

**Projekt zaliczeniowy Przedmiot: Metody Numeryczne  
studia magisterskie**

Symulator chłodzenia pręta w oleju chłodzącym

(opracowanie: Rober Szmurło)

## **Opis projektu**

Celem projektu jest samodzielna implementacja wybranych metod numerycznych oraz ich świadoma i rzetelna weryfikacja. Weryfikacja metod numerycznych powinna polegać na sprawdzeniu poprawności działania na podstawie wiedzy, eksperymentów (też numerycznych); określeniu złożoności obliczeniowej, oraz zbadaniu dokładności rozwiązania w zależności od parametrów – należy przeprowadzić analizę wrażliwości metod numerycznych. Bardzo duża waga podczas sprawdzania projektu będzie przykładowana do weryfikacji metod badawczych wykorzystywanych przez studenta.

Implementację zadania można zrealizować w środowisku MATLAB, Python lub Julia.

Jednym z samodzielnego zadań jest zaprojektowanie skutecznej metody prezentacji postawionych celów dotyczących analizy zarówno wyników fizycznych jak i wrażliwości na parametry numeryczne. Proszę nie krępować się zadawać pytań na forum na platformie kursy! To zadanie, wbrew pozorom, nie jest banalne. Same metody numeryczne i zagadnienie fizyczne są bardzo proste i faktycznie banalne, ale zasadniczym celem niniejszego projektu jest przeprowadzenie przez Państwa świadomego i metodologicznie poprawnego eksperymentu badawczego zgodnego z poziomem studiów magisterskich oraz przedstawienie wyników w rzetelnym raporcie. Oto zasadnicze cechy projektu badawczego:

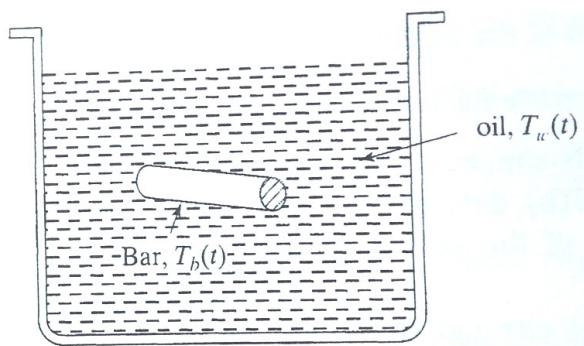
- projekt powinien mieć postawiony cel,
- zadanie badawcze cechuje się przeprowadzeniem:
  - zaplanowanego (co, w jakiej kolejności z jaką dokładnością i jaką metodyką będzie badane),
  - zrealizowanego (przedstawienie narzędzi technicznych wykorzystywanych do eksperymentu oraz wyników w formie tabel i wykresów),
  - i zinterpretowanego eksperymentu badawczego (interpretacja tabel, wyników, wykresów, kluczowych obserwacji, potwierdzenia założeń teoretycznych).
- odtwarzalność uzyskanych wyników,
- czytelny raport projektu.

Część merytoryczna projektu podzielona jest na kilka części.

- W pierwszej części zadaniem jest napisanie samego symulatora modelującego zjawisko. Część badawcza obejmuje tutaj metody weryfikacji uzyskanego symulatora pod kątem jego zachowania w kontekście cech fizycznych zagadnienia.
- W drugiej części należy, wykorzystując stworzony symulator rozwiązać praktyczne zagadnienie techniczne związane z zaprojektowaniem konkretnych cech urządzenia. Celem badawczym będzie określenie wrażliwości uzyskanego rozwiązania na błędy danych wejściowych oraz jakość symulatora.
- W trzeciej części należy wykorzystać symulator i przetworzyć obliczone dane w celu wyznaczenia technicznych parametrów. Celem badawczym będzie przeanalizowanie i wybranie najlepszej pod kątem wyników metody numerycznej.
- Czwarta część projektu obejmuje analizę numerycznego rozwiązania. Zadaniem jest sprawdzenie dokładności rozwiązania, wrażliwości na zmianę i dokładność parametrów oraz poprawności z pomiarami technicznymi.

## Opis modelowanego zjawiska

W projekcie należy zbudować model numerycznych procesu chłodzenia metalowego pręta w specjalnym oleju zobrazowanym na poniższym rysunku.



Rys.1. Rysunek ideowy zadania chłodzenia pręta w oleju

Proces technologiczny obejmuje konieczność gwałtownego schłodzenia znacznej liczby prętów w określonym czasie. W ramach zjawiska licznego ciepło z prętów jest oddawane do cieczy chłodzącej i w niej akumulowane. Podczas modelowania zjawiska fizycznego należy pominąć oddawanie ciepła przez zbiornik z olejem do otoczenia – jest to proces długotrwały i technologicznie przewiduje się, że zbiorniki będą wymieniane.

Jednym z możliwych przykładów wykorzystania modelu (nie będziemy tego realizować w ramach projektu z uwagi na pracochłonność problemu) jest wyznaczenie parametrów pełnego procesu technologicznego uwzględniającego konieczność przewidzenia ile zbiorników będzie potrzebnych do zapewnienia zdolności produkcyjnych zakładu. W zadaniu tym konieczne będzie również rozwiązanie zadania optymalizacyjnego polegającego na konieczności znalezienia optymalnych parametrów pojedynczego zbiornika. Przykładowo, proces produkcyjny zakłada, że w jednym cyklu – za chcemy schłodzić 100000 prętów w czasie co najwyżej 24 godziny oraz z minimalnymi kosztami chłodzenia. Powstają ograniczenia technologiczne, które obejmują: czas wymiany zbiornika to 20 sekund, koszt oleju chłodzącego to 20 zł za litr, czas zanurzania i wynurzania pręta to 5 sekund, koszt pojedynczego zbiornika jest związany z jego rozmiarami i wynosi w przeliczeniu na litr 100zł. Naszym praktycznym celem inżynierskim, projektowym przykładowo może być określenie minimalnych rozmiarów zbiornika (ilości oleju) oraz określenie ile zbiorników będziemy potrzebować do ciągłej pracy 24h zakładając, że schłodzenie jednego zbiornika trwa 4 godziny. W niniejszym projekcie wykonamy elementy symulatora pozwalające nam wyznaczyć parametry inżynierskie oraz określić uwarunkowania technologiczne. Wszystko to osiągniemy wykorzystując metody numeryczne oraz znajomość programowania.

W modelu fizycznym zjawisko wymiany ciepła będziemy modelować poprzez obserwację zmian temperatury pręta  $T_b$  oraz oleju  $T_w$ . Ciepło będzie przenikać przez ścianki pręta o sumarycznej powierzchni  $A$  z pewnym stałym eksperymentalnie określonym współczynnikiem  $A$ . Materiał z którego będzie zbudowany pręta będzie charakteryzował się pewną zdolnością kumulacji ciepła, która będzie odniesiona do masy pręta  $m_b$  i opisana za pomocą pojemności cieplnej  $c_b$ . Podobnie będzie dla oleju -  $m_w$  oraz  $c_w$ .

## **Model matematyczny**

W wyidealizowanym przypadku zadania możemy przyjąć, że proces wymiany ciepła jest opisany następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych, w którym obserwujemy temperatury cieczy i pręta (dwie zmienne stanu – zatem układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych):

$$\frac{m_b c_b}{hA} \frac{dT_b}{dt} + T_b = T_w$$
$$\frac{m_w c_w}{hA} \frac{dT_w}{dt} + T_w = T_b$$

gdzie,  $m_b$  – masa pręta,  $c_b$  – pojemność cieplna metalu pręta,  $h$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego,  $A$  – powierzchnia pręta,  $m_w$  – masa oleju chłodzącego,  $c_w(T)$  – pojemność cieplna oleju chłodzącego zależne od temperatury  $T$  (nieliniowe).

Zasadniczym uproszczeniem w powyższym modelu jest przyjęcie, że temperatury pręta i oleju są stałe w całej przestrzeni. Założenie takie zakłada, że przewodzenie ciepła w samym pręcie i oleju zachodzi nieskończenie szybko – czyli mamy bardzo wysoką wartość współczynnika przewodnictwa cieplnego i zakładamy, że pomijamy to ograniczenie.

### **Część 1.**

Cel badawczy: Opracowanie poprawnego i zweryfikowanego symulatora modelu w środowisku MATLAB dla zadanych poniżej parametrów.

Proszę porównać uzyskane parametry z pomiarami eksperimentalnymi. Proszę w raporcie przedstawić dyskusję dokładności rozwiązania. Proszę opisowo wskazać, skąd skąd mogą wziąć się ewentualne rozbieżności – zwłaszcza w kontekście materiału z podręcznika dotyczącego analizy dokładności, błędów dyskretyzacji, zaokrągleń. Proszę jednoznacznie stwierdzić, czy błędy zaokrągleń mogą mieć istotne znaczenie w tej symulacji.

W zadaniu proszę samodzielnie zaimplementować wszystkie metody numeryczne, a następnie porównać wyniki z rozwiązaniami uzyskanymi wbudowanymi metodami w MATLABa (np.: ode23, ode45).

Podpowiedź: Podstawowy symulator powinien składać się z co najmniej trzech funkcji:

- funkcja sterująca z zadanymi warunkami początkowymi oraz rysująca wykresy,
- funkcja wykonująca całkowanie zadanego równania stanu,
- funkcja definiująca równania stanu (czyli zwracająca wartość pochodnych poszczególnych zmiennych stanu  $dT_b/dt$ ,  $dT_w/dt$  dla zadanego chwilowych wartości  $T_b$ ,  $T_w$  i  $t$ ,
- proszę porównać dokumentację funkcji MATLAB: ‘doc ode23’ – zwłaszcza w kontekście argumentów tej funkcji!).

Proszę znaleźć przebiegi czasowe temperatury pręta oraz temperatury oleju chłodzącego dla poniższych danych:

$$h = 160 \left[ \frac{J}{s \cdot m^2} \right];$$

$$A = 0.0109 [m^2];$$

$$mb = 0.2 \text{ kg};$$

$$mw = 2.5 \text{ kg};$$

$$cb = 3.85 \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right];$$

$$cw = 4,1813 \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right];$$

Należy przyjąć temperaturę początkową pręta  $T_b(0) = 1200 \text{ } ^\circ\text{C}$ , a temperaturę początkową oleju chłodzącego  $T_w(0) = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Przykład rozwiązania znajduje się na końcu niniejszej instrukcji.

Do celów weryfikacji możecie Państwo posłużyć się poniższymi danymi uzyskanymi z eksperymentów technicznych fizycznych, które polegały na tym, że wzięto zbiornik i dla różnych ilości płynu chłodzącego obserwowano temperaturę pręta oraz temperaturę cieczy chłodzącej po upływie określonego czasu  $t$  (2,3,4, lub 5 sekund). Proszę przedyskutować możliwe, ewentualne rozbieżności między uzyskanymi przez Państwa wynikami oraz pomiarami eksperimentalnymi. Parametry nieujęte w tabeli powinny być wzięte z powyższych danych.

Nr pomiaru	$T_b(0) \text{ } ^\circ\text{C}$	$T_w(0) \text{ } ^\circ\text{C}$	$M_w [\text{kg}]$	$t [\text{s}]$	$T_b(t) \text{ } ^\circ\text{C}$	$T_w(t) \text{ } ^\circ\text{C}$
1	1200	25	2.5	3	107.7	105.1
2	800	25	2.5	3	79.1	78.0
3	1100	70	2.5	3	142.1	139.1
4	1200	25	2.5	5	105.7	105.5
5	800	25	2.5	5	78.2	78.1
6	1100	70	2.5	2	150.1	138.2
7	1100	70	5	2	116.6	105.1
8	1100	70	10	2	99.1	88.1
9	1100	70	2.5	4	141.2	139.8
10	1100	70	2.5	5	140.9	140.1

Tabela 1. Eksperymenty pomiarowe.

Oczekiwane elementy:

- program symulatora,
- przedstawienie przebiegu temperatury pręta i oleju chłodzącego w czasie,
- projekt i przeprowadzenie eksperymentu weryfikującego wrażliwość na błędy danych wejściowych,
- skrypt pozwalający powtórzyć eksperymenty,
- analiza i dyskusja wyników,
- proszę odpowiednio dobrą zakresy czasowe, aby wykresy prezentowały ‘sensowne’ dane.,
- Wynikiem tej części powinien być sam symulator (kod), oraz przebiegi temperatury wyznaczone co najmniej dla wszystkich przypadków testowych z tabeli. Wyniki symulacji dla odpowiednich chwil czasowych powinny być zweryfikowane z wynikami eksperymentalnymi (proszę pamiętać, że idealnie zgadzać się nie będzie! Proszę w raporcie odnieść się do tego dlaczego te wyniki nie są idealne, proszę uwzględnić aspekty numeryczne, modelowe, pomiarowe,..)

## Część 2.

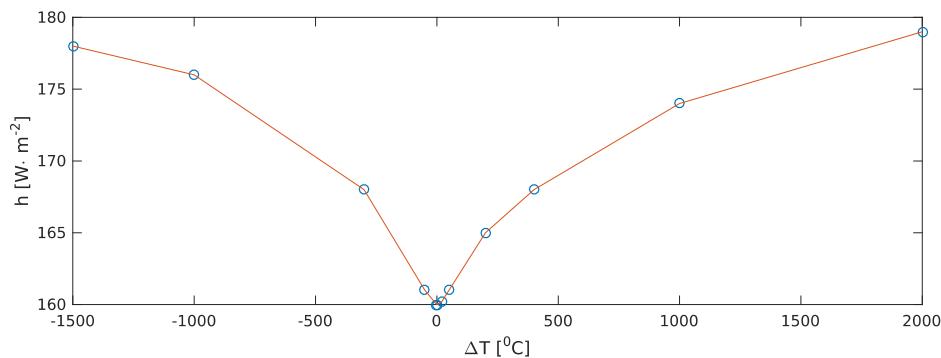
*Cel badawczy: Wybór optymalnej metody numerycznej do rozwiązywania problemu nieliniowości współczynnika przewodnictwa cieplnego.*

W części drugiej należy przyjąć, że współczynnik przewodnictwa cieplnego między prętem a olejem zależy od różnicy temperatur. Współczynnik przewodnictwa cieplnego  $h$  między prętem a ciecą opisany jest poniższymi zależnością i danymi pomiarowymi. Proszę zwrócić uwagę, że współczynnik jest nieliniowy i zależy od bieżącej różnicy temperatur. Co więcej, dane tego współczynnika mamy udostępnione w postaci charakterystyki pomiarowej (nie mamy wyrażenia algebraicznego!). Takie dane należy aproksymować, lub interpolować aby można było je wykorzystać w symulacji.

$$h = f_h(\Delta T) = f_h(T_b - T_w)$$

$\Delta T [{}^{\circ}\text{C}]$	-1500	-1000	-300	-50	-1	1	20	50	200	400	1000	2000
$h [W \cdot m^{-2}]$	178	176	168	161	160	160	160.2	161	165	168	174	179

Tabela 2. Dane pomiarowe współczynnika przewodnictwa



Rys.2. Charakterystyka współczynnika przewodności cieplnej  $h$  między prętem a olejem

W symulacji należy przyjąć temperaturę początkową pręta  $T_b(0) = 1200 {}^{\circ}\text{C}$ , a temperaturę początkową oleju chłodzącego  $T_w(0) = 25 {}^{\circ}\text{C}$ .

W ramach niniejszego zadania należy samodzielnie zaimplementować trzy algorytmy pozwalające znaleźć przybliżenie współczynnika przewodnictwa cieplnego  $h$  na podstawie danych z tabeli i wykorzystać te przybliżenia w symulacji.

- dowolnie wybrany algorytm interpolacji wielomianowej (np. Lagrange, Newton, itp.),
- algorytm aproksymacji wielomianowej metodą najmniejszych kwadratów (należy eksperymentalnie dobrać optymalny stopień wielomianu na podstawie sumarycznego błędu odniesionego do danych pomiarowych z tabeli)
- algorytm wykorzystujący funkcje sklejane 3go stopnia (Uwaga! Wprowadzony w podręczniku algorytm funkcji sklejanych zakłada równoodległe dane pomiarowe. Takie równoodległe dane należy samodzielnie wygenerować na podstawie załączonej tabeli dowolnie wybraną metodą. Proszę ocenić w raporcie zastosowanie przedstawionego w podręczniku algorytmu do niniejszego problemu z punktu widzenia praktycznego!)

Proszę zaprojektować i przeprowadzić eksperiment badawczy mający na celu wybór najlepszej metody aproksymacji.

Podpowiedź: Warto wykorzystać definicje błędu średniego aproksymacji i interpolacji, błędy maksymalnego. Warto wykorzystać metody graficzne - wizualizacji przebiegów w celu wyboru optymalnego rozwiązania. Warto zwrócić uwagę na błąd względny i bezwzględny.

Proszę przedstawić plan eksperimentu, skrypt wykorzystany do jego realizacji, wyniki oraz interpretację.

### Część 3

*Cel badawczy: Należy sprawdzić jaki jest wpływ modelu aproksymującego charakterystykę współczynnika  $h$  na wyniki symulacji rozkładu temperatury – czyli jaka jest wrażliwość modelu na metodę.*

Należy zrobić to wyznaczając przebiegi temperatur dla kilku wybranych przypadków chłodzenia. Wykresy oraz dane należy następnie przedstawić w taki sposób aby możliwe było porównanie oraz wykonanie analizy porównawczej.

Odnosząc się do wyników pomiarowych proszę wybrać najlepsze rozwiązanie i potraktować je jako referencyjne.

Proszę zapisać w raporcie wnioski dotyczące takiej analizy odnosząc się bezpośrednio do przebiegów i wykresów.

### Część 4.

Proszę wyznaczyć minimalną wartość masy oleju chłodzącego niezbędną do wychłodzenia pręta o poniższych parametrach po czasie t=0.7 s do temperatury 125 stopni. (czyli jak dużo potrzebujemy oleju aby wychłodzić pręt w miarę szybko do zadanej temperatury.)

Do rozwiązania tego zadania należy wykorzystać metodę Newtona-Raphsona, która w przypadku niniejszego zadania przyjmie postać:

$$m_w^{(i+1)} = m_w^{(i)} - \frac{T_b(m_w^{(i)})}{T'_b(m_w^{(i)})}$$

Do wyznaczenia wartości pochodnej należy użyć jej numerycznego przybliżenia korzystając z wzoru:

$$T'_b(m_w) = \left. \frac{dT_b}{dm_w} \right|_{t=0.7s} \approx \frac{T_b(m_w + \Delta m_w) - T_b(m_w)}{\Delta m_w},$$

gdzie  $\Delta m_w$  to jakaś mała różnica masy. W praktyce oznacza, że należy wykonać symulację za pomocą symulatora z Zadania 1 i ‘odczytać’ z niej wartość temperatury pręta po 0.7 sekundach ( $T_b(m_w)$ ). Następnie należy powtórzyć symulacje dla masy płynu chłodzącego zmienionej o  $\Delta m_w$  i odczytać wartość  $T_b(m_w + \Delta m_w)$ . W ten sposób możemy łatwo przybliżyć pochodną.

Pozostałe parametry modelu:

$h = h(\Delta T)$ ; % proszę użyć dane stabularyzowane i aproksymowane dla optymalnej metody

$A = 0.0109$ ;

$mb = 0.25$ ;

$mw = ?$ ;

$cb = 0.29$ ;

$cw = 4,1813$ ;

Pozostałe wymagania:

W ramach projektu należy samodzielnie zaimplementować symulator zjawiska oraz wszystkie algorytmy numeryczne. Symulator musi wykorzystywać samodzielnie zaimplementowane algorytmy – nie można używać realizujących je wbudowanych w MATLABa funkcji:

1. Całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych metodami Eulera oraz Zmodyfikowaną-Eulera. Należy porównać dokładność rozwiązania obiema metodami!
2. Wyznaczanie aproksymacji oraz interpolacji funkcjami sklejonymi (zgodnie z podręcznikiem OKNO; uwaga – trzeba samodzielnie przetworzyć dane z tabeli na węzły równoodległe – to jest zadanie mało profesjonalne, i w praktyce się tego nie stosuje, ponieważ istnieją metody interpolacji funkcjami sklejonymi dla węzłów nierównoodległych znacznie skuteczniejsze od metody z podręcznika :-) - patrz funkcja spline w MATLABie, ale to jest zadanie ćwiczeniowe!)

Poniżej przedstawiony jest dla ułatwienia szkielet programu.

```
% tutaj jest funkcja 'main', inicjujaca zmienne, warunki poczatkowe oraz rysujaca wykresy
function chlodzenie_preta
...
end

% rownania stanu (musi zwracac wartosci pochodnych dla zadanych wartosci function dy = f(t,
x)
...
end

% model wspolczynnika przewodnictwa cieplnego (tutaj nalezy zadac dane tabulatoryczne
% opisujace wspolczynnik przewodnictwa, oraz wykorzystac samodzielnie zaimplementowane
% funkcje sklejane oraz aproksymacje wielomianowa)
function h = fh(Tb, Tw)
end

% implementacja rozwiazania metoda eulera function [t, y] = euler(func,tspan,h,x0)
end

% implementacja rozwiazania metoda zmodyfikowana eulera function [t, y] =
% euler_modified(func,tspan,h,x0) end

% własna implementacja funkcji sklejanych (można zrobić to lepiej wcześniej obliczając
% wspolczynniki funkcji sklejanych)
function x = myspline(x,y, xx)
end

% własna implementacja aproksymacji wielomianowej (można zrobić lepiej wcześniej
% wyznaczając wspolczynniki wielomianu aproksymującego)
function x = myapprox(x,y, order, xx)
end
```

Co powinno zawierać sprawozdanie?

1. Opis zjawiska – własnymi słowami napisane powtórzenie opisu z instrukcji
2. Podsumowanie współczynników – w każdym miejscu, gdzie prezentujemy wyniki musimy przedstawić informacje o zastosowanych współczynnikach
3. Kod źródłowy programu – program powinien być krótko opisany
4. Plany badawcze, wyniki w tabelach, wykresy oraz interpretację wyników do wszystkich części projektu.
5. Analizę dokładności rozwiązania w zależności od przyjętych współczynników fizycznych. Tutaj należy wykonać analizę w szczególności:
  - jak zmienia się rozwiązanie gdy stosujemy stały średni współczynnik przewodnictwa cieplnego  $h$ ,
  - jak zmienia się rozwiązanie przy niewielkich zmianach poszczególnych współczynników (obliczamy w ten sposób współczynnik uwarunkowania).
6. Analizę dokładności rozwiązania w zależności do przyjętych parametrów numerycznych. W szczególności należy przedstawić:
  - porównanie rozwiązania uzyskanego różnymi metodami Eulera i zmodyfikowanego Eulera i określić przy jakiej wartości kroku całkowania różnica między wynikami obu metod jest zauważalna,
  - porównanie wyników (wykresów) w zależności od przyjętego kroku całkowania  $h$ .

# Załącznik 1

Przykładowe rozwiązanie przebiegu czasowego dla parametrów:

$$h = 160 \left[ \frac{J}{s \cdot m^2} \right];$$

$$A = 0.0109 [m^2];$$

$$mb = 0.2 \text{ kg};$$

$$mw = 2.5 \text{ kg};$$

$$cb = 3.85 \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right];$$

$$cw = 4,1813 \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right];$$

$$T_b(0) = 1200,$$

$$T_w(0) = 25.$$

Proszę nie odnosić się do tego rozwiązania w raporcie! To rozwiązanie zamieszczone jest tutaj tylko i wyłącznie w celu ułatwienia szybkiej weryfikacji czy to co uzyskujecie ma sens :-). W raporcie do celów weryfikacji uwzględniamy wyłącznie parametry, które możemy faktycznie uzyskać fizycznymi pomiarami.

Przykładowe rozwiązanie:

