Rozdział 9

Strona:	LeIA	Wydrukowane przez użytkownika:	Kinga Kondraciuk
Kurs:	Metody numeryczne (2025Z)	Data:	niedziela, 30 listopada 2025, 14:16
Książka:	Rozdział 9		

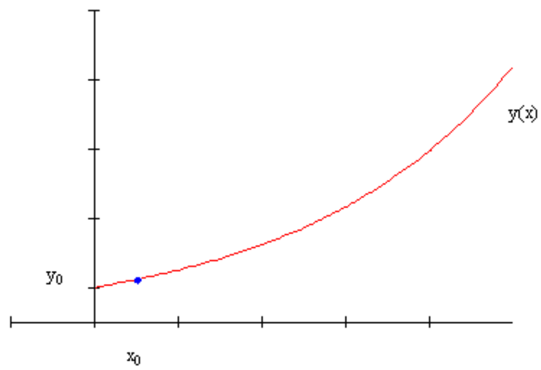
Spis treści

1. Równania różniczkowe zwyczajne

Rozpatrujemy problem początkowy (Cauchy`ego): znaleźć krzywą całkową równania

$$y' = f(x, y)$$

przechodzącą przez punkt (x_0, y_0). Przy założeniach: funkcja f jest ciągła po x i ma ciągłą pochodną cząstkową po y, istnieje jedyna taka krzywa w pewnym otoczeniu punktu początkowego.



Rys. 9.1. *Szukane rozwiązanie przechodzące przez punkt początkowy.*

Będziemy rozwiązanie tego zagadnienia szukać metodami przybliżonymi.

Zakładamy, że istnieje rozwiązanie podanego problemu , które ma wszystkie pochodne do rzędu $n+1$ włącznie , i rozwijamy je w szereg Taylora w punkcie x_0.

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad \textbf{(9.0.1)}$$

gdzie

$$R_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \textbf{(9.0.2)}$$

a θ jest liczbą z otwartego przedziału $(0, 1)$. Przybliżonym rozwiązaniem będzie kilka pierwszych wyrazów tego szeregu (będzie to wielomian stopnia n).

Przykład 9.1

Przykład

Dane jest równanie różniczkowe I rzędu : $y' = 2xy$ z warunkiem początkowym: $y(0) = 1$.
Podane równanie to równanie o zmiennych rozdzielonych i można podać jego dokładne rozwiązanie przechodzące przez punkt $(0, 1)$. Jest to funkcja $r(x) = e^{x^2}$.
Znajdziemy również przybliżone rozwiązanie metodą szeregów potęgowych i ograniczymy się do pięciu wyrazów szeregu. Zobaczymy jaki jest błąd między rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym.
Oznaczmy przez $f(x, y) = 2xy = y'$ (z podanego równania) i przez $y_0 = 1$ (warunek początkowy). Obliczymy cztery kolejne pochodne funkcji $y(x)$ w punkcie początkowym $x_0 = 0$. Wartość pierwszej pochodnej wyliczamy bezpośrednio z równania:

$$y_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0) = 0$$

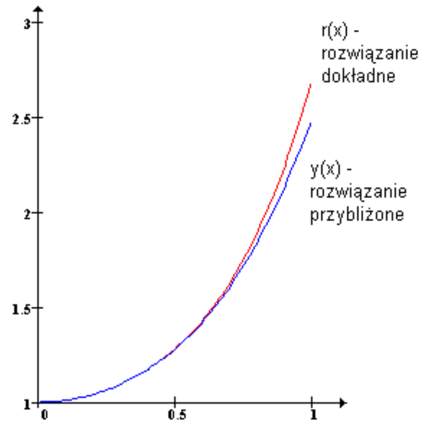
Następne pochodne obliczymy różniczkując pierwszą pochodną czyli funkcję $f(x, y) = f(x, y(x))$ po zmiennej x. Otrzymamy:

$$y_2 = y''(x_0) = \frac{d}{dx} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = 2$$
$$y_3 = y'''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = 0$$
$$y_4 = y^{(4)}(x_0) = \frac{d^3}{dx^3} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = 12$$

Zatem rozwiązanie przybliżone w postaci szeregu potęgowego z pięcioma wyrazami jest następujące:

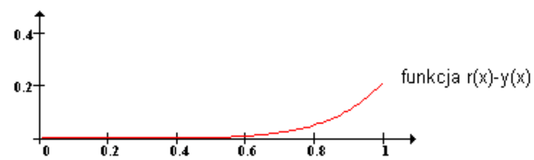
$$y(x) = y_0 + y_1 x + \tfrac{1}{2} y_2 x^2 + \tfrac{1}{3!} y_3 x^3 + \tfrac{1}{4!} y_4 x^4 = 1 + x^2 + \tfrac{1}{2} x^4$$

Porównamy te dwa rozwiązania na rysunku:



Rys. 9.2. *Wykres rozwiązania dokładnego i przybliżonego.*

Na następnym rysunku jest przedstawiona funkcja błędu $r(x) - y(x)$ w przedziale $< 0, 1 >$ i widać, że maksymalny błąd wynosi około 0.2 (w przybliżeniu do trzech cyfr 0.218).



Rys. 9.3. *Wykres funkcji błędu.*

2. Metoda prosta Eulera

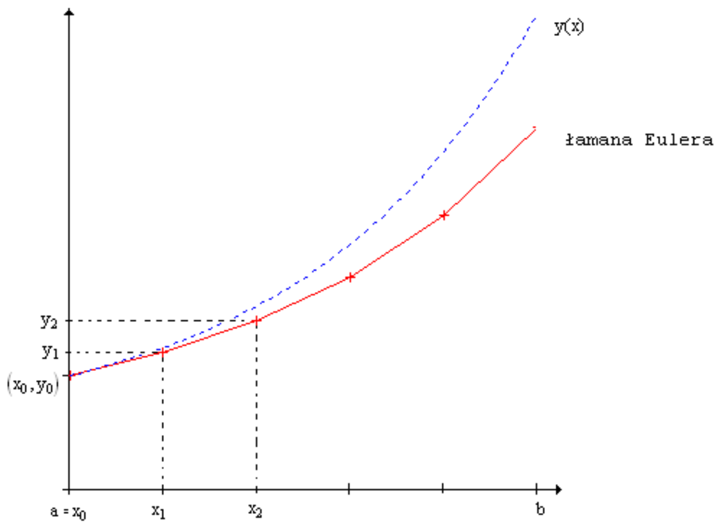
Zakładamy, że istnieje jedyne rozwiązanie problemu początkowego (Cauchy`ego):

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad \textbf{(9.1.1)}$$

Znajdziemy przybliżone rozwiązanie metodą prostą Eulera.
Będziemy szukać rozwiązania na przedziale $< a, b >$, gdzie $a = x_0$. Podzielimy przedział na n części o długości h. W punkcie początkowym wystawiamy styczną do szukanego rozwiązania. Mamy z równania dokładną wartość współczynnika kierunkowego tej prostej $f(x_0, y_0)$. Zatem szukana styczna ma postać

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Przecinamy tę styczną z prostą $x = x_1$ i otrzymujemy przybliżoną wartość rozwiązania w punkcie x_1.



Rys. 9.3. *Łamana Eulera.*

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Następnie obliczamy z równania współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie (x_1, y_1) i prowadzimy przez punkt (x_1, y_1) prostą

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

Przecinamy ją z prostą $x = x_2$ i otrzymujemy wartość y_2

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

Kontynuując to postępowanie otrzymujemy ciąg wartości y_i ze wzoru

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad \textbf{(9.1.2)}$$

Dostajemy zatem rozwiązanie przybliżone w postaci tabelki z wartościami (x_i, y_i). Na rysunku te punkty połączone są łamaną i widać, że za każdym następnym krokiem rośnie błąd między dokładnym rozwiązaniem (przerywana niebieska linia) i łamaną.

Przykład 9.2

Przykład

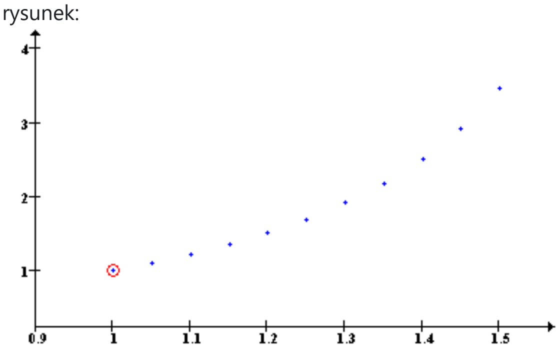
Dane jest równanie $y' = x^2 + y^2$ i warunek początkowy $y(1) = 1$. Będziemy szukać przybliżonego rozwiązania w przedziale $< 1, 1.5 >$, $a = 1, \quad b = 1.5$. Podzielimy przedział $< a, b >$ na $n = 10$ części.

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots n, \quad x_i = a + ih$$

Korzystając ze wzoru (9.2) otrzymamy rozwiązanie w postaci tabelki:

$\mathbf{x_i} =$	$y_i =$
1	1
1.05	1.1
1.1	1.216
1.15	1.35
1.2	1.507
1.25	1.693
1.3	1.914
1.35	2.182
1.4	2.511
1.45	2.924
1.5	3.457

Ilustrację graficzną rozwiązania przedstawia rysunek:



Rys. 9.4. *Graficzne przedstawienie rozwiązania.*

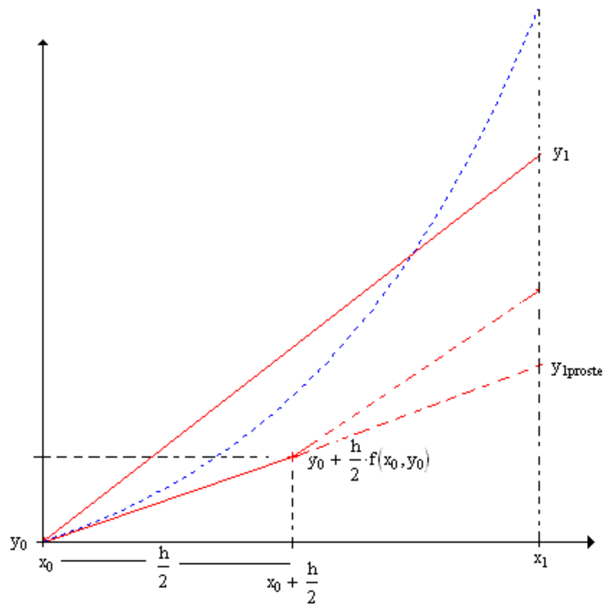
3. Metoda ulepszona Eulera

Stosując identyczne założenia jak w metodzie Eulera będziemy szukać rozwiązania na przedziale $< a, b >$, gdzie $a = x_0$. Podzielimy przedział na n części o długości h. Punkty podziału: $x_i = a + ih$ gdzie $i = 0, 1, \ldots, n$. Wartości funkcji będącej rozwiązaniem danego zagadnienia będziemy liczyć ze wzoru:

$$y_n = y_{n-1} + hf\left(x_{n-1} + \tfrac{h}{2}, y_{n-1} + \tfrac{h}{2} f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)\right) \qquad \textbf{(9.2.1)}$$

Dostajemy rozwiązanie w postaci tabelki, w której są wartości (x_i, y_i) gdzie $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Wzór wyjaśnimy na rysunku dla pierwszego kroku:

$$y_1 = y_0 + hf\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} f\left(x_0, y_0\right)\right)$$



Rys. 9.5. *Interpretacja graficzna pierwszego kroku.*

Idea zmodyfikowanego wzoru polega na tym, że będziemy "posuwać" się wzdłuż prostej stycznej do wykresu nie w punkcie (x_0, y_0), tylko wzdłuż prostej o współczynniku kierunkowym równym współczynnikowi stycznej do krzywej w punkcie oddalonym od x_0 o $h/2$.

Przykład 9.3

Przykład

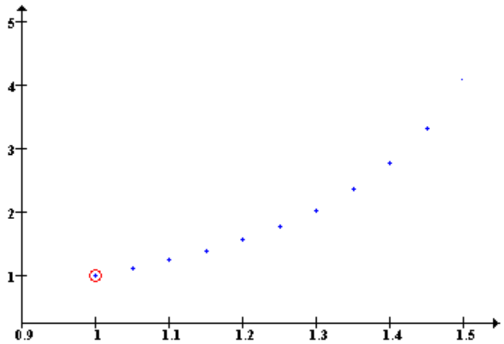
Dane jest równanie (to samo co w przykładzie 9.1): $y' = x^2 + y^2$ i warunek początkowy $y(1) = 1$. Będziemy szukać przybliżonego rozwiązania w przedziale $< 1, 1.5 >$, $a = 1, b = 1.5$. Podzielimy przedział $< a, b >$ na $n = 10$ części.

$$h = \tfrac{b-a}{n}, \quad i = 0, \ldots n, \quad x_i = a + ih$$

Korzystając ze wzoru (9.2.1) otrzymamy rozwiązanie w postaci tabelki:

$\mathbf{x_i} =$	$y_i =$
1	1
1.05	1.108
1.1	1.233
1.15	1.381
1.2	1.557
1.25	1.769
1.3	2.028
1.35	2.352
1.4	2.768
1.45	3.323
1.5	4.098

Ilustrację graficzną rozwiązania przedstawia rysunek:



Rys. 9.6. *Graficzne przedstawienie rozwiązania.*

4. Metoda klasyczna Rungego-Kutty

Jak się okazuje metoda ulepszona wykazuje większą dokładność od metody prostej. Łatwo jest to uzasadnić intuicyjnie. Metoda prosta zakłada, że wartość pochodnej definiującej prędkość zmian zmiennej y jest stała w przedziale $< x_i, x_i + h >$ i jest równa pochodnej z początku przedziału. W metodzie ulepszonej na początku obliczamy prognozowaną wartość $y_{i+1/2}$ w połowie przedziału $< x_i, x_i + h >$ i dla tej chwili w połowie obliczamy wartość prognozowanej pochodnej. Następnie tą pochodną używamy jako obowiązującą w całym przedziale. Łatwo zauważyć, że w większości przypadków, wartość w połowie przedziału jest bliższa rzeczywistej wartości średniej niż wartość z początku przedziału.

Metody Rungego-Kutty idą o krok dalej. Średnią wartość pochodnej nad przedziałem $< x_i, x_i + h >$ przybliżają za pomocą różnych strategii wykorzystania prognozowanych wartości w różnych punktach tego przedziału. Najbardziej popularną metodą jest klasyczna metoda Rungego-Kutty czwartego stopnia.

Przyjmijmy, że wartość wyrażenia na pochodną w różnych punktach będziemy oznaczą literą k. W skrócie metodę Rungego-Kutta 4-tego stopnia można opisać:

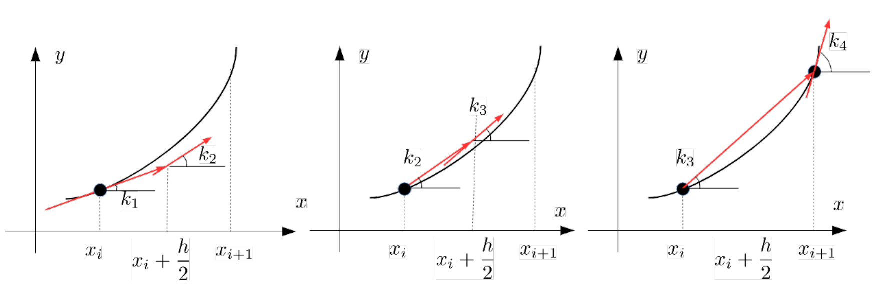
1. Oblicz wartość pochodnej na początku przedziału (k_1).
2. Używając k_1 oblicz prognozowaną wartość funkcji w połowie przedziału $t_i + h/2$, dla tej wartości oblicz pochodną w połowie przedziału (k_2).
3. Używając k_2 oblicz jeszcze raz prognozowaną wartość $y_{i+1/2}$ w połowie przedziału i dla niej wyznacz wartość pochodnej (k_3).
4. Następnie używając k_3 oblicz prognozowaną wartość funkcji na końcu przedziału ($t_i + h$) i dla niej wyznacz wartość pochodnej (k_4).
5. Ostatecznie średnia wartość pochodnej nad całym przedziałem jest przybliżona za pomocą wzoru na średnią ważoną: $k_{średnie} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
6. A wzór na wartość poszukiwanej funkcji w kolejnej chwili.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{9.3.1}$$

Podsumowując metoda Rungego-Kutty może być zapisana w następującej postaci:

$$\begin{aligned} k1 &= f(x_i, y_i) \\ k2 &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k3 &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2) \\ k4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

gdzie $f(x, y)$ to wyrażenie definiujące wartość pochodnej. Na rysunku 9.7 przedstawiona została interpretacja graficzna



Rys. 9.7. *Interpretacja graficzna metody klasycznej Rungego-Kutty 4-tego stopnia.*

Przykład 9.4

Przykład

Napisz skrypt w MATLABie, który wyznaczy rozwiązanie układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = -10y_1$$

Przyjmij $t \in < 0, 5 >$, $h = 0.1$.

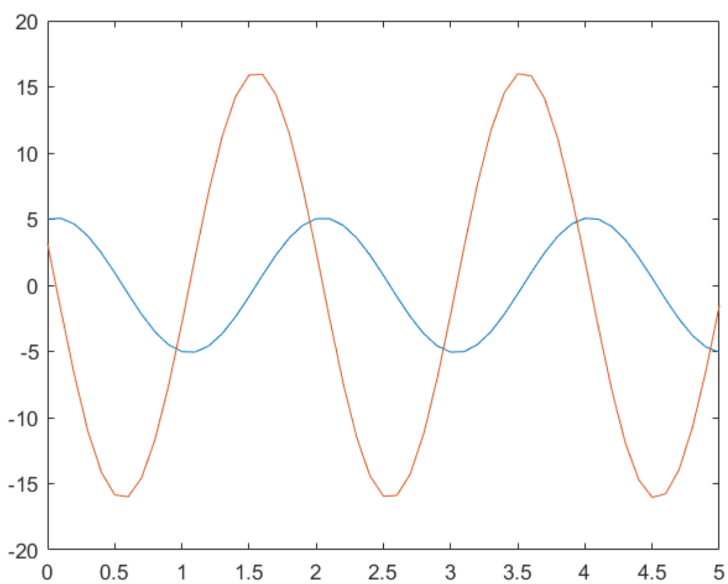
Rozwiązanie

Skrypt z rozwiązaniem podzielimy na dwie części. Część główną, w której zdefiniujemy wartości początkowe oraz funkcję definiującą wyrażenia na pochodne. Część numeryczną dotyczącą metody Rungego-Kutty czwartego stopnia. Dzięki takiej realizacji fragment dotyczący metody numerycznej będziemy mogli wykorzystywać również dla innych równań - będzie on uniwersalny.

Wyniki w kolejnych iteracjach będziemy przechowywać w kolumnach dwuwierszowej macierzy. Pierwszy wiersz będzie zawierał wartości zmiennej y_1 a drugi y_2.

```
function rk4_funkcja
 y0 = [ 5;
        3.1623];
 [y, t] = rk4(@f, 5, 0.1, y0);

 plot(t, y(1,:), t, y(2,:));

 end

 function [y, t] = rk4(f, t_max, h, y0)
 t = 0:h:t_max;
 y = zeros(size(y0,1), length(t));
 y(:,1) = y0;
 for i=1:length(t)-1
  k1 = f(t(i), y(:,i));
  k2 = f(t(i)+h/2, y(:,i) + h/2*k1);             k3 = f(t(i)+h/2, y(:,i) + h/2*k2);
  k4 = f(t(i)+h, y(:,i) + h*k3);
  y(:,i+1) = y(:,i) + h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
 end
 end

 function dy = f(t, y)
  a = 10;
  dy = [y(2)
      -a*y(1)];
 end
```

Po uruchomieniu program powinien wygenerować rysunek z wykresem rozwiązania.



Rys. 9.8. *Przebiegi y_1 i y_2 rozwiązania przykładu.*

5. Metoda trapezów i Heuna

Inną kategorią metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych są **metody niejawne**. Charakteryzują się one tym, że wartość pochodnej obliczana jest w punktach, które zamierzamy dopiero obliczyć. Metody niejawne nie precyzują skąd weźmiemy wartości, które dopiero chcemy obliczyć. Przykładem takiej metody jest metoda trapezów, zgodnie z którą kolejna wartość oblicza się z wzoru:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[\frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})}{2} \right] \tag{9.4.1}$$

We wzorze tym widzimy drugi składnik licznika ułamka: $f(t_{i+1}, y_{i+1})$, który dotyczy wartości pochodnej w punkcie, który chcemy dopiero obliczyć y_{i+1}.

Są dwa zasadnicze podejścia do rozwiązania tego problemu. Pierwsze, algebraiczne, polega na wstawieniu do wzoru (9.4.1) wyrażenia algebraicznego definiującego pochodną i przekształceniu względem zmiennej y_{i+1}.

Przykład 9.5

Przykład

Załóżmy równanie

$\frac{dy}{dt} = -10y + t$

stosując sformułowanie niejawne, po prostu podstawiamy wyrażenie na pochodną w miejsce $f(t_{i+1}, y_{i+1})$, otrzymamy zatem:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[\frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})}{2} \right]$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[\frac{-10y_i + t_i - 10y_{i+1} + t_{i+1}}{2} \right]$$

$$y_{i+1} + \frac{h \cdot 10y_{i+1}}{2} = y_i + h \cdot \left[\frac{-10y_i + t_i + t_{i+1}}{2} \right]$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{1+5h} \left[y_i + h \cdot \left[\frac{-10y_i + t_i + t_{i+1}}{2} \right] \right]$$

Rozwiązanie znajdujemy rekursywnie wyznaczając kolejne wartości y_{i+1}.

Drugim podejściem do metod niejawnych jest zastosowanie strategii predyktor-korektor. W metodzie tej, w miejsce wartości y_{i+1} w wyrażeniu na pochodną wstawiamy wartość prognozowaną za pomocą dowolnej metody jawnej. Przykładem takiej metody może być nawet jawna metoda prosta Eulera. W takim przypadku w pierwszym kroku wyznaczamy wartość prognozowaną, którą oznaczmy $y_{i+1}^{(0)}$:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Następnie wykorzystujemy tą wartość we wzorze na metodę trapezów:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[\frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})}{2} \right]$$

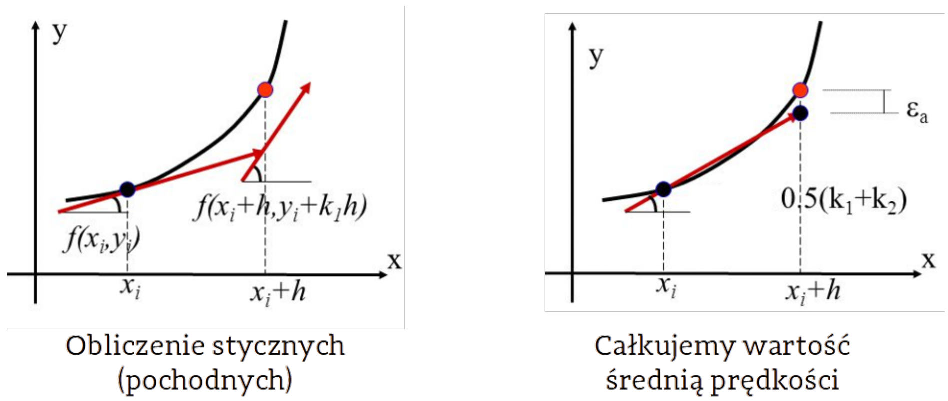
Ostatecznie wzór metody trapezów z wykorzystaniem strategii predyktor-korektor oraz metody jawnej Eulera jako predyktora, przyjmuje postać:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f(t_{i+1}, y_i + hk1)$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[\frac{k_1 + k_2}{2}\right] \quad \textbf{(9.4.2)}$$

Wzór (9.4.2) nazywany jest **metodą Heuna**. Spróbujmy opisać tą metodę słownie:

- najpierw obliczam wartość prognozowaną na końcu przedziału metodą jawną Eulera,
- potem obliczam średnią arytmetyczną pochodnych na początku przedziału i na końcu przedziału, przy czym pochodna na końcu przedziału obliczona jest dla wartości prognozowanej $y_{i+1}^{(0)}$.

Na rysunku 9.9 przedstawiona została interpretacja graficzna metody.



Rys. 9.9. *Interpretacja graficzna metody Heuna.*

6. Uwagi

W technice, fizyce metody rozwiązywania zagadnień początkowych (równań różniczkowych zwyczajnych) używane są do poszukiwania zmian stanu układów dynamicznych, które zbudowane są z wielu, powiązanych ze sobą zmiennych nazywanymi zmiennymi stanu. W przypadku rozpatrywanych wcześniej metod przedstawione wzory dotyczyły równań z jedną zmienną. Przyjrzyjmy się jak możemy wykorzystać je do rozwiązania zagadnień z wieloma zmiennymi. Rozważmy zatem nie pojedyncze równanie różniczkowe zwyczajne, ale układ takich równań, gdzie zmienne są ze sobą powiązane. Układ taki możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \frac{\text{d}y_1}{\text{d}x} &= f_1(x, y_1,y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{\text{d}y_n}{\text{d}x} &= f_n(x, y_1,y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{9.5.1}$$

lub w sposób skrócony:

$$\frac{\text{d}{\bf Y}}{\text{d}x} = {\bf F}(x, {\bf Y}),\notag$$

gdzie: ${\bf Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} , {\bf F} = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{bmatrix}$

W takim przypadku możemy analogicznie wykorzystywać przedstawione wcześniej metody zastępując jedynie zapis algorytmów przy pomocy jednej zmiennej y_i wektorem zmiennych Y_i. Tak, **metoda prosta Eulera** będzie postaci:

$$Y_{i+1} = Y_i + h \cdot F(t_i, Y_i)\notag$$

lub w pełnym zapisie:

$${\bf Y_{i+1}} = \begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ \vdots \\ y_n(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_{i}) \\ \vdots \\ y_n(t_{i}) \end{bmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} f_1(x, y_1(t_{i}), \ldots, y_n(t_{i})) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(t_{i}), \ldots, y_n(t_{i})) \end{bmatrix}\notag$$

Metoda ulepszona Eulera, aby uprościć zapis obliczona zostanie dwukrokowo. Najpierw wyznaczymy prognozowaną wartości zmiennych y_k w połowie przedziału: $t_{i+1/2}$:

$${\bf Y_{i+1/2}} = \begin{bmatrix} y_1(t_{i+1/2}) \\ \vdots \\ y_n(t_{i+1/2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_{i}) \\ \vdots \\ y_n(t_{i}) \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \cdot \begin{bmatrix} f_1(x, y_1(t_{i}), \ldots, y_n(t_{i})) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(t_{i}), \ldots, y_n(t_{i})) \end{bmatrix}\notag$$

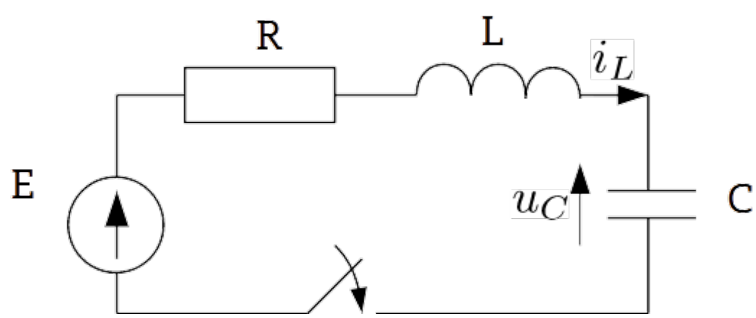
a następnie wstawimy tą wartość do ostatecznego wzoru **metody ulepszonej Eulera**:

$${\bf Y_{i+1}} = \begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ \vdots \\ y_n(t_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_{i}) \\ \vdots \\ y_n(t_{i}) \end{bmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} f_1(x, y_1(t_{i+1/2}), \ldots, y_n(t_{i+1/2})) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(t_{i+1/2}), \ldots, y_n(t_{i+1/2})) \end{bmatrix}\notag$$

Przykład 9.6

Przykład

Znajdź przebieg prądu płynącego przez cewkę i napięcia na kondensatorze w szeregowym obwodzie RLC z wymuszeniem napięciowym o wartości $1 [V]$ od momentu włączenia obwodu do czasu $0.5 [s]$. Przyjmij parametry: $E=1 [V]$, $R = 1 [\Omega]$, $L=0.1 [H]$, $C = 0.01 [F]$. Użyj metody Eulera z krokiem $h=0.01 [s]$.
Przedstawmy schemat obwodu szeregowego RLC:



Rys. 9.10. *Schemat szeregowego obwodu RLC.*

Rozkład prądów i napięć w czasie w tym obwodzie opisany jest za pomocą równań Kirkchhoffa:

$$\begin{aligned} i_{L} - C \frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}&=0 \\ E - Ri_{L} - L\frac{\text{d}i_{L}}{\text{d}t} - u_C &= 0 \end{aligned}$$

gdy wykonamy poniższe podstawienie oraz przekształcimy go algebraicznie

$$\begin{aligned} y_1&=u_C \\ y_2&=i_L \end{aligned}$$

to powyższy układ przyjmie postać bardziej "matematyczną":

$$\begin{aligned} \frac{\text{d}y_1}{\text{d}t}&= \frac{1}{C} y_2 \\ \frac{\text{d}y_2}{\text{d}t} &= \frac{1}{L} \left(E - Ry_2 - y_1 \right) \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że jest to układ z dwiema zmiennymi stanu (niewiadomymi funkcjami): y_1, y_2.

Z uwagi na założenia techniczne związane z tym, że obserwujemy przebiegi po włączeniu włącznika, możemy przyjąć, że wartości początkowe napięcia i prądu są równe 0 (czyli na początku nie ma napięcia ani nie płynie prąd):

$$\begin{aligned} y_1(0)=0 \\ y_2(0)=0 \end{aligned}\notag$$

Do rozwiązania zadania użyjemy metody Eulera. W celu ilustracji procesu obliczeń wyznaczymy dwa kolejne kroki algebraicznie a następnie przedstawimy program, który znajduje rozwiązanie.

Przypomnijmy wzór Eulera, w którym użyjemy notacji wektorowej dla wektora zmiennych stanu Y oraz wyrażeń algebraicznych definiujących pochodne $F(...)$:

$$Y_{i+1} = Y_i + h\cdot F(t_i, Y_i)\notag$$

Wprowadźmy oznaczenie, które w indeksie dolnym będzie zawierało numer zmiennej stanu oraz numer iteracji $i+1$ będzie reprezentowany przez chwilę czasową: t_{i+1}

$$Y_{i+1} = \begin{bmatrix} y_{1}(t_{i+1}) \\ y_{2}(t_{i+1}) \end{bmatrix}\notag$$

Przy takim założeniu, dla pierwszego kroku możemy napisać:

$$\begin{aligned} y_{1}(t_{1}) &= y_{1}(t_{0}) + h \cdot \frac{1}{C} y_{2}(t_{0}) \\ y_{2}(t_{1}) &= y_{2}(t_{0}) + h \cdot \frac{1}{L} \left(E - Ry_{2}(t_{0}) - y_{1}(t_{0}) \right) \end{aligned}\notag$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$\begin{aligned} y_{1}(0.01) &= y_1(0) + h \cdot \frac{1}{C} y_{2}(0) = 0 \\ y_{2}(0.01) &= y_2(0) + h \cdot \frac{1}{L} \left(E - Ry_{2}(0) - y_{1}(0) \right) = \\ &= 0.01 \cdot \frac{1}{0.1}1 = 0.1 \end{aligned}\notag$$

Dla drugiego kroku otrzymamy:

$$\begin{aligned} y_{1}(t_{2}) &= y_{1}(t_{1}) + h \cdot \frac{1}{C} y_{2}(t_{1}) \\ y_{2}(t_{2}) &= y_{2}(t_{1}) + h \cdot \frac{1}{L} \left(E - Ry_{2}(t_{1}) - y_{1}(t_{1}) \right) \end{aligned}\notag$$

oraz po podstawieniu wartości liczbowych:

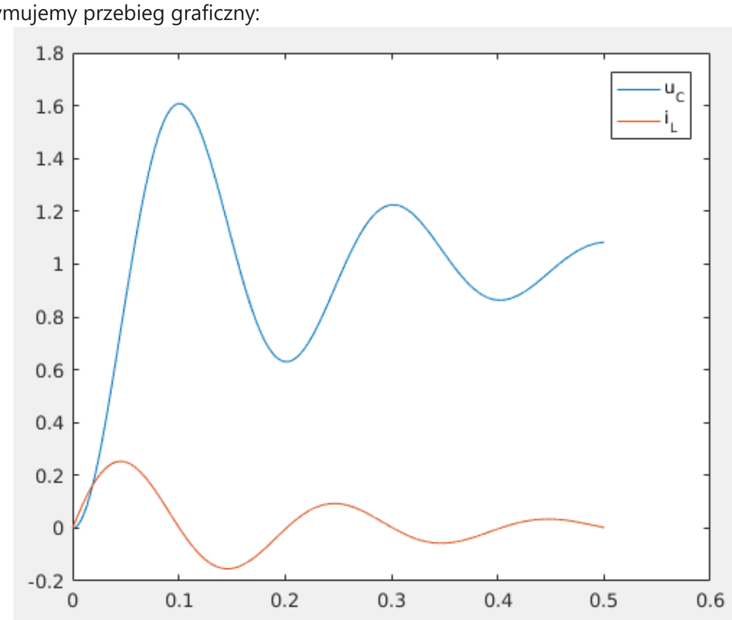
$$\begin{aligned} y_{1}(0.02) &= y_1(0.01) + h \cdot \frac{1}{C} y_{2}(0.01) = 0 + 0.01 \cdot \frac{1}{0.01} 0.1 = 0.1\\ y_{2}(0.02) &= y_2(0.01) + h \cdot \frac{1}{L} \left(E - Ry_{2}(0.01) - y_{1}(0.01) \right) = \\ &= 0.01 + 0.01 \cdot \frac{1}{0.1}(1 - 1\cdot 0.1 - 0) = 0.19 \end{aligned}\notag$$

W poniższym programie w MATLABie celowo użyto, krótszej wartości kroku całkowania h. Wynika to z tego, że przy zbyt długim kroku (tym z treści zadania) prosta metoda Eulera powoduje bardzo dużą kumulację błędów w kolejnych iteracjach i rozwiązanie o ile jest poprawne matematycznie to odbiega od oczekiwanego przebiegu technicznie.

Program w MATLABie

```
function rlc
    y = [0;
         0];
    T = [0];
    % wartość z treści zadania jest za długa,
    % h = 0.01;
    h = 0.0001;
    t = 0; i = 1;

    while t < 0.5
            y(:,i+1) = y(:,i) + h * f(t, y(:,i));
            t = t + h; i = i + 1;
            T(i) = t;
    end
    plot(T, y(1,:), T, y(2,:));
    legend('u_C', 'i_L');
end

function dy = f(t,y)
    E = 1;    R = 1;    L = 0.1;    C = 0.01;
    dy = [1/C*y(2)
          1/L*(E - R*y(2) - y(1)) ];
end
```

W wyniku uruchomienia otrzymujemy przebieg graficzny:



Rys. 9.11. *Przebiegi prądu i napięcia w analizowanym szeregowym obwodzie RLC.*

Równania wyższego rzędu

Drugą kwestią uzupełniającą temat rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych są równania wyższego rzędu. Rozważmy równanie n-tego rzędu.

$$\frac{d^ny}{dt^{n}} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots + a_{1}(t) \frac{dy}{dt}+a_{0}(t)y = g(t) \tag{9.5.2}$$

W ogólności równanie n tego rzędu jest zastępowane układem n równań 1-go rzędu, stosując ciąg podstawień jak w poniższym przykładzie. Na początku przyjmujemy $y_1=y$. Pierwsze $n-1$ równań wynika z prostego wprowadzenia zmiennych pomocniczych dla kolejnych pochodnych głównej zmiennej stanu:

$$\begin{aligned} \frac{\text{d}y_1}{\text{d}t} &= y_2 = \frac{\text{d}y}{\text{d}t}\\ \frac{\text{d}y_2}{\text{d}t} &= y_3 = \frac{\text{d}^2y}{\text{d}t^2}\\ \vdots & \\ \frac{\text{d}y_{n-1}}{\text{d}t} &= y_n = \frac{\text{d}^{n-1}y}{\text{d}t^{n-1}}\\ \end{aligned} \tag{9.5.3}$$

ostatnie równanie różniczkowe wynika z podstawienia wprowadzonych zmiennych pomocniczych y_k dla $k=1,2,\ldots,n$ do głównego równania (9.5.1):

$$\frac{d y_n}{dt} + a_{n-1}(t) y_{n}+\ldots + a_{1}(t) y_2+a_{0}(t)y_1 = g(t) \tag{9.5.4}$$

Oczywiście w dalszym etapie przekształcamy je do postaci takiej, że wyrażenie na pochodną względem y_n jest po jego lewej stronie:

$$\frac{d y_n}{dt} = g(t) - a_{n-1}(t) y_{n} - \ldots - a_{1}(t) y_2 - a_{0}(t)y_1 \tag{9.5.5}$$

Operacja ta najlepiej będzie zilustrowana na przykładzie.

Przykład 9.7

Przykład

Zastąp równanie trzeciego rzędu układem równań 1-rzędu, który może zostać wykorzystany w metodach numerycznych rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

$$4\frac{\text{d}^3y}{\text{d}t^3} - 2\frac{\text{d}y}{\text{d}t} + y -5t = 0\notag$$

Rozwiązanie

Najpierw wprowadzamy zmienne pomocnicze:

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ \frac{\text{d}y_1}{\text{d}t} &= y_2 = \frac{\text{d}y}{\text{d}t}\\ \frac{\text{d}y_2}{\text{d}t} &= y_3 = \frac{\text{d}^2y}{\text{d}t^2}\\ \end{aligned}\notag$$

Następnie wstawiamy je do głównego równania:

$$4\frac{dy_3}{dt} - 2y_2 + y_1 -5t = 0 \notag$$

z czego po przekształceniach otrzymujemy ostateczny układ równań:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\text{d}y_1}{\text{d}t} &= y_2 \\ \frac{\text{d}y_2}{\text{d}t} &= y_3 \\ \frac{\text{d}y_3}{\text{d}t} &= \frac{1}{4}\left(2y_2-y_1 + 5t \right) \end{aligned}\right.\notag$$