成立しないことが判明した. 実ははるか以前に(3.1)の成立しない例が Atiyah[1], Blanchard[2]によって見出されていた. それにもかかわらず不等式(3.1)は多くの場合成立している. そのことを述べる前に, この予想が正しいとすると $\kappa(M) \leq 0$ なる多様体の構造がかなり解明されることを述べておこう.

M を $t(M) \neq 0$ なる複素多様体として $\beta^*: M^* \to W^*$ をアルバネーズ・ファイバー空間としよう. 前節定理 2.3 によって

$$\kappa(W^*) = \kappa(W) \geq \kappa(\alpha(M)) \geq 0.$$

また(3.1)が成立すると仮定すると

$$\kappa(M) = \kappa(M^*) \geq \kappa(W^*) + \kappa(M_x^*)$$

となる. したがってもし $\kappa(M) = 0$ とすると $\kappa(W^*) = \kappa(M_x^*) = 0$ となり, 定理 2.3 より $\alpha(M) = A(M)$ であることもわかる. 一方もし $\kappa(M) = -\infty$ とすると $\kappa(W^*) \geq 0$ より $\kappa(M_x^*) = -\infty$ でなければならない. このようにして, 次元の低い $\kappa \leq 0$ となる多様体とそれを一般ファイバーとするファイバー空間の構造の研究に再び帰着されることになる. さらに $\kappa(M) = 0$ のときは $g_1(W^*) = t(W^*) = \dim W^*$ となることも言える. このような例, すなわち $\kappa(X) = 0$, $g_1(X) = t(X) = \dim X$ となる複素多様体の例は複素トーラスがあるが, それに限るかという自然な問題が起る. もしこれが正しければ $\kappa = 0$ の多様体の構造はかなりわかることになる.

$\kappa \leq 0$ なる複素多様体の構造に関しては, すでに Iitaka[18]によって, 少なくとも代数多様体に関しては曲面論や種々の例からの類推として多くの予想が提出されていた. 当時はまだ定理 2.3 が得られていなかったので予想 $C_{m,n}$ がこれらの予想の中心であることはわからなかった. というよりは, Iitaka[18]に述べられている種々の予想を解こうとする努力の中から予想 $C_{m,n}$ が中心課題の一つとして大きくクローズアップされて来たのである.

予想 $C_{m,n}$ に関しては現在重要な結果が得られている. まず Nakamura-Ueno[26]によって $\varphi: M \to N$ が解析的ファイバー束でファイバー F が代数多様体(もっと一般にモイシェゾン多様体, すなわち $a(F) = \dim F$ となる多様体)であれば(3.1)で等式が成立することが示された. このときファイバー F が一般の複素多様体では(3.1)は必ずしも成立しない. その根拠は $\mathrm{Aut}(F)$ を自然に $H^0(F, K_F^m)$ に作用させて表現 $\rho_m: \mathrm{Aut}(F) \to \mathrm{Aut}(H^0(F, K_F^m))$ を作るとき, F が代数的であれば $\mathrm{Im}\,\rho_m$ は有限群であるが, F が一般の複素多様体であれば $\mathrm{Im}\,\rho_m$ は必ずしも有限群にはならない点にあった.

さて予想 $C_{2,1}$ は曲面の分類理論および Kodaira[24]による楕円曲面の理論より導くことができるが, これと独立に証明することができる([38]). Viehweg[39]は安定代数曲線(stable curve)の理

論を使ってさらに一般に $C_{n,n-1}$ は常に成立することを示した．ただし彼は代数多様体のときに証明しているが，φ の一般ファイバーが種数２以上の曲線のときには複素多様体の範囲でも彼の論法を少し修正すれば $C_{n,n-1}$ が正しいことが証明できる．（このときは $\varphi: M\to N$ が射影射 (projective morphism) と双有理型同値であることによる．）一方，一般ファイバーの種数が１のときは彼の論法は使えないが別の方法で $C_{n,n-1}$ が成立することが言える．

一方 Griffiths[12] はホッジ構造の変形理論の研究の過程で次の注目すべき結果を得ていた[11]．

X, Y は必ずしもコンパクトとは限らない複素多様体とし，$\psi: X\to Y$ は全射正則かつ固有写像とする．さらに ψ は X の各点で maximal rank であるとし，ψ の各ファイバーは連結とする．このとき Y 上の局所自由層 $\psi_*\omega_{X/Y}$ $(\omega_{X/Y}=O_X(K_X\otimes\psi^*K_Y^{-1}))$ には各ファイバー $X_y=\psi^{-1}(y)$ での正則 n 次型式の積分 $(\sqrt{-1})^{n^2}\int_{X_y}\tau_1\wedge\bar{\tau}_2$（ただし $n=\dim X-\dim Y$，$\tau_1, \tau_2\in H^0(X_y, K_{X_y})$）によってエルミット内積を定義できる．このとき次の定理が成立する．

定理 3.1. 上の仮定のもとで，さらに X はケーラー計量を持つとすると，上で定義した $\psi_*\omega_{X/Y}$ のエルミット内積に附随したエルミット接続の曲率形式は半正定値になる．

この定理はもう少し弱い条件のもとでも成立するが，X がケーラーであるかそれに準ずる性質を持つことが大切である．すでに述べた Atiyah[1] や Blancharb[2] の例や重力瞬間子と対応するある種の３次元複素多様体のファイバー空間では $\psi_*\omega_{X/Y}$ が負の直線束になっている ([15])．(§5 を参照のこと．)

さてこの Griffiths の定理は ψ が X の各点で maximal rank という条件がついていたが，一般のファイバー空間については Fujita[10] の次の結果が重要である．

定理 3.2. $\varphi: M\to N$ は $\dim N=1$ となるファイバー空間とし，φ の一般ファイバー $M_x=\varphi^{-1}(x)$ に対して $p_g(M_x)\neq 0$ とする．もし M がケーラー多様体であれば $\varphi_*\omega_{M/N}$ は半正 (semi-positive) な局所自由層である[12]．

この定理から直ちに次の結果を得る．

系. $\varphi: M\to N$ は上述の通りとし，さらに N の種数は２以上とする．このとき $C_{n,1}$ が成立する．

これらの結果に関しては Fujita[11] に解説があるので参照されたい．この Fujita の結果は Viehweg と Kawamata によって拡張された．まず Viehweg[40] は

定理 3.3. 代数多様体のファイバー空間では $C_{3,1}$ は常に成立する．

ことを証明した．証明の最も困難な部分は $\varphi: M\to N$ の一般ファイバー M_x が $\kappa(M_x)=2$ となるとき，すなわち M_x が一般型の曲面となるときであるが，Viehweg は一般型曲面の性質をたくみに使って $C_{3,1}$ を証明した．その際，Gieseker による一般型曲面のモジュライ空間の構成法がうまく使われている．

一方 Kawamata[21] はホッジ構造の変形理論，特に Schmid[30] の理論を使って次の定理を証明した．

定理 3.4. 代数多様体のファイバー空間 $\varphi: M\to N$ に対してその一般ファイバー M_x が $p_g(M_x)\geq 1$ であり，かつ $\kappa(N)=\dim N$ であれば $C_{m,n}$ は成立する．

さらに彼は $C_{n,1}$ が代数多様体のファイバー空間では常に成立することも示した ([22])．このようにして，予想 $C_{m,n}$ は多くの場合に成立することが示されており，予想 $C_{m,n}$ 自身も代数多様体の場合にはやがて証明されることと思われる．

§4. $\kappa\leq 0$ である代数多様体の分類

代数多様体に限るならば，予想 $C_{m,n}$ の結果を使うことができて，$\kappa\leq 0$ である多様体についてその構造をいくらか解明することができる．次の定理は3次元のとき Ueno[33] によって証明され，一般次元の場合は Kawamata-Viehweg[23]，Kawamata[21] によって証明された．これは高次元代数多様体で，その双有理不変量からその双有理同値類が決定できた最初の例である．

定理 4.1. 代数多様体 V に対してアルバネーズ写像 $\alpha: V\to A(V)$ が双有理写像になるための必要十分条件は $\kappa(V)=0$，$g_1(V)=\dim V$ となることである．すなわち $\kappa(V)=0$，$g_1(V)=\dim V$ がアーベル多様体の双有理同値類を定める．

この定理は V をケーラー多様体と仮定しても成立する．すなわちケーラー多様体 V に対しては，$\kappa(V)=0$，$g_1(V)=\dim V$ となることが V が複素トーラスと双有理型同値になるための必要十分条件である．しかしながら次節で述べるように，一般の複素多様体では成立しない．さらに Kawamata[21] は次のことを証明した．

定理 4.2. $\kappa(V)=0$ となる代数多様体に対してアルバネーズ写像 $\alpha: V\to A(V)$ は全射であり，α の各ファイバーは連結である．

予想 $C_{m,n}$ が証明できればファイバーの小平次元が0であることも示すことができる．一般次元では今のところ定理 4.2 が最良の結果であるが，3次元代数多様体ではさらに詳しい構造がわかっている．

定理 4.3. V は $\kappa(V)=0$，$\dim V=3$ となる代数多様体とする．

1) $g_1(V)=3$ であれば V はアーベル多様体と双有理同値である．

2) $g_1(V)=2$ であれば，V はアルバネーズ多様体 $A(V)$ 上の楕円曲線をファイバーとするエタール・ファイバー束[13)]と双有理同値である．しかもこのとき $p_g(V)=0$.

3) $g_1(V)=1$ であれば，V はアルバネーズ多様体 $A(V)$ 上の $\kappa(S)=0$ なる曲面 S をファイバーとするエタール・ファイバー束と双有理同値である．

この定理の主張していることは，$\kappa(V)=0$ のときアルバネーズ写像 $\alpha: V\to A(V)$ のファイバーの小平次元が0になるのみならず(そのことは $C_{3,1}$，$C_{3,2}$ が正しいことより前節の議論を使って示すことができる)，それがファイバー束の構造を持っていること，したがって一般ファイバーのモジュライは変化していないことである．したがって当然予想 $C_{m,n}$ より詳しい議論が必要となる．考察しなければならないのは $\varphi: V\to W$ なるファイバー束で，W はアーベル多様体，φ の一般ファイバーの小平次元が0，かつ $\kappa(V)=0$ となる場合である．例えば φ の一般ファイバーがアーベル多様体となっている場合を考えてみよう．この場合 $\kappa(V)\geq 0$ となることはアーベル多様体のモジュライの理論を使って証明できる([35])．しかも一般ファイバーに出てくるアーベル多様体のモジュライが変わっていれば，この証明から $\kappa(V)>0$ になることを示すことができる．したがって $\kappa(V)=0$ であれば一般ファイバーに出てくるアーベル多様体はすべて同型となる．さらに $\varphi: V\to W$ がファイバー束と双有理型同型になることを示すためには，φ には本質的に特異ファイバーが出てこないことを言う必要がある．この時点で W がアーベル多様体であることが本質的に使われる．アーベル多様体ではすべての正因子(effective divisor) D が線型同値で動きうる，すなわち $h^0(W, O(D))\geq 2$ となる著しい性質があり，これによって，今の場合 $\varphi: V\to W$ がファイバー束と双有理同値がいえる([35])[13a)].

同様のアイディアは上の定理4.3, 3)を証明するときにも使われる．ただし$C_{3,1}$の証明にはホッジ理論を使ったので，それにあわせた形でのモジュライ理論が必要となる．それはGriffiths[12]によってすでに用意されている正則型式の周期写像の理論である．われわれが必要とするのは標準束が自明なn次元代数多様体(ケーラー多様体)では正則n型式による周期写像に関して局所トレリの定理が成立するという事実である．曲面論の一般論から$\kappa(S)=0$である曲面は$p_g(S)=1$のときは標準束が自明な曲面と双有理同値であることが知られている．また$p_g(S)=0$, $\kappa(S)=0$のときでも$p_m(S)=1$となる最小の正整数mをとると$K^{\otimes m}$が自明となる曲面と双有理同値となり，しかもその曲面の適当なm重不分岐被覆をとると標準束は自明となる．Griffiths[12]の理論は双正則同値類の議論であるが，周期写像は本質的にはその双有理同値類で定まることに注意すれば，以上の考察から，アルバネーズ写像の一般ファイバーの双有理同値類のモジュライが，われわれの場合一定であることを示すことができる．これより上の定理を証明することはさして困難ではない．

このように上の定理4.3の証明も予想$C_{m,n}$の証明と密接に関連している．この定理を高次元に拡張しようとすると，当然次の問題に出会うことになる．

問題. Vを$\kappa(V)=0$, $p_g(V)=1$となるn次元代数多様体(またはケーラー多様体)とする．このとき正則n型式による周期写像に対して局所トレリの定理は成立するか．

ただしこの問題では双有理(型)同値類でのモジュライを問題にしており，Griffiths[12]の意味での局所トレリの定理と意味が異なることに注意しておく．もし局所トレリの定理が成立しない例が見つかれば，定理4.3も自然な形では高次元に一般化することはできなくなる可能性が考えられる．この問題は3次元の場合定理4.2によって$g_1(V)\geq 1$であれば常に正しい．したがって$\kappa(V)=0$, $p_g(V)=1$, $g_1(V)=0$となる3次元多様体でしかもどのようなモデルをとっても標準束が自明とならないものに対して局所トレリの定理が成立するか否かが興味ある問題となる．このような不変量を持ちかつ標準束に対してこのような性質を持つ3次元多様体がかなり沢山存在することも知られている([36], [37])．

また定理4.3はVがケーラー多様体のときも自然に一般化することができる．一方$\kappa(V)=0$, $g_1(V)=0$のときは上の方法ではその構造を決定できない．そのために何らかのファイバー空間を構成することができれば好都合である．そのために不変量$H^0(V, S^m\Omega^1)$, $H^0(V, S^m\Omega^2)$を考察することが役立つ．$H^0(V, S^m\Omega^1)$についてはSakai[28]によってその性質がいくつか調べられている．$H^0(V, S^m\Omega^1)$に対応するファイバー空間はV上の$\boldsymbol{P}^2$-束$\boldsymbol{P}(\Omega^1)$($\dim V=n$であれば$\boldsymbol{P}^{n-1}$束となる)からの有理型写像を使って構成される．V上の$\boldsymbol{P}^2$-束をとっているのでVの研究には少々不便である．最近Mabuchi[42]はVからの有理型写像を作って，$H^0(V, S^m\Omega^1)$に対応するファイバー空間を構成しその一般論を展開することに成功した．これによって$\kappa=0$, $\kappa=-\infty$の多様体の構造がさらに詳しくわかることが期待される．

$\kappa(V)=-\infty$となる3次元代数多様体に関しては，次の定理が成立する．

定理4.4. Vを$\kappa(V)=-\infty$, $g_1(V)\geq 1$なる3次元代数多様体とする．$\beta: V\to W$をアルバネーズ・ファイバー空間とすると$\dim W\leq 2$である．

1) $\dim W=2$であればβの一般ファイバーは$\boldsymbol{P}^1$である．

2) $\dim W=1$であればβの一般ファイバーは有理曲面[14)]または線織面[14)]である．

したがって特にVは単線織多様体[14)]となる．

$\kappa(V)=-\infty$, $g_1(V)=0$ のときの構造はまだよくわかっていない．知られている例はすべて単線織多様体になっている．$\kappa(V)=-\infty$, $g_1(V)$ となる3次元代数多様体はFanoを中心としてイタリア学派によって前世紀末から長い研究が続けられ，多くの‘結果’が得られていた．それらの‘結果’の厳密な証明は最近になって得られ始めた．彼らが特に興味を持ったのは有理多様体の数値的特徴づけ，すなわち代数曲面論におけるCastelnuovoの定理‘$p_2(S)=0$, $q(S)=0$ であれば S は有理曲面である’の3次元への拡張と，有理多様体と単有理多様体[14)]の区別の問題であった．後者に関してはClemens-Griffiths[4], Tjurin[32]達によって始めて厳密な証明が得られ単有理多様体であって有理多様体でないものが沢山あることが示された．しかし単有理多様体と有理多様体とを識別する一般的方法は知られておらず，有理多様体の数値的特徴づけとあいまって極めて困難な問題と思われる．

イタリア学派が有理多様体の特徴づけに興味を持ったのはその函数体が一番単純であるという点からと思われるが，双有理幾何学の立場から眺めると双有理写像が3次元以上では複雑なため多様体としての性質はきわめて複雑である．函数体は複雑であってもアーベル多様体の方が双有理幾何学上からは多様体としては簡単な性質を持っている．また有理多様体と単有理多様体を区別することはわれわれの立場からはそれ程重大なこととは思われない．数値的特徴づけを考える限り両者を区別しない方が合理的である．

§5. $\kappa\leq 0$ である3次元複素多様体の分類

前節で述べた3次元代数多様体の分類の議論はそのままでは3次元複素多様体の分類に適用することはできない．それはすでに述べたように $C_{3,1}$ が必ずしも成立しないからである．そのことは一般の複素多様体では代数多様体のときとは異なる現象が起ることを意味する．そうした観点からも予想 $C_{m,n}$ の成立する範囲を正確に決定することは大変興味ある問題である．それは代数多様体やケーラー多様体と他の複素多様体との構造の違いに対する深い認識を与えてくれるであろうし，単に非ケーラー多様体と呼ばれているものの中に様々の階層があることが示してくれることが期待される．すでに述べたように $C_{n,n-1}$ は一般の複素多様体に対しても常に成立する．したがって次に問題になるのは $C_{3,1}$ であるが，これに関しては次の定理が成立する([36])．

定理 5.1. $\varphi: V\to W$ は3次元複素多様体 V から代数曲線への全射正則写像であり，ファイバーはすべて連結とする．φ の一般ファイバーが2次元複素トーラスか $K3$ 曲面[15)]に双有理型同値でなければ，ファイバー空間 $\varphi: V\to W$ に対して常に $C_{3,1}$ が成立する．

φ の一般ファイバーが複素トーラスや $K3$ 曲面と双有理型同値のときは $C_{3,1}$ が成立する場合もあるし成立しない場合もある．この定理を使うと定理4.3に対応して次の結果を得ることができる．

定理 5.2. V を $\kappa(V)=0$ である3次元複素多様体とする．さらに V のアルバネーズ次元 $t(V)$ は正とする．

A)　アルバネーズ写像 $\alpha: V\to A(V)$ が全射のとき

1)　もし $t(V)=3$ であれば α は双有理型写像であり，V は3次元複素トーラスと双有理型同値である．

2)　もし $t(V)=2$ であれば $\alpha: V\to A(V)$ は $A(V)$ 上の楕円曲線をファイバーとする解析的ファイバー束と双有理型同値である．

3) もし $t(V)=1$ であれば α の一般ファイバーは $\kappa=0$ となる解析曲面となる．しかもこの解析曲面が2次元複素トーラスまたは $K3$ 曲面以外のときは一般ファイバーの双有理型同値類のモジュライは一定である．しかし一般ファイバーが2次元複素トーラスまたは $K3$ 曲面と双有理型同値のときは一般ファイバーの双有理型同値類のモジュライは一定とは限らない．

B) アルバネーズ写像 $\alpha: V\to A(V)$ が全射でないときは，$\alpha(V)=C$ は非特異代数曲線となる．このとき $\alpha: V\to C$ の一般ファイバーは2次元複素トーラスまたは $K3$ 曲面と双有理型同値でありそのモジュライは一定ではない．また C の種数 $g(C)$ は2以上のあらゆる値を取り得る．

この定理を定理4.3と比較すると $C_{3,1}$ が成立しない場合があるためにA 3)に一部例外的事情が生じ，さらにアルバネーズ写像が全射とならないB)の場合が実際に起ることがわかる．この場合もちろん V はケーラー多様体にはなり得ない[16]．このように，非ケーラー多様体は全く異なる性質を持つ場合があることがわかる．

同様にして定理4.4に対応する次の結果がある．

定理5.3. V を $\kappa(V)=-\infty$, $t(V)>0$ となる3次元複素多様体とする．$\beta: V\to W$ をアルバネーズ・ファイバー空間とすると $\dim W\leq 2$ である．

1) $\dim W=2$ であれば β の一般ファイバーは $\boldsymbol{P}^1$ である．

2) $\dim W=1$ であれば β の一般ファイバーは有理曲面，線織面または $\kappa=-\infty$ となるVII型曲面[17]であるか，2次元複素トーラスまたは $K3$ 曲面と双有理型同値である．

定理4.4の場合と異なるのは2)で $\kappa=0$ となる曲面も一般ファイバーになり得る点である．この場合ももちろん V はケーラー多様体とはなり得ない[16]．

以上いずれの場合も $t(V)=0$ となる場合はその構造は全く不明である．数多くの例を構成することはできるが，それらを統一的に取り扱う理論はこれからの重要な課題である．$\kappa(V)=0$, $t(V)=0$ となる3次元複素多様体の例として興味あるものに $SL(2,\boldsymbol{C})$ をその一様な離散部分群 Γ で割ってできたコンパクト複素多様体 $M_\Gamma=SL(2,\boldsymbol{C})/\Gamma$ がある．これに対しては $a(M_\Gamma)=0$ 以外にはほとんど何も知られていない．例えば自明でない変形を持つかどうかもわからない．実3次元コンパクト双曲多様体上の S^3 束として M_Γ の例が沢山構成できることも興味をひく．こうした多様体を特徴づけることができれば非ケーラー多様体の研究に対する手がかりが得られることも期待される．

さて定理5.1の証明に関してであるが，再びホッジ理論が用いられる．解析曲面を扱うので非ケーラー多様体が出てくるのだが，Kodaira[24]による曲面の深い研究によって $H^2(S,\boldsymbol{Z})$ はホッジ構造を持ちしかも非ケーラー多様体のときはカップ積で偏極構造が導入できることもわかっているのでケーラー多様体のときの議論がそのまま使えるという幸運な事情がある．もちろん3次元以上になればこうしたことは成立しなくなるので事態はもっと複雑になってくる．$C_{4,1}$ を考えても，それが成立しない場合の一般ファイバーに何が出てくるか，特に一般ファイバーにどのような $\kappa=0$ の3次元複素多様体が出てくるかは興味ある問題となる．こうした観点から $\kappa=0$ の多様体の構造を調べることは今後に残された大切な問題である．

§6. ケーラー多様体と非ケーラー多様体

以上主として予想 $C_{m,n}$ を中心とした問題を取り扱ってきた．しかしながら他にも重要な観点が沢山ある．特に§2で導入したalgebraic reductionよりできるファイバー空間，$a(M)=0$ のとき

のアルバネーズ写像は興味ある対象である．$a(M)=0$ の複素多様体に関しては次のことが知られている．

定理 6.1. $a(M)=0$ であればアルバネーズ写像 $\alpha: M \to A(M)$ は全射であり，α のファイバーはすべて連結である．したがって特に $t(M) \leq \dim M$, $a(A(M))=0$ であり，$t(M) \neq 1$ となる．

1) $t(M)=\dim M$ のときは α は双有理型同型写像である．

2) $t(M)=\dim M-1$ のときは α の一般ファイバーはすべて $\boldsymbol{P}^1$ であるか互いに同型な楕円曲線である．

3) $t(M)=\dim M-2$ のときは α の一般ファイバーの小平次元は 0 または $-\infty$ である．

この定理は定理 2.1 と著しく似ている．これは単に表面的な類似ではなく本質的な所でつながっていると思われるが，今のところその関係はよくわからない．それは定理 6.1，3)の証明が大変技巧的であって一般型曲面のモジュライの理論などを使っており，α の一般ファイバーの次元が高いときには証明が拡張できない点にある．また 3) では一般ファイバーのもう少し詳しい構造を調べることができて，たとえば $\kappa=-\infty$ のとき種数が 2 以上の線織面は出てこないことが証明できる．同様のことは定理 2.1 でも証明できることが Kuhlmann によって指摘されている．

一般の複素多様体に関しては定理 2.1，定理 6.1 の結果をこれ以上に精密化することはできないが，ケーラー多様体に関しては Fujiki[6], [7], [8] によってさらに精密な結果が得られている[18]．特に注目されるのは algebraic reduction やアルバネーズ写像を相対化することに成功している点である．そのためにファイバー空間のより精密な議論が可能となり，定理 2.1 や定理 6.1 をさらに鋭い形にすることができる．Algebraic reduction やアルバネーズ写像を相対化することができた根拠は，Fujiki[5] によって証明された，ケーラー多様体の Douady 空間の各既約成分はコンパクトである[18]という事実にある．この事実は非ケーラー多様体では必ずしも成立しない．したがって非ケーラー多様体の場合は異なった現象が起ることが期待される．定理 5.2，B) はその一例であるが，こうした点の研究は，技術的に種々の困難を伴うこともあって，現在のところ極めて不十分であり，将来に残されている．

しかしながら非ケーラー多様体というのは何ら積極的な概念ではなく余りに漠然としている．解析曲面の場合非ケーラーとなるのは楕円曲面と VII 型曲面であり[19]，特に VII 型曲面は大変興味深い曲面である．3 次元以上になると非ケーラー多様体は極めて沢山あり，次元が高くなるにつれてその数は急激に増している．そうしたことからも，非ケーラー多様体の中の興味あるいくつかの類を見出し研究することが大切なことと思われる．上述したように興味ある性質を持った非ケーラー多様体が存在しており，そのような多様体の持っている性質を追求することは，この問題に対する有効なアプローチと思われる．

注

0) 曲面論ではこのように双有理型写像の構造が簡単であるために相対極小モデルの理論が極めて有効であった．曲面論では，$C^2<0$, $K \cdot C<0$ となる既約曲線は第一種例外曲線になるという事実が到るところ使われる．しかし 3 次元以上ではこのような簡明な事実は存在せず，特異点を許した形でも相対極小モデルのよい理論は一般には存在し得ないことが Fujiki[9] によって示されている．すなわち曲面論では双有理型同値類の分類が極小モデルを考えることによって双正則同値類への分類に帰着されたが，3 次元以上では相対極小モデルをどのような形に定義しても一般には連続体無限個の相対極小モデルを考えざるを得ず，事情は簡単ではない．Ueno[33] で行われた 3 次元アーベル多様体の数値的特徴づけでは，曲面論の手法とは逆に，複素多様体を双有理型同値で自由に動かしうる(すなわちモデルを自由にとりかえることができる)ことを

使って，極小モデルの理論とは正反対の方向で問題が解決された．3次元以上の複素多様体ではむしろこうした観点を追求してゆく方が実り多いものと思われる．

1) 代数多様体のときは通常，双有理写像，双有理同値といわれる．

2) もっと一般に $a(M_1)=\dim M_1$ であれば，かつそのときに限って $M_1 \sim M_2$ と $\boldsymbol{C}(M_1)\simeq\boldsymbol{C}(M_2)$ とが同値になる．

3) M 上の $\boldsymbol{C}$ 加群の層 $\mathcal{F}$ のコホモロジー $H^p(M,\mathcal{F})$ の $\boldsymbol{C}$ 上の次元を，以下 $h^p(M,\mathcal{F})$ と略記する．

4) $-m$ が負整数のときも $p_{-m}(M)=h^0(M,K_M^{-m})$ を定義できるが，これは双有理型不変量とはならない．例えば $\boldsymbol{P}^2\sim\boldsymbol{P}^1\times\boldsymbol{P}^1$ であるが $h^0(\boldsymbol{P}^2,K_{\boldsymbol{P}^2}^{-m})=\binom{3m+2}{2}$，$h^0(\boldsymbol{P}^1\times\boldsymbol{P}^1,K^{-m})=(2m+1)^2$，$m=1,2,\cdots$．$p_{m_1,\cdots,m_n}$，$g_k^m(M)$ に対しても同様である．

5) $\boldsymbol{P}^0$ は一点と考える．

6) $\kappa(M)=-1$ と定義する流儀もある(特に曲面論のときに多い)が，後述する κ の等式や不等式の計算のとき，常に例外が生ずるので，$-\infty$ とした方が合理的である．

7) 一般に M 上の直線束 L に対しても同様に L 次元 $\kappa(L,M)$ が定義できる．

8) M があるケーラー多様体からの有理型写像の像になっていれば等号が成立する．

9) そのような例として最も簡単なものは Hopf 多様体の一般化より得られる([34]，Remark 18.1.4)．

10) 解析空間の全射正則写像に対しても，同様に双有理型同値が定義できる．

11) Griffiths の結果はもっと一般で型 (p,q) に対応するベクトル束の曲率形式の形を計算しており定理 3.2. はその特別な場合である．

12) 代数多様体 W 上の局所自由層 $\mathcal{F}$ が半正とは，任意の代数曲線 C と C から W への任意の正則写像 $\varphi: C\to W$ に対して，$\varphi^*\mathcal{F}$ の任意の商可逆層の次数が非負であることを意味する．

13) すなわち $A(V)$ の有限次不分岐被覆 $\hat{A}(V)$ をとってファイバー束を引きあげると直積 $\hat{A}(V)\times E$ と同型となる．

13a) 定理 4.2 とこの結果を使うと $\kappa(V)=0$, $g_1(V)=\dim V-1$ であるときは $\alpha: V\to A(V)$ は $A(V)$ 上の楕円曲線をファイバーとするエタール・ファイバー束と双有理同値であることを示すことができる．

14) n 次元代数多様体 V は $\boldsymbol{P}^n$ と双有理同型のとき，有理多様体と呼ばれる．また $V\sim W\times\boldsymbol{P}^1$，$W$ は $n-1$ 次元代数多様体のとき，V は線織多様体と呼ばれる．また n 次元線織多様体(有理多様体)からの有理写像の像となる n 次元代数多様体を単線織多様体(uniruled variety)，単有理多様体(unirational variety)と呼ぶ．

15) 曲面 S は K_S が自明であり $q(S)=0$ のとき $K3$ 曲面と呼ばれる．

16) さらに正確に言えば V は次元が異なるかもしれないケーラー多様体からの有理型写像の像になり得ない．

17) $p_g=1$，1次元ベッチ数 b_1 が 1 となる曲面をⅦ型曲面と呼ぶ．

18) より正確にはケーラー多様体からの有理型写像の像になっている複素多様体で成立する．

19) $K3$ 曲面がケーラーかという問は依然として未解決であるが，それを除けば曲面ではケーラー $\Longleftrightarrow b_1$ が偶数が成立する．

文　献

[1] Atiyah, M. F., Some examples of complex manifolds, Bonner Math. Schriften, **6**(1958).

[2] Blanchard, A., Sur les variétés analytiques complexes, Ann. Sci. École Norm. Sup., **73**(1956), 157–202.

[3] Cartan, H., Quotient of complex analytic spaces, Contribution to function theory, 1–15, Bombay, Tata Inst., 1960.

[4] Clemens, H. and P. Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math., **96**(1972), 281–356.

[5] Fujiki, A., Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces, Publ. Math. PIMS., **14**(1979), 1–52.

[6] ——, Kähler 多様体の Douady 空間について，——圏 C の多様体の分類論への応用——総合研究集会報告集，1980 年 2 月 25 日～29 日於名古屋大学理学部，349–394.

[7] ——, Kähler 多様体の構造について，代数幾何学仙台シンポジウム報告集，1980 年.

[8] ——, Some results in the classification theory for a compact complex manifold in C, Proc. Japan. Academy, **56**(1980), 324–327.

[9] ——, On the minimal models of complex manifolds, to appear in Math. Ann.

[10] Fujita, T., On Kähler fibre spaces over curves, J. Math. Soc. Japan, **30**(1978), 779–794.

[11] ——, 小平次元の理論，——その過去，現在・未来—，数学，**30**(1978), 51–62.

[12] Griffiths, P., Periods of integrals on algebraic manifolds, II, III, Amer. J. Math., **90**(1968), 805–865, Publ. Math. IHES, **38**(1970), 125–180.

[13] Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II, Ann. of Math., **79**(1964), 109–326.

[14] ——, Bimeromorphic smoothing of a complex analytic space, Preprint, Univ. of Warwick, 1971.

[15] Hitchin, N. J., Polygons and gravitons, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **85**(1979), 465–476.

[16] Hopf, H., Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv., **29**(1955), 132–156.

[17] Iitaka, S., On D-dimensins of algebraic varieties, J. Math. Soc. Japan, **23**(1971), 356–373.

[18] ——, 代数多様体の種数と分類 I, 数学, **24**(1972), 14–27.

[19] ——, Birational classification of algebraic varieties, Montréal 講義録 1980.

[20] Kawai, S., On compact complex analytic manifold of complex dimension 3, I, II, J. Math. Soc. Japan, **17**(1965), 438–442; ibid., **21**(1969), 604–616.

[21] Kawamata, Y., Characterization of abelian varieties, to appear.

[22] ——, Kodaira dimension of algebraic fibre spaces over curves, to appear.

[23] Kawamata, Y. and Viehweg, E., On a characterization of an abelian variety in the classification theory of algebraic varieties, to appear.

[24] Kodaira, K., On the structure of complex analytic surfaces, I, II, III, IV, Amer. J. Math., **86**(1964), 751–798; ibid. **88**(1966), 682–721; ibid. **90** (1968), 55–83, 1048–1066.

[25] Nakamura, I., Complex parallelisable manifolds and their small deformations, J. Diff. Geometry, **10**(1975), 85–112.

[26] Nakamura, I. and K. Ueno, An addition formula for Kodaira dimensions of analytic fibre bundles whose fibres are Moišezon manifolds, J. Math. Soc. Japan, **25**(1973), 363–371.

[27] Riemann, B., Theorie der abelschen Funktionen, 全集, 88–144, Dover.

[28] Sakai, F., Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties, Lecture Notes in Math., **732**(1979), Springer, 545–563, 1979.

[29] ——, Differential tensor forms in algebraic geometry, 総合研究集会報告集, 1980 年 2 月 25 日～29 日於名古屋大学, 395–406.

[30] Schmid, W., Variation of Hodge structure; the singularities of period mapping, Inventiones Math., **22**(1973), 211–319.

[31] Thimm, W., Meromorphe abbildunger von Riemannscher Bereichen, Math. Zeit., **60**(1954), 435–457.

[32] Tjurin, A. N., Five lectures on three-dimensional varieties, Russian Math. Surveys **27** No. 3(1972), 1–53. (英訳)

[33] Ueno, K., Classification of algebraic varieties, II. Proc. Intern. Symp. Algebraic geometry, Kyoto 1977, 693–708, Kinokuniya (1978).

[34] ——, Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Math., **439**(1975).

[35] ——, On algebraic fibre spaces of abelian varieties, Math Ann., **237**(1978), 1–22.

[36] ——, On three-dimensional compact complex manifolds with non-positive Kodaira dimension, to appear. (Proc. Japan Academy, **56** (1980), 479–483 参照.)

[37] ——, Birational geometry of algebraic threefolds, Journées de géométrie algébriques d'angers (Juillet 1979), Noordhoff, 311–323, 1980.

[38] ——, Kodaira dimensions for certain fibre spaces, Complex analysis and algebraic geometry, 279–292, Iwanami, 1977.

[39] Viehweg, E., Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one, Compositio Math., **35**(1977), 197–223.

[40] ——, Klassifikationentheorie algebraischer Varietater der Dimension drei, to appear.

[41] Mabuchi, T., On ruled 3-folds, 1980 年代数幾何学城崎シンポジウム記録, 130–145.

[42] ——, Invariant β and uniruled threefolds, to appear.

(1980 年 12 月 8 日提出)

(うえの けんじ・京都大学理学部)