2021-08-22

Tohoku — 第 3 章 層に係数を持つコホモロジー

翻訳　数学

3.1. 層についての一般論

X を (必ずしも分離的とは限らない) 位相空間とする. ⊃ により順序付けられた X の空でない開部分集合上に定義される集合の帰納系すべてを X 上の**集合の前層**と呼ぶことを思い出そう (1.7 例 h). したがって前層とは, すべての開集合 $U \subset X$ に対する集合 $F(U)$ と, $U \supset V$ なる空でないすべての対 U, V に対する**制限写像** $\varphi_{VU}\colon F(U) \to F(V)$ から成るデータであって, 次の条件を伴うものである: φ_{UU} が $F(U)$ の恒等写像であり, $U \supset V \supset W$ であれば $\varphi_{WV}\varphi_{VU} = \varphi_{WU}$ である. 前層 F が**層**であるとは, 空でない開集合による X の開集合 U の被覆 (U_i) すべてと, 元 $f_i \in F(U_i)$ であって $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \phi$ なるすべての対 (i, j) に対して $\varphi_{U_{ij}U_i} f_i = \varphi_{U_{ij}U_j} f_j$ となるものの族 (f_i) すべてに対し, ある $f \in F(U)$ がただ一つ存在してすべての i に対して $\varphi_{U_iU} f = f_i$ となることである. もし前述の定義において, $F(U)$ が群 (resp. 環, etc.) であり φ_{VU} が準同型であると仮定すれば, **群の** (resp. **環の**, etc.) **前層**や**層**という概念を得る; より一般に, 与えられた圏 (cf. 1.1) に値をとる前層や層という概念を定義できる. 与えられた圏に値をとる X 上の前層や層は圏を成し, 射は帰納系の射として定義される. たとえばアーベル群の圏のような加法圏に値をとる X 上の前層や層は加法圏を成し, アーベル群の前層や層の場合にはアーベル圏すら成す. (簡単のためアーベル群の層や前層をアーベル層やアーベル前層ということにする). しかし注意すべきは, 恒等関手はアーベル層にそれと対応するアーベル前層を結び付けるが, これは左完全だが完全ではないということである: 層の準同型 $u\colon F \to G$ があれば, 前層の準同型としての核は前層 $Q(U) = G(U)/\operatorname{Im} F(U)$ であるが, 一般には層ではない; 層の準同型としての核は前層 Q

(後述) に結び付けられた層である. これらの問題は, 今ではかなり知られているので (cf. [4] と Godement の著書 [9]), これ以上は強調しない.

F を X 上の集合の前層とし, すべての x に対して $F(x)=\varinjlim .F(U)$ とし, その帰納極限は x の開近傍 U にフィルター付けられた順序関係に従ってとられる. $F(x)$ の和集合 $\overline{F}$ 上には, $\overline{F}$ の部分集合のうち $A(f)$ の形で書けるものから成る集合から生成される位相が入る. ここで, すべての開集合 $U\subset X$ とすべての $f\in F(U)$ に対し, $x\in U$ に対する $F(x)$ における f の標準的な像 $f(x)$ から成る集合を $A(f)$ で表した. $\overline{F}$ にこの位相が入っていれば, F から X への自然な写像は局所同相写像である (i.e. $\overline{F}$ におけるすべての点が X の開集合と同相になるように写される開近傍をもつ) ので $\overline{F}$ を (Godement に従って) X における**エタール空間**という. さらに, X 上のエタール空間 E は層 $\mathfrak{F}(E)$ を自然な仕方で定める, すなわち開集合 U に U 上の E の連続な断面から成る集合

$\mathbf{O}$ を X 上の単位的環の成す層とすると, 左 $\mathbf{O}$ 加群の層, あるいは単に左 $\mathbf{O}$-Module

命題 3.1.1. $\mathbf{O}$ を空間 X 上の単位的環の層とする. このとき X 上の $\mathbf{O}$ 加群の加法圏 $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ は公理 AB 5) と AB 3*) を充たし生成子を持つアーベル圏である.

層 F_i の族 (F_i) の直和 S を構成するには単純に各開集合 U に対して $F_i(U)$ の直和をとり

系. すべての $\mathbf{O}$ 加群は入射 $\mathbf{O}$ 加群の部分 $\mathbf{O}$ 加群に同型である.

この系の Godement による直接的な証明を示そう. すべての $x\in X$ に対し, M_x を $\mathbf{O}_x$ 加群, M を $M(U)=\prod_{x\in X} M_x$ により定義される X 上の層とし, 制限写像と $M(U)$ 上の $\mathbf{O}(U)$ の作用を明白な仕方で定義する. $M^x(U)$ を $x\in U$ のときは M_x, そうでないときは 0 と定義することで得られる $\mathbf{O}$ 加群 M^x $(x\in X)$ の積への同型の構成により, M は X 上の $\mathbf{O}$ 加群となる. この注意からただちに次が従う: すべての $\mathbf{O}$ 加群 F に対して F から M への準同型が族 $(u_x)_{x\in X}$ であってすべての $x\in X$ に対して u_x が $F(x)$ から M_x への $\mathbf{O}(x)$ 準同型となるものと同一視される. これより次が結論付けられる:

命題 3.1.2. すべての $x\in X$ に対して M_x が入射 $\mathbf{O}_x$ 加群であれば, このとき上のように定義された積層 M は入射 $\mathbf{O}$ 加群である.

F を任意の $\mathbf{O}$ 加群とする. すべての $x\in X$ に対し, $F(x)$ が入射 $\mathbf{O}_x$ 加群, すなわち M_x に埋め込めることは古典的である (さらに定理 1.10.1 の帰結でもある). したがって, M_x により定義される入射 $\mathbf{O}$ 加群 M への F の埋め込みが得られる.

また、後々のために次を指摘しておく.

命題 3.1.3. M を X 上の入射 $\mathbf{O}$ 加群, U を X の開部分集合, $\mathbf{O}_U$ (resp. M_U) を $\mathbf{O}$ (resp. M) の U への制限とする. このとき M_U は入射 $\mathbf{O}_U$ 加群である.

M_U は明らかに $\mathbf{O}_U$ 加群である. F を $\mathbf{O}_U$ 加群, G を部分加群, u を G から M_U への準同型とする. 示すべきは u が F から M_U への準同型に延長できることである. U 上のすべての $\mathbf{O}_U$ 加群 H に対し, エタール空間の用語法で言えば "C_U における 0 による H の延長" (cf. [4, 第 17 章, 命題 1]) により得られる $\mathbf{O}$ 加群を $\overline{H}$ とする. このとき $\mathbf{O}_U$ 加群の準同型 $u\colon G \to M_U$ を与えることは $\mathbf{O}$ 加群の準同型 $G \to M$ を与えることに等しい. というのも G は F の部分加群であって M は入射的であり, u は G から M への準同型に延長できるので, 所望の G から M_U への準同型を誘導する. 命題 3.1.3 は U が開でなく閉であると仮定すると偽になることに注意する. 完全に類似の方法で次が示せる.

命題 3.1.4. M を X の閉部分集合 Y 上の入射 $\mathbf{O}$ 加群とする. このとき $\mathbf{O}$ 加群 M^X であって Y 上では M に Y の補集合上では 0 に一致するものは入射的である.

« 読書録：『宇宙と宇宙をつなぐ数...　Tohoku — 第 2 章 アーベル圏における...