

## 4 Rozdział

Strona: [LeIA](#)  
Kurs: Metody numeryczne (2025Z)  
Książka: 4 Rozdział

Wydrukowane przez użytkownika: Kinga Kondraciuk  
Data: niedziela, 30 listopada 2025, 14:13

## Spis treści

1. Błąd interpolacji
2. Węzły Czebyszewa
3. Zbieżność procesów interpolacyjnych

# 1. Błąd interpolacji

## Błąd interpolacji

W lekcji tej omawiamy błąd interpolacji, wprowadzamy węzły Czebyszewa, które minimalizują tę część błędu, która zależy od węzłów. Zajmujemy się również zbieżnością procesów interpolacyjnych.

Jeśli funkcja  $f(x)$  jest dana za pomocą tabelki, to znaczy jej wartości są wynikiem doświadczeń lub pomiarów, nie możemy określić błędu jaki popełniamy biorąc za wartość funkcji w punkcie nie będącym węzłem wartość wielomianu interpolacyjnego. Ale są przypadki gdy funkcja jest dana wzorem analitycznym  $y = f(x)$  w przedziale  $< a, b >$ , a mimo to potrzebujemy zbudować dla niej wielomian interpolacyjny. Taka sytuacja ma miejsce przede wszystkim przy całkowaniu, o czym będziemy mówić w rozdziale dotyczącym całkowania numerycznego. W takim przypadku można obliczyć błąd interpolacji, zależy on od funkcji, a właściwie od pochodnej rzędu  $n + 1$ , oraz od sposobu rozmieszczenia węzłów interpolacji. Ponieważ wzór (podajemy ten wzór bez wyprowadzania) na różnicę między funkcją interpolowaną (oczywiście taką, która ma w tym przedziale wszystkie pochodne do rzędu  $n + 1$  włącznie) a wielomianem interpolacyjnym jest następujący:

$$f(x) - W_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (4.1.1)$$

gdzie  $\xi$  jest pewnym punktem w przedziale  $< a, b >$ , to błąd bezwzględny interpolacji można oszacować przez:

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \quad (4.1.2)$$

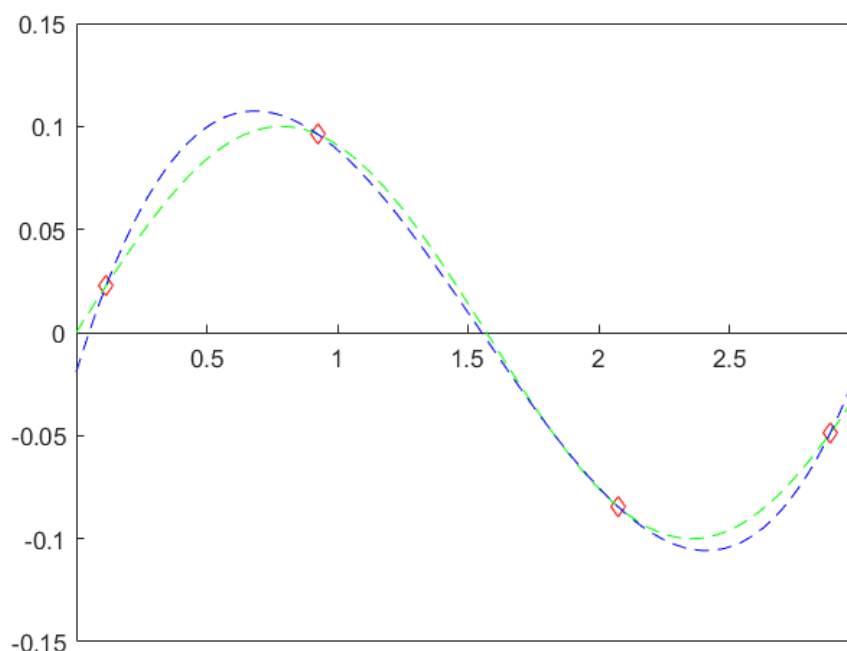
gdzie  $M_{n+1} = \sup_{x \in < a, b >} |f^{(n+1)}(x)|$

porównajmy, dla przykładu funkcję która ma ograniczone pochodne z jej wielomianem interpolacyjnym.

### Przykład 4.1

#### Przykład

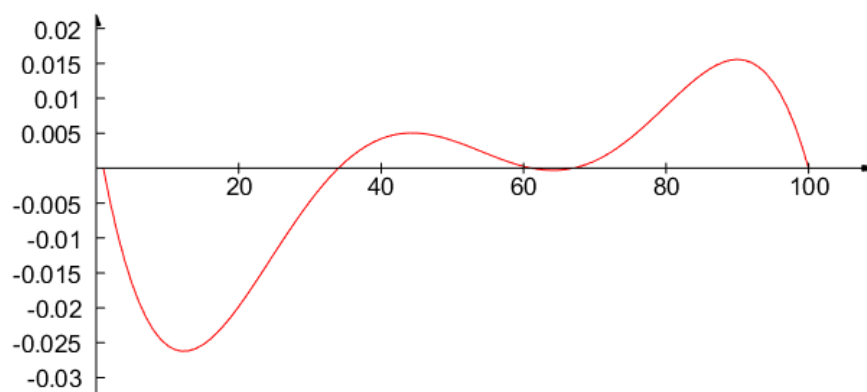
Weźmy funkcję  $f(x) = 0.1 \sin(2x)$  w przedziale  $< 0, 3 >$  i jako węzły interpolacji przyjmijmy cztery punkty równoodległe w tym przedziale 0, 1, 2 i 3. Funkcję i wielomian przedstawimy na wykresie:



**Rys 4.1.** Wykres funkcji  $f(x) = 0.1\sin 2x$  i jej wielomianu interpolacyjnego 3 stopnia.

Na osi  $Ox$  zaznaczone są węzły, widać, że funkcja i wielomian pokrywają się w węzłach. Funkcja jest narysowana zieloną linią, wielomian niebieską przerywaną.

Na następnym wykresie przedstawiona jest funkcja będąca różnicą  $f(x)$  i wielomianu interpolacyjnego. Jak widać błąd bezwzględny nie przekracza 0,03 w rozpatrywanym przedziale.



**Rys 4.2.** Wykres różnicy między funkcją  $f$  i wielomianem interpolacyjnym

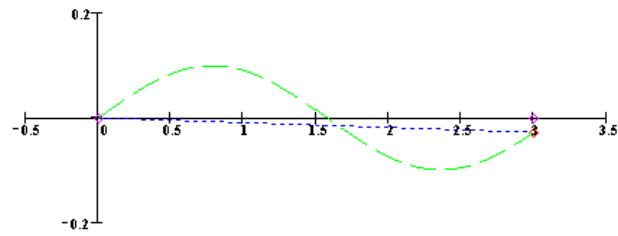
W poprzednim przykładzie obliczyliśmy wielomian 3 stopnia dla podanej funkcji, w następnym będziemy zmieniać stopień wielomianu dla tej samej funkcji.

#### Przykład 4.2

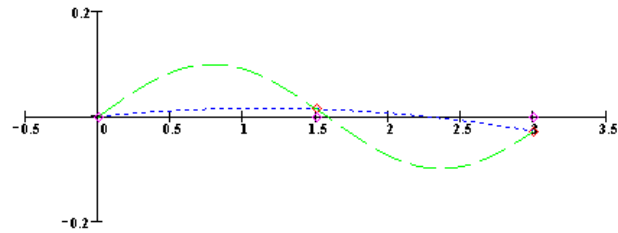
### Przykład

Będziemy rozpatrywać jeszcze raz poprzednią funkcję, a mianowicie:  $f(x) = 0.1\sin 2x$  w przedziale  $(0, 3)$ . Funkcja ta ma ograniczone pochodne w przedziale, wraz ze wzrostem ilości węzłów (bierzemy węzły równoodległe) wielomian interpolacyjny coraz lepiej będzie przybliżał daną funkcję. Gdy zmieniamy stopień wielomianu  $n$ , ilość węzłów  $n + 1$  to wyraźnie widzimy, że wraz ze wzrostem stopnia

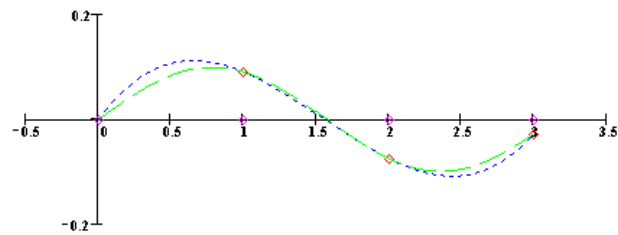
zmniejsza się błąd interpolacji. Na osi  $Ox$  zaznaczone są węzły, widać na rysunku, że funkcja w węzłach pokrywa się z wielomianem. Wykres funkcji narysowany jest na zielono, dla  $n = 8$  wykresy na naszym rysunku prawie się pokrywają.



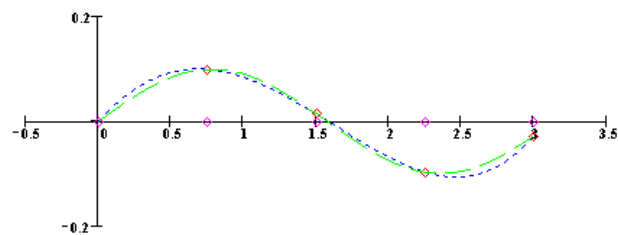
**Rys 4.3a.** Wykres funkcji  $f$  i jej wielomianu interpolacyjnego 1 stopnia



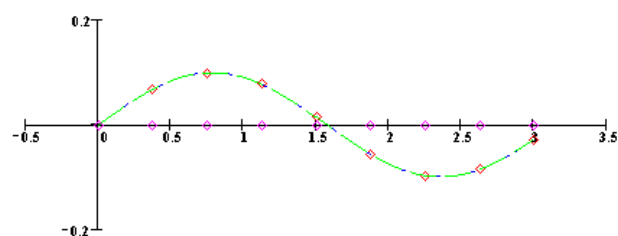
**Rys4.3b.** Wykres funkcji  $f$  i jej wielomianu interpolacyjnego 2 stopnia.



**Rys4.3c.** Wykres funkcji  $f$  i jej wielomianu interpolacyjnego 3 stopnia



**Rys4.3d.** Wykres funkcji  $f$  i jej wielomianu interpolacyjnego 4 stopnia.



**Rys4.3e.** Wykres funkcji  $f$  i jej wielomianu interpolacyjnego 8 stopnia.

Przyjrzyjmy się teraz implementacji rysującej te wykresy.

```
close all
f = @(x) (0.1*sin(2*x))
x = linspace(0, 3, 100);
y = f(x)

% zmieniaj poniżej rząd w zakresie 2-5,
% pamiętaj, że n=4 oznacza 4 węzły
% ale 3ci stopień wielomianu
n = 4
xk = linspace(0, 3, n);
yk = f(xk)
a = polyfit(xk, yk, n-1);
y_interp = polyval(a, x);

plot(xk, yk, 'dr', x, y, '--g', x, y_interp, '--b');

%centeraxes(gca);

ax = gca;

ax.XAxisLocation = 'origin';

ay.YAxisLocation = 'origin';

figure

plot(y-y_interp, 'r')

%centeraxes(gca);

ax = gca;

ax.XAxisLocation = 'origin';

ay.YAxisLocation = 'origin';
```

Dla dwóch węzłów maksymalny błąd interpolacji w tym przedziale równa się 0,107, dla trzech węzłów równa się 0,098, dla czterech 0,026, dla pięciu 0,016, a dla  $n = 8$  czyli dla dziewięciu węzłów błąd nie przekracza 0,000084.

## 2. Węzły Czebyszewa

Najczęściej stosuje się węzły równoodległe dla funkcji interpolacyjnej, które są proste w użyciu, a podczas doświadczeń można mierzyć badaną wartość funkcji co ustaloną jednostkę czasu. Jednak jak wynika ze wzoru na błąd interpolacji:

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$$

jego wartość zależy w istotny sposób od rozmieszczenia węzłów. Okazuje się, że węzły równoodległe nie zawsze są najlepsze. Tę część błędu, zależną od węzłów minimalizują tzw.: węzły Czebyszewa, które podamy tutaj bez wyprowadzania. Jeśli szukamy w dowolnym przedziale  $< a, b >$   $n+1$  optymalnych węzłów, można je wyliczyć ze wzoru:

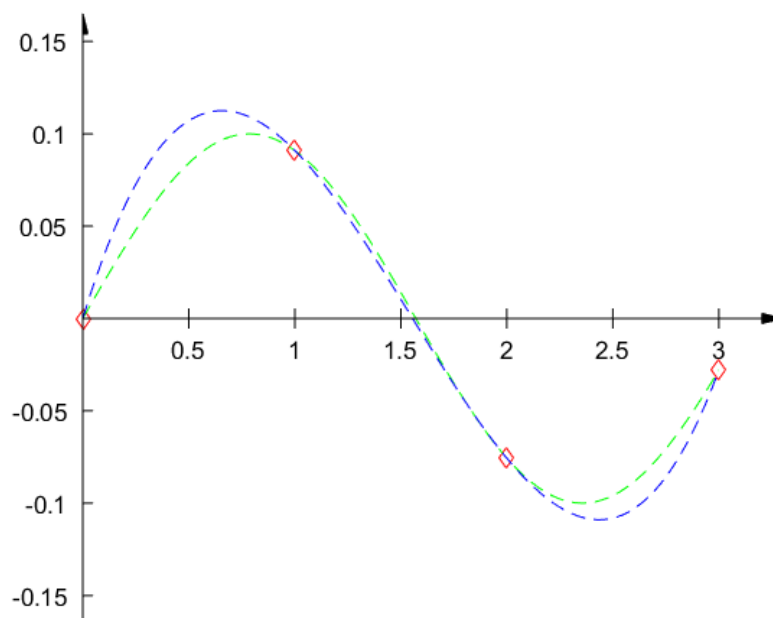
$$x_k = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi\right) + \frac{b+a}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.2.1)$$

Wróćmy do przykładu 4.1.1 z funkcją  $f(x) = 0.1 \sin 2x$  w przedziale  $< 0, 3 >$ .

### Przykład 4.3

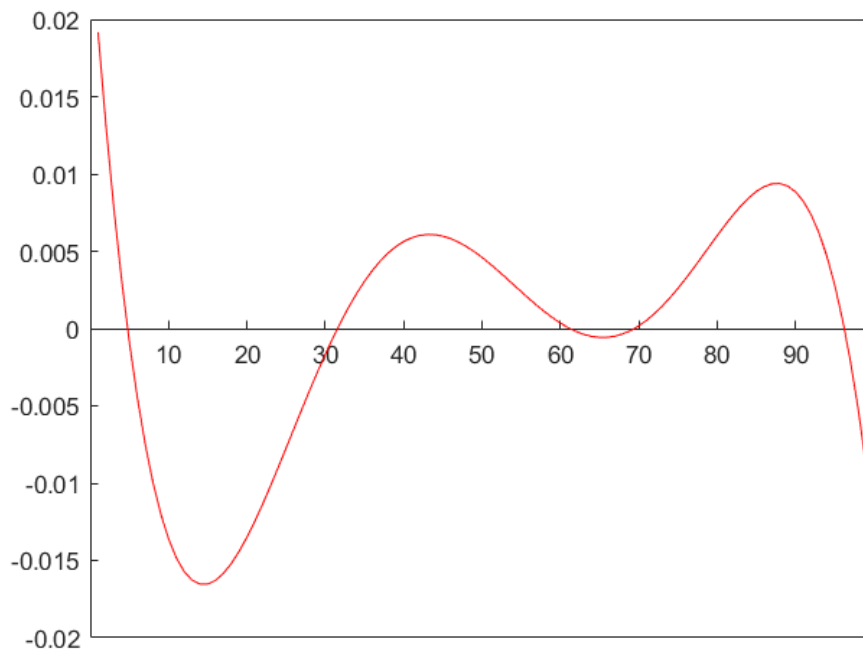
#### Przykład

Poprzednio dla zbudowania wielomianu interpolacyjnego braliśmy cztery węzły równoodległe : 0,1 2 i 3. Teraz obliczymy 4 węzły Czebyszewa w tym przedziale z powyższego wzoru. Będą to : 0,114; 0,926; 2,074; 2,886 ( podajemy te wartości z dokładnością do trzech cyfr po przecinku). Te węzły są zaznaczone na osi  $Ox$ , funkcja jest narysowana zieloną linią, wielomian niebieską przerywaną:



**Rys. 4.4.** Wykres funkcji  $f$  i jej wielomianu interpolacyjnego 3 stopnia z 4 węzłami Czebyszewa

Tak jak poprzednio na następnym rysunku przedstawiamy różnicę między funkcją daną, a jej wielomianem interpolacyjnym opartym na węzłach Czebyszewa. Największy błąd bezwzględny nie przekroczy 0,02 w tym przedziale ( jest on trochę mniejszy niż w poprzednim przykładzie z węzłami równoodległymi- tam było 0,03).



**Rys. 4.5.** Wykres różnicy między funkcją  $f$  i jej wielomianem interpolacyjnym.

Od razu dla porównania przyjrzyjmy się zmodyfikowanej implementacji.

```
close all
f = @(x) (0.1*sin(2*x))
x = linspace(0,3,100);
y = f(x)

% zmieniaj poniżej rząd w zakresie 2-5,
% pamiętaj, że n=4 oznacza 4 węzły
% ale 3ci stopień wielomianu
n = 4

% odkomentuj dla węzłów równoodległych
% xk = linspace(0,3,n);

% odkomentuj dla węzłów Czebyszewa
k=0:n-1;
a=0;
b=3;
xk = (b-a)/2*cos((2*k+1)/(2*(n-1)+2)*pi) + (b+a)/2;

yk = f(xk)

a = polyfit(xk,yk,n-1);
y_interp = polyval(a,x);

plot(xk,yk, 'dr', x,y, '--g', x, y_interp, '--b');
%centeraxes(gca);
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';

figure

plot(y-y_interp,'r')
%centeraxes(gca);
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
```

### 3. Zbieżność procesów interpolacyjnych

#### Zbieżność procesów interpolacyjnych

Jeszcze raz podamy wzór na błąd interpolacji dla funkcji określonej w przedziale  $\langle a, b \rangle$  i mającej w tym przedziale pochodne do rzędu  $n + 1$  włącznie.

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$$

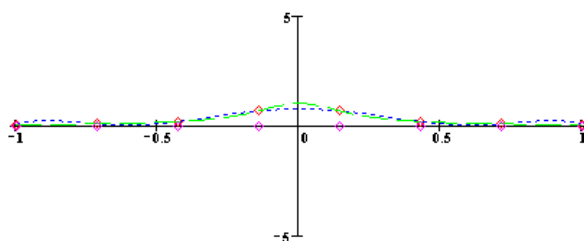
gdzie  $M_{n+1} = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n+1)}(x)|$ .

Z tego wzoru wynika, że wraz ze wzrostem ilości węzłów mianownik szybko rośnie, bo jest w nim wyraz  $(n + 1)!$  zatem cały ułamek winien maleć i przez to maleć powinien błąd. Ale na błąd ma wpływ wielkość ograniczająca pochodną  $n + 1$  rzędu. Podamy popularny w literaturze przykład funkcji, która ma wszystkie pochodne ograniczone, ale na tyle duże wartości, że wraz ze wzrostem ilości węzłów błąd interpolacji rośnie tzn.: "rozjeżdża" się wielomian z funkcją interpolowaną.

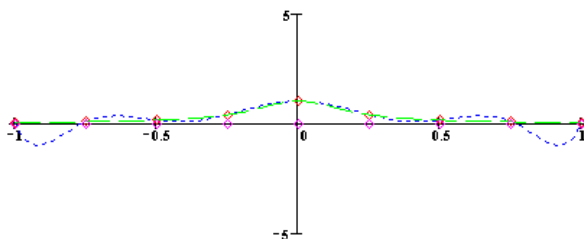
#### Przykład 4.4

##### Przykład

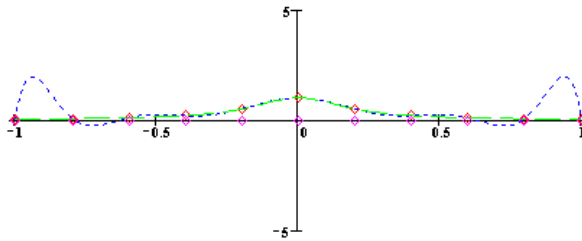
Będziemy rozpatrywać funkcję:  $f(x) = \frac{1}{1+25^2}$  w przedziale  $\langle -1, 1 \rangle$ . Na początku będziemy brać osiem węzłów równoodległych tzn.  $n = 7$ . Wtedy wielomian interpolacyjny i funkcja będą zachowywać się "poprawnie", niezbyt się od siebie różnić. Pierwsza seria rysunków obrazuje tę sytuację. Jeśli będziemy zwiększać ilość węzłów interpolacja będzie obarczona coraz to większym błędem. Zjawisko to widać na rysunkach 4.6a-d.



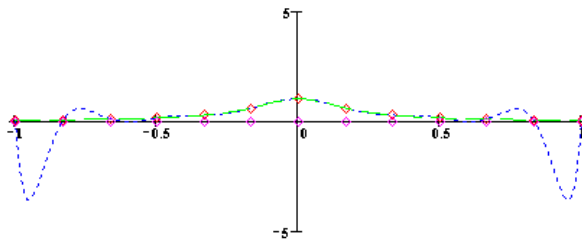
Rys. 4.6a. Wykres funkcji i jej wielomianu interpolacyjnego 7 stopnia.



Rys. 4.6b. Wykres funkcji i jej wielomianu interpolacyjnego 8 stopnia.

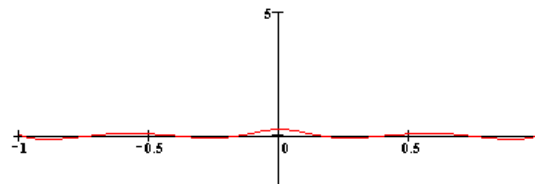


Rys. 4.6c. Wykres funkcji i jej wielomianu interpolacyjnego 10 stopnia

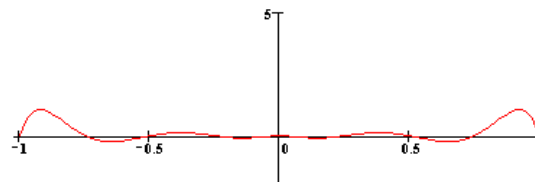


Rys. 4.6d. Wykres funkcji i jej wielomianu interpolacyjnego 12 stopnia.

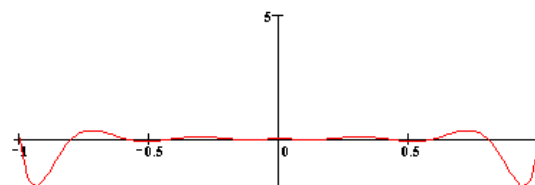
Podobnie będzie z rysunkiem przedstawiającym różnice między funkcją interpolowaną a wielomianem interpolacyjnym o równoodległych węzłach. Te różnice dla  $n = 12$  czyli dla 13 węzłów będą bardzo duże w porównaniu do wartości funkcji w tym przedziale. Zaprezentowane to zostało na rysunkach 4.7a-d.



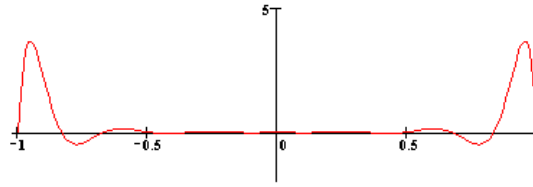
Rys. 4.7a. Wykres różnic między funkcją i jej wielomianem interpolacyjnym 7 stopnia.



Rys. 4.7b. Wykres różnic między funkcją i jej wielomianem interpolacyjnym 8 stopnia.



Rys. 4.7c. Wykres różnic między funkcją i jej wielomianem interpolacyjnym 10 stopnia.



**Rys. 4.7d.** Wykres różnic między funkcją i jej wielomianem interpolacyjnym 12 stopnia.

Trzeba sobie zdać sprawę z takich faktów, że dla  $n = 12$  pochodna rozpatrywanej funkcji  $n + 1 = 13$  rzędu równa jest w punkcie 0, 1 wartości  $-3,29 \cdot 10^{17} a_{13}! = 6.277 \cdot 10^9$

#### Bibliografia

1. Katarzyna Litewska, Jerzy Muszyński - Analiza matematyczna t I i II . Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2000.
2. . Julian Klukowski, Ireneusz Nabałek - Algebra dla studentów . Wydawnictwo Naukowo-Techniczne . Warszawa 1999.
3. Adam Grabarski, Irena Musiał-Walczak, Wawrzyniec Sadkowski, Alicja Smoktunowicz, Janusz Wąsowski- Ćwiczenia z metod numerycznych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2002.
4. Zenon Fortuna, Bohdan Macukow, Janusz Wąsowski - Metody numeryczne. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne. Warszawa 1993.
5. J.Klamka, Z.Ogonowski, M.Jamicki, M.Stasiak - Metody numeryczne. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej. Gliwice 2004