3 Rozdział

Strona:	LeIA	Wydrukowane przez użytkownika:	Kinga Kondraciuk
Kurs:	Metody numeryczne (2025Z)	Data:	niedziela, 30 listopada 2025, 14:01
Książka:	3 Rozdział		

Spis treści

1. Funkcje interpolacyjne
2. Wielomiany interpolacyjne
3. Wielomian Lagrange'a
4. Wielomian Newtona

1. Funkcje interpolacyjne

Funkcje interpolacyjne

W lekcji tej wprowadzimy pojęcie funkcji interpolacyjnej, wielomianu interpolacyjnego i węzłów interpolacji. Podamy również podstawowe twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego. Zastosujemy wielomiany interpolacyjne Lagrange`a i Newtona do rozwiązywania zadań interpolacyjnych.

Z doświadczeń lub pomiarów określiliśmy w $n+1$ różnych punktach: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ z przedziału $< a, b >$ wartości funkcji $y = f(x)$ i te wartości oznaczyliśmy przez:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n) \tag{3.1.1}$$

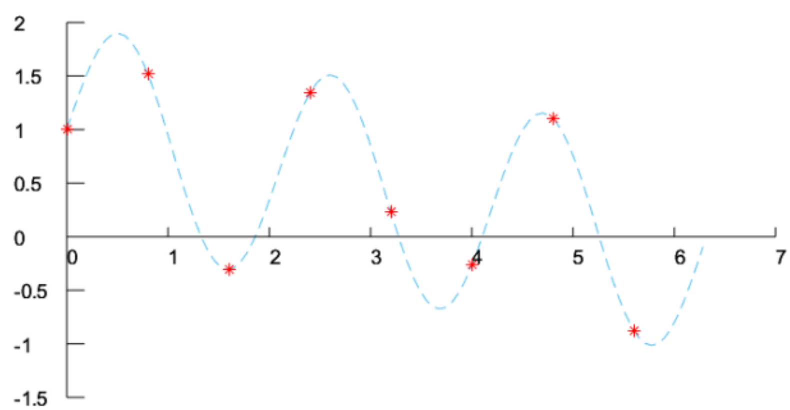
Interpolacja służy do znajdowania przybliżonych wartości funkcji $f(x)$ w dowolnym punkcie przedziału nawet w przypadku, gdy znane jest tylko kilka wartości funkcji $f(x)$ w tym przedziale.

Zadaniem interpolacji jest wyznaczenie funkcji $F(x)$, zwanej **funkcją interpolacyjną**, określonej w przedziale $< a, b >$, która w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$, zwanymi **węzłami interpolacji**, przyjmuje wartości funkcji $f(x)$ i w punktach poza węzłami przybliża wartość tej funkcji.

Zatem dla punktów x_i dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ w przedziale <a, b> funkcja $F(x)$ musi spełniać $n+1$ warunków:

$$F(x_i) = y_i = f(x_i) \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{3.1.2}$$

Wykres funkcji interpolacyjnej musi przechodzić przez punkty $(x_i, y_i) \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$ zaznaczone czerwonymi krzyżykami. Funkcja interpolacyjna jest narysowana niebieską przerywaną linią.



Rys 3.1. *- Funkcja interpolacyjna.*

Jako funkcje interpolacyjne stosuje się bardzo często:

- wielomiany algebraiczne stopnia n, oznaczmy je przez $W_n(x)$,
- funkcje sklejane $S(x)$.

Wielomiany algebraiczne stopnia n będziemy zapisywać w znanej postaci:

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \tag{3.1.3}$$

gdzie $a_i, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$ o współczynniki rzeczywiste wielomianu.

W dalszych rozważaniach właśnie tym wielomianom poświęcimy najwięcej miejsca i będziemy je wykorzystywać jako funkcje interpolacyjne. Funkcje sklejane tzw. "splajny" będziemy omawiać w dalszych lekcjach.

2. Wielomiany interpolacyjne

Wielomiany interpolacyjne

Dla funkcji $y = f(x)$, która w $n+1$ różnych punktach: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ z przedziału <a, b> przyjmuje wartości $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(n)$ zbudujemy wielomian interpolacyjny algebraiczny w postaci :

$$W_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Ponieważ wielomian n-tego stopnia ma $n+1$ niewiadomych współczynników $a_i \;\; i = 0, 1, 2, \ldots n$, aby go jednoznacznie określić trzeba wyznaczyć $n+1$ równań, w których te współczynniki są niewiadomymi. Inaczej mówiąc trzeba podać $n+1$ punktów, przez które ma przechodzić wykres tego wielomianu. I tak wielomian pierwszego stopnia $W_1(x) = a_0 + a_1x$ graficznie przedstawia prostą, ma dwa współczynniki a_0, a_1 i wiadomo , że przez dwa punkty przechodzi jedna prosta. Wielomian drugiego stopnia $W_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ma trzy współczynniki a_0, a_1, a_2 i wymaga trzech punktów, aby określić te współczynniki jednoznacznie, graficznie taki wielomian przedstawia parabolę (przez trzy punkty przechodzi jedna parabola). Ogólnie zatem prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego:
Istnieje jedyny wielomian interpolacyjny $W_n(x)$ stopnia co najwyżej n, który w $n+1$ różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ z przedziału <a, b> pokrywa się z funkcją $y = f(x)$, tzn.:
$W(x_i) = y_i = f(x_i) \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$
Dowód: Dla wielomianu $W_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ warunki $W(x_i) = y_i = f(x_i) \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$ sprowadzają się do rozwiązania układu $n+1$ następujących równań liniowych z $n+1$ niewiadomymi $a_i \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_2x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = y_1$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = y_n$$

Przypominamy, że układ równań liniowych $(n+1) \times (n+1)$ ma jednoznaczne rozwiązania na niewiadome $a_i \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$, jeśli wyznacznik tego układu jest różny od zera. Jak wygląda wyznacznik naszego układu?

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{3.2.1}$$

Jest to wyznacznik Vandermonde`a i jest on równy iloczynowi wszystkich możliwych różnic $x_j - x_i$ gdzie j>i. Zapisujemy ten fakt w postaci

$$detA = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i)$$

Ponieważ węzły $x_i \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$ są różne to wyrazy $x_j - x_i$ są różne od zera, zatem wyznacznik jest różny od zera i układ ma zawsze jedyne rozwiązanie. Oznacza to, że istnieje zawsze jedyny szukany wielomian interpolacyjny. Może być stopnia niższego niż n , bo współczynnik a_n może być równy zero, oczywiście jeszcze jakieś inne współczynniki mogą się zerować.

Przykład 3.1

Przykład

Aby wyjaśnić obliczanie wyznacznika Vandermonde`a obliczymy ten wyznacznik dla stopnia 2 i 3, dalsze obliczanie wynika z indukcji matematycznej - nie będziemy jej prowadzić, aby nie komplikować rozważań.
Dla $n = 2$ mamy
$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0$ bo węzły $x_0 \neq x_1$
Dla $n = 3$ wyznacznik obliczamy następująco:

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ 1 & x_2 + x_0 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Jak powstały te przekształcenia? W pierwszym kroku od drugiego wiersza i od trzeciego wiersza został odjęty wiersz pierwszy i wyzerowały się wyrazy w pierwszej kolumnie w drugim i trzecim wierszy. Dalej następuje rozwinięcie wyznacznika względem pierwszej kolumny i zostaje jeden wyznacznik drugiego stopnia . Wyciągamy z pierwszego wiersza wyrażenie $x_1 - x_0$, a z drugiego wiersza $x_2 - x_0$ przed wyznacznik korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. I znów ponieważ węzły są różne otrzymujemy wyrażenie na wyznacznik, które jest różne od zera.

Potem prowadzimy indukcję względem stopnia wyznacznika.

3. Wielomian Lagrange'a

Wielomian Lagrange'a

Poszukujemy wielomianu algebraicznego w postaci:

$$WL_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)}y_1 + \ldots + \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}y_k + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})}y_n$$

Wielomian ten nosi nazwę **wielomianu interpolacyjnego Lagrange`a**.
Wielomian ten ma $n+1$ składników, w każdym ze składników przy y_k $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ w liczniku nie występuje czynnik $(x - x_k)$ to znaczy w liczniku jest wielomian n-tego stopnia, a w mianowniku od węzła x_k odejmowane są wszystkie inne węzły i te różnice są pomnożone przez siebie. Zwróćmy uwagę, że w mianowniku nie występuje również czynnik $(x_k - x_k)$. Ponieważ suma wielomianów stopnia n jest wielomianem co najwyżej n-tego stopnia (jakieś wyrazy mogą się zredukować i możemy dostać wielomian niższego stopnia, ale nigdy wyższego) wielomian Lagrange`a $WL_n(x)$ jest wielomianem co najwyżej n-tego stopnia.

Sprawdzimy, czy jest spełniony warunek $WL_n(x_k) = y_k = f(x_k)$ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Wstawiając za x do wielomianu $WL_n(x)$ węzeł x_k otrzymujemy:

$$\begin{aligned} WL_n(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)}y_0 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)}y_1 + \ldots \\ & + \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}y_k \\ & + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})}y_n \end{aligned}$$

W każdym składniku oprócz tego, który stoi przy y_k jest w liczniku różnica $(x_k - x_k)$ czyli zero, natomiast w tym składniku przy y_k w liczniku jest takie samo wyrażenie jak w mianowniku, to znaczy, że przy jest współczynnik 1. Zatem

$$WL_n(x_k) = 0 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + \ldots + 1 \cdot y_k + \ldots + 0 \cdot y_n = y_k$$

Wielomian Lagrange`a spełnia wymagania z twierdzenia o istnieniu, zatem jest szukanym wielomianem interpolacyjnym. Jeśli wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$\Phi_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)} \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

to wielomian będzie mieć postać:

$$WL_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(x) y_k \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

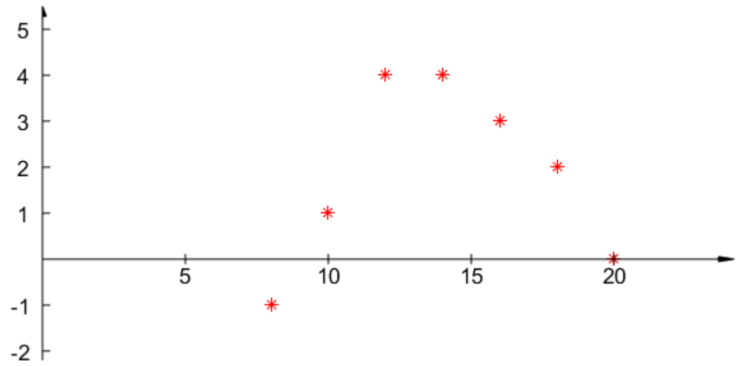
Przykład 3.2.

Przykład

Zmierzyliśmy w pierwszym dniu wiosny - 21 marca 2005 roku- w Warszawie na Mokotowie temperaturę za oknem i wyniki zapisaliśmy w tabeli:

Godzina pomiaru	8	10	12	14	16	18	20
Temperatura w stopniach	-1	1	4	4	3	2	0

Na wykresie wygląda to następująco:

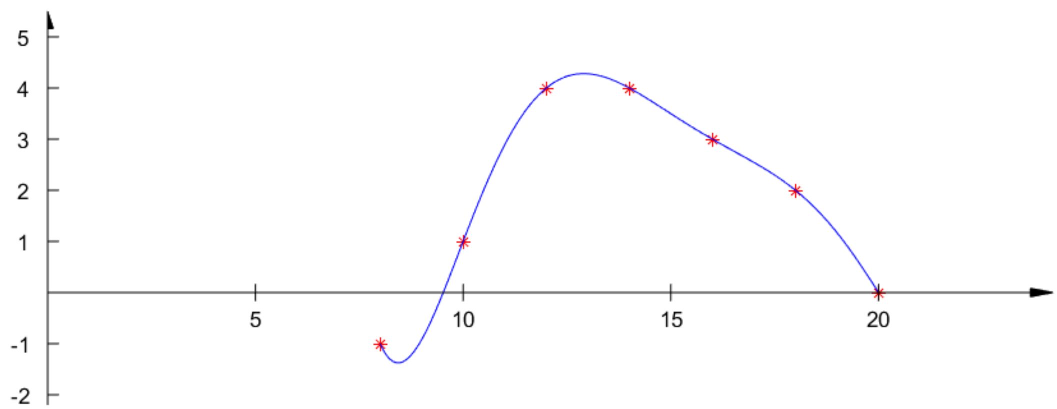


Rys 3.3.1. *Rozkład temperatury z danych pomiarowych*

Mamy 7 pomiarów, to znaczy wartość funkcji - temperatury - jest dana w 7 równoodległych węzłach. Szukany wielomian interpolacyjny będzie zatem $n = 6$ stopnia. Po zastosowaniu wzoru na wielomian Lagrange`a dostajemy wynik:

$$W_6(x) = 1187 - \frac{7949}{15}x + \frac{22847}{240}x^2 - \frac{283}{32}x^3 + \frac{173}{384}x^4 - \frac{23}{1920}x^5 + \frac{1}{7680}x^6 \quad \textbf{(1)}$$

Poniżej podajemy rysunek pomiarowych i wielomianu interpolacyjnego.



Możemy teraz obliczać przybliżoną temperaturę w dowolnej porze między godziną 8 a godziną 20-tą. Otrzymujemy np. że o godzinie 13:30 temperatura wynosiła 4, 187 stopnia, o godzinie 15:45 wynosiła 3, 119 stopnia, a o godzinie 10:15 miała wartość 1, 52 stopnia.

Zaimplementujemy teraz funkcję w MATLABie, która będzie otrzymywać jako parametr węzły interpolacji oraz zadany punkt x dla którego powinien zostać obliczona wartość wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a. W programie wykorzystujemy wyrażenie na wielomian Lagrange'a:

$$WL_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \textbf{(3.3.4)}$$

```
% x,y - wektory wezlow interpolacji
% xval - wsplrzedna x dla której nalezy obliczy wartosc wielomianu
function y = lagr(x,y,xval)
    n = length(x);
    suma = 0;
    for i = 1:n
        ilocz = 1;
        for j = 1:n
            if (i ~= j)
                ilocz = ilocz * (xval - x(j)) / (x(i) - x(j));
            end
        end
        suma = suma + y(i) * ilocz;
    end
    y = suma;
end
```

Przykład 3.3.

Przykład

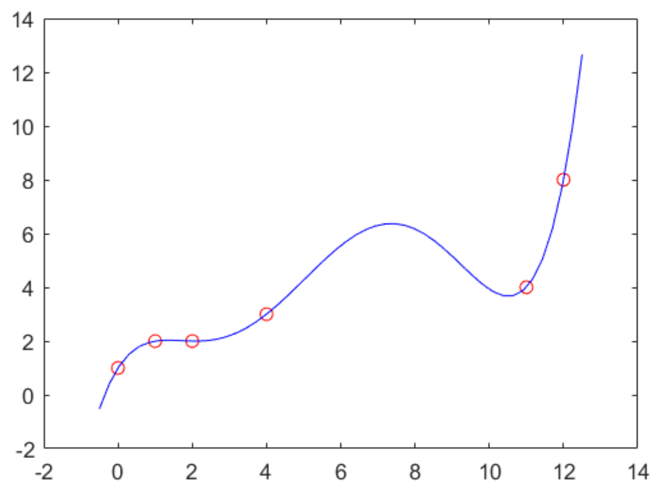
Wykorzystując funkcję do wyznaczania wartości wielomianu Lagnrange'a napisz program, który narysuje przebieg wielomianu interpolacyjnego dla zadanych węzłów interpolacji.

Rozwiązanie:

```
x = [0 1 2 4, 11, 12]
 y = [1 2 2 3, 4, 8]   % wygeneruj 50 punktów rownoodleglych pomiedzy najmniejsza i najwieksza
% wartoscia zbioru wezlow interpolacji
xd = linspace(min(x)-0.5,max(x)+0.5, 50);
yd = zeros(length(xd),1);

 for i = 1:length(xd)
     yd(i) = lagr(x,y,xd(i));
 end
 plot(x,y, 'or', xd, yd, 'b')
```

Program zwraca wykres jak następuje:



4. Wielomian Newtona

Wielomian interpolacyjny Newtona

Inną postacią wielomianu interpolacyjnego jest **wielomian interpolacyjny Newtona** . Do zdefiniowania tego wielomianu wykorzystamy **ilorazy różnicowe** n-tego rzędu dla funkcji \(y =f(x) \), która w \(n+1 \) różnych punktach: \(x_0,x_1,x_2,...,n \) z przedziału \(< a, b> \) przyjmuje wartości \(y_0=f(x_0),y_1=f(x_1),y_2=f(x_2),...,y_n=f(x_n) \).

Ilorazy różnicowe I rzędu:

\(f(x_0,x_1)= \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, ~~f(x_1,x_2)= \frac{y_2-y_1}{x_x-x_1},~~... ~~ f(x_{k-1},x_k)= \frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}},...f(x_{n-1},x_n)= \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} \),

Ilorazy różnicowe II rzędu:

\(f(x_0,x_1,x_2)= \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0},~~f(x_1,x_2,x_3)= \frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1},...f(x_{h-2},x_{h-1},x_h)= \frac{f(x_{h-1}-x_{h})-f(x_h-2,x_{k-1})}{x_k-x_h-2},...f(x_{n-2},x_{n-1},x_n)= \frac{f(x_{n-1},-x_n)-f(x_{n-2},x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}} \)

I ogólnie iloraz \(m \)-tego rzędu \((m=2...n, k=2,...n) \)

\(f\left(x_{k-m}, \ldots x_{k-1}, x_k\right)=\frac{f\left(x_{k-m+1}, \ldots, x_k\right)-f\left(x_{k-m}, \ldots, x_{k-1}\right)}{x_k-x_{k-m}} \) **(3.3.5)**

Iloraz \(n \)-tego rzędu jest tylko jeden i ma postać:

\(f(x_{0},x_1,...x_{n})= \frac{f(x_{1},...,x_n)-f(x_{0},...,x_{n-1})}{x_n-x_{0}} \)

Zauważmy, że aby obliczyć ilorazy różnicowe rzędu \(m \) , trzeba podzielić różnice ilorazów rzędu \(m \)-1 przez różnice wartości węzłów o współrzędnych różniących się o \(m \). Jest to na pierwszy rzut oka dość skomplikowane. Zapiszemy w tabeli ilorazy różnicowe dla funkcji , dla której są dane wartości tylko w trzech punktach:

x_0	y_0	**Ilorazy I rzędu**	**Iloraz II rzędu**
x_1	y_1	$f\left(x_0, x_1\right)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$	
x_2	y_2	$f\left(x_1, x_2\right)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$f\left(x_0, x_1, x_2\right)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$

Przykład 3.4

Przykład

Funkcja f(x) dana jest za pomocą tabelki

\(\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 1 & 3 & 5 \\ \hline y_i & 0 & 4 & 6 & 2 \end{array}\notag \)

Przykład 3.4.1 : Funkcja f(x) dana jest za pomocą tabelki:xiyi-10143652. Obliczymy dla niej ilorazy różnicowe do n=3 rzędu włącznie. Zauważmy, że węzłów jest n+1= 4, wtedy ostatni iloraz jest n-tego rzędu - czyli trzeciego

x_i	y_i	*I rzędu*	*II rzędu*	*III rzędu*
-1	0			
1	4	$\frac{4-0}{1-(-1)}=2$		
3	6	$\frac{6-4}{3-1}=1$	$\frac{1-2}{3-(-1)}=-\frac{1}{4}=-0,25$	
5	2	$\frac{2-6}{5-3}=-2$	$\frac{-2-1}{5-1}=-\frac{3}{4}=-0,75$	$\frac{-0,75-(-0,25)}{5-(-1)}=\frac{-0,5}{6}=\frac{-1}{12}$

Możemy teraz podać postać wielomianu interpolacyjnego Newtona dla funkcji \(f(x) \):

\(\begin{aligned} & W_n(x)=y_0+f\left(x_0, x_1\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0, x_1, x_2\right)\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)+\ldots+ \\ & f\left(x_0, x_1, \ldots x_n\right)\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right) \cdot \ldots \cdot\left(x-x_{n-1}\right) \end{aligned} \) **(3.4.1)**

Widać z tej postaci, że jest to wielomian co najwyżej n-tego stopnia. W ostatnim składniku jest co najwyżej x do potęgi n-tej (ale iloraz różnicowy n-tego rzędu może być równy zero). Trudniej jest sprawdzić, że wielomian ten w węzłach pokrywa się z funkcją $f(x)$. Sprawdzimy ten warunek tylko dla wielomianu drugiego stopnia, który ma postać:

$$WN_2(x)=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

Dla $x=x_0$ widać, że

$$W_2(x_0)=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

zatem $WN_2(x_0)=y_0$

Dla $x=x_1$ mamy:

$$WN_2(x_1)=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

Ostatni składnik znika, zostają dwa składniki, w tym drugim skorzystamy ze wzoru na iloraz różnicowy pierwszego rzędu i otrzymamy:

$$W_2(x_1)=y_0+f(x_0,x_1)(x_1-x_0)=y_0+ \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} (x_1-x_0)=y_0+y_1-y_0=y_1$$

Dla $x=x_2$

$$WN_2(x_2)=y_0+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

i rozpiszemy iloraz drugiego rzędu w ostatnim składniku:

$$\begin{aligned} & W N_2\left(x_2\right)=y_0+f\left(x_0, x_1\right)\left(x_2-x_0\right)+\frac{f\left(x_1, x_2\right)-f\left(x_0, x_1\right)}{x_2-x_0}\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)= \\ & =y_0+f\left(x_0, x_1\right)\left(x_2-x_0\right)+f\left(x_1, x_2\right)\left(x_2-x_1\right)-f\left(x_0, x_1\right)\left(x_2-x_1\right)= \\ & =y_0+f\left(x_0, x_1\right)\left(x_2-x_0-x_2+x_1\right)+f\left(x_1, x_2\right)\left(x_2-x_1\right)= \\ & =y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\left(x_1-x_0\right)+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x_2-x_1\right)=y_0+y_1-y_0+y_2-y_1=y_2 \end{aligned}\notag$$

Można to sprawdzić ogólnie, że $WN_n(x_k)=y_k=f(x_k)~~ k=0,1,...n$.

Powróćmy do przykładu 3.4, dla tej funkcji wielomian Newtona będzie następujący:

$$WN_3(x)=0+2(x+1)- \frac{1}{4}(x+1)(x-1)+ \frac{1}{12}(x+1)(x-1)(x-3)$$

Przykład 3.5

Przykład

Zmierzyliśmy wartość funkcji w przedziale $< 1, 4>$ tylko w dwóch węzłach i otrzymaliśmy wyniki: dla $x=1$ $y=3$ i dla $x=4~~ y=6$. Wielomian interpolacyjny dla tej funkcji jest prostą przechodzącą przez te punkty. Węzłów jest $n+1=2$, wielomian jest stopnia $n=1$. Potem dodaliśmy jeszcze punkt dla $x=2$ wartość funkcji $y=3$ i poprowadziliśmy wielomian stopnia 2. Następnie dodaliśmy jeszcze jeden pomiar i dla $x=3$ otrzymaliśmy $y=2$. Teraz mamy 4 węzły w przedziale , a wielomian jest 3-stopnia.

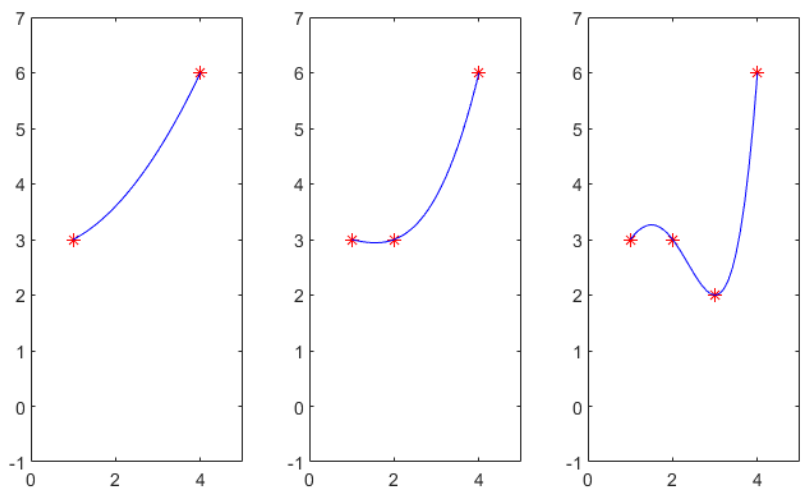
Rozwiązanie
Do rozwiązania zadania posłużymy się środowiskiem MATLAB oraz wbudowaną funkcją *polyfit* oraz *polyval*. Program ilustrujący to zadanie wygląda następująco.

```
% definiujemy funkcty to wygenerowania gladkiego wykresu
xd = 1:0.1:4
% pierwszy przypadek - 1 stopien
x = [1 4]
y = [3 6]
a = polyfit(x,y,2)
yd = polyval(a,xd)
subplot(1,3,1)
plot(x,y,'*r',xd,yd, 'b')
xlim([0,5])
ylim([-1,7])

% drugi przypadek - 2 stopien
x = [1 2 4]
y = [3 3 6]
a = polyfit(x,y,3)
yd = polyval(a,xd)
subplot(1,3,2)
plot(x,y,'*r',xd,yd, 'b')
xlim([0,5])
ylim([-1,7])

% trzeci przypadek - 3 stopien
x = [1 2 3 4]
y = [3 3 2 6]
a = polyfit(x,y,4)
yd = polyval(a,xd)
subplot(1,3,3)
plot(x,y,'*r',xd,yd, 'b')
xlim([0,5])
ylim([-1,7])
```

Oto wynik programu z wygenerowanymi przebiegami.



Rysunek 3.7. *Przebiegi funkcji interpolującej z rozwiązaniem zadania z przykładu 3.5*