1. Błędy

Błąd bezwzględny

$$\Delta a = |A - a|$$

Błąd względny

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$$

Błąd bezwzględny funkcji jednej zmiennej

$$\Delta y = \Delta f = |f'(x)| \Delta x$$

Błąd względny funkcji jednej zmiennej

$$\delta y = \delta f = \frac{\Delta f}{|f(x)|} = w \cdot \delta x, \quad \text{gdzie} \quad w = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|$$

Błąd bezwzględny funkcji wielu zmiennych

$$\Delta f(x,y) = \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \Delta y$$

Błąd względny funkcji wielu zmiennych

$$\delta f = w_1 \delta x + w_2 \delta y \quad \text{gdzie} \quad w_1 = \left| \frac{f_x(x,y) \cdot x}{f(x,y)} \right|, w_2 = \left| \frac{f_y(x,y) \cdot y}{f(x,y)} \right|$$

2. Funkcje interpolacyjne wielomianowe

$$W_n(x) = a_0 + +a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Układ równań z macierzą Vandermonde'a

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Wielomian Lagrange'a

$$WL_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \Phi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Wielomian Newtona

$$\begin{aligned} WN_n(x) = & y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ & f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

x_i	y_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$\ldots$
x_0	y_0	y_0				
x_1	y_1	y_1	$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$			
x_2	y_2	y_2	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$\frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$		
x_3	y_3	y_3	$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$	$\frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$	$\frac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0}$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Błąd interpolacji

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{(n+1)}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|,$$

$$\text{gdzie} \quad M_{n+1} = \sup_{x \in <a,b>} |f^{(n+1)}(x)|$$

Węzły Czebyszewa

$$x_k = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) + \frac{b+a}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

3. Interpolacja funkcjami sklejanymi

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{h^3} \cdot \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & \text{dla} \quad x \in < x_{i-2}, x_{i-1} > \\ (x - x_{i-2})^3 - 4(x - x_{i-1})^3 & \text{dla} \quad x \in < x_{i-1}, x_i > \\ (x_{i+2} - x)^3 - 4(x_{i+1} - x)^3 & \text{dla} \quad x \in < x_i, x_{i+1} > \\ (x_{i+2} - x)^3 & \text{dla} \quad x \in < x_{i+1}, x_{i+2} > \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin < x_{i-2}, x_{i+2} > \end{cases}$$

$$S_3(x) = c_{-1}\Phi_{-1}(x) + c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + \ldots + c_n\Phi_n(x) + c_{n+1}\Phi_{n+1}(x)$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 4c_0 & + & 2c_1 & & & & & & & & & = & y_0 + \frac{h}{3} \cdot \alpha \\ c_0 & + & 4c_1 & + & c_2 & & & & & & & = & y_1 \\ & & c_1 & + & 4c_2 & + & c_3 & & & & & = & y_2 \\ & & & & \ddots & & \ddots & & & & & = & \ldots \\ & & & & & & c_{n-2} & + & 4c_{n-1} & + & c_n & = & y_{n-1} \\ & & & & & & & & 2c_{n-1} & + & 4c_n & = & y_n - \frac{h}{3} \cdot \beta \end{array}$$

$c_{-1} = c_1 - \frac{h}{3} \cdot \alpha$,

$c_{n+1} = c_{n-1} + \frac{h}{3} \cdot \beta$,

$\alpha = S_3'(a^+)$, $\beta = S_3'(b^-)$

4. Aproksymacja dyskretna

$$\begin{aligned} H(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) &= \sum_{i=0}^{n} (y_i - F(x_i))^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - (a_0\phi_0(x_i) + a_1\phi_1(x_i) + \ldots + a_m\phi_m(x_i))\right]^2 \end{aligned}$$

$$
M = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}
$$

$$
M^T M \cdot A = M^T \cdot Y
$$

Aproksymacja wielomianami algebraicznymi stopnia m, dla:

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}
$$

lub

$$
\begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \dots + & \sum_{i=0}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \dots + & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^m & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^{m} x_i^{m+2} & \dots + & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i \end{bmatrix}
$$

5. Wielomiany trygonometryczne

$$
T_m(x) = a_0 + a_1 \cos(c \cdot x) + b_1 \sin(c \cdot x) + a_2 \cos(2c \cdot x) + b_2 \sin(2c \cdot x) + \dots
$$
$$
+ a_m \cos(mc \cdot x) + b_m \sin(mc \cdot x)
$$

$c = \frac{\pi}{l}, \quad l = \frac{(n+1)h}{2}$

$$
a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i
$$

$$
a_1 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(\frac{\pi}{l} x_i)
$$

$$
a_2 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos(\frac{2\pi}{l} x_i)
$$

$$
\vdots
$$

$$
b_1 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(\frac{\pi}{l} x_i)
$$

$$
b_2 = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i \sin(\frac{2\pi}{l} x_i)
$$

$$
\vdots
$$

6. Równania nieliniowe

$f(x) = 0$

$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$ istnieje co najmniej pierwiastek $x \in <a, b>$

Oszacowanie błędu bezwzględnego przybliżenia

$$|x^* - p| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1}, \quad |f'(x)| \geq m_1 > 0 \text{ dla } x \in < a, b >$$

Metoda bisekcji

$$f(a)f(b) < 0, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Metoda siecznych

Warunek startowy: $f(x_0)f''(x_0) > 0, f(x_1)f''(x_1) > 0$

Iteracje: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Stała asymptotyczna błędu: $C = \left(\frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|}\right)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Metoda stycznych (Newtona)

Warunek startowy: $f(x_0)f''(x_0) > 0$

Iteracje: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Stała asymptotyczna błędu: $C = \left|\frac{f''(p)}{2f'(p)}\right|$

Pierwiastki wielokrotne

$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, gdzie $u'(x_n) = 1 - u(x_n)\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}$, oraz $x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}$

Układy nieliniowe

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \ldots & = & \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{cases}$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}, \quad J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Wówczas:

$$F(X) = \mathbf{0}$$

Iteracje:

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \left[J^{(n)}\right]^{-1} F\left(X^{(n)}\right)$$

7. Całkowanie numeryczne

$$\int_a^b f(x)dx$$

Wzór prosty trapezów

$I(f)=\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b))$

$E(f) \approx -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi^*)$ jako $f''(\xi^*)$ przyjmuje się $\sup\limits_{x\in<a,b>} f''(x)$

Wzór prosty parabol (Simpsona)

$I(f)=\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))$

$E(f) \approx -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi^*)$ jako $f^{(4)}(\xi^*)$ przyjmuje się $\sup\limits_{x\in<a,b>} f^{(4)}(x)$

Metody złożone:

$h=\frac{b-a}{m}$, $x_k=a+k\cdot h,\ \ k=0,1,2,\ldots,m$

Metoda złożona prostokątów

$I(f)=\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum\limits_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$

$E(f) \approx -\frac{(b-a)^3}{24m^2}f''(\xi^*)$ jako $f''(\xi^*)$ przyjmuje się $\sup\limits_{x\in<a,b>} f''(x)$

Metoda złożona trapezów

$I(f)=\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0)+2\sum\limits_{k=1}^{m-1} f(x_k)+f(x_m))$

$E(f)=-\frac{(b-a)^3}{12m^2}f''(\xi^*)$

Metoda złożona parabol (Simpsona)

$I(f)=\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0)+2\sum\limits_{k=2,4,\ldots,m-2} f(x_k)+4\sum\limits_{k=1,3,\ldots,m-1} f(x_k)+f(x_m))$

$E(f)=-\frac{(b-a)^5}{180m^4}f^{(4)}(\xi^*)$

Węzły Legendre`a

$I(f)=\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} A_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k+\frac{b+a}{2}\right)$

n	k	Węzły t_k	Współczynniki A_k
1	$0;1$	$\pm 0,577350$	1
2	$0;2$ 1	$\pm 0,774597$ 0	$5/9$ $8/9$
3	$0;3$ $1;2$	$\pm 0,861136$ $\pm 0,339981$	$0,347855$ $0,652145$
4	$0;4$ $1;3$ 2	$\pm 0,906180$ $\pm 0,538469$ 0	$0,236927$ $0,478629$ $0,568889$

8. Równania różniczkowe zwyczajne

$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$

$y(x_0) = y_0$

$h = \Delta x$, $x_{n+1} = x_n + h$

Metoda prosta Eulera

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

Metoda ulepszona Eulera

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$

Metoda Heuna

$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))}{2}$

Metoda Rungego-Kutty 4 stopnia

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2)$

$k_3 = f(x_n + h/2, y_n + hk_2/2)$

$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Przekształcenie równania wyższego rzędu do układu równań

Stosujemy ciąg podstawień.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0 y = g(x)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y \\
\frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\
\frac{dy_2}{dx} &= y_3 \\
&\vdots \\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n \\
\frac{dy_n}{dx} &= \frac{1}{a_n} \left[g(x) - a_{n-1} \frac{dy_{n-1}}{dx} - \ldots - a_0 y \right]
\end{aligned}$$