

Chłodzenie pręta w oleju

Kinga Kondraciuk
319941

Wstęp teoretyczny

W projekcie analizujemy proces chłodzenia rozgrzanego metalowego pręta, który zostaje zanurzony w oleju chłodzącym. Gdy pręt trafia do dużo chłodniejszego oleju, zaczyna oddawać mu ciepło. Powoduje to stopniowy spadek temperatury pręta oraz jednoczesny wzrost temperatury cieczy. W modelu zakładamy, że w krótkim czasie oddawanie ciepła do otoczenia jest pomijalne, dlatego traktujemy olej jako układ izolowany od środowiska.

Dodatkowym uproszczeniem jest przyjęcie, że zarówno pręt, jak i olej mają w danej chwili jednakową temperaturę w całej swojej objętości. Dzięki temu opisywany proces sprowadza się do wymiany ciepła jedynie na powierzchni styku pręta z cieczą. Szybkość tej wymiany zależy od kilku parametrów:

- powierzchni pręta,
- współczynnika wymiany ciepła h ,
- masy,
- pojemności cieplnej pręta i oleju.

Tak opisany układ można przedstawić za pomocą dwóch równań różniczkowych, które określają, jak zmieniają się temperatury obu elementów w czasie.

$$\frac{m_b c_b}{hA} \frac{dT_b}{dt} + T_b = T_w$$
$$\frac{m_w c_w}{hA} \frac{dT_w}{dt} + T_w = T_b$$

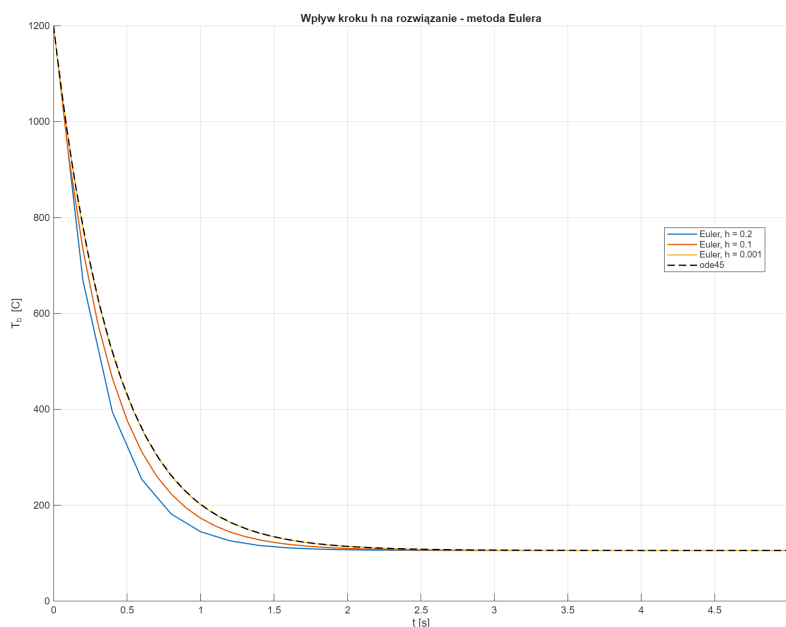
Symulator tworzony w ramach projektu rozwiązuje te równania numerycznie, krok po kroku.

W kolejnej części projektu współczynnik h nie jest już wartością stałą, lecz zależy od różnicy temperatur między prętem a olejem. Oznacza to, że intensywność przekazywania ciepła zmienia się w trakcie chłodzenia. Ponieważ współczynnik ten jest znany tylko w postaci danych pomiarowych, konieczne jest jego przybliżenie metodami interpolacji lub aproksymacji, tak aby można było wykorzystać go w symulacjach.

Model ma praktyczne znaczenie technologiczne, ponieważ pozwala ocenić, jak szybko pręt może zostać schłodzony i jak dużo oleju jest do tego potrzebne. Dzięki temu można później projektować odpowiednią wielkość zbiorników i analizować wymagania procesu produkcyjnego.

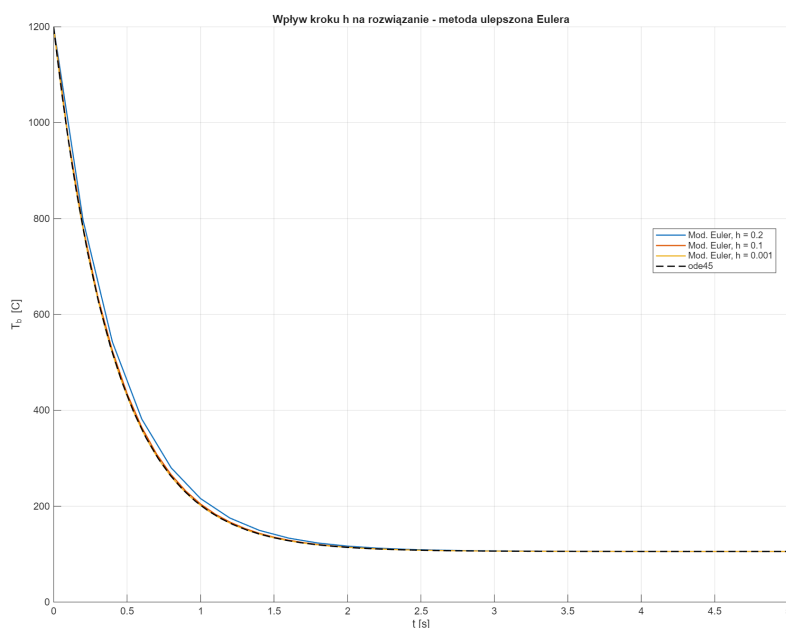
Część 1.

W pierwszej części projektu opracowano kompletny symulator procesu chłodzenia pręta zanurzonego w oleju, oparty na układzie równań różniczkowych opisujących bilans energii pomiędzy prętem a cieczą chłodzącą. Do całkowania równań zastosowano metodę Eulera oraz metodę ulepszonego Eulera (Heuna), a otrzymane trajektorie porównano z rozwiązaniem referencyjnym wyznaczonym za pomocą solvera ode45.



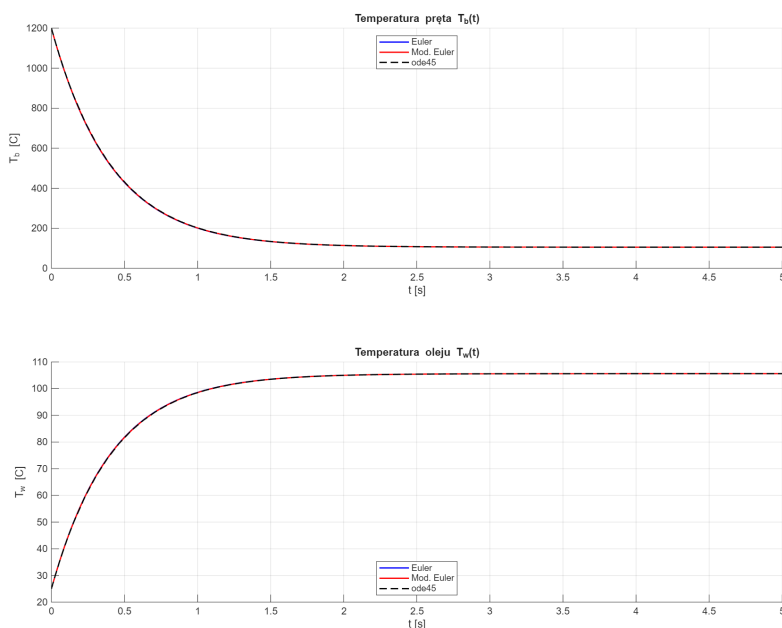
Rysunek 1: Wpływ kroku h na rozwiązanie - metoda Eulera

Analiza numeryczna wykazała, że metoda Eulera jest silnie wrażliwa na krok czasowy i przy większych krokach znacząco odbiega od rozwiązania wzorcowego, co wynika z jej pierwszego rzędu dokładności.



Rysunek 2: Wpływ kroku h na rozwiązanie - metoda ulepszonego Eulera

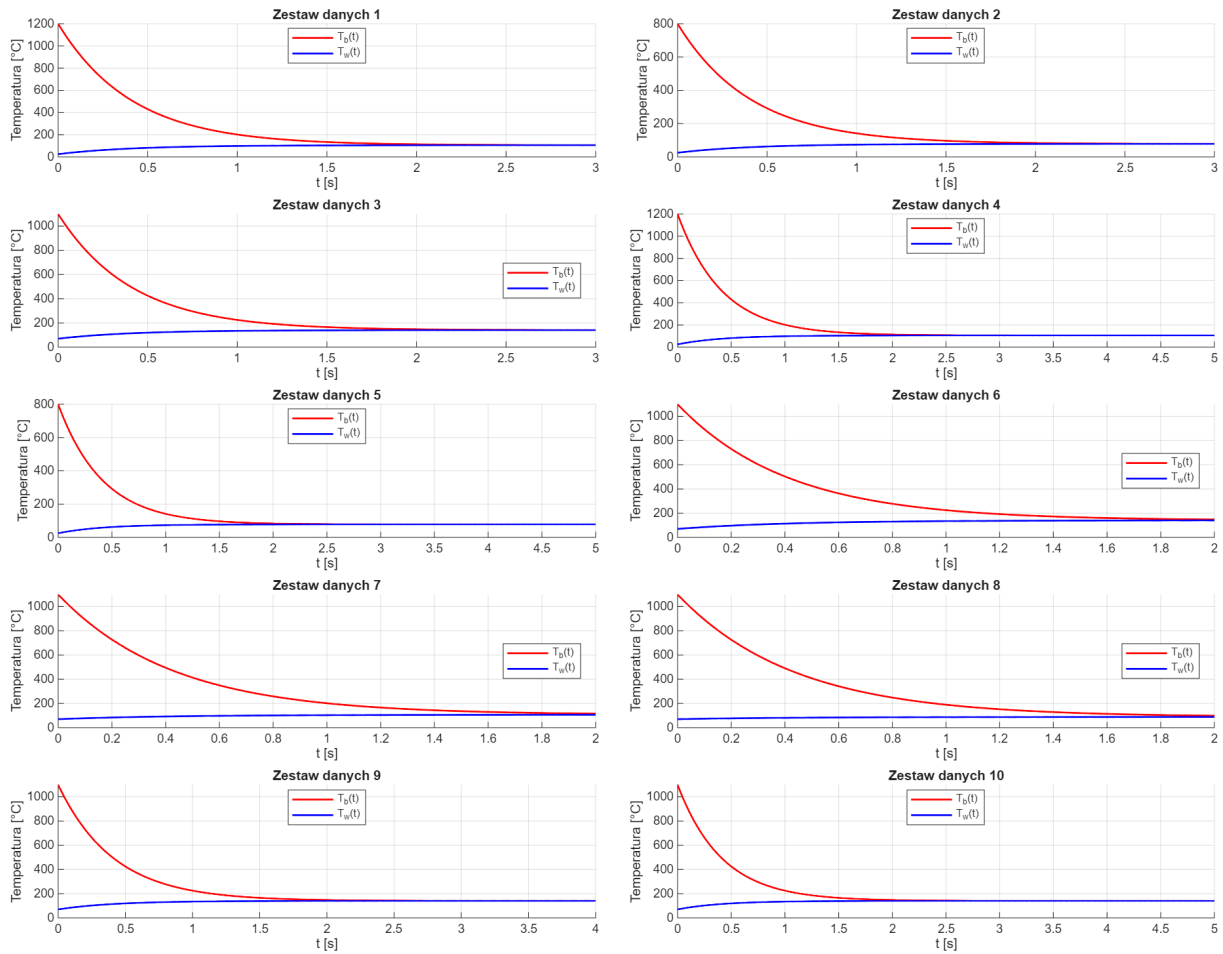
Metoda ulepszanego Eulera (Heuna) okazała się znacznie stabilniejsza i przy kroku $h = 0,001$ praktycznie pokrywała się z wynikami `ode45`. Oznacza to, że ulepszony Euler zapewnia wystarczającą dokładność i stabilność przy niewielkim koszcie obliczeniowym, co czyni go odpowiednim narzędziem do dalszych analiz.



Rysunek 3: Przebieg temperatur dla różnych metod rozwiązywania równań różniczkowych

Uzyskane przebiegi temperatur pręta i oleju są fizycznie poprawne: obserwuje się szybkie oddawanie ciepła na początku procesu oraz wykładnicze dążenie temperatur do stanu równowagi, bez niestabilności i artefaktów numerycznych.

Istotnym etapem była weryfikacja modelu na podstawie danych pomiarowych. Porównanie wyników symulacji z dziesięcioma przypadkami eksperymentalnymi wykazało bardzo dobrą zgodność obliczeń z rzeczywistymi pomiarami. Różnice końcowych temperatur mieściły się w zakresie około $0,03\text{--}2^\circ\text{C}$ dla pręta oraz $0,07\text{--}1,9^\circ\text{C}$ dla oleju, co jest mniejsze lub porównywalne z typowym błędem urządzeń pomiarowych. Nieco większe rozbieżności pojawiały się jedynie w przypadkach o bardzo wysokiej temperaturze początkowej i krótkim czasie obserwacji, gdzie rzeczywista wymiana ciepła może być bardziej dynamiczna niż zakłada liniowy model.



Rysunek 4: Przebiegi dla różnych zestawów danych

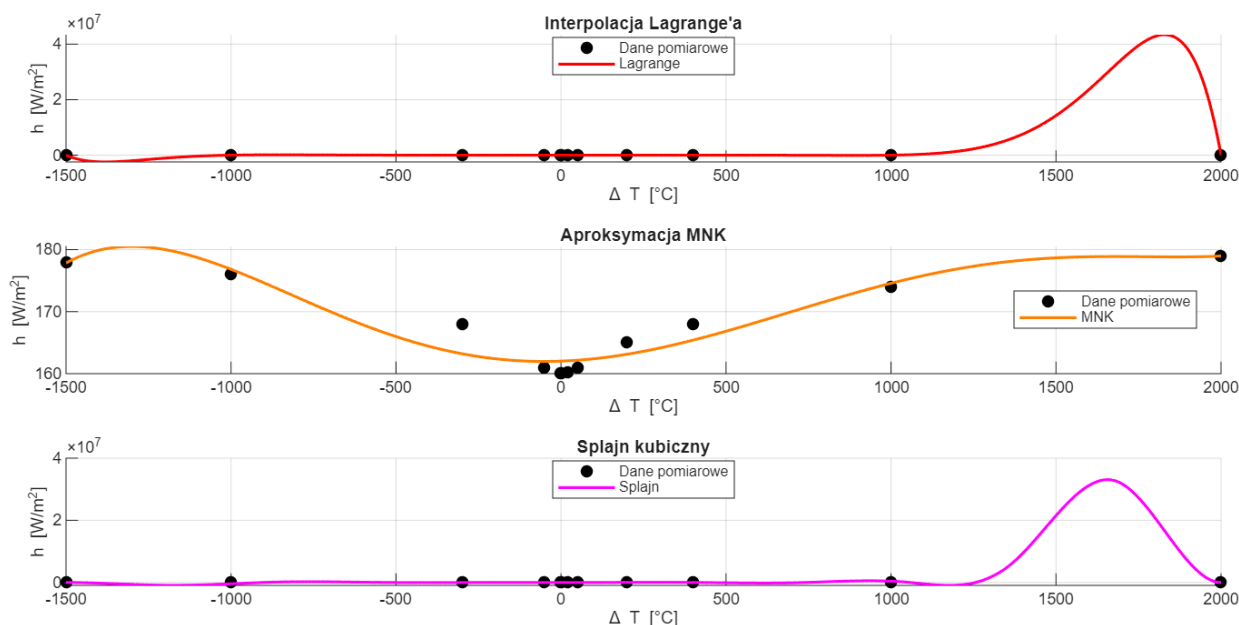
Wszystkie dziesięć wykresów przedstawia typowy, wykładniczy przebieg chłodzenia: temperatura pręta gwałtownie spada na początku procesu, natomiast temperatura oleju rośnie powoli dzięki jego dużej pojemności cieplnej. Różnice między zestawami wynikają głównie z odmiennych warunków początkowych oraz z masy oleju, która w największym stopniu wpływa na intensywność wymiany ciepła. Pomimo tych zmian, kształt krzywych pozostaje taki sam. Przebiegi są monotoniczne, stabilne i zgodne z fizycznym opisem zjawiska, co potwierdza poprawność modelu.

Dodatkowa analiza wrażliwości wykazała, że zmiana temperatury początkowej pręta o $\pm 10^\circ\text{C}$ wpływała na wynik jedynie nieznacznie (około $\pm 0,7^\circ\text{C}$), natomiast zmiana temperatury początkowej oleju o $\pm 10^\circ\text{C}$ miała znacznie większy efekt (około $\pm 9,3^\circ\text{C}$), co wynika z roli oleju jako głównego bufora cieplnego. Najbardziej wrażliwym parametrem okazała się masa oleju: jej zmiana o $\pm 5\%$ powodowała zmianę końcowej temperatury pręta o około $3,6\text{--}3,9^\circ\text{C}$.

Podsumowując, opracowany symulator jest stabilny, dokładny i zgodny z pomiarami we wszystkich analizowanych przypadkach. Ewentualne różnice między symulacją a pomiarami wynikają przede wszystkim z uproszczeń modelu fizycznego, a nie z ograniczeń numerycznych.

Część 2.

W części drugiej przeprowadzono porównanie trzech metod wyznaczania funkcji $h(\Delta T)$: interpolacji Lagrange'a, aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów (MNK) oraz funkcji sklejanych trzeciego stopnia. Zgodnie z wymaganiami zadania, dla interpolacji i splajnu wygenerowano równoodległe węzły w przedziale danych pomiarowych, a wartości h w tych punktach wyznaczono metodą Lagrange'a.

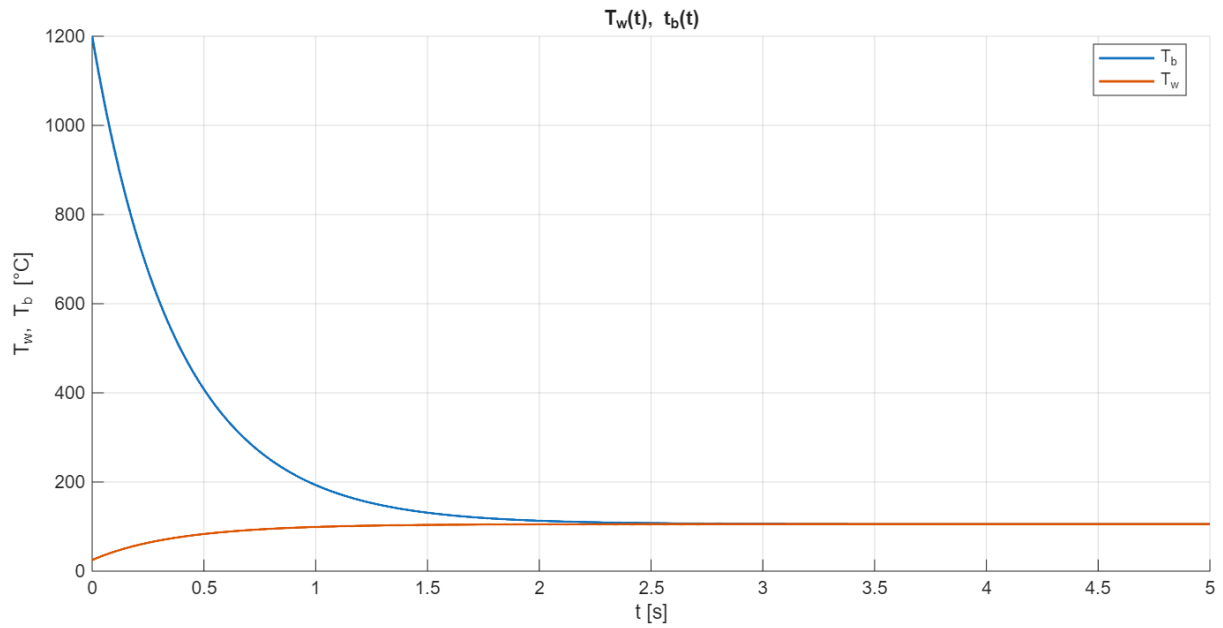


Rysunek 5: Porównanie różnych metod aproksymacji

Interpolacja Lagrange'a pozwoliła odtworzyć wartości w nowych węzłach, jednak silnie ujawniła się jej główna wada, czyli efekt Rungego, który powoduje wyraźne oscylacje wielomianu pomiędzy punktami. Zjawisko to znacząco obniża stabilność metody i dyskwalifikuje ją z praktycznego zastosowania w dalszych obliczeniach.

Funkcje sklejane trzeciego stopnia również oparto na równoodległych danych generowanych metodą Lagrange'a, przez co splajn przejął część niekorzystnych efektów związanych z oscylacjami i zaburzeniami w wygenerowanych punktach. Chociaż splajn zapewnia gładkość i ciągłość pochodnych, jego działanie na sztucznie wygenerowanych danych zmniejsza wiarygodność otrzymanej funkcji.

Najbardziej stabilną metodą okazała się aproksymacja MNK. Wielomian 5. stopnia dobrze odwzorował trend danych pomiarowych, zapewniając gładkość przebiegu oraz odporność na szum pomiarowy. Brak oscylacji charakterystycznych dla interpolacji sprawia, że metoda MNK dostarcza wiarygodnej funkcji $h(\Delta T)$, odpowiedniej do dalszego wykorzystania w modelu chłodzenia.



Rysunek 6: Przebiegi temperatur dla układu nieliniowego

Wykorzystanie uzyskanej nieliniowej funkcji $h(\Delta T)$ w symulacji procesu chłodzenia pozwoliło uzyskać fizycznie poprawny przebieg temperatur. Temperatura pręta ulega szybkiemu spadkowi, podczas gdy temperatura oleju wzrasta do poziomu równowagi, po czym układ stabilizuje się. Model zachował stabilność numeryczną w całym analizowanym przedziale czasu, co potwierdza zasadność zastosowania metody MNK jako podstawy nieliniowego opisu wymiany ciepła.

Część 3.

Część 4.