

Chłodzenie pręta w oleju

Kinga Kondraciuk

319941

1 Wstęp teoretyczny

W projekcie analizujemy proces chłodzenia rozgrzanego metalowego pręta, który zostaje zanurzony w oleju chłodzącym. Gdy pręt trafia do dużo chłodniejszego oleju, zaczyna oddawać mu ciepło. Powoduje to stopniowy spadek temperatury pręta oraz jednoczesny wzrost temperatury cieczy. W modelu zakładamy, że w krótkim czasie oddawanie ciepła do otoczenia jest pomijalne, dlatego traktujemy olej jako układ izolowany od środowiska.

Dodatkowym uproszczeniem jest przyjęcie, że zarówno pręt, jak i olej mają w danej chwili jednakową temperaturę w całej swojej objętości. Dzięki temu opisywany proces sprowadza się do wymiany ciepła jedynie na powierzchni styku pręta z cieczą. Szybkość tej wymiany zależy od kilku parametrów:

- powierzchni pręta,
- współczynnika wymiany ciepła h ,
- masy,
- pojemności cieplnej pręta i oleju.

Tak opisany układ można przedstawić za pomocą dwóch równań różniczkowych, które określają, jak zmieniają się temperatury obu elementów w czasie.

$$\begin{aligned}\frac{m_b c_b}{hA} \frac{dT_b}{dt} + T_b &= T_w \\ \frac{m_w c_w}{hA} \frac{dT_w}{dt} + T_w &= T_b\end{aligned}$$

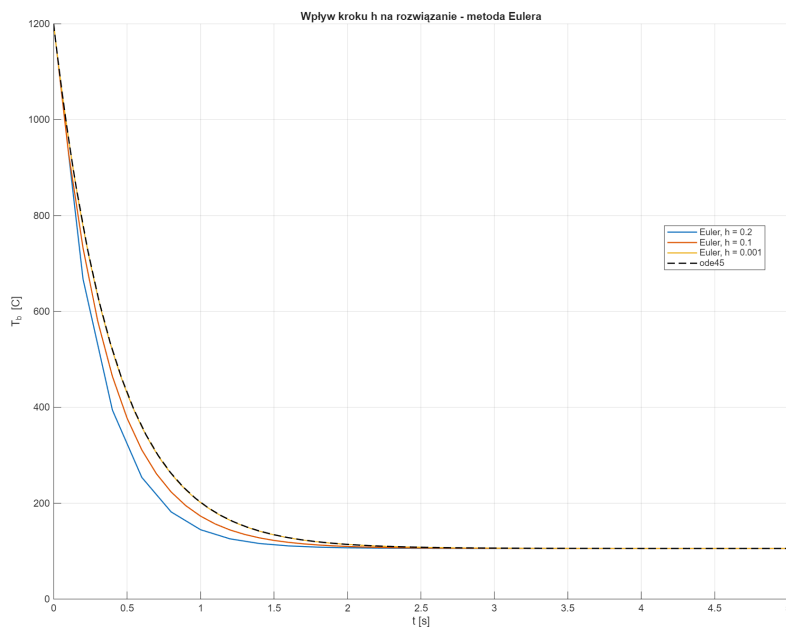
Symulator tworzony w ramach projektu rozwiązuje te równania numerycznie, krok po kroku.

W kolejnej części projektu współczynnik h nie jest już wartością stałą, lecz zależy od różnicy temperatur między prętem a olejem. Oznacza to, że intensywność przekazywania ciepła zmienia się w trakcie chłodzenia. Ponieważ współczynnik ten jest znany tylko w postaci danych pomiarowych, konieczne jest jego przybliżenie metodami interpolacji lub aproksymacji, tak aby można było wykorzystać go w symulacjach.

Model ma praktyczne znaczenie technologiczne, ponieważ pozwala ocenić, jak szybko pręt może zostać schłodzony i jak dużo oleju jest do tego potrzebne. Dzięki temu można później projektować odpowiednią wielkość zbiorników i analizować wymagania procesu produkcyjnego.

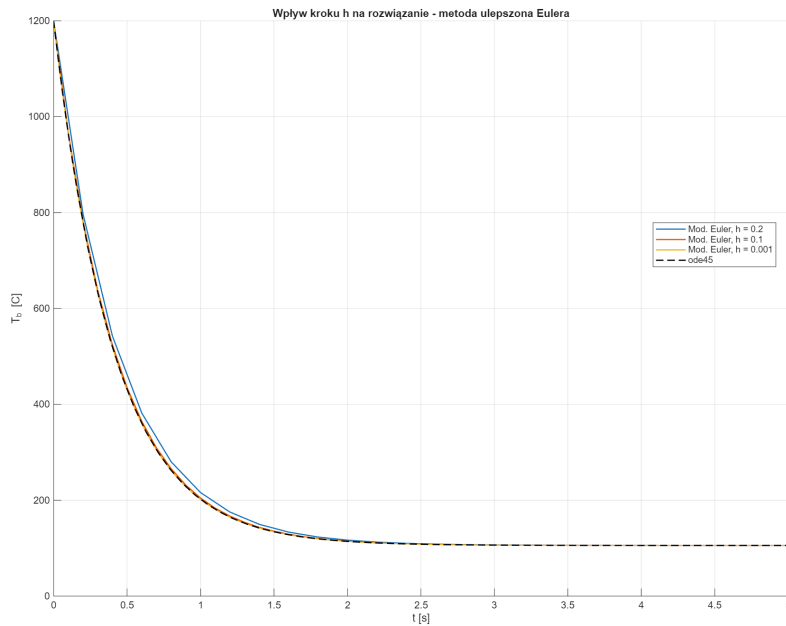
2 część 1. projektu

W pierwszej części projektu opracowano kompletny symulator procesu chłodzenia pręta zanurzonego w oleju, oparty na układzie równań różniczkowych opisujących bilans energii pomiędzy prętem a cieczą chłodzącą. Do całkowania równań zastosowano metodę Eulera oraz metodę ulepszoną Eulera (Heuna), a otrzymane trajektorie porównano z rozwiązaniem referencyjnym wyznaczonym za pomocą solvera `ode45`.



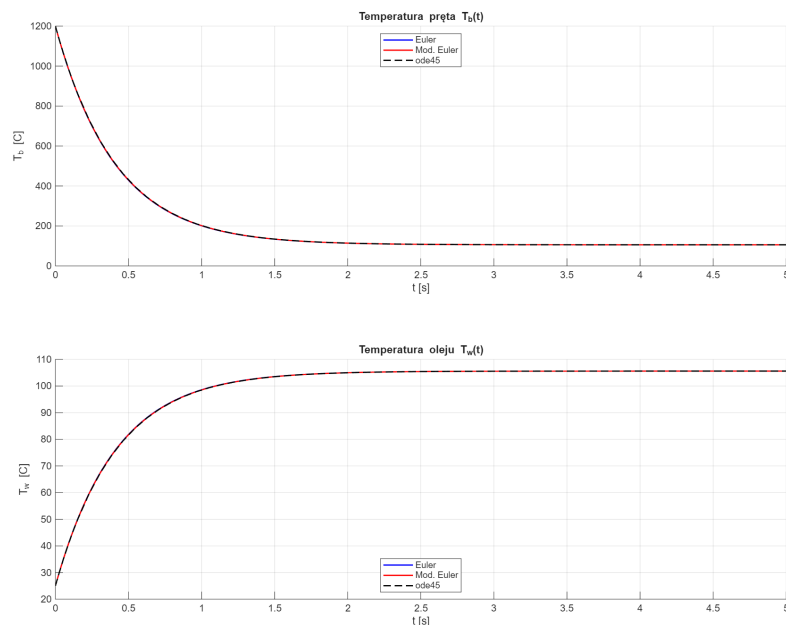
Rysunek 1: Wpływ kroku h na rozwiązanie - metoda Eulera

Analiza numeryczna wykazała, że metoda Eulera jest silnie wrażliwa na krok czasowy i przy większych krokach znacząco odbiega od rozwiązania wzorcowego, co wynika z jej pierwszego rzędu dokładności.



Rysunek 2: Wpływ kroku h na rozwiązanie - metoda ulepszona Eulera

Metoda ulepszona Eulera (Heuna) okazała się znacznie stabilniejsza i przy kroku $h = 0,001$ praktycznie pokrywała się z wynikami `ode45`. Oznacza to, że ulepszony Euler zapewnia wystarczającą dokładność i stabilność przy niewielkim koszcie obliczeniowym, co czyni go odpowiednim narzędziem do dalszych analiz.

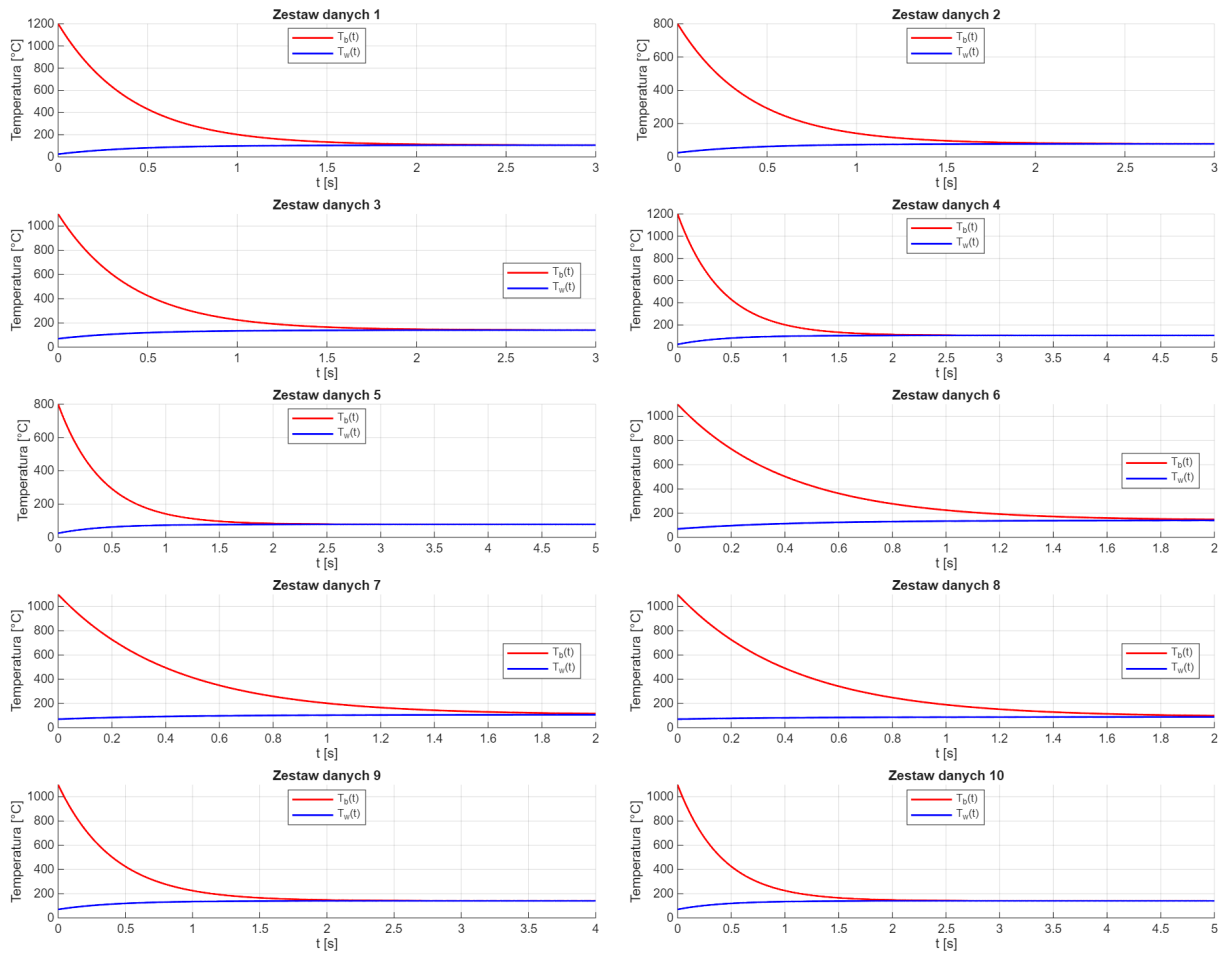


Rysunek 3: Przebieg temperatur dla różnych metod rozwiązywania równań różniczkowych

Uzyskane przebiegi temperatur pręta i oleju są fizycznie poprawne: obserwuje się szybkie oddawanie ciepła na początku procesu oraz wykładnicze dążenie temperatur do stanu równowagi, bez niestabilności i artefaktów numerycznych.

Istotnym etapem była weryfikacja modelu na podstawie danych pomiarowych. Porównanie wyników symulacji z dziesięcioma przypadkami eksperymentalnymi wykazało

bardzo dobrą zgodność obliczeń z rzeczywistymi pomiarami. Różnice końcowych temperatur mieściły się w zakresie około $0,03\text{--}2^{\circ}\text{C}$ dla pręta oraz $0,07\text{--}1,9^{\circ}\text{C}$ dla oleju, co jest mniejsze lub porównywalne z typowym błędem urządzeń pomiarowych. Nieco większe rozbieżności pojawiały się jedynie w przypadkach o bardzo wysokiej temperaturze początkowej i krótkim czasie obserwacji, gdzie rzeczywista wymiana ciepła może być bardziej dynamiczna niż zakłada liniowy model.



Rysunek 4: Przebiegi dla różnych zestawów danych

Wszystkie dziesięć wykresów przedstawia typowy, wykładniczy przebieg chłodzenia: temperatura pręta gwałtownie spada na początku procesu, natomiast temperatura oleju rośnie powoli dzięki jego dużej pojemności cieplnej. Różnice między zestawami wynikają głównie z odmiennych warunków początkowych oraz z masy oleju, która w największym stopniu wpływa na intensywność wymiany ciepła. Pomimo tych zmian, kształt krzywych pozostaje taki sam. Przebiegi są monotoniczne, stabilne i zgodne z fizycznym opisem zjawiska, co potwierdza poprawność modelu.

Dodatkowa analiza wrażliwości wykazała, że zmiana temperatury początkowej pręta o $\pm 10^\circ\text{C}$ wpływała na wynik jedynie nieznacznie (około $\pm 0,7^\circ\text{C}$), natomiast zmiana temperatury początkowej oleju o $\pm 10^\circ\text{C}$ miała znacznie większy efekt (około $\pm 9,3^\circ\text{C}$), co wynika z roli oleju jako głównego bufora cieplnego. Najbardziej wrażliwym parametrem okazała się masa oleju: jej zmiana o $\pm 5\%$ powodowała zmianę końcowej temperatury pręta o około $3,6\text{--}3,9^\circ\text{C}$.

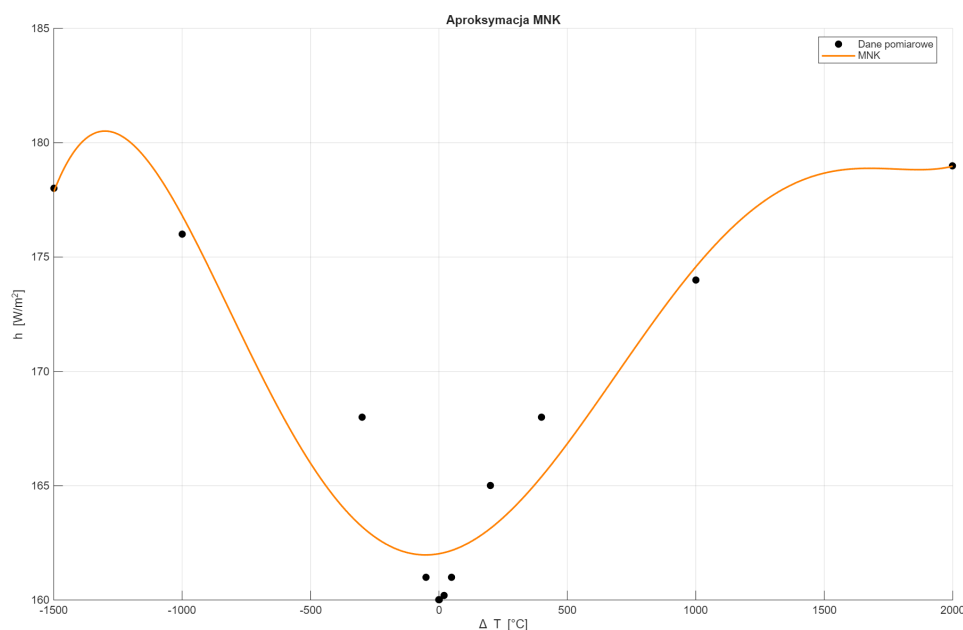
Podsumowując, opracowany symulator jest stabilny, dokładny i zgodny z pomiarami we wszystkich analizowanych przypadkach. Ewentualne różnice między symulacją a pomiarami wynikają przede wszystkim z uproszczeń modelu fizycznego, a nie z ograniczeń numerycznych.

3 część 2. projektu

W ramach drugiej części projektu należało rozwiązać problem aproksymacji współczynnika przewodnictwa cieplnego h na podstawie punktów pomiarowych. Do symulacji potrzebna jest funkcja ciągła, która pozwoli obliczać h dla dowolnej różnicy temperatur ΔT . Zadanie polegało na zaimplementowaniu i porównaniu trzech metod: aproksymacji wielomianowej metodą najmniejszych kwadratów (MNK), interpolacji wielomianowej Lagrange’a oraz funkcji sklepanych kubicznych (splajnów). Celem było wybranie najlepszej metody pod względem dokładności i stabilności numerycznej.

3.1 Analiza aproksymacji wielomianowej MNK

Zaimplementowano aproksymację wielomianową stopnia 5 metodą najmniejszych kwadratów. Metoda ta minimalizuje sumę kwadratów błędów, szukając optymalnych współczynników wielomianu.

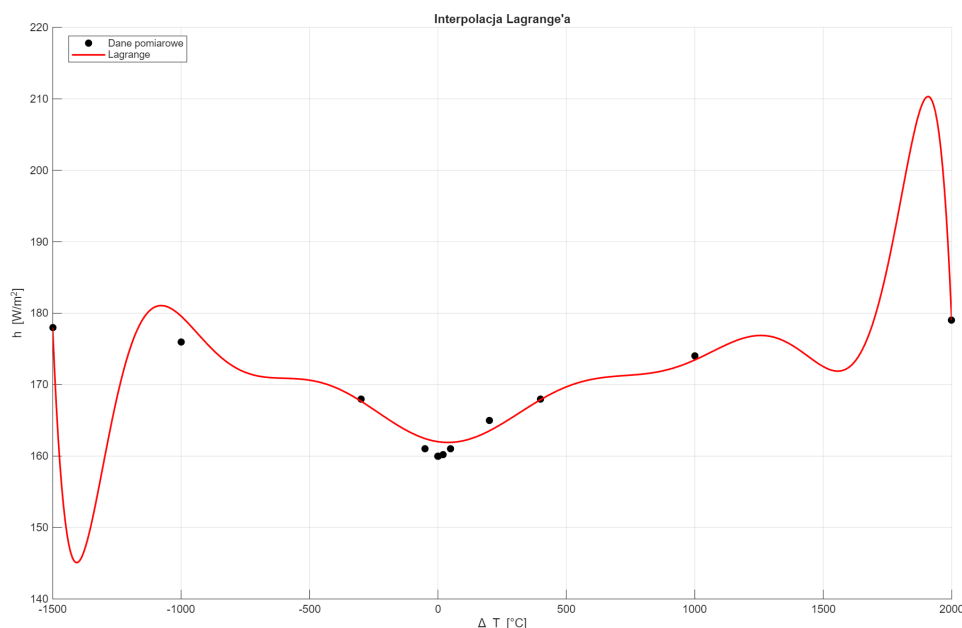


Rysunek 5: Aproksymacja MNK

Pomarańczowa krzywa na wykresie jest gładka i przebiega w pobliżu wszystkich punktów pomiarowych, nie przechodząc przez nie dokładnie. Charakterystyka ma kształt litery U z minimum w okolicach $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, co odpowiada fizycznej naturze zjawiska. Uzyskano następujące błędy: średni błąd bezwzględny 1.58 W/m^2 (0.96%), maksymalny błąd bezwzględny 4.79 W/m^2 (2.85%). Metoda wykazuje wysoką stabilność numeryczną – brak oscylacji i gwałtownych zmian. Dodatkowo aproksymacja automatycznie wygładza ewentualny szum pomiarowy w danych wejściowych. Jest to istotna zaleta, ponieważ dane eksperymentalne zawsze zawierają niepewności pomiarowe.

3.2 Analiza interpolacji Lagrange'a

Zaimplementowano interpolację wielomianową Lagrange'a, która konstruuje wielomian przechodzący dokładnie przez wszystkie punkty pomiarowe.



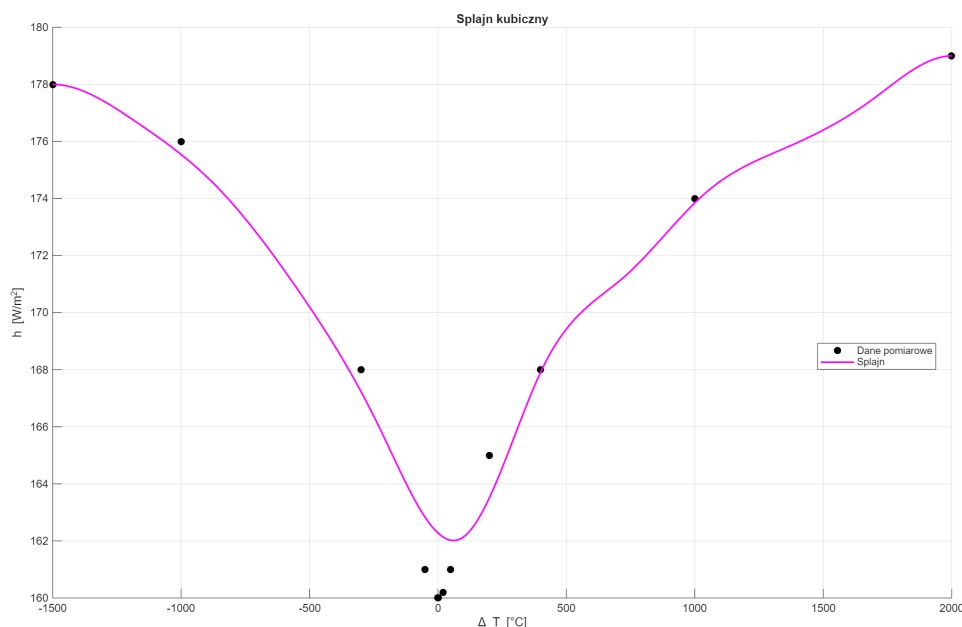
Rysunek 6: Interpolacja Lagrange'a

Czerwona krzywa przechodzi przez wszystkie punkty pomiarowe, jednak między węzłami występują silne oscylacje. Szczególnie widoczne są one na brzegach przedziału: w zakresie $\Delta T \in [-1500, -1000]^{\circ}\text{C}$ krzywa spada do $\sim 145 \text{ W/m}^2$, by następnie wzrosnąć do $\sim 180 \text{ W/m}^2$, natomiast w zakresie $\Delta T \in [1500, 2000]^{\circ}\text{C}$ wartość h osiąga niefizyczne $\sim 210 \text{ W/m}^2$. To tzw. efekt Rungego – charakterystyczne oscylacje wielomianów wysokiego stopnia przy nierównoodległych węzłach.

Uzyskane błędy: średni błąd bezwzględny $1,18 \text{ W/m}^2$ (0,71%), maksymalny $3,59 \text{ W/m}^2$. Liczby te są jednak mylące – dotyczą tylko punktów pomiarowych. Między węzłami błędy są znacznie większe, a oscylacje prowadzą do niefizycznych wartości h . Takie gwałtowne zmiany współczynnika powodują sztywność układu równań różniczkowych, co wymaga bardzo małego kroku całkowania i zwiększa koszt obliczeniowy. Metoda została zdyskwalifikowana ze względu na brak stabilności numerycznej.

3.3 Analiza funkcji sklejanych (splajn kubiczny)

Zaimplementowano funkcje sklejane trzeciego stopnia zgodnie z algorytmem z podręcznika. Metoda dzieli przedział na segmenty i w każdym używa osobnego wielomianu trzeciego stopnia. Wielomiany są połączone w węzłach w sposób zapewniający ciągłość funkcji, pierwszej i drugiej pochodnej (klasa gładkości C^2).



Rysunek 7: Splajn kubiczny

Fioletowa krzywa jest gładka i przebiega przez punkty pomiarowe bez oscylacji. W porównaniu do MNK, splajn dokładniej dopasowuje się do punktów, szczególnie w zakresach gdzie h zmienia się szybciej. Uzyskano najniższe błędy spośród wszystkich metod: średni błąd bezwzględny 1.02 W/m^2 (0.63%), maksymalny błąd 2.29 W/m^2 (1.43%). Stanowi to poprawę o około 35% względem MNK przy zachowaniu pełnej stabilności numerycznej.

Tabela 1: Błędy bezwzględne i względne

Metoda	Błąd bezwzględny		Błąd względny	
	Średni	Maksymalny	Średni	Maksymalny
MNK	1,5752	4,7903	0,95511	2,8514
Lagrange	1,1781	3,5873	0,71285	2,0382
Splajn	1,0242	2,2889	0,63184	1,4306

Algorytm z podręcznika wymaga równoodległych węzłów, co wymagało wstępnego przetworzenia danych. Wygenerowano 12 równoodległych punktów w przedziale $[-1500, 2000]^\circ\text{C}$, a wartości h obliczono za pomocą interpolacji liniowej z oryginalnych danych nierównoodległych. Przekształcenie to wprowadza dodatkowy błąd i jest mało profesjonalne – w praktyce inżynierskiej stosuje się zaawansowane algorytmy splajnów dla węzłów nierównoodległych (np. spline z opcją `pchip` w MATLAB).

4 część 3. projektu

4.1 Cel badawczy

Celem trzeciej części projektu było zbadanie wpływu metody aproksymacji współczynnika przewodnictwa cieplnego $h(\Delta T)$ na wyniki symulacji procesu chłodzenia pręta. W analizie porównano trzy podejścia obliczeniowe: aproksymację metodą najmniejszych kwadratów (MNK), interpolację Lagrange’a oraz funkcje sklepane kubiczne. Pozwoliło to ocenić, w jakim stopniu wybór sposobu odwzorowania zależności $h(\Delta T)$ wpływa na dokładność wyników i stabilność numeryczną modelu.

4.2 Przebieg eksperymentu

Symulacje wykonano dla czterech wybranych przypadków testowych z tabeli pomiarowej, oznaczonych numerami 1, 3, 7 i 10. Przypadki te różniły się temperaturą początkową pręta i oleju, masą chłodziwa oraz czasem chłodzenia. Dla przykładu:

- przypadek 1 obejmował warunki początkowe $T_b(0) = 1200^\circ\text{C}$ oraz $T_w(0) = 25^\circ\text{C}$ przy masie oleju $m_w = 2,5$ kg i czasie chłodzenia $t = 3$ s,
- przypadek 7 charakteryzował się temperaturami $T_b(0) = 1100^\circ\text{C}$ i $T_w(0) = 70^\circ\text{C}$, lecz zwiększoną masą oleju równą 5 kg.

Wszystkie obliczenia przeprowadzono metodą ulepszanego Eulera z krokiem czasowym $h = 0,001$ s, co zapewniło wysoką dokładność numeryczną.

4.3 Analiza wyników

4.3.1 Porównanie metod aproksymacji

Aproksymacja wielomianowa metodą najmniejszych kwadratów (stopień 5) okazała się stabilna numerycznie i zapewniła gładki przebieg funkcji $h(\Delta T)$, choć w obszarach o rzadszych danych pomiarowych pojawiały się lokalne oscylacje. Interpolacja Lagrange’a odwzorowywała idealnie wartości w węzłach, jednak między nimi mogła generować zjawisko Rungego, co prowadziło do większej niestabilności obliczeń przy dużych różnicach temperatur. Najbardziej korzystnie wypadła metoda funkcji sklepanych kubicznych, która zapewniła ciągłość funkcji, eliminując jednocześnie oscylacje charakterystyczne dla interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia. Splajny okazały się również najbardziej stabilne numerycznie spośród analizowanych metod.

4.3.2 Zgodność z pomiarami eksperymentalnymi

Porównanie wyników symulacji z danymi pomiarowymi wykazało, że funkcje sklepane kubiczne zapewniają najmniejsze błędy w większości analizowanych przypadków. Wszystkie trzy metody dawały zbliżone wartości temperatury pręta T_b , natomiast większe różnice pojawiały się w odwzorowaniu temperatury oleju T_w , szczególnie w krótkich czasach chłodzenia. Obserwowane błędy bezwzględne w zakresie $1\text{--}3^\circ\text{C}$ są w pełni akceptowalne z uwagi na uproszczenia modelu fizycznego (m.in. założenie jednorodności temperatury), niepewności pomiarowe oraz błędy numeryczne metody całkowania.

4.3.3 Wpływ wyboru metody na przebieg symulacji

Analiza przebiegów czasowych temperatur $T_b(t)$ i $T_w(t)$ wskazuje, że w początkowej fazie chłodzenia, gdy różnica temperatur przekracza 1000°C , wszystkie metody aproksymacji dają praktycznie identyczne wyniki, ponieważ współczynnik h zmienia się w tym zakresie stosunkowo powoli. W fazie końcowej, przy $\Delta T < 200^\circ\text{C}$, różnice między metodami stają się bardziej zauważalne — zwłaszcza interpolacja Lagrange’a wykazuje tendencję do delikatnych oscylacji, podczas gdy splajny zachowują największą gładkość. Zauważono także, że wpływ metody aproksymacji rośnie wraz ze wzrostem masy oleju chłodzącego; w przypadku 7, gdzie masa była największa, model reagował bardziej wrażliwie na szczegółowy kształt funkcji $h(\Delta T)$.

4.4 Wybór metody referencyjnej

Na podstawie analizy wyników wybrano funkcje sklepane kubiczne jako metodę referencyjną wykorzystywaną w dalszej części projektu. Zdecydowały o tym: najlepsza zgodność z danymi pomiarowymi, bardzo dobra stabilność numeryczna, gładkość rozwiązania.

4.5 Wrażliwość modelu na metodę aproksymacji

Przeprowadzone badania wskazują, że model jest umiarkowanie wrażliwy na wybór metody aproksymacji funkcji $h(\Delta T)$. Różnice między wynikami uzyskanymi przy użyciu różnych metod nie przekroczyły 5%, co jest wartością akceptowalną w większości zastosowań. Wrażliwość ta zwiększa się jednak w przypadkach obejmujących duże masy chłodziwa, długie czasy chłodzenia lub wymagających bardzo precyzyjnych analiz. Do obliczeń orientacyjnych wystarczająca jest aproksymacja MNK, natomiast do obliczeń projektowych zaleca się stosowanie funkcji sklepanych kubicznych.

4.6 Uwagi praktyczne

W niniejszym projekcie równoodległe węzły interpolacyjne wygenerowano poprzez interpolację liniową z danych pierwotnie nierównoodległych. Podejście to jest prostym rozwiązaniem, lecz w zastosowaniach praktycznych preferuje się użycie splajnów również dla nierównomiernie rozmieszczonych danych. Dodatkowo, w implementacji funkcji sklejanych przyjęto zerowe warunki brzegowe na końcach przedziału, choć w bardziej zaawansowanej analizie można by je wyznaczyć z rzeczywistych właściwości fizycznych. W przypadku metody MNK wybrano wielomian stopnia 5, gdyż wyższe stopnie prowadziłyby do przecuczania i nadmiernych oscylacji funkcji aproksymującej.

4.7 Podsumowanie

Przeprowadzone badania wykazały, że wszystkie analizowane metody aproksymacji funkcji $h(\Delta T)$ dają wyniki zgodne jakościowo z pomiarami eksperymentalnymi. Z punktu widzenia zastosowań inżynierskich najlepszą metodą okazały się funkcje sklejane kubiczne, które zapewniają najdokładniejsze odwzorowanie rzeczywistych przebiegów temperatur i największą stabilność numeryczną. Różnice między metodami są znaczące jedynie w przypadku analiz wymagających wysokiej precyzji, natomiast sam model fizyczny pozostaje stosunkowo odporny na wybór sposobu aproksymacji.

5 część 4. projektu

5.1 Cel badawczy

Celem czwartej części projektu było wyznaczenie minimalnej masy oleju chłodzącego, która pozwala schłodzić pręt do temperatury 125°C w czasie $t = 0,7$ s. W tym celu wykorzystano pełny, nieliniowy model chłodzenia wraz z aproksymowaną funkcją współczynnika wnikania ciepła $h(\Delta T)$ otrzymaną z funkcji sklejanych kubicznych. Rozwiązanie równania $T_b(m_w, 0,7 \text{ s}) = 125^{\circ}\text{C}$ przeprowadzono metodą Newtona–Raphsona.

5.2 Przebieg eksperymentu

W kolejnych iteracjach Newtona wykonywano symulację chłodzenia dla zadanej masy oleju i obliczano przybliżoną pochodną temperatury pręta względem masy:

$$T'_b(m_w) \approx \frac{T_b(m_w + \Delta m_w) - T_b(m_w)}{\Delta m_w}.$$

Aktualizacja wartości masy przebiegała zgodnie ze wzorem:

$$m_w^{(i+1)} = m_w^{(i)} - \frac{T_b(m_w^{(i)}) - 125}{T'_b(m_w^{(i)})}.$$

Jako punkt startowy przyjęto $m_w^{(0)} = 2,0$ kg, a wartość różnicową $\Delta m_w = 0,02$ kg. Do całkowania równań różniczkowych wykorzystano ulepszoną metodę Eulera.

5.3 Analiza wyników

5.3.1 Przebieg iteracji Newtona

W Tabeli 2 przedstawiono pełny przebieg iteracji metody Newtona–Raphsona. W pierwszych krokach obserwowano niestabilność spowodowaną dużym oddaleniem punktu startowego od właściwego rozwiązania. W kolejnych iteracjach algorytm szybko zbiegał do obszaru stabilnego i osiągnął wysoką dokładność końcową.

Tabela 2: Iteracje metody Newtona-Raphsona dla równania $T_b(m_w) = 125^\circ\text{C}$.

Iteracja i	$m_w^{(i)}$ [kg]	$T_b(m_w^{(i)})$ [$^\circ\text{C}$]	$T'_b(m_w^{(i)})$ [$^\circ\text{C}/\text{kg}$]	$\Delta T_b = T_b - T_{\text{cel}}$ [$^\circ\text{C}$]
1	2,00000	35,0992	-4,957036	-89,900794
2	1,00000	45,0262	-19,305357	-79,973757
3	0,50000	64,3812	-73,289308	-60,618750
4	0,25000	101,2083	-265,220581	-23,791726
5	0,16029	139,6936	-580,334298	14,693621
6	0,18561	125,3851	-450,252403	0,385108
7	0,18647	124,9638	-446,649355	-0,036175
8	0,18639	125,0036	-446,988678	0,003566
9	0,18640	124,9997	-446,955240	-0,000350

Na podstawie uzyskanych wyników wyznaczono wartość:

$$m_w \approx 0,1864 \text{ kg},$$

5.4 Wnioski końcowe

Metoda Newtona-Raphsona okazała się skuteczną i szybką metodą rozwiązywania równania odwrotnego analizowanego w tej części projektu. Po kilku iteracjach osiągnięto wysoką dokładność rozwiązania. Jednocześnie zauważono, że model jest bardzo czuły na wartość masy oleju, co przejawia się dużą wartością pochodnej $T'_b(m_w)$ w pobliżu rozwiązania. Ponadto, uzyskany wynik leży daleko poza zakresem danych pomiarowych, co ogranicza jego interpretację fizyczną. W praktycznych zastosowaniach inżynierskich należałoby narzucić ograniczenia na minimalną masę chłodziwa tak, aby obliczenia były prowadzone wyłącznie w obszarze popartym eksperymentalnie.