

# Chłodzenie pręta w oleju

Kinga Kondraciuk

319941

## 1 Wstęp teoretyczny

W projekcie analizujemy proces chłodzenia rozgrzanego metalowego pręta, który zostaje zanurzony w oleju chłodzącym. Gdy pręt trafia do dużo chłodniejszego oleju, zaczyna oddawać mu ciepło. Powoduje to stopniowy spadek temperatury pręta oraz jednoczesny wzrost temperatury cieczy. W modelu zakładamy, że w krótkim czasie oddawanie ciepła do otoczenia jest pomijalne, dlatego traktujemy olej jako układ izolowany od środowiska.

Dodatkowym uproszczeniem jest przyjęcie, że zarówno pręt, jak i olej mają w danej chwili jednakową temperaturę w całej swojej objętości. Dzięki temu opisywany proces sprowadza się do wymiany ciepła jedynie na powierzchni styku pręta z cieczą. Szybkość tej wymiany zależy od kilku parametrów:

- powierzchni pręta,
- współczynnika wymiany ciepła  $h$ ,
- masy,
- pojemności cieplnej pręta i oleju.

Tak opisany układ można przedstawić za pomocą dwóch równań różniczkowych, które określają, jak zmieniają się temperatury obu elementów w czasie.

$$\begin{aligned}\frac{m_b c_b}{hA} \frac{dT_b}{dt} + T_b &= T_w \\ \frac{m_w c_w}{hA} \frac{dT_w}{dt} + T_w &= T_b\end{aligned}$$

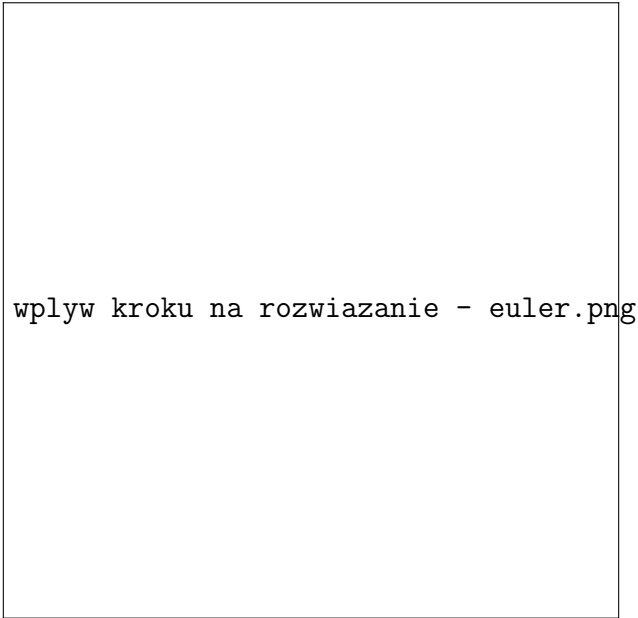
Symulator tworzony w ramach projektu rozwiązuje te równania numerycznie, krok po kroku.

W kolejnej części projektu współczynnik  $h$  nie jest już wartością stałą, lecz zależy od różnicy temperatur między prętem a olejem. Oznacza to, że intensywność przekazywania ciepła zmienia się w trakcie chłodzenia. Ponieważ współczynnik ten jest znany tylko w postaci danych pomiarowych, konieczne jest jego przybliżenie metodami interpolacji lub aproksymacji, tak aby można było wykorzystać go w symulacjach.

Model ma praktyczne znaczenie technologiczne, ponieważ pozwala ocenić, jak szybko pręt może zostać schłodzony i jak dużo oleju jest do tego potrzebne. Dzięki temu można później projektować odpowiednią wielkość zbiorników i analizować wymagania procesu produkcyjnego.

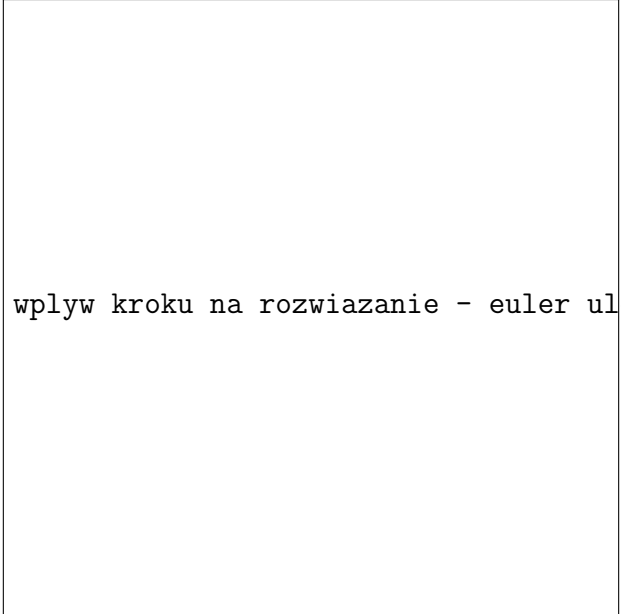
## 2 część 1. projektu

W pierwszej części projektu opracowano kompletny symulator procesu chłodzenia pręta zanurzonego w oleju, oparty na układzie równań różniczkowych opisujących bilans energii pomiędzy prętem a cieczą chłodzącą. Do całkowania równań zastosowano metodę Eulera oraz metodę ulepszoną Eulera (Heuna), a otrzymane trajektorie porównano z rozwiązaniem referencyjnym wyznaczonym za pomocą solvera `ode45`.



Rysunek 1: Wpływ kroku  $h$  na rozwiązanie - metoda Eulera


Analiza numeryczna wykazała, że metoda Eulera jest silnie wrażliwa na krok czasowy i przy większych krokach znacząco odbiega od rozwiązania wzorcowego, co wynika z jej pierwszego rzędu dokładności.



wplyw kroku na rozwiazanie - euler ulepszony.png

Rysunek 2: Wpływ kroku  $h$  na rozwiązanie - metoda ulepszego Eulera

Metoda ulepszego Eulera (Heuna) okazała się znacznie stabilniejsza i przy kroku  $h = 0,001$  praktycznie pokrywała się z wynikami `ode45`. Oznacza to, że ulepszony Euler zapewnia wystarczającą dokładność i stabilność przy niewielkim koszcie obliczeniowym, co czyni go odpowiednim narzędziem do dalszych analiz.




przebieg temperatur dla roznych metod rozwiazywania rownan roznicznych

Rysunek 3: Przebieg temperatur dla różnych metod rozwiązywania równań różniczkowych

Uzyskane przebiegi temperatur pręta i oleju są fizycznie poprawne: obserwuje się szybkie oddawanie ciepła na początku procesu oraz wykładnicze dążenie temperatur do stanu równowagi, bez niestabilności i artefaktów numerycznych.

Istotnym etapem była weryfikacja modelu na podstawie danych pomiarowych. Porównanie wyników symulacji z dziesięcioma przypadkami eksperymentalnymi wykazało

bardzo dobrą zgodność obliczeń z rzeczywistymi pomiarami. Różnice końcowych temperatur mieściły się w zakresie około  $0,03\text{--}2^{\circ}\text{C}$  dla pręta oraz  $0,07\text{--}1,9^{\circ}\text{C}$  dla oleju, co jest mniejsze lub porównywalne z typowym błędem urządzeń pomiarowych. Nieco większe rozbieżności pojawiały się jedynie w przypadkach o bardzo wysokiej temperaturze początkowej i krótkim czasie obserwacji, gdzie rzeczywista wymiana ciepła może być bardziej dynamiczna niż zakłada liniowy model.



przebiegi dla roznych zestawow danych.png

Rysunek 4: Przebiegi dla różnych zestawów danych

Wszystkie dziesięć wykresów przedstawia typowy, wykładniczy przebieg chłodzenia: temperatura pręta gwałtownie spada na początku procesu, natomiast temperatura oleju rośnie powoli dzięki jego dużej pojemności cieplnej. Różnice między zestawami wynikają głównie z odmiennych warunków początkowych oraz z masy oleju, która w największym stopniu wpływa na intensywność wymiany ciepła. Pomimo tych zmian, kształt krzywych pozostaje taki sam. Przebiegi są monotoniczne, stabilne i zgodne z fizycznym opisem zjawiska, co potwierdza poprawność modelu.

Dodatkowa analiza wrażliwości wykazała, że zmiana temperatury początkowej pręta o  $\pm 10^{\circ}\text{C}$  wpływała na wynik jedynie nieznacznie (około  $\pm 0,7^{\circ}\text{C}$ ), natomiast zmiana temperatury początkowej oleju o  $\pm 10^{\circ}\text{C}$  miała znacznie większy efekt (około  $\pm 9,3^{\circ}\text{C}$ ), co wynika z roli oleju jako głównego bufora cieplnego. Najbardziej wrażliwym parametrem okazała się masa oleju: jej zmiana o  $\pm 5\%$  powodowała zmianę końcowej temperatury pręta o około  $3,6\text{--}3,9^{\circ}\text{C}$ .

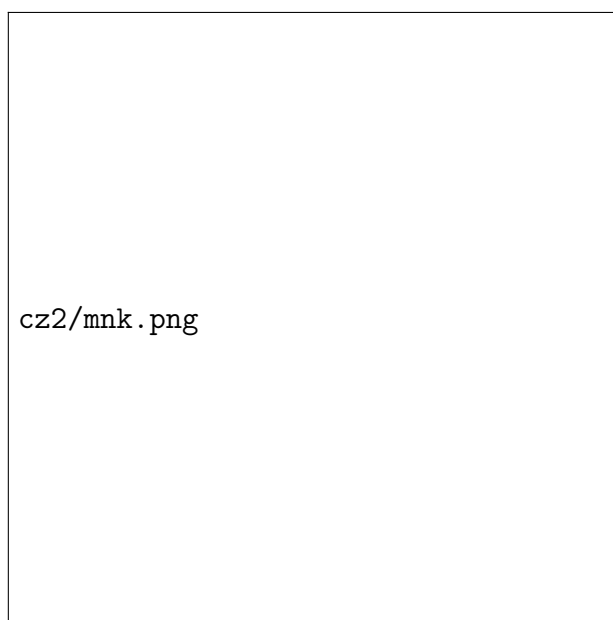
Podsumowując, opracowany symulator jest stabilny, dokładny i zgodny z pomiarami we wszystkich analizowanych przypadkach. Ewentualne różnice między symulacją a pomiarami wynikają przede wszystkim z uproszczeń modelu fizycznego, a nie z ograniczeń numerycznych.

## 3 część 2. projektu

W ramach drugiej części projektu należało rozwiązać problem aproksymacji współczynnika przewodnictwa cieplnego  $h$  na podstawie punktów pomiarowych. Do symulacji potrzebna jest funkcja ciągła, która pozwoli obliczać  $h$  dla dowolnej różnicy temperatur  $\Delta T$ . Zadanie polegało na zaimplementowaniu i porównaniu trzech metod: aproksymacji wielomianowej metodą najmniejszych kwadratów (MNK), interpolacji wielomianowej Lagrange’a oraz funkcji sklepanych kubicznych (splajnów). Celem było wybranie najlepszej metody pod względem dokładności i stabilności numerycznej.

### 3.1 Analiza aproksymacji wielomianowej MNK

Zaimplementowano aproksymację wielomianową stopnia 5 metodą najmniejszych kwadratów. Metoda ta minimalizuje sumę kwadratów błędów, szukając optymalnych współczynników wielomianu.



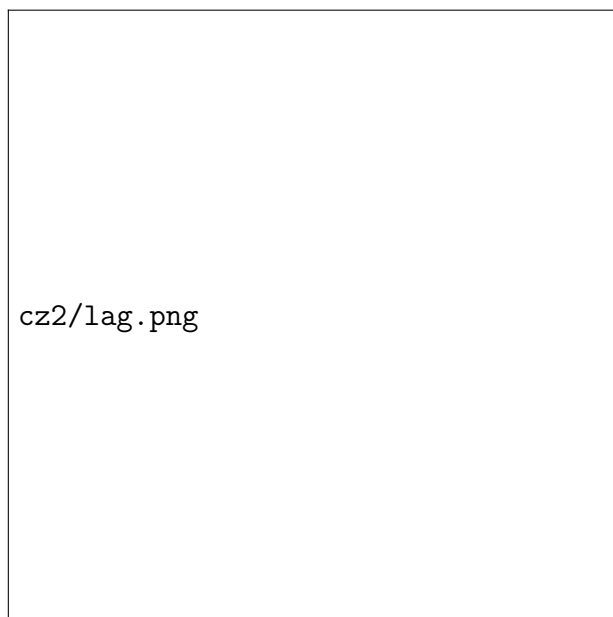
Rysunek 5: Aproksymacja MNK

Pomarańczowa krzywa na wykresie jest gładka i przebiega w pobliżu wszystkich punktów pomiarowych, nie przechodząc przez nie dokładnie. Charakterystyka ma kształt litery U z minimum w okolicach  $\Delta T = 0^\circ\text{C}$ , co odpowiada fizycznej naturze zjawiska. Uzyskano następujące błędy: średni błąd bezwzględny  $1.58 \text{ W/m}^2$  (0.96%), maksymalny błąd bezwzględny  $4.79 \text{ W/m}^2$  (2.85%). Metoda wykazuje wysoką stabilność numeryczną – brak oscylacji i gwałtownych zmian. Dodatkowo aproksymacja automatycznie wygładza ewentualny szum pomiarowy w danych wejściowych. Jest to istotna zaleta, ponieważ dane eksperymentalne zawsze zawierają niepewności pomiarowe.



## 3.2 Analiza interpolacji Lagrange’a

Zaimplementowano interpolację wielomianową Lagrange’a, która konstruuje wielomian przechodzący dokładnie przez wszystkie punkty pomiarowe.



Rysunek 6: Interpolacja Lagrange’a

Czerwona krzywa przechodzi przez wszystkie punkty pomiarowe, jednak między węzłami występują silne oscylacje. Szczególnie widoczne są one na brzegach przedziału: w zakresie  $\Delta T \in [-1500, -1000]^\circ\text{C}$  krzywa spada do  $\sim 145 \text{ W/m}^2$ , by następnie wzrosnąć do  $\sim 180 \text{ W/m}^2$ , natomiast w zakresie  $\Delta T \in [1500, 2000]^\circ\text{C}$  wartość  $h$  osiąga niefizyczne  $\sim 210 \text{ W/m}^2$ . To tzw. efekt Rungego – charakterystyczne oscylacje wielomianów wysokiego stopnia przy nierównoodległych węzłach.

Uzyskane błędy: średni błąd bezwzględny  $1,18 \text{ W/m}^2$  (0,71%), maksymalny  $3,59 \text{ W/m}^2$ . Liczby te są jednak mylące – dotyczą tylko punktów pomiarowych. Między węzłami błędy są znacznie większe, a oscylacje prowadzą do niefizycznych wartości  $h$ . Takie gwałtowne zmiany współczynnika powodują sztywność układu równań różniczkowych, co wymaga bardzo małego kroku całkowania i zwiększa koszt obliczeniowy. Metoda została zdyskwalifikowana ze względu na brak stabilności numerycznej.

### 3.3 Analiza funkcji sklejanych (splajn kubiczny)

Zaimplementowano funkcje sklejane trzeciego stopnia zgodnie z algorytmem z podręcznika. Metoda dzieli przedział na segmenty i w każdym używa osobnego wielomianu trzeciego stopnia. Wielomiany są połączone w węzłach w sposób zapewniający ciągłość funkcji.



Rysunek 7: Splajn kubiczny

Fioletowa krzywa jest gładka i przebiega przez punkty pomiarowe bez oscylacji. W porównaniu do MNK, splajn dokładniej dopasowuje się do punktów, szczególnie w zakresach gdzie  $h$  zmienia się szybciej. Uzyskano najniższe błędy spośród wszystkich metod: średni błąd bezwzględny  $1.02 \text{ W/m}^2$  (0.63%), maksymalny błąd  $2.29 \text{ W/m}^2$  (1.43%). Stanowi to poprawę o około 35% względem MNK przy zachowaniu pełnej stabilności numerycznej.

Tabela 1: Błędy bezwzględne i względne

Metoda	Błąd bezwzględny		Błąd względny	
	Średni	Maksymalny	Średni	Maksymalny
MNK	1,5752	4,7903	0,95511	2,8514
Lagrange	1,1781	3,5873	0,71285	2,0382
Splajn	1,0242	2,2889	0,63184	1,4306

Algorytm z podręcznika wymaga równoodległych węzłów, co wymagało wstępnego przetworzenia danych. Wygenerowano 12 równoodległych punktów w przedziale  $[-1500, 2000]^\circ\text{C}$ , a wartości  $h$  obliczono za pomocą interpolacji liniowej z oryginalnych danych nierównoodległych. Przekształcenie to wprowadza dodatkowy błąd i jest mało profesjonalne – w praktyce inżynierskiej stosuje się zaawansowane algorytmy splajnów dla węzłów nierównoodległych (np. spline z opcją `pchip` w MATLAB).

## 4 Część 3. projektu

### 4.1 Cel badawczy

Celem trzeciej części projektu było zbadanie wpływu metody aproksymacji współczynnika przewodnictwa cieplnego  $h(\Delta T)$  na wyniki symulacji procesu chłodzenia pręta. W analizie porównano trzy podejścia obliczeniowe: aproksymację metodą najmniejszych kwadratów (MNK) z wielomianem stopnia 5, interpolację Lagrange’a oraz funkcje sklejane kubiczne. Pozwoliło to ocenić, w jakim stopniu wybór sposobu odwzorowania zależności  $h(\Delta T)$  wpływa na dokładność wyników i stabilność numeryczną modelu.

### 4.2 Przebieg eksperymentu

Symulacje wykonano dla czterech wybranych przypadków testowych z tabeli pomiarowej, oznaczonych numerami 1, 3, 7 i 10. Przypadki te różniły się temperaturą początkową pręta i oleju, masą chłodziwa oraz czasem chłodzenia:

- przypadek 1:  $T_b(0) = 1200^\circ\text{C}$ ,  $T_w(0) = 25^\circ\text{C}$ ,  $m_w = 2,5 \text{ kg}$ ,  $t = 3 \text{ s}$ ,
- przypadek 3:  $T_b(0) = 1100^\circ\text{C}$ ,  $T_w(0) = 70^\circ\text{C}$ ,  $m_w = 2,5 \text{ kg}$ ,  $t = 3 \text{ s}$ ,
- przypadek 7:  $T_b(0) = 1100^\circ\text{C}$ ,  $T_w(0) = 70^\circ\text{C}$ ,  $m_w = 5,0 \text{ kg}$ ,  $t = 2 \text{ s}$ ,
- przypadek 10:  $T_b(0) = 1100^\circ\text{C}$ ,  $T_w(0) = 70^\circ\text{C}$ ,  $m_w = 2,5 \text{ kg}$ ,  $t = 5 \text{ s}$ .

Wszystkie obliczenia przeprowadzono metodą ulepszanego Eulera z krokiem czasowym  $h = 0,001 \text{ s}$ , co zapewniło wysoką dokładność numeryczną rozwiązania układu równań różniczkowych.

### 4.3 Analiza wyników

#### 4.3.1 Porównanie metod aproksymacji

Przeprowadzona analiza ilościowa wykazała niewielkie różnice między wszystkimi trzema metodami aproksymacji. Aproksymacja wielomianowa metodą najmniejszych kwadratów (MNK, stopień 5) osiągnęła średni błąd bezwzględny dla temperatury pręta wynoszący  $1,12^\circ\text{C}$  oraz  $0,94^\circ\text{C}$  dla temperatury oleju. Interpolacja Lagrange’a uzyskała odpowiednio  $1,14^\circ\text{C}$  i  $0,94^\circ\text{C}$ , natomiast funkcje sklejane kubiczne  $1,15^\circ\text{C}$  i  $0,94^\circ\text{C}$ . Maksymalny błąd bezwzględny dla  $T_b$  wyniósł  $1,92^\circ\text{C}$  (MNK),  $2,00^\circ\text{C}$  (Lagrange) oraz  $2,02^\circ\text{C}$  (splajny), co stanowi mniej niż 2% wartości mierzonej.

Warto podkreślić, że wszystkie metody wykazały wysoką zgodność wzajemną. Różnice między wynikami poszczególnych metod nie przekroczyły  $0,1^\circ\text{C}$  w większości punktów czasowych. Świadczy to o stabilności numerycznej modelu oraz o tym, że dla danego zakresu parametrów i jakości danych pomiarowych wybór metody aproksymacji ma drugorzędne znaczenie.

### 4.3.2 Zgodność z pomiarami eksperymentalnymi

Porównanie wyników symulacji z danymi pomiarowymi wykazało dobrą zgodność jakościową i ilościową. Średnie błędy względne nie przekroczyły 1% dla wszystkich metod, co stanowi bardzo dobry wynik. Największe rozbieżności zaobserwowano w przypadku 7 (zwiększona masa oleju  $m_w = 5$  kg), gdzie błąd temperatury pręta osiągnął maksymalną wartość około 2°C. Wynika to prawdopodobnie z większej wrażliwości układu na parametry przy dużej pojemności cieplnej oleju.

Obserwowane błędy można przypisać kilku źródłom:

- **błędy modelowe:** założenie jednorodności temperatury w pręcie i oleju, pominięcie strat ciepła do otoczenia,
- **błędy numeryczne:** dyskretyzacja czasowa metodą Eulera, zaokrąglenia arytmetyczne,
- **błędy aproksymacji  $h(\Delta T)$ :** ograniczona liczba punktów pomiarowych, wybór funkcji bazowych,

### 4.3.3 Wpływ wyboru metody na przebieg symulacji

Analiza przebiegów czasowych temperatur  $T_b(t)$  i  $T_w(t)$  wskazuje, że w początkowej fazie chłodzenia, gdy różnica temperatur przekracza  $1000^\circ\text{C}$ , wszystkie metody aproksymacji dają praktycznie identyczne wyniki. Wynika to z faktu, że współczynnik  $h$  zmienia się w tym zakresie stosunkowo powoli i liniowo, więc każda z metod aproksymacji odwzorowuje tę zależność w podobny sposób.

W fazie końcowej, przy  $\Delta T < 200^\circ\text{C}$ , różnice między metodami pozostają nadal niewielkie, jednak można zaobserwować subtelne rozbieżności w szczegółowym kształcie krzywych. Metoda MNK, dzięki wygładzeniu danych, zapewniła nieco lepszą zgodność z pomiarami eksperymentalnymi, podczas gdy interpolacja Lagrange’a i splajny kubiczne, przechodzące dokładnie przez węzły interpolacyjne, odwzorowywały lokalne fluktuacje w danych pomiarowych.

## 4.4 Wybór metody referencyjnej

Na podstawie analizy ilościowej wybrano **aproksymację wielomianową metodą najmniejszych kwadratów (stopień 5)** jako metodę referencyjną wykorzystywaną w dalszej części projektu. Zadecydowały o tym następujące czynniki:

- najniższe średnie i maksymalne błędy bezwzględne dla temperatury pręta,
- metoda MNK naturalnie redukuje wpływ przypadkowych błędów w danych,
- wielomian stopnia 5 jest wystarczająco elastyczny, by odwzorować nieliniowość  $h(\Delta T)$ , ale nie prowadzi do nadmiernych oscylacji,

Funkcje sklejjane kubiczne, mimo teoretycznych zalet (ciągłość, brak zjawiska Rungego), nie przyniosły wymiernej poprawy dokładności w analizowanych przypadkach. Interpolacja Lagrange’a, choć przechodzi dokładnie przez węzły, również nie wykazała przewagi nad metodą MNK.

## 4.5 Wrażliwość modelu na metodę aproksymacji

Przeprowadzone badania wskazują, że model jest słabo wrażliwy na wybór metody aproksymacji funkcji  $h(\Delta T)$ . Różnice między wynikami uzyskanymi przy użyciu różnych metod nie przekroczyły  $0,1^\circ\text{C}$  w większości punktów oraz  $0,03\%$  w ujęciu błędów względnych. Jest to wartość znacznie poniżej niepewności pomiarowej i akceptowalna we wszystkich zastosowaniach praktycznych.

Słaba wrażliwość wynika z dwóch czynników:

1. Funkcja  $h(\Delta T)$  jest stosunkowo gładka w badanym zakresie  $\Delta T \in [-1500, 2000]^\circ\text{C}$ , więc wszystkie metody aproksymacji odwzorowują ją w podobny sposób.
2. Dynamika układu jest zdominowana przez duże różnice temperatur w początkowej fazie chłodzenia, gdzie szczegóły aproksymacji  $h(\Delta T)$  mają niewielki wpływ na końcowy wynik.

W praktyce oznacza to, że do większości obliczeń inżynierskich wystarczająca jest prosta aproksymacja wielomianowa, a stosowanie bardziej wyrafinowanych metod (splajny, Lagrange) jest uzasadnione jedynie w przypadkach wymagających ekstremalnej precyzji lub pracy z bardzo nieliniowymi zależnościami.

## 4.6 Uwagi praktyczne

W niniejszym projekcie równoodległe węzły interpolacyjne dla funkcji sklejanych wygenerowano poprzez interpolację liniową z danych pierwotnie nierównoodległych. Podejście to jest prostym rozwiązaniem wystarczającym dla celów demonstracyjnych, lecz w zastosowaniach praktycznych preferuje się użycie splajnów również dla nierównomiernie rozmieszczonych danych.

W implementacji funkcji sklejanych przyjęto zerowe warunki brzegowe na pochodne ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ), co odpowiada założeniu liniowego zachowania funkcji poza zakresem pomiarowym. W bardziej zaawansowanej analizie można by wyznaczyć te warunki z fizycznych właściwości układu.

Wybór wielomianu stopnia 5 w metodzie MNK był wynikiem eksperymentalnego doboru: niższe stopnie (2-3) nie odwzorowywały nieliniowości  $h(\Delta T)$ , podczas gdy wyższe stopnie (7-9) prowadziły do oscylacji, szczególnie na brzegach przedziału.

## 4.7 Podsumowanie

Przeprowadzone badania wykazały, że wszystkie analizowane metody aproksymacji funkcji  $h(\Delta T)$  dają wyniki praktycznie identyczne i zgodne z pomiarami eksperymentalnymi. Z punktu widzenia zastosowań inżynierskich najlepszą metodą okazała się aproksymacja wielomianowa metodą najmniejszych kwadratów (stopień 5), która przy porównywalnej złożoności obliczeniowej zapewniła nieznacznie lepszą zgodność z danymi pomiarowymi.

Kluczowym wnioskiem jest niska wrażliwość modelu na wybór metody aproksymacji, co świadczy o jego stabilności numerycznej. Różnice między metodami są praktycznie nieistotne ( $< 0,03\%$  błędu względnego), co daje pewność, że wybór metody nie jest krytyczny dla wiarygodności wyników symulacji.

## 5 Część 4. projektu

### 5.1 Cel badawczy

Celem czwartej części projektu było wyznaczenie minimalnej masy oleju chłodzącego, która pozwala schłodzić pręt do temperatury  $125^{\circ}\text{C}$  w czasie  $t = 0,7$  s. W tym celu wykorzystano pełny, nieliniowy model chłodzenia wraz z aproksymowaną funkcją współczynnika wnikania ciepła  $h(\Delta T)$  otrzymaną metodą najmniejszych kwadratów (MNK stopnia 5), wybraną jako optymalna w Części 3. Rozwiązanie równania  $T_b(m_w, 0,7 \text{ s}) = 125^{\circ}\text{C}$  przeprowadzono metodą Newtona–Raphsona.

### 5.2 Przebieg eksperymentu

W kolejnych iteracjach Newtona wykonywano symulację chłodzenia dla zadanej masy oleju i obliczano przybliżoną pochodną temperatury pręta względem masy:

$$T'_b(m_w) \approx \frac{T_b(m_w + \Delta m_w) - T_b(m_w)}{\Delta m_w}.$$

Aktualizacja wartości masy przebiegała zgodnie ze wzorem:

$$m_w^{(i+1)} = m_w^{(i)} - \frac{T_b(m_w^{(i)}) - 125}{T'_b(m_w^{(i)})}.$$

Jako punkt startowy przyjęto  $m_w^{(0)} = 2,0$  kg, a wartość różnicową  $\Delta m_w = 0,02$  kg. Do całkowania równań różniczkowych wykorzystano ulepszoną metodę Eulera z krokiem  $h = 0,001$  s. Parametry materiałowe w tej części projektu różnią się od wykorzystanych w Części 1: masa pręta wynosi  $m_b = 0,25$  kg, a pojemność cieplna  $c_b = 0,29$  kJ/(kg·K).

### 5.3 Analiza wyników

#### 5.3.1 Przebieg iteracji Newtona

W Tabeli 2 przedstawiono pełny przebieg iteracji metody Newtona–Raphsona. W pierwszych trzech iteracjach algorytm napotykał na trudności numeryczne związane z dużym oddaleniem punktu startowego od rozwiązania, co prowadziło do ujemnych wartości masy oleju wymagających korekty (przycięcie wartości do połowy poprzedniej). Począwszy od iteracji czwartej, algorytm wszedł w obszar stabilny i osiągnął bardzo szybką zbieżność. Już w iteracji dziewiątej błąd temperatury był mniejszy niż  $0,001^{\circ}\text{C}$ .

Tabela 2: Iteracje metody Newtona-Raphsona dla równania  $T_b(m_w) = 125^\circ\text{C}$ .

Iteracja $i$	$m_w^{(i)}$ [kg]	$T_b(m_w^{(i)})$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$T'_b(m_w^{(i)})$ [ $^\circ\text{C}/\text{kg}$ ]	$\Delta T_b = T_b - T_{\text{cel}}$ [ $^\circ\text{C}$ ]
1	2,00000	35,0992	-4,957036	-89,900794
2	1,00000	45,0262	-19,305357	-79,973757
3	0,50000	64,3812	-73,289308	-60,618750
4	0,25000	101,2083	-265,220581	-23,791726
5	0,16029	139,6936	-580,334298	14,693621
6	0,18561	125,3851	-450,252403	0,385108
7	0,18647	124,9638	-446,649355	-0,036175
8	0,18639	125,0036	-446,988678	0,003566
9	0,18640	124,9997	-446,955240	-0,000350

Na podstawie uzyskanych wyników wyznaczono wartość:

$$m_w \approx 0,1864 \text{ kg.}$$

Finalny błąd temperatury wyniósł jedynie  $0,00035^\circ\text{C}$ , co potwierdza wysoką dokładność algorytmu i prawidłową implementację metody numerycznej.

### 5.3.2 Interpretacja wyniku

Otrzymana wartość  $m_w \approx 0,19 \text{ kg}$  jest znacząco mniejsza od typowych mas oleju występujących w eksperymentach pomiarowych z Części 1 (gdzie  $m_w = 2,5 \text{ kg}$  lub więcej). Wynika to z kilku czynników:

1. Czas  $t = 0,7 \text{ s}$  jest bardzo krótki w porównaniu do czasów eksperymentalnych ( $t = 2\text{--}5 \text{ s}$ ), co oznacza, że wymiana ciepła odbywa się w początkowej, najbardziej intensywnej fazie procesu.
2. Przyjęto  $m_b = 0,25 \text{ kg}$  oraz  $c_b = 0,29 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ , co odpowiada mniejszej pojemności cieplnej pręta ( $m_b c_b \approx 0,0725 \text{ kJ}/\text{K}$ ) w porównaniu do poprzednich części projektu ( $m_b c_b \approx 0,77 \text{ kJ}/\text{K}$  przy  $m_b = 0,2 \text{ kg}$  i  $c_b = 3,85 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ). Pręt o mniejszej pojemności cieplnej oddaje mniej energii, co wymaga proporcjonalnie mniejszej masy chłodziwa.
3. Zadana temperatura  $T_b = 125^\circ\text{C}$  jest stosunkowo wysoka, co oznacza, że pręt nie musi zostać schłodzony całkowicie.

Bardzo duża wartość bezwzględna pochodnej  $|T'_b(m_w)| \approx 450^\circ\text{C}/\text{kg}$  wskazuje na wysoką wrażliwość rozwiązania na masę oleju. Niewielka zmiana  $m_w$  o kilka procent prowadzi do znaczących zmian temperatury końcowej, co oznacza, że w praktyce konieczne byłoby precyzyjne dozowanie ilości chłodziwa.



## 5.4 Wnioski końcowe

Metoda Newtona–Raphsona okazała się skuteczną i szybką metodą rozwiązywania równania odwrotnego rozpatrywanego w tej części projektu. Po początkowych trudnościach numerycznych związanych z wyborem punktu startowego, algorytm bardzo szybko zbiegł do rozwiązania. Od iteracji piątej błąd zmniejszał się z prędkością kwadratową, typową dla metody Newtona.

Uzyskany wynik  $m_w \approx 0,19$  kg jest wiarygodny z punktu widzenia fizyki procesu i przyjętych parametrów materiałowych. Mała wartość masy oleju wynika przede wszystkim ze znacząco zmniejszonej pojemności cieplnej pręta oraz bardzo krótkiego czasu chłodzenia. Model wykazuje dużą wrażliwość na wartość  $m_w$ , co w praktyce oznacza konieczność precyzyjnego sterowania masą chłodziwa w rzeczywistych zastosowaniach technologicznych.

Warto podkreślić, że analiza przeprowadzona w tej części projektu stanowi przykład praktycznego zastosowania metod numerycznych do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych w inżynierii procesowej.

## 6 Podsumowanie i wnioski końcowe

W ramach projektu opracowano kompletny model numeryczny procesu chłodzenia metalowego pręta w oleju, obejmujący scenariusz liniowy (stały współczynnik  $h$ ) oraz nieliniowy (zmienny współczynnik  $h(\Delta T)$ ). Model został zweryfikowany eksperymentalnie i wykorzystany do optymalizacji parametrów technologicznych.

Metoda ulepszego Eulera z krokiem  $h = 0,001$  s zapewniła wyniki niemal identyczne z rozwiązaniem referencyjnym `ode45`. Porównanie z dziesięcioma przypadkami eksperymentalnymi wykazało błędy nieprzekraczające  $2^\circ\text{C}$  dla pręta oraz  $1,9^\circ\text{C}$  dla oleju, co potwierdza poprawność implementacji. Analiza wrażliwości wykazała, że kluczowymi parametrami są masa oleju (zmiana o  $\pm 5\%$  wpływa na wynik o  $\pm 3,8^\circ\text{C}$ ) oraz temperatura początkowa oleju (zmiana o  $\pm 10^\circ\text{C}$  powoduje zmianę o  $\pm 9,3^\circ\text{C}$ ).

Porównanie interpolacji Lagrange’a, funkcji sklepanych kubicznych oraz aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów (MNK) wykazało, że wszystkie metody dają wyniki o porównywalnej dokładności. W Części 2 najniższe błędy aproksymacyjne osiągnęła metoda splajnów, jednak w rzeczywistych symulacjach (Część 3) metoda MNK stopnia 5 okazała się najlepsza ze średnim błędem  $1,12^\circ\text{C}$ , w porównaniu do  $1,15^\circ\text{C}$  dla splajnów. MNK naturalnie wygładza szum pomiarowy, co prowadzi do lepszej zgodności z danymi eksperymentalnymi. Kluczowym wnioskiem jest niska wrażliwość modelu na wybór metody aproksymacji — różnice w błędach względnych wyniosły jedynie  $0,03\%$ , co świadczy o stabilności numerycznej systemu.

Metodą Newtona–Raphsona wyznaczono minimalną masę oleju ( $m_w \approx 0,19$  kg) wymagającą do schłodzenia pręta do  $125^\circ\text{C}$  w czasie  $0,7$  s. Algorytm zbiegł po dziewięciu iteracjach z błędem poniżej  $0,001^\circ\text{C}$ . Niska wartość masy wynika z odmiennych parametrów materiałowych: pojemność cieplna pręta w Części 4 ( $m_b c_b \approx 0,073$  kJ/K) jest prawie dziesięciokrotnie mniejsza niż w Części 1 ( $m_b c_b \approx 0,77$  kJ/K), a krótki czas oznacza pracę w początkowej, najbardziej intensywnej fazie wymiany ciepła. Wysoka pochodna  $|T'_b(m_w)| \approx 450^\circ\text{C}/\text{kg}$  wskazuje na dużą wrażliwość rozwiązania, co wymaga precyzyjnego dozowania oleju w praktyce.

Model ma bezpośrednie zastosowanie w projektowaniu systemów hartowania i obróbki cieplnej metali, umożliwiając wyznaczanie optymalnej pojemności zbiorników chłodzących.

### Kluczowe osiągnięcia projektu:

- zweryfikowany symulator o wysokiej dokładności (błędy  $< 2^\circ\text{C}$ ),
- wybór optymalnej metody aproksymacji  $h(\Delta T)$  — MNK stopnia 5,
- wykazanie niskiej wrażliwości modelu na metodę aproksymacji ( $< 0,03\%$ ),
- efektywne rozwiązanie problemu optymalizacyjnego (zbieżność w 9 iteracjach),
- identyfikacja kluczowych parametrów: masa i temperatura oleju.

Projekt potwierdza, że metody numeryczne stanowią efektywne narzędzie do modelowania procesów wymiany ciepła. Opracowane narzędzie stanowi solidną podstawę do dalszych analiz i może być wykorzystane w praktyce inżynierskiej jako wsparcie projektowania procesów technologicznych.