Abelian gerbe and its application to field theory

五味 清紀
東京大学大学院数理科学研究科

1. Introduction

この講演では以下の二つを解説する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Abelian gerbeの基本的な事柄} \\ \text{場の理論への幾つかの応用} \end{array} \right.$$

$\cdots$ そもそもgerbeとは何か?

Gerbeとは何か?

単語としての "gerbe" $\cdots$ 仏語で "束" などの意.

数学的な "gerbe" $\cdots$ 一つの答えは:

"主束の概念の一般化"

これは分類を通して理解される:

- 主束の同型類 $\leftrightarrow$ 1次のコホモロジー
- Gerbeの同型類 $\leftrightarrow$ 2次のコホモロジー

1次の非可換コホモロジー集合

G $\cdots$ Lie群
M $\cdots$ 多様体
$\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ $\cdots$ Mの開被覆

$$Z^1(\mathfrak{U}, \underline{G}) = \left\{ \begin{array}{l} (g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G)_{\alpha,\beta \in \mathfrak{A}}, \\ U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset \Rightarrow g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}. \end{array} \right\}$$

$$H^1(\mathfrak{U}, \underline{G}) = Z^1(\mathfrak{U}, \underline{G}) / \cong$$

$$(g_{\alpha\beta}) \cong (g'_{\alpha\beta}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} {}^\exists(\varphi_\alpha : U_\alpha \to G)_{\alpha \in \mathfrak{A}}, \\ U_{\alpha\beta} \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_\alpha g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta} \varphi_\beta. \end{array} \right.$$

$\mathfrak{V}$が$\mathfrak{U}$の細分 $\Rightarrow$ 標準的写像$H^1(\mathfrak{U}, \underline{G}) \to H^1(\mathfrak{V}, \underline{G})$.

$$H^1(M, \underline{G}) = \bigsqcup_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \underline{G}) / \sim$$

$c \in H^1(\mathfrak{U}, \underline{G})$と$c' \in H^1(\mathfrak{U}', \underline{G})$が同値
$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{U}$と$\mathfrak{U}'$のある共通細分$\mathfrak{V}$が存在して,
　cとc'が$H^1(\mathfrak{V}, \underline{G})$において一致する.

主G束の分類

主G束 $P \to M$

$\Rightarrow$ 変換関数 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$
(貼り合わせ条件 $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$)

$\Leftrightarrow$ 1-コサイクル $(g_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \underline{G})$

多様体MとLie群Gに対して,

$$\{M\text{上の主}G\text{束}\}/\text{iso} \cong H^1(M, \underline{G}).$$

特に, $G = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$ならば,

$$\{M\text{上の主}\mathbb{T}\text{束}\}/\text{iso} \cong H^1(M, \underline{\mathbb{T}}) \cong H^2(M, \mathbb{Z})$$

Giraudの仕事

J. Giraud, "Cohomologie non-abélienne"
Grundl. 179, Springer Verlag (1971).

１次の非可換コホモロジーによる主束の分類の一般化.
... ２次の非可換コホモロジーの定式化
... それが分類する幾何学的対象の定式化

"Band" (仏語で "lien") $\mathbb{L}$に対して,

$$\{\text{gerbe with band } \mathbb{L}\}/\text{iso} \cong H^2(M, \mathbb{L}).$$

特に, $\underline{\mathbb{T}}$はbandであって,

$$\{\text{gerbe with band } \underline{\mathbb{T}}\}/\text{iso} \cong H^2(M, \underline{\mathbb{T}}) \cong H^3(M, \mathbb{Z})$$

関係をまとめると,

{ 主束 } $\supset$ { 構造群が可換な主束 } $\supset$ { 主$\mathbb{T}$束 }

$$\{M\text{上の主}\mathbb{T}\text{束}\}/\text{iso} \cong H^1(M, \underline{\mathbb{T}}) \cong H^2(M, \mathbb{Z})$$

{ gerbe } $\supset$ { abelian gerbe } $\supset$ { $\underline{\mathbb{T}}$-gerbe }

$$\{M\text{上の}\underline{\mathbb{T}}\text{-gerbe}\}/\text{iso} \cong H^2(M, \underline{\mathbb{T}}) \cong H^3(M, \mathbb{Z})$$

$\underline{\mathbb{T}}$-gerbeは主$\mathbb{T}$束の一般化と考えられる.

コホモロジーによる分類による理解の他に,
接続や曲率によっても理解できる.

接続・曲率

主束に接続や曲率が定義できるように, gerbeにも同様な構造が定義できる.

	主$\mathbb{T}$束	$\underline{\mathbb{T}}$-gerbe
分類	$H^2(M, \mathbb{Z})$	$H^3(M, \mathbb{Z})$
接続	1-form (local) $A_\mu dx^\mu$ "ゲージ場"	2-form (local) $B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ "B場"
曲率	2-form (global) $F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ "ゲージ場の強さ"	3-form (global) $H_{\lambda\mu\nu} dx^\lambda dx^\mu dx^\nu$ "B場の強さ"

● 主束とは, ゲージ場を数学的に扱える枠組みを与える幾何的対象.

● ($\underline{\mathbb{T}}$-)gerbeとは, B場(2-form gauge field)を数学的に扱える枠組みを与える幾何的対象.

... このことからも, gerbeが主束の一般化と思える.

この講演で解説したいこと:

Abelian gerbe ($\mathbb{T}$-gerbe) の基本的な事柄

1. 幾つかの同値な定式化とそれらの関係
   - 圏の層による定式化
   - Murray's bundle gerbe
   - Hitchin-Chatterjee gerbe
2. 接続と曲率
3. コホモロジーによる分類

場の理論への幾つかの応用

1. Discrete torsion (B場 $=$ 接続)
2. Chern-Simons theory (主$\mathbb{T}$束の一般化)
3. Higher gerbeに関連したもの

具体的なプログラム:

1. Introduction

2. Sheaves
   層と層コホモロジーの復習，Deligneコホモロジーの定義と基本的な性質.

3. Circle bundles
   接続つき主$\mathbb{T}$束の分類，幾つかの同値な定式化.

4. Gerbes, I
   定式化をする前の注意.

5. Gerbes, II
   Hitchin-Chatterjee gerbeとMurrayのbundle gerbe. (これを応用で使う).

6. Gerbes, III
   圏の層を用いた定式化. (定義するが使わない.)

7. Application, I
   Discrete torsion

8. Application, II
   Chern-Simons理論

9. Application, III
   Higher gerbeに関連した事柄

$\boxed{\text{2. Sheaf}}$

- 層と層コホモロジーの定義の復習

- Deligneコホモロジーの定義と性質

Deligneコホモロジー
　　＝整数係数コホモロジー ＋ 微分形式

$\cdots$ 接続つき主$\mathbb{T}$束や$\underline{\mathbb{T}}$-gerbeの分類で使う.

<u>Conventionについて</u>

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ $\cdots$ 単位円周

多様体 $\cdots$ 滑らかなパラコンパクト多様体,
1の分割を持つと仮定する.
(通常Mと書いたら, 多様体の意味.)

基本的にsmooth categoryで考える.
(ただし, smoothでなくても定義を適当に変更すればO.K.な箇所は複数ある.)

<u>前層の定義</u>

定義. M上の<u>前層(presheaf) $\mathcal{S}$</u>
$\Leftrightarrow$ 対応づけ

$$\begin{cases} M\text{の開集合}U & \mapsto \text{ある集合}\mathcal{S}(U) \\ V \subset U & \mapsto \text{写像}\rho_{VU} : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{S}(V) \end{cases}$$

で次を満たすもの.

$$W \subset V \subset U \Rightarrow \rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(U) \arrow[r, "\rho_{VU}"] \arrow[rr, bend left, "\rho_{WU}"] & \mathcal{S}(V) \arrow[r, "\rho_{WV}"] & \mathcal{S}(W) \end{tikzcd}$$

- $s \in \mathcal{S}(U)$に対して, $\rho_{VU}(s) = s|_V$と書く.
- 各集合$\mathcal{S}(U)$が群, 環, ... の時, それぞれ "群の層", "環の層", ... などと言う.

<u>例</u>
(a) G : Lie群 $\Rightarrow$ $\underline{G}(U) = C^\infty(U, G)$.
(b) $E \to M$: ベクトル束 $\Rightarrow$ $\underline{E}(U) = \Gamma(U, E)$.

<u>前層の間の写像</u>

定義. 前層の写像$\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$
$\Leftrightarrow$ 各開集合Uに写像$\varphi_U : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{S}'(U)$を与える対応付けであって, 任意の$V \subset U$に対して次の図式が可換になるもの.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{VU}"'] & \mathcal{S}'(U) \arrow[d, "\rho'_{VU}"] \\ \mathcal{S}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{S}'(V) \end{tikzcd}$$

- 各φ_Uが同型な時, φは同型であるという.

<u>例</u>
(a) Lie群の準同型$\varphi : G \to G'$
$\Rightarrow$ $\varphi_U : \underline{G}(U) \to \underline{G'}(U)$. ($\varphi_U(s) = \varphi \circ s$)
(b) ベクトル束の準同型$\varphi : E \to E'$
$\Rightarrow$ $\varphi_U : \underline{E}(U) \to \underline{E'}(U)$. ($\varphi_U(s) = \varphi \circ s$)

層の定義

定義． 前層$\mathcal{S}$が層(sheaf)
$\Leftrightarrow$ 次のデータが与えられたとする:

- Mの開集合U,
- Uの開被覆$\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$,
- $\{s_\alpha\in\mathcal{S}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ s.t. $s_\alpha|_{U_{\alpha\beta}}=s_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$.
  (if $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$)

このとき$s\in\mathcal{S}(U)$であって$s|_{U_\alpha}=s_\alpha$となるものが一意的に存在する.

例: 先ほどの前層の例はどちらも層.

層化(sheafification)

一般に前層は層とは限らないが，与えられた前層$\mathcal{S}$から層$\mathcal{S}'$を作ることができる.

補題． 前層$\mathcal{S}$に対して，次の性質を満たす層$\mathcal{S}'$が存在する.
(a) ある標準的な写像$\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$がある.
(b) $\mathcal{S}$が層なら，上の写像は同型.

- $\mathcal{S}'$のことを，$\mathcal{S}$に付随した層という.

構成のアイデア: “貼り合わせ条件を満たすもの” を集めて層を作る.

1．各開集合Uとその開被覆$\mathfrak{U}$に対して，

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}=\{\{s_\alpha\}|\text{ 貼り合わせ条件}\}$$

とおくと, $\mathfrak{U}$の細分$\mathfrak{V}$に対して次のような写像がある:

$$R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}:\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}\to\mathcal{S}_{\mathfrak{V}}.$$

2．開集合Uに対して，

$$U\mapsto\mathcal{S}'(U)=\varinjlim{}_{\mathfrak{U}}\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}=\bigsqcup_{\mathfrak{U}}\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}/\sim,$$

とすると$\mathcal{S}'$は層になる．ただし，

$$\{s_\alpha\}\in\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}\sim\{t_\beta\}\in\mathcal{S}_{\mathfrak{V}}$$
$$\Leftrightarrow {}^{\exists}\mathfrak{W},R_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}(\{s_\alpha\})=R_{\mathfrak{W}\mathfrak{V}}(\{t_\beta\}).$$

層コホモロジー

より一般に，abel群の層の複体を係数とするコホモロジー群を定義する.

定義． Abel群の層の複体$\mathcal{S}$
$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{S}:\ \mathcal{S}^{[0]}\xrightarrow{\tilde{d}}\mathcal{S}^{[1]}\xrightarrow{\tilde{d}}\mathcal{S}^{[2]}\xrightarrow{\tilde{d}}\cdots$$

という層と写像の組で，$\tilde{d}\circ\tilde{d}=0$となるもの.

$$\begin{cases} \mathcal{S} : M \text{ 上の Abel 群の層の複体} \\ \mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} : M \text{ の開被覆} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ 二重複体 $(\check{C}^{*,*}(M, \mathcal{S}), \delta, \tilde{d})$

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\check{C}^{0,2} \arrow[u] \arrow[r] & \check{C}^{1,2} \arrow[u] \arrow[r] & \check{C}^{2,2} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\check{C}^{0,1} \arrow[u] \arrow[r] & \check{C}^{1,1} \arrow[u, "\tilde{d}"] \arrow[r, "\delta"] & \check{C}^{2,1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\check{C}^{0,0} \arrow[u] \arrow[r] & \check{C}^{1,0} \arrow[u] \arrow[r] & \check{C}^{2,0} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\check{C}^{p,q}(M, \mathcal{S}) = \prod_{\alpha_0, \cdots, \alpha_p} \mathcal{S}^{[q]}(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$$

$$\delta : \check{C}^{p,q}(M, \mathcal{S}) \to \check{C}^{p+1,q}(M, \mathcal{S})$$

$$(\delta c)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i c_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_{p+1}}$$

二重複体 $(\check{C}^{*,*}(\mathfrak{U}, \mathcal{S}), \delta, \tilde{d}) \rightsquigarrow$ 複体 $(\check{C}^*, D)$

$$\begin{cases} \check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) = \oplus_{r=p+q} \check{C}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \\ D = \delta + (-1)^i \tilde{d} \quad \text{on } \check{C}^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Čech コホモロジー $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) = \mathrm{Ker} D / \mathrm{Im} D$.

$\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ の細分 $\Rightarrow$ 標準的写像 $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \to \check{H}^p(\mathfrak{V}, \mathcal{S})$.

定義．

$$H^p(M, \mathcal{S}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) = \coprod_{\mathfrak{U}} \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) / \sim$$

$c \in \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$ と $c' \in \check{H}^p(\mathfrak{U}', \mathcal{S})$ が同値
$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{U}$ と $\mathfrak{U}'$ のある共通細分 $\mathfrak{V}$ が存在して，c と c' が $H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{S})$ において一致する．

特に，層 $\underline{A}$ に対して $\underline{A} \to 0 \to 0 \cdots$ という層の複体を係数とするコホモロジー群を $H^p(M, \underline{A})$ と書き，層 $\underline{A}$ を係数とするコホモロジー群という．

<u>基本的な事実</u>

開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ が <u>good cover</u> である
$\Leftrightarrow$ 有限個の $U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_n}$ に対して，$U_{\alpha_0 \cdots \alpha_n}$ が可縮．

$\cdots$ 多様体上にはつねに，good cover が存在する．

補題． $\mathfrak{U}$ が *good cover* ならば，

$$H^p(M, \mathcal{S}) \cong H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{S}).$$

補題． *Abel* 群 A に対して，A 係数の特異コホモロジーと，A から作った定数層を係数とする層コホモロジーは同型になる．

<u>その他の基本的な性質</u>

補題． 層の複体の短い完全系列

$$0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'' \to 0$$

はコホモロジーの完全系列

$$\begin{tikzcd}
H^{p+1}(\mathcal{S}) \arrow[r] & \cdots & \\
H^p(\mathcal{S}) \arrow[r] & H^p(\mathcal{S}') \arrow[r] & H^p(\mathcal{S}'') \arrow[ull] \\
& \cdots \arrow[r] & H^{p-1}(\mathcal{S}'') \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

を導く．

Proof. すぐわかる． □

<u>例</u>

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{T} \to 0$$

(いずれも定数層)

$$0 \to \mathbb{Z} \to \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{T}} \to 0$$

($\underline{A}$ は A に値をとる滑らかな関数の層)

補題．

$$H^p(M,\underline{\mathbb{R}}) = \begin{cases} C^\infty(M,\mathbb{R}), & (p=0) \\ 0. & (p>0) \end{cases}$$

Proof. 適当な開被覆をとって，1の分割$\{\rho_\alpha\}$を使う．

$$H : \check{C}^{p+1}(\mathfrak{U},\mathcal{S}) \to \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{S})$$
$$(Hc)_{\alpha_0\cdots\alpha_p} = \sum_\alpha \rho_\alpha c_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}}$$

$\Rightarrow H\check{\delta} \pm \check{\delta}H = 1.$ □

完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{T}} \to 0$$

とあわせることで，$p>0$のとき

$$H^p(M,\underline{\mathbb{T}}) \cong H^{p+1}(M,\mathbb{Z})$$

を得る．

Deligneコホモロジー

$\underline{A}^p$： 滑らかなp次微分形式の層 $U \mapsto A^p(U)$

定義． 非負整数nに対して，次の層の複体を定義する．

$$\mathbb{Z}(n)^\infty_D : \mathbb{Z} \to \underline{A}^0 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \underline{A}^{n-1} \to 0 \to \cdots$$

これを係数とするコホモロジー$H^p(M,\mathbb{Z}(n)^\infty_D)$を(滑らかな)Deligneコホモロジーという．

注意 Cheeger-Simonsのdifferential character:

$$\chi : S_q(M,\mathbb{Z}) \overset{hom}{\to} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \begin{cases} {}^\exists\omega \in A^{q+1}(M) \\ \chi(\partial\tau) = \int_\tau \omega \mod \mathbb{Z} \\ (\tau \in S_{q+1}(M,\mathbb{Z})) \end{cases}$$

$\cdots$ degree qのdifferential character.

$$\widehat{H}^q(M,\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong H^{q+1}(M,\mathbb{Z}(q+1)^\infty_D).$$

Deligneコホモロジーには同値な定義が幾つかある．

補題． 次の層の係数を考える．

$$\mathcal{D}^n : \underline{\mathbb{T}} \xrightarrow{\frac{1}{2\pi i}d\log} \underline{A}^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \underline{A}^n \to 0 \cdots$$

すると，$p \geq 0$に対して，

$$H^{p+1}(M,\mathbb{Z}(n+1)^\infty_D) \cong H^p(M,\mathcal{D}^n).$$

Proof. $n=0$の場合が本質的．

$$\exp 2\pi i : [\mathbb{Z} \to \underline{\mathbb{R}}] \to [0 \to \underline{\mathbb{T}}]$$

Good cover $\mathfrak{U}$をとって計算する．

$$(f_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) \in \check{Z}^p(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{T}}) = \check{Z}^{p+1}(\mathfrak{U}, 0 \to \underline{\mathbb{T}})$$

に対して，$\exp 2\pi i\tilde{f}_{\alpha_0\cdots\alpha_p} = f_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$となる関数がとれる．$n_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}} = (\check{\delta}\tilde{f})_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}}$とおくと，これは整数であることがわかり，

$$(n,\tilde{f}) \in \check{Z}^{p+1}(\mathfrak{U},\mathbb{Z} \to \underline{\mathbb{R}}^0)$$

となる． □

以下，しばしば$H^p(M,\mathcal{D}^n)$の方を使う．

命題． 整数$n \geq 0$に対して，
(a) $p<n \Rightarrow H^p(M,\mathcal{D}^n) \cong H^p(M,\mathbb{T})$.
(b) $p=n \Rightarrow$ 次の完全系列がある

$$H^n_{\mathbb{T}}(M) \overset{inj}{\to} H^n(M,\mathcal{D}^n) \overset{surj}{\to} A^{n+1}_{\mathbb{Z}},$$
$$A^n/A^n_{\mathbb{Z}} \overset{inj}{\to} H^n(M,\mathcal{D}^n) \overset{surj}{\to} H^{n+1}_{\mathbb{Z}}.$$

ただし$A^q(M)_{\mathbb{Z}} \subset A^q(M)$は$M$上の*closed integral*な$q$形式の群．
(c) $p>n \Rightarrow H^p(M,\mathcal{D}^n) \cong H^{p+1}(M,\mathbb{Z})$.

(b) $\Rightarrow H^n(M,\mathcal{D}^n)$は有限生成ではない．

例 $H^0(M,\mathcal{D}^0) = C^\infty(M,\mathbb{T})$

Proof. 次の層の複体の完全系列を考える.

$$\begin{array}{cc}
\{\underline{\mathbb{T}} \to \underline{A}^1 \to \cdots \to \underline{A}^n_{cl}\} & \{0 \to \underline{A}^1 \to \cdots \to \underline{A}^n\} \\
\Big\downarrow & \Big\downarrow \\
\{\underline{\mathbb{T}} \to \underline{A}^1 \to \cdots \to \underline{A}^n\} & \{\underline{\mathbb{T}} \to \underline{A}^1 \to \cdots \to \underline{A}^n\} \\
\Big\downarrow & \Big\downarrow \\
\{0 \to \cdots \to 0 \to \underline{A}^{n+1}_{cl}\} & \{\underline{\mathbb{T}} \to 0 \to \cdots \to 0\}
\end{array}$$

(ただし$\underline{A}^q_{cl}$は閉q形式のなす層.)

- Poincaré の補題を使って,

$$H^p(M, 左上) \cong H^p(M, \mathbb{T}),$$
$$H^p(M, 左下) \cong \begin{cases} 0, & (p < n) \\ A^{n+1}(M)_{cl}. & (p = n) \end{cases}$$

- 1の分割を使って,

$$H^p(M, 右上) \cong \begin{cases} A^n/dA^{n-1}, & (p = n) \\ 0. & (p > n) \end{cases}$$

□

Circle bundles

目標

- 接続つき主$\mathbb{T}$束の分類
  (Deligneコホモロジーを使う.)

- 主$\mathbb{T}$束の色々な定式化
  (対応したgerbeの定式化がある.)

注意 主$\mathbb{T}$束 $\Leftrightarrow$ Hermite直線束

$$\begin{array}{lll} P & \mapsto & L = P \times_{\mathbb{T}} \mathbb{C}, \quad (1\text{次元表現}) \\ L & \mapsto & P = \{\ell \in L | h(\ell, \ell) = 1\}. \quad (\text{長さ}1\text{の元}) \end{array}$$

以後の話で, 主$\mathbb{T}$束をHermite直線束にかえても, 基本的にはそのまま通用する.

主$\mathbb{T}$束についての注意

構造群$\mathbb{T}$が可換なので, ある種の操作ができる.

- 主$\mathbb{T}$束PとQの積(contracted product)

$$P \otimes Q = \bigcup_{x \in M} (P_x \times Q_x / \sim)$$

ただし$(p, q) \sim (pu, qu^{-1})$ $(u \in \mathbb{T})$.

- 主$\mathbb{T}$束Pの逆(inverse)

$$P^{\otimes -1} = \bigcup_{x \in M} \left\{ f : P_x \to \mathbb{T} \,\middle|\, \begin{array}{r} f(pu) = f(p)u \\ \text{for } u \in \mathbb{T} \end{array} \right\}$$

次の自然な同型が存在する:

$$\begin{aligned} P \otimes Q &\cong Q \otimes P, \\ (P^{\otimes -1})^{\otimes -1} &\cong P, \\ P \otimes P^{\otimes -1} &\cong \mathbf{1} \ (= \text{自明束} M \times \mathbb{T}). \end{aligned}$$

結果として, M上の主$\mathbb{T}$束の同型類の集合に, Abel群の構造が入る.

主$\mathbb{T}$束の分類(復習)

定理 (Kostant, Weil).

$$\begin{aligned} \{M\text{上の主}\mathbb{T}\text{束}\}/iso &\cong H^1(M, \underline{\mathbb{T}}) \\ &\cong H^2(M, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

主$\mathbb{T}$束Pに第*1Chern*類$c_1(P)$を対応させることにより同型が導かれる.

Step 1 主$\mathbb{T}$束$P \to M \rightsquigarrow$ コホモロジー類

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \ \cdots \ \text{十分細かい開被覆} \\ s_\alpha : U_\alpha \to P|_{U_\alpha} \ \cdots \ \text{局所切断} \end{array} \right.$$

- 変換関数 $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{T}$ $(s_\alpha g_{\alpha\beta} = s_\beta)$
  $\Leftrightarrow$ 1-コチェイン $(g_{\alpha\beta}) \in \check{C}^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{T}})$

- 貼り合わせ条件 $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$
  $\Leftrightarrow$ コサイクル条件 $(\check{\delta} g)_{\alpha\beta\gamma} = 1$.

- 局所切断の取替え $\left\{ \begin{array}{lll} s_\alpha & \mapsto & s_\alpha f_\alpha \\ g_{\alpha\beta} & \mapsto & g_{\alpha\beta} + (\check{\delta} f)_{\alpha\beta} \end{array} \right.$

- 結果として$P \mapsto c_1(P, \mathfrak{U}) \in H^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{T}})$という対応付けが得られる. とくに, $\mathfrak{U}$の細分$\mathfrak{V}$に対して,

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{T}}) & \to & H^1(\mathfrak{V}, \underline{\mathbb{T}}) \\ c_1(P, \mathfrak{U}) & \mapsto & c_1(P, \mathfrak{V}). \end{array}$$

従って, $P \mapsto c_1(P) \in H^1(M, \underline{\mathbb{T}})$という対応付けが得られる.

- PとQが同型 $\Rightarrow c_1(P) = c_1(Q)$.
  よって, $\{M\text{上の主}\mathbb{T}\text{束}\}/iso \to H^1(M, \underline{\mathbb{T}})$という写像が得られるが, これは群の準同型である.

Step 2 単射性: $g_{\alpha\beta} = 1 \Rightarrow \{s_\alpha\}$は大域切断.

Step 3 全射性: $(g_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{T}})$が与えられた時,

$$P = \coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{T}) / \sim .$$

ただし, $(x_\alpha, u_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{T}$に対して,

$$(x_\alpha, u_\alpha) \sim (x_\beta, u_\beta) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_{\alpha\beta} \neq \emptyset, \\ x_\alpha = x_\beta, \\ u_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta) u_\beta. \end{array} \right.$$

$s_\alpha(x)$を$(x, 1) \in U_\alpha \times \mathbb{T}$で代表される元として, 局所切断$s_\alpha$を定めると, $g_{\alpha\beta}$が得られる.

接続つき主$\mathbb{T}$束の分類

● $A \in \sqrt{-1}A^1(P)$が主$\mathbb{T}$束$P \to M$の接続:

$$\begin{cases} R_u^* A &= A \quad (u \in \mathbb{T}) \\ \iota_{\xi^*} A &= \xi \quad (\xi \in \mathrm{Lie}\mathbb{T} = \sqrt{-1}\mathbb{R}) \end{cases}$$

ただし, $\xi_p^* = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p e^{t\xi} \in T_p P$.

● 積と逆をとる操作により, 接続つき主$\mathbb{T}$束の同型類のなす集合はabel群になる.

定理 (Brylinski).

$$\{M\text{上の接続つき主}\mathbb{T}\text{束}\}/\mathrm{iso} \cong H^1(M, \mathcal{D}^1) \\ \cong H^2(M, \mathbb{Z}(2)_D^\infty)$$

$$\mathcal{D}^1 : \underline{\mathbb{T}} \to \underline{A}^1 \to 0 \to 0 \to \cdots,$$
$$\mathbb{Z}(2)_D^\infty : \mathbb{Z} \to \underline{A}^0 \to \underline{A}^1 \to 0 \to 0 \to \cdots.$$

Proof. 証明の流れは接続がない場合と同じ.

$$\begin{cases} \mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} & \cdots \text{ 十分細かい開被覆} \\ s_\alpha : U_\alpha \to P|_{U_\alpha} & \cdots \text{ 局所切断} \end{cases}$$

$$(g_{\alpha\beta}, \theta_\alpha) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{D}^1) \Leftrightarrow \begin{cases} s_\beta &= s_\alpha g_{\alpha\beta}, \\ \theta_\alpha &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} s_\alpha^* A. \end{cases}$$

$$D(g, \theta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} &= g_{\alpha\gamma} \\ \theta_\beta - \theta_\alpha &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} d\log g_{\alpha\beta} \end{cases}$$

これにより, $\hat{c}_1(P, A) \in H^1(M, \mathcal{D}^1)$が定まる.
あとは全単射であることを確認すればよい. □

分類結果のまとめ

$$\{M\text{上の主}\mathbb{T}\text{束}\}/iso \cong H^1(M, \underline{\mathbb{T}}) \\ \cong H^2(M, \mathbb{Z}), \\ \{\text{接続つき主}\mathbb{T}\text{束}\}/iso \cong H^1(M, \mathcal{D}^1) \\ \cong H^2(M, \mathbb{Z}(2)_D^\infty).$$

Deligneコホモロジーの完全系列:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(M, \underline{\mathbb{T}}) & \stackrel{inj}{\to} & H^1(M, \mathcal{D}^1) & \stackrel{surj}{\to} & A^2(M)_{\mathbb{Z}}, \\ & & \hat{c}_1(P, A) & \mapsto & \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} F_A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A^1/A^1_{\mathbb{Z}} & \stackrel{inj}{\to} & H^1(M, \mathcal{D}^1) & \stackrel{surj}{\to} & H^2(M, \mathbb{Z}). \\ & & \hat{c}_1(P, A) & \mapsto & c_1(P) \end{array}$$

($d\log : C^\infty(M, \mathbb{T}) \to A^1(M)_{\mathbb{Z}}$は全射.)

各コホモロジー群に幾何的意味がある.

主$\mathbb{T}$束の他の定式化

M上の主$\mathbb{T}$束を定式化する別の三種類の方法がある.

1. 変換関数(transition function)で表す.
2. 補助的に別の多様体Yを使う.
3. 層を使う.

変換関数(transition function)による定式化

データ$(\mathfrak{U}, (g_{\alpha_0\alpha_1}))$を考える:

$$\begin{cases} \mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}, & (M\text{の開被覆}) \\ g_{\alpha_0\alpha_1} : U_{\alpha_0\alpha_1} \to \mathbb{T}, & (U_{\alpha_0\alpha_1} \neq \emptyset) \\ g_{\alpha_0\alpha_1} g_{\alpha_1\alpha_2} = g_{\alpha_0\alpha_2}. & (U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \neq \emptyset) \end{cases}$$

$$(\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}, (g_{\alpha_0\alpha_1})) \sim (\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in\mathfrak{B}}, (h_{\beta_0\beta_1}))$$

$$\begin{cases} {}^\exists\mathfrak{W} = \{W_\gamma\}_{\gamma\in\mathfrak{C}}, & (\mathfrak{U}, \mathfrak{V}\text{の共通細分}) \\ i : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}, & (W_\gamma \subset U_{i(\gamma)}) \\ j : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}, & (W_\gamma \subset V_{j(\beta)}) \\ {}^\exists k_\gamma : W_\gamma \to \mathbb{T}, & \\ k_{\gamma_0} g_{i(\gamma_0)i(\gamma_1)} = h_{j(\gamma_0)j(\gamma_1)} k_{\gamma_1}, & (W_{\gamma_0\gamma_1} \neq \emptyset) \end{cases}$$

(Čech コサイクルと，同値なコホモロジー類を定めるための条件を書いている.)

変換関数で主$\mathbb{T}$束の情報を完全に記述できる，という意味において，データ$(\mathfrak{U}, (g_{\alpha\beta}))$は主$\mathbb{T}$束の定式化の一つと考えることができる.

特に，定義から明らかなように，

$$\begin{aligned} \{\text{データ } (\mathfrak{U}, (g_{\alpha\beta}))\}/\sim &\cong H^1(M, \underline{\mathbb{T}}) \\ &\cong H^2(M, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

補助的な多様体Yを使う定式化

先ほどの変換関数のデータの書き換えを考える.

$$Y = \bigsqcup_\alpha U_\alpha$$

とおくと，明らかな全射$\pi : Y \to M$がある.

Yのp個のファイバー積

$$Y^{[p]} = \{(y_1, \cdots, y_p) \in Y^p |\ \pi(y_1) = \cdots \pi(y_p)\}$$

は次のように同一視できる:

$$Y^{[p]} = \bigsqcup_{\alpha_1, \cdots \alpha_p} U_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}.$$

すると，

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{T} &\Leftrightarrow g : Y^{[2]} \to \mathbb{T}, \\ g_{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\gamma} &\Leftrightarrow \pi_3^* g \cdot \pi_1^* g = \pi_2^* g. \end{aligned}$$

ただし，$\pi_i : Y^{[3]} \to Y^{[2]}$は$i$番目を抜かす写像.

書き換えをもとに，次のようなものを導入する:

$$(Y, g) \Leftrightarrow \begin{cases} Y \ \cdots\ \text{ある多様体.} \\ \pi : Y \to M \ \cdots\ \text{上への沈めこみ.} \\ (\text{局所的に切断が存在すると仮定}) \\ g : Y^{[2]} \to \mathbb{T} \ \cdots\ \delta g = 1\text{を満たす.} \\ (\delta g = \pi_1^* g \cdot \pi_2^* g^{-1} \cdot \pi_3^* g) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{T} & \mathbb{T} \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, "g"] & Y^{[3]} \arrow[l] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u, "\delta g = 1"] \\ M & & \end{tikzcd}$$

$(Y, g) \sim (Y', g')$であるとは，

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d] & Y'' \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}, \qquad \begin{aligned} h : Y'' \to \mathbb{T}&, \\ \delta h = (\varphi^{[2]})^* g^{-1} \cdot (\varphi'^{[2]})^* g'&. \end{aligned}$$

$$\Big(\delta h = \pi_1^* h \cdot \pi_2^* h^{-1}, \quad \varphi^{[2]} : (Y'')^{[2]} \to Y^{[2]}.\Big)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{T} & & \mathbb{T} \\ & & \uparrow g & & \uparrow \delta g = 1 \\ Y & \Longleftarrow & Y^{[2]} & \Lleftarrow & Y^{[3]} \\ \downarrow \pi & & & & \\ M & & & & \end{array}$$

その導入の動機から，(Y, g)は$(\mathfrak{U}, (g_{\alpha\beta}))$を含む概念である．従って主$\mathbb{T}$束と同等な概念であることが期待される．

実際，主$\mathbb{T}$束$P \to M$から(Y, g)を構成できる:
$Y = P$とおき，$p_1 g(p_1, p_2) = p_2$としてgを定義すればよい．

逆に，(Y, g)が与えられたとき，$Y \times \mathbb{T}$を次の同値関係で割れば主$\mathbb{T}$束が得られる．

$$(y, u) \sim (y', u') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \pi(y) & = & \pi(y'), \\ u & = & g(y, y')u'. \end{array} \right.$$

以上より，

$$\{(Y, g)\}/\sim \cong H^1(M, \mathbb{T}) \cong H^2(M, \mathbb{Z}).$$

主$\mathbb{T}$束を扱うときにあらわれた概念も，対応するように定義できる．

- (Y, g)と(Y', g')の積

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \times_\pi Y' = \{(y, y') \in Y \times Y' | \ \pi(y) = \pi'(y')\}, \\ \\ \begin{array}{ccc} (Y \times_\pi Y')^{[2]} & \longrightarrow & \mathbb{T}. \\ (y_1, y_1'), (y_2, y_2') & \mapsto & g(y_1, y_2) \cdot g'(y_1', y_2') \end{array} \end{array} \right.$$

- (Y, g)の逆 $= (Y, g^{-1})$

- (Y, g)の接続

$$A \in \sqrt{-1}A^1(Y) \text{ s.t. } \delta A = d \log g.$$

ただし，$\delta A = \pi_2^* A - \pi_1^* A \in \sqrt{-1}A^1(Y^{[2]})$.

<u>層を使う定式化</u> $\cdots$ torsor (torseur)

主$\mathbb{T}$束 $P \to M$に対して，

$$U \mapsto \Gamma(U, P) =: \mathcal{S}_P(U)$$

という対応付けによって，層$\mathcal{S}_P$が得られる．
局所自明性と群作用を抽出して次の様に定義する．

定義． *(a)* M上の$\underline{\mathbb{T}}$-*torsor*
$\Leftrightarrow$ 次の二つの条件を満たす層$\mathcal{S}$のこと．
• *(局所非自明)* 各点$x \in M$に対して，xを含む開集合Uが存在して，$\mathcal{S}(U) \neq \emptyset$.
• *(右作用)* 各開集合U上に対して，$\mathcal{S}(U)$に$\underline{\mathbb{T}}(U)$が単純推移的に右から作用し，制限と可換:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(U) \times \underline{\mathbb{T}}(U) & \longrightarrow & \mathcal{S}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(V) \times \underline{\mathbb{T}}(V) & \longrightarrow & \mathcal{S}(V). \end{array}$$

(b) $\underline{\mathbb{T}}$-*torsor*の写像$\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$
$\Leftrightarrow$ 層の写像で各開集合上で右作用と可換なもの．

<u>注意</u> 一般の群の層$\mathcal{G}$に対して$\mathcal{G}$-torsorが定義できる．

主T束$P \to M \Rightarrow \underline{\mathbb{T}}$-torsor $\mathcal{S}_P(U)$

補題． 対応付け$P \mapsto \mathcal{S}_P$は，主$\mathbb{T}$束の圏から$\underline{\mathbb{T}}$-*torsor*の圏への同値を導く．

実際に関手を与えていることは明らか．よって，

(a) 任意の主$\mathbb{T}$束P, Qに対して，射の間の写像

$$\mathrm{Mor}(P, Q) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{S}_P, \mathcal{S}_Q)$$

は全単射．

(b) 任意の$\underline{\mathbb{T}}$-torsor$\mathcal{S}$に対して，ある主$\mathbb{T}$束Pが存在して，$\mathcal{S}_P \cong \mathcal{S}$.

の二つをチェックすればよい．

$\boxed{\text{(a)について}}$

$$\begin{cases} M = \bigcup U_\alpha, \\ s_\alpha : U_\alpha \to P, \\ t_\alpha : U_\alpha \to Q. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{T}, \\ (s_\alpha g_{\alpha\beta} = s_\beta) \\ h_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{T}. \\ (t_\alpha h_{\alpha\beta} = t_\beta) \end{cases}$$

$f : P \to Q \Leftrightarrow \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{T}\}, \varphi_\alpha g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}\varphi_\beta$
($f \circ s_\alpha = t_\alpha \varphi_\alpha$で対応付ける.)

<u>単射性</u>
$f, g : P \to Q$が導く写像$\mathcal{S}_P \to \mathcal{S}_Q$が等しい
$\Leftrightarrow \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha \Leftrightarrow f = g$.

<u>全射性</u>
$F : \mathcal{S}_P \to \mathcal{S}_Q$
$\Rightarrow$ 関数$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{T}$が$F_{U_\alpha}(s_\alpha) = t_\alpha\varphi_\alpha$で定まる.
$\Rightarrow$ 主束の写像$f : P \to Q$.

$\boxed{\text{(b)について}}$

$\sigma_\alpha \in \mathcal{S}(U_\alpha)$をとると, $\sigma_\alpha g_{\alpha\beta} = \sigma_\beta$で$g_{\alpha\beta} \in \mathbb{T}(U)$が定まる.

$$P = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{T})/\sim.$$

- $\underline{\mathbb{T}}$-torsor $\mathcal{S}$と$\mathcal{S}'$の積$\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}'$

$$U \mapsto \mathcal{S}(U) \times \mathcal{S}'(U)/\sim,$$
$$f \in \underline{\mathbb{T}}(U) \Rightarrow (\sigma, \sigma') \sim (\sigma \cdot f, \sigma' \cdot f^{-1})$$

で定まる前層に付随した層.

- $\underline{\mathbb{T}}$-torsor $\mathcal{S}$の逆$\mathcal{S}^{\otimes -1}$

$$\mathcal{S}^{\otimes -1}(U) = \left\{\varphi : \mathcal{S}|_U \to \underline{\mathbb{T}}|_U \,\middle|\, \underline{\mathbb{T}}\text{-torsorの写像}\right\}$$

($\mathcal{S}|_U$と$\underline{\mathbb{T}}|_U$は$M$上の層を$U$に制限したもの.)

- $\underline{\mathbb{T}}$-torsor $\mathcal{S}$の接続

$$\nabla : \mathcal{S} \to \sqrt{-1}\underline{A}^1 \text{ s.t. } \nabla(\sigma f) = \nabla(\sigma) + d\log f$$
$$\text{for } U, \sigma \in \mathcal{S}(U), f \in \underline{\mathbb{T}}(U).$$

主$\mathbb{T}$束P上の接続Aに対し, $\mathcal{S}_P$上の接続が

$$\nabla(s) = s^*A$$

によって定まる.

<u>まとめ</u>

主$\mathbb{T}$束は次の三つの方法で再定式化できた:

1. 変換関数を使う方法,
2. 補助的な空間Yを使う方法,
3. 層を使う方法.

Gerbeはこれらに対応する方法で定式化される.

$\boxed{\text{Gerbes, I}}$

はじめに

コホモロジーによる分類を通して “gerbe とは主束の一般化” と考えられるのだったが,

全空間 (total space) の様なものはない.

敢えて言えば, gerbe とは

“圏をファイバーとするファイバー束”

と考えるべきものだからである.

主 $\mathbb{T}$ 束の一般化にあたる gerbe の定式化は,
主 $\mathbb{T}$ 束の全空間を使わない三つの定式化:

- 変換関数を使う方法,
- 補助的な空間を使う方法,
- 層を使う方法,

に対応した三つの方法によってなされる:

- Hitchin-Chatterjee の方法,
- Murray の方法,
- Giraud による方法.

これらの対応は, “圏化 (categorification)” の考え方を通じて理解できる.

圏化 (categorification)

$$\begin{array}{cccc} \text{モデル:} & \text{集合} & + & \text{構造} \\ & \wr & & \wr \\ & \text{圏} & + & \text{構造} \end{array}$$

ここでモデルとして考えたいのは $\mathbb{T}$ とその群構造.

次のような圏 $\mathcal{T}$ を考える.
対象: 単純推移的な $\mathbb{T}$ の右作用がある集合 P,

$$P \times \mathbb{T} \to P$$

射: 右作用を保つ写像 $f : P \to Q$.

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathbb{T} & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q \times \mathbb{T} & \longrightarrow & Q \end{array}$$

(つまり, $M = 1$ 点上の $\underline{\mathbb{T}}$-torsor のなす圏を $\mathcal{T}$.)

集合 $\mathbb{T}$ の群構造:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{積}: & \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ (u, v) \mapsto u \cdot v \\ \text{単位元}: & 1 \in \mathbb{T}, \\ \text{逆元}: & u \in \mathbb{T} \mapsto u^{-1} \in \mathbb{T}. \end{array} \right.$$

圏 $\mathcal{T}$ の群的な構造 (group like structure):

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{“積”}: & \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T},\ (P, Q) \mapsto P \otimes Q \\ \text{“単位元”}: & \mathbb{T} \in \mathcal{T}, \\ \text{“逆元”}: & P \in \mathcal{T} \mapsto P^{\otimes -1} \in \mathcal{T}. \end{array} \right.$$

$\cdots$ $\mathcal{T}$ は群 $\mathbb{T}$ の圏化になっている.

圏化$\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{T}$を関数で考えると，$\mathbb{T}$に値をとる関数$f$:

$$x \in M \mapsto f(x) \in \mathbb{T}$$

は，“$\mathcal{T}$に値をとる関数” P:

$$x \in M \mapsto P(x) \in \mathcal{T}$$

となる．これは，主$\mathbb{T}$束を意味していると思える．
(各点におけるファイバーを対応させている.)

$\mathbb{T}$値関数 $\rightsquigarrow$ “$\mathcal{T}$値関数” $=$ 主$\mathbb{T}$束はコホモロジーで，

$$H^0(M, \underline{\mathbb{T}}) \rightsquigarrow \text{“}H^0(M, \underline{\mathcal{T}})\text{”} = H^1(M, \underline{\mathbb{T}}).$$

この形式的なプロセスは，以後述べる予定の三つの
gerbeの定式化を動機付ける．

$\boxed{\text{Gerbes, II}}$

目標: Hitchin-ChatterjeeおよびMurrayによるgerbeの定式化の説明.

- Hitchin-Chatterjeeの定式化
- Murrayの定式化
- 分類
- 接続と曲率

Hitchin-Chatterjeeの定式化

- 主$\mathbb{T}$束を変換関数で表す方法に対応する.

次のようなデータ$(\mathfrak{U}, (g_{\alpha_0\alpha_1}))$を考えた:

$$\begin{cases} \mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}, & (M\text{の開被覆}) \\ g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{T}, & (U_{\alpha\beta} \neq \emptyset) \\ g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}. & (U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset) \end{cases}$$

圏化$\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{T}$に従って, 変換関数

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{T}$$

を主$\mathbb{T}$束

$$\begin{array}{c} P_{\alpha\beta} \\ \downarrow \\ U_{\alpha\beta} \end{array}$$

に置き換えたのが, Hitchin-Chatterjeeの定式化にあたる.

定義 (Hitchin-Chatterjee).
M上の*gerbe data* $(\mathfrak{U}, P_{\alpha\beta}, s_{\alpha\beta\gamma})$
$\Leftrightarrow$
(a) Mの開被覆$\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$,
(b) $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$上の主$\mathbb{T}$束$P_{\alpha\beta}$,
(c) $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$での切断$s_{\alpha\beta\gamma} : U_{\alpha\beta\gamma} \to (\delta P)_{\alpha\beta\gamma}$,
(d) $U_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq \emptyset$ならば$(\delta s)_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1$.
ただし,

$$(\delta P)_{\alpha\beta\gamma} = P_{\beta\gamma} \otimes P_{\alpha\gamma}^{\otimes -1} \otimes P_{\alpha\beta},$$
$$(\delta s)_{\alpha\beta\gamma\delta} = s_{\beta\gamma\delta} \otimes s_{\alpha\gamma\delta}^{\otimes -1} \otimes s_{\alpha\beta\delta} \otimes s_{\alpha\beta\gamma}^{\otimes -1}.$$

$U_{\alpha\beta\gamma}$上の主$\mathbb{T}$束$\delta(\delta(P))_{\alpha\beta\gamma\beta}$

$$:= (\delta P)_{\beta\gamma\delta} \otimes (\delta P)_{\alpha\gamma\delta}^{\otimes -1} \otimes (\delta P)_{\alpha\beta\delta} \otimes (\delta P)_{\alpha\beta\gamma}^{\otimes -1}$$

は自明束$U_{\alpha\beta\gamma\delta} \times \mathbb{T}$と自然に同型であることに注意.
($P \otimes P^{-1} \cong U \times \mathbb{T}$を明示せずに使っている.)

注意1 "gerbe data" はBrylinskiによる呼び名.
注意2 もともとの定義は複素直線束を使っている.

例 $M = S^3$上のgerbe data

- $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$とみなし,

$$U_0 = S^3 - \{\infty\}, \quad U_\infty = S^3 - \{0\}$$

とおいて, 開被覆$\mathfrak{U} = \{U_0, U_\infty\}$を作る.

- $U_0 \cap U_\infty \cong S^2 \times \mathbb{R}$なので, $H^2(S^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ni 1$に対応する主$\mathbb{T}$束から, $U_0 \cap U_\infty$上の主$\mathbb{T}$束$P_{0\infty}$が得られる. 他のものは次のように定める:

$$P_{\infty 0} = P_{0\infty}^{\otimes -1}, \quad P_{00} = P_{\infty\infty} = \text{自明}.$$

- $U_{\alpha\beta\gamma}$上では, どの$(\delta P)_{\alpha\beta\gamma}$も自然に自明束と同型なので, $s_{\alpha\beta\gamma} = 1$と定める.

- 明らかに, $(\delta s)_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1$.

このgerbe dataは, S^3上の "canonical gerbe" と呼ばれる. ($1 \in H^3(S^3, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$で分類される.)

Murrayの定式化

- 主$\mathbb{T}$束の定式化において，

変換関数を使う方法$\rightleftarrows$補助的な空間を使う方法

$$\mathfrak{U} = \{U_\alpha\} \qquad\qquad Y = \sqcup_\alpha U_\alpha$$

という関係があった．Hitchin-Chatterjeeの定式化(gerbe data)とMurrayの定式化(bundle gerbe)も同じ関係にある．(Gerbe dataの同型，接続，$\cdots$などの概念は，bundle gerbeの対応する概念を特殊化することで得られるので省略する.)

- 主$\mathbb{T}$束の補助的な空間を使った定式化を思い出すと:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{T} & \mathbb{T} \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, "g"] & Y^{[3]} \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] \arrow[u, "\delta g = 1"'] \\ M \end{tikzcd}.$$

$\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{T}$に従った置き換えは，関数$g : Y^{[2]} \to \mathbb{T}$を$Y$上の主束に置き換えることである．

記号について

- Mとは別の多様体Yに対して，

$$\pi : Y \to M$$

で，上への沈めこみ(surjective submersion)を表す．
($\Rightarrow$ 局所的に切断を持つ: 任意の点$x \in M$に対して，xを含む開集合$U \subset M$と切断$s : U \to Y|_U$が存在.)

- p個のファイバー積:

$$\begin{cases} Y^{[p]} = \{(y_1, \ldots, y_p) |\ \pi(y_1) = \cdots = \pi(y_p)\} \\ \pi_i : Y^{[p]} \to Y^{[p-1]} \quad (i\text{番目をとばす}) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} M & Y \arrow[l, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left, "\pi_1"'] \arrow[l, shift right, "\pi_2"] & Y^{[3]} \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] & Y^{[4]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift right=2] \ldots \end{tikzcd}$$

- $Y^{[p]}$上の主$\mathbb{T}$束Qから，$Y^{[p+1]}$上の主$\mathbb{T}$束δQを

$$\delta Q = (\pi_1^* Q) \otimes (\pi_2^* Q)^{\otimes -1} \otimes \cdot \cdot \otimes (\pi_{p+1}^* Q)^{\otimes (-1)^p}$$

と定める．
$\Rightarrow$ $\delta(\delta Q)$は$Y^{[p+2]}$上の自明束に自然に同型.

- 主束の切断(関数)や接続(微分形式)に対しても同様の記号を使う．

特に微分形式の場合複体ができる:

補題． *次は完全系列* $(q \geq 0)$*.*

$$0 \longrightarrow A^q(M) \xrightarrow{\pi^*} A^q(Y) \xrightarrow{\delta} A^q(Y^{[2]}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

Proof. 2段階のステップで示す．

- 大域切断$\phi : M \to Y$がある場合.

$$\phi_p : Y^{[p]} \to Y^{[p+1]},\ \phi_p(\vec{y}) = (\vec{y}, \phi(\pi(\vec{y}))).$$

として，

$$H : A^q(Y^{[p+1]}) \to A^q(Y^{[p]}),\ H\omega = \phi_p^* \omega$$

とすると，$\delta H \pm H \delta = 1$.

- 一般の場合.

適当な開被覆$\{U_\alpha\}$をとると切断$\phi_\alpha : U_\alpha \to Y|_{U_\alpha}$がある．各$\alpha$に対して$Y_\alpha$におけるホモトピーを$H_\alpha$と書くとき，1の分割$\{\rho_\alpha\}$を使って，

$$H : A^q(Y^{[p+1]}) \to A^q(Y^{[p]}),\ H\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha H_\alpha \omega$$

とすると，$\delta H \pm H \delta = 1$. □

Bundle gerbeの定義

定義 (Murray).
M上のbundle gerbe (Y, P, s)
$\Leftrightarrow$
(a) $\pi : Y \to M$は局所切断を持つ上への沈めこみ.
(b) $P \to Y^{[2]}$は主$\mathbb{T}$束.
(c) $s : Y^{[3]} \to \delta P$は切断で$\delta s = 1$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \delta P \arrow[d, shift right] & \mathbf{1} \arrow[d, shift right] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & Y^{[3]} \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift right, "s"'] & Y^{[4]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u, shift right, "\delta s = 1"'] \\ M \end{tikzcd}$$

注意 主$\mathbb{T}$束のかわりに複素直線束を使ってもよい．

例 Gerbe data と bundle gerbe

Gerbe data $(\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}, P_{\alpha\beta}, s_{\alpha\beta\gamma})$ から次の様にして bundle gerbe ができる.

- $Y = \bigsqcup_\alpha U_\alpha$ とおくと, 明らかに局所断面を持つ沈めこみ $\pi : Y \to M$ があり,

$$Y^{[p]} = \bigsqcup_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p} U_{\alpha_1\cdots\alpha_p}.$$

- 主束 P を $P = \bigsqcup_{\alpha_1\alpha_2} P_{\alpha_1\alpha_2}$ と定義すると,

$$\delta P = \bigsqcup_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} P_{\alpha_2\alpha_3} \otimes P_{\alpha_1\alpha_3}^{\otimes -1} \otimes P_{\alpha_1\alpha_2}.$$

- 切断 $s : Y^{[3]} \to \delta P$ を $s|_{U_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}} = s_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ と定義すると, $\delta s = 1$ となる.

(開被覆から作った Y に対する bundle gerbe は, gerbe data そのもの.)

Bundle gerbe の自明化

定義． (Y, P, s) *given.*

(a) (Y, P, s) *の擬* $\mathbb{T}$ *束 (pseudo* $\mathbb{T}$*-bundle)*
$\Leftrightarrow$ *次の性質を満たす対* (R, v) *のこと.*
$\begin{cases} \text{主} \mathbb{T} \text{束 } R \to Y. \\ \text{切断 } v : Y^{[2]} \to \delta R^{\otimes -1} \otimes P \text{ であって } \delta v = s. \end{cases}$

(b) *擬* $\mathbb{T}$ *束* (R, v) *から* (R', v') *への写像*
$\Leftrightarrow$ *切断* $w : Y \to R^{\otimes -1} \otimes R'$ *で* $\delta w = v \otimes v'^{\otimes -1}$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d] & \delta R^{\otimes -1} \otimes P \arrow[d, shift right] & \delta P \arrow[d, shift right] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift right, bend right, "v"'] & Y^{[3]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift right, bend right, "\delta v = s"'] \\ M & & \end{tikzcd}$$

- Bundle gerbe が擬 $\mathbb{T}$ 束を持つとき 自明 という.

- 主 $\mathbb{T}$ 束 $Q \to M$ に対して $(R \otimes \pi^* Q, v)$ も擬 $\mathbb{T}$ 束.

Bundle gerbe の局所自明性

補題． *M 上の bundle gerbe (Y, P, s) であって大域切断 $\phi : M \to Y$ を持つものには擬 $\mathbb{T}$ 束がある.*

Proof. 擬 $\mathbb{T}$ 束 (R, v) を具体的に構成する.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d] & \delta R^{\otimes -1} \otimes P \arrow[d, shift right] & \delta P \arrow[d, shift right] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift right, bend right, "v"'] & Y^{[3]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift right, bend right, "\delta v = s"'] \\ M & & \end{tikzcd}$$

$$\phi_p : Y^{[p]} \to Y^{[p+1]}, \ \phi_p(\vec{y}) = (\vec{y}, \phi(\pi(\vec{y})))$$

とおくと, 次が成立する:

$$\pi_i \circ \phi_p = \begin{cases} \phi_{p-1} \circ \pi_i, & (i = 1, \ldots, p) \\ \text{id.} & (i = p+1) \end{cases}$$

すると,

$$\begin{aligned} R = \phi_1^* P^{\otimes -1} \quad &\Rightarrow \phi_2^* \delta P = \delta R^{\otimes -1} \otimes P, \\ v = \phi_2^* s \quad &\Rightarrow \phi_3^* \delta s = \delta v \otimes s^{\otimes -1}. \end{aligned}$$

なので, 擬 $\mathbb{T}$ 束が構成できた. □

補題． *M 上の bundle gerbe (Y, P, s) とその擬 $\mathbb{T}$ 束 (R, v) と (R', v') があったとする. もし大域切断 $\phi : M \to Y$ があれば, (R, v) から (R', v') への写像がある.*

Proof. $Q = R^{\otimes -1} \otimes R$, $t = v \otimes v'^{\otimes -1}$ とおくと,

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d] & \delta Q \arrow[d, shift right] & \mathbf{1} \arrow[d, shift right] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift right, bend right, "t"'] & Y^{[3]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift right, bend right, "\delta t = 1"'] \\ M & & \end{tikzcd}$$

切断 $\phi : M \to Y$ を用いて, 切断 $w : Y \to Q$ であって $\delta w = t$ となるものを構成すればよい.

$$\phi_p : Y^{[p]} \to Y^{[p+1]}, \ \phi_p(\vec{y}) = (\vec{y}, \phi(\pi(\vec{y})))$$

$$\pi_i \circ \phi_2 = \begin{cases} \phi_1 \circ \pi_i, & (i = 1, 2) \\ \text{id}, & (i = 3) \end{cases}$$

だったので, $\delta(\phi_1^* t) = \phi_2^*(\delta t) \otimes t^{\otimes -1}$. □

Dixmier-Douady類

- Mの開被覆$\mathfrak{U}$をうまくとれば，擬$\mathbb{T}$束と写像:

$$\begin{tikzcd} R_\alpha \arrow[d] & \delta R_\alpha^{\otimes -1}\otimes P \arrow[d, shift right] & \delta P \arrow[d, shift right] \\ Y|_{U_\alpha} \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]}|_{U_\alpha} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "v_\alpha"'] & Y^{[3]}|_{U_\alpha} \arrow[l] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u, bend right, "\delta v_\alpha = s"'] \\ U_\alpha & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R_\alpha\otimes R_\beta^{\otimes -1} \arrow[d, shift right] & \delta R_\alpha^{\otimes -1}\otimes \delta R_\beta \arrow[d, shift right] \\ Y|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[d, "\pi"] \arrow[u, bend right, "w_{\alpha\beta}"'] & Y^{[2]}|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "\delta w_{\alpha\beta} = v_\alpha^{\otimes -1}\otimes v_\beta"'] \\ U_{\alpha\beta} & \end{tikzcd}$$

がとれる．すると，

$$^\exists f_\alpha : U_{\alpha\beta\gamma} \to \mathbb{T},\ \pi^* f_{\alpha\beta\gamma} = w_{\beta\gamma}\otimes w_{\alpha\gamma}^{\otimes -1}\otimes w_{\alpha\beta}.$$

$(^\forall \tilde{f} : Y \to \mathbb{T}, \delta\tilde{f} = 1 \Rightarrow {}^\exists f : M \to \mathbb{T}, \pi^* f = \tilde{f}.)$

- $(\check{\delta} f)_{\alpha\beta\gamma\delta} = 1$もすぐ確かめられる．

- $\{(R_\alpha, v_{\alpha\beta}), w_{\alpha\beta}\}$をとることで，

$$(f_{\alpha\beta\gamma}) \in Z^2(\mathfrak{U}, \mathbb{T})$$

を得た．$(\pi^* f_{\alpha\beta\gamma} = w_{\beta\gamma}\otimes w_{\alpha\gamma}^{\otimes -1}\otimes w_{\alpha\beta}.)$

- 別の$\{(R'_\alpha, v'_{\alpha\beta}), w'_{\alpha\beta}\}$をとったとき，切断

$$\rho_\alpha : Y|_{U_\alpha} \to R_\alpha \otimes R'^{\otimes -1}_\alpha,\ \delta\rho_\alpha = v_\alpha \otimes v'_\alpha$$

となるものがとれる．

$$\pi^* k_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \otimes \rho_\beta^{\otimes -1}\otimes w_{\alpha\beta}^{\otimes -1}\otimes w'_{\alpha\beta}$$

により，

$$(k_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{T}),\ f'_{\alpha\beta\gamma} - f_{\alpha\beta\gamma} = (\check{\delta} k)_{\alpha\beta\gamma}.$$

つまり$\delta_{\mathfrak{U}} \in H^2(\mathfrak{U}, \mathbb{T})$が定まる．

- その定義より，$\mathfrak{U}$の細分$\mathfrak{V}$に対して，

$$H^2(\mathfrak{U}, \mathbb{T}) \to H^2(\mathfrak{V}, \mathbb{T}),\ \delta_{\mathfrak{U}} \mapsto \delta_{\mathfrak{V}}$$

すなわち，bundle gerbe $\mathcal{G} = (Y, P, s)$に対して，

$$\delta(\mathcal{G}) \in H^2(M, \underline{\mathbb{T}}) \cong H^3(M, \mathbb{Z})$$

が定まった．(Dixmier-Douady類と呼ぶ.)

補題． $\mathcal{G}$ *:* 自明 $\Leftrightarrow \delta(\mathcal{G}) = 0$*.*

Proof. $(\Rightarrow)$ 大域的な擬$\mathbb{T}$束(R, v)を制限することで得られる(R_α, v_α)を使えば，$f_{\alpha\beta\gamma} = 1$.

$(\Leftarrow)$ ある$\{(R_\alpha, v_\alpha), w_{\alpha\beta}\}$で$\delta(\mathcal{G})$が定まっているとする．一般性を失うことなく$f_{\alpha\beta\gamma} = 1$と仮定してよい．このとき$w_{\alpha\beta}$によって$(R_\alpha, v_\alpha)$を貼り合わせて大域的な擬$\mathbb{T}$束を構成できる． □

Bundle gerbeの積と逆

定義． *(a) Bundle gerbe* $\mathcal{G} = (Y, P, s)$*と*$\mathcal{G}' = (Y', P', s')$*の積を*

$$\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}' = (Y \times_\pi Y', P\otimes P', s\otimes s')$$

で定義する．
(b) Bundle gerbe $\mathcal{G} = (Y, P, s)$*の逆を*

$$\mathcal{G}^{\otimes -1} = (Y, P^{\otimes -1}, s^{\otimes -1})$$

で定義する．

補題． *M上のbundle gerbe $\mathcal{G}$と$\mathcal{G}'$に対して，*

$$\delta(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}') = \delta(\mathcal{G}) + \delta(\mathcal{G}'),$$
$$\delta(\mathcal{G}^{\otimes -1}) = -\delta(\mathcal{G}).$$

Proof. $\delta(\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')$を定義するためのデータとして，$\delta(\mathcal{G})$と$\delta(\mathcal{G}')$から作ったものを使うと，コサイクルの段階で一致している．$\delta(\mathcal{G}^{\otimes -1})$についても同様． □

Bundle gerbeの同値関係

定義． $\mathcal{G}=(Y,P,s)$, $\mathcal{G}'=(Y',P',s')$ *given.*
Bundle gerbeの同型 $(\varphi,\tilde{\varphi}):\mathcal{G}\to\mathcal{G}'\Leftrightarrow$
(a) $\varphi:Y\to Y'$ *はファイバーを保つ微分同相:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ M \arrow[r, equal] & M. \end{tikzcd}$$

(b) $\tilde{\varphi}:P\to P'$ *は主*$\mathbb{T}$*束の同型で*s*と*s'*を保つ:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & P' \arrow[d] \\ Y^{[2]} \arrow[r, "\varphi^{[2]}"'] & Y'^{[2]}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \delta P \arrow[r, "\delta\tilde{\varphi}"] & \delta P' \\ Y^{[3]} \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\varphi^{[3]}"'] & Y^{[3]}. \arrow[u, "s'"'] \end{tikzcd}$$

定義． *Bundle gerbe* $\mathcal{G}$*から*$\mathcal{G}'$*への安定同型*
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'^{\otimes-1}$ *の擬*$\mathbb{T}$*束のこと.*

定義より: $\mathcal{G}$と$\mathcal{G}'$が安定同値 $\Leftrightarrow\delta(\mathcal{G})=\delta(\mathcal{G}')$.
よって，同値関係になっていることがわかる．

Bundle gerbeの分類

$\mathcal{G}\mapsto\delta(\mathcal{G})$は単射準同型を定義する:

$$\{M\text{ 上の bundle gerbe}\}/\text{s-iso}\to H^2(M,\mathbb{T})$$

定理 (Murray-Stevenson).

$$\{M\text{ 上の } \textit{bundle gerbe}\}/\textit{s-iso}\cong H^2(M,\mathbb{T}) \cong H^3(M,\mathbb{Z}).$$

Proof. 全射性を見る．Čech コサイクル$(f_{\alpha\beta\gamma})$から$\mathcal{G}=(Y,P,s)$を，$Y=\coprod_\alpha U_\alpha$，$P=Y^{[2]}\times\mathbb{T}$,

$$s:Y^{[3]}\to\delta P,\ \left(s|_{U_{\alpha\beta\gamma}}=\mathrm{id}\times f^{-1}_{\alpha\beta\gamma}\right)$$

と構成する．また，(R_α,v_α)と$w_{\alpha\beta}$を

$$\begin{aligned} R_\alpha &= Y|_{U_\alpha}\times\mathbb{T}=\textstyle\coprod_{\bar\alpha}U_{\bar\alpha\alpha}\times\mathbb{T},\\ v_\alpha &: \ Y^{[2]}|_{U_\alpha}\to\delta R^{\otimes-1}\otimes P,\\ &\left(v_\alpha|_{U_{\bar\alpha\bar\beta}}=\mathrm{id}\times f^{-1}_{\bar\alpha\bar\beta\alpha}\right)\\ w_{\alpha\beta} &: \ Y|_{U_{\alpha\beta}}\to\delta R_\alpha\otimes\delta R_\beta^{\otimes-1}\\ &\left(w_{\alpha\beta}|_{U_{\bar\alpha}}=f^{-1}_{\bar\alpha\alpha\beta}\right) \end{aligned}$$

として計算すると，コサイクル$(f_{\alpha\beta\gamma})$を得る． □

Lifting bundle gerbe(代表的な例)

- 与えられたデータ:

主G束:　　　　　Gの中心拡大:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\pi"] \\ M \end{tikzcd},\quad 1\longrightarrow\mathbb{T}\longrightarrow\widehat{G}\overset{q}{\longrightarrow}G\longrightarrow 1.$$

(e.g. $G=SO(n)$, $\widehat{G}=Spin^c(n)$.)

- Lifting bundle gerbe $\mathcal{G}=(Y,P,s)$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{G} \arrow[d, "q"] \\ Y^{[2]} \arrow[r, "\tau"] & G \end{tikzcd} \qquad y_1\tau(y_1,y_2)=y_2.$$

$$\delta P_{(y_1,y_2,y_3)}=\widehat{G}_{\tau(y_2,y_3)}\otimes\widehat{G}^{\otimes-1}_{\tau(y_1,y_3)}\otimes\widehat{G}_{\tau(y_1,y_2)},$$
$$s(y_1,y_2,y_3)=\widehat{g}_{23}\otimes(\widehat{g}_{12}\widehat{g}_{23})^{\otimes-1}\otimes\widehat{g}_{12}.$$
$$(\widehat{g}_{ij}\in\widehat{G},\ q(\widehat{g}_{ij})\mapsto\tau(y_i,y_j))$$

群$\widehat{G}$の積はassociative $\Rightarrow\delta s=1$.

- 主G束$Y\to M$の構造群の$\widehat{G}$への持ち上げ

$\Leftrightarrow$ 次のような対$(\hat{Y},\hat{q})$.

$$\begin{tikzcd} \hat{Y} \arrow[r, "\hat{q}"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

(a) $\hat{Y}\to M$は主$\widehat{G}$束.
(b) $\hat{q}:\hat{Y}\to M$はMへの射影と可換で,

$$\hat{q}(\hat{y}\hat{g})=\hat{q}(\hat{y})q(\hat{g}).$$

(e.g. $\widehat{G}=Spin^c(n)\Rightarrow Spin^c$構造のこと.)

- Yの持ち上げ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$の擬$\mathbb{T}$束.

従って，$\delta(\mathcal{G})\in H^2(M,\mathbb{Z})$は$Y$の持ち上げが存在するための障害類と一致する．

群の層の完全系列:

$$1\longrightarrow\underline{\mathbb{T}}\longrightarrow\underline{\widehat{G}}\longrightarrow\underline{G}\longrightarrow 1.$$

コホモロジー集合の完全系列:

$$H^1(M,\underline{\widehat{G}})\longrightarrow H^1(M,\underline{G})\overset{\beta}{\longrightarrow}H^2(M,\underline{\mathbb{T}}).$$

中心拡大と主束の例

例 $\mathcal{H}$: 無限次元可分Hilbert空間.

$$\begin{cases} \widehat{G} &= U(\mathcal{H}) \simeq *, \\ G &= PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/\mathbb{T} \simeq K(\mathbb{Z},2), \\ Y &= EPU(\mathcal{H}) \simeq *, \\ M &= BPU(\mathcal{H}) \simeq K(\mathbb{Z},3). \end{cases}$$

$\rightsquigarrow H^3(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元.

例 K: コンパクトLie群, $Q \to X$: 主K束.

$$\begin{cases} G &= LK = C^\infty(S^1,K), \\ \widehat{G} &= \widehat{LK}, \\ Y &= LQ, \\ M &= LX. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \delta(\mathcal{G})$は, transgression map:

$$\tau_L : H^4(X,\mathbb{Z}) \to H^3(LX,\mathbb{Z})$$

による, Qのある特性類$c(Q) \in H^4(X,\mathbb{Z})$の像.
(String classと呼ばれる. [Killingback])

$$\begin{tikzcd} C^\infty(S^1,X) \times S^1 \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \\ C^\infty(S^1,X) & \end{tikzcd}$$

Bundle gerbeの接続と曲率

定義. $\mathcal{G} = (Y,P,s)$: M上の*bundle gerbe.*
(a) $\mathcal{G}$の接続$\nabla \in \sqrt{-1}A^1(P)$
$\Leftrightarrow$ 主$\mathbb{T}$束Pの接続で$s^*(\delta\nabla) = 0$.
(b) ∇の*curving* $B \in \sqrt{-1}A^2(Y)$
$\Leftrightarrow \delta B = F(\nabla)$.
(c) Bの*3-curvature* $H(B) \in \sqrt{-1}A^3(M)$
$\Leftrightarrow \pi^*H(B) = dB$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \delta P \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & Y^{[3]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u, bend right, "s"'] & Y^{[4]} \arrow[l, shift left=3] \arrow[l, shift left=1] \arrow[l, shift right=1] \arrow[l, shift right=3] \arrow[u, bend right, "\delta s=1"'] \\ M & & & \end{tikzcd}$$

次の1対1対応がある:

$$\{\mathcal{G}\text{の接続}\} \leftrightarrow A^1(Y)/\pi^*A^1(M),$$
$$\{\nabla\text{の curving}\} \leftrightarrow A^2(M).$$

また, 3-curvatureは∇とBから一意に定まる.
($0 \to A^q(M) \xrightarrow{\pi^*} A^q(Y) \xrightarrow{\delta} A^q(Y^{[2]}) \xrightarrow{\delta} \cdots$.)

擬$\mathbb{T}$束の接続

定義. $\mathcal{G} = (Y,P,s), \nabla$ *given.*
擬$\mathbb{T}$束(R,v)の接続$A \in \sqrt{-1}A^1(R)$
$\Leftrightarrow$ 主$\mathbb{T}$束Rの接続で, $v^*((\delta A)^{\otimes -1} \otimes \nabla) = 0$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d] & \delta R^{\otimes -1} \otimes P \arrow[d] & \delta P \arrow[d] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "v"'] & Y^{[3]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u, bend right, "\delta v=s"'] \\ M & & \end{tikzcd}$$

- $\{$擬$\mathbb{T}$束(R,v)の接続$\} \leftrightarrow A^1(M)$.

- $(\mathcal{G},\nabla,B)$が接続つき擬$\mathbb{T}$束$((R,v),A)$を持ち, $F(A) = B$のとき自明という.

障害類

接続つきbundle gerbe $(\mathcal{G},\nabla,B)$に対して,
Dixmier-Douady類の類似物を定義する.

$$\begin{cases} \mathfrak{U} = \{U_\alpha\} &: \text{開被覆}, \\ (R_\alpha,v_\alpha) &: (Y,P,s)|_{U_\alpha}\text{の擬}\mathbb{T}\text{束}, \\ w_{\alpha\beta} &: (R_\beta,v_\beta)\text{から}(R_\alpha,v_\alpha)\text{への写像}, \\ A_\alpha &: \text{擬}\mathbb{T}\text{束}(R_\alpha,v_\alpha)\text{の接続}. \end{cases}$$

$$(f_{\alpha\beta\gamma},\theta^1_{\alpha\beta},\theta^2_\alpha) \in C^2(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{T}} \to \underline{A}^1 \to \underline{A}^2),$$
$$\pi^*f_{\alpha\beta\gamma} = w_{\beta\gamma} \otimes w_{\alpha\gamma}^{\otimes -1} \otimes w_{\alpha\beta},$$
$$\pi^*\theta^1_{\alpha\beta} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} w^*_{\alpha\beta}(A_\alpha \otimes A_\beta^{\otimes -1}),$$
$$\pi^*\theta^2_\alpha = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(F(A_\alpha) - B).$$

$\Rightarrow$ 次のDeligneコホモロジー類が定まる.

$$\hat{\delta}(\mathcal{G},\nabla,B) \in H^2(M,\mathcal{D}^2) \cong H^3(M,\mathbb{Z}(3)^\infty_D).$$

• $(\mathcal{G}, \nabla, B)$が自明 $\Leftrightarrow$ $\hat{\delta}(\mathcal{G}, \nabla, B) = 0$.

• Bundle gerbeの積と逆の操作は接続つきの場合に自然に拡張できて,

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}((\mathcal{G}, \nabla, B)^{\otimes -1}) = -\hat{\delta}(\mathcal{G}, \nabla, B), \\
&\hat{\delta}((\mathcal{G}, \nabla, B) \otimes (\mathcal{G}', \nabla', B')) \\
&\qquad = \hat{\delta}(\mathcal{G}, \nabla, B) + \hat{\delta}(\mathcal{G}', \nabla', B').
\end{aligned}$$

• $(\mathcal{G}, \nabla, B)$と$(\mathcal{G}', \nabla', B')$が安定同値
$\Leftrightarrow$ $(\mathcal{G}, \nabla, B)^{\otimes -1} \otimes (\mathcal{G}', \nabla', B')$が自明.
$\Leftrightarrow$ $\hat{\delta}(\mathcal{G}, \nabla, B) = \hat{\delta}(\mathcal{G}', \nabla', B')$が自明.

$\cdots$ 結果として, 次の単射準同型が得られる:

$$\{(\mathcal{G}, \nabla, B)\}/\text{s-iso} \longrightarrow H^2(M, \mathcal{D}^2) \cong H^3(M, \mathbb{Z}(3)^{\infty}_{D}).$$

接続つきbundle gerbeの分類

定理 (Murray-Stevenson).

$$\{\text{接続つき } \textit{bundle gerbe } (\mathcal{G}, \nabla, B)\}/\textit{s-iso} \cong H^2(M, \mathcal{D}^2) \cong H^3(M, \mathbb{Z}(3)^{\infty}_{D}).$$

Proof. 全射性のため, コサイクル$(f_{\alpha\beta\gamma}, \theta^1_{\alpha\beta}, \theta^2_{\alpha})$から$(\mathcal{G}, \nabla, B)$を作る. $(f_{\alpha\beta\gamma})$から$\mathcal{G}$は構成できているので, ∇とBを

$$\nabla = \bigsqcup_{\alpha,\beta} (-2\pi\sqrt{-1}\theta^1_{\alpha\beta} + u^{-1}du) \in \sqrt{-1}A^1(P),$$
$$B = \bigsqcup_{\alpha} (-2\pi\sqrt{-1}\theta^2_{\alpha}) \in \sqrt{-1}A^2(Y)$$

と構成する. 既に作った(R_α, v_α)と$w_{\alpha\beta}$の他に

$$A_\alpha = \bigsqcup_{\bar{\alpha}} (2\pi\sqrt{-1}\theta^1_{\bar{\alpha}\alpha} + u^{-1}du)$$

として計算すると, 上のコサイクルを得る. □

分類結果のまとめ

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}\}/\text{s-iso} &\cong H^2(M, \mathbb{T}) \\
&\cong H^3(M, \mathbb{Z}), \\
\{(\mathcal{G}, \nabla, B)\}/\text{s-iso} &\cong H^2(M, \mathcal{D}^2) \\
&\cong H^3(M, \mathbb{Z}(3)^{\infty}_{D}).
\end{aligned}$$

注意 $\{(\mathcal{G}, \nabla)\}/\text{s-iso} \cong H^2(M, \mathcal{D}^1) \cong H^2(M, \mathbb{T})$.
つまり, つねに$(\mathcal{G}, \nabla) \simeq (\mathcal{G}, \nabla')$.

Deligneコホモロジーの完全系列:

$$\begin{array}{ccccc}
A^2/A^2_{\mathbb{Z}} & \overset{inj}{\to} & H^2(M, \mathcal{D}^2) & \overset{surj}{\to} & H^3(M, \mathbb{Z}), \\
 & & \hat{\delta}(\mathcal{G}, \nabla, B) & \mapsto & \delta(\mathcal{G})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(M, \mathbb{T}) & \overset{inj}{\to} & H^2(M, \mathcal{D}^2) & \overset{surj}{\to} & A^3(M)_{\mathbb{Z}}. \\
 & & \hat{\delta}(\mathcal{G}, \nabla, B) & \mapsto & \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} H_B
\end{array}$$

($(\mathcal{G}, \nabla, B)$: flat $\Leftrightarrow$ $H_B = 0$.)

Lifting bundle gerbeの接続

• 中心拡大:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathbb{T} & \longrightarrow & \hat{G} & \overset{q}{\longrightarrow} & G & \longrightarrow & 1, \\
0 & \longrightarrow & \sqrt{-1}\mathbb{R} & \longrightarrow & \hat{\mathfrak{g}} & \overset{q_*}{\longrightarrow} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

• Gは$\hat{G}$の随伴作用を通して$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \sqrt{-1}\mathbb{R}$に作用.

$$Z : G \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \sqrt{-1}\mathbb{R}),$$
$$\langle Z(g) | X \rangle = \mathrm{Ad}_g(X \oplus 0) - (\mathrm{Ad}_g X) \oplus 0.$$

• $\hat{G}$, GのMaurer-Cartan形式を$\hat{\theta}$, θとすると,
$\nu = \hat{\theta} - (q^*\theta) \oplus 0$は主$\mathbb{T}$束$q : \hat{G} \to G$の接続.

主G束Yの接続$\Theta \in A^1(Y, \mathfrak{g})$に対して,

$$\nabla = \tau^*\nu + \langle Z(\tau^{-1}) | \pi_2^*\Theta \rangle \ \in \sqrt{-1}A^1(P)$$

はlifting bundle gerbe $\mathcal{G} = (Y, P, s)$の接続.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & \longrightarrow & \hat{G} \\
 & & \downarrow & & \downarrow q \\
Y & \overset{\pi_2}{\longleftarrow} & Y^{[2]} & \overset{\tau}{\longrightarrow} & G
\end{array} \qquad y_1\tau(y_1, y_2) = y_2.$$

● 主G束$\pi : Y \to M$の随伴束

$$M \times \sqrt{-1}\mathbb{R} \longrightarrow Y \times_{Ad} \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow Y \times_{Ad} \mathfrak{g}$$

の分裂から写像$L : Y \to \mathrm{Hom}(\widehat{\mathfrak{g}}, \sqrt{-1}\mathbb{R})$が定まる．

主G束$\pi : Y \to M$の接続Θと分裂Lに対して，

$$B = -\langle L | F(\Theta \oplus 0)\rangle \ \in \sqrt{-1}A^2(Y)$$

は∇のcurving．ただし$F(\Theta \oplus 0) \in A^2(Y, \widehat{\mathfrak{g}})$は

$$F(\Theta \oplus 0) = d(\Theta \oplus 0) + \frac{1}{2}[\Theta \oplus 0, \Theta \oplus 0]_{\widehat{\mathfrak{g}}}.$$

● 分裂$L \in \Gamma(Y \times_{Ad} \mathrm{Hom}(\widehat{\mathfrak{g}}, \sqrt{-1}\mathbb{R}))$に対して，

$$d_\Theta L = dL + \mathrm{ad}_\Theta L \in A^1(Y \times_{Ad} \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \sqrt{-1}\mathbb{R})).$$

接続つきbundle gerbe $(\mathcal{G}, \nabla, B)$に対して，

$$H(B) = \langle d_\Theta L | F(\Theta)\rangle \ \in \sqrt{-1}A^3(M).$$

Lifting bundle gerbe $(\mathcal{G}, \nabla, B)$に対して

$$\widehat{\delta}(\mathcal{G}, \nabla, B) = 0$$

となることは，持ち上げ$(\widehat{Y}, \widehat{q})$と主$\widehat{G}$束$\widehat{Y} \to M$の接続$\widehat{\Theta}$であって

$$q_*\widehat{\Theta} - \widehat{q}^*\Theta = 0,$$
$$\langle L | F(\widehat{\Theta})\rangle = 0$$

となるものが存在することに同値．

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Y} & \xrightarrow{\widehat{q}} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{T} & \longrightarrow & \widehat{G} & \xrightarrow{q} & G & \longrightarrow & 1, \\ 0 & \longrightarrow & \sqrt{-1}\mathbb{R} & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{q_*} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

$$L \in A^0(M, Y \times_{Ad} \mathrm{Hom}(\widehat{\mathfrak{g}}, \sqrt{-1}\mathbb{R})),$$
$$F(\widehat{\Theta}) \in A^2(M, Y \times_{Ad} \widehat{\mathfrak{g}}).$$

$\boxed{\text{Gerbes, III}}$

目標: 圏の層によるgerbeの定式化.

	主$\mathbb{T}$束	gerbe
変換 "関数"	$(\{U_\alpha\}, g_{\alpha\beta})$	$(\{U_\alpha\}, P_{\alpha\beta}, s_{\alpha\beta\gamma})$
補助的な空間	(Y, g)	(Y, P, s)
層	$\mathbb{T}$-torsor	$\mathbb{T}$-gerbe

主$\mathbb{T}$束(ファイバーは集合)の切断を考えることにより, $\mathbb{T}$-torsor (集合の層)が得られていた. $\mathbb{T}$-gerbeは圏の層なので, "gerbe" というのは "圏をファイバーとするファイバー束" のようなものと思える.

主なトピック:
- 圏の層
- 圏の層としてのgerbeの定式化と分類

(今回の応用では, この定式化のgerbeは使わないので, 接続については省略.)

圏について

$\cdots$ Naiveな理解で十分.

- 圏(category)とは,

(a) 対象(object)の集まり $P, Q, R, \ldots$,
(b) 射(morphism)の集合Mor(P,Q), $\ldots$,

であって次の条件を満たすものから成る:

$$\left\{\begin{array}{l} {}^\forall P, {}^\forall Q, {}^\forall R, \\ {}^\forall f \in \mathrm{Mor}(P,Q), \\ {}^\forall g \in \mathrm{Mor}(Q,R). \end{array}\right. \Rightarrow {}^\exists g \circ f \in \mathrm{Mor}(P,R).$$

$$\left(\left\{\begin{array}{l} {}^\forall S, \\ {}^\forall h \in \mathrm{Mor}(R,S) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} (h \circ g) \circ f \\ = h \circ (g \circ f). \end{array}\right)$$

$${}^\forall P \Rightarrow {}^\exists \mathrm{id}_P \in \mathrm{Mor}(P,P).$$

$$\left(\left\{\begin{array}{l} {}^\forall Q, {}^\forall R, \\ {}^\forall f \in \mathrm{Mor}(P,Q), \\ {}^\forall g \in \mathrm{Mor}(R,P). \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \circ \mathrm{id}_P = f, \\ \mathrm{id}_P \circ g = g. \end{array}\right.\right)$$

- 対象の集まりが集合をなさない場合も扱う.

- 圏$\mathcal{C}$の対象を$P \in \mathcal{C}$, 射を$f : P \to Q$とも書く.

関手と自然変換

- 圏$\mathcal{C}, \mathcal{D}$に対して, 関手(functor) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$とは,

$$\left\{\begin{array}{rcl} [P \in \mathcal{C}] & \mapsto & [F(P) \in \mathcal{C}], \\ [f : P \to Q] & \mapsto & [F(f) : F(P) \to F(Q)], \end{array}\right.$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(\mathrm{id}_P) = \mathrm{id}_{F(P)}.$$

という対応付け.

- 関手$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$に対して, 自然変換(natural transformation) $\theta : F \Rightarrow G$とは,

$$[P \in \mathcal{C}] \mapsto [\theta_P : F(P) \to G(P)],$$

$$\begin{array}{c} P \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ Q \end{array} \quad \text{に対し} \quad \begin{array}{ccc} F(P) & \xrightarrow{\theta_P} & G(P) \\ {\scriptstyle F(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Q) & \xrightarrow[\theta_Q]{} & G(Q) \end{array}$$

という対応付け.

その他の注意

- $f \in \mathrm{Mor}(P,Q)$に対し, $g \in \mathrm{Mor}(Q,P)$で

$$g \circ f = \mathrm{id}_P, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Q$$

となるものがあれば, $g = f^{-1}$と書く.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Isom}(P,Q) & = & \{f \in \mathrm{Mor}(P,Q) |\ {}^\exists f^{-1}\}, \\ \mathrm{Aut}(P) & = & \mathrm{Isom}(P,P), \end{array}\right.$$

とすれば,

$$\mathrm{Aut}(Q) \times \mathrm{Isom}(P,Q) \longrightarrow \mathrm{Isom}(P,Q),$$
$$\mathrm{Isom}(P,Q) \times \mathrm{Aut}(P) \longrightarrow \mathrm{Isom}(P,Q),$$

はそれぞれ単純推移的な群作用.

- 全ての射が可逆な圏を亜群(groupoid)と呼ぶ.
(i.e. Mor$(P,Q) = $ Isom(P,Q).)

圏の前層(presheaf of categories)

定義． M上の圏の全層$\underline{\mathcal{C}}$ $\Leftrightarrow$ 対応付け:

$$\begin{cases} U \mapsto \text{圏 } \underline{\mathcal{C}}(U), \\ V\subset U \mapsto \text{関手 } \rho_{VU} : \underline{\mathcal{C}}(U) \to \underline{\mathcal{C}}(V), \\ W\subset V\subset U \mapsto \text{自然変換 } \theta_{W,V,U} \\ \qquad \rho_{WV}\circ\rho_{VU} \Longrightarrow \rho_{WU}, \end{cases}$$

であって，$Y\subset W\subset V\subset U$に対して，

$$\begin{tikzcd} \rho_{YW}\circ\rho_{WV}\circ\rho_{VU} \arrow[r, Rightarrow, "\theta_{W,V,U}"] \arrow[d, Rightarrow, "\theta_{Y,W,V}"'] & \rho_{YW}\circ\rho_{WU} \arrow[d, Rightarrow, "\theta_{Y,W,U}"] \\ \rho_{YV}\circ\rho_{VU} \arrow[r, Rightarrow, "\theta_{Y,V,U}"'] & \rho_{YU} \end{tikzcd}$$

を可換とするもののこと．

注意 以下簡単のため$\theta_{U,V,W}=\mathrm{id}$と仮定する．
(すなわち，$P\in\underline{\mathcal{C}}(U)$に対して$(P|_V)|_W = P|_W$.)

例
(1) 集合の前層．(集合を自明な射を持つ圏と見る.)
(2) 主G束の圏の前層．($U\mapsto U$上の主G束の圏.)
(3) ベクトル束の圏の前層.

圏の層(sheaf of categories, stack)

$$\left.\begin{array}{l} \text{圏の前層}\underline{\mathcal{C}}, \\ \text{開集合}U, \\ P,Q\in\underline{\mathcal{C}}(U). \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} U\text{上の前層}\underline{\mathrm{Mor}}(P,Q) \\ V\mapsto \mathrm{Mor}(P|_V, Q|_V) \end{array}$$

定義． 圏の前層$\underline{\mathcal{C}}$が圏の層 $\Leftrightarrow$ 次の条件が成立:

(a) 任意の開集合$U\subset M$と対象$P,Q\in\underline{\mathcal{C}}(U)$に対して，$\underline{\mathrm{Mor}}(P,Q)$は層になる.

(b) 次のようなデータが与えられたとする.

$$\begin{cases} M\text{の開集合}U, \\ U\text{の開被覆 } \mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}, \\ \text{対象 } P_\alpha\in\mathcal{C}(U_\alpha),\ (\alpha\in\mathfrak{A}), \\ \text{同型} f_{\alpha\beta} : P_\beta|_{U_{\alpha\beta}} \to P_\alpha|_{U_{\alpha\beta}},\ (U_{\alpha\beta}\neq\emptyset), \textit{s.t.} \\ f_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta\gamma}}\circ f_{\beta\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}} = f_{\alpha\gamma}|_{U_{\alpha\beta\gamma}}, (U_{\alpha\beta\gamma}\neq\emptyset). \end{cases}$$

このとき次の様な対象と同型が(一意に)存在する:

$$\begin{cases} P\in\underline{\mathcal{C}}(U), \\ f_\alpha : P|_{U_\alpha}\to P_\alpha,\ (\alpha\in\mathfrak{A}), \textit{s.t.} \\ f_\beta|_{U_{\alpha\beta}}\circ f_{\alpha\beta} = f_\alpha|_{U_{\alpha\beta}},\ (U_{\alpha\beta}\neq\emptyset). \end{cases}$$

例 集合の層，主G束の圏の層，ベクトル束の圏の層.

圏の前層の層化(sheafification)

圏の前層$\underline{\mathcal{C}}$から圏の層$\underline{\mathcal{C}}'$を構成できる.

構成のアイデアは，集合の層の場合とほぼ同じ.

1．開集合Uとその開被覆$\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}$に対して，次の "descent datum" からなる圏$\mathrm{Desc}(\mathfrak{U})$を考える:

対象： 貼り合わせ条件を満たす$(\{P_\alpha\},\{f_{\alpha\beta}\})$,
射： $\{\varphi_\alpha\} : (\{P_\alpha\},\{f_{\alpha\beta}\}) \to (\{P'_\alpha\},\{f'_{\alpha\beta}\})$
$\Leftrightarrow \varphi_\alpha : P_\alpha\to P'_\alpha,\ \varphi_\alpha\circ f_{\alpha\beta} = f'_{\alpha\beta}\circ\varphi_\beta$.

すると, $\mathfrak{U}$の細分$\mathfrak{V}$に対して次のような関手がある:

$$R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}} : \mathrm{Desc}(\mathfrak{U}) \to \mathrm{Desc}(\mathfrak{V}).$$

2．各開集合Uに対して, 次の様な圏$\underline{\mathcal{C}}'(U)$を考える:

対象： $\mathrm{Desc}(\mathfrak{U})$の対象($\mathfrak{U}$を全て動かす),
射： $\mathrm{Mor}(\bar{P}_{\mathfrak{U}}, \bar{Q}_{\mathfrak{V}})$
$= \varinjlim_{\mathfrak{W}} \mathrm{Mor}(R_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}(\bar{P}_{\mathfrak{U}}), R_{\mathfrak{W}\mathfrak{V}}(\bar{P}_{\mathfrak{V}}))$.

ただし, $\mathfrak{W}$は$\mathfrak{U}$と$\mathfrak{V}$の細分を走る.

圏の層によるgerbeの定式化

定義． 圏の層$\underline{\mathcal{G}}$が*gerbe* $\Leftrightarrow$ 次の条件が成立

- $\underline{\mathcal{G}}$は亜群(全ての射が可逆な圏)の層.
- (局所非自明) 各点$x\in M$に対して，xを含む開集合Uが存在して$\underline{\mathcal{G}}(U)$は対象を持つ.
- (局所同型) 開集合Uと対象$P,Q\in\underline{\mathcal{G}}(U)$が与えられたとき，任意の点$x\in U$に対して，$x$を含むある開集合$V\subset U$が存在し$\mathrm{Isom}(P|_V, Q|_V)\neq\emptyset$.

例 主G束の圏の層はgerbe.

- 自明なgerbe $\Leftrightarrow$ 圏$\underline{\mathcal{G}}(M)$が対象を持つ.

(この時$\Gamma(M,\underline{\mathcal{G}}) = \underline{\mathcal{G}}(M)$を大域対象の圏と呼ぶ.)

cf. 主束Pが自明 $\Leftrightarrow$ $\Gamma(M,P)\neq\emptyset$.

Abelian gerbe

Gerbe $\mathcal{G}$, 開集合$U \subset M$と対象$P \in \mathcal{G}(U)$対して,

$$U \supset V \mapsto \mathrm{Aut}(P|_V)$$

はU上の群の層となる．($\underline{\mathrm{Aut}}(P)$と書く.)

定義． *$\underline{A}$: Abel群の層.*
Gerbe $\mathcal{G}$が$\underline{A}$をbandに持つ．($\underline{A}$-gerbe.)
$\Leftrightarrow$ 任意の開集合$U \subset M$と対象$P \in \mathcal{G}(U)$に対し，

$$\theta_P : \underline{A}|_U \to \underline{\mathrm{Aut}}(P)$$

というU上の群の層の同型が存在して，

$$^\forall f : P \to Q \Rightarrow \begin{tikzcd} \underline{A}|_U \arrow[r, equal] \arrow[d, "\theta_P"'] & \underline{A}|_U \arrow[d, "\theta_Q"] \\ \underline{\mathrm{Aut}}(P) \arrow[r, "f_*"'] & \underline{\mathrm{Aut}}(Q). \end{tikzcd}$$

注意 一般の(non-abelianな)bandは単一の層では記述できない．

例 M上の閉2形式ωが与えられたとする．
(ωはintegralとは限らない.)

$U \subset M$に次のような圏$\mathcal{G}(U)$を対応させる:
対象: U上の接続つき主$\mathbb{T}$束(P, A)であって，

$$F(A) = 2\pi\sqrt{-1}\omega|_U.$$

射: 接続を保つ主$\mathbb{T}$束の写像 $f : (P, A) \to (P', A')$.

$\mathcal{G}$は定数層$\mathbb{T}$をbandに持つgerbe.

Proof. 各条件のチェック．
- 主束の写像は常に可逆$\Rightarrow$ $\mathcal{G}$は亜群の層.
- 局所的には$\omega|_U = d^\exists\theta$ $\Rightarrow$ 局所非自明.
- 主束は局所自明なので，$f : P \to P'$は存在する．
  $f^*A' - A = d^\exists h$ $\Rightarrow$ 局所同型.
- 接続を保つ主$\mathbb{T}$束の自己同型 $\leftrightarrow$ $\mathbb{T}$の元
  $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$のbandは定数層$\mathbb{T}$. □

注意 $\mathcal{G}$が自明 $\Leftrightarrow$ ω : integral.

例 Abelianではない例

$$\begin{cases} \omega & : M\text{上の閉2形式}, \\ r & : \text{非負整数}. \end{cases}$$

- $U \subset M$に次のような圏$\mathcal{G}_r(U)$を対応させる:

対象: U上の接続つき主$U(r)$束(P, A)であって，

$$F(A) = 2\pi\sqrt{-1}\omega|_U \otimes I_r.$$

射: 接続を保つ主$U(r)$束の写像.

- 先程と同じ議論により，$\mathcal{G}(r)$はgerbeになる．

- Bandは定数層$\mathbb{T}$とは限らない．

例えば，$\omega|_U = d\theta$となる1形式θを用いて，

$$P = U \times U(r), \quad A = 2\pi\sqrt{-1}\theta I_r$$

という場合を考えると，$\mathrm{Aut}(P) \cong U(r)$となる．

- $\mathcal{G}_r$: 自明 $\Rightarrow$ $r\omega$: integral.

$e^{2\pi\sqrt{-1}\omega} \in \mathrm{Im}\{H^1(M, PGL(r)) \xrightarrow{\beta} H^2(M, \mathbb{T})\}$
を付け加えると必要十分条件になる．[Brylinski]

例 Bundle gerbeから$\underline{\mathbb{T}}$-gerbeを構成.

Bundle gerbe $\mathcal{G} = (Y, P, s)$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \delta P \arrow[d, "s"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\delta s = 1"] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & Y^{[3]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & Y^{[4]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left=2] \\ M & & & \end{tikzcd}$$

擬$\mathbb{T}$束(R, v):

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d] & \delta R^{\otimes -1} \otimes P \arrow[d, "v"] & \delta P \arrow[d, "\delta v = s"] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & Y^{[3]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\ M & & \end{tikzcd}$$

擬$\mathbb{T}$束の写像$w : (R, v) \to (R', v')$

$$\begin{tikzcd} R^{\otimes -1} \otimes R' \arrow[d, "w"] & \delta(R^{\otimes -1} \otimes R') \arrow[d, "\delta w = v \otimes v'^{\otimes -1}"] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\ M & \end{tikzcd}$$

補題． *Bundle gerbe* $\mathcal{G}=(Y,P,s)$ に対し，

$$U \mapsto \underline{\mathcal{G}}(U)=\mathcal{G}|_U \text{ の擬}\mathbb{T}\text{束の圏}$$

によってできる圏の層 $\underline{\mathcal{G}}$ は $\mathbb{T}$*-gerbe.*

Proof. 条件のチェック．

- 明らかに擬 $\mathbb{T}$ 束の写像は可逆.
- 局所的な擬 $\mathbb{T}$ 束とその写像の存在は既に証明済み.
- 擬 $\mathbb{T}$ 束 (R,v) の自己同型 w は

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[d, "w"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\delta w=1"] \\ Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\ M & \end{tikzcd}$$

であるが，これは M 上の $\mathbb{T}$ 値関数と自然に対応． $\square$

例 Lifting gerbe
主 G 束 $Y\to M$ と G の中心拡大 $\widehat{G}$ に付随した lifting bundle gerbe から作った $\mathbb{T}$-gerbe は，(局所的な) 持ち上げ $(\hat{Y},\hat{q})$ がなす圏の層.

$\underline{\mathbb{T}}$-gerbe の性質　　以下 $\underline{\mathbb{T}}$-gerbe のみを扱う.

補題． $\underline{\mathcal{G}}$: M 上の $\underline{\mathbb{T}}$*-gerbe.*

(a) 任意の開集合 $U\subset M$ と対象 $P,Q\in\underline{\mathcal{G}}(U)$ に対して，$\underline{\mathrm{Isom}}(P,Q)$ は U 上の $\underline{\mathbb{T}}$*-torsor.*

(b) 逆に，U 上の $\underline{\mathbb{T}}$*-torsor* $\underline{S}$ と $P\in\underline{\mathcal{G}}(U)$ が与えられたとき，対象 $Q\in\underline{\mathcal{G}}(U)$ と同型 $\underline{\mathrm{Isom}}(P,Q)\cong\underline{S}$ が存在する．*(*そのようなものは，ある同型を除いて一意に定まる.*)*

Proof. (a) $\underline{\mathrm{Isom}}(P,Q)$ は右 $\underline{\mathrm{Aut}}(P)$-torsor で，$\underline{\mathrm{Aut}}(P)\cong\underline{\mathbb{T}}$. (左 $\underline{\mathrm{Aut}}(Q)$-torsor でもあるが，band の条件からどちらも同じ $\underline{\mathbb{T}}$ 作用.)

(b) U の適当な開被覆 $\{U_\alpha\}$ をとり，$\underline{S}$ の変換関数 $(g_{\alpha\beta})$ を考える．$Q_\alpha=P|_{U_\alpha}\in\mathcal{G}(U_\alpha)$ とおくと，

$$g_{\alpha\beta}\in\mathbb{T}(U_{\alpha\beta})\cong\mathrm{Aut}(P|_{U_{\alpha\beta}})\cong\mathrm{Isom}(Q_\beta,Q_\alpha).$$

よって，$(Q_\alpha,g_{\alpha\beta})$ は貼り合わせ条件を満たすので，対象 $Q\in\underline{\mathcal{G}}(U)$ を得る． $\square$

補題の意味について

- 次のように定義する:

$$\underline{\mathcal{T}} := \mathbb{T}\text{-torsor(主}\mathbb{T}\text{束) の圏のなす層.}$$

(これは自明な gerbe である.)

- $P\in\underline{\mathcal{G}}(U)$ と $\underline{S}\in\underline{\mathcal{T}}(U)$ から一意に決まり，

$$\underline{\mathrm{Isom}}(P,Q)\cong\underline{S}$$

となる対象 $Q\in\underline{\mathcal{G}}(U)$ を $Q=P\otimes\underline{S}$ と書くと，

$$\underline{\mathcal{G}}(U)\times\underline{\mathcal{T}}(U)\to\underline{\mathcal{G}}(U)$$

という "作用" のように見える.

- これは $\underline{\mathbb{T}}$-torsor $\underline{S}$ の定義における，

$$\underline{S}(U)\times\underline{\mathbb{T}}(U)\to\underline{S}(U)$$

という作用を圏化したものと考えられる.
($\mathbb{T}$ 値関数 $\in\underline{\mathbb{T}}(U)\rightsquigarrow$ 主 $\mathbb{T}$ 束 $\in\underline{\mathcal{T}}(U)$.)
すなわち，$\underline{\mathbb{T}}$-gerbe とは "$\underline{\mathcal{T}}$-torsor" と思える.

Gerbe の同型写像

定義． $\underline{\mathbb{T}}$*-gerbe* の同型写像 $\Phi:\underline{\mathcal{G}}\to\underline{\mathcal{G}}'$
$\Leftrightarrow$ 各開集合 $U\subset M$ に対して，

$$\Phi_U:\underline{\mathcal{G}}(U)\to\underline{\mathcal{G}}'(U)$$

という関手を対応させ次の条件をみたすもの.
(a) 各 U に対して，Φ_U は圏の同値.
(b) $V\subset U$ に対して，自然同値

$$\lambda_{VU}:\Phi_V\rho_{VU}\Rightarrow\rho'_{VU}\Phi_U$$

があり，$W\subset V\subset U$ に対して次が可換.

$$\begin{tikzcd} \Phi_W\rho_{WV}\rho_{VU} \arrow[rr, Rightarrow, "\lambda_{WV}"] \arrow[d, equal, "\theta_{W,V,U}"'] & & \rho'_{WV}\Phi_V\rho_{VU} \arrow[d, Rightarrow, "\lambda_{VU}"] \\ \Phi_W\rho_{WU} \arrow[d, Rightarrow, "\lambda_{WU}"'] & & \rho'_{WV}\rho'_{VU}\Phi_U \arrow[dll, equal, "\theta'_{W,V,U}"] \\ \rho'_{WU}\Phi_U. & & \end{tikzcd}$$

(c) 各 U と $P\in\underline{\mathcal{G}}(U)$ に対して次が可換.

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbb{T}}(U) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cong"'] & \underline{\mathbb{T}}(U) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{Aut}(P) \arrow[r, "\Phi_U"] & \mathrm{Aut}(\Phi_U(P)). \end{tikzcd}$$

$\underline{\mathbb{T}}$-gerbeの分類

定理 (Giraud).

$$\{M\text{上の}\underline{\mathbb{T}}\text{-}\textit{gerbe}\}/\textit{iso} \cong H^2(M,\underline{\mathbb{T}}) \cong H^3(M,\mathbb{Z}).$$

コホモロジー類の作り方のみ記述.

$$\begin{cases} \mathfrak{U} = \{U_\alpha\}, \\ P_\alpha \in \underline{\mathcal{G}}(U_\alpha), \\ f_{\alpha\beta} \in \mathrm{Isom}(P_\beta, P_\alpha). \end{cases}$$

$\Rightarrow g_{\alpha\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}^{-1} f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} \in \mathrm{Aut}(P_\gamma) \cong \underline{\mathbb{T}}(U_{\alpha\beta\gamma})$.

$\Rightarrow [(g_{\alpha\beta\gamma})] \in H^2(M,\underline{\mathbb{T}})$.

接続つき$\underline{\mathbb{T}}$-gerbeの分類

- $\underline{\mathbb{T}}$-gerbeの“接続”とは,

$$\begin{cases} \mathrm{Co} & : \text{connective structure}, \\ K & : \text{curving}, \end{cases}$$

という概念. (曲率は3-curvatureという3形式.)

- 同型をCoとKがある場合に拡張できる.

定理 (Brylinski).

$$\{(\underline{\mathcal{G}}, \mathrm{Co}, K)\}/\textit{iso} \cong H^2(M, \mathcal{D}^2) \cong H^3(M, \mathbb{Z}(3)_D^\infty).$$

まとめ

	bundle gerbe	$\underline{\mathbb{T}}$-gerbe
接続1	接続	connective structure
接続2	curving	curving
曲率	3-curvature	3-curvature
同値関係	同型 安定同型	— 同型
位相的分類	$H^2(M,\underline{\mathbb{T}})$ $\cong H^3(M,\mathbb{Z})$	$H^2(M,\underline{\mathbb{T}})$ $\cong H^3(M,\mathbb{Z})$
接続つき分類	$H^2(M,\mathcal{D}^2)$	$H^2(M,\mathcal{D}^2)$
平坦	$H^2(M,\mathbb{T})$	$H^2(M,\mathbb{T})$

注意 平坦$\underline{\mathbb{T}}$-gerbe $\Leftrightarrow$ $\mathbb{T}$-gerbe. ($\mathbb{T}$は定数層)
(cf. 平坦主$\mathbb{T}$束 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{T}$-torsor)

Abelian gerbeの場の理論への応用

- Discrete torsion
- Chern-Simons理論
- Higher gerbeに関連した事柄

どういう場面, 状況でgerbeが使われるのかに力点を置いて説明するので, 詳細はしばしば省略する.

注意 自分の仕事に関連した応用ばかり話す. (特にはじめの二つ.) 他にも応用はある.

$\boxed{\text{Application, I}}$ Discrete torsion

目標: Sharpeによる "Vafaのdiscrete torsion" のgerbeを用いた解釈・説明, および関連した数学的トピックの解説.

- Vafaの仕事 (1986)

軌道体M/G上でB場を含む弦理論を考えたとき, Gの２コサイクルで表される量(discrete torsion)が分配関数にあらわれる.

- Sharpeの仕事 (1999)

"軌道体M/G上のB場 $=$ G同変gerbeの接続"

という視点からdiscrete torsionを説明した.

- 数学的トピック:

$\begin{cases}\text{同変接続つきgerbeの分類,}\\ \text{同変接続つきgerbeのholonomy.}\end{cases}$

Vafaの仕事

Discrete torsionが出てくる状況を説明する.

警告 誤解・曲解の可能性あり.

- 多様体M上の弦理論の分配関数

$$\begin{cases}\Sigma: \text{ 種数}n\text{の閉Riemann面},\\ F \in \mathcal{F}_\Sigma = C^\infty(\Sigma, M),\\ B \in \mathcal{B} = A^2(M)\end{cases}$$

汎関数(action functional):

$$I(F, B) = I_0(F) + 2\pi \int_\Sigma F^*B.$$

n-ループの分配関数(partition function) :

$$Z_\Sigma = \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{B}} \mathcal{D}F\mathcal{D}Be^{\sqrt{-1}I(F,B)}.$$

- 軌道体M/G上の弦理論の分配関数

有限群が作用: $G \curvearrowright M \Rightarrow$ 考慮する場が増える.

$\Sigma = T^2$ の時, $g, h \in G, [g, h] = 1$に対して,

$$\mathcal{F}_{T^2}(g, h) = \left\{ F : [0,1] \times [0,1] \to M \,\middle|\, \begin{array}{l} gF(0,t) = F(1,t) \\ hF(s,0) = F(s,1) \end{array} \right\}.$$

経路積分では次のような場を考える:

$$\mathcal{F}_{T^2} = \coprod_{[g,h]=1} \mathcal{F}_{T^2}(g, h),$$
$$\mathcal{B}^G = A^2(M)^G.$$

軌道体M/G上の分配関数:

$$\begin{aligned} Z_{T^2} &= \int_{\mathcal{F}_{T^2}\times\mathcal{B}^G} \mathcal{D}F\mathcal{D}Be^{\sqrt{-1}I(F,B)} \\ &= \sum_{[g,h]=1} \int_{\mathcal{F}_{T^2}(g,h)\times\mathcal{B}^G} \mathcal{D}F\mathcal{D}Be^{\sqrt{-1}I(F,B)} \\ &= \sum_{[g,h]=1} Z_{T^2}(g, h). \end{aligned}$$

● 種数が大きい場合でも同様に "twisted sector" からの寄与の和となる.

$$Z_{T^2} = \sum_{[g,h]=1} Z_{T^2}(g,h),$$
$$Z_{\Sigma_n} = \sum_{\prod[g_i,h_i]=1} Z_{\Sigma_n}(g_1,h_2;\dots;g_n,h_n).$$

● 弦理論からの要請: モジュラー不変性.
例えば, $\Sigma = T^2$ の場合,

$$Z_{T^2}(g,h) = Z_{T^2}(gh,h) = Z_{T^2}(h^{-1},g).$$

● ここで次のような問題を考える:
次のような位相(phase)

$$\epsilon(g_1,h_1;\dots;g_n,h_n) \in \mathbb{T}$$

を導入して,

$$Z'_{\Sigma_n}(g,h) = \epsilon(g_1,h_1;\dots;g_n,h_n) \times Z_{\Sigma_n}(g_1,h_2;\dots;g_n,h_n)$$

もモジュラー不変性を満たすようにできるか?

● Vafaの仕事
モジュラー不変性とRiemann面のfactorizationについての条件を課して位相の形を求めた:

Vafa's discrete torsion

$g,h \in G, [g,h]=1$ に対して, $\epsilon(g,h) \in \mathbb{T}$ が

$$\begin{cases} \epsilon(g_1g_2,h) &= \epsilon(g_1,h)\epsilon(g_2,h), \\ \epsilon(g,h) &= \epsilon(h,g)^{-1}, \\ \epsilon(g,g) &= 1, \end{cases}$$

を満たすとする. このとき,

$$\epsilon(g_1,h_1;\dots;g_n,h_n) = \epsilon(g_1,h_1)\cdots\epsilon(g_n,h_n)$$

とすればよい.

特に, 群 G の2-コサイクル

$$\omega : G \times G \to \mathbb{T},$$
$$\omega(h,k)\omega(gh,k)^{-1}\omega(g,hk)\omega(g,h)^{-1} = 1,$$

に対して,

$$\epsilon(g,h) = \omega(g,h)\omega(h,g)^{-1}$$

は上の条件を満たす.

<u>Sharpeの仕事</u>

Discrete torsion(2コサイクルで表される型)を, "B場 = gerbeの接続" という見方から導いた.

これを(多少アレンジして)解説する.

キーとなる "数学的事実" は次の二つ.

"数学的事実(1)"

群の2コサイクルによって, M 上の G 同変接続つき(bundle) gerbeの "同変構造" を, 接続を保ったまま, 捩ることができる:

$$(\mathcal{G},\nabla,B)_G \rightsquigarrow (\mathcal{G},\nabla,B)_G^{\omega}.$$

Sharpe自身は特別な場合を考えていた.

彼の仕事の後, 何人かの仕事により同変(bundle) gerbeの分類などが行われた.

(同変bundle gerbe, 2コサイクルによるtwistは後で見る. 分類については, 主張のみ述べる.)

"数学的事実(2)"

次のような関数("holonomy")がある.

$$\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)_G} : \mathcal{F}_{T^2}(g,h) \longrightarrow \mathbb{T}.$$

(a) $(\mathcal{G},\nabla)$: 自明, $B \in A^2(M)^G$ のとき,

$$\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)_G}(F) = e^{2\pi\sqrt{-1}\int_{[0,1]\times[0,1]} F^*B}$$

(b) 2コサイクル ω に対して,

$$\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)_G^{\omega}}(F) = \omega(g,h)\omega(h,g)^{-1}\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)_G}(F).$$

これも, Sharpe自身は特別な場合のみ考えた.

(一般の場合は最近書き下すことができた. しかし今回は省略.)

● 二つの性質から次の様にdiscrete torsionが出る．
まず，次の様に思いなおす:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^G &:= \{(\mathcal{G},\nabla)_G \text{上の不変接続}\, B\} \\ &= \{(\mathcal{G},\nabla)_G^{\omega} \text{上の不変接続}\, B\}, \\ e^{\sqrt{-1}I(F,B)} &:= e^{\sqrt{-1}I_0(F)}\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)_G}(F). \end{aligned}$$

(特殊な場合には，はじめの定義と一致する．)

すると，分配関数 $Z_{T^2}(g,h)$ は:

$$\int_{\mathcal{F}_{T^2(g,h)}\times\mathcal{B}^G} \mathcal{D}F\mathcal{D}Be^{iI_0(F)}\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)_G}(F).$$

２コサイクル ω で同変構造を振った(bundle) gerbe に対する分配関数 $Z^{\omega}_{T^2}(g,h)$ は，

$$\begin{aligned} &\int_{F_{T^2(g,h)}\times\mathcal{B}^G} \mathcal{D}F\mathcal{D}Be^{iI_0(F)}\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)^{\omega}_G}(F) \\ &\quad = \int \mathcal{D}F\mathcal{D}Be^{iI_0(F)}\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)_G}(F) \\ &\qquad\qquad \times\omega(g,h)\omega(h,g)^{-1}. \end{aligned}$$

結果として次を得る:

$$Z^{\omega}_{T^2}(g,h) = \epsilon(g,h)Z_{T^2}(g,h).$$

すなわち，あらかじめ同変(bundle) gerbeを一つ固定すれば，ω による別の同変構造の選択がdiscrete torsionを決定する．

$$\begin{array}{ccc} \{(\mathcal{G},\nabla)\text{の同変構造}\} & \longrightarrow & \{\text{discrete torsion}\} \\ \text{幾何構造} & & \text{物理系(分配関数)} \end{array}$$

(特別な場合には全単射になることもありうる．)

<u>数学的事実</u>

以下，同変(bundle) gerbeの定義や分類，および，"holonomy" について解説する．

● 定義のためには，多様体 M への群 G の作用に付随した単体的多様体(simplicial manifold)を使う．

$$G^{\bullet}\times M = \left\{ \begin{array}{l} G^p\times M,\ (p\geq 0) \\ \partial_i : \text{face map}, \\ s_i : \text{degeneracy map}. \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\partial_i : G^{p+1}\times M \to G^p\times M,\ (i=0,\dots p+1), \\ &s_i : G^p\times M \to G^{p+1}\times M,\ (i=0,\dots p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\partial_i(g_1,..,g_{p+1},x) \\ &\quad = \left\{ \begin{array}{l} (g_2,..,g_{p+1},x),\ (i=0) \\ (g_1,..,g_{i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2},..,g_{p+1},x), \\ (g_1,..,g_p,g_{p+1}x),\ (i=p+1), \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$s_i(g_1,..,g_p,x) = (g_1,..,g_i,e,g_{i+1},..,g_p,x).$$

● 関係式 $\partial_i\circ\partial_j = \partial_{j-1}\circ\partial_i$ に注意 $(i<j)$.

<u>同変接続つき主$\mathbb{T}$束とbundle gerbe</u>

補題． 有限群 $G\curvearrowright M$.
G 同変接続つき主 $\mathbb{T}$ 束 (P,A) $\Leftrightarrow$ 次の条件:
(a) $(P,A)\cdots$ M 上の接続つき主 $\mathbb{T}$ 束,
(b) $\sigma : G\times M\to\partial P\cdots$ 平坦切断,
(c) $\partial\sigma = 1$.

(一般の G の場合には，少し変更が必要.)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d] & \partial P \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d] & \\ M & G\times M \arrow[l, shift right, "\partial_0"'] \arrow[l, shift left, "\partial_1"] \arrow[u, bend right, "\sigma"'] & G^2\times M \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "\partial\sigma=1"'] & G^3\times M \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \partial P &= \partial_0^*P\otimes\partial_1^*P^{\otimes -1}, \\ \partial\partial P &= \partial_0^*(\partial P)\otimes\partial_1^*(\partial P)^{\otimes -1}\otimes\partial_2^*(\partial P) \\ &\cong G^2\times M\,\text{上の自明束} \end{aligned}$$

Proof. 次の対応を考えればよい．

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ M \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{tikzcd} P\otimes g^*P^{\otimes -1} \arrow[d] \\ \{g\}\times M \arrow[u, bend right, "\sigma(g)"'] \end{tikzcd}$$

□

定義． 有限群 $G \curvearrowright M$.
G同変接続つき *bundle gerbe* $(\mathcal{G},\nabla,B)_G \Leftrightarrow$
(a) 局所的に切断を持つ単体的な上への沈めこみ:

$$\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[d] & Y_1 \arrow[l, shift left, "\partial_0"'] \arrow[l, shift right, "\partial_1"] \arrow[d] & Y_2 \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] \arrow[d] & Y_3 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift left=0.7] \arrow[l, shift right=0.7] \arrow[l, shift right=2] \arrow[d] & \cdots \\
M & G \times M \arrow[l, shift left, "\partial_0"'] \arrow[l, shift right, "\partial_1"] & G^2 \times M \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] & G^3 \times M \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift left=0.7] \arrow[l, shift right=0.7] \arrow[l, shift right=2] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(b) M 上の接続つき *bundle gerbe* $(\mathcal{G},\nabla,B)$:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d] & \delta P \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d] \\
Y_0 \arrow[d, "\pi"] & Y_0^{[2]} \arrow[l] & Y_0^{[3]} \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "s"'] & Y_0^{[4]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift left=0.7] \arrow[l, shift right=0.7] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u, bend right, "\delta s = 1"'] \\
M
\end{tikzcd}$$

(c) $\partial(\mathcal{G},\nabla,B)$の接続つき擬$\mathbb{T}$束$((Q,t),A)$であって，$\partial B = F(A)$となるもの:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[d] & \delta Q^{\otimes -1} \otimes \partial P \arrow[d] & \delta\partial P \arrow[d] \\
Y_1 \arrow[d, "\pi"] & Y_1^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "t"'] & Y_1^{[3]} \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "\delta t = \partial s"'] \\
G \times M
\end{tikzcd}$$

(d) 平坦切断 $u : Y_2 \to \partial(Q,A)$ であって，$\delta u = \partial t^{\otimes -1}$, $\partial u = 1$となるもの.

<u>同変接続つきbundle gerbeの例</u>

M上のbundle gerbe $\mathcal{G} = (Y,P,s)$が，
強G同変(strongly G-equivariant)
$\Leftrightarrow$ Y, P, sがG同変:

$$\begin{tikzcd}
& & P \arrow[d] & \delta P \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d] \\
& & Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "s"'] & Y^{[3]} \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] \arrow[u, bend right, "\delta s = 1"'] & Y^{[4]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift left=0.7] \arrow[l, shift right=0.7] \arrow[l, shift right=2] \\
G \arrow[rru, bend left] \arrow[rruu, bend left] \arrow[rrruu, bend left] \arrow[rr, bend left] & & M
\end{tikzcd}$$

強G同変bundle gerbe $\mathcal{G}$の接続∇とcurving B
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$の接続とcurvingで微分形式としてG不変.

<u>例</u> G同変な主束から構成したlifting bundle gerbe.

$(\mathcal{G},\nabla,B)$: 強同変
$\Rightarrow \begin{cases} \text{平坦切断 } \sigma : G \times Y^{[2]} \to \partial P, \ \partial\sigma = 1, \\ \partial B = 0. \end{cases}$
従って，

$$(G^\bullet \times Y, (\mathcal{G},\nabla,B), ((\mathbf{1},\sigma),\mathbf{0}), 1)$$

は先程の意味のG同変接続つきbundle gerbe.

● 同変構造のtwist:

有限群の2コサイクル$\omega \in Z^2(G, H^0(M,\mathbb{T}))$

$$\Leftrightarrow \omega : G^2 \times M \to \mathbb{T}, \ \partial\omega = 1, d\log\omega = 0.$$

M上の同変接続つきbundle gerbe

$$(\mathcal{G},\nabla,B)_G = (Y_\bullet, (\mathcal{G},\nabla,B), ((Q,t),A), u)$$

に対して，

$$(\mathcal{G},\nabla,B)_G^\omega = (Y_\bullet, (\mathcal{G},\nabla,B), ((Q,t),A), u\omega)$$

もM上の同変接続つきbundle gerbe.

$$\begin{tikzcd}
\partial Q \arrow[d] \\
Y_2 \arrow[u, bend left, "u"] \arrow[d] \\
G^2 \times M
\end{tikzcd}$$

一般にωによるtwistは安定同値類を変える.
また，2コサイクル以外からくるtwistもありうる.

<u>同変接続つき主$\mathbb{T}$束とbundle gerbeの分類</u>

$G^\bullet \times M$上の層を係数とするコホモロジー

$$H^m(G^\bullet \times M, \mathcal{D}^n)$$

で分類される.

定理． 有限群 $G \curvearrowright M$.
(a) 接続なしの場合について:

$\{M$上のG同変主$\mathbb{T}$束$\}/$*iso*
$\quad \cong H^1(G^\bullet \times M, \mathcal{D}^0) \cong H^2_G(M,\mathbb{Z})$,
$\{M$上のG同変*bundle gerbe*$\}/$*s-iso*
$\quad \cong H^2(G^\bullet \times M, \mathcal{D}^0) \cong H^3_G(M,\mathbb{Z})$.

(b) 接続つきの場合について:

$\{M$上のG同変接続つき主$\mathbb{T}$束$\}/$*iso*
$\quad \cong H^1(G^\bullet \times M, \mathcal{D}^1)$,
$\{M$上のG同変接続つき*bundle gerbe*$\}/$*s-iso*
$\quad \cong H^2(G^\bullet \times M, \mathcal{D}^2)$.

<u>注意</u> 一番上は服部-吉田の結果からも出る.

接続つき bundle gerbe の同変構造の分類

$G^\bullet \times M$ の構造から入る自然なスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p_{gp}(G, H^q(M, \mathcal{D}^2)) \Rightarrow H^*(G^\bullet \times M, \mathcal{D}^2)$$

を計算することにより，接続つき bundle gerbe が同変になり得るとすれば，同変にする方法は安定同値を除いて，次の群 $\mathcal{E}$ の元と一対一に対応する：

$$H^1(M, \mathbb{T})^G \longrightarrow H^2_{gp}(G, H^0(M, \mathbb{T})) \to \mathcal{E} \to H^1_{gp}(G, H^1(M, \mathbb{T})) \to H^3_{gp}(G, H^0(M, \mathbb{T})).$$

特に $\pi_0(M) = \pi_1(M) = 0$ ならば，

$$\mathcal{E} \cong H^2_{group}(G, \mathbb{T}).$$

Holonomy

● 群作用がない場合．

一般に，S が d 次元有向閉多様体のとき，同型写像

$$\int_S : H^d(S, \mathcal{D}^d) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

がある．（$H^d(S, \mathcal{D}^d) \cong A^d(S)/A^d(S)_{\mathbb{Z}}$ という同型のもとでは，積分そのもの．具体的に Čech コサイクルで記述する公式もある.）

$$\begin{cases} (\mathcal{G}, \nabla, B): & M \text{ 上の接続つき bundle gerbe} \\ \Sigma: & \text{閉 Riemann 面}, \\ F: \Sigma \longrightarrow M, & \end{cases}$$

に対して，

$$H^2(M, \mathcal{D}^2) \xrightarrow{F^*} H^2(\Sigma, \mathcal{D}^2) \cong \mathbb{T}$$

による $\hat{\delta}(\mathcal{G}, \nabla, B)$ の像を holonomy という．

● 有限群作用 有限群 $G \curvearrowright M$ がある場合

$$\begin{cases} (\mathcal{G}, \nabla, B)_G: & G \text{ 同変接続つき bundle gerbe} \\ F \in \mathcal{F}_{T^2}(g, h) & \end{cases}$$

に対しては，やはりコホモロジーを通して定義できる．

ここでは，同変 G 接続つき bundle gerbe

$$(Y_\bullet, (\mathcal{G}, \nabla, B), ((Q, t), A), u)$$

として，

$$\begin{cases} Y_\bullet = G^\bullet \times M, \\ P = \text{自明}, \\ \nabla = \text{自明}, \\ Q = \text{自明}, \\ t = 1, \end{cases}$$

という状況における “holonomy” のみ記述する．

この状況で出てくるデータは以下の通り：

$$\begin{cases} B \in \sqrt{-1}A^2(M), & \\ A_g \in \sqrt{-1}A^1(M), & \\ u_{g,h} \in C^\infty(M, \mathbb{T}), & (g, h \in G) \end{cases}$$

$$g^*B - B = dA_g,$$
$$A_{gh} = h^*A_g + A_h + d\log u_{g,h},$$
$$(u_{h,k})(u_{gh,k})^{-1}(u_{g,hk})h^*(u_{g,h}) = 1.$$

すると，“holonomy” $\mathrm{Hol}_{(\mathcal{G},\nabla,B)_G}(F)$ は，

$$\exp 2\pi \left(\int_{[0,1]\times[0,1]} F^*B \right)$$
$$\times \exp 2\pi \left(\int_{[0,1]} F(0,t)^*A_g - \int_{[0,1]} F(s,0)^*A_h \right)$$
$$\times \left(u_{g,h} u_{h,g}^{-1} \right) (F(0,0)).$$

(群の 2 コサイクルで “同変構造” を twist すると，discrete torsion が出てくることが見て取れる.)

$\boxed{\text{Application, II}}$ Chern-Simons理論

解説したいこと:

- ある(bundle) gerbeがCS理論の枠組みに現れる.

- Group valued moment mapとの関連.

境界つきRiemann面上の
平坦接続のモジュライ空間
(symplectic)

$\uparrow$ 簡約

Group valued moment map
[Alekseev-Malkin-Meinrenken]

$\uparrow$ 簡約

ある同変接続つき(bundle) gerbe

Chern-Simons理論 (三次元空間上のゲージ理論)

$$\begin{cases} M \cdots \text{ 3次元有向閉多様体}, \\ P = M \times SU(2) \cdots \ M \text{上の主} SU(2)\text{束}, \\ A \in \mathcal{A} = A^1(M, \mathfrak{su}(2)) \cdots \ P \text{の接続}. \end{cases}$$

Chern-Simons汎関数:

$$S(A) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A).$$

分配関数:

$$Z(M) = \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A e^{-2\pi i S(A)}.$$

- これを数学的に定式化できれば，Mの位相不変量が得られる．[Witten]

- $S(A)$の形式的性質から，$Z(M)$を(再)定義する．($\rightsquigarrow$ 量子不変量)

- $S(A)$の形式的性質を調べる中でgerbeが現れる．

Chern-Simons汎関数を詳しく見る

$$\text{主}SU(2)\text{束}: \begin{array}{c} P \\ \downarrow \\ M \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_P = \{P\text{の接続}\}, \\ \mathcal{S}_P = \{P\text{の切断}\}. \end{cases}$$

$$\tilde{S} : \mathcal{A}_P \times \mathcal{S}_P \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{S}(A, s) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M s^*\mathrm{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A).$$

切断の取替えた時の振る舞いを調べると次を得る:

	closed	non-closed
$P \to M$ 3次元	$e^{S_P} : \mathcal{A}_P \to \mathbb{T}$ CS 汎関数	$e^{S_P} : \mathcal{A}_P \times \mathcal{S}_{\partial P} \to \mathbb{T}$ CS 汎関数

境界を持つ場合のCS汎関数は，ある複素直線束(主$\mathbb{T}$束)の切断(自明化)としても定式化できる．

Chern-Simons直線束

	closed	non-closed
$P \to M$ 3次元	$e^{S_P} : \mathcal{A}_P \to \mathbb{T}$ CS 汎関数	$e^{S_P} : \mathcal{A}_P \times \mathcal{S}_{\partial P} \to \mathbb{T}$ $e^{S_P} \in \Gamma(\mathcal{A}_P, r^*\mathcal{L}_{\partial P})$ $r : \mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_{\partial P}$
$Q \to \Sigma$ 2次元	$\mathcal{L}_Q \to \mathcal{A}_Q$ CS 直線束	

- $\mathcal{A}_Q$には自然なsymplectic形式があり，$\mathcal{L}_Q \to \mathcal{A}_Q$はゲージ変換群Aut($Q$)の作用について同変な前量子化直線束である．

$$\omega(A; \alpha, \beta) = \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\alpha \wedge \beta).$$

- 自然な運動量写像を使って，symplectic商をとると，Σ上の平坦$SU(2)$接続のモジュライ空間と前量子化直線束が得られる．

$$\mu : \mathcal{A}_Q \to \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(Q))^*,$$
$$\langle \xi | \mu(A) \rangle = \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\xi F_A).$$

境界がある場合のCS直線束

• Σ ($\partial\Sigma \neq \emptyset$)におけるCS直線束は，境界の切断に依存する．(CS汎関数の場合と同様.)

• 「境界がある場合のCS汎関数 $=$ ある複素直線束の自明化」と見れたように，「境界がある場合のCS直線束 $=$ ある(bundle) gerbeの自明化(擬複素直線束)」という見方ができる．

	closed	non-closed
$P \to M$ 3次元	$e^{S_P} : \mathcal{A}_P \to \mathbb{T}$ CS 汎関数	$e^{S_P} : \mathcal{A}_P \times \mathcal{S}_{\partial P} \to \mathbb{T}$ $e^{S_P} \in \Gamma(\mathcal{A}_P, r^*\mathcal{L}_{\partial P})$ $r : \mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_{\partial P}$
$Q \to \Sigma$ 2次元	$\mathcal{L}_Q \to \mathcal{A}_Q$ CS 直線束	$\mathcal{L}_Q \to \mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_{\partial Q}$ “gerbeの自明化”
$R \to S$ 1次元	$\mathcal{A}_R$上の gerbe	

Chern-Simons (bundle) gerbe

$R \to S$: 1次元有向閉多様体上の主$SU(2)$束，
簡単のため，$S = S^1$の場合のみ考える．

$\mathcal{A}_R \times \mathcal{S}_R$には$LSU(2) = C^\infty(S^1, SU(2))$が切断の取替えとして作用し，$\mathcal{A}_R$上の主束になる．
$(A, s) \mapsto (A, sg)$

定義． *CS bundle gerbe* $\mathcal{G}_R = (Y, P, s)$
$\Leftrightarrow$ 主$LSU(2)$束$Y = \mathcal{A}_R \times \mathcal{S}_R$と普遍中心拡大

$$1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow \widehat{L}SU(2) \longrightarrow LSU(2) \longrightarrow 1$$

に付随した$\mathcal{A}_R$上の*lifting bundle gerbe.*

• $\mathcal{G}_R$は強$\mathrm{Aut}(R)$同変bundle gerbe.

ゲージ変換群$\mathrm{Aut}(R)$は$Y = \mathcal{A}_R \times \mathcal{S}_R$に，

$$\varphi \cdot (A, s) = ((\varphi^{-1})^*A,\ \varphi \circ s)$$

と(左から)作用する．

• $\mathcal{G}_R$は$H^3_{\mathrm{Aut}(R)}(\mathcal{A}_R, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$の生成元を実現.

Chern-Simons 擬$\mathbb{T}$束(直線束)

$$\begin{cases} \Sigma \ \cdots 2\text{次元有向コンパクト多様体}(\partial\Sigma = S^1), \\ Q \to \Sigma \ \cdots \ \Sigma\text{上の主}SU(2)\text{束}(\partial Q = R), \\ r : \mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_R \ \cdots \ \text{自然な制限写像}. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ $r^*\mathcal{G}_R$は自然に強$\mathrm{Aut}(Q)$同変bundle gerbe.

命題． $r^*\mathcal{G}_R$の$\mathrm{Aut}(Q)$同変な擬直線束$(\mathcal{L}_Q, v)$がQに付随して構成できる．

• $r^*\mathcal{G}_R$は主束$r^*Y \to \mathcal{A}_R$に付随するlifting bundle gerbeなので，$\mathcal{L}_Q$は直線束$\mathcal{L}_Q \to r^*Y = \mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_R$として実現されるが，これは境界つきの場合のCS直線束に一致する．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_R & \xrightarrow{r \times \mathrm{id}} & \mathcal{A}_R \times \mathcal{S}_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_Q & \xrightarrow{r} & \mathcal{A}_R. \end{array}$$

Group valued moment map

$SU(2)$の$SU(2)$への随伴作用を考えるとき，

$$\chi \in A^3(SU(2)), \qquad e \in A^1(SU(2), \mathfrak{su}(2)^*),$$

$$\chi = \frac{1}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3,$$
$$\langle \xi | e \rangle = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Tr}(\xi(g^{-1}dg + dgg^{-1})),$$

$$d\chi = 0, \qquad g^*\chi = 0,$$
$$\langle \xi | de \rangle + \iota_{\xi^*}\chi = 0, \qquad g^*e = Ad_g e.$$

定義 (Alekseev-Malkin-Meinrenken).
$$\begin{cases} SU(2)\text{が作用する多様体 } X, \\ \text{同変写像 } \Phi : X \to SU(2), \\ \text{不変2形式 } \sigma \in A^2(X), \end{cases}$$
というデータが，

$$d\sigma = \Phi^*\chi, \quad \iota_{\xi^*}\sigma = \langle \xi | \Phi^* e \rangle$$

および，ある非退化性に関する条件を満たすとき，準*Hamilton*空間(*quasi-Hamiltonian space*)という．

AMMによる平坦$SU(2)$接続のモジュライ

準Hamilton空間($\partial\Sigma = S^1$):

$$(\mathcal{A}_Q^{\mathrm{flat}}/\mathrm{Aut}(Q)_0, \Phi, \sigma)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_Q^{\mathrm{flat}} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"'] & \mathcal{A}_R \arrow[d, "q"] \\
\mathcal{A}_Q^{\mathrm{flat}}/\mathrm{Aut}(Q)_0 \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{A}_R/\mathrm{Aut}(R)_0
\end{tikzcd}$$

$$q^*\sigma = \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\alpha \wedge \beta) + r^*\Upsilon,$$

ただし$\Upsilon \in A^2(\mathcal{A}_R)$は$\begin{cases} \mathrm{Aut}(R)_0 \text{不変}, \\ d\Upsilon = q^*\chi. \end{cases}$

準Hamilton簡約により得られる空間

$$\Phi^{-1}(g)/g\text{の安定化群}$$

は，Σ上の平坦$SU(2)$接続であって，$\partial\Sigma = S^1$の周りのホノロミーが$g \in SU(2)$に共役なもののモジュライ空間．(σからsymplectic構造が入る.)

CS bundle gerbe $\mathcal{G}_R = (Y, P, s)$からのデータ

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d] & \delta P \arrow[d, "s"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\delta s=1"] \\
 & Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & Y^{[3]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & Y^{[4]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left=2] \\
\mathrm{Aut}(R) \arrow[r] \arrow[ru, bend left] \arrow[rruu, bend left] \arrow[rrruu, bend left] & \mathcal{A}_R & & &
\end{tikzcd}$$

次を満たす$\mathcal{G}_R$の不変接続∇と不変curving Bが構成できる:

$$\iota_{\xi^*}\nabla = 0,$$
$$\iota_{\xi^*}B = \langle \xi(0) | q^*e \rangle,$$
$$H_B = q^*\chi.$$

ただし，$\xi \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(R)) \cong C^\infty(S^1, \mathfrak{su}(2))$.

$\mathrm{Aut}(R)_0$で商をとると，$SU(2)$上の$SU(2)$同変接続つきbundle gerbe $(\bar{\mathcal{G}}, \bar{\nabla}, \bar{B})$であって，$H_{\bar{B}} = \chi$となるものが得られる．

CS擬直線束$(\mathcal{L}_Q, v)$からのデータ

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L}_Q^+ \arrow[d] & \delta(\mathcal{L}_Q^+)^{\otimes -1} \otimes r^*P \arrow[d, shift left, "v"] & \delta r^*P \arrow[d, "\delta v = r^*s"] \\
 & r^*Y \arrow[d, "\pi"] & r^*Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & r^*Y^{[3]} \arrow[l] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\
\mathrm{Aut}(Q) \arrow[r] \arrow[ru, bend left] \arrow[ruu, bend left] \arrow[rruu, bend left] & \mathcal{A}_Q & &
\end{tikzcd}$$

次を満たす$(\mathcal{L}_Q^+, v)$の不変接続Aが構成できる:

$$\begin{cases} \omega \in A^2(\mathcal{A}_Q), & \pi^*\omega = F(A) - r^*B, \\ \mu : \mathcal{A}_Q \to \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(Q))^*, & \langle \xi | \mu \rangle = \iota_{\xi^*}A, \end{cases}$$

と定義すると，

$$\omega = \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\alpha \wedge \beta) + r^*\Upsilon \ (= q^*\sigma),$$
$$\langle \xi | \mu(A) \rangle = \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\xi F(A)).$$

(特に，$\langle \xi | d\mu \rangle + \iota_{\xi^*}\omega = \langle \xi(0) | r^*q^*de \rangle$.)

$\mu^{-1}(0)/\mathrm{Aut}(Q)_0$上の$SU(2)$同変bundle gerbe $\bar{r}^*(\bar{\mathcal{G}}_R, \bar{\nabla}, \bar{B})$の$SU(2)$同変擬直線束$((\bar{\mathcal{L}}_Q, \bar{v}), \bar{A})$が得られ，$\sigma = F(\bar{A}) - \bar{r}^*\bar{B}$となる．

つまり

CS bundle gerbeとCS擬直線束の接続の情報から，AMMのデータが得られている．逆に言えば，AMMのデータに幾何的な意味付けを与えている．

このことから，次の様な問題が考えられる:

- (bundle) gerbeによるAMMの概念の一般化?
(gerbeつき多様体に値をとる運動量写像?)

- 擬直線束を使った幾何的量子化?
(実際の有限次元ベクトル空間を取り出す手法?
twisted Kとの関連?)

$\boxed{\text{Application, III}}$ Higher gerbeのゲージ理論

解説したいこと: 高次のgerbeとそのゲージ理論

- Higher abelian gerbe

- Higher gerbeのYang-Mills理論

- Higher gerbeのChern-Simons理論

2-gerbe

$$\text{主束} \rightsquigarrow \text{gerbe} \rightsquigarrow \text{2-gerbe}$$

一般の2-gerbe : Breen,
$\cdots$ 2-categoryの層によって定式化される.
接続・曲率(abelian) : Brylinski-McLaughlin,
(bundle 2-gerbe : Stevenson.)

	主$\mathbb{T}$束	gerbe	2-gerbe
分類	$H^1(M,\mathbb{T})$ $H^2(M,\mathbb{Z})$	$H^2(M,\mathbb{T})$ $H^3(M,\mathbb{Z})$	$H^3(M,\mathbb{T})$ $H^4(M,\mathbb{Z})$
接続	一種類 $A^1(M)$	二種類 $A^2(M)$	三種類 $A^3(M)$
曲率	2形式	3形式	4形式
分類	$H^1(M,\mathcal{D}^1)$	$H^2(M,\mathcal{D}^2)$	$H^3(M,\mathcal{D}^3)$

注意 "最高位の接続" だけが本質的.

$$H^2(M,\mathcal{D}^1) \cong H^2(M,\mathbb{T}),$$
$$H^3(M,\mathcal{D}^2) \cong H^3(M,\mathcal{D}^1) \cong H^3(M,\mathbb{T}).$$

Higher (abelian) gerbe

- 一般に, 高次のコホモロジーで分類される幾何学的対象のことを, "higher gerbe (n-gerbe)" と呼ぶ.

$$\begin{aligned} H^{n+1}(M,\mathbb{T}) &\cong H^{n+2}(M,\mathbb{Z}) \\ &\cong \{\text{“}n\text{-gerbe”}\}/\text{iso}, \\ H^{n+1}(M,\mathcal{D}^{n+1}) &\cong \{\ \text{“接続つき}n\text{-gerbe”}\ \}/\text{iso}, \\ A^{n+1}(M) &\cong \{\ \text{“}n\text{-gerbeの接続”}\ \}. \end{aligned}$$

- ただし, 一般のnに対しては, 数学的に厳密な定式化はなされていない(と思う).
$\cdots$ モデルの一つ: Čech コサイクル $=$ n-gerbe.

- しかし, 形式的に "n-gerbe" を考えることには, 数学的直感を補助するという意味がある(と思う).
$\cdots$ 弦理論やM理論での高次微分形式の幾何的解釈.
$\cdots$ 主束の理論(e.g. ゲージ理論)の一般化の示唆.

$U(1)$ Yang-Mills理論(電磁気学)の一般化

$P \to M$: Riemann多様体上の主$\mathbb{T}$束.
Yang-Mills汎関数 $I : \mathcal{A}(P) \to \mathbb{R}$

$$I(A) = \int_M F_A \wedge *F_A.$$

$\Rightarrow$ 運動方程式 $d^*F_A = 0$.

$c_1(P)$の$H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{R}) \cong H^2_{DR}(M)$の像を代表する調和形式は一意に存在するので,

$$\begin{aligned} &\{A \in \mathcal{A}(P) |\ d^*F_A = 0\}/C^\infty(M,\mathbb{T}) \\ &\quad \cong \{a \in A^1(M) |\ da = 0\}/C^\infty(M,\mathbb{T}) \\ &\quad \cong H^1(M,\mathbb{R})/H^1(M,\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$(\mathcal{G},\nabla)$: M上のbundle gerbe.
"Yang-Mills汎関数" $I : \mathcal{B}(\mathcal{G},\nabla) \to \mathbb{R}$

$$I(B) = \int_M H_B \wedge *H_B.$$

$\Rightarrow$ 運動方程式 $d^*H_B = 0$.

$$\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{G},\nabla) |\ d^*H_B = 0\}/\text{gauge}.$$

$\cdots$ (bundle) gerbeのゲージ変換とは?

(bundle) gerbeのゲージ変換群

- 結論から言えば,

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\mathcal{G},\nabla) &= \{\text{接続つき主}\mathbb{T}\text{束}\}/\mathrm{iso} \\ &\cong H^1(M,\mathcal{D}^1).\end{aligned}$$

- コホモロジーによる説明:

$$\begin{tikzcd} H^1(M,\mathcal{D}^1) \arrow[r] & A^2(M) \arrow[r] & H^2(M,\mathcal{D}^2) \arrow[d, "surj"] \\ & & H^2(M,\mathbb{T}) \end{tikzcd}$$

- 幾何的説明: 接続つき主$\mathbb{T}$束(Q,θ)の作用は,

$$\begin{aligned}(\mathcal{G},\nabla,B) &\mapsto (\mathcal{G},\nabla,B+\pi^*F_\theta), \\ ((R,v),A) &\mapsto ((R\otimes\pi^*Q,v),A\otimes\pi^*\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d] & \delta R^{\otimes -1}\otimes P \arrow[d, "v"] & \delta P \arrow[d, "\delta v = s"] \\ Q \arrow[d] & Y \arrow[d, "\pi"] & Y^{[2]} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & Y^{[3]} \arrow[l, shift left] \arrow[l] \arrow[l, shift right] \\ M & M & & \end{tikzcd}$$

(接続つき主$\mathbb{T}$束の圏が "作用" している.)

- "GerbeのYang-Mills接続" のモジュライは,

$$\begin{aligned}&\{B\in\mathcal{B}(\mathcal{G},\nabla)|\ d^*H_B=0\}/H^1(M,\mathcal{D}^1) \\ &\cong \{b\in A^2(M)|\ db=0\}/H^1(M,\mathcal{D}^1) \\ &\cong H^2(M,\mathbb{R})/H^2(M,\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

(結果はやや自明だが, きちんと意味を持っている.)

- 一般に, 次の完全系列がある.

$$\begin{tikzcd} H^{n+1}(M,\mathbb{R})/H^{n+1}(M,\mathbb{Z}) \arrow[d, "inj"] \\ H^{n+1}(M,\mathcal{D}^{n+1}) \arrow[d, "surj"] \\ \{(c,\omega)\in H^{n+2}(M,\mathbb{Z})\times A^{n+2}(M)_{\mathbb{Z}}|c_{\mathbb{R}}=[\omega]\}. \end{tikzcd}$$

主$\mathbb{T}$束とgerbeのYang-Mills接続のモジュライは, 上の完全系列を使っても直ちにわかる. $(n=0,1)$.

$\Rightarrow$ "n-gerbeのYang-Mills接続" のモジュライは,

$$H^{n+1}(M,\mathbb{R})/H^{n+1}(M,\mathbb{Z})$$

になると考えられる. (きちんと定式化できれば.)

$U(1)$ Chern-Simons理論の一般化

(低次元トポロジーへの応用が興味深かった.)

$P\to M\ \cdots$ 有向閉3次元多様体上の主$\mathbb{T}$束.

Chern-Simons汎関数 $S:\mathcal{A}(P)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

$$S(A)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{\tilde{M}}F_{\tilde{A}}\wedge F_{\tilde{A}}\quad \mathrm{mod}\ \mathbb{Z},$$

ただし, $\tilde{M}$はコンパクト有向4次元多様体で,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, equal] \arrow[d] & \partial\tilde{P} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \tilde{P} \arrow[d] \\ M \arrow[r, equal] & \partial\tilde{M} \arrow[r, hook] & \tilde{M}^4 \end{tikzcd} \qquad \partial\tilde{A}=A.$$

(注意: $\Omega_3(K(\mathbb{Z},2))=0$.)

特に, $P=M\times\mathbb{T}$の時,

$$S(A)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_M A\wedge dA\quad \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}.$$

運動方程式: $F_A=0$.

$U(1)$ CS汎関数の内在的な定義

(4次元多様体への拡張を使わずに定義できる.)

- Deligneコホモロジーのカップ積

$$\begin{tikzcd} H^p(X,\mathcal{D}^p)\otimes_{\mathbb{Z}}H^q(X,\mathcal{D}^q) \arrow[d, "\cup"] \\ H^{p+q+1}(X,\mathcal{D}^{p+q+1}). \end{tikzcd}$$

符号付可換: $x_p\cup x_q=(-1)^{(p+1)(q+1)}x_q\cup x_p$.

- Deligneコホモロジーの積分

$$\int_X : H^d(X,\mathcal{D}^d)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

ただし, Xはd次元有向閉多様体.
$(d+1)$次元コンパクト有向多様体$\tilde{X}$に対し,

$$\int_{\partial\tilde{X}}x|_{\partial\tilde{X}}=\int_{\tilde{X}}\delta(x)\quad \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}.$$

$(x\in H^d(\tilde{X},\mathcal{D}^d)\xrightarrow{\delta}A^{d+1}(\tilde{X})_{\mathbb{Z}})$

- $S:\mathcal{A}(P)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$の内在的定義は次の様になる:

$$S(A)=\int_M\hat{c}_1(P,A)\cup\hat{c}_1(P,A).$$

$\cdots$ これでhigher gerbeのCS汎関数を定義する.

Higher abelian gerbeのCS汎関数

• Deligneコホモロジーのカップ積と積分から，

$$H^{n+1}(M,\mathcal{D}^{n+1}) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad x \mapsto \int_M x \cup x,$$

が定義されるために，Mの次元は$2n+3$.
($n=0$は主$\mathbb{T}$束のCS汎関数.)

• GerbeのCS汎関数($n=1$).
$(\mathcal{G},\nabla)$：5次元有向閉多様体上のbundle gerbe.
CS汎関数 $S:\mathcal{B}(\mathcal{G},\nabla)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$S(B)=\int_M \hat{\delta}(\mathcal{G},\nabla,B)\cup\hat{\delta}(\mathcal{G},\nabla,B).$$

だが，これは位相的な量で書ける(運動方程式なし):
符号付可換性⇒ $S(B)\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_2$.

$$S(B)=\langle \mathrm{Sq}^2(\overline{\delta(\mathcal{G})}),[M]\rangle.$$

($\overline{\delta(\mathcal{G})}\in H^3(M,\mathbb{Z}_2)$はDD類のmod 2簡約.)

一般に，nが奇数だと同じ事が起こる.
$\rightsquigarrow$ $n=2k$の場合でないと汎関数の意味が無い.

Abelian $2k$-gerbeのCS汎関数

• $4k+3$次元有向閉多様体M上では，

$$H^{2k+1}(M,\mathcal{D}^{2k+1}) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad x \mapsto \int_M x \cup x,$$

が "$2k$-gerbeのCS汎関数" と考えられる.
("$2k$-gerbe" をきちんと定式化できれば.)

• WittenのM理論に関する仕事の中に，

3形式ゲージ場(C場)の7次元(レベル1)CS汎関数

があらわれる.(2-gerbeには言及していないが，2-gerbeが幾何的な枠組みを与えている.)

特にM理論における5ブレーンの有効作用の定義に

3形式ゲージ場の7次元レベル$\frac{1}{2}$CS汎関数

を応用している.

$U(1)$ゲージ場に対するレベル1/2のCS汎関数

• レベル1の場合(M：3次元有向閉多様体)

$$S(A)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{\tilde{M}} F_{\tilde{A}}\wedge F_{\tilde{A}} \quad \mathrm{mod}\ \mathbb{Z},$$

$\rightsquigarrow$ Riemann面Σに対して前量子化直線束:

$$\begin{array}{c}(\mathcal{L},\nabla)\\ \downarrow\\ (\mathcal{J}_\Sigma,2\omega)\end{array} \qquad \begin{cases}\mathcal{J}_\Sigma=H^1(\Sigma,\mathbb{R})/H^1(\Sigma,\mathbb{Z}),\\ \omega(a,b)=\int_\Sigma a\wedge b.\end{cases}$$

(Holonomyを$\Sigma\times S^1$上のCS汎関数で定義.)
$\cdots$ Σの向きを保つ微分同相で不変.

• レベル1/2の場合(M：3次元スピン閉多様体)

$$S'(A)=\frac{1}{2(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{\tilde{M}} F_{\tilde{A}}\wedge F_{\tilde{A}} \quad \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}.$$

($\Omega_3^{Spin}(K(\mathbb{Z},2))=0$と，4次元スピン閉多様体の交叉形式が偶であることを使う.)

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}(\mathcal{L}',\nabla')\\ \downarrow\\ (\mathcal{J}_\Sigma,\omega)\end{array}$$

$\cdots$ Σのスピン構造を保つ微分同相で不変.

M理論の5ブレーンの有効作用

W：6次元スピン閉多様体($\subset Q^{11}$),
$\mathcal{J}_W=H^3(W,\mathbb{R})/H^3(W,\mathbb{Z})$： "Jacobian,"
$\cdots$ WのRiemann計量をとると，Hodge starで複素構造が入る.
$\omega(c_1,c_2)=\int_W c_1\wedge c_2$：$\mathcal{J}_W$の偏極.

接続つき複素直線束$(\mathcal{K},\nabla_{\mathcal{K}})\to(\mathcal{J}_W,\omega)$があれば，
$\mathcal{K}$は正則直線束になり，

$$\dim_{\mathbb{C}}\Gamma^{\mathrm{hol}}(\mathcal{J}_W,\mathcal{K})=1.$$

この正則切断をWの有効作用という.

• Wittenは，$(\mathcal{K},\nabla_{\mathcal{K}})$をスピン構造を保つ微分同相で不変に構成するために，C場に対するレベル1/2のCS汎関数を使った.($H^4(W,\mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}=0$が必要.)

• HopkinsとSingerは，"コホモロジー的" に一般の場合の$(\mathcal{K},\nabla_{\mathcal{K}})$を構成した.

$\cdots$ いずれも2-gerbeは出てこないが，2-gerbeが幾何的枠組みを与えていると考えられる.

まとめ

• 主束を一般化してhigher gerbeを使っても，(少なくとも形式的には)ゲージ理論の一般化を考えることができる．特に，2-gerbe以下なら，数学的にきちんと定式化しうる．

• その一般化は，M 理論などに実際に現れ，幾何学的視点を与えることもある．また，higher gerbeを使って幾何学的に捉えられそうな状況もある．

$\cdots$ 全く無意味，というわけではない．(一番の主張)

$\cdots$ “Higher gerbeの(示唆する)ゲージ理論” から意味のある幾何学的情報を取り出すことは非常に興味深い問題である．