フォーラム

代数幾何学を概観する

桂 利行

1 代数幾何学とは

代数幾何学は代数方程式を扱う学問である．本稿では，複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の代数幾何を考え，代数方程式を考える場として $\boldsymbol{C}^n$ をとる．$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{C}^n$ とおいて，これを**アフィン $\boldsymbol{n}$ 空間**という．$X_1,\cdots,X_n$ を変数とし，複素数を係数とする多項式の共通零点の集合 X：

$$f_1(X_1,\cdots,X_n)=0,\cdots,f_m(X_1,\cdots,X_n)=0$$

を考える．X を**アフィン代数的集合**という．アフィン代数的集合 X に対し，2つの空ではないアフィン代数的集合 $Y, Z(Y\neq X, Z\neq X)$ が存在し，$X=Y\cup Z$ と書けるとき，X は**可約**であるという．可約ではないとき**既約**という．例えば，$\boldsymbol{C}^2$ の中で $X_1(X_1+X_2)=0$ で定義された代数的集合 X は，$X_1=0$ で定義される代数的集合 Y と，$X_1+X_2=0$ で定義される代数的集合 Z を用いて，$X=Y\cup Z$ と表せるから可約である．要するに，既約な代数的集合とは，2つにわけられないような代数的集合のことである．既約なアフィン代数的集合を**アフィン代数多様体**という．独立に動きうる変数の数をアフィン代数多様体の**次元**という．例えば，$\boldsymbol{C}^2$ の中で $X_1{}^2-X_2=0$ で定義されるアフィン代数多様体の場合，独立に動きうる変数は1つだけであるから1次元である．1次元のとき**アフィン代数曲線**，2次元のとき**アフィン代数曲面**という．一般の代数多様体はアフィン代数多様体を多項式関数で貼り合わせたものである．代数幾何学はこのような**代数多様体**を研究対象とし，どのような代数多様体が存在し，各々の代数多様体がどのような性質を有するかを研究する分野である．

かつら としゆき．東京大学大学院数理科学研究科．

2 歴　史

この節では，代数の観点からみた代数幾何の歴史の重要なポイントをふりかえる．代数幾何学の源流がどこにあるかということについては様々な考え方があろうが，本格的な代数幾何の研究は19世紀前半の G. F. B. Riemann によるリーマン面の理論に始まると考えるのが妥当であろう．1946年，A. Weil は，整数論で用いるため，抽象的な体の上の代数幾何学を基礎付けるエポックメイキングな本を著した．「Foundations of Algebraic Geometry」である．Weil は，この本によって，関数体に基づく代数幾何の体系化に成功した．1950年代後半になって，A. Grothendieck は，可換環論に基づく，より徹底した理論の体系化の構想を提唱した．実際，彼は J. Dieudonné の協力を得て「Eléments de Géométrie Algébrique」(略して EGA と呼ばれる)を著し，代数幾何学の徹底的な再構成を行った．翻訳すると「代数幾何原論」であり，ユークリッド幾何学における Euclid の「原論」に対比される著作である．序文によれば全体は13章からなり，完成すれば1万ページ近い大作になったと思われる．実際には最初の4章，約1800ページが書かれただけに終わったが，その続きの内容は，13冊，約6500ページにおよぶ「Séminaire de Géometrie Algébrique」

(略してSGAと呼ばれる)の中に，Grothendieckを中心とする研究者の研究報告として残されている．EGAの思想の下に1960年代から1980年代にかけて代数幾何学は大発展を遂げたのである．なお，代数幾何学には，幾何の観点，すなわち複素多様体からのアプローチもあり，小平邦彦の研究はその中で重要なものに位置づけられる．

3 射影代数多様体

アフィン代数多様体は開いた多様体であり，無限遠に次元の低い多様体を付け加えることによって閉じた多様体にして扱う方がすっきりした理論を展開することができる．そのような場を提供するのが射影空間である．

$\boldsymbol{C}^{n+1}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$ の2点 $P=(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ および $Q=(b_0, b_1, \cdots, b_n)$ に対し，0ではない定数 $\lambda\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$ が存在して $(b_0, b_1, \cdots, b_n)=(\lambda a_0, \lambda a_1, \cdots, \lambda a_n)$ となるとき，$P\sim Q$ と定義する．これは同値関係になるから，これにより $\boldsymbol{C}^{n+1}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$ を類別し，$\boldsymbol{P}^n=\{\boldsymbol{C}^{n+1}\backslash\{\boldsymbol{0}\}\}/\sim$ とおき，n 次元**射影空間**という．

$\boldsymbol{P}^n$ の点 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ は少なくとも1つの成分が0ではないから，たとえば a_0 が0ではないとする．このとき，同値関係を用いてこの点は $(1, a_1/a_0, \cdots, a_n/a_0)$ と表すことができる．$U_i=\{(a_0, a_1, \cdots, a_n)\in\boldsymbol{P}^n|a_i\neq 0\}$ とおけば，今述べたことから U_i は $\boldsymbol{C}^n$ と同型であり，$\boldsymbol{P}^n=\bigcup_{i=0}^{n} U_i$ となる．つまり，$\boldsymbol{P}^n$ は局所的にはアフィン n 空間になる．$(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ を $\boldsymbol{P}^n$ の**斉次座標**という．$\boldsymbol{P}^n$ のいくつかの同次式の共通零点として表わせる集合を $\boldsymbol{P}^n$ の代数的集合という．既約性はアフィンの場合と同様に定義される．$\boldsymbol{P}^n$ の既約な代数的集合を**射影代数多様体**という．射影代数多様体は，アフィン代数多様体の射影空間における閉包として与えられる．

4 分類理論

学生：どうもおっしゃることがわかりかねます．
メフィストフェレス：それもまもなくわかるようになる．万物を還元して適当に分類することを学ぶならば．

(ゲーテ「ファウスト」)

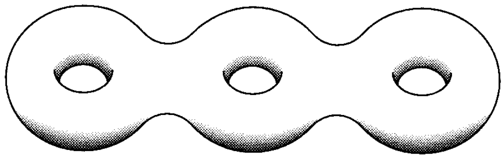

図1 種数 $g=3$ の非特異射影代数曲線の位相モデル

代数幾何学の全体像を摑むには，分類を考えてみるのが近道であろう．ここでは，非特異な射影代数多様体を分類することを考えよう．非特異というのは，どこも滑らかで，尖ったり交差したりしていないというイメージである．もう少し数学的にいうと，各点で局所座標がとれるということである．このような代数多様体を分類することは代数幾何学における重要な問題である．

例えば，1次元の場合には，**種数** g が分類のための1つの不変量になる．種数は，複素数体上の場合には，代数曲線の位相的なモデルを考えるとき，その穴の数と等しくなる．つまり，種数 g の非特異射影代数曲線は連続的に変形すると g 人乗りの浮き袋の表面に変型できるのである(**図1**)．種数は非特異射影代数曲線に対する位相不変量であり，2つの非特異射影曲線が同型(代数幾何的に同じ)であれば，種数は一致する．種数 $g=0$ の時には逆がなりたち，種数0の非特異射影代数曲線は射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ に限ることがわかる．$g=0$ の射影代数曲線を**有理曲線**という．種数 $g=1$ の射影代数曲線 E を**楕円曲線**という．楕円曲線 E の標準形としては

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3, \qquad g_2, g_3\in\boldsymbol{C},$$
$$\varDelta=g_2{}^3-27g_3{}^2\neq 0$$

(Weierstrassの標準形)

を取ることができる．射影代数曲線 E はこの式で与えられるアフィン代数曲線のコンパクト化になる．

$$j=1728g_2{}^3/\varDelta$$

とおいて，楕円曲線 E の j **不変量**という．任意の複素数 $a\in\boldsymbol{C}$ に対し，j 不変量が a に一致する

ような楕円曲線を構成することは容易である．一方，2つの楕円曲線が同型になるための必要十分条件は，j 不変量が一致することである．これらのことから，楕円曲線の集合と複素平面 $\boldsymbol{C}$ の点の集合の間に1対1対応が存在することがわかる．$\mathscr{M}_1=\boldsymbol{C}$ とおき，楕円曲線の**モジュライ空間**という．$\mathscr{M}_1$ はアフィン直線 $\boldsymbol{A}^1$ に他ならず，1次元代数多様体の構造を持つ．$g\geq 2$ なる整数 g に対しても，種数 g の相異なる非特異射影代数曲線の全体は楕円曲線の場合と同様にモジュライ空間 $\mathscr{M}_g$ をもち，種数 g の非特異射影代数曲線と $\mathscr{M}_g$ の点とが1対1に対応する．$\mathscr{M}_g$ は $3g-3$ 次元の代数多様体の構造を持つことが知られている．このように，複素数体上の非特異射影代数曲線は，種数という離散的な不変量とモジュライ空間という連続的な不変量によって完全に分類されるのである．

高次元の代数多様体 X を分類するためには，新たにいくつかの不変量を準備しなければならない．そのための不変量として**小平次元** κ，**不正則数** q などがある．不正則数は Albanese 多様体の次元として定義される不変量で1次元の場合には種数と一致する．また，n 次元代数多様体の小平次元 κ は m 重 n 形式がどのくらい存在するかを漸近的にはかる不変量で，$-\infty, 0, 1, \cdots, n$ のどれかの値をとる．1次元の場合には，小平次元と種数には次のような関係がある．

$$\kappa=-\infty \iff g=0 \iff \boldsymbol{P}^1$$
$$\kappa=0 \iff g=1 \iff \text{楕円曲線}$$
$$\kappa=1 \iff g\geq 2 \iff \text{一般型曲線}$$

曲面の場合には Enriques-Castelnuovo-Kodaira による分類理論がある．これは代数曲面の上の有理関数全体のなす体(関数体)を考え，2つの代数曲面の関数体が同型であるとき，2つの代数曲面は同型である(双有理同値)とみて分類する立場をとる．これによると，すべての代数曲面は**表1**のように分類される．

3次元の場合にも複素数体上の場合には同様の分類理論が構成されているが，4次元以上の場合には現在のところ未解決である．連続パラメータであるモジュライ空間は，様々な代数多様体のクラスに対して構成されているが，解明すべき問題も数多く残されている．本稿では分類理論を中心に述べたが，代数幾何の世界ではこれ以外の視点からも多岐にわたる研究が行われている．

表1　代数曲面の分類

小平次元 κ	不正則数 q	曲 面 の 種 類
$-\infty$	$q\geq 0$	$\boldsymbol{P}^1\times C$(C は種数 q の代数曲線)
0	2	abelian surface
0	1	hyperelliptic surface
0	0	K3 surface, Enriques surface
1	$q\geq 0$	elliptic surface
2	$q\geq 0$	surface of general type

5　おわりに

代数幾何の代数的な理論は，1960年頃から大発展をとげた．しかし，その時代には，代数幾何が他の科学との関係を意識することはほとんどなかったと思われる．1985年，M. B. Green と J. H. Schwarz は素粒子論において弦理論再興のきっかけとなる論文を発表した．この理論においては，素粒子を点ではなく弦であるとする．閉じた弦は時間とともに動いてその軌跡として Riemann 面(代数曲線)を形づくり，素粒子の生涯としての代数曲線と，素粒子の生涯の全体としての代数曲線のモジュライ空間の理論が(超)弦理論において重要な役割を演ずることとなったのである．また，Calabi-Yau 多様体という数学的にも重要な多様体が素粒子の振るまいと関係し，ミラー対称性などの理論として数学にフィードバックされることになった．一方，有限体上の代数多様体は，ディジタルにおける誤り訂正符号の理論に用いられ，情報理論において一定の役割を果たしている．暗号理論においても，楕円曲線をはじめとする代数曲線が用いられるようになり，最近

では応用を見込んだ研究が進展している．1960年代，抽象的な代数幾何が大発展していたとき，代数幾何がこのような形で利用されるとは誰も予想しなかったであろう．代数幾何の発展の歴史は，数学が成熟し利用されていく1つの形を示しているといえよう．

参考文献[代数幾何の入門書など]

[1] 飯高茂・上野健爾・浪川幸彦，デカルトの精神と代数幾何(増補版)，日本評論社，東京，1993.
[2] 上野健爾，代数幾何入門，岩波書店，東京，1995.
[3] 桂利行，代数幾何入門，共立講座21世紀の数学，共立出版，東京，1998.