熊本大学大学院自然科学研究科博士前期課程

幾何学特論 II

安藤　直也 (熊本大学大学院自然科学研究科)

はじめに

本講義における主な考察対象は, de Rham コホモロジー群および Hodge の分解定理である. 受講者は多様体論の基本事項を一度勉強した経験があることが望ましい.

第１章において, 多様体論の基本事項を確認する.

第２章において, 可微分多様体の de Rham コホモロジー群について解説する. 証明は行なわないが, de Rham の定理 (可微分多様体 M の p 次元 de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ は, M の滑らかな三角形分割を与える単体的複体 K の p 次元コホモロジー群 $H^p(K)$ と同型である) を紹介する.

第３章において, $*$-作用素について解説する. $*$-作用素は向きづけられた計量ベクトル空間の交代形式の空間に作用し, 従って向きづけられた Riemann 多様体 M 上の微分形式の空間にも作用する. $*$-作用素を用いて M 上の p 次微分形式の空間 $E^p(M)$ に作用する Laplace-Beltrami 作用素を定義する. M がコンパクトであるならば, Laplace-Beltrami 作用素は M の計量 g が定める $E^p(M)$ の内積に関して自己共役である.

第４章において, Hodge の分解定理について解説する. Hodge の分解定理によると, 全ての p 次調和形式からなる空間 $\mathcal{H}^p(M,g)$ つまり Δ の核は有限次元のベクトル空間であり, そして $E^p(M)$ は $\mathcal{H}^p(M,g)$ と Δ の像の直和として表される. Hodge の分解定理から, M の p 次元 de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ が M の p 次調和形式の空間 $\mathcal{H}^p(M,g)$ と同型であることがわかる. Hodge の分解定理の証明には,

(I) 与えられた $\alpha \in E^p(M)$ に対し方程式 $\Delta\omega = \alpha$ が弱解をもつならば, $E^p(M)$ の元 ω でこの方程式の解であるものが存在することを述べた「正則性定理」, および

(II) $E^p(M)$ の点列 $\{\alpha_n\}$ に対し $E^p(M)$ の内積が定めるノルムに関して $\{\alpha_n\}$ および $\{\Delta\alpha_n\}$ が有界であるならば, $\{\alpha_n\}$ のある部分列は Cauchy 列であること

を用いる. 4.1 節において, これらの二つの定理を認めた上で Hodge の分解定理の証明を行なう. そして 4.2 節以降で定理 (I), (II) の証明を行なう.

本稿の作成にあたって, 熊本大学の小林治先生から有益なご助言, ご指摘を頂きました. この場を借りて感謝の意を表します.

平成２３年１０月

安藤　直也

目　　次

1　多様体論の基本事項

1.1　可微分多様体

M を Hausdorff 空間とし, m を自然数とする. M が m 次元 位相多様体 (*topological manifold*) であるとは, M の各点のある近傍が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合と同相であるときにいう.

M を m 次元位相多様体とする. M の点 a の近傍 U_a が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 O_a と同相であるとする. $x_a : U_a \longrightarrow O_a$ を U_a から O_a の上への同相写像とする. このとき U_a と x_a の組 (U_a, x_a) を a の 座標近傍 (*coordinate neighborhood*) という. U_a の各点 b に対し, $x_a(b)$ は m 個の実数の組 $\bigl(x_a^1(b), x_a^2(b), \ldots, x_a^m(b)\bigr)$ と表される. $x_a(b)$ を表す m 個の実数を座標近傍 (U_a, x_a) における b の 局所座標 (*local coordinates*) という. また U_a 上の m 個の関数 $x_a^1, x_a^2, \ldots, x_a^m$ の組を (U_a, x_a) における 局所座標系 (*system of local coordinates*) という.

m 次元位相多様体 M に対し, M の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で各 U_λ が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 O_λ と同相であるようなものが存在する. $x_\lambda : U_\lambda \longrightarrow O_\lambda$ を U_λ から O_λ の上への同相写像とするとき, 座標近傍の族 $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の 座標近傍系 (*system of coordinate neighborhoods*) という.

M を m 次元位相多様体とし, $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を M の座標近傍系とする. $\lambda, \mu \in \Lambda$ が $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たすならば, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ の上への同相写像 $x_\mu \circ x_\lambda^{-1}$ を考えることができる. $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ が M の C^∞ 級座標近傍系 (*system of coordinate neighborhoods of class C^∞*) であるとは, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たす $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し

$$x_\mu \circ x_\lambda^{-1} : x_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow x_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

が C^∞ 級写像であるときにいう. また C^∞ 級座標近傍系が付与された位相多様体を C^∞ 級可微分多様体 (*differentiable manifold of class C^∞*) という.

以下においては, C^∞ 級可微分多様体を単に 可微分多様体 または 滑らかな多様体 (*differentiable manifold* または *smooth manifold*) と呼ぶことにする. また可微分多様体 M の 1 点の座標近傍を取るときには, M に付与されている C^∞ 級座標近傍系から取るものとする. また M に付与されている C^∞ 級座標近傍系から各点の基本近傍系を取り出すことができると仮定する.

1.2　可微分写像および可微分関数

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とする. $F : M \longrightarrow N$ を M から N への連続写像とする. M の 1 点 a に対し, (U_a, x_a) を a の座標近傍とする. また $b := F(a)$ とおき, (V_b, y_b) を b の座標近傍とする. $F(U_a) \subset V_b$ を仮定してよい. このとき $\boldsymbol{R}^m$ の開集

合 $x_a(U_a)$ から $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 $y_b(V_b)$ への連続写像 $y_b \circ F \circ x_a^{-1} : x_a(U_a) \longrightarrow y_b(V_b)$ を得る. $F : M \longrightarrow N$ が可微分写像または滑らかな写像 (*differentiable map* または *smooth map*) であるとは, M の各点 a に対し上のように得られる写像 $y_b \circ F \circ x_a^{-1} : x_a(U_a) \longrightarrow y_b(V_b)$ が C^∞ 級であるときにいう.

$N = \boldsymbol{R}$ であるとき, M から $\boldsymbol{R}$ への写像 f とは M 上の関数である. 前段落と同様に, $a \in M$ に対し (U_a, x_a) を a の座標近傍とする. このとき $f \circ x_a^{-1}$ は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $x_a(U_a)$ 上の関数である. M 上の関数 f が可微分関数または滑らかな関数 (*differentiable function* または *smooth function*) であるとは, M の各点 a に対し上のような関数 $f \circ x_a^{-1}$ が C^∞ 級であるときにいう. M 上の関数 f が可微分関数であることと, f が M から $\boldsymbol{R}$ への写像として前段落の意味で可微分であることは同値である. M 上の全ての可微分関数からなる集合を $C^\infty(M)$ で表す.

1.3 接ベクトル

M を m 次元可微分多様体とする. a を M の 1 点とし, (U, x) を a の座標近傍とする. $f \in C^\infty(U)$ に対し, $C^\infty(x(U))$ の元 $g := f \circ x^{-1}$ の点 $r_a := x(a)$ における偏微分係数 $(\partial g / \partial r^i)(r_a)$ を考えることができる $(i = 1, 2, \ldots, m)$. より一般に, $(v^1, v^2, \ldots, v^m) \in \boldsymbol{R}^m$ を 1 組とるとき, $g = f \circ x^{-1}$ に対し

$$v^1 \frac{\partial g}{\partial r^1}(r_a) + v^2 \frac{\partial g}{\partial r^2}(r_a) + \cdots + v^m \frac{\partial g}{\partial r^m}(r_a)$$

を対応させる微分作用素

$$v^1 \left.\frac{\partial}{\partial r^1}\right|_{r_a} + v^2 \left.\frac{\partial}{\partial r^2}\right|_{r_a} + \cdots + v^m \left.\frac{\partial}{\partial r^m}\right|_{r_a}$$

を考えることができる. ここで

$$X(r_a) := \left\{ v^1 \left.\frac{\partial}{\partial r^1}\right|_{r_a} + v^2 \left.\frac{\partial}{\partial r^2}\right|_{r_a} + \cdots + v^m \left.\frac{\partial}{\partial r^m}\right|_{r_a} \;\middle|\; (v^1, v^2, \ldots, v^m) \in \boldsymbol{R}^m \right\}$$

とおく. $X(r_a)$ は m 次元ベクトル空間である.

$(\tilde{U}, \tilde{x})$ を a の ((U, x) とは別の) 座標近傍とする. そして前段落と同様に考え,

$$X(\tilde{r}_a) := \left\{ \tilde{v}^1 \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{r}^1}\right|_{\tilde{r}_a} + \tilde{v}^2 \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{r}^2}\right|_{\tilde{r}_a} + \cdots + \tilde{v}^m \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{r}^m}\right|_{\tilde{r}_a} \;\middle|\; (\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \ldots, \tilde{v}^m) \in \boldsymbol{R}^m \right\}$$

とおく, 但し $\tilde{r}_a := \tilde{x}(a)$ である. $X(r_a)$ から $X(\tilde{r}_a)$ への線形写像 T を

$$T\left(\sum_{i=1}^m v^i \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{r_a} \right) := \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial \phi^j}{\partial r^i}(r_a) \right) \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{r}^j}\right|_{\tilde{r}_a}$$

で定める, 但し ϕ^j は $\phi := \tilde{x} \circ x^{-1}$ の第 j 成分である. このとき合成関数の微分法を用いて, 次を得る:

$$T\left(\sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial r^i}\bigg|_{r_a}\right)\tilde{g} = \left(\sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial r^i}\bigg|_{r_a}\right)g,$$

但し $\tilde{g} := f \circ \tilde{x}^{-1}$ である.

M の点 a での 接空間 (*tangent space*) $T_a(M)$ とは,

(i) m 次元ベクトル空間であり,

(ii) a の各座標近傍 (U, x) に対し, $T_a(M)$ から $X(r_a)$ への同型写像 $L_{(U,x)}$ が付与されていて,

(iii) a の別の座標近傍 $(\tilde{U}, \tilde{x})$ に対し定まる同型写像 $L_{(\tilde{U},\tilde{x})}$ は $L_{(\tilde{U},\tilde{x})} = T \circ L_{(U,x)}$ を満たす

ものである. よって a の近傍上の可微分関数 f が与えられたとき, $T_a(M)$ の各元 v に対し実数 $v(f) := (L_{(U,x)}(v))g$ は座標近傍 (U, x) の取り方には依存しない. こうして接空間 $T_a(M)$ の各元は a の近傍上の可微分関数に実数を対応させる作用素とみなされる. 接空間 $T_a(M)$ の各元を M の a での 接ベクトル (*tangent vector*) という.

以下においては, 混乱の恐れが無いときには $v \in T_a(M)$ と $L_{(U,x)}(v) \in X(r_a)$ を同一視する. そして, $g := f \circ x^{-1}$ の点 $r_a := x(a)$ における偏微分係数 $(\partial g/\partial r^i)(r_a)$ を $(\partial f/\partial x^i)(a)$ と記し, $X(r_a)$ の元 $\partial/\partial r^i|_{r_a}$ を $\partial/\partial x^i|_a$ と記す. このとき $X(r_a)$ の基底の 1 つを構成するベクトルの組 $\partial/\partial x^1|_a, \partial/\partial x^2|_a, \ldots, \partial/\partial x^m|_a$ は $T_a(M)$ の基底を構成するとみなされる.

1.4 関数の微分および写像の微分

M を m 次元可微分多様体とし, f を $C^\infty(M)$ の元とする. このとき M の各点 a での各接ベクトル $v \in T_a(M)$ に対し, 実数 $df_a(v)$ を $df_a(v) := v(f)$ で定義する. このように定義される $T_a(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 $df_a : T_a(M) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を f の a での 微分 (*differential*) という. df_a は線形関数であり, 従って df_a は $T_a(M)$ の双対空間 $T_a^*(M)$ の元である.

(U, x) を $a \in M$ の座標近傍とする. このとき $\partial/\partial x^1|_a, \partial/\partial x^2|_a, \ldots, \partial/\partial x^m|_a$ は $T_a(M)$ の基底の一つを形成する. この基底の双対基底を $dx^1|_a, dx^2|_a, \ldots, dx^m|_a$ で表す. よって $f \in C^\infty(M)$ に対し, f の a での微分 df_a は $dx^1|_a, dx^2|_a, \ldots, dx^m|_a$ の 1 次結合で表され, そして

$$df_a = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) dx^i|_a$$

が成り立つ.

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とし, $F: M \longrightarrow N$ を M から N への可微分写像とする. M の点 a および $T_a(M)$ の元 v に対し, $T_{F(a)}(N)$ の元 $dF_a(v)$ を $(dF_a(v))(f) := d(f \circ F)_a(v)$ で定義する, 但し f は $F(a)$ の N における近傍上の任意の可微分関数である. このように定義される $T_a(M)$ から $T_{F(a)}(N)$ への写像 $dF_a : T_a(M) \longrightarrow T_{F(a)}(N)$ を F の a での微分 (*differential*) という. dF_a は線形写像である.

(U, x) を $a \in M$ の座標近傍とし, (V, y) を $F(a) \in N$ の座標近傍とする. このとき $T_a(M)$ の元 $\partial/\partial x^i|_a$ の dF_a による像は

$$dF_a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_a\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}(a) \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{F(a)}$$

と表される.

M, N を可微分多様体とする. M と N とは微分同相 (*diffeomorphic*) であるとは, M から N への全単射な可微分写像 F が存在して F の逆写像 F^{-1} が可微分であるときにいう. M が N と微分同相であるとき, M の次元は N の次元に等しい.

1.5　部分多様体

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とし, $F: M \longrightarrow N$ を M から N への可微分写像とする. M の各点 a に対し $dF_a : T_a(M) \longrightarrow T_{F(a)}(N)$ が単射であるとき, $F: M \longrightarrow N$ をはめこみ (*immersion*) という. $F: M \longrightarrow N$ がはめこみでありかつ単射であるとき, F をうめこみ (*embedding*) という. $M \subset N$ とする. このとき M の恒等写像 id_M を M から N への写像とみなすことができる. id_M が M から N へのうめこみであるとき, M を N の部分多様体 (*submanifold*) という. M が N の部分多様体であるとき, 可微分多様体としての M の位相と N からの相対位相は必ずしも一致しないが, これら二つの位相が一致するとき, M を正規部分多様体 (*regular submanifold*) という. N の正規部分多様体 M が N の閉集合であるとき, M を N の閉部分多様体 (*closed submanifold*) という.

1.6　ベクトル場

M を m 次元可微分多様体とする. M の各点 a に対し M の a での接ベクトルを一つ対応させるものを M 上のベクトル場 (*vector field*) という. V を M 上のベクトル場とする. このとき M の各点 a に対し, V が定める a での接ベクトルを V_a で表す.

a を M の 1 点とし, (U, x) を a の座標近傍とする. このとき M 上のベクトル場 V は

U の各点 b での接ベクトル

$$V_b = \sum_{i=1}^m v^i(b) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_b$$

を与える．各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対し，v^i は U 上の関数である．M 上のベクトル場 V が <u>C^∞ 級である</u> または <u>滑らかである</u> (*of class* C^∞ または *smooth*) とは，M の各点 a および a の座標近傍 (U, x) に対し $v^i \in C^\infty(U)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ が成り立つときにいう．

M 上のベクトル場 V および $f \in C^\infty(M)$ に対し，M 上の関数 $V(f)$ を $(V(f))(a) := V_a(f)$ で定める $(a \in M)$．このとき M 上のベクトル場 V が C^∞ 級であることと，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し $V(f) \in C^\infty(M)$ が成り立つことは同値である．

V, W を M 上の C^∞ 級ベクトル場とし，(U, x) を M の点 a の座標近傍とする．U 上で V, W を $V = \sum_{i=1}^m v^i \partial/\partial x^i$, $W = \sum_{i=1}^m w^i \partial/\partial x^i$ と表す．このとき U 上のベクトル場 $[V, W]_{(U,x)}$ を

$$[V, W]_{(U,x)} := \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \left(v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} - w^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

で定める．このとき a の別の座標近傍 $(\tilde{U}, \tilde{x})$ に対し，$U \cap \tilde{U}$ 上で $[V, W]_{(U,x)} = [V, W]_{(\tilde{U}, \tilde{x})}$ が成り立つ．よって M 上の C^∞ 級ベクトル場 $[V, W]$ を M の各点 a の座標近傍 (U, x) 上で $[V, W] := [V, W]_{(U,x)}$ によって定義することができる．$[V, W]$ を V と W の <u>交換子積</u> または <u>かっこ積</u> (*bracket*) という．

以下においては，可微分多様体上のベクトル場は C^∞ 級であるとする．

1.7　多重線形形式

X をベクトル空間とする．$p \in \boldsymbol{N}$ に対し X^p 上の関数 f が X 上の <u>p 次線形形式</u> (*p-linear form* または *p-linear function*) であるとは，各 $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ に対し

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \ldots, c_i x_i + c'_i x'_i, \ldots, x_p) \\
&= c_i f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + c'_i f(x_1, x_2, \ldots, x'_i, \ldots, x_p)
\end{aligned}$$

が成り立つときにいう，但し x_i, $x'_i \in X$ および c_i, $c'_i \in \boldsymbol{R}$ である．X 上の全ての p 次線形形式からなる集合を $\otimes^p X^*$ で表す．$\otimes^p X^*$ には自然に和およびスカラー倍が定義され，これらの演算に関して $\otimes^p X^*$ はベクトル空間をなす．このベクトル空間を p 個の X^* の <u>テンソル積</u> (*tensor product*) という．特に $\otimes^1 X^* = X^*$ が成り立つ．また $\otimes^0 X^* := \boldsymbol{R}$ とおく．f が X 上の <u>多重線形形式</u> (*multilinear form* または *multilinear function*) であるとは，ある自然数 $p \in \boldsymbol{N}$ に対し f が $\otimes^p X^*$ の元であるときにいう．

$q \in \boldsymbol{N}$ とし，$\otimes^q X^*$ の元 g をとる．このとき $\otimes^{p+q} X^*$ の元 $f \otimes g$ を

$$(f \otimes g)(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) := f(x_1, \ldots, x_p) g(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$$

によって定義する. $f\otimes g$ を f と g の テンソル積 (*tensor product*) という. テンソル積の定義から,

$$\begin{aligned}(c_1f_1+c_2f_2)\otimes g &= c_1(f_1\otimes g)+c_2(f_2\otimes g),\\ f\otimes(c_1g_1+c_2g_2) &= c_1(f\otimes g_1)+c_2(f\otimes g_2)\end{aligned} \tag{1.1}$$

および

$$(f\otimes g)\otimes h = f\otimes(g\otimes h) \tag{1.2}$$

が成り立つことがわかる, 但し $f, f_i\in\otimes^p X^*$, $g, g_i\in\otimes^q X^*$, $h\in\otimes^r X^*$ $(r\in\boldsymbol{N})$ および $c_i\in\boldsymbol{R}$ である.

m を自然数とし, X を m 次元ベクトル空間とする. $e_1, e_2, \ldots, e_m$ は X の基底の一つをなすとし, $e^1, e^2, \ldots, e^m$ は $e_1, e_2, \ldots, e_m$ に双対な X^* の基底をなすとする. このとき

$$\{e^{i_1}\otimes e^{i_2}\otimes\cdots\otimes e^{i_p} \mid 1\le i_k\le m,\ k=1,2,\ldots,p\}$$

は $\otimes^p X^*$ の基底の一つである.

G_p を p 個の文字の集合 $\{1,2,\ldots,p\}$ の全ての置換からなる集合とする. G_p は群をなす. $f\in\otimes^p X^*$ および $\sigma\in G_p$ に対し, $\otimes^p X^*$ の元 σf を

$$(\sigma f)(x_1,\ldots,x_p) := f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(p)})$$

で定義する. $f\in\otimes^p X^*$ が 対称 (*symmetric*) であるとは, 任意の $\sigma\in G_p$ に対し $\sigma f=f$ が成り立つときにいう; $f\in\otimes^p X^*$ が 交代 または 歪対称 (*alternating* または *skew-symmetric*) であるとは, 任意の $\sigma\in G_p$ に対し $\sigma f=\varepsilon_\sigma f$ が成り立つときにいう, 但し ε_σ は置換 σ の符号である. X 上の全ての交代な p 次線形形式からなる集合を $\bigwedge^p X^*$ で表す. $\bigwedge^p X^*$ はベクトル空間 $\otimes^p X^*$ の部分空間である. $\bigwedge^1 X^* = X^* = \otimes^1 X^*$ が成り立つ. また $\bigwedge^0 X^* := \boldsymbol{R}$ とおく.

ベクトル空間 $\otimes^p X^*$ の線形変換 A_p を

$$A_p(f) := \sum_{\sigma\in G_p}\varepsilon_\sigma\sigma f$$

で定義する $(f\in\otimes^p X^*)$. このとき $\operatorname{Im}A_p\subset\bigwedge^p X^*$ が成り立つ. これを用いて $f\in\bigwedge^p X^*$ と $A_p(f)=p!f$ が同値であることがわかり, 従って $\operatorname{Im}A_p=\bigwedge^p X^*$ がわかる. さらに

$$\otimes^p X^* = \operatorname{Im}A_p\oplus\operatorname{Ker}A_p \tag{1.3}$$

がわかる ([2, p. 114]). $f\in\bigwedge^p X^*$, $g\in\bigwedge^q X^*$ に対し, $\bigwedge^{p+q} X^*$ の元 $f\wedge g$ を

$$f\wedge g := \frac{1}{p!q!}A_{p+q}(f\otimes g)$$

で定義し, f と g の 外積 (*exterior product*) とよぶ. このとき

$$g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g$$

が成り立つ. またテンソル積の性質 (1.1) および A_{p+q} の線形性から,

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2) \wedge g = c_1(f_1 \wedge g) + c_2(f_2 \wedge g),$$
$$f \wedge (c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1(f \wedge g_1) + c_2(f \wedge g_2)$$

がわかる, 但し f, $f_i \in \bigwedge^p X^*$, g, $g_i \in \bigwedge^q X^*$, $c_i \in \boldsymbol{R}$ である. $f \in \operatorname{Ker} A_p$, $g \in \otimes^q X^*$ に対し

$$f \otimes g \in \operatorname{Ker} A_{p+q}, \qquad g \otimes f \in \operatorname{Ker} A_{p+q}$$

が成り立つ ([2, pp. 114–115]). よってこのことと (1.2), (1.3) を用いて,

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$$

がわかる, 但し $f \in \bigwedge^p X^*$, $g \in \bigwedge^q X^*$, $h \in \bigwedge^r X^*$ $(r \in \boldsymbol{N})$ である.

X を m 次元ベクトル空間とする. e_1, $e_2, \dots, e_m$ は X の基底の一つをなすとし, e^1, $e^2, \dots, e^m$ は e_1, $e_2, \dots, e_m$ に双対な X^* の基底をなすとする. このとき

$$\left\{ e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \;\middle|\; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m \right\}$$

は $\bigwedge^p X^*$ の基底の一つである.

1.8　テンソル場および微分形式

M を m 次元可微分多様体とし, $p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ とする. このとき M の各点 a に対し $\otimes^p T_a^*(M)$ の元を一つ対応させるものを M 上の p 次 共変テンソル場 (*covariant tensor field*) という. t を M 上の p 次共変テンソル場とする. $p = 0$ ならば, t は M 上の関数である. 以下, $p > 0$ とする. (U, x) を $a \in M$ の座標近傍とする. このとき t は U 上で

$$t = \sum_{i_1, \dots, i_p = 1}^{m} t_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$$

と表される, 但し各 $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ に対し $t_{i_1 \dots i_p}$ は U 上の関数であり, $dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$ は U の各点 b に対し $\otimes^p T_b^*(M)$ の元 $dx^{i_1}|_b \otimes \dots \otimes dx^{i_p}|_b$ を対応させる U 上の共変テンソル場である. M 上の共変テンソル場 t が C^∞ 級である または 滑らかである (*of class* C^∞ または *smooth*) とは, M の各点 a および a の座標近傍 (U, x) に対し $t_{i_1 \dots i_p} \in C^\infty(U)$ が成り立つときにいう.

M の各点 a に対し $\bigwedge^p T_a^*(M)$ の元を一つ対応させるものを M 上の p 次微分形式 (*differential form*) という. ω を M 上の p 次微分形式とし (U, x) を $a \in M$ の座標近傍とするとき, ω は U 上で

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{1.4}$$

と表される. M 上の微分形式 ω が C^∞ 級である または 滑らかである (*of class* C^∞ または *smooth*) とは, ω が共変テンソル場として C^∞ 級であるときにいう. $f \in C^\infty(M)$ に対し, M の各点での f の微分を与える 1 次微分形式を df で表す.

以下においては, M 上の共変テンソル場, 特に微分形式は C^∞ 級であると仮定する. M 上の全ての p 次微分形式からなる集合を $E^p(M)$ で表す. $E^p(M)$ はベクトル空間をなす.

ω を $E^p(M)$ の元とし, (U, x) を $a \in M$ の座標近傍とする. このとき ω は U 上で (1.4) の中でのように表される. $\left(\tilde{U}, \tilde{x}\right)$ を a の ((U, x) とは別の) 座標近傍とすると, 同様に ω は $\tilde{U}$ 上で

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m} \tilde{\omega}_{j_1 \ldots j_p} d\tilde{x}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^{j_p} \tag{1.5}$$

と表される. $\phi := \tilde{x} \circ x^{-1}$ とおき, ϕ^j を ϕ の第 j 成分とする. このとき $U \cap \tilde{U}$ 上で

$$d\tilde{x}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}^{j_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \det\left(\frac{\partial \phi^{j_l}}{\partial x^{i_k}}\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{1.6}$$

が成り立つ, 但し $\det(\partial \phi^{j_l}/\partial x^{i_k})$ は (k, l) 成分が $\partial \phi^{j_l}/\partial x^{i_k}$ である p 次正方行列の行列式である. (1.4), (1.5) および (1.6) から,

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m} \tilde{\omega}_{j_1 \ldots j_p} \det\left(\frac{\partial \phi^{j_l}}{\partial x^{i_k}}\right) \tag{1.7}$$

を得る.

$\omega \in E^p(M)$ に対し, U 上の $(p+1)$ 次微分形式 $d\omega_{(U,x)}$ を

$$d\omega_{(U,x)} := \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq m} d\omega_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

で定義する.

命題 1.1 $(\tilde{U}, \tilde{x})$ を $a \in M$ の ((U, x) とは別の) 座標近傍とする. このとき $U \cap \tilde{U}$ 上で, $d\omega_{(U,x)} = d\omega_{(\tilde{U},\tilde{x})}$ が成り立つ.

証明　まず U 上で

$$d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = 0 \tag{1.8}$$

が成り立つ．また (1.7) から, $U \cap \tilde{U}$ 上で

$$d\omega_{i_1 \dots i_p} = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le m} \left(\det \left(\frac{\partial \phi^{j_l}}{\partial x^{i_k}} \right) d\tilde{\omega}_{j_1 \dots j_p} + \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_p} d \left(\det \left(\frac{\partial \phi^{j_l}}{\partial x^{i_k}} \right) \right) \right) \tag{1.9}$$

が成り立つことがわかる．(1.6) および (1.9) を用いて,

$$\begin{aligned} d\omega_{(U,x)} = & \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le m} d\tilde{\omega}_{j_1 \dots j_p} \wedge d\tilde{x}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{j_p} \\ & + \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le m} \tilde{\omega}_{j_1 \dots j_p} d(d\tilde{x}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{j_p}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

がわかる．(1.10) の右辺第 1 項は $d\omega_{(\tilde{U},\tilde{x})}$ である．また (1.10) の右辺第 2 項は (1.8) から 0 であることがわかる．よって $d\omega_{(U,x)} = d\omega_{(\tilde{U},\tilde{x})}$ を得る． □

命題 1.1 から, $\omega \in E^p(M)$ に対し $d\omega \in E^{p+1}(M)$ を, M の各点 a の座標近傍 (U, x) 上で $d\omega = d\omega_{(U,x)}$ が成り立つように定義することができる．$d\omega$ を ω の外微分 (*exterior derivative*) とよぶ．任意の $\omega \in E^p(M)$ に対し, $d\omega \in E^{p+1}(M)$ の外微分は 0 である: $d(d\omega) = 0$. また $\omega \in E^p(M)$ および $\theta \in E^q(M)$ に対し,

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta \tag{1.11}$$

が成り立つ．

M, N をそれぞれ次元が m, n の可微分多様体とし, $F : M \longrightarrow N$ を M から N への可微分写像とする．t を N 上の p 次共変テンソル場とする (但し $p > 0$ とする)．このとき $a \in M$ および $v_1, \dots, v_p \in T_a(M)$ に対し,

$$(F^*t)_a(v_1, \dots, v_p) := t_{F(a)}(dF_a(v_1), \dots, dF_a(v_p))$$

とおく．このとき $(F^*t)_a \in \otimes^p T_a^*(M)$ が成り立ち, 従って M 上の p 次共変テンソル場 F^*t を得る．F^*t を t の $F : M \longrightarrow N$ による引き戻し (*pull-back*) という．t_1, t_2 を N 上の p 次共変テンソル場とすると, $F^*(t_1 + t_2) = F^*t_1 + F^*t_2$ が成り立つ．また N 上の q 次共変テンソル場 t' に対し, $F^*(t \otimes t') = (F^*t) \otimes (F^*t')$ が成り立つ．ω を N 上の微分形式とすると, $F^*\omega$ は M 上の微分形式である．N 上の微分形式 ω, ω' に対し, $F^*(\omega \wedge \omega') = (F^*\omega) \wedge (F^*\omega')$ が成り立つ．さらに $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ が成り立つ ([2, pp. 131–132]).

1.9 多様体の向き

X を m 次元ベクトル空間とする．X の基底とは一次独立な m 個のベクトルの組のことであるが, ベクトルの並べ方が指定された基底を順序づけられた基底 (*ordered basis*) と

いう．$OB(X)$ を X の全ての順序づけられた基底からなる集合とする．$OB(X)$ の 2 元 $e=(e_1,\ldots,e_m)$, $f=(f_1,\ldots,f_m)$ に対し m 次正則行列 $A=(a_{ij})$ で $\det A>0$ および $f_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}e_i$ $(j=1,\ldots,m)$ を満たすものが存在するとき, $e\sim f$ と書く．$\sim$ は $OB(X)$ の同値関係である．$OB(X)$ の $\sim$ に関する商集合は二つの元からなり, 各々の元を X の向き (*orientation*) という．一つの向きに属する順序づけられた基底だけを用いて議論する必要がある場合, 一つの向きを指定して, X の 正の向き (*positive orientation*) とよぶ．このときもう一つの向きを 負の向き (*negative orientation*) とよぶ．X の正 (負) の向きに属する順序づけられた基底を単に 正 (負) の基底 (*positive* (*negative*) *basis*) とよぶ．正の向きを定めたとき, X は 向きづけられている (*oriented*) といい, X と正の向きの組を 向きづけられたベクトル空間 (*oriented vector space*) という．

X 上の全ての交代な m 次線形形式からなる集合 $\bigwedge^m X^*$ は 1 次元ベクトル空間をなす．$\bigwedge^m X^*\setminus\{0\}$ の 2 元 α,β に対し正数 $c>0$ が $\beta=c\alpha$ を満たすとき, $\alpha\sim\beta$ と書く．$\sim$ は $\bigwedge^m X^*\setminus\{0\}$ の同値関係である．$\bigwedge^m X^*\setminus\{0\}$ の $\sim$ に関する商集合は二つの元からなる．X が向きづけられているとする．このとき $\alpha,\beta\in\bigwedge^m X^*\setminus\{0\}$ に対し, $\alpha\sim\beta$ が成り立つこととと $OB(X)$ の任意の元 $e=(e_1,\ldots,e_m)$ に対し $\alpha(e_1,\ldots,e_m)$ と $\beta(e_1,\ldots,e_m)$ が同符号であることは同値である．$\bigwedge^m X^*\setminus\{0\}$ の元 α が 正 (負) の m 次交代形式 であるとは, X の正の基底 $e=(e_1,\ldots,e_m)$ に対し $\alpha(e_1,\ldots,e_m)>0$ (<0) が成り立つときにいうことにする．正の m 次交代形式が属する $\sim$ に関する同値類は全ての正の m 次交代形式からなり, 負の m 次交代形式が属する $\sim$ に関する同値類は全ての負の m 次交代形式からなる．以上の議論では, $OB(X)$ の商集合の元のいずれかを正の向きと指定することによって, X 上の正の m 次交代形式を定めた．逆に, $\bigwedge^m X^*\setminus\{0\}$ の商集合の元のいずれかを正の m 次交代形式からなる同値類と指定することによって, X の正の向きを定めることができる．

M を m 次元可微分多様体とする．M が 向きづけ可能 (*orientable*) であるとは, $E^m(M)$ のある元 ω が M の任意の点で $\omega\neq 0$ を満たすときにいう．M が向きづけ可能であるとする．$E^m(M)$ の元で M の任意の点で零ではないものの全体からなる集合を $E^m(M)^*$ で表す．このとき各 $\omega\in E^m(M)^*$ を用いて前段落の最後に記したやり方によって M の各点 a での接空間 $T_a(M)$ の正の向きを定めることができる．$\omega\in E^m(M)^*$ を一つとり各 $T_a(M)$ の正の向きを定めるとき, M は 向きづけられている (*oriented*) という．前段落と同様のやり方で $E^m(M)^*$ に同値関係を導入することができ, その同値関係に関する同値類はちょうど二つ存在する．各々の同値類を M の 向き (*orientation*) という．二つの同値類のうちの一つを指定することによって, M の各点での接空間の正の向きを指定することができる．M が向きづけられているとき, 対応する M の向きを M の 正の向き (*positive orientation*) といい, もう一つの向きを 負の向き (*negative orientation*) という．M の正の向きに属する m 次微分形式 ω を向きづけられた多様体 M の 正の m 次微分形式 また

は体積要素 (*volume element* または *volume form*) という.

M は向きづけられているとし, ω を M の体積要素とする. (U, x) を M の 1 点の座標近傍とする. x を $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^m\right)$ と表す. $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^m\right)$ が正 (負) の局所座標系であるとは, U 上で

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) > 0 \ (< 0)$$

が成り立つときにいう. M が向きづけ可能ならば, M の C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ で $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ を満たす $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し $x_\mu \circ x_\lambda^{-1}$ の関数行列式が正値であるようなものが存在し, さらに各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $x_\lambda = \left(x_\lambda^1, x_\lambda^2, \ldots, x_\lambda^m\right)$ が正の局所座標系となるように M を向きづけることができる.

1.10 微分形式の積分および Stokes の定理

M を m 次元可微分多様体とし, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を M の開被覆とする. $\{U_\alpha\}$ が局所有限 (*locally finite*) であるとは, M の各点 a に対し a のある近傍 V_a を選んで $V_a \cap U_\alpha \neq \emptyset$ を満たす $\alpha \in A$ が有限個であるようにできるときにいう. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を M の局所有限な開被覆とする. このとき M 上の C^∞ 級関数の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が $\{U_\alpha\}$ に従属した単位の分割 (*partition of unity*) であるとは, $\{f_\alpha\}$ が次を満たすときにいう:

(i) 任意の $a \in M$ および任意の $\alpha \in A$ に対し, $0 \leq f_\alpha(a) \leq 1$;

(ii) 任意の $\alpha \in A$ に対し, f_α の台 $\operatorname{supp}(f_\alpha)\left(:= \overline{\{a \in M \mid f_\alpha(a) \neq 0\}}\right)$ は U_α に含まれる;

(iii) 任意の $a \in M$ に対し, $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(a) = 1$ (各 $a \in M$ に対し, A の有限個の元以外の $\alpha \in A$ に対しては $f_\alpha(a) = 0$ が成り立つことに注意すること).

M がコンパクトならば, 局所有限な開被覆 $\{U_\alpha\}$ に従属した単位の分割が存在する. M がパラコンパクトであるとは, M の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対し次の性質を満たす局所有限な開被覆 $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ が存在するときにいう: 各 $\beta \in B$ に対し $V_\beta \subset U_\alpha$ を満たす $\alpha \in A$ が存在する. M がコンパクトならば M はパラコンパクトである. M がパラコンパクトならば, 局所有限な開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で各 $\alpha \in A$ に対し $\bar{U}_\alpha$ がコンパクトなものに従属した単位の分割が存在する ([2, p. 83]). 従ってパラコンパクト多様体 M に対し, M の局所有限な開被覆およびそれに従属した単位の分割が存在する.

M を向きづけられたパラコンパクトな m 次元可微分多様体とし, θ を台 $\operatorname{supp}(\theta)$ がコンパクトである m 次微分形式とする. θ の台が M のある点 a の座標近傍 (U, x) に含まれているとする. また $x := (x^1, \ldots, x^m)$ は正の局所座標系であるとする. ある正数 $\varepsilon > 0$ に対し

$$x(U) = \{(r^1, \ldots, r^m) \in \boldsymbol{R}^m \ \mid \ |r^i| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, m\}$$

が成り立つと仮定してよい. U 上で θ を $\theta = \theta_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ と表すことができる. このとき重積分

$$\int_{x(U)} \theta_U \circ x^{-1}(r^1, \ldots, r^m) dr^1 \cdots dr^m \tag{1.12}$$

は θ にのみ依存し, 正の局所座標系を持つ座標近傍 (U, x) の取り方には依存しない. θ の M 上での <u>積分</u> (*integral*) を (1.12) における値で定義し, $\displaystyle\int_M \theta$ で表す.

θ の台がどんな座標近傍にも含まれていないとする. $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ は M の C^∞ 級座標近傍系で, $\{U_\alpha\}$ は局所有限な開被覆でありかつ $x_\alpha := (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^m)$ は正の局所座標系であるとする. $\{f_\alpha\}$ を $\{U_\alpha\}$ に従属した単位の分割とする. このとき θ の M 上での <u>積分</u> (*integral*) を

$$\int_M \theta := \sum_{\alpha \in A} \int_M f_\alpha \theta \tag{1.13}$$

で定義する. (1.13) における右辺の値は単位の分割 $\{f_\alpha\}$ の取り方にも上の条件を満たす C^∞ 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ の取り方にも依存しない ([2, pp. 242–243]) が, M の向きには依存する: 可微分多様体としては M と同一のもので向きが異なるものを $-M$ で表す. このとき次が成り立つ:

$$\int_{-M} \theta = -\int_M \theta. \tag{1.14}$$

M を向きづけ可能なパラコンパクト m 次元可微分多様体とする. D を M の領域 (連結開集合) とし, D の境界 ∂D が M の閉部分多様体であるとする. このとき ∂D は向きづけ可能である ([2, p. 255]). ∂D の向きの定め方は M の次元 m の偶奇に依存する. ∂D の各点 a に対し, a の M における座標近傍 (U, x) で次を満たすものが存在する: $x := (x^1, \ldots, x^m)$ と表すとき, $V := U \cap \partial D$ はある定数 c^m を用いて $V = \{b \in U \mid x^m(b) = c^m\}$ と表される. このとき局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ に対し, $U \cap D = \{b \in U \mid x^m(b) > c^m\}$ を仮定する. $j = 1, \ldots, m-1$ に対し V 上の関数 y^j を $y^j := x^j|_V$ で定め, $y := (y^1, \ldots, y^{m-1})$ とおく. このとき (V, y) は a の ∂D における座標近傍である. ここで M は向きづけられているとし, $(x^1, \ldots, x^m)$ は正の局所座標系であるとする. このとき

(i) m が偶数であるならば, $(y^1, \ldots, y^{m-1})$ は正の局所座標系であるように,

(ii) m が奇数であるならば, $(y^1, \ldots, y^{m-1})$ は負の局所座標系であるように

∂D の向きを定める. このように定められた ∂D の向きを <u>M の向きに順応した向き</u> という.

定理 1.2 (Stokesの定理 (その１)) M を向きづけられたパラコンパクト m 次元可微分多様体とする. D は M の領域で, ∂D が M の閉部分多様体であるとする. また $\mathrm{id}_{\partial D}$ を ∂D の恒等写像とし, ∂D から M へのうめこみとみなす. このとき $\omega \in E^{m-1}(M)$ に対し

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \mathrm{id}_{\partial D}^* \omega \tag{1.15}$$

が成り立つ, 但し (1.15) の右辺において ∂D の向きは M の向きに順応したものである.

定理 1.2 の証明は [2, pp. 258–260] にある.

M, D, ∂D および $\mathrm{id}_{\partial D}$ を定理 1.2 の中でのようなものとする. そして $D' := M \setminus \bar{D}$ とおく. このとき集合としては $\partial D' = \partial D$ が成り立つが, $\partial D'$ の向きとして M の向きに順応したものを採用すると, 向きづけられた多様体としては $\partial D' = -\partial D$ が成り立つ. よって (1.14) を用いて, $\omega \in E^{m-1}(M)$ に対し

$$\int_{D'} d\omega = \int_{\partial D'} \mathrm{id}_{\partial D'}^* \omega = -\int_{\partial D} \mathrm{id}_{\partial D}^* \omega = -\int_D d\omega$$

を得る. よって次の系を得る.

系 1.3 M を向きづけられたコンパクト m 次元可微分多様体とする. このとき $\omega \in E^{m-1}(M)$ に対し次が成り立つ:

$$\int_M d\omega = 0.$$

ベクトル解析において現れる Green の定理, Stokes の定理および Gauss の定理はいずれも特別な場合における定理 1.2 である. これらの定理は, 与えられた領域の境界が区分的に滑らかな場合にも成り立つ. 定理 1.2 も同様の場合において成り立ち, その特別な場合のものを第 2 章で用いる. n を自然数とし o を $\boldsymbol{R}^n$ の原点とする. また各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し, p_i は $\boldsymbol{R}^n$ の点で, 第 i 座標が 1 であり他の座標は全て 0 であるとする. σ は $p_0 := o$, p_1, $p_2, \ldots, p_n$ を含む最小の凸集合であるとする. また各 $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ に対し, $\sigma(i)$ は $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ を含む最小の凸集合であるとする. また D は σ を含む $\boldsymbol{R}^n$ の領域であるとする. このとき次が成り立つ.

定理 1.4 (Stokesの定理 (その２)) $\omega \in E^{n-1}(D)$ に対し

$$\int_\sigma d\omega = \sum_{i=0}^{n} \int_{\sigma(i)} \mathrm{id}_{\sigma(i)}^* \omega \tag{1.16}$$

が成り立つ, 但し (1.16) の左辺は σ の内部上での $d\omega$ の積分であり, 右辺も同様である. また (1.15) の右辺において $\sigma(i)$ の向きは $\boldsymbol{R}^n$ の向きに順応したものである.

2　de Rham コホモロジー群

2.1　de Rham コホモロジー群の定義

M を m 次元可微分多様体とする. 1.8 節でのように, M 上の全ての p 次微分形式からなる集合を $E^p(M)$ で表す ($p \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$). $\omega \in E^p(M)$ が $d\omega = 0$ を満たすとき, ω を閉形式 (*closed form*) という. M 上の全ての p 次閉形式からなる集合を $Z^p(M)$ で表す. $Z^p(M)$ はベクトル空間 $E^p(M)$ の部分空間である. $p > 0$ および $\omega \in E^p(M)$ に対しある $\theta \in E^{p-1}(M)$ が $d\theta = \omega$ を満たすとき, ω を完全形式 (*exact form*) という. M 上の全ての p 次完全形式からなる集合を $B^p(M)$ で表す. また $B^0(M)$ を $E^0(M)$ の零元だけからなる集合とする. $B^p(M)$ は $E^p(M)$ の部分空間である. さらに, 任意の $p \geq 0$ および任意の $\omega \in E^p(M)$ に対し $d(d\omega) = 0$ が成り立つので, $B^p(M) \subset Z^p(M)$ がわかる.

$Z(M)$ をベクトル空間 $Z^0(M)$, $Z^1(M), \ldots, Z^m(M)$ の直和とする:

$$Z(M) := \sum_{p=0}^{m} Z^p(M).$$

同様に, $B(M)$ をベクトル空間 $B^0(M)$, $B^1(M), \ldots, B^m(M)$ の直和とする:

$$B(M) := \sum_{p=0}^{m} B^p(M).$$

$Z(M)$ に次のように同値関係 $\sim$ を導入する: ω, ω' に対し $\omega - \omega' \in B(M)$ が成り立つとき, $\omega \sim \omega'$ と書く. この同値関係に関する商集合を $H(M)$ で表す: $H(M) := Z(M)/B(M)$. $H(M)$ には自然に和およびスカラー倍を定義することができ, 従って $H(M)$ をベクトル空間とみなすことができる. これを M の de Rham コホモロジー群 (*de Rham cohomology group*) という. $\omega \in Z(M)$ が属する $\sim$ に関する同値類を $[\omega]$ で表す. $H(M)$ と同様に $H^p(M) := Z^p(M)/B^p(M)$ とおき, $H^p(M)$ をベクトル空間とみなす. $H^p(M)$ を M の p 次元 de Rham コホモロジー群 (*pth de Rham cohomology group*) という. $H(M)$ は $H^0(M)$, $H^1(M), \ldots, H^m(M)$ の直和 $\sum_{p=0}^m H^p(M)$ と同型である.

ω, $\theta \in Z(M)$ を $\omega := \sum_{p=0}^m \omega^p$, $\theta := \sum_{q=0}^m \theta^q$ と表す, 但し $\omega^p \in Z^p(M)$ および $\theta^q \in Z^q(M)$ である. このとき

$$\omega \wedge \theta := \sum_{r=0}^{m} \sum_{p+q=r} \omega^p \wedge \theta^q$$

とおくと, (1.11) から $\omega \wedge \theta \in Z(M)$ がわかる. さらに, $\omega' \in [\omega]$ および $\theta' \in [\theta]$ に対し, $\omega \wedge \theta \sim \omega' \wedge \theta'$ がわかる. 従って $H(M)$ の元 $[\omega \wedge \theta]$ は $H(M)$ の元 $[\omega]$ および $[\theta]$ によって定まり, $[\omega]$ の元 ω および $[\theta]$ の元 θ の選び方には依らない. よって $H(M)$ の 2 元 $[\omega]$, $[\theta]$ に対し, $[\omega]$ と $[\theta]$ の積 $[\omega] \wedge [\theta]$ を $[\omega] \wedge [\theta] := [\omega \wedge \theta]$ で定義することができる.

この積に関してベクトル空間である $H(M)$ は多元環とみなされる．この多元環を M の de Rham コホモロジー環 (*de Rham cohomology ring*) という．

2.2　Poincaré の補題

一般には de Rham コホモロジー群は零元だけからなるとは限らない．しかしながら, 次の定理が成り立つ．

定理 2.1 (Poincaré の補題) $p > 0$ に対し, $Z^p(\boldsymbol{R}^m) = B^p(\boldsymbol{R}^m)$ が成り立ち, $H^p(\boldsymbol{R}^m)$ は零元だけからなる．

証明　既に $B^p(\boldsymbol{R}^m) \subset Z^p(\boldsymbol{R}^m)$ はわかっているので, $Z^p(\boldsymbol{R}^m) \subset B^p(\boldsymbol{R}^m)$ を示せばよい．f は $\boldsymbol{R}$ 上の C^∞ 級関数で, 任意の $t \geqq 1$ に対し $f(t) = 1$ および任意の $t \leqq 0$ に対し $f(t) = 0$ を満たすとする．$(x^1, \ldots, x^m)$ を $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な座標系とし, $\boldsymbol{R}^{m+1}$ から $\boldsymbol{R}^m$ への写像 $F : \boldsymbol{R}^{m+1} \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ を

$$F(t, x^1, \ldots, x^m) := (f(t)x^1, \ldots, f(t)x^m)$$

で定義する．$\omega \in Z^p(\boldsymbol{R}^m)$ を

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \alpha_{i_1 \ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

と表し, $F^*\omega$ を

$$\begin{aligned} F^*\omega = &\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \beta_{i_1 \ldots i_p}(t, x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &+ \sum_{j_1 < \cdots < j_{p-1}} \gamma_{j_1 \ldots j_{p-1}}(t, x) dt \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{p-1}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

と表す, 但し $\alpha_{i_1 \ldots i_p}(x) := \alpha_{i_1 \ldots i_p}(x^1, \ldots, x^m)$ 等とする．このとき

$$\beta_{i_1 \ldots i_p}(t, x) = f(t)^p (\alpha_{i_1 \ldots i_p} \circ F)(t, x)$$

が成り立つ．よって f の性質に注意して,

$$\beta_{i_1 \ldots i_p}(1, x) = \alpha_{i_1 \ldots i_p}(x), \qquad \beta_{i_1 \ldots i_p}(0, x) = 0 \tag{2.2}$$

がわかる．ここで $\omega \in Z^p(\boldsymbol{R}^m)$ および $d(F^*\omega) = F^*d\omega$ から $d(F^*\omega) = 0$ がわかり, 特に $d(F^*\omega)$ の $dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ の係数が零なので, (2.1) を用いて

$$\frac{\partial \beta_{i_1 \ldots i_p}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{\partial \gamma_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_p}}{\partial x^{i_k}} = 0 \tag{2.3}$$

がわかる．よって (2.2) および (2.3) を用いて,

$$\alpha_{i_1\dots i_p}(x) = \int_0^1 \frac{\partial \beta_{i_1\dots i_p}}{\partial t}(t,x)dt = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\int_0^1 \frac{\partial \gamma_{i_1\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_p}}{\partial x^{i_k}}(t,x)dt \tag{2.4}$$

を得る．$E^{p-1}(\boldsymbol{R}^m)$ の元 θ を

$$\theta := \sum_{j_1<\dots<j_{p-1}} \left(\int_0^1 \gamma_{j_1\dots j_{p-1}}(t,x)dt\right) dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{p-1}}$$

で定めると, (2.4) を用いて

$$\begin{aligned}
d\theta &= \sum_{j_1<\dots<j_{p-1}} d\left(\int_0^1 \gamma_{j_1\dots j_{p-1}}(t,x)dt\right)\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{p-1}} \\
&= \sum_{i_1<\dots<i_p}\sum_{k=1}^{p}\left(\int_0^1 \frac{\partial \gamma_{i_1\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_p}}{\partial x^{i_k}}(t,x)dt\right) \\
&\qquad\qquad dx^{i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{k-1}}\wedge dx^{i_{k+1}}\wedge\dots\wedge dx^{i_p} \\
&= \sum_{i_1<\dots<i_p}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\left(\int_0^1 \frac{\partial \gamma_{i_1\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_p}}{\partial x^{i_k}}(t,x)dt\right)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p} \\
&= \sum_{i_1<\dots<i_p} \alpha_{i_1\dots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p} \\
&= \omega
\end{aligned}$$

を得る．よって $\omega\in B^p(\boldsymbol{R}^m)$ がわかる．従って $Z^p(\boldsymbol{R}^m)\subset B^p(\boldsymbol{R}^m)$ が成り立つ． $\square$

参考 2.2 上の証明は [2, pp. 135–136] にある証明に加筆したものである．M 上のベクトル場 V および p 次共変テンソル場 t に対し, t の V に関する Lie 微分 (*Lie derivative*) $L_V t$ とは, $p=0$ ならば $L_V t := Vt$ であり, $p>0$ ならば

$$\begin{aligned}
&(L_V t)(V_1,\dots,V_p) \\
&:= V(t(V_1,\dots,V_p)) - \sum_{i=1}^{p} t(V_1,\dots,V_{i-1},[V,V_i],V_{i+1},\dots,V_p)
\end{aligned}$$

である, 但し $V_1,\dots,V_p$ は M 上のベクトル場である．$L_V t$ は M 上の p 次共変テンソル場である．$p>0$ および $\omega\in E^p(M)$ に対し, H. Cartan の関係式

$$L_V\omega = i(V)d\omega + d(i(V)\omega) \tag{2.5}$$

が成り立つ ([2, p. 127]), 但し $i(V)\omega$ は

$$i(V)\omega(V_1,\dots,V_{p-1}) := \omega(V,V_1,\dots,V_{p-1})$$

で定義される $E^{p-1}(M)$ の元で, $i(V)d\omega$ も同様に定義される. $M = \boldsymbol{R}^m$ とし, ベクトル場 V として特に $V := \sum_{i=1}^m x^i\partial/\partial x^i$ をとる. このとき各 $p \in \{0,1,2,\ldots,m\}$ に対し, $E^p(\boldsymbol{R}^m)$ の線形変換 α_p で次を満たすものが存在する ([5, pp. 155–156]):

(i) $p \in \{1,\ldots,m\}$ に対し, $E^p(\boldsymbol{R}^m)$ 上で $\alpha_p \circ L_V = \mathrm{id}_p$, 但し id_p は $E^p(\boldsymbol{R}^m)$ の恒等変換である;

(ii) $p \in \{1,\ldots,m\}$ に対し, $E^{p-1}(\boldsymbol{R}^m)$ 上で $\alpha_p \circ d = d \circ \alpha_{p-1}$.

よって (2.5) を用いて, $p \in \{1,\ldots,m\}$ に対し $E^p(\boldsymbol{R}^m)$ 上で

$$\mathrm{id}_p = h_{p+1} \circ d + d \circ h_p \tag{2.6}$$

を得る, 但し $h_p := \alpha_{p-1} \circ i(V)$ である. (2.6) を用いて, 定理 2.1 を得ることができる.

注意 2.3 定理 2.1 から, $\boldsymbol{R}^m$ と微分同相な多様体 M (例えば開球

$$\left\{ r = (r^1,\ldots,r^m) \in \boldsymbol{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^m (x^i)^2 < R^2 \right\}$$

や開立方体

$$\{r = (r^1,\ldots,r^m) \in \boldsymbol{R}^m \mid |r^i| < R\}$$

$(R > 0)$) および $p > 0$ に対し, $H^p(M) = \{0\}$ がわかる.

注意 2.4 $H^1(\boldsymbol{R}^2) = \{0\}$ であるが, $\boldsymbol{R}^2$ から 1 点を取り除くと de Rham コホモロジー群には零元以外の元が現れる. $M := \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とおく. このとき M は $Z^1(M) \neq B^1(M)$ を満たす. $\omega \in E^1(M)$ を

$$\omega := \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$$

で定義する. このとき $\omega \in Z^1(M)$ が成り立つ:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{x^2+y^2} d(-ydx + xdy) + d\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \wedge (-ydx + xdy) \\ &= \frac{2}{x^2+y^2} dx \wedge dy - 2\frac{xdx + ydy}{(x^2+y^2)^2} \wedge (-ydx + xdy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ここで $\omega \in B^1(M)$ を仮定する (矛盾を導きたい). このときある $f \in E^0(M) = C^\infty(M)$ が $df = \omega$ を満たす. 写像 $F : \boldsymbol{R} \longrightarrow M$ を $F(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta)$ で定義する. このとき

$$F^*df = \frac{d(f\circ F)}{d\theta} d\theta, \qquad F^*\omega = \frac{-\sin\theta\, d(\cos\theta) + \cos\theta\, d(\sin\theta)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = d\theta$$

が成り立つ. よって $f \circ F(\theta) = \theta + c$ $(c \in \boldsymbol{R})$ が成り立つことになるが, 一方で F の定義から $f \circ F$ は周期 2π を持つ $C^\infty(\boldsymbol{R})$ の元であるので, 矛盾が生じた. よって $\omega \notin B^1(M)$ が成り立つ. こうして $Z^1(M) \neq B^1(M)$ がわかる.

2.3　幾つかの例

例 2.5 M は可微分多様体で, ちょうど k 個の連結成分を持つとする．このとき $Z^0(M)$ は M の各連結成分上で定数である関数の集合であるので, $\dim H^0(M) = k$ が成り立つ．

例 2.6 2 次元球面 S^2 に対し, $\dim H^1(S^2) = 0$ が成り立つ．$\omega \in Z^1(S^2)$ をとり, a, x を S^2 の 2 点とする．このとき Green の定理を用いて, a と x を結ぶ曲線上での ω の線積分は曲線の取り方に依らないことがわかる．よって a を固定するとき, $C^\infty(S^2)$ の元 f を

$$f(x) := \int_a^x \omega$$

で定めることができる．このとき $df = \omega$ が成り立つ．よって $Z^1(S^2) = B^1(S^2)$ を得る．

例 2.7 一つ前の例と同様に考えることによって, M が単連結な可微分多様体であるならば, $\dim H^1(M) = 0$ がわかる．

例 2.8 1 次元球面 S^1 に対し, $\dim H^1(S^1) = 1$ が成り立つ．$\omega \in Z^1(S^1) = E^1(S^1)$ をとる．このとき S^1 を $\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$ (但し $2\pi\boldsymbol{Z} := \{2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$) と同一視することによって, ω を $E^1(\boldsymbol{R})$ の元とみなすことができる．よって θ を $\boldsymbol{R}$ の座標とするとき, ω を $fd\theta$ と表す, 但し f は $C^\infty(\boldsymbol{R})$ の元で周期 2π を持つ．ある $\tilde{\phi} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ が $d\tilde{\phi}/d\theta = f$ を満たすとする．このとき $\tilde{\phi}$ は周期関数であるとは限らない．ここで

$$c := \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} \omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

とおく．このとき $\phi(\theta) := \tilde{\phi}(\theta) - c\,\theta$ とおくと, ϕ は $C^\infty(\boldsymbol{R})$ の元で周期 2π を持つ:

$$\phi(\theta + 2\pi) - \phi(\theta) = \tilde{\phi}(\theta + 2\pi) - \tilde{\phi}(\theta) - 2\pi c = \int_\theta^{\theta+2\pi} f(\theta)d\theta - 2\pi c = 0.$$

よって ϕ を $C^\infty(S^1)$ の元とみなすことができる．このとき $\omega = fd\theta = d\phi + c\,d\theta$ が成り立つので, ω と $c\,d\theta$ が定める $H^1(S^1)$ の元は一致する．よって $H^1(S^1) = \{[c\,d\theta] \mid c \in \boldsymbol{R}\}$ がわかる．

例 2.9 $M := \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とおく．このとき $\dim H^1(M) = 1$ が成り立つ．$\tilde{M} := \{(r,\theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid r > 0\}$ とおき, $\tilde{M}$ から M への可微分写像 $F : \tilde{M} \longrightarrow M$ を $F(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定める．このとき $\omega \in Z^1(M)$ に対し, $F^*\omega$ を

$$F^*\omega = f(r,\theta)dr + g(r,\theta)d\theta$$

と表す, 但し f, g は $C^\infty(\tilde{M})$ の元で θ に関して周期 2π を持つ．$d\omega = 0$ なので, $\partial g/\partial r = \partial f/\partial\theta$ が成り立つ．このとき $C^\infty(\tilde{M})$ の元 $\tilde{\phi}$ で $\partial\tilde{\phi}/\partial r = f$, $\partial\tilde{\phi}/\partial\theta = g$ を満たすものが

存在することがわかる．ここで開区間 $(0,\infty)$ 上の可微分関数 c を

$$c(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)d\theta$$

で定める．このとき

$$\frac{dc}{dr}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta)d\theta = 0$$

が成り立つので, c は定数であることがわかる．このとき $C^\infty(\tilde{M})$ の元 ϕ を $\phi(r,\theta) := \tilde{\phi}(r,\theta) - c\,\theta$ で定めると,

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta+2\pi)-\phi(r,\theta) &= \tilde{\phi}(r,\theta+2\pi)-\tilde{\phi}(r,\theta)-2\pi c\\ &= \int_\theta^{\theta+2\pi} g(r,\theta)d\theta - 2\pi c\\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ．よって ϕ を $C^\infty(M)$ の元とみなすことができる．このとき $\omega = d\phi + c\,d\theta$ が成り立つので, ω と $c\,d\theta$ が定める $H^1(M)$ の元は一致する．よって $H^1(M) = \{[c\,d\theta] \mid c \in \boldsymbol{R}\}$ がわかる．

2.4 de Rham の定理

de Rham の定理によると, m 次元可微分多様体 M の p 次元 de Rham コホモロジー群 $H^p(M)$ は, M の滑らかな三角形分割を与える単体的複体 K の p 次元コホモロジー群 $H^p(K)$ と同型である．このことを説明するために, まず単体的複体のホモロジー群およびコホモロジー群について最低限の復習をする．

n を自然数とする．$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 C が <u>凸</u> (*convex*) であるとは, C の任意の 2 点 a, b に対し a と b を結ぶ線分が C に含まれるときにいう．$\boldsymbol{R}^n$ の $p+1$ 個の点 $a_0, a_1, \dots, a_p$ が <u>c-独立</u> (*c-independent*) であるとは, p 個のベクトル $a_1 - a_0, \dots, a_p - a_0$ が一次独立であるときにいう．$a_0, a_1, \dots, a_p$ が c-独立であるとき, $a_0, a_1, \dots, a_p$ を含む最小の凸集合を $|a_0 a_1 \dots a_p|$ で表す．このとき

$$|a_0 a_1 \dots a_p| = \left\{ \sum_{i=0}^{p} c_i a_i \;\middle|\; c_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{p} c_i = 1 \right\}$$

が成り立つ ([3, pp. 80–81])．$|a_0 a_1 \dots a_p|$ と表される $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合を <u>単体</u> (*simplex*) または <u>p-単体</u> (*p-simplex*) という．p-単体 $|a_0 a_1 \dots a_p|$ に対し, p を $|a_0 a_1 \dots a_p|$ の <u>次元</u> (*dimension*) という．$a_0, a_1, \dots, a_p$ を $|a_0 a_1 \dots a_p|$ の <u>頂点</u> (*vertex*) という．また $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ の部分集合 $\{a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_q}\}$ $(q \in \{0, 1, \dots p\})$ に対し, q-単体 $|a_{j_0} a_{j_1} \dots a_{j_q}|$ を

p-単体 $|a_0a_1\dots a_p|$ の 辺単体 (*face*) または q-辺単体 (q-*face*) という．単体 σ の 0-辺単体はちょうど σ の頂点である．

K を $\boldsymbol{R}^n$ 内の有限個の単体からなる集合とする．K が 単体的複体 (*simplicial complex*) であるとは,

(i) $\sigma \in K$ に対し, σ の辺単体は全て K に属し,

(ii) $\sigma, \tau \in K$ が $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ を満たすならば, $\sigma \cap \tau$ は σ の辺単体でありかつ τ の辺単体である

ときにいう．K を単体的複体とする．このとき K に含まれる単体の次元の最大値を K の 次元 (*dimension*) といい, $\dim K$ で表す．

$\sigma = |a_0a_1\dots a_p|$ を p-単体とする．集合 $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ の元の並べ方を指定して得られる全ての列からなる集合を $O(\sigma)$ で表す:

$$O(\sigma) := \{(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \mid \{i_0, i_1, \dots, i_p\} = \{0, 1, \dots, p\}\}.$$

$O(\sigma)$ に同値関係を導入する．$(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p})$, $(a_{i'_0}, a_{i'_1}, \dots, a_{i'_p}) \in O(\sigma)$ に対し置換

$$\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \dots & i_p \\ i'_0 & i'_1 & \dots & i'_p \end{pmatrix}$$

が偶置換である, つまり二つの置換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ i_0 & i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ i'_0 & i'_1 & \dots & i'_p \end{pmatrix}$$

の符号が等しいとき, $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \sim (a_{i'_0}, a_{i'_1}, \dots, a_{i'_p})$ と書く．$\sim$ は $O(\sigma)$ における同値関係であり, $\sim$ に関する $O(\sigma)$ の商集合 $O(\sigma)/\sim$ は二つの元からなる．$O(\sigma)/\sim$ の各元を σ の 向き (*orientation*) という．σ の向きを一つ指定するとき, 単体 σ は 向きづけられている (*oriented*) といい, 向きづけられた単体である σ を $\langle\sigma\rangle$ で表す．向きづけられた単体 $\langle\sigma\rangle$ に対し, $(a_0, a_1, \dots, a_p)$ が σ の指定された向きを与えるとき, $\langle\sigma\rangle$ を $\langle a_0, a_1, \dots, a_p\rangle$ とも表す．

K を単体的複体とする．このとき各 $p \in \{0, 1, \dots, \dim K\}$ に対し, K に含まれる p-単体の個数を N_p で表す．σ_1^p, $\sigma_2^p, \dots, \sigma_{N_p}^p$ を K に含まれる全ての p-単体とする．このとき $\langle\sigma_1^p\rangle$, $\langle\sigma_2^p\rangle, \dots, \langle\sigma_{N_p}^p\rangle$ が生成する加群 A 上の自由加群を $C_p(K, A)$ で表す:

$$C_p(K, A) := \left\{ \sum_{i=1}^{N_p} r_i \langle\sigma_i^p\rangle \;\middle|\; r_i \in A \right\}.$$

$C_p(K,A)$ を, 加群 A に係数を持つ K の p-鎖群 (*group of p-chains*) という. $C_p(K,A)$ の元を p-鎖 (*p-chain*) という. p-鎖 $\langle\sigma_i^p\rangle$ に対し, $\langle\sigma_i^p\rangle$ の逆元 $-\langle\sigma_i^p\rangle$ は σ_i^p にもう一つの向きを指定して得られる向きづけられた単体であるとする. $A=\boldsymbol{R}$ の場合が後で必要であるが, 一方で $A=\boldsymbol{Z}$ の場合や $A=\boldsymbol{Z}_2$ の場合もよく現れる. 以下においては, A がこれらのうちのいずれかであるとする.

$p\in\{1,2,\ldots,\dim K\}$ とし, $\langle\sigma\rangle=\langle a_0,a_1,\ldots,a_p\rangle$ を単体的複体 K の向きづけられた p-単体とする. $\langle\sigma\rangle$ の 境界 (*boundary*) $\partial\langle\sigma\rangle$ とは, $(p-1)$-鎖 $\partial\langle\sigma\rangle:=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\langle\sigma(i)\rangle$ である, 但し

$$\langle\sigma(i)\rangle:=\langle a_0,a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_p\rangle$$

である. こうして p-鎖 $\sum_{i=1}^{N_p}r_i\langle\sigma_i^p\rangle$ に対し $(p-1)$-鎖 $\sum_{i=1}^{N_p}r_i\partial\langle\sigma_i^p\rangle$ を対応させる写像 $\partial_p: C_p(K,A)\longrightarrow C_{p-1}(K,A)$ が得られ, これを 境界準同型 (*boundary homomorphism*) という. $p\in\{2,3,\ldots,\dim K\}$ に対し, ∂_p と ∂_{p-1} の合成写像 $\partial_{p-1}\circ\partial_p: C_p(K,A)\longrightarrow C_{p-2}(K,A)$ による $C_p(K,A)$ の像は $C_{p-2}(K,A)$ の零元だけからなる: $\partial_{p-1}\circ\partial_p=0$ ([3, pp. 159–160], [4, pp. 97–98]). ここで

$$Z_p(K,A):=\{c\in C_p(K,A)\mid \partial_p c=0\}$$

$(p\in\{1,2,\ldots,\dim K\})$ および $Z_0(K,A):=C_0(K,A)$ とおく. また

$$B_p(K,A):=\{\partial_{p+1}c\mid c\in C_{p+1}(K,A)\}$$

$(p\in\{0,1,2,\ldots,\dim K-1\})$ とおき, $B_{\dim K}(K,A)$ を $C_{\dim K}(K,A)$ の零元だけからなる集合とする. このとき $Z_p(K,A)$ および $B_p(K,A)$ は $C_p(K,A)$ の部分加群である. さらに $\partial_{p-1}\circ\partial_p=0$ を用いて $B_p(K,A)\subset Z_p(K,A)$ がわかり, 従って $B_p(K,A)$ は $Z_p(K,A)$ の部分加群であることがわかる. よって商群 $H_p(K,A):=Z_p(K,A)/B_p(K,A)$ を定義できる. $H_p(K,A)$ を, 加群 A を係数に持つ単体的複体 K の p 次元ホモロジー群 (*pth homology group*) という. K に含まれる全ての単体の和集合を $|K|$ で表す. このとき K のホモロジー群 $H_p(K,A)$ は $|K|$ の位相にのみ依存する: K' を単体的複体とし, $|K'|$ が $|K|$ と同相であるならば, $H_p(K',A)$ は $H_p(K,A)$ と同型である ([4, p. 146]). $A=\boldsymbol{R}$ のとき, $H_p(K,\boldsymbol{R})$ はベクトル空間であるが, $\beta_p:=\dim H_p(K,\boldsymbol{R})$ を K の p 次元 Betti 数 (*pth Betti number*) という. また $\chi(K):=\sum_{p=0}^{\dim K}(-1)^p\beta_p$ を K の Euler 数 (*Euler number*) という. このとき $\chi(K)=\sum_{p=0}^{\dim K}(-1)^pN_p$ が成り立つ ([3, pp. 162–163], [4, p. 102]).

単体的複体 K および各 $p\in\{0,1,\ldots,\dim K\}$ に対し, $C^p(K)$ をベクトル空間 $C_p(K,\boldsymbol{R})$ の双対空間とする: $C^p(K):=C_p(K,\boldsymbol{R})^*$. 各 $p\in\{0,1,2,\ldots,\dim K-1\}$ に対し, $C^p(K)$ から $C^{p+1}(K)$ への写像 $\partial^p: C^p(K)\longrightarrow C^{p+1}(K)$ を境界準同型 $\partial_{p+1}: C_{p+1}(K,\boldsymbol{R})\longrightarrow C_p(K,\boldsymbol{R})$ の共役作用素とする: 各 $f\in C^p(K)$ および各 $c\in C_{p+1}(K,\boldsymbol{R})$ に対し, $\partial^p f\in$

$C^{p+1}(K)$ を $(\partial^p f)(c) := f(\partial_{p+1}c)$ で定める. $p \in \{0, 1, \ldots, \dim K-2\}$ に対し $\partial_{p+1}\circ\partial_{p+2} = 0$ が成り立つので, $\partial^{p+1} \circ \partial^p = 0$ が成り立つ. ここで $Z^p(K) := \{f \in C^p(K) \mid \partial^p f = 0\}$ $(p \in \{0, 1, 2, \ldots, \dim K - 1\})$ および $Z^{\dim K}(K) := C^{\dim K}(K)$ とおく. また $B^p(K) := \{\partial^{p-1}c \mid c \in C^{p-1}(K)\}$ $(p \in \{1, 2, \ldots, \dim K\})$ とおき, $B^0(K)$ を $C^0(K)$ の零元だけからなる集合とする. このとき $Z^p(K)$ および $B^p(K)$ は $C^p(K)$ の部分空間であり, さらに $B^p(K) \subset Z^p(K)$ が成り立つので $B^p(K)$ は $Z^p(K)$ の部分空間である. このとき商空間 $H^p(K) := Z^p(K)/B^p(K)$ を単体的複体 K の p 次元コホモロジー群 (*pth cohomology group*) という.

以上の事柄に立脚して, de Rham の定理を述べたい. M を m 次元可微分多様体とする. K を単体的複体とし, ある $\boldsymbol{R}^n$ が K の全ての元を含むとする. K は M の三角形分割を与えるとする, つまり $|K|$ から M への同相写像 $F : |K| \longrightarrow M$ が存在するとする. さらに K は M の滑らかな三角形分割を与えるとする, つまり 各 $\sigma \in K$ に対し σ を含む $\boldsymbol{R}^n$ のある部分多様体 M_σ から M へのあるはめこみ F_σ が存在して $F_\sigma|_\sigma = F|_\sigma$ を満たすとする. $\langle\sigma\rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_p\rangle$ を K に含まれる向きづけられた単体とする. このとき各 $\omega \in E^p(M)$ に対し,

$$(\Phi^p(\omega))(\langle\sigma\rangle) := \int_{\langle\sigma\rangle} F_\sigma^*\omega \tag{2.7}$$

とおく, 但し右辺は $(a_1 - a_0, \ldots, a_p - a_0)$ が正の基底となるように σ の内部の向きを定めて得られる向きづけられた多様体上での積分である. このとき (2.7) を用いてベクトル空間 $E^p(M)$ からベクトル空間 $C^p(K)$ への線形写像 $\Phi^p : E^p(M) \longrightarrow C^p(K)$ を定義することができる. このとき $p \in \{1, 2, \ldots, m\}$ および $\omega \in E^{p-1}(M)$ に対し, 定理 1.4 を用いて

$$(\Phi^p(d\omega))(\langle\sigma\rangle) = \int_{\langle\sigma\rangle} F_\sigma^* d\omega = \int_{\langle\sigma\rangle} d(F_\sigma^*\omega) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \int_{\langle\sigma(i)\rangle} F_{\sigma(i)}^*\omega \tag{2.8}$$

を得る. (2.8) の最右辺は $(\Phi^{p-1}(\omega))(\partial_p\langle\sigma\rangle)$ に等しく, さらにこれは $(\partial^{p-1}(\Phi^{p-1}(\omega))(\langle\sigma\rangle)$ に等しい. よって $E^p(M)$ 上で $\Phi^{p+1} \circ d = \partial^p \circ \Phi^p$ が成り立つ $(p \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\})$. この式から, $\omega \in Z^p(M)$ に対し $0 = \partial^p \circ \Phi^p(\omega)$ が成り立つことがわかり, 従って $\Phi^p(\omega) \in Z^p(K)$ がわかる. よって $\Phi^p(Z^p(M)) \subset Z^p(K)$ を得る. また $\omega \in E^{p-1}(M)$ に対し, $\Phi^p(d\omega) = \partial^{p-1}(\Phi^{p-1}(\omega))$ が成り立つので, $\Phi^p(B^p(M)) \subset B^p(K)$ を得る. よって $H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$ の各元 $[\omega]$ に対し, $\Phi^p(\omega)$ を含む $H^p(K) = Z^p(K)/B^p(K)$ の元は $[\omega]$ にのみよって決まり $[\omega]$ の元 ω の取り方によらない. こうしてベクトル空間 $H^p(M)$ からベクトル空間 $H^p(K)$ への線形写像を得ることができる. これをやはり Φ^p で表す. そして次が成り立つ.

定理 2.10 (de Rham の定理) 線形写像 $\Phi^p : H^p(M) \longrightarrow H^p(K)$ は同型である.

証明は [3, pp. 169–178] にある.

参考 2.11 M をコンパクトな m 次元可微分多様体とし, g を M 上の Riemann 計量とする. このとき各 $p \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ に対し, g に関する全ての p 次調和形式からなるベクトル空間 $\mathcal{H}^p(M, g)$ はベクトル空間 $H^p(M)$ と同型である (第４章で説明する).

3 $*$-作用素

3.1 ベクトル空間の内積

X をベクトル空間とし, q を X 上の双線形形式とする, つまり q は $\otimes^2 X^*$ の元であるとする．このとき q が X の 内積 (*inner product*) であるとは, q が次を満たすときにいう:

(i) q は対称である;

(ii) 任意の $x \in X$ に対し $q(x,x) \geq 0$ が成り立ち, かつ $q(x,x) = 0$ と x が X のゼロベクトルであることは同値である.

q を X の内積とする．また m を自然数とし, X を m 次元ベクトル空間とする．e_1, $e_2, \ldots, e_m$ は X の基底の一つをなすとする．このとき $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ が計量 q に関する 正規直交基底 (*orthonormal basis*) であるとは, i, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対し $q(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ が成り立つときにいう, 但し δ_{ij} は Kronecker のデルタである．$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ を計量 q に関する正規直交基底とする．$e^1, e^2, \ldots, e^m$ は $e_1, e_2, \ldots, e_m$ に双対な X^* の基底をなすとする．このとき $\{e^1, e^2, \ldots, e^m\}$ が正規直交基底であるように, X^* に内積 q^* を導入したい．x^*, $y^* \in X^*$ を $x^* := \sum_{k=1}^m a_k e^k$, $y^* := \sum_{l=1}^m b_l e^l$ とおき,

$$q^*(x^*, y^*) := \sum_{k=1}^m a_k b_k$$

とおく．このとき $q^*(x^*, y^*)$ は q, x^* および y^* によって定まり, q に関する X の正規直交基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ の取り方には依らない．こうして $\otimes^2 (X^*)^*$ の元 q^* を定義できる．このとき q^* は対称である．そして $q^*(x^*, x^*) \geq 0$ が成り立ち, かつ $q^*(x^*, x^*) = 0$ は x^* が X^* の零元であることと同値である．よって q^* は X^* の内積であり, q によって定まる．計量 q に関する X の正規直交基底の双対基底は q^* に関する正規直交基底である.

3.2 交代形式の空間の内積

1.7 節で定義されたように, $\bigwedge^p X^*$ を X 上の全ての交代な p 次線形形式からなる集合とする．$\bigwedge^p X^*$ はベクトル空間をなす．$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ を X の基底の一つとし, $\{e^1, e^2, \ldots, e^m\}$ を $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ に双対な X^* の基底とする．このとき $p \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対し,

$$\left\{ e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \;\middle|\; 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m \right\}$$

は $\bigwedge^p X^*$ の基底の一つである.

q を X の内積とし, q^* を q が定める X^* の内積とする．このときベクトル空間 $\bigwedge^p X^*$ に $\{e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m}$ が正規直交基底となるように内積を導入したい．$\{e_1$,

$e_2, \ldots, e_m\}$ を q に関する X の正規直交基底の一つとする．このとき $\{e^1, e^2, \ldots, e^m\}$ は q^* に関する X^* の正規直交基底である．$f, g \in \bigwedge^p X^*$ を

$$\begin{aligned} f &:= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} f_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}, \\ g &:= \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_p} g_{j_1 j_2 \ldots j_p} e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_p} \end{aligned} \tag{3.1}$$

と表すとき，

$$q^{p,*}(f, g) := \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} f_{i_1 i_2 \ldots i_p} g_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

とおくと，$q^{p,*}(f, g)$ は q, f および g によって定まり，q に関する X の正規直交基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ の取り方には依らない．こうして $\otimes^2(\bigwedge^p X^*)^*$ の元 $q^{p,*}$ を定義できる．さらに $q^{p,*}$ は $\bigwedge^p X^*$ の内積であり，q によって定まる．計量 q に関する X の正規直交基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ に対し，$\{e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m}$ は $q^{p,*}$ に関する $\bigwedge^p X^*$ の正規直交基底である．

3.3 $*$-作用素の定義

X を m 次元ベクトル空間とする．1.9 節において行なったようにして，X の正の向きを定める．

q を X の内積とし，$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ を計量 q に関する正規直交基底とする．さらに $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ は X の正の向きを与えるとする．このとき $*$-作用素 ($*$-*operator*) とは，各 $p \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ に対し $\bigwedge^p X^*$ から $\bigwedge^{m-p} X^*$ への線形写像 $*$ で，

$$\begin{aligned} &*(1) = e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^m, \qquad *(e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^m) = 1, \\ &*(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}) = \varepsilon e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_{m-p}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

を満たすものである，但し i_a, j_b は

$$\{i_1, \ldots, i_p\} \cup \{j_1, \ldots, j_{m-p}\} = \{1, 2, \ldots, m\}$$

を満たし，ε は置換

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p & p+1 & \ldots & m \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p & j_1 & \ldots & j_{m-p} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

の符号である．

例 3.1 $m = 2$ ならば，$*(e^1) = e^2$ および $*(e^2) = -e^1$ が成り立つ．

例 3.2 $m = 3$ ならば,

$$*(e^1) = e^2 \wedge e^3, \quad *(e^2) = e^3 \wedge e^1, \quad *(e^3) = e^1 \wedge e^2$$

および

$$*(e^1 \wedge e^2) = e^3, \quad *(e^2 \wedge e^3) = e^1, \quad *(e^3 \wedge e^1) = e^2$$

が成り立つ.

$*$-作用素 $* : \bigwedge^p X^* \longrightarrow \bigwedge^{m-p} X^*$ は X の正の向きを与える正規直交基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ の取り方には依らず, X の内積および正の向きにのみ依る.

3.4 $*$-作用素の基本性質

命題 3.3 $f \in \bigwedge^p X^*$ に対し, $*(*f) = (-1)^{p(m-p)} f$.

証明　$f = e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}$ とする. ε を (3.3) において与えられている置換 σ の符号とし, ε' を置換

$$\sigma' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m-p & m-p+1 & \ldots & m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_{m-p} & i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix}$$

の符号とする. このとき

$$*(*f) = \varepsilon * (e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_{m-p}}) = \varepsilon\varepsilon' f$$

が成り立つ. ここで $\varepsilon\varepsilon'$ は置換 $\sigma' \circ \sigma^{-1}$ の符号であり, $(-1)^{p(m-p)}$ に等しい. よって $*(*f) = (-1)^{p(m-p)} f$ を得る. f が一般に (3.1) の中でのように表されている場合にも, $* : \bigwedge^p X^* \longrightarrow \bigwedge^{m-p} X^*$ が線形であることから, $*(*f) = (-1)^{p(m-p)} f$ を得る. □

命題 3.4 $f, g \in \bigwedge^p X^*$ に対し, $q^{p,*}(f, g) = *(g \wedge *f) = *(f \wedge *g)$.

証明　$f = e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}$ (但し $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$) および $g = e^{k_1} \wedge e^{k_2} \wedge \cdots \wedge e^{k_p}$ (但し $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$) に対し, $q^{p,*}(f, g) = \delta^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ が成り立つ, 但し

$$\delta^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p} := \begin{cases} 1 & ((i_1, \ldots i_p) = (k_1, \ldots, k_p)) \\ 0 & ((i_1, \ldots i_p) \neq (k_1, \ldots, k_p)) \end{cases}$$

である．また (3.2) に注意して,

$$\begin{aligned}
*(g \wedge *f) &= *(\varepsilon e^{k_1} \wedge e^{k_2} \wedge \cdots \wedge e^{k_p} \wedge e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_{m-p}}) \\
&= *(\varepsilon \delta^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \wedge e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_{m-p}}) \\
&= \delta^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} *(e^1 \wedge \cdots \wedge e^m) \\
&= \delta^{k_1 k_2 \dots k_p}_{i_1 i_2 \dots i_p}
\end{aligned}$$

を得る．よって $q^{p,*}(f,g) = *(g \wedge *f)$ を得る．また $l_1, l_2, \dots, l_{m-p}$ は

$$\{k_1, \dots, k_p\} \cup \{l_1, \dots, l_{m-p}\} = \{1, 2, \dots, m\}$$

を満たすとし, ε'' を置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & \dots & m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p & l_1 & \dots & l_{m-p} \end{pmatrix}$$

の符号とする．このとき

$$\begin{aligned}
*(f \wedge *g) &= *(\varepsilon'' e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \wedge e^{l_1} \wedge e^{l_2} \wedge \cdots \wedge e^{l_{m-p}}) \\
&= *(\varepsilon'' \delta^{i_1 i_2 \dots i_p}_{k_1 k_2 \dots k_p} e^{k_1} \wedge e^{k_2} \wedge \cdots \wedge e^{k_p} \wedge e^{l_1} \wedge e^{l_2} \wedge \cdots \wedge e^{l_{m-p}}) \\
&= \delta^{i_1 i_2 \dots i_p}_{k_1 k_2 \dots k_p} *(e^1 \wedge \cdots \wedge e^m) \\
&= \delta^{i_1 i_2 \dots i_p}_{k_1 k_2 \dots k_p}
\end{aligned}$$

を得る．よって $q^{p,*}(f,g) = *(f \wedge *g)$ を得る．一般の $f, g \in \bigwedge^p X^*$ に対しても, $*$ の線形性から $q^{p,*}(f,g) = *(g \wedge *f) = *(f \wedge *g)$ を得る． □

3.5 向きづけられた Riemann 多様体上の Laplace-Beltrami 作用素

M を m 次元可微分多様体とし, g を M 上の 2 次の共変テンソル場とする．任意の $a \in M$ に対し g_a が $T_a(M)$ の内積であるとき, g を M 上の Riemann 計量 (*Riemannian metric*) という．そして一つの Riemann 計量が付与された可微分多様体を Riemann 多様体 (*Riemannian manifold*) という．

M を向きづけられた m 次元 Riemann 多様体とする．このとき各 $p \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ および各 $a \in M$ に対し, Hodge の $*$-作用素 $\bigwedge^p T_a^*(M) \longrightarrow \bigwedge^{m-p} T_a^*(M)$ を定義できる．そこで M 上の p 次微分形式 $\omega \in E^p(M)$ に対し, $(m-p)$ 次微分形式 $*\omega \in E^{m-p}(M)$ を, 任意の $a \in M$ に対し $(*\omega)_a := *(\omega_a)$ によって定義する．特に $E^0(M)$ の元である定数 1 を与える関数 1 に対し, $\Omega := *(1)$ とおく．このとき Ω は M の体積要素の一つである．$\omega \in E^p(M)$ に対し,

$$\delta\omega := \begin{cases} (-1)^{m(p+1)+1} *d*\omega & (p \geq 1) \\ 0 & (p = 0) \end{cases}$$

とおく. $p \geq 1$ のとき, $\delta\omega$ は $E^{p-1}(M)$ の元であることがわかり, そして $\omega \in E^p(M)$ に対し $\delta\omega \in E^{p-1}(M)$ を対応させる写像 $\delta : E^p(M) \longrightarrow E^{p-1}(M)$ は線形写像であることがわかる. 命題 3.3 および任意の $\omega \in E^p(M)$ に対し $d(d\omega) = 0$ が成り立つことから, $\delta(\delta\omega) = 0$ がわかる. 各 $p \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ に対し, $E^p(M)$ の線形変換 Δ を $\Delta := \delta \circ d + d \circ \delta$ で定義する. Δ を M 上の ラプラシアン (*Laplacian*) または Laplace-Beltrami 作用素 (*Laplace-Beltrami operator*) という. $E^p(M)$ の元 α が 調和 (形式) (*harmonic* (*form*)) であるとは, $\Delta\alpha = 0$ が成り立つときにいう.

例 3.5 $M = \boldsymbol{R}^m$ とし, $(x^1, \ldots, x^m)$ を $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な座標系とする. このとき $g := \sum_{k=1}^m dx^k \otimes dx^k$ は $\boldsymbol{R}^m$ 上の Riemann 計量である. この g に関して, $f \in E^0(M)$ に対し

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \delta(df) + d(\delta f) \\
&= (-1)^{m(1+1)+1} {*d*}(df) \\
&= -*d*\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k\right) \\
&= -*d\left(\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \cdots \wedge dx^m\right) \\
&= -*\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{(\partial x^k)^2} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\right) \\
&= -\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{(\partial x^k)^2}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

以下, 向きづけられた m 次元 Riemann 多様体 M はコンパクトであるとする. $\alpha, \beta \in E^p(M)$ に対し $\alpha \wedge *\beta \in E^m(M)$ が成り立つことに注意して,

$$\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle := \int_M \alpha \wedge *\beta$$

とおく.

命題 3.6 $(\alpha, \beta) \in E^p(M) \times E^p(M)$ に対し $\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle$ を対応させる写像はベクトル空間 $E^p(M)$ の内積である.

証明　$(\alpha, \beta) \in E^p(M) \times E^p(M)$ に対し, $\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle$ を対応させる写像が $\otimes^2 E^p(M)^*$ の元であることはすぐにわかる. また命題 3.4 から

$$*(\alpha \wedge *\beta) = *(\beta \wedge *\alpha) = q^{p,*}(\alpha, \beta)$$

がわかり従って $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha$ がわかるので, $\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle = \langle\langle \beta, \alpha \rangle\rangle$ を得る. また

$$\langle\langle \alpha, \alpha \rangle\rangle = \int_M \alpha \wedge *\alpha = \int_M *(\alpha \wedge *\alpha)\Omega = \int_M q^{p,*}(\alpha, \alpha)\Omega \geq 0$$

が成り立ち, そしてこの式から $\langle\langle \alpha, \alpha \rangle\rangle = 0$ は $\alpha \equiv 0$ と同値であることがわかる. □

命題 3.7 $p \geq 1$ および $\alpha \in E^{p-1}(M)$, $\beta \in E^p(M)$ に対し, $\langle\langle d\alpha, \beta \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \delta\beta \rangle\rangle$ が成り立つ.

証明 (1.11) を用いて,

$$d(\alpha \wedge *\beta) = (d\alpha) \wedge *\beta + (-1)^{p-1}\alpha \wedge d*\beta \tag{3.4}$$

がわかる. ここで (3.4) の右辺第 2 項について, $\beta \in E^p(M)$ に対し $d*\beta \in E^{m-p+1}(M)$ が成り立つことおよび命題 3.3 に注意すると,

$$d*\beta = (-1)^{(m-p+1)(p-1)} **d*\beta = (-1)^{(m-p+1)(p-1)}(-1)^{m(p+1)+1} *\delta\beta = (-1)^{p^2} *\delta\beta$$

がわかる. よって

$$d(\alpha \wedge *\beta) = (d\alpha) \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta$$

をがわかる. よって $\alpha \wedge *\beta \in E^{m-1}(M)$ および系 1.3 を用いて,

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_M (d\alpha) \wedge *\beta - \int_M \alpha \wedge *\delta\beta = \langle\langle d\alpha, \beta \rangle\rangle - \langle\langle \alpha, \delta\beta \rangle\rangle$$

を得る. よって $\langle\langle d\alpha, \beta \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \delta\beta \rangle\rangle$ が成り立つ. □

命題 3.7 および $\Delta := \delta \circ d + d \circ \delta$ から, 次の二つを得る:

系 3.8 $p \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ および $\alpha, \beta \in E^p(M)$ に対し, $\langle\langle \Delta\alpha, \beta \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \Delta\beta \rangle\rangle$ が成り立つ.

系 3.9 $\alpha \in E^p(M)$ が調和形式であることと, α が $d\alpha = 0$ および $\delta\alpha = 0$ を満たすことは同値である.

系 3.9 から, 特に次を得る:

系 3.10 M 上の調和関数は定数である.

4　Hodgeの分解定理

4.1　Hodgeの分解定理およびその証明の概略

M を向きづけられたコンパクトな m 次元Riemann多様体とし, g を M 上のRiemann計量とする. $p \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ に対し, M 上の全ての p 次調和形式からなる集合を $\mathcal{H}^p(M, g)$ で表す: $\mathcal{H}^p(M, g) := \{\omega \in E^p(M) \mid \Delta\omega = 0\}$. $\mathcal{H}^p(M, g)$ はベクトル空間である.

本講義の目標は次の定理を理解することである.

定理 4.1 (Hodgeの分解定理) $\mathcal{H}^p(M, g)$ は有限次元ベクトル空間であり,

$$\begin{aligned} E^p(M) &= \Delta(E^p(M)) \oplus \mathcal{H}^p(M, g) \\ &= d(\delta(E^p(M))) \oplus \delta(d(E^p(M))) \oplus \mathcal{H}^p(M, g) \\ &= d(E^{p-1}(M)) \oplus \delta(E^{p+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^p(M, g) \end{aligned}$$

が成り立つ, 但し $\oplus$ は単なる直和ではなく, $E^p(M)$ の内積 $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ に関して直交していることも意味する.

定理 4.1 の証明に触れる前に, 定理 4.1 からわかることとして $\mathcal{H}^p(M, g)$ は M の p 次元de Rhamコホモロジー群 $H^p(M)$ とベクトル空間として同型であることを挙げることができる. 定理 4.1 を認めると, $E^p(M)$ の元 ω を $\omega = d\alpha + \delta\beta + \theta$ と表すことができる, 但し $\alpha \in E^{p-1}(M)$, $\beta \in E^{p+1}(M)$ および $\theta \in \mathcal{H}^p(M, g)$ である. このとき系 3.9 および $\langle\langle d(\delta\beta), \beta\rangle\rangle = \langle\langle \delta\beta, \delta\beta\rangle\rangle$ に注意すると, $\omega \in Z^p(M)$ が $\delta\beta \equiv 0$ と同値であることがわかる. $\omega \in Z^p(M)$ とする. このとき ω が定める $H^p(M)$ の元 $[\omega]$ は $\mathcal{H}^p(M, g)$ の元である θ を含む. $\theta' \in \mathcal{H}^p(M, g)$ が $\theta' \in [\omega]$ を満たすとすると, $\theta - \theta' \in B^p(M)$ なので定理 4.1 から $\theta - \theta' = 0$ を得る. よって $H^p(M)$ の元 $[\omega]$ は $\mathcal{H}^p(M, g)$ の元を唯一つ含む. また $\mathcal{H}^p(M, g)$ の各元 θ は閉形式なので, $H^p(M)$ の元 $[\theta]$ を定める. 以上から次を得る:

系 4.2 ベクトル空間 $\mathcal{H}^p(M, g)$ の各元 θ に対しベクトル空間 $H^p(M)$ の元 $[\theta]$ を対応させる写像 $\Psi^p : \mathcal{H}^p(M, g) \longrightarrow H^p(M)$ は線形でありそして同型である.

注意 4.3 定理 2.10 を思い出すことによって, $\mathcal{H}^p(M, g)$, $H^p(M)$ および M の滑らかな三角形分割を与える単体的複体 K の p 次元コホモロジー群 $H^p(K)$ は互いに同型であることがわかる.

定理 4.1 の証明を行なうために, 以下に挙げる二つの定理を必要とする.

$E^p(M)$ の元 α に対し, $\omega \in E^p(M)$ が方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の解であるとする. このとき任意の $\varphi \in E^p(M)$ に対し, $\langle\langle \Delta\omega, \varphi\rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \varphi\rangle\rangle$ が成り立つ. よって系 3.8 から,

$\langle\langle \omega, \Delta\varphi \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \varphi \rangle\rangle$ がわかる. ここで $E^p(M)^*$ の元 l を $l(\beta) := \langle\langle \omega, \beta \rangle\rangle$ で定める $(\beta \in E^p(M))$. このとき $l(\Delta\varphi) = \langle\langle \alpha, \varphi \rangle\rangle$ が成り立つ. l は有界作用素である: $\beta \in E^p(M)$ に対し $\|\beta\| := \sqrt{\langle\langle \beta, \beta \rangle\rangle}$ とおくと, Schwarz の不等式を用いて $|l(\beta)| \leq \|\omega\|\|\beta\|$ を得る.

$\alpha \in E^p(M)$ に対し, 次を満たす $E^p(M)^*$ の元 l を方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の弱解 (*weak solution*) という:

(i) 任意の $\varphi \in E^p(M)$ に対し, $l(\Delta\varphi) = \langle\langle \alpha, \varphi \rangle\rangle$ が成り立つ;

(ii) l は有界作用素である, つまりある非負定数 $c \geq 0$ が存在して任意の $\beta \in E^p(M)$ に対し $|l(\beta)| \leq c\|\beta\|$ が成り立つ.

Hodge の分解定理の証明に用いられる定理の一つは次のものである.

定理 4.4 (正則性定理) *$\alpha \in E^p(M)$ および方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の弱解 $l \in E^p(M)^*$ に対し, $E^p(M)$ の元 ω が存在して任意の $\beta \in E^p(M)$ に対し $l(\beta) = \langle\langle \omega, \beta \rangle\rangle$ が成り立つ.*

定理 4.4 を認めると, $\alpha \in E^p(M)$ に対し $\Delta\omega = \alpha$ の弱解 l が存在するならば, 定理 4.4 の中でのような $\omega \in E^p(M)$ および任意の $\varphi \in E^p(M)$ に対し $\langle\langle \omega, \Delta\varphi \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \varphi \rangle\rangle$ が成り立つことがわかる. よって系 3.8 を用いて, $\langle\langle \Delta\omega - \alpha, \varphi \rangle\rangle = 0$ を得る. $\varphi \in E^p(M)$ は任意なので, 特に $\varphi := \Delta\omega - \alpha$ とおくことによって $\Delta\omega = \alpha$ を得る. よって $\omega \in E^p(M)$ は方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の解である. Hodge の分解定理の証明において方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の解の存在が議論の対象となるが, 方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の解を見つけたければ, 方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の弱解を見つければよいことがわかる.

$(\alpha, \beta) \in E^p(M) \times E^p(M)$ に対し, $d(\alpha, \beta) := \|\alpha - \beta\|$ を対応させる $E^p(M) \times E^p(M)$ 上の関数 d は距離の公理を満たす. 従って $E^p(M)$ は距離 d を持つ距離空間であると考えることができる. Hodge の分解定理の証明に用いられる定理のもう一つは次のものである.

定理 4.5 *$E^p(M)$ の点列 $\{\alpha_n\}$ に対し, ある正数 $c > 0$ が存在して任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $\|\alpha_n\| \leq c$ および $\|\Delta\alpha_n\| \leq c$ が成り立つとする. このとき $\{\alpha_n\}$ のある部分列は $E^p(M)$ の Cauchy 列である: 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して, m, $n \in \boldsymbol{N}$ が n_0 以上ならば $d(\alpha_m, \alpha_n) < \varepsilon$ が成り立つ.*

定理 4.4 および定理 4.5 の証明については次節以降で扱う.

ここでは定理 4.4 および定理 4.5 を認めた上で, 定理 4.1 の証明を行なう. まずベクトル空間 $\mathcal{H}^p(M, g)$ について, $\dim \mathcal{H}^p(M, g) = \infty$ を仮定する. このとき $\mathcal{H}^p(M, g)$ の点列 $\{\theta_k\}$ で $\|\theta_k\| = 1$ および $\langle \theta_k, \theta_l \rangle = \delta_{kl}$ を満たすものが存在する. θ_k は $\Delta\theta_k = 0$ を満たすので, $\alpha_k := \theta_k$ は定理 4.5 の仮定を満たしている. よって $\{\theta_k\}$ のある部分列は $E^p(M)$ の Cauchy 列であることになるが, 一方で $k \neq l$ ならば

$$\|\theta_k - \theta_l\|^2 = \langle\langle \theta_k, \theta_k \rangle\rangle - 2\langle\langle \theta_k, \theta_l \rangle\rangle + \langle\langle \theta_l, \theta_l \rangle\rangle = 2$$

が成り立つので, $\{\theta_k\}$ のいかなる部分列も Cauchy 列ではありえない. こうして矛盾が生じたので, $\dim \mathcal{H}^p(M,g) < \infty$ を得る.

$h := \dim \mathcal{H}^p(M,g)$ とおき, $\{\omega_1, \ldots, \omega_h\}$ を $\mathcal{H}^p(M,g)$ の内積 $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ に関する正規直交基底とする. $\alpha \in E^p(M)$ に対し,

$$\beta := \alpha - \sum_{i=1}^{h} \langle\langle \alpha, \omega_i \rangle\rangle \omega_i \tag{4.1}$$

とおく. このとき β は内積 $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ に関する $\mathcal{H}^p(M,g)$ の直交補空間 $\mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ の元である. $E^p(M) = \mathcal{H}^p(M,g)^\perp \oplus \mathcal{H}^p(M,g)$ であるので, $E^p(M) = \Delta(E^p(M)) \oplus \mathcal{H}^p(M,g)$ を示すためには, $\mathcal{H}^p(M,g)^\perp = \Delta(E^p(M))$ を示せばよい.

$\alpha \in E^p(M)$, $\omega \in \mathcal{H}^p(M,g)$ に対し,

$$\langle\langle \Delta\alpha, \omega \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \Delta\omega \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, 0 \rangle\rangle = 0$$

が成り立つので, $\Delta\alpha \in \mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ がわかり, 従って $\Delta(E^p(M)) \subset \mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ がわかる.

$\mathcal{H}^p(M,g)^\perp \subset \Delta(E^p(M))$ を示すために, 次の補題を必要とする.

補題 4.6 ある正数 $c > 0$ が存在して, 任意の $\beta \in \mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ に対し $\|\beta\| \leq c\|\Delta\beta\|$ が成り立つ.

証明　上のような $c > 0$ は存在しないと仮定する. このとき $\mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ の点列 $\{\beta_j\}$ で $\|\beta_j\| = 1$ および $\lim_{j\to\infty} \|\Delta\beta_j\| = 0$ を満たすものが存在する. このとき定理 4.5 から, $\{\beta_j\}$ のある部分列は Cauchy 列であることがわかる. 部分列をそのまま $\{\beta_j\}$ で表す. $E^p(M)$ の元 ψ に対し, $b_j(\psi) := \langle\langle \beta_j, \psi \rangle\rangle$ とおく. このとき

$$|b_j(\psi) - b_k(\psi)| = |\langle\langle \beta_j - \beta_k, \psi \rangle\rangle| \leq \|\beta_j - \beta_k\| \|\psi\|$$

が成り立つので, 各 $\psi \in E^p(M)$ に対し $\{b_j(\psi)\}$ は $\boldsymbol{R}$ の Cauchy 列である. よって $\{b_j(\psi)\}$ の極限が存在するので, それを $l(\psi)$ で表す: $l(\psi) := \lim_{j\to\infty} b_j(\psi)$. このとき $\psi \in E^p(M)$ に対し $l(\psi) \in \boldsymbol{R}$ を対応させる $E^p(M)$ 上の関数 l は線形であることがわかり, 従って l は $E^p(M)^*$ の元である. また

$$|l(\psi)| = \lim_{j\to\infty} |\langle\langle \beta_j, \psi \rangle\rangle| \leq \lim_{j\to\infty} \|\beta_j\| \|\psi\| = \|\psi\|$$

が成り立つので, $l \in E^p(M)^*$ は有界作用素である. また $\varphi \in E^p(M)$ に対し,

$$|l(\Delta\varphi)| = \lim_{j\to\infty} |\langle\langle \beta_j, \Delta\varphi \rangle\rangle| = \lim_{j\to\infty} |\langle\langle \Delta\beta_j, \varphi \rangle\rangle| \leq \|\varphi\| \lim_{j\to\infty} \|\Delta\beta_j\| = 0$$

が成り立つので, $l(\Delta\varphi) = 0$ がわかる. よって l は方程式 $\Delta\omega = 0$ の弱解である. よって定理 4.4 から, ある $\beta \in E^p(M)$ が存在して任意の $\psi \in E^p(M)$ に対し $l(\psi) = \langle\langle \beta, \psi \rangle\rangle$

を満たすことがわかり, よって β は $\mathcal{H}^p(M,g)$ の元である. l の定義から $\langle\langle \beta, \psi \rangle\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle\langle \beta_j, \psi \rangle\rangle$ がわかり, $\{\beta_j\}$ は β に弱収束する. $\beta_j \in \mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ なので, $\beta \in \mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ がわかり, よって $\beta = 0$ がわかる. ここで $\psi := \beta_k$ とおくと,

$$\lim_{j\to\infty} |\langle\langle \beta_j, \beta_k \rangle\rangle| = |\langle\langle \beta, \beta_k \rangle\rangle| \leq \|\beta\| \tag{4.2}$$

が成り立つ. $\{\beta_j\}$ は Cauchy 列なので, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある $k_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して $j, k \in \boldsymbol{N}$ が k_0 以上ならば $d(\beta_j, \beta_k) < \sqrt{2\varepsilon}$ が成り立つが,

$$d(\beta_j, \beta_k)^2 = \langle\langle \beta_j - \beta_k, \beta_j - \beta_k \rangle\rangle = 2(1 - \langle\langle \beta_j, \beta_k \rangle\rangle)$$

が成り立つことに注意すると, $1 - \varepsilon < \langle\langle \beta_j, \beta_k \rangle\rangle$ を得る. よって (4.2) を用いて $\|\beta\| \geq 1$ を得るが, これは $\beta = 0$ に反する. □

補題 4.6 を用いて, $\mathcal{H}^p(M,g)^\perp \subset \Delta(E^p(M))$ を示したい. φ_1, $\varphi_2 \in E^p(M)$ が $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ を満たすならば, $\varphi_1 - \varphi_2 \in \mathcal{H}^p(M,g)$ が成り立つ. よって $\alpha \in \mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ に対し $\langle\langle \alpha, \varphi_1 \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \varphi_2 \rangle\rangle$ が成り立つ. そこで $\alpha \in \mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ に対し, $(\Delta(E^p(M)))^*$ の元 l を, 任意の $\varphi \in E^p(M)$ に対し $l(\Delta\varphi) := \langle\langle \alpha, \varphi \rangle\rangle$ で定義することができる. 右辺は φ の取り方に依らず, $\Delta\varphi$ にのみよって定まる. $\varphi \in E^p(M)$ に対し, $\psi \in \mathcal{H}^p(M,g)^\perp$ で $\varphi - \psi \in \mathcal{H}^p(M,g)$ を満たすものが唯一つ存在することが (4.1) を参考にすることでわかる. このとき補題 4.6 を用いて, ある正数 $c > 0$ が存在して

$$|l(\Delta\varphi)| = |l(\Delta\psi)| = |\langle\langle \alpha, \psi \rangle\rangle| \leq \|\alpha\|\|\psi\| \leq c\|\alpha\|\|\Delta\psi\| = c\|\alpha\|\|\Delta\varphi\|$$

が成り立つことがわかる. よって $\gamma := c\|\alpha\|$ とおき, また $\varphi \in E^p(M)$ に対し $n(\varphi) := \|\varphi\|$ とおくと,

$$l(\Delta\varphi) \leq \gamma n(\Delta\varphi) \tag{4.3}$$

が成り立つ. また $\varphi, \psi \in E^p(M)$ に対し

$$n(\varphi + \psi) \leq n(\varphi) + n(\psi) \tag{4.4}$$

が成り立ち, また任意の $c \geq 0$ に対し

$$n(c\varphi) = cn(\varphi) \tag{4.5}$$

が成り立つ. Hahn-Banach の定理 ([1, p. 182]) によると, (4.4), (4.5) および (4.3) を満たす $E^p(M)$ 上の実数値関数 n および $(\Delta(E^p(M)))^*$ の元 l に対し, $E^p(M)^*$ の元 L で任意の $\varphi \in E^p(M)$ に対し $L(\Delta\varphi) = l(\Delta\varphi)$ および $L(\varphi) \leq \gamma n(\varphi)$ を満たすものが存在する. よって L は方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の弱解であることがわかる. よって定理 4.4 を用いて, この

方程式の解 $\omega \in E^p(M)$ が存在することがわかる．こうして $\alpha \in \Delta(E^p(M))$ がわかり，$\mathcal{H}^p(M,g)^\perp \subset \Delta(E^p(M))$ がわかる．以上から $\mathcal{H}^p(M,g)^\perp = \Delta(E^p(M))$ がわかり，従って

$$E^p(M) = \Delta(E^p(M)) \oplus \mathcal{H}^p(M,g)$$

を得る．

また $\Delta = \delta \circ d + d \circ \delta$ から，

$$\Delta(E^p(M)) \subset d(\delta(E^p(M))) + \delta(d(E^p(M)))$$

がわかる．また $d(\delta(E^p(M)))+\delta(d(E^p(M)))$ の各元は $E^p(M)$ の元 ω_1, ω_2 を用いて $d(\delta\omega_1)+\delta(d\omega_2)$ と表されるが，$\theta \in \mathcal{H}^p(M,g)$ に対し系 3.9 を用いて

$$\langle\langle d(\delta\omega_1) + \delta(d\omega_2), \theta\rangle\rangle = \langle\langle \delta\omega_1, \delta\theta\rangle\rangle + \langle\langle d\omega_2, d\theta\rangle\rangle = 0$$

がわかるので，

$$d(\delta\omega_1) + \delta(d\omega_2) \in \mathcal{H}^p(M,g)^\perp = \Delta(E^p(M))$$

を得る．よって

$$d(\delta(E^p(M))) + \delta(d(E^p(M))) \subset \Delta(E^p(M))$$

がわかり，従って

$$d(\delta(E^p(M))) + \delta(d(E^p(M))) = \Delta(E^p(M))$$

がわかる．また $\omega \in d(\delta(E^p(M))) \cap \delta(d(E^p(M)))$ に対し，$\omega \in d(\delta(E^p(M)))$ から $d\omega = 0$ がわかりまた $\omega \in \delta(d(E^p(M)))$ から $\delta\omega = 0$ がわかるので，系 3.9 から $\omega \in \mathcal{H}^p(M,g)$ がわかる．しかし $\Delta(E^p(M)) \cap \mathcal{H}^p(M,g) = \{0\}$ なので，$\omega = 0$ がわかり，従って $d(\delta(E^p(M))) \cap \delta(d(E^p(M))) = \{0\}$ がわかる．こうして

$$\Delta(E^p(M)) = d(\delta(E^p(M))) \oplus \delta(d(E^p(M)))$$

がわかり，命題 3.7 を用いて $d(\delta(E^p(M)))$ と $\delta(d(E^p(M)))$ は直交していることもわかる．同様に

$$\Delta(E^p(M)) = d(E^{p-1}(M)) \oplus \delta(E^{p+1}(M))$$

を得る．

4.2 トーラス上のベクトル値関数

m を自然数とする．$\boldsymbol{Z}^m$ の元 $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ に対し，$|\alpha| := (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2)^{1/2}$ とおく．α の全ての成分が 0 以上であるとき，$[\alpha] := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ とおく．$\boldsymbol{Z}^m$ の元

$\eta := (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ に対し, $\eta^\alpha := \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_m^{\alpha_m}$ とおく, 但し $0^0 := 1$ とする. $(x_1, \ldots, x_m)$ を $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な座標系とする. このとき $\boldsymbol{R}^m$ の各点の近傍上の滑らかな関数 f に対し,

$$D^\alpha f := \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^{[\alpha]} \frac{\partial^{[\alpha]} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

とおく.

$\boldsymbol{R}^m$ 上の滑らかな複素数値関数で, 各 x_i に関して周期 2π を持つものの全体からなる集合を $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m)$ で表す. また n を自然数とし, $\boldsymbol{R}^m$ から $\boldsymbol{C}^n$ への滑らかな写像で, 各 x_i に関して周期 2π を持つものの全体からなる集合を $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ で表す. $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^1) = \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m)$ が成り立ち, また各 $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ は $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m)$ の n 個の元 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ の組 $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ で表される. $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に対し,

$$\varphi \cdot \psi := \varphi_1 \bar{\psi}_1 + \cdots + \varphi_n \bar{\psi}_n, \qquad |\varphi| := (\varphi \cdot \varphi)^{1/2}$$

とおく. また $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle_0$ およびノルム $\|\cdot\|_0$ を

$$\langle \varphi, \psi \rangle_0 := \frac{1}{(2\pi)^m} \int_Q \varphi \cdot \psi dx, \qquad \|\varphi\|_0 := \langle \varphi, \varphi \rangle_0^{1/2}$$

で定める, 但し

$$Q := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid x_i \in (0, 2\pi),\ i = 1, \ldots, m\}$$

および $dx := dx_1 \cdots dx_m$ である. 各 $\xi \in \boldsymbol{Z}^m$ に対し, $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m)$ の元 e_ξ を $e_\xi(x) := e^{\sqrt{-1}\xi \cdot x}$ とおく, 但し $x := (x_1, \ldots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m$ である. そして $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に対し,

$$\varphi_\xi := \frac{1}{(2\pi)^m} \left(\int_Q \varphi_1 \bar{e}_\xi dx, \ldots, \int_Q \varphi_n \bar{e}_\xi dx \right)$$

とおく. このとき $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \varphi_\xi e_\xi$ を φ の Fourier 級数 (*Fourier series*) という.

Q 上可測な複素数値関数で絶対値の 2 乗が Lebesgue 積分可能であるものの全体からなる集合を $L^2(Q)$ で表す. このとき $n = 1$ に対する $\langle\ ,\ \rangle_0$ は $L^2(Q)$ の内積であり, $\{e_\xi \mid \xi \in \boldsymbol{Z}^m\}$ は内積 $\langle\ ,\ \rangle_0$ に関して $L^2(Q)$ の完全正規直交系をなす (例えば [1] の第 4 章を見ること). 従って, $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m) \subset L^2(Q)$ と考えるとき, $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \varphi_\xi e_\xi$ はノルム $\|\cdot\|_0$ に関して φ に収束することがわかる. さらに次の命題が成り立つ.

命題 4.7 *$\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の Fourier 級数 $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \varphi_\xi e_\xi$ は φ に一様収束する.*

証明　$\xi \in \boldsymbol{Z}^m$ に対し, 各成分 ξ_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ が零ではないとする．このとき

$$\begin{aligned}
&\int_Q \varphi_i \bar{e}_\xi dx \\
&= \int_0^{2\pi} dx_1 \cdots \int_0^{2\pi} dx_{m-2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{-1}}{\xi_m} \left(\left[\varphi_i(x) e^{-\sqrt{-1}\xi \cdot x} \right]_{x_m=0}^{x_m=2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m}(x) \bar{e}_\xi(x) dx_m \right) dx_{m-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-1}\xi_m} \int_Q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} \bar{e}_\xi dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．同様の議論によって

$$\int_Q \varphi_i \bar{e}_\xi dx = \frac{1}{(\sqrt{-1})^m \xi_1 \ldots \xi_m} \int_Q \frac{\partial^m \varphi_i}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} \bar{e}_\xi dx$$

を得ることができ, さらに

$$\int_Q \varphi_i \bar{e}_\xi dx = \frac{1}{(\sqrt{-1})^{2km} (\xi_1 \ldots \xi_m)^{2k}} \int_Q \frac{\partial^{2km} \varphi_i}{\partial x_1^{2k} \ldots \partial x_m^{2k}} \bar{e}_\xi dx$$

を得る, 但し $k \in \boldsymbol{N}$ である．よって $k \in \boldsymbol{N}$, m, φ およびその偏導関数にのみ依存する正定数 $c_k' > 0$ が存在して, 任意の $\xi \in (\boldsymbol{Z} \setminus \{0\})^m$ に対し

$$|\varphi_\xi| \leq \frac{c_k'}{(\xi_1 \ldots \xi_m)^{2k}} \tag{4.6}$$

が成り立つ．ここである正定数 $c_k'' > 0$ が

$$(1 + |\xi|^2)^k = \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} |\xi|^{2l} \leq c_k'' (\xi_1 \ldots \xi_m)^{2k} \tag{4.7}$$

を満たすので, (4.6) および (4.7) からある正定数 $c_k > 0$ が存在して任意の $\xi \in (\boldsymbol{Z} \setminus \{0\})^m$ に対し

$$|\varphi_\xi| \leq \frac{c_k}{(1 + |\xi|^2)^k} \tag{4.8}$$

が成り立つことがわかる．(4.8) は ξ の成分の中に 0 のものがある場合にも成り立つ: 例えば $\xi_m = 0$ ならば, (4.6) の右辺の分母や (4.7) の右辺に ξ_m が現れないものが成り立つ．ここで, 後述の補題 4.8 から $k \geq [m/2] + 1$ ならば $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} 1/(1 + |\xi|^2)^k$ は収束することがわかるので, (4.8) から $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \varphi_\xi e_\xi$ はある $\boldsymbol{C}^n$-値連続関数に一様収束することがわかる．よって, $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \varphi_\xi e_\xi$ はノルム $\| \cdot \|_0$ に関して φ に収束することおよび Q の閉包がコンパクトであることから, $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \varphi_\xi e_\xi$ は φ に一様収束することがわかる．　□

補題 4.8　自然数 k が $k \geq [m/2] + 1$ を満たすならば, $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} 1/(1 + |\xi|^2)^k$ は収束する, 但し $[m/2]$ は $m/2$ を超えない整数の最大値である．

証明　自然数 $l \in \boldsymbol{N}$ に対し, $\boldsymbol{Z}^m$ の部分集合 s_l を

$$s_l := \left\{ \xi \in \boldsymbol{Z}^m \;\middle|\; \max_{1 \le i \le m} |\xi_i| = l \right\}$$

で定める．このとき s_l の元の数は $2m(2l+1)^{m-1}$ 以下である．よって

$$\sum_{\xi \in s_l} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^k} \le \frac{2m(2l+1)^{m-1}}{(1+l^2)^k} \le 2m \times 4^{m-1} \frac{l^{m-1}}{l^{2k}} = \frac{c_m}{l^{1+2k-m}}$$

が成り立つ, 但し $c_m := 2m \times 4^{m-1}$ である．よって

$$\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^k} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\xi \in s_l} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^k} \le 1 + c_m \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{1+2k-m}}$$

が成り立つ．よって $1+2k-m > 1$ ならば, つまり $k \ge [m/2]+1$ ならば, $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} 1/(1+|\xi|^2)^k$ は収束する．　□

系 4.9 $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に対し, $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \xi^\alpha \varphi_\xi e_\xi$ は $D^\alpha \varphi$ に一様収束する．

命題 4.7 から, Parseval の等式

$$\|\varphi\|_0^2 = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} |\varphi_\xi|^2 \tag{4.9}$$

を得る．一般に, 系 4.9 から

$$\|D^\alpha \varphi\|_0^2 = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \xi^{2\alpha} |\varphi_\xi|^2 \tag{4.10}$$

を得る．

4.3　Sobolev 空間

まず

$$\mathcal{S} := \{\{u_\xi\}_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \mid u_\xi \in \boldsymbol{C}^n\}$$

とおく．$\mathcal{S}$ を複素ベクトル空間とみなすことができる．各 $s \in \boldsymbol{Z}$ に対し, Sobolev 空間 (*Sobolev space*) H_s とは, 次のように定義される $\mathcal{S}$ の部分集合である:

$$H_s := \left\{ \{u_\xi\} \in \mathcal{S} \;\middle|\; \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} (1+|\xi|^2)^s |u_\xi|^2 < \infty \right\}.$$

H_s は $\mathcal{S}$ の部分空間である: Schwarz の不等式を用いて, H_s の二つの元 $u = \{u_\xi\}$, $v = \{v_\xi\}$ に対し $\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} (1+|\xi|^2)^s u_\xi \cdot v_\xi$ は収束することがわかる．以下, この値を $\langle u, v \rangle_s$ で表す．

$\langle\ ,\ \rangle_s$ は H_s の内積である. 従って $u \in H_s$ に対し $\|u\|_s := \langle u, u\rangle_s^{1/2}$ とおくと, $\|\cdot\|_s$ は H_s のノルムである. このノルムに関して H_s は完備であり, 従って H_s は Hilbert 空間である. 整数 s, t が $s < t$ を満たすならば, $u \in H_t$ に対し $u \in H_s$ および $\|u\|_s \le \|u\|_t$ が成り立ち, 特に $H_t \subset H_s$ が成り立つ.

命題 4.7 に注意して, $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に対し $\mathcal{S}$ の元 $\{\varphi_\xi\}$ を対応させる. $\mathcal{S}$ の元である $\{\varphi_\xi\}$ をやはり φ で表す. (4.10) を用いて, 各非負整数 s に対し

$$c_1\|\varphi\|_s^2 \le \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha\varphi\|_0^2 \le c_2\|\varphi\|_s^2$$

を満たす正数 c_1, c_2 で $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に依らないものが存在することがわかる. よって $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ を $\mathcal{S}$ の元とみなしたとき, $\varphi \in H_s$ が成り立つ. そして $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ は H_s の稠密集合である. (4.9) から, $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の元としての φ に対し前節で定義された $\|\varphi\|_0$ と H_0 の元としての φ に対する $\|\varphi\|_0$ は等しいことがわかる. 従って $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の二つの元 φ, ψ に対し前節で定義された $\langle\varphi, \psi\rangle_0$ と H_0 の元である φ, ψ に対する $\langle\varphi, \psi\rangle_0$ は等しい. また系 4.9 に注意して, $D^\alpha\varphi$ に対し $\mathcal{S}$ の元 $\{\xi^\alpha\varphi_\xi\}$ を対応させる. $\xi^{2\alpha} \le (1+|\xi|^2)^{[\alpha]}$ が成り立つので, 任意の $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に対し

$$\|D^\alpha\varphi\|_s \le \|\varphi\|_{s+[\alpha]} \tag{4.11}$$

が成り立つ.

次に, $\mathcal{S}$ の元 $u = \{u_\xi\}$ に対して定まる形式的級数 $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} u_\xi e_\xi$ について, 収束するかどうか, また収束する場合に連続もしくは微分可能かどうかを調べる.

命題 4.10 (Sobolev の補題) s を $[m/2]+1$ 以上の整数とし, u を H_s の元とする. このとき $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} u_\xi e_\xi$ は一様収束し, 従って Q 上のある $\boldsymbol{C}^n$-値連続関数を与える.

証明　N を自然数とする. このとき Schwarz の不等式を用いて,

$$\begin{aligned}\sum_{|\xi|<N} |u_\xi| &= \sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}|u_\xi| \\ &\le \left(\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{-s}\right)^{1/2} \left(\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{s}|u_\xi|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

を得る. よって $s \ge [m/2]+1$, 補題 4.8 および $u \in H_s$ から, $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} |u_\xi|$ が収束することがわかり, 従って $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} u_\xi e_\xi$ は一様収束する. □

系 4.11 l を非負整数とする. s を $[m/2]+1+l$ 以上の整数とし, u を H_s の元とする. このとき $[\alpha] \le l$ を満たす $\alpha \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})^m$ に対し, $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} \xi^\alpha u_\xi e_\xi$ は一様収束し, 従って $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} u_\xi e_\xi$ は Q 上のある $\boldsymbol{C}^n$-値 C^l 級関数を与える.

注意 4.12 $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n) \subsetneqq \bigcap_{s\in\mathbf{Z}} H_s$ がわかる.

系 4.11 から, $\mathcal{S}$ の元 $u = \{u_\xi\}$ に対し $u \in H_s$ を満たす整数 s としてより大きいものを取ることができれば, それに応じて級数 $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} u_\xi e_\xi$ が与える関数をより多く微分できることがわかる.

それでは, 与えられた $u \in H_s$ がどのような条件を満たすときに, 我々は $u \in H_{s+1}$ を導くことができるだろうか？そのような条件の一つを以下に挙げる. $u = \{u_\xi\} \in \mathcal{S}$ および $h \in \boldsymbol{R}^m$ に対し, $\mathcal{S}$ の元 $T_h(u)$ を $T_h(u) := \{e^{\sqrt{-1}h\cdot\xi}u_\xi\}$ で定める. $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ を $\mathcal{S}$ の元 $\{\varphi_\xi\}$ とみなしたとき, $T_h(\varphi) = \{e^{\sqrt{-1}h\cdot\xi}\varphi_\xi\}$ が成り立つが, $\boldsymbol{R}^m$ から $\boldsymbol{R}^m$ への写像 t_h を $t_h(x) := x + h$ で定めると, $\{e^{\sqrt{-1}h\cdot\xi}\varphi_\xi\}$ は t_h と φ の合成である $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の元 $\varphi \circ t_h$ を $\mathcal{S}$ の元とみなしたものである. $u = \{u_\xi\} \in \mathcal{S}$ の $h \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ による差分商 (*difference quotient*) u^h とは,

$$u^h := \frac{1}{|h|}(T_h(u) - u) = \left\{ \frac{e^{\sqrt{-1}h\cdot\xi} - 1}{|h|} u_\xi \right\}$$

によって与えられる $\mathcal{S}$ の元である. $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ を $\mathcal{S}$ の元 $\{\varphi_\xi\}$ とみなしたとき, φ^h は $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の元である $(\varphi \circ t_h - \varphi)/|h|$ を $\mathcal{S}$ の元とみなしたものである.

命題 4.13 $u \in H_s$ および $h \in \boldsymbol{R}^m$ に対し, $T_h(u) \in H_s$ および $\|T_h(u)\|_s = \|u\|_s$ が成り立ち, さらに $h \neq \boldsymbol{0}$ ならば, $u^h \in H_s$ および $\|u^h\|_{s-1} \leq \|u\|_s$ が成り立つ.

証明　$T_h(u)$ の定義から, $u \in H_s$ に対し $T_h(u) \in H_s$ および $\|T_h(u)\|_s = \|u\|_s$ がわかる. また $h \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し

$$\|u^h\|_s \leq \frac{1}{|h|}(\|T_h(u)\|_s + \|u\|_s)$$

が成り立つので, $u \in H_s$ に対し $u^h \in H_s$ がわかる. また

$$\left| \frac{e^{\sqrt{-1}h\cdot\xi} - 1}{|h|} \right|^2 = \frac{4\sin^2(h\cdot\xi/2)}{|h|^2} \leq \frac{(h\cdot\xi)^2}{|h|^2} \leq 1 + |\xi|^2$$

が成り立つので, $u \in H_s$ に対し

$$\|u^h\|_{s-1}^2 = \sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} (1 + |\xi|^2)^{s-1} \left| \frac{e^{\sqrt{-1}h\cdot\xi} - 1}{|h|} \right|^2 |u_\xi|^2 \leq \sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 = \|u\|_s^2$$

がわかり, 従って $\|u^h\|_{s-1} \leq \|u\|_s$ を得る. □

従って $u \in H_s$ に対し, $\{\|u^h\|_{s-1} \mid h \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}\}$ は有界であることがわかる. そして次の命題が成り立つ.

命題 4.14 $u \in H_s$ に対しある正数 $c > 0$ が存在して, 任意の $h \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対し $\|u^h\|_s \leq c$ が成り立つとする. このとき $u \in H_{s+1}$ が成り立つ.

証明　$u \in H_s$ および自然数 N に対し, H_s の元 u_N を

$$(u_N)_\xi = \begin{cases} u_\xi & (|\xi| < N) \\ 0 & (|\xi| \geq N) \end{cases}$$

で定める. $e_1, e_2, \ldots, e_m$ を $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な正規直交基底とする. このとき $h := te_i$ に対し,

$$\left| \frac{e^{\sqrt{-1}h\cdot\xi} - 1}{|h|} \right|^2 \longrightarrow \xi_i^2 \quad (t \longrightarrow 0)$$

が成り立つ. よってある正数 $c > 0$ が存在して任意の $h \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対し $\|u^h\|_s \leq c$ が成り立つならば, $i = 1, 2, \ldots, m$ に対し

$$\sum_{|\xi|<N} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 \xi_i^2 \leq c^2$$

が成り立つ. よって

$$\|u_N\|_{s+1}^2 = \sum_{|\xi|<N} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 (1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2) \leq \|u\|_s^2 + mc^2$$

がわかり, 従って $u \in H_{s+1}$ を得る. □

注意 4.15 命題 4.14 から, $u \in H_s$ に対し $\{\|u^h\|_s \mid h \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}\}$ が有界であるならば $u \in H_{s+1}$ が成り立つことがわかる. 次節において, H_s の元に作用する 2 階の楕円型線形作用素を定義する. そして 2 階の楕円型線形作用素 L および H_t の元 v に対し「正則性定理」, つまり $u \in H_s$ が $Lu = v$ を満たすならば $u \in H_{t+2}$ が成り立つことが示される. これを示すために命題 4.14 が用いられる. 後で定理 4.4 の証明について説明するが, 向きづけられた Riemann 多様体 M 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ が 2 階の楕円型線形作用素であることがわかる. また $v \in H_t$ は $E^p(M)$ の元 α に相当し, よって t を任意に大きくできることがわかる. また $u \in H_s$ は方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の弱解 $l \in E^p(M)^*$ に相当することがわかる.

後で定理 4.5 の証明について説明する際に, 次の命題を必要とする.

命題 4.16 (Rellich の補題) t を整数とし, $\{u^i\}$ を H_t の有界な点列とする. このとき整数 s が $s < t$ を満たすならば, H_s の点列である $\{u^i\}$ のある部分列が H_s のある元に収束する.

証明　$\|u^i\|_t \leq 1$ を仮定してよい．N を自然数とする．このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\|u^i - u^j\|_s^2 &= \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} (1+|\xi|^2)^s |u_\xi^i - u_\xi^j|^2 \\ &= \sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{s-t}(1+|\xi|^2)^t |u_\xi^i - u_\xi^j|^2 \\ &\quad + \sum_{|\xi|\geq N} (1+|\xi|^2)^{s-t}(1+|\xi|^2)^t |u_\xi^i - u_\xi^j|^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

$\xi \in \boldsymbol{Z}^m$ を一つ取り固定するとき，$\boldsymbol{C}^n$ の点列 $\{(1+|\xi|^2)^{t/2}u_\xi^i\}$ は有界なので，この点列は収束する部分列を持つ．よって $\{(1+|\xi|^2)^{t/2}u_\xi^i\}$ の部分列で，$|\xi| < N$ を満たす任意の $\xi \in \boldsymbol{Z}^m$ に対し収束するものが存在する．この部分列を $\{(1+|\xi|^2)^{t/2}u_\xi^{i_k}\}$ で表す．これは Cauchy 列なので，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある $k_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して，$k, l \in \boldsymbol{N}$ が $k > k_0$, $l > k_0$ を満たすならば

$$(1+|\xi|^2)^t |u_\xi^{i_k} - u_\xi^{i_l}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2n_0}$$

が成り立つ，但し $\xi \in \boldsymbol{Z}^m$ は $|\xi| < N$ を満たし，n_0 は $\{\xi \in \boldsymbol{Z}^m \mid |\xi| < N\}$ の元の数である．従って $s < t$ に注意することで，(4.12) の右辺第 1 項に関連して

$$\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{s-t}(1+|\xi|^2)^t |u_\xi^{i_k} - u_\xi^{i_l}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{4.13}$$

を得る．また $|\xi| \geq N$ を満たす $\xi \in \boldsymbol{Z}^m$ に対し $(1+|\xi|^2)^{s-t} < N^{2(s-t)}$ が成り立ち，また $|u_\xi^i - u_\xi^j|^2 \leq 2(|u_\xi^i|^2 + |u_\xi^j|^2)$ が成り立つので，(4.12) の右辺第 2 項について

$$\begin{aligned}&\sum_{|\xi|\geq N} (1+|\xi|^2)^{s-t}(1+|\xi|^2)^t |u_\xi^i - u_\xi^j|^2 \\ &< N^{2(s-t)} \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} (1+|\xi|^2)^t \times 2(|u_\xi^i|^2 + |u_\xi^j|^2) \\ &\leq 4N^{2(s-t)}\end{aligned}$$

を得る．よって自然数 N として $4N^{2(s-t)} < \varepsilon^2/2$ を満たすものをとると，

$$\sum_{|\xi|\geq N} (1+|\xi|^2)^{s-t}(1+|\xi|^2)^t |u_\xi^i - u_\xi^j|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{4.14}$$

を得る．(4.12), (4.13) および (4.14) から，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対しある $k_0 \in \boldsymbol{N}$ が存在して，$k, l \in \boldsymbol{N}$ が $k > k_0$, $l > k_0$ を満たすならば

$$\|u^{i_k} - u^{i_l}\|_s^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

が成り立つことがわかり，従って $\{u^i\}$ の部分列 $\{u^{i_k}\}$ は H_s の Cauchy 列であることがわかる．H_s はノルム $\|\cdot\|_s$ に関して完備であるので，$\{u^{i_k}\}$ は H_s のある元に収束する．□

4.4 楕円型線形作用素

$\boldsymbol{R}^m$ の開集合 O 上の全ての $\boldsymbol{C}^n$ 値 C^∞ 級関数からなる集合を $C^\infty(O,\boldsymbol{C}^n)$ で表す．r を非負整数とする．以下においては, $C^\infty(O,\boldsymbol{C}^n)$ 上の r 階の線形作用素 L とは $L := \sum_{k=0}^{r} P_k(D)$ と表されるものであるとする, 但し $P_k(D)$ は (i,j) 成分 $p_{k,ij}$ が $p_{k,ij} := \sum_{[\alpha]=k} a_{\alpha,ij} D^\alpha$ と表される n 次正方行列でありまた $a_{\alpha,ij} \in C^\infty(O,\boldsymbol{C})$ である．全ての $a_{\alpha,ij}$ が $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m)$ の元であるとき, L を $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ 上の r 階の線形作用素という.

$C^\infty(O,\boldsymbol{C}^n)$ 上の r 階の線形作用素 L および $C^\infty(O,\boldsymbol{C}^n)$ の元 $\varphi := (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ に対し, $C^\infty(O,\boldsymbol{C}^n)$ の元 $L\varphi$ を $L\varphi := \sum_{k=0}^{r} P_k(D)\varphi$ で定める, 但し

$$P_k(D)\varphi := \left(\sum_{j=1}^{n} p_{k,1j}\varphi_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} p_{k,nj}\varphi_j \right)$$

である.

命題 4.17 L を $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ 上の r 階の線形作用素とし, s を整数とする．このとき L, s, m および n にのみ依存する正の定数 c, c' が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ に対し $\|L\varphi\|_s \le c\|\varphi\|_{s+r} + c'\|\varphi\|_{s+r-1}$ が成り立つ.

注意 4.18 $\|\varphi\|_{s+r-1} \le \|\varphi\|_{s+r}$ なので, L, s, m および n にのみ依存する正の定数 $c_0 > 0$ が存在して任意の $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ に対し $\|L\varphi\|_s \le c_0\|\varphi\|_{s+r}$ が成り立つ. $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ は H_{s+r} の稠密集合なので, 各 $u \in H_{s+r}$ に対し $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ の点列 $\{\varphi^i\}$ で H_{s+r} において u に収束するものが存在する．$\{\varphi^i\}$ は H_{s+r} の Cauchy 列であるので, $\|L\varphi\|_s \le c_0\|\varphi\|_{s+r}$ から $\{L\varphi^i\}$ は H_s の Cauchy 列であることがわかる．H_s は完備なので, $\{L\varphi^i\}$ は H_s のある元に収束する．この元を Lu で表す．こうして L を H_{s+r} から H_s への写像とみなすことができる．そして $L : H_{s+r} \longrightarrow H_s$ が線形であることはすぐにわかり, さらに $\|L\varphi\|_s \le c_0\|\varphi\|_{s+r}$ から L が有界作用素であることもわかる.

命題 4.17 を証明するために, 次の補題を必要とする.

補題 4.19 f を $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m)$ の元とし, s を整数とする．このとき m, s に依存する正定数 $c(m,s)$ および m, s, f に依存する正定数 $c'(m,s,f)$ が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ に対し

$$\|f\varphi\|_s \le c(m,s)\|f\|_\infty\|\varphi\|_s + c'(m,s,f)\|\varphi\|_{s-1}$$

が成り立つ, 但し $\|f\|_\infty := \sup_{x\in Q} |f(x)|$ である.

補題 4.19 の証明は [5, pp. 234–235] にある.

命題 4.17 の証明　$n=1$ とする．このとき $P_k(D)$ は $P_k(D)=\sum_{[\alpha]=k} a_\alpha D^\alpha$ と表される．補題 4.19 を用いて, m, s に依存する正定数 c および m, s, a_α に依存する正定数 c' が存在して, 任意の $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m)$ に対し

$$\|L\varphi\|_s \leq \sum_{[\alpha]=0}^{r} \|a_\alpha D^\alpha \varphi\|_s \leq \sum_{[\alpha]=0}^{r} (c\|a_\alpha\|_\infty \|D^\alpha \varphi\|_s + c'\|D^\alpha\varphi\|_{s-1})$$

が成り立つことがわかる．よって (4.11) を用いて, m, s, a_α に依存する正定数 c'' が存在して

$$\|L\varphi\|_s \leq \left(c \sum_{[\alpha]=r} \|a_\alpha\|_\infty \right) \|\varphi\|_{s+r} + c''\|\varphi\|_{s+r-1}$$

が成り立つことがわかり, $n=1$ に対して命題 4.17 を得る．一般の $n \in \boldsymbol{N}$ に対しても, ある正定数 c_0 が存在して任意の $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に対し

$$\|P_k(D)\varphi\|_s \leq c_0 \sum_{i,j=1}^{n} \|p_{k,ij}\varphi_j\|_s$$

が成り立つことを用いて, 命題 4.17 を得る．　□

$L=\sum_{k=0}^r P_k(D)$ を $C^\infty(O, \boldsymbol{C}^n)$ 上の r 階の線形作用素とする．$\xi \in \boldsymbol{R}^m$ に対し, $P_k(\xi)$ は $P_k(D)$ における D^α を ξ^α に置き換えたものを表すとする．L が O 上で楕円型 (*elliptic*) であるとは, 任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し O の任意の点で $P_r(\xi)$ が正則行列であるときにいう．

命題 4.20 *L を $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ 上の r 階の楕円型線形作用素とし, s を整数とする．このとき正数 $c>0$ が存在して, 任意の $u \in H_{s+r}$ に対し*

$$\|u\|_{s+r} \leq c(\|Lu\|_s + \|u\|_s) \tag{4.15}$$

が成り立つ．

ここでは $P_0(D), P_1(D), \ldots, P_{r-1}(D)$ が恒等的に零行列でありかつ $P_r(D)$ の成分に現れる関数 $a_{\alpha,ij}$ が定数である場合に命題 4.20 の証明を与える (一般の場合の証明は [5, pp. 241–242] にある)．$P_r(\xi)$ が正則行列であるので, 任意の $a \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し $|P_r(\xi)a|>0$ が成り立つ．よってある正定数 $c'>0$ が存在して, 任意の $\xi \in \boldsymbol{R}^m$ および任意の $a \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $|P_r(\xi)a|^2 \geq c'|\xi|^{2r}|a|^2$ が成り立つ．よって $L=P_r(D)$ および $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に対し

$(L\varphi)_\xi = P_r(\xi)\varphi_\xi$ が成り立つことを用いて,

$$\begin{aligned}\|L\varphi\|_s^2 &= \sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m}(1+|\xi|^2)^s(L\varphi)_\xi\cdot\overline{(L\varphi)_\xi}\\ &= \sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m}(1+|\xi|^2)^s|P_r(\xi)\varphi_\xi|^2\\ &\geq c'\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m}(1+|\xi|^2)^s|\xi|^{2r}|\varphi_\xi|^2\end{aligned}$$

がわかる．よって

$$\begin{aligned}(\|L\varphi\|_s+\|\varphi\|_s)^2 &\geq \|L\varphi\|_s^2+\|\varphi\|_s^2\\ &\geq c'\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m}|\varphi_\xi|^2|\xi|^{2r}(1+|\xi|^2)^s+\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m}|\varphi_\xi|^2(1+|\xi|^2)^s\\ &= \sum_{\xi\in\mathbf{Z}^m}|\varphi_\xi|^2(1+|\xi|^2)^s(1+c'|\xi|^{2r})\end{aligned}\tag{4.16}$$

が成り立つ．ここで正数 $c''>0$ が存在して任意の $\xi\in\boldsymbol{Z}^m$ に対し

$$1+c'|\xi|^{2r}\geq c''(1+|\xi|^2)^r\tag{4.17}$$

が成り立つので, (4.16) および (4.17) を用いて

$$(\|L\varphi\|_s+\|\varphi\|_s)^2\geq c''\|\varphi\|_{s+r}^2$$

を得る．よって正数 $c:=\sqrt{1/c''}$ に対し,

$$\|\varphi\|_{s+r}\leq c(\|L\varphi\|_s+\|\varphi\|_s)\tag{4.18}$$

を得る．$\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ の点列 $\{\varphi^i\}$ が H_{s+r} において $u\in H_{s+r}$ に収束するとする．このとき $\|\varphi^i-u\|_s\leq\|\varphi^i-u\|_{s+r}$ から, $\{\varphi^i\}$ は H_s においても u に収束することがわかる．また L は H_{s+r} から H_s への有界作用素であるので, H_s において $\{L\varphi^i\}$ は Lu に収束する．よって $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ は H_{s+r} の稠密集合であることおよび (4.18) を用いて, 任意の $u\in H_{s+r}$ に対し (4.15) を得る.

命題 4.20 を用いて, 次の「正則性定理」を示すことができる.

定理 4.21 (正則性定理) r を自然数とし, L を $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ 上の r 階の楕円型線形作用素とする．s, t を整数とし, $u\in H_s$ および $v\in H_t$ は $Lu=v$ を満たすとする．このとき $u\in H_{t+r}$ が成り立つ.

証明　まず, 自然数 $\sigma\in\boldsymbol{N}$ に対し $H_s\subset H_{s-\sigma}$ が成り立つので, $s<t+r$ を仮定してよい．このとき $u\in H_s$ および $v\in H_{s-r+1}$ が $Lu=v$ を満たすならば $u\in H_{s+1}$ が成

り立つことを示すことによって, 定理 4.21 を証明することができる. r 階の楕円型線形作用素 L が $L=\sum_{k=0}^{r}P_k(D)$ と表されているとする, 但し $P_k(D)$ は (i,j) 成分 $p_{k,ij}$ が $p_{k,ij}:=\sum_{[\alpha]=k}a_{\alpha,ij}D^{\alpha}$ と表される n 次正方行列でありまた $a_{\alpha,ij}\in\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m)$ である. このとき各 $h\in\boldsymbol{R}^m\setminus\{\mathbf{0}\}$ に対し, r 階の線形作用素 L^h を $L^h:=\sum_{k=0}^{r}P_k(D)^h$ で定める, 但し $P_k(D)^h$ は (i,j) 成分 $p_{k,ij}^h$ が $p_{k,ij}^h:=\sum_{[\alpha]=k}a_{\alpha,ij}^hD^{\alpha}$ と表される n 次正方行列である. このとき $\varphi\in\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ に対し

$$
\begin{aligned}
L(\varphi^h)&=\frac{1}{|h|}(L(\varphi\circ t_h)-L\varphi),\\
(L\varphi)^h&=\frac{1}{|h|}((L\varphi)\circ t_h-L\varphi),\\
L^h(T_h\varphi)&=\frac{1}{|h|}((L\circ t_h)(\varphi\circ t_h)-L(\varphi\circ t_h))
\end{aligned}
$$

が成り立つので,

$$
L(\varphi^h)=(L\varphi)^h-L^h(T_h\varphi) \tag{4.19}
$$

が成り立つ. $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{C}^n)$ は H_s の稠密集合であり, $L:H_s\longrightarrow H_{s-r}$, $L^h:H_s\longrightarrow H_{s-r}$ は有界作用素であるので, (4.19) から任意の $u\in H_s$ に対し

$$
L(u^h)=(Lu)^h-L^h(T_hu) \tag{4.20}
$$

を得る. よって命題 4.20 および (4.20) を用いて, ある正数 $c>0$ が存在して任意の $u\in H_s$ に対し

$$
\begin{aligned}
\|u^h\|_s&\le c(\|L(u^h)\|_{s-r}+\|u^h\|_{s-r})\\
&\le c(\|(Lu)^h\|_{s-r}+\|L^h(T_hu)\|_{s-r}+\|u^h\|_{s-r})
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

が成り立つことがわかる. ここで命題 4.13 を用いて, (4.21) の右辺第 1 項および第 3 項について

$$
\|(Lu)^h\|_{s-r}=\|v^h\|_{s-r}\le\|v\|_{s-r+1},\qquad \|u^h\|_{s-r}\le\|u\|_{s-r+1}\le\|u\|_s
$$

がわかる. また命題 4.13 および L^h が H_s から H_{s-r} への有界線形作用素であることを用いて, ある正定数 c' が存在して $\|L^h(T_hu)\|_{s-r}\le c'\|u\|_s$ が成り立つことがわかる. よって

$$
\|u^h\|_s\le c\|v\|_{s-r+1}+c(c'+1)\|u\|_s \tag{4.22}
$$

が成り立つ. (4.22) の右辺は $h\in\boldsymbol{R}^m\setminus\{\mathbf{0}\}$ には依らないので, 命題 4.14 から $u\in H_{s+1}$ がわかる. □

4.5　定理 4.4 および定理 4.5 の証明

M を向きづけられたコンパクトな m 次元 Riemann 多様体とする. M の有限個の開集合からなる開被覆 $\{U_k\}_{k=1}^N$ で, 各 U_k はある座標近傍であるものが存在する. さらに $\{U_k\}$ に従属した単位の分割 $\{f_k\}$ が存在する. U_k は 4.2 節で定義した $\boldsymbol{R}^m$ の領域 Q と同相であると仮定してよい. このとき $E^p(M)$ の元 ω に対し, $E^p(M)$ の元 $f_k\omega$ の台は U_k に含まれる. M 上の体積要素である $*1$ を各 U_k 上 $*1 = e^{2\phi}dx_k^1 \wedge \cdots \wedge dx_k^m$ と表すことができる, 但し ϕ は U_k 上の滑らかな関数であり, $(x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^m)$ は U_k における局所座標系である. $\partial/\partial x_k^1, \partial/\partial x_k^2, \ldots, \partial/\partial x_k^m$ は U_k の各点の接空間の基底を構成する. よって U_k 上のこれらのベクトル場に Gram-Schmidt の直交化法を適用することで, U_k 上の m 個のベクトル場 $e_1, e_2, \ldots, e_m$ で U_k の各点の接空間の正規直交基底を構成するものを得ることができる. $e^1, e^2, \ldots, e^m$ は U_k 上の m 個の 1 次微分形式で, U_k の各点で $e_1, e_2, \ldots, e_m$ の双対基底を構成するとする. $\omega \in E^p(M)$ を

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m} \omega_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}$$

と表すとき, 台が U_k に含まれる $m!/p!(m-p)!$ 個の関数 $e^{\phi} f_k \omega_{i_1 \ldots i_p}$ $(1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m)$ を並べる順序を一つ決めることで, Q 上の $\boldsymbol{R}^n$ 値関数 (但し $n := m!/p!(m-p)!$) を得ることができ, さらにこれを $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の元とみなすことができる. $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の元を H_s の元とみなすことができるので, 以上のようにして $f_k\omega$ を H_s の元とみなす. このとき ω, $\omega' \in E^p(M)$ に対し,

$$\langle\langle f_k\omega, f_k\omega' \rangle\rangle = (2\pi)^m \langle f_k\omega, f_k\omega' \rangle_0$$

が成り立つ.

Δ を M の計量に関する M 上の Laplace-Beltrami 作用素とする. このとき M の各点の座標近傍 U に対し, Δ は $C^\infty(U, \boldsymbol{C}^n)$ 上の 2 階の線形作用素とみなされる.

命題 4.22 Δ は U 上で楕円型である.

証明　$\Delta := P_2(D) + P_1(D) + P_0(D)$ と表す. U の 1 点 a に対し, f は M 上の滑らかな関数で $f(a) = 0$ および $df_a \neq 0$ を満たすとし, ω は $E^p(M)$ の元で $\omega_a \neq 0$ を満たすとする. このとき $\xi_i := (\partial f/\partial x^i)(a)$ とおくと, a で $\Delta(f^2\omega)$ は $-2P_2(\xi)\omega_a$ と表される. 従って M の任意の点 a および 上の条件を満たす任意の f および ω に対し $(\Delta(f^2\omega))_a \neq 0$ を示すことができれば, Δ が楕円型であることを示すことができる. $\Delta = d \circ \delta + \delta \circ d$ から,

$$\Delta = (-1)^{m(p+1)+1} d \circ * \circ d \circ * + (-1)^{mp+1} * \circ d \circ * \circ d$$

がわかる. よって点 a で

$$\Delta(f^2\omega) = -2((-1)^{m(p-1)} df_a \circ * \circ df_a \circ * + (-1)^{mp} * \circ df_a \circ * \circ df_a)(\omega)$$

が成り立つ, 但し df_a は $\bigwedge^p T_a^*(M)$ から $\bigwedge^{p+1} T_a^*(M)$ への線形写像で, $\theta \in \bigwedge^p T_a^*(M)$ に対し $df_a(\theta) := df_a \wedge \theta$ で定義されるものである. よって $\theta \in \bigwedge^p T_a^*(M)$, $\theta' \in \bigwedge^{p+1} T_a^*(M)$ に対し

$$q^{p+1,*}(df_a(\theta), \theta') = (-1)^{mp} q^{p,*}(\theta,\ * \circ df_a \circ *(\theta'))$$

が成り立つことを用いて,

$$\begin{aligned} q^{p,*}((\Delta(f^2\omega))_a, \omega_a) = -2(&q^{p-1,*}((* \circ df_a \circ *)(\omega_a),\ (* \circ df_a \circ *)(\omega_a)) \\ &+ q^{p+1,*}(df_a(\omega_a), df_a(\omega_a))) \end{aligned} \tag{4.23}$$

を得る. 従って (4.23) から, $df_a(\omega_a) \neq 0$ ならば $(\Delta(f^2\omega))_a \neq 0$ がわかる. $df_a(\omega_a) = 0$ を仮定する. このとき ω_a は $\bigwedge^{p-1} T_a^*(M)$ のある元の df_a による像と表され, 従って $(* \circ df_a \circ *)(\omega_a) \neq 0$ が成り立つ. よって (4.23) から, $(\Delta(f^2\omega))_a \neq 0$ がわかる. こうして命題 4.22 を得る. □

命題 4.23 α を $E^p(M)$ の元とし, $l \in E^p(M)^*$ を方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の弱解とする. このとき各 $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ に対し $E^p(U_k)$ の元 ω_k が存在して, 台が U_k に含まれる $E^p(M)$ の任意の元 β に対し $l(\beta) = \langle\langle \omega_k, \beta \rangle\rangle$ が成り立つ.

証明　台が U_k に含まれる $E^p(M)$ の元を H_s の元とみなすことができ, $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の元でその Q への制限の台が Q に含まれるもの全体からなる集合は H_0 の稠密集合であるので, l を H_0 の双対空間の元とみなすことができる. このとき Riesz の定理 ([1, p. 177]) から, H_0 の元 u_l が存在して任意の $u \in H_0$ に対し $l(u) = (2\pi)^m \langle u_l, u \rangle_0$ が成り立つことがわかる. $\alpha \in E^p(M)$ の U_k $(k \in \{1, 2, \ldots, N\})$ への制限 $\alpha|_{U_k}$ を H_0 の元とみなすことができる: α は U_k の閉包 $\bar{U}_k$ 上連続であり, そして $\bar{U}_k$ はコンパクトであるので, $\alpha|_{U_k}$ は台が U_k に含まれる $E^p(M)$ のある列の H_0 における極限である. $\varphi \in E^p(M)$ の台は U_k に含まれるとすると,

$$\langle \alpha|_{U_k}, \varphi \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^m} \langle\langle \alpha, \varphi \rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^m} l(\Delta\varphi) = \langle u_l, \Delta\varphi \rangle_0 \tag{4.24}$$

が成り立つ. ここで $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ の元でその Q への制限の台が Q に含まれるもの全体からなる集合が H_0 の稠密集合であることに注意すると, Δ を H_0 から H_{-2} への有界作用素とみなすことができる. このとき H_{-2} の元 Δu_l を考えることができる. そして系 3.8 を用いて,

$$\langle u_l, \Delta\varphi \rangle_0 = \langle \Delta u_l, \varphi \rangle_0 \tag{4.25}$$

を得る, 但し (4.25) の右辺は

$$\langle \Delta u_l, \varphi \rangle_0 := \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} (\Delta u_l)_\xi \cdot \varphi_\xi \tag{4.26}$$

で与えられるものである ($\Delta u_l \in H_0$ とは限らないが, Schwarz の不等式を用いて (4.26) の右辺は収束することがわかる). $\alpha|_{U_k}$ を H_{-2} の元とみなし, $\alpha|_{U_k} \neq \Delta u_l$ を仮定する. このとき $w := \alpha|_{U_k} - \Delta u_l$ に対し $K^{-2}w \in H_2$ を $(K^{-2}w)_\xi := (1+|\xi|^2)^{-2}w_\xi$ で定めると, $K^{-2}w \neq 0$ である. そして Schwarz の不等式および $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ が H_2 で稠密であることを用いて,

$$\|w\|_{-2} = \frac{\langle w, w\rangle_{-2}}{\|w\|_{-2}} = \frac{\langle w, K^{-2}w\rangle_0}{\|K^{-2}w\|_2} = \sup\left\{ \frac{\langle w, \varphi\rangle_0}{\|\varphi\|_2} \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n) \setminus \{0\} \right\} \tag{4.27}$$

がわかる ($|\langle w, \varphi\rangle_0| \leq \|w\|_{-2}\|\varphi\|_2$ に注意すること). (4.24) および (4.25) から任意の $\varphi \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{C}^n)$ に対し $\langle w, \varphi\rangle_0 = 0$ がわかるので, (4.27) の右辺も 0 に等しい. よって $\|w\|_{-2} = 0$ が成り立つことになり, 矛盾が生じた. よって $w = 0$ つまり $\Delta u_l = \alpha|_{U_k}$ が成り立つ. このとき定理 4.21 および命題 4.22 から, $u_l \in H_2$ がわかる. また $\Delta(\alpha|_{U_k}) = (\Delta\alpha)|_{U_k}$ が成り立ち, この右辺は H_0 の元であるので, $\alpha|_{U_k}$ は H_2 の元であり, 従って u_l は H_4 の元であることがわかる. 同様の議論を繰り返すと, 任意の整数 s に対し $u_l \in H_s$ がわかる. よって系 4.11 を用いて, $E^p(U_k)$ の元 ω_k が存在して台が U_k に含まれる $E^p(M)$ の任意の元 β に対し $l(\beta) = \langle\langle \omega_k, \beta\rangle\rangle$ が成り立つことがわかる. □

補題 4.24 $k, k' \in \{1, 2, \ldots, N\}$ に対し, $U_k \cap U_{k'} \neq \emptyset$ が成り立つとする. このとき $U_k \cap U_{k'}$ 上で $\omega_k \equiv \omega_{k'}$ が成り立つ.

証明　台が $U_k \cap U_{k'}$ に含まれる $E^p(M)$ の任意の元 β に対し,

$$l(\beta) = \langle\langle \omega_k, \beta\rangle\rangle = \langle\langle \omega_{k'}, \beta\rangle\rangle$$

が成り立ち, よって $\langle\langle \omega_k - \omega_{k'}, \beta\rangle\rangle = 0$ が成り立つ. よって $U_k \cap U_{k'}$ 上で $\omega_k \equiv \omega_{k'}$ が成り立つ. □

α を $E^p(M)$ の元とし, $l \in E^p(M)^*$ を方程式 $\Delta\omega = \alpha$ の弱解とする. このとき補題 4.24 に注意すると, $E^p(M)$ の元 ω を $\omega|_{U_k} := \omega_k$ で定義することができる. このとき任意の $\beta \in E^p(M)$ に対し,

$$l(\beta) = l\left(\sum_{k=1}^N f_k\beta\right) = \sum_{k=1}^N l(f_k\beta) = \sum_{k=1}^N \langle\langle \omega, f_k\beta\rangle\rangle = \langle\langle \omega, \beta\rangle\rangle$$

が成り立つ. こうして定理 4.4 が証明された.

$\{\alpha_n\}$ を定理 4.5 の仮定を満たす $E^p(M)$ の点列とする. このとき

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| \leq \sum_{k=1}^N \|f_k(\alpha_m - \alpha_n)\|$$

に注意すると, 各 $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ に対し $\{f_k \alpha_n\}$ のある部分列が H_0 の Cauchy 列であることを示せば十分であることがわかる. 命題 4.20 から, ある正定数 $c > 0$ が存在して任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\|f_k \alpha_n\|_1 &\leq c(\|\Delta(f_k \alpha_n)\|_{-1} + \|f_k \alpha_n\|_{-1}) \\
&\leq c(\|f_k \Delta \alpha_n\|_{-1} + \|(\Delta f_k - f_k \Delta)\alpha_n\|_{-1} + \|f_k \alpha_n\|_{-1})
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

が成り立つことがわかる (但し $(\Delta f_k - f_k \Delta)\alpha_n := \Delta(f_k \alpha_n) - f_k \Delta \alpha_n$ である). $\{\|\Delta \alpha_n\|_0\}$ が有界であるという仮定および補題 4.19 を用いて, (4.28) の右辺第 1 項は有界であることがわかる. また $\Delta f_k - f_k \Delta$ は高々 1 階の線形作用素であるので, $\{\|\alpha_n\|_0\}$ の有界性および命題 4.17 から(4.28) の右辺第 2 項は有界であることがわかる. また $\{\|\alpha_n\|_0\}$ の有界性および補題 4.19 を用いて, (4.28) の右辺第 3 項は有界であることがわかる. よって $\|f_k \alpha_n\|_1$ は有界であることがわかる. よって命題 4.16 から, $\{f_k \alpha_n\}$ のある部分列が H_0 の Cauchy 列であることがわかる. こうして定理 4.5 が証明された.

参考文献

[1] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版, 1980.

[2] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.

[3] I. M. シンガー・J. A. ソープ, トポロジーと幾何学入門, 赤攝也監訳, 松江広文・一楽重雄訳, 培風館, 1976.

[4] 田村一郎, トポロジー, 岩波全書 276, 岩波書店, 1972.

[5] F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics **94**, Springer-Verlag, 1983.