5 rozdział

Strona:	LeIA	Wydrukowane przez użytkownika:	Kinga Kondraciuk
Kurs:	Metody numeryczne (2025Z)	Data:	niedziela, 30 listopada 2025, 14:14
Książka:	5 rozdział		

Spis treści

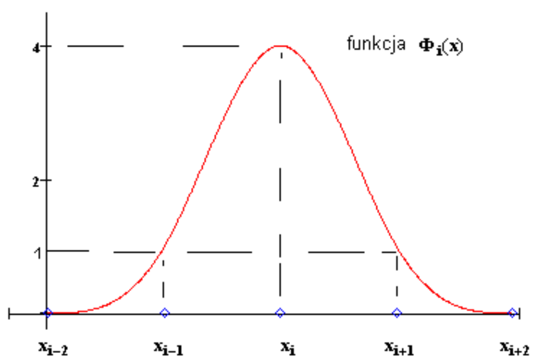
1. Baza funkcji sklejanych

Baza funkcji sklejanych

Stosując do interpolacji wielomian interpolacyjny nie możemy narzucać stopnia wielomianu, ten stopień zależy od ilości węzłów. Jeśli mamy 20 różnych węzłów (20 pomiarów) to wielomian interpolacyjny może być nawet 19 stopnia. Wraz ze wzrostem ilości węzłów rośnie na ogół stopień wielomianu. Natomiast stopień niżej zdefiniowanej funkcji sklejanej tzw.: splajnu, nie będzie zależał od ilości węzłów.

Ograniczymy się w tym opracowaniu do splajnu 3-iego stopnia, jest on na ogół najczęściej używany do interpolacji. Będziemy rozpatrywać przedział i podzielimy go na n części , czyli na n podprzedziałów o długości $h = \frac{b-a}{n}$. Otrzymamy węzły równoodległe $x_i = a + i \cdot h \;\; i = 0, 1, \ldots, n$. Funkcją sklejaną 3-iego stopnia będziemy nazywać funkcję, która na każdym podprzedziale jest wielomianem 3 stopnia, ale posklejaną tak, aby była ciągła i miała pierwszą i drugą pochodną ciągłą na $< a, b >$. Aby dokładnie określić funkcję sklejaną 3-iego stopnia $S_3(x)$ na przedziale <a, b> określimy najpierw bazę splajnów 3-iego stopnia dla węzłów równoodległych. Jedna funkcja bazowa jest podana za pomocą bardzo skomplikowanego wzoru, ale musi spełniać powyższe wymagania, tzn.: musi być wielomianem 3-iego stopnia na każdym podprzedziale, mieć pierwszą i drugą pochodną ciągłą na $< a, b >$. Funkcja bazowa o numerze i, oznaczona przez $\Phi_i(x)$ ma w węźle o numerze i maksimum równe 4, w węzłach obok ma wartość 1, a w węzłach o numerach $i-2$ i $i+2$ ma wartość 0. Oto wzór i wykres takiej funkcji:

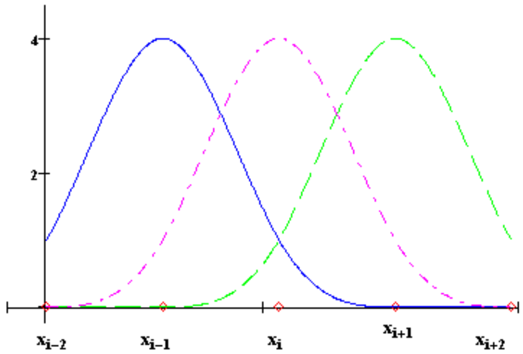
$$\Phi_i(x) = \frac{1}{h^3} \cdot \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & \text{dla } x \in \langle x_{i-2}, x_{i-1} \rangle \\ (x - x_{i-2})^3 - 4(x - x_{i-1})^3 & \text{dla } x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\ (x_{i+2} - x)^3 - 4(x_{i+1} - x)^3 & \text{dla } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \\ (x_{i+2} - x)^3 & \text{dla } x \in \langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle \\ 0 & \text{dla } x \in R - \langle x_{i-2}, x_{i+2} \rangle \end{cases} \qquad \textbf{(5.1.1)}$$



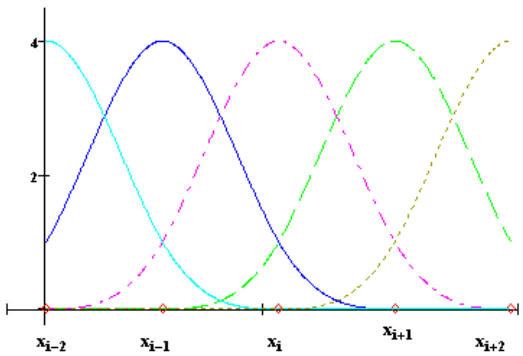
Rys. 5.1. *Funkcja bazowa o numerze i, takim samym jak węzeł . Wartość maksymalną równą 4 funkcja przyjmuje dla wartości $x = xi$.*

Na podstawie tych funkcji bazowych będziemy określać w przedziale $< a, b >$ z $n + 1$ węzłami równoodległymi splajn 3-iego stopnia. Ile jest takich funkcji bazowych w przedziale $< a, b >$

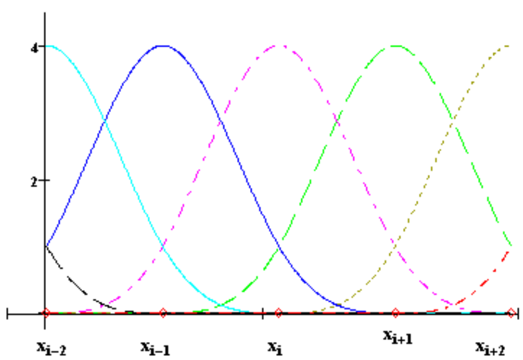
Narysujemy po kolei funkcje bazowe dla $n = 4$ tzn.: dla 5 węzłów. Narysujemy najpierw trzy $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$ (patrz rysunek 5.1a). Dodamy jeszcze dwie: $\Phi_0(x), \Phi_4(x)$ (patrz rysunek 5.1b). I mamy tyle funkcji ile jest węzłów. Ale są jeszcze dwie funkcje, które nie są równe 0 w całym przedziale, te funkcje odpowiadają węzłom, których na rysunku nie ma, jednemu o numerze wcześniejszym niż 0 i jednemu o numerze późniejszym niż 4. Te funkcje oznaczymy przez $\Phi_{-1}(x), \Phi_{n+1}(x)$ (patrz rysunek 5.1c). Okazuje się, że niezerowych funkcji jest o dwie więcej niż węzłów, czyli o 3 więcej niż n.



Rys. 5.1a. *Trzy funkcje bazowe dla 3 węzłów: x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, przy założeniu $i=2$.*



Rys. 5.1b. *Pięć funkcji bazowych dla 5 węzłów: $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$, przy założeniu $i=2$.*



Rys. 5.1c. *Siedem funkcji bazowych dla 7 węzłów:$x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{x+2}, x_{n+1}$, przy założeniu $i=2$.*

Oto funkcja napisana w MATLABie, który implementuję funkcję bazową zakładając, że przekazujemy mu trzy parametry:

- x_i - współrzędną środka danej funkcji bazowej, odpowiada to funkcji $\Phi_i(x)$,
- h - odległość pomiędzy węzłami interpolacji; odległość ta wyznacza granice między przedziałami istotnymi dla funkcji bazowej,
- x - wartość, dla której należy obliczyć wartość funkcji bazowej.

```
    % xi - punkt środkowy funkcji bazowej
    % h - odległość między węzłami
    % x - wspolrzedna x, dla ktorej obliczamy wartosc
    function y = phi(xi,h,x)
        if (x < xi-2*h) || (x > xi+2*h)
            y = 0;
        elseif x < xi-h
            y = (x - (xi-2*h))^3;
        elseif x < xi
            y = (x - (xi-2*h))^3 - 4*(x- (xi-h))^3;
        elseif x < xi+h
            y = ((xi+2*h) - x)^3 - 4*((xi+h) - x)^3;
        else
            y = ((xi+2*h) - x)^3;
        end
        y=y/h^3;
end
```

Przykład 5.1

Przykład

Wykorzystaj funkcję bazową w MATLABie i narysuj przebieg wszystkich 7 funkcji bazowych dla przypadku z pięcioma węzłami interpolacji równoodległymi w przedziale $< 0, 5 >$.

Rozwiązanie przedstawimy bezpośrednio w kodzie.

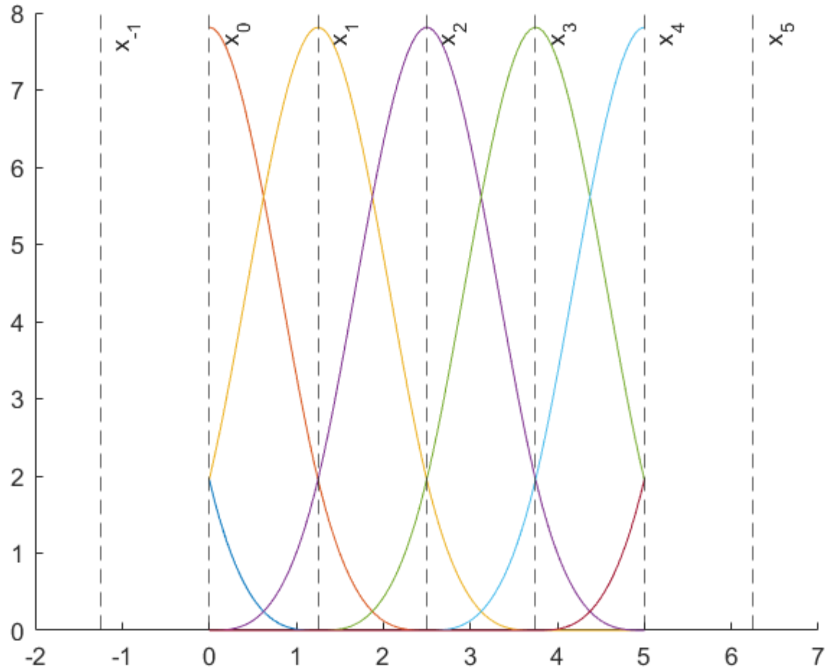
```
     close all
     a = 0;
     b = 5;
     xd = linspace(a,b,100);
     xk = linspace(a,b,5);

     h = xk(2)-xk(1);

     yd = zeros(length(xd),1);

     % używamy hold on, poniewaz chcemy dorysowac kolejne przebiegi
     % na tym samym rysunku
     hold on
     for i = -1:5
     %for i = 0:4
     %for i = 1:3
         % obliczamy wspolrzedna wezla srodkowego i-tej funkcji
         % bazowej
         xi = xk(1) + (i)*h;
         % narysujmy pionowa linie aby zaznaczyc srodek funkcji bazowej
         xline(xi, '--', {sprintf('x_{%d}',i)})

          for j = 1:length(xd)
         yd(j) = phi(xi, h, xd(j));
     end
 plot(xd,yd)
 end
 hold off
```



Rys. 5.2. *Wynik uruchomienia skryptu przykładowego, prezentujący siedem funkcji bazowych narysowanych w przedziale* $< 0, 5 >$ *z zaznaczonymi za pomocą pionowych przerywanych linii środkami funkcji bazowych.*

Za pomocą tych funkcji zdefiniujemy funkcję sklejaną (splajn) 3-iego stopnia:

$$S_3(x) = c_{-1}\Phi_{-1}(x) + c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + \ldots c_n\Phi_n(x) + c_{n+1}\Phi_{n+1}(x) \tag{5.1.2}$$

lub w skrócie:

$$S_3(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i\Phi_i(x) \tag{5.1.3}$$

Współczynniki są liczbami rzeczywistymi, będziemy je dobierać tak, aby splajn był funkcją interpolacyjną dla funkcji $f(x)$.

2. Interpolacja splajnami na bazie równoodległej

Zastosujemy funkcję sklejaną $S_3(x)$ do interpolacji funkcji f(x) danej w przedziale $< a, b >$.

Dzielimy przedział na n części, $h = \frac{b-a}{n}$, węzły równoodległe $x_i = a + i \cdot h \ \ i = 0, 1, \ldots, n$.

Funkcja interpolacyjna musi się pokrywać w węzłach z funkcją $f(x)$ tzn.:

$$S_3(x_i) = y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{5.2.1}$$

Otrzymaliśmy z tych związków $n+1$ równań, a współczynników jest $n+3$, przypominamy wzór:

$$S_3(x) = c_{-1}\Phi_{-1}(x) + c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + \ldots c_n\Phi_n(x) + c_{n+1}\Phi_{n+1}(x) \tag{5.2.2}$$

Nasz układ ma zatem dwa stopnie swobody i aby jednoznacznie wyznaczyć $S_3(x)$ musimy mieć jeszcze dwa równania. Na ogół zadaje się wartości pochodnej funkcji $S_3^{'}(x)$ w punktach a i b - tzn.: zadaje się współczynniki kierunkowe stycznych pod jakimi funkcja interpolacyjna ma startować z punktu a w prawo i jak ma wpadać do b z lewej strony. Dodatkowe warunki to:

$S_3^{'}(a^+) = \alpha, S_3^{'}(b^-) = \beta$

Z warunków 5.2.1 i z własności funkcji bazowych i ich pochodnych dostajemy układ równań:

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = y_i \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{5.2.3}$$

$$-c_{-1} + c_1 = \frac{h}{3} \cdot \alpha$$

$$-c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3} \cdot \beta$$

Po wyliczeniu współczynników c_{-1}, c_{n+1} z równań (5.2.3) i po wstawieniu ich do (5.2.2) otrzymujemy następujący układ $n+1$ równań liniowych z $n+1$ niewiadomymi $c_0, c_1, \ldots, c_n$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
4c_0 & + & 2c_1 & & & & & & & = & y_0 + \frac{h}{3} \cdot \alpha \\
c_0 & + & 4c_1 & + & c_2 & & & & & = & y_1 \\
 & & c_1 & + & 4c_2 & + & c_3 & & & = & y_2 \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & & = & \ldots \\
 & & & & & & c_{n-2} & + & 4c_{n-1} & + \; c_n = & y_{n-1} \\
 & & & & & & & & 2c_{n-1} & + \; 4c_n = & y_n - \frac{h}{3} \cdot \beta
\end{array}$$

Układ ten ma zawsze jedyne rozwiązanie na $c_0, c_1, \ldots, c_n$, pozostałe 2 współczynniki obliczmy ze wzorów:

$-c_{-1} + c_1 = \frac{h}{3} \cdot \alpha,$

$-c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3} \cdot \beta.$

Nie wyprowadzaliśmy układu równań, aby nie rozbudowywać tego tematu. Zainteresowanych obliczeniami odsyłamy do podanej literatury.

Przykład 5.2

Przykład

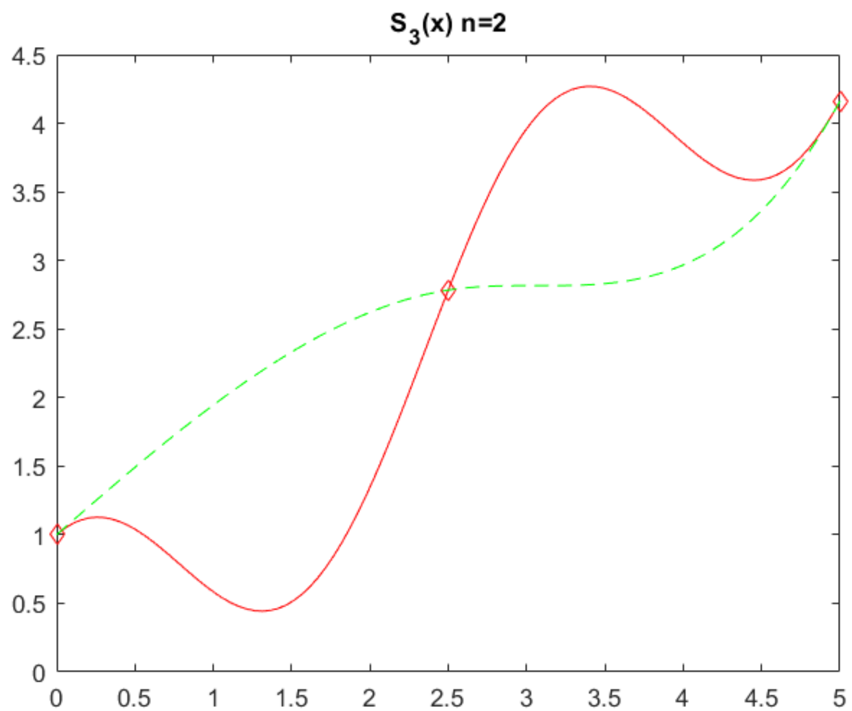
Dana jest funkcja $f(x) = x + cos(2x)$ w przedziale $< 0, 5 >$. Znajdziemy dla niej funkcję sklejane 3-iego stopnia dla różnej ilości węzłów równoodległych. Liczba n oznacza ilość podprzedziałów, węzłów jest n+1. Ponieważ $f^{'}(x) = 1 - 2sin(2x)$ oraz $\alpha = f^{'}(0) = 1, \beta = f^{'}(5) = 2.088$ przyjmujemy, że $S_3^{'}(a^+) = \alpha = 1, S_3^{'}(b^-) = \beta = 2.088.$

Rozwiązując układ dla n=2 (3 węzły) dostajemy następujące współczynniki:

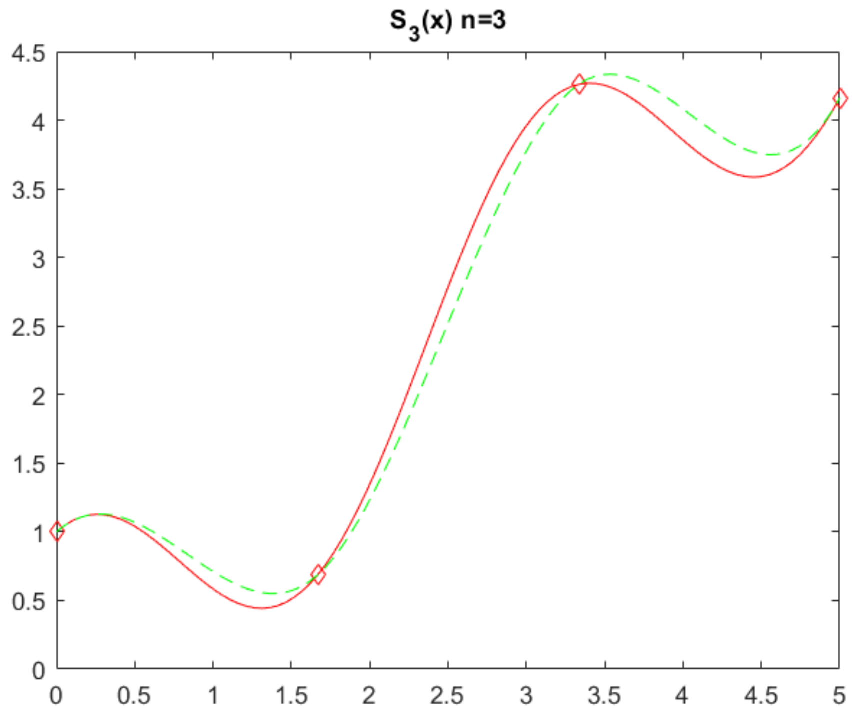
$c_{-1} = -0, 26; c_0 = 0, 172; c_1 = 0, 573; c_2 = 0, 319; c_3 = 2, 313$

Narysujemy ten wykres, a później będziemy zwiększać liczbę podprzedziałów (węzłów):(nie podajemy współczynników następnych funkcji sklejanych, a tylko ich wykresy i błędy).

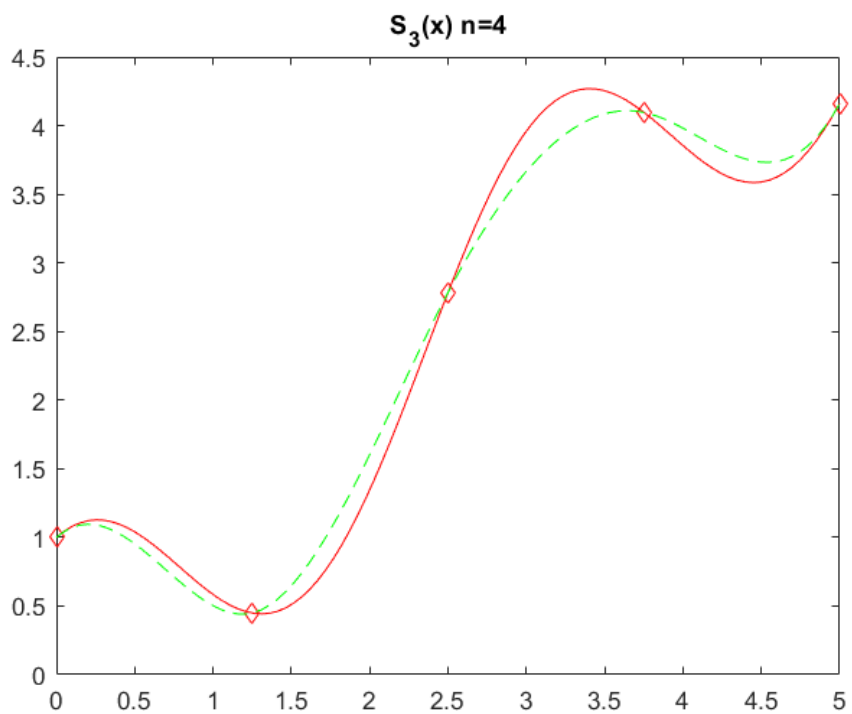
Dla $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$ $n = 4$ $n = 5$ $n = 8$ przedstawiono serię wykresów na rysunkach 5.3a-e.



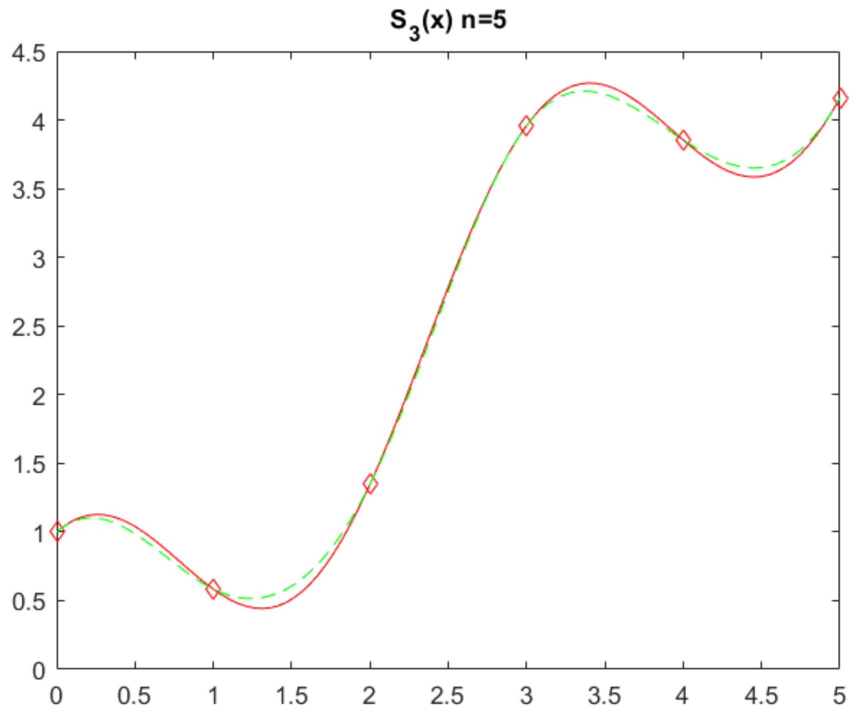
Rys. 5.3a. *Wykres funkcji f i interpolacyjnych splajnów dla $n = 2$.*



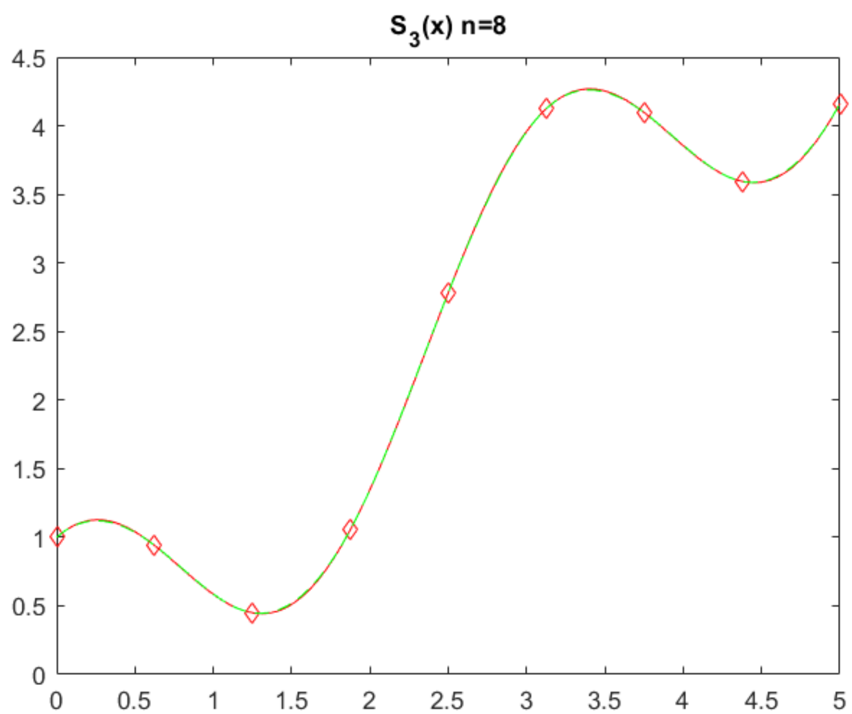
Rys. 5.3b. Wykres funkcji f i interpolacyjnych splajnów dla $n = 3$.



Rys. 5.3c. *Wykres funkcji f i interpolacyjnych splajnów dla $n = 4$.*



Rys. 5.3d. *Wykres funkcji f i interpolacyjnych splajnów dla $n = 5$.*



Rys. 5.3e. *Wykres funkcji f i interpolacyjnych splajnów dla $n = 8$.*

Błędy dla $n = 2$ są jak widać na rysunku bardzo duże , rzędu $1,822$, dla $n = 3$ maksymalny błąd interpolacji równa się $0,273$, dla $n = 4$ błąd wynosi $0,306$- jest większy!, dla $n = 5$ jest $0,097$, a dla $n = 8$ już tylko $0,008$. Na rysunku funkcje się pokrywają. Obliczenia podaliśmy z dokładnością do trzech cyfr po przecinku. Powyższe wykresy oraz rozwiązanie zadania można uzyskać poniższym prorgamem MATLAB. W poniższym programie zakładamy, że w tym samym folderze znajduje się dodatkowo funkcja MATLABa obliczająca wartość funkcji bazowej, przedstawiona w części 5.1.

```
close all
```

```
f = @(x) (x+cos(2*x))
df = @(x) (1-2*sin(2*x))

a = 0;
b = 5;
x = linspace(a,b,100);
y = f(x)

n=2;
xk = linspace(a,b,n+1);
yk = f(xk);

h = xk(2)-xk(1);

% potrzebujemy n+3 funkcji bazowych!
c = zeros(n+3,1);

alpha = df(a)
beta = df(b)

% budujemy uklad rownan
A = zeros(n+1);
b = zeros(n+1,1);

A(1,1) = 4;
A(1,2) = 2;
b(1) = yk(1) + h/3*alpha;

for i=2:n
    A(i,i-1)=1;
    A(i,i)=4;
    A(i,i+1)=1;
    b(i)=yk(i);
end

A(n+1,n+1) = 4;
A(n+1,n) = 2;
b(n+1) = yk(n+1) - h/3*beta;

% rozwiazujemy wspolczynniki i wstawiamy je od razu do wektora c
c(2:n+2) = A\b;

% c_{-1}
c(1) = c(3) - h/3*alpha;
% c_{n+1}
c(n+3) = c(n+1) + h/3*beta;


yS3 = zeros(length(x),1);
for j = 1:length(x)
    s = 0;
    for i = -1:n+1
        xi = a + (i)*h;
        s = s + c(i+2) * phi(xi, h, x(j));
    end
    yS3(j) = s;
end
plot(x,y,'r', xk, yk, 'dr', x, yS3, '--g')
title(sprintf('S_3(x) n=%d',n))

% wyswietlmy wspolczynniki c
c
```