令和 6 年度　京都大学大学院理学研究科数学専攻・数理解析専攻

入試問題　解答（一部）

真中遥道
@GirlwithAHigoi

最終更新：2023 年 8 月 27 日

基礎科目

$\boxed{\mathbf{1}}$

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 + 2y^2\}$$

で定める．積分

$$\iint_D xye^{1-x^2-y^2} dxdy$$

の値を求めよ．

（解答） $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標変換すると $dxdy = rdrd\theta$ であり，積分領域は

$$D' = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq \sqrt{1 + \sin^2\theta}\}$$

に写る．よって求値 I は

$$\begin{aligned}
I =& \iint_D \cos\theta \sin\theta r^3 e^{1-r^2} drd\theta \\
=& \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \int_0^{\sqrt{1+\sin^2\theta}} r^3 e^{-r^2} drd\theta \\
=& \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \left[-\frac{1}{2}(r^2 + 1)e^{1-r^2} \right]_0^{\sqrt{1+\sin^2\theta}} d\theta \\
=& \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \left(e - (2 + \sin^2\theta)e^{-\sin^2\theta} \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e}{4}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta - \frac{1}{4}\int_0^1 (2+t)e^{-t}dt \\
&\qquad (\text{第 2 項は} \sin^2\theta = t \text{ と置換した}) \\
&= \frac{e}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\left[-(3+t)e^{-t}\right]_0^1 \\
&= \underline{\frac{e}{4} + \frac{1}{e} - \frac{3}{4}}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

a を複素数とし，複素 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ 2a & -2a & a+1 \end{pmatrix}$$

と定める．行列 A の固有値をすべて求めよ．また，A の階数を求めよ．

（解答） 第 1 行で余因子展開して

$$\det(xI_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x-(a-1) & 0 & 0 \\ -1 & x+a & -1 \\ -2a & 2a & x-(a+1) \end{pmatrix}$$

$$=(x-(a-1))\det\begin{pmatrix} x+a & -1 \\ 2a & x-(a+1) \end{pmatrix}$$

$$=(x-(a-1))(x-a)(x+a-1).$$

よって A の固有値は$\underline{a-1, a, -a+1}$．0 を固有値に持つことと正則なことが同値ゆえ，$a \neq 0, 1$ なら $\operatorname{rank} A = 3$．$a = 0$ のとき

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$a = 1$ のとき

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

以上をまとめると

$$\underline{\operatorname{rank} A = \begin{cases} 3 & (a \neq 0, 1) \\ 2 & (a = 0) \\ 1 & (a = 1) \end{cases}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{3}}$

n, m を $n \geq 2m$ を満たす正の整数とする．V を有限次元複素ベクトル空間とする．$f : V \to V$ を $f^n = f^m$ を満たす線形写像とする．このとき，

$$V = \mathrm{Ker}(f^m) \oplus \mathrm{Im}(f^m)$$

を示せ．ここで，$\mathrm{Ker}(f^m)$ は f^m の核であり，$\mathrm{Im}(f^m)$ は f^m の像である．

（解答） 任意の $v \in \mathrm{Ker}(f^m) \cap \mathrm{Im}(f^m)$ について，ある $w \in V$ が存在し

$$v = f^m(w) = f^{n-2m} \circ f^m \circ f^m(w) = f^{n-2m} \circ f^m(v) = f^{n-2m}(0) = 0.$$

よって $\mathrm{Ker}(f^m) \cap \mathrm{Im}(f^m) = \{0\}$．次に任意の $v \in V$ について

$$f^m(v - f^{n-m}(v)) = f^m(v) - f^n(v) = 0$$

より

$$v = (v - f^{n-m}(v)) + f^m(f^{n-2m}(v)) \in \mathrm{Ker}(f^m) + \mathrm{Im}(f^m).$$

よって $V = \mathrm{Ker}(f^m) + \mathrm{Im}(f^m)$．以上より $V = \mathrm{Ker}(f^m) \oplus \mathrm{Im}(f^m)$．$\square$

$\boxed{\mathbf{4}}$

r を正の実数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 $\rho_r(x)$ を

$$\rho_r(x) = \sin\left(re^{-r^2x^2}\right)$$

と定義する．$\mathbb{R}$ 上の有界な実数値連続関数 $f(x)$ に対し，次の問に答えよ．

(1). 任意の $r > 0$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)dx$ が収束することを示せ．

(2). $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)dx = 0$ を示せ．

(3). $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能で $f(0) = 0$ を満たすとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty} r\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)dx = 0$ を示せ．

（解答）

(1). M を $|f(x)|$ の上界とする．$\theta \in \mathbb{R}$ に対して $|\sin(\theta)| \le |\theta|$ ゆえ $|f(x)\rho_r(x)| \le Mre^{-r^2x^2}$ であり

$$\int_{-\infty}^{\infty} Mre^{-r^2x^2}dx = M\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = M\sqrt{\pi}$$

である．よって広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)dx$ は絶対収束し，ゆえに収束する．$\square$

(2). $x \ne 0$ で

$$|f(x)\rho_r(x)| \le Mre^{-r^2x^2} \to 0(r\to\infty)$$

よりほとんど至る所で $f(x)\rho_r(x)$ は 0 に各点収束する．$x \notin [-1, 1]$ について考える．

$$\frac{d}{dr}re^{-r^2x^2} = (1 - 2r^2x^2)e^{-r^2x^2}$$

ゆえ，$r^2 \ge 1/2x^2$ のとき $re^{-r^2x^2}$ は r について単調減少．$1/2x^2 \le 1/2$ ゆえ $r > 1$ のとき

$$|f(x)\rho_r(x)| \le Mre^{-r^2x^2} \le Me^{-x^2}.$$

よって $\mathbb{R}$ 上の関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} M & (-1 \le x \le 1) \\ Me^{-x^2} & (x < -1, 1 < x) \end{cases}$$

とおくと，任意の $r > 1$ で $|f(x)\rho_r(x)| < g(x)$ であり，$g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分．よってルベーグの収束定理から

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0dx = 0.$$

$\square$

(3). 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．$f'(0) = a$ とおく．ある $\delta > 0$ が存在し $0 < |x| < \delta$ なら

$$a - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < a + \varepsilon$$

となる．よって $\mathbb{R}$ 上の関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \begin{cases} \varepsilon & (\rho_r(x) \geq 0) \\ -\varepsilon & (\rho_r(x) < 0) \end{cases}$$

と定義すれば,

$$\begin{aligned} &x \geq 0 \text{ のとき} \quad (a - h(x))rx\rho_r(x) < rf(x)\rho_r(x) < (a + h(x))rx\rho_r(x) \\ &x < 0 \text{ のとき} \quad (a + h(x))rx\rho_r(x) < rf(x)\rho_r(x) < (a - h(x))rx\rho_r(x) \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} rf(x)\rho_r(x)dx &< \int_0^{\delta} (a + h(x))rx\rho_r(x)dx + \int_{-\delta}^{0} (a - h(x))rx\rho_r(x)dx \\ &= \int_0^{\delta} (a + h(x))rx\rho_r(x)dx - \int_0^{\delta} (a - h(x))rx\rho_r(x)dx \\ &= \int_0^{\delta} 2h(x)rx\rho_r(x)dx \\ &< \varepsilon \int_0^{\delta} 2rx \cdot re^{-r^2x^2}dx \\ &= \varepsilon \left[-e^{-r^2x^2} \right]_0^{\delta} \\ &= \varepsilon \left(1 - e^{-r^2\delta^2} \right) \\ &\to \varepsilon \ (r \to \infty). \end{aligned}$$

よって

$$\limsup_{r\to\infty} r \int_{-\delta}^{\delta} f(x)\rho_r(x)dx \leq \varepsilon.$$

同様にして

$$\liminf_{r\to\infty} r \int_{-\delta}^{\delta} f(x)\rho_r(x)dx \geq -\varepsilon.$$

$|x| \geq \delta$ について考える．

$$\frac{d}{dr} r^2 e^{-r^2x^2} = (2r - 2r^3x^2)e^{-r^2x^2} = (1 - r^2x^2)2re^{-r^2x^2}$$

ゆえ，$r^2e^{-r^2x^2}$ は $r^2 > 1/x^2$ なら単調減少し，$1/\delta^2 \geq 1/x^2$ ゆえ，$r > 1/\delta$ とすると，

$$r^2e^{-r^2x^2} < \frac{1}{\delta^2}e^{-x^2/\delta^2}.$$

よって

$$|rf(x)\rho_r(x)| < Mr^2 e^{-r^2x^2} < M\frac{1}{\delta^2}e^{-x^2/\delta^2}$$

であり，最右辺は非負値で

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\delta^2}e^{-x^2/\delta^2}dx = \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\delta}$$

ゆえ $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,\infty)$ 上ルベーグ可積分．よって $rf(x)\rho_r(x)$ は可積分な優関数を持つ．また $rf(x)\rho_r(x)$ は $x\neq 0$ で 0 に各点収束する．よってルベーグの収束定理より，

$$\lim_{r\to\infty}\int_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,\infty)} rf(x)\rho_r(x)dx = \int_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,\infty)} = 0.$$

よって

$$-\varepsilon \leq \liminf_{r\to\infty} r\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\rho_r(x)dx \leq \limsup_{r\to\infty} r\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\rho_r(x)dx \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だったので $\displaystyle\lim_{r\to\infty} r\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\rho_r(x)dx = 0$．□

$\boxed{\mathbf{5}}$

a を正の実数とする．次の広義積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x - 1)(x+1)}{x(x^2+a^2)}dx$$

（解答）

$$f(z) = \frac{(e^{iz}-1)(z+1)}{z(z^2+a^2)}$$

とする．$\lim_{z\to 0} f(z) = i/a^2$ ゆえ 0 は $f(z)$ の可除特異点で，$f(0) = i/a^2$ と定めると f は $\pm ia$ を一位の極にもつ $\mathbb{C} \setminus \{\pm ia\}$ 上正則な関数である．$\mathbb{C}$ の経路 C_1, C_2 を以下のように定める．

$$C_1 : [-R, R] \ni t \mapsto t \in \mathbb{C}, \quad C_2 : [0, \pi] \ni \theta \mapsto Re^{i\theta} \in \mathbb{C}.$$

ただし $R > a$ とする．また $I_j = \int_{C_j} f(z)dz \ (j = 1, 2)$ とおく．

- I_2 について．

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_0^{\pi} \left| f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} \right| d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{(e^{-R\sin\theta}+1)(R+1)}{R(R^2-a^2)} R d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{2(R+1)}{(R^2-a^2)} d\theta \\
&= \frac{2\pi(R+1)}{(R^2-a^2)} \\
&\to 0 \ (R \to \infty).
\end{aligned}$$

  よって $\lim_{r\to\infty} I_2 = 0$.

- $I_1 + I_2$ について．まず

$$\mathrm{Res}(f, ia) = \lim_{z\to ia} (z - ia) f(z) = \lim_{z\to ia} \frac{(e^{iz}-1)(z+1)}{z(z+ia)} = \frac{(1-e^{-a})(ia+1)}{2a^2}$$

  である．経路 $C_1 \cup C_2$ が囲む領域上にある f の極は ia のみゆえ，

$$I_1 + I_2 = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, ia) = \pi \frac{(1-e^{-a})(-a+i)}{a^2}.$$

- I_1 について．まず，
$$\frac{\cos x - 1}{x} = 0$$
ゆえ与式の被積分関数は $[-1,1]$ 上有界．また $|x| \geq 1$ のとき
$$\left|\frac{(\cos x - 1)(x+1)}{x(x^2+a^2)}\right| \leq \frac{2 \cdot 2x}{x^3} = \frac{4}{x^2}$$
であり，最右辺の $(-\infty,-1], [1,\infty)$ 上の広義積分は収束する．よって与えられた広義積分 I は収束するので
$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \mathrm{Re}(f(x))dx = \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} I_1\right).$$

以上より

$$\begin{aligned}
I &= \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} I_1\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty}((I_1+I_2)-I_1)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\pi\frac{(1-e^{-a})(-a+i)}{a^2} - 0\right) \\
&= \underline{\frac{\pi(e^{-a}-1)}{a}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$

S^2 は 2 次元球面 $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ を表すこととする．写像 $f=(f_1,f_2,f_3): S^2\times S^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$$

により定める．この写像の臨界値をすべて求めよ．ただし $q\in\mathbb{R}^3$ が f の臨界値であるとは，ある点 $p\in S^2\times S^2$ が存在して $f(p)=q$ であり，点 p のまわりの $S^2\times S^2$ の局所座標系 (u_1,u_2,u_3,u_4) に関する f のヤコビ行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p)\right)_{1\le i\le 3, 1\le j\le 4}$$

の階数が 2 以下となることである．

（解答） $p=(x_1,x_2,x_3), q=(y_1,y_2,y_3)$ とおく．$F:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^3, G:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^2$ を

$$F(p,q)=p+q, \quad G(p,q)=(\|p\|^2-1, \|q\|^2-1)$$

と定める．ただし $\|\cdot\|$ は L^2 ノルムである．F,G は C^∞ 級写像で，$F|_{S^2\times S^2}=f, G^{-1}((0,0))=S^2\times S^2$ である．
まず $(0,0)$ が G の正則値であることを示す．

$$\mathrm{rank}(dG)_{(p,q)} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{pmatrix}$$

より

$$\mathrm{rank}(dG)_{(p,q)} < 2 \implies p=0, \text{または } q=0.$$

これと $(p,q)\in S^2\times S^2$ のとき $p\neq 0$ かつ $q\neq 0$ であることより，$(0,0)$ は G の正則値．またこれより $S^2\times S^2$ は 4 次元 C^∞ 級多様体．
$(0,0)$ は G の正則値であるので $T_{(p,q)}(S^2\times S^2)=\mathrm{Ker}(dG)_{(p,q)}$．これを用いると $(p,q)\in S^2\times S^2$ に対して

$$\begin{aligned}
\dim\mathrm{Ker}(df)_{(p,q)} &= \dim\mathrm{Ker}(d(F|_{S^2\times S^2}))_{(p,q)} \\
&= \dim\mathrm{Ker}(dF)_{(p,q)}|_{T_{(p,q)}(S^2\times S^2)} \\
&= \dim(\mathrm{Ker}(dF)_{(p,q)}\cap T_{(p,q)}(S^2\times S^2)) \\
&= \dim(\mathrm{Ker}(dF_{(p,q)})\cap \mathrm{Ker}(dG)_{(p,q)}) \\
&= \dim\mathrm{Ker}(d(F,G))_{(p,q)} \\
&= 6-\mathrm{rank}(d(F,G))_{(p,q)}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\operatorname{rank}(df)_{(p,q)} = 4 - \dim \operatorname{Ker}(df)_{(p,q)} = -2 + \operatorname{rank}(d(F,G))_{(p,q)}$$

ゆえ

$$\operatorname{rank}(df)_{(p,q)} < 3 \iff \operatorname{rank}(d(F,G))_{(p,q)} < 5$$

となる．

$$\operatorname{rank}(d(F,G))_{(p,q)} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

であるので，$(p,q) \in S^2 \times S^2$ に対して

$$\operatorname{rank}(d(F,G))_{(p,q)} < 5 \iff p, q \text{ が線型独立} \iff p = \pm q.$$

したがって f の臨界値全体の集合は

$$\{f(p,q) \mid p \in S^2, p = \pm q\} = \underline{\{(0,0,0)\} \cup \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 2\}}.$$

専門科目

$\boxed{\mathbf{1}}$

有限群 Γ に対して，$|\Gamma|$ は Γ の位数，$\mathrm{Aut}(\Gamma)$ は Γ の自己同型群を表すとする．また有限群 Γ に対して，次の条件

$(*_\Gamma)$ $|H_1| = |H_2|$ をみたす任意の二つの部分群 $H_1, H_2 \subseteq \Gamma$ に対して，$\alpha(H_1) = H_2$ をみたす $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ が存在する．

を考える．p は素数とし，有限群 G は $(*_G)$ をみたす p 群とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i). G は巡回群でないアーベル群と仮定する．このとき，G の単位元でない元の位数は p であることを示せ．

(ii). G の中心 $Z(G)$ は条件 $(*_{Z(G)})$ をみたすことを示せ．

(iii). G はアーベル群でないと仮定する．このとき，G の位数 p の部分群が唯一つ存在することを示せ．

（解答）

(1). 有限生成アーベル群の構造定理よりある整数 $N \geq 2, e_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, N)$ が存在し

$$G = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z}, \quad e_i \leq e_{i+1} \ (i = 1, \ldots, N-1)$$

として良い．$e_N = 1$ を示せば十分である．もし $e_N \geq 2$ であるなら，G は

$$H_1 := \left(p^{e_1 - 1}\mathbb{Z}/p^{e_1}\mathbb{Z}\right) \oplus \left(p^{e_2 - 1}\mathbb{Z}/p^{e_2}\mathbb{Z}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=3}^{N} \{0\}\right),$$

$$H_2 := \left(\bigoplus_{i=1}^{N-1} \{0\}\right) \oplus \left(p^{e_N - 2}\mathbb{Z}/p^{e_N}\mathbb{Z}\right)$$

という二つの位数 p^2 の部分群を持つ．よって $(*_G)$ よりある $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ が存在し，

$$\alpha(H_1) = H_2$$

をみたす．これは $H_1 \cong H_2$ を導くが $H_1 \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2, H_2 \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ に矛盾．したがって $e_N = 1$．$\square$

(2). 任意に $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ をとる．$x \in Z(G)$ のとき，任意の y について

$$y\alpha(x) = \alpha(\alpha^{-1}(y))\alpha(x) = \alpha(\alpha^{-1}(y)x) = \alpha(x\alpha^{-1}(y)) = \alpha(x)\alpha(\alpha^{-1}(y)) = \alpha(x)y$$

より $\alpha(Z(G)) \subseteq Z(G)$．位数比較より等号が成立し，$\alpha|_{Z(G)} \in \mathrm{Aut}(Z(G))$．任意に $Z(G)$ の位数の等しい部分群 H_1, H_2 をとる．これらは G の部分群でもあるので $(*_G)$ よりある $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ が存在し $\alpha(H_1) = H_2$ をみたす．よって $\alpha|_{Z(G)} \in \mathrm{Aut}(Z(G))$ は $\alpha|_{Z(G)}(H_1) = H_2$ をみたすので，$Z(G)$ は $(*_{Z(G)})$ をみたす．□

(3). $|Z(G)| = p^n$ とおく．p 群の中心は非自明ゆえ $n \geq 1$．(i),(ii) より，

$$Z(G) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n .$$

いずれの場合でも $Z(G)$ は位数 p の部分群 H_1 を含む．G に位数 p の部分群 H_2 があれば H_1 と G の自己同型で写り合うので，(ii) での考察より $H_2 \subseteq Z(G)$ である．よって $Z(G)$ の位数 p の部分群が唯一つ存在することを示せば良い．これは $Z(G) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ のとき成り立っている．$n \geq 2$ のとき $Z(G) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ でないことを示す．$n \geq 2, Z(G) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ と仮定する．G がアーベルでないので $x \in G \setminus Z(G)$ なる元が存在する．x の位数は先の議論より p^k $(k \geq 2)$．よって $y = x^{p^{(k-2)}}$ とすると y の生成する部分群 H_1 は $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ と同型．仮定より $Z(G)$ は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ と同型な部分群 H_2 を持つ．$(*_G)$ よりある $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ が存在し $\alpha(H_1) = H_2$ となり，これは $H_1 \cong H_2$ を導くが $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \ncong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ に矛盾．よって $Z(G) \ncong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$．以上より題意が示された．□

$\boxed{\mathbf{2}}$

n を正の整数とする．複素数体上の 1 変数形式的べき級数環 $\mathbb{C}[\![t]\!]$ の部分環 A と A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の組 $(A, \mathfrak{m})$ であって，以下のすべての条件をみたすものを一つ構成せよ．

(a). A は $\mathbb{C}$ を含み，$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\![t]\!]/A) < \infty$.
(b). A の商体における A の整閉包は $\mathbb{C}[\![t]\!]$ に一致する．
(c). $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$.

（解答） $\underline{A = \mathbb{C} + t^n\mathbb{C}[\![t]\!], \mathfrak{m} = (t^n)}$ が求める組 $(A, \mathfrak{m})$ の一つであることを示す．

- (a) について．まず $\mathbb{C} \subseteq A$ であり

$$\mathbb{C}[\![t]\!]/A = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}t^k \Bigg/ \left(\mathbb{C} \times \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{C}t^k\right) = \mathbb{C}t \times \cdots \times \mathbb{C}t^{n-1} \cong \mathbb{C}^{n-1}$$

ゆえ $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\![t]\!]/A) = n - 1 < \infty$.
- (b) について．各環の整閉包を $\overline{\cdot}$ で表す．$\mathbb{C}[\![t]\!]$ は一意分解環ゆえ正規環なので，$A \subseteq \mathbb{C}[\![t]\!]$ より $\overline{A} \subseteq \overline{\mathbb{C}[\![t]\!]} = \mathbb{C}[\![t]\!]$．逆に t^k $(k = 1, \ldots, n-1)$ について $X^n - t^{kn}$ は A 上多項式で t^k を根に持つので，$t^k \in \overline{A}$．よって

$$\overline{A} \supseteq (\{t, \ldots, t^{n-1}\} \cup A \text{ が生成する環}) = \mathbb{C}[\![t]\!].$$

よって $\overline{A} = \mathbb{C}[\![t]\!]$.
- (c) について．

$$(t^n)/(t^n)^2 = \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{C}t^k \Bigg/ \prod_{k=2n}^{\infty} \mathbb{C}t^k = \prod_{k=n}^{2n-1} \mathbb{C}t^k \cong \mathbb{C}^n$$

より $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$.

以上より示された．

$\boxed{\mathbf{3}}$

k を正の整数とし，$f(X) = X^6 + kX^3 + 27$ は変数 X に関する有理数係数の 1 変数多項式とする．このとき，次の条件

$(*) f(\alpha) = 0$ をみたす任意の複素数 α に対して，$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ は 6 次ガロア拡大である．

をみたす正の整数 k をすべて求めよ．（※口頭試問の項に追加で聞かれた質問あり）

（解答） $\omega = \exp(2\pi i/3)$ とおく．$f'(X) = 6X^2(X^3 + 3k)$ であり

$$f(0) = 27 \neq 0, \quad (-3k)^2 + k(-3k) + 27 = 6k^2 + 27 \neq 0$$

ゆえ，$f(X), f'(X)$ は互いに素．よって $f(X)$ は分離多項式である．任意に $f(X)$ の根 α をとる．$\omega\alpha, \omega^2\alpha$ も $f(X)$ の根であり，分離性よりこれらのいずれとも異なる根 β が存在する．$\omega\beta, \omega^2\beta$ も $f(X)$ の根であり，これら 6 つは相異なる．根と係数の関係から $\alpha^3\beta^3 = 27$ ゆえ，必要なら β の取り方を変えることで $\alpha\beta = 3$ として良い．したがって $f(X)$ の根は

$$\alpha,\, \omega\alpha,\, \omega^2\alpha,\, \frac{3}{\alpha},\, \frac{3}{\omega\alpha},\, \frac{3}{\omega^2\alpha}$$

と表せる．これより

$$(*) \iff f(X) \text{ のある根 } \alpha \text{ に対して } \omega \in \mathbb{Q}(\alpha) \text{ かつ } f(X) \text{ が既約}$$

が成り立つ．引き続き α を $f(X)$ の根とする．必要条件を求めるため k が $(*)$ をみたすと仮定する．

$$f(X) = 0 \iff X^3 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 108}}{2} \tag{1}$$

ゆえ，$\gamma = \sqrt{k^2 - 108} \in \mathbb{Q}(\alpha)$．もし $\gamma \in \mathbb{Q}$ なら $f(X)$ が $\mathbb{Q}$ 係数多項式 $X^3 - \gamma$ で割り切れ $f(X)$ の既約性に矛盾する．よって $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$ は 2 次のガロア拡大．$\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ も 2 次のガロア拡大ゆえ，もし $\mathbb{Q}(\gamma) \neq \mathbb{Q}(\omega)$ なら $\mathbb{Q}(\gamma) \cap \mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}$ と推進定理より $[\mathbb{Q}(\omega, \gamma) : \mathbb{Q}] = 4$ となる．これは $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 6$ に矛盾する．よって $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}(\gamma)$．$\mathbb{Q}(\omega)$ の基底として $\{1, \omega\}$ が取れるため

$$\gamma = p + q\omega$$

なる $p, q \in \mathbb{Q}$ が存在する．$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ の自明でない元によって両辺写して

$$-\gamma = p + q\omega^2.$$

これらの和，積を考えると

$$0 = 2p - q, \quad -(k^2 - 108) = p^2 + q^2 - pq$$

となる．よって $108 = k^2+3p^2$．これより $k=9$．逆に $k=9$ のとき, 式 (1) より $1+\alpha^3/3=\omega,\omega^2$ ゆえ $\omega \in \mathbb{Q}(\alpha)$．また素数 2 を法とすると

$$f(X) \equiv X^6 + X^3 + 1 \mod 2$$

であり, これは $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ の 3 次以下の既約多項式 $X, X+1, X^2+X+1, X^3+X^2+1, X^3+X+1$ のいずれでも割り切れない．よって X^6+X^3+1 は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ の既約多項式なので，$f(X)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約．したがって $k=9$ は $(*)$ をみたしている．以上より答えは $\underline{k=9}$.

口頭試問

口頭試問は大きく

(1). 事務的なこと
(2). 筆記試験について
(3). 専攻分野について

を聞かれた.

(1) では受験番号，名前，併願状況，博士課程進学を希望するか，を聞かれた.（選考に関係しない，と最初に断りがあった）

(2) ではまず筆記試験のできを聞かれ，できた問題，できなかった問題，できなかったが試験後解けた問題を答えた.（私は専門科目についてしか聞かれなかったが基礎科目についてしか聞かれなかった人もおり，筆記試験の状況でどちらの科目を口頭試問で聞くか決められているようだった）試験後に解けた $\boxed{3}$ の解答を発表してと指示され解答を発表し，その後 $\boxed{3}$ についてさらに一つ質問をされた.（最終段落参照）

(3) では，志望分野（私の場合数論）について今までどんな勉強をしてきたかを聞かれた．私は志望した分野について先立って勉強していることがなかったため，授業で整数論を履修したことと，代数系の基礎を赤青雪江やアティマクで固めたことを答えた．その中で特に面白く感じたトピックなどについて聞かれ，類数の話をすると，類数が 1 でない例を挙げられるか，などいくつか質問された.（おそらく志望分野の勉強がより進んでいる人には，より本格的な理解度を計る質問がされるのだろう）他には数理論理学を講究でやっているのになぜ数論志望なのか，などいくつか質問をされた．そんなこんなで面接は三十分ほどで終わった.（私の友人らの面接時間は大体 15 分から 30 分ぐらいだったようだが，中には 5 分ほどで終わったり 45 分ほどかかった人もいたようだった）

以下，(2) で聞かれた追加の質問とその解答.

$\boxed{3}$ についての追加質問

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \text{ は何になるか.}$$

(解答) 考えながら話した内容をそのまま書く．位数 6 の群は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_3$ のいずれかと同型となる．これらは共に位数 2 の部分群を持ち，それは前者なら正規部分群，後者なら正規でない部分群である．したがって $[\mathbb{Q}(\alpha):M]=2$，つまり $\mathbb{Q}$ の 3 次拡大である $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ の中間体 M が，$\mathbb{Q}$ のガロア拡大であるかどうかを見れば良い.（ここより先はわかっていない）

(追記) 後日解けた．α の $\mathbb{Q}$ 上共役は

$$\alpha, \quad \omega\alpha, \quad \omega^2\alpha, \quad \frac{3}{\alpha}, \quad \frac{3}{\omega\alpha}, \quad \frac{3}{\omega^2\alpha}$$

であった．$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ であって $\sigma(\alpha) = 3/\omega\alpha$ となるようなものが存在する．これの位数

を考える．$\omega = 1 + \alpha^3/3$ ゆえ

$$\sigma(\omega) = 1 + \frac{(3/\omega\alpha)^3}{3} = 1 + \frac{9}{\alpha^3}$$

であり，

$$\sigma(\omega)\omega = \left(1 + \frac{9}{\alpha^3}\right)\left(1 + \frac{\alpha^3}{3}\right) = 1 + \frac{\alpha^6 + 27}{3\alpha^3} + 3 = 1 + \frac{-9\alpha^3}{3\alpha^3} + 3 = 1$$

ゆえ $\sigma(\omega) = \omega^2$．したがって

$$\sigma(\alpha) = \frac{3}{\omega\alpha}, \quad \sigma^2(\alpha) = \frac{3}{\omega^2(3/\omega\alpha)} = \omega^2\alpha, \quad \sigma^3(\alpha) = (\omega^2)^2\frac{3}{\omega\alpha} = \frac{3}{\alpha}$$

より $\sigma, \sigma^2, \sigma^3 \neq 1$ ゆえ σ の位数は 6．よって $\underline{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$.（生成元の共役元が全て記述できているときには，まず共役元の集合にガロア群を作用させて，置換表現を見るべきですね．口頭試問で私が言ったことはあまり筋が良くなかったです）

参考文献

[1] “過去の入試問題”. 京都大学大学院理学研究科／理学部数学教室. https://www.math.kyoto-u.ac.jp/ja/past-exams