

## 7 Rozdział

Strona: [LeIA](#)

Kurs: Metody numeryczne (2025Z)

Książka: 7 Rozdział

Wydrukowane przez użytkownika: Kinga Kondraciuk

Data: niedziela, 30 listopada 2025, 14:15

## Spis treści

- 1. Równania nieliniowe**
- 2. Wprowadzenie**
- 3. Izolacja pierwiastków**
- 4. Uwagi o dokładności**
- 5. Rząd metody**
- 6. Metoda bisekcji**
- 7. Metoda siecznych**
- 8. Metoda stycznych - Newtona**
- 9. Pierwiastki wielokrotne**
- 10. Układy równań nieliniowych**

## 1. Równania nieliniowe

Równanie nieliniowe np. równanie kwadratowe, logarytmiczne, wykładnicze, trygonometryczne, będziemy zapisywać ogólnie jako równanie postaci:

$$f(x) = 0 \quad (7.1.1)$$

gdzie funkcja  $f$  jest funkcją nieliniową zmiennej rzeczywistej  $x$  i jest funkcją ciągłą na pewnym przedziale skończonym lub nieskończonym  $(a, b)$ . Zwróćmy szczególną uwagę na zero z prawej strony równania, które jest istotne z punktu widzenia większości istniejących algorytmów. Z uwagi na tą postać (zero z prawej strony) często mówi się, że poszukujemy **zer** równania, czyli pierwiastków, dla których wartość wyrażenia z lewej strony przyjmuje wartość zero. Jedną z możliwych metod rozwiązywania równań nieliniowych jest metoda graficzna, polegająca na narysowaniu przebiegu funkcji z lewej strony równania i odczytanie wartości  $x$  dla których przebieg przecina oś  $OX$ .

## 2. Wprowadzenie

Poznane metody analityczne rozwiązywania równań nieliniowych dotyczą pewnej wąskiej klasy funkcji  $f(x)$ , np. wielomianów stopnia nie większego niż czwarty, natomiast olbrzymiej klasy równań nieliniowych - głównie równań przestępnych - nie da się rozwiązać dokładnie. Potrzebne są metody przybliżone, które umożliwiają znalezienie pierwiastków rzeczywistych tych równań z góry podaną dokładnością. Niektóre z tych metod, oraz problemy z nimi związane, będą przedstawione w tym rozdziale.

### Definicja

Liczبę rzeczywistą  $p$ , która spełnia równanie  $f(x) = 0$  tzn. dla której  $f(p) = 0$ , nazywamy pierwiastkiem rzeczywistym równania lub zerem funkcji  $f$ .

### Definicja

Liczبę rzeczywistą  $p$  nazywamy  $k$ - krotnym pierwiastkiem równania  $f(x) = 0$  lub  $k$ -krotnym miejscem zerowym funkcji  $f$ , jeśli dla wartości  $p$  funkcja i jej pochodne do  $k-1$  rzędu włącznie przyjmują wartość zero, natomiast wartość pochodnej  $k$ -tego rzędu jest różna od zera , tzn:

$$f(p) \equiv 0, \quad f'(p) \equiv 0, \quad \dots \quad f^{(k-1)}(p) \equiv 0, \quad f^{(k)}(p) \neq 0$$

Przedstawione poniżej przybliżone metody rozwiązywania równań nieliniowych, można stosować jedynie pod warunkiem, że znany jest pewien przedział, w którym znajduje się jeden i tylko jeden pierwiastek rzeczywisty danego równania. Taki przedział będziemy nazywać *przedziałem izolacji* dla równania  $f(x) = 0$ . Przedziały izolacji, przed przystąpieniem do rozwiązywania równań, będziemy wyznaczać graficznie.

Wybrane przybliżone metody rozwiązywania równań nieliniowych są metodami iteracyjnymi, polegającymi na budowaniu ciągu przybliżeń liczb rzeczywistych:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

zbieżnego do szukanego rozwiązania - pierwiastka  $p$ - równania  $f(x) = 0$ . Oczywiście, aby ciąg  $\{x_n\}$  był zbieżny do pierwiastka  $p$  niezbędne są na ogół dodatkowe, oprócz ciągłości, założenia o funkcji  $f$ , które będą podane przy każdej metodzie osobno.

Ograniczymy się do metod jednokrokowych, polegających na znalezieniu następnego przybliżenia  $x_{n+1}$ , mając dane jego poprzednie przybliżenie  $x_n$ , oraz do metod dwukrokowych, polegających na znalezieniu następnego przybliżenia  $x_{n+1}$ , mając obliczone dwa poprzednie  $x_{n-1}$  i  $x_n$ . Formuły określające ciągi przybliżeń można zapisać ogólnie w postaci:

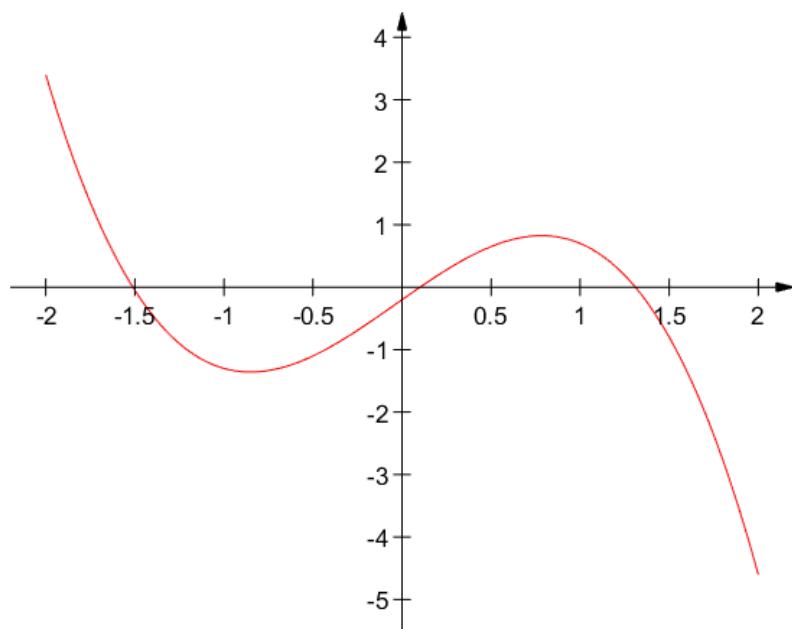
- $x_{n+1} = F(x_n)$  - dla metod jednokrotnych,
- $x_{n+1} = F(x_{n-1}, x_n)$  - dla metod dwukrotnych.

Będziemy korzystać z następujących twierdzeń:

### Twierdzenie

Jeżeli funkcja  $f$  ciągła w przedziale  $[a, b]$  ma na końcach tego przedziału różne znaki tzn.  $f(a)f(b) < 0$ , to wewnątrz tego przedziału istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania  $f(x) = 0$ .

Ilustracja twierdzenia: Na rysunku funkcja jest ciągła o postaci  $f(x) = -0.2 + 2x - 0.1x^2 - x^3$  i  $f(b) < 0$ ,  $f(a) > 0$ . Funkcja przecina osią  $OX$  trzy razy, ma zatem trzy pierwiastki rzeczywiste w przedziale  $a, b$ .

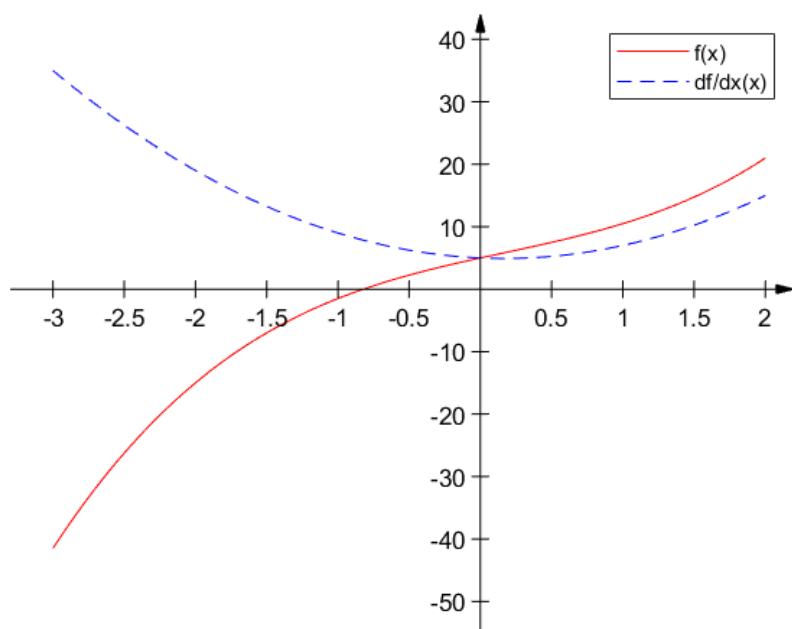


Rys 7.1. - Wykres funkcji ciągłej  $f$  zmieniającej znak trzy razy w przedziale  $[-2, 2]$ .

### Twierdzenie

Jeżeli w przedziale  $(a, b)$  istnieje pochodna  $f'(x)$  i nie zmienia znaku w tym przedziale tzn. albo jest w nim cała czas dodatnia albo ujemna, a  $f(a)f(b) < 0$ , to równanie  $f(x) = 0$  ma dokładnie jeden pierwiastek jednokrotny.

Ilustracja twierdzenia: Na rysunku funkcja  $f(x) = 5 + 5x - 0.5x^2 + x^3$  jest ciągła, ma ciągłą pochodną  $f'(x) = 5 - x + 3x^2$ , która jest cały czas dodatnia w  $a, b$ , tzn.: funkcja w  $a, b$  rośnie, oraz  $f(a)f(b) < 0$ , raz tylko wykres funkcji przecina się z osią  $OX$ .



Rys. 7.2. Wykres funkcji ciągłej  $f$  (linia czerwona), zmieniającej znak raz w przedziale  $[-3, 2]$ , oraz jej pochodnej  $f'(x)$ , która w całym przedziale jest dodatnia (przerywana linia niebieska).

### 3. Izolacja pierwiastków

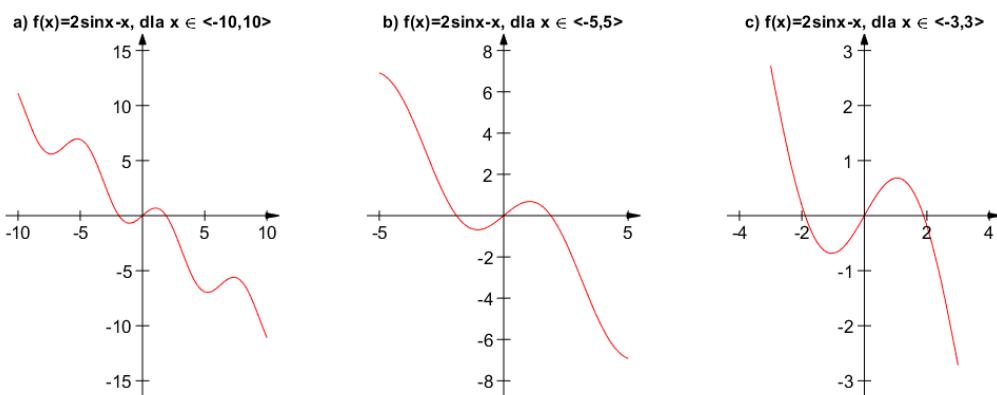
Najprostszą metodą przekonania się czy równanie  $f(x) = 0$  posiada pierwiastki rzeczywiste jest narysowanie funkcji  $f$  i osi  $OX$ , i przekonanie się czy funkcja przecina się z osią. Można tym sposobem znaleźć przedziały, które się nie przecinają, a w których znajduje się po jednym pierwiastku danego równania. Zilustrujemy to na przykładzie.

#### Przykład 7.1

##### Przykład

Znaleźć przedziały izolacji równania:  $2 \sin(x) - x = 0$

Rysujemy w kartezjańskim układzie współrzędnych funkcję  $f$  na możliwie dużym przedziale, a potem tak zauważamy ten przedział, aby nie stracić pierwiastków - aby wszystkie nadal były na wykresie. Rysunek 8.3a) przedstawia funkcję w przedziale  $<-10, 10>$ , rysunek 8.3b) w przedziale  $<-5, 5>$ , a rysunek 8.3c) w przedziale  $<-3, 3>$ .



**Rys. 7.3. Izolacja pierwiastków równania  $f(x) = 0$ , funkcja  $f(x)$ .**

Jak widać na rysunku funkcja  $f(x)$  dąży do nieskończoności, gdy argumenty dążą do minus nieskończoności i dąży do minus nieskończoności, gdy argumenty dążą do nieskończoności. Można przyjąć, że wszystkie pierwiastki danego równania tzn. wszystkie punkty przecięcia funkcji z osią  $Ox$ , są w przedziale  $<-3, 3>$ . Widzimy, że równanie ma pierwiastek  $x = 0$ , co łatwo sprawdzić, drugi pierwiastek w przedziale np.  $(1, 5; 2, 5)$  i trzeci pierwiastek w przedziale np.  $(-2, 5; -1)$ . Zatem równanie ma trzy przedziały izolacji  $(-2, 5; -1)$ ,  $(-0, 5; 0, 5)$  i  $(1, 2, 5)$ . Oczywiście widać, że przedziały izolacji nie są wyznaczone jednoznacznie, można podać je w postaci:  $(-2, 2; -1, 3)$ ,  $(-0, 2; 0, 2)$  i  $(1, 3; 2, 2)$ . Więcej pierwiastków równanie nie posiada.

Inną metodą graficzną jest rysowanie równania  $f(x) = 0$  za pomocą dwóch funkcji, jeśli równanie da się przedstawić w postaci różnicicy funkcji  $g(x) - h(x) = 0$ . Punkty przecięcia funkcji  $g$  i  $h$ , są pierwiastkami równania  $f(x) = 0$ .

#### Przykład 7.2

##### Przykład

Ponieważ rozpatrywane równanie można przedstawić jako równanie:

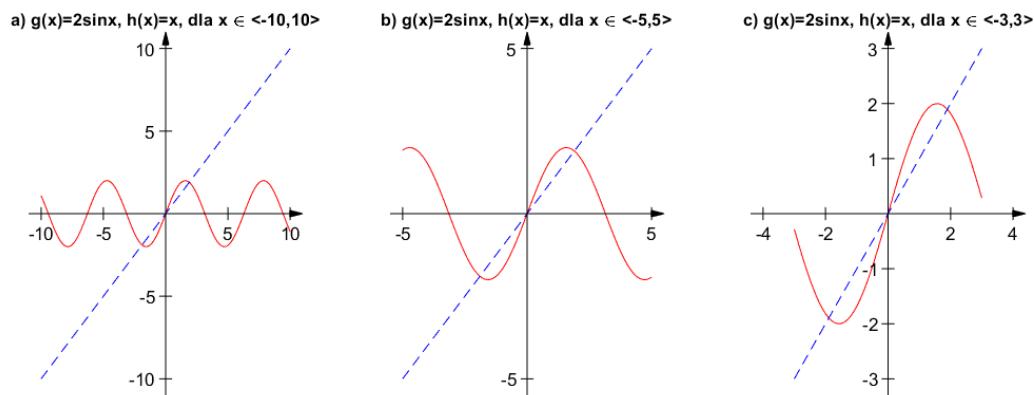
$$2 \sin(x) = x$$

to oznaczając przez  $g(x) = 2 \sin(x)$ , a przez  $h(x) = x$ , narysujemy te funkcje w takim samym przedziale jak poprzednio funkcję  $f$ .

Funkcje  $g$  i  $h$  przecinają się w zerze i dla tych samych  $x$ , w których funkcja  $f$  przecina się z osią  $OX$ . Funkcje te nie przecinają się w innym przedziale, bo funkcja  $g$  jest funkcją ograniczoną o wartościach w przedziale  $[-2, 2]$ , a funkcja  $h$  rośnie na prawo do nieskończoności, a na

lewo maleje do minus nieskończoności.

Rysunek 8.4a) przedstawia funkcje w przedziale  $\langle -10, 10 \rangle$ , rysunek 8.4b) w przedziale  $\langle -5, 5 \rangle$ , a rysunek 8.4c) w przedziale  $\langle -3, 3 \rangle$ .



Rys. 7.4. Izolacja pierwiastków równania  $g(x) = h(x)$ .

## 4. Uwagi o dokładności

Istotnym problemem w metodach iteracyjnych jest decyzja, którą iterację wziąć za przybliżenie pierwiastka równania  $f(x) = 0$ , co ma decydować o zakończeniu postępowania iteracyjnego (wyboru warunku "stopu"), lub jak się da oszacować przyjęte przybliżenie w stosunku do nieznanej dokładnej wartości pierwiastka. Do każdej metody będzie ten problem rozważany osobno, tutaj podamy jak można wykorzystać następujące twierdzenie:

### Twierdzenie

Niech  $p$  będzie dokładną, a  $x^*$  przybliżoną wartością pierwiastka równania  $f(x) = 0$ , przy czym obie te liczby znajdują się w przedziale domkniętym  $[a, b]$ . Jeśli  $f$  posiada pochodną i jeśli dla  $x$  z przedziału  $[a, b]$  zachodzi nierówność  $|f'(x)| \geq m_1 \geq 0$  to prawdziwe jest oszacowanie :

$$|x^* - p| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1} \quad (1)$$

**Dowód.** Stosując wzór Lagrange'a otrzymujemy:  $f(x^*) - f(p) = (x^* - p)f'(c)$  gdzie wartość  $c$  jest liczbą między  $p$  i  $x^*$ .

Ponieważ  $f(p) = 0$  i  $f'(c) \geq m_1$  to  $|f(x^*) - f(p)| = |f(x^*)| \geq m_1|x^* - p|$  zatem  $|x^* - p| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1}$ .

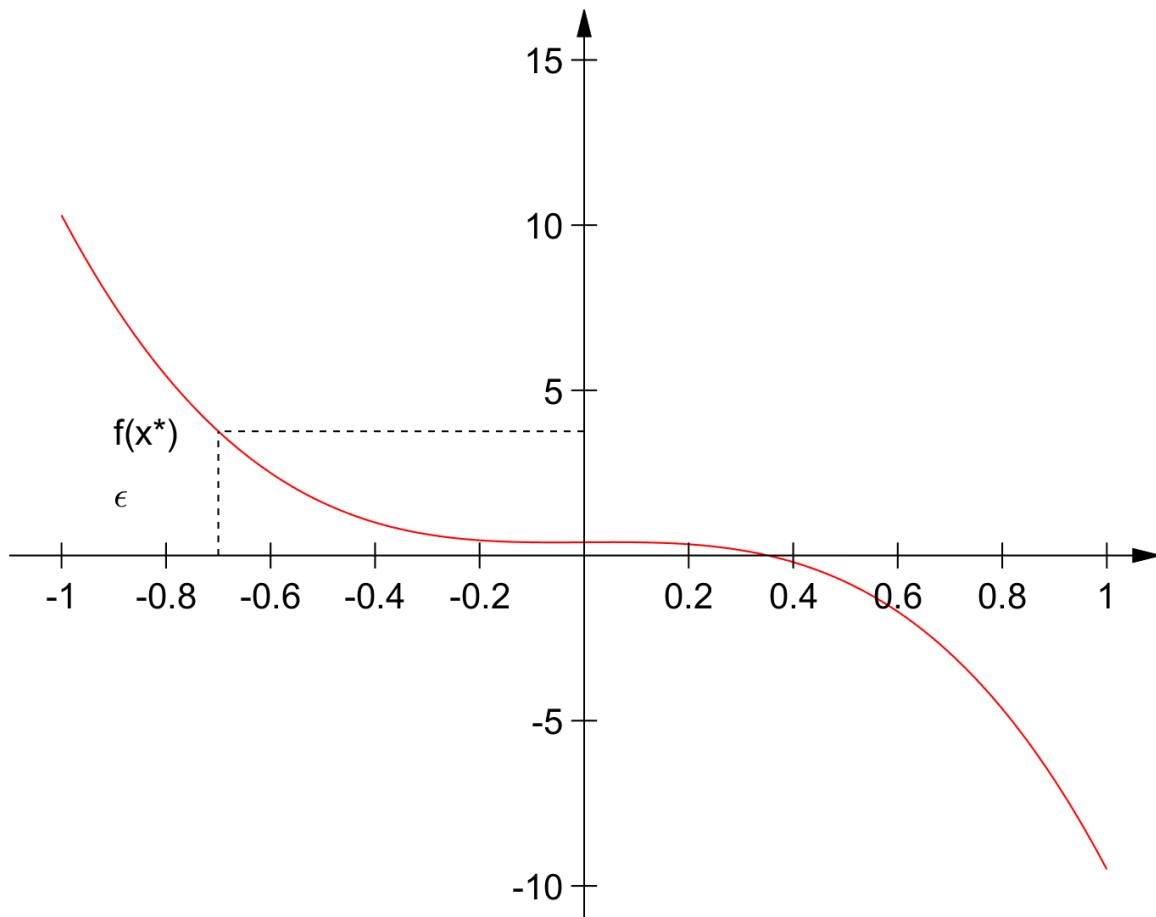
### Przykład 7.3

### Przykład

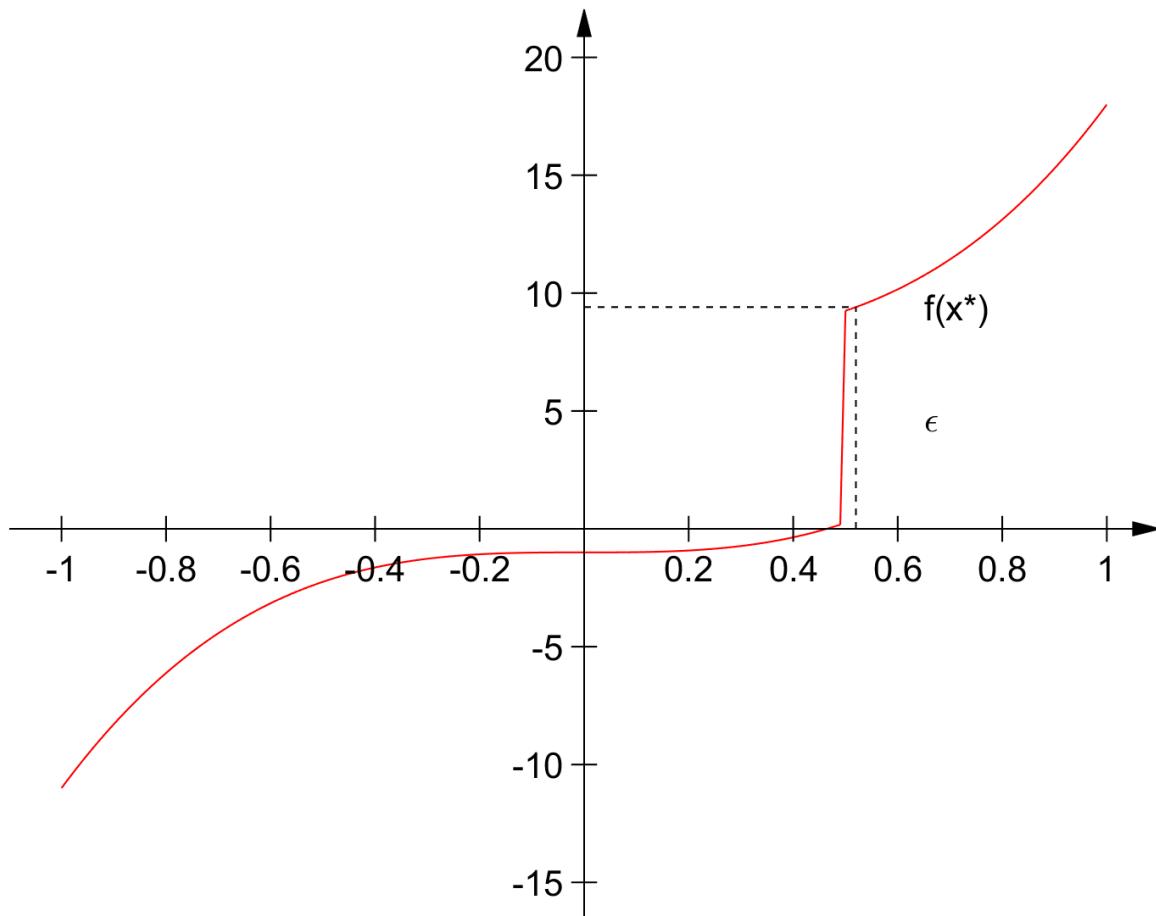
Rozpatrzymy równanie  $x^4 - x - 1 = 0$ . Weźmy za  $x^* = 1.22$ . Oszacujemy błąd bezwzględny tego przybliżenia. Mamy  $f(x^*) = -0.0047$ . Dla  $x^* = 1.23$  wartość funkcji  $f(x^*) = 0.0588$ , dokładny pierwiastek  $p$  jest zatem w przedziale  $(1, 22; 1.23)$ . Pochodna  $f'(x) = 4x^3 - 1$  jest w tym przedziale rosnąca, a najmniejszą wartość przyjmuje dla  $x=1.22$ , zatem  $m_1 = 4 \cdot (1.22)^3 - 1 = 6.264$  więc  $|x^* - p| \leq \frac{0.0047}{6.264} < 0.001$ .

### Uwaga

Niekiedy w praktyce ocenia się dokładność przybliżenia pierwiastka  $x^*$  według tego, czy liczba  $|f(x^*)|$  jest mała, czy duża. Jeśli jest mała, to uważa się że  $x^*$  jest dobrym przybliżeniem dokładnej wartości pierwiastka  $p$  i na odwrót, jeśli  $|f(x^*)|$  jest duże to  $x^*$  zostaje uznane za złe przybliżenie. Jak widać z następujących rysunków takie podejście nie zawsze jest prawidłowe. Nie należy również zapominać, że po pomnożeniu równania  $f(x) = 0$  przez dowolną liczbę  $N$  różną od zera, otrzymujemy równanie równoważne, a liczbę  $Nf(x^*)$  można uczynić dowolnie dużą lub dowolnie małą, dzięki doborowi  $N$ .



Rys. 7.5. Sytuacja, gdy  $x^*$  nie jest bliskie  $p$ .



**Rys. 7.6.** Sytuacja gdy  $f(x^*)$  nie jest bliskie zeru.

W dalszych rozważaniach, aby zapobiec takim opisanym wyżej sytuacjom, będziemy zakładać brak punktów przegięcia funkcji  $f$  w przedziałach izolacji, tzn., tak będziemy dobierać (zawężać) przedział izolacji, aby druga pochodna funkcji opisującej lewą stronę równania miała stały znak w rozpatrywanym przedziale.

## 5. Rząd metody

Podstawowym warunkiem, jaki powinna spełniać dana metoda jest zbieżność ciągu iteracyjnego do pierwiastka równania. Oczywiście, tym lepsza jest metoda im szybciej ciąg przybliżeń jest zbieżny do  $p$ . Szybkość zbieżności można określić za pomocą dwóch wielkości:

- rzędu metody,
- i stałej asymptotycznej C błędu metody.

Definicja. Mówimy, że metoda jest rzędu  $r$ , jeśli istnieje granica :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|^r} = C \neq 0 \quad (7.4.1)$$

Liczba  $C$  nazywamy stałą asymptotyczną błędu metody.

*Uwagi:*

1. Jeśli  $r = 1$  i  $C < 1$  to  $x_n$  dąży do  $p$  dla dowolnego  $x_0$  - punktu startowego.
2. Jeśli  $r > 1$  i  $x_0$  jest dostatecznie bliskie  $p$  to  $x_n$  zbiega do  $p$ .
3. Im większy jest rząd metody i im mniejsza jest stała asymptotyczna błędu, tym szybciej ciąg jest zbieżny do pierwiastka.

Zilustrujemy te uwagi na przykładzie.

### Przykład 7.4

#### Przykład

Założymy, że metoda jest rzędu 2, ze stałą asymptotyczną równą 5. Czyli :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|^2} = 5$$

Dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje takie  $N$ , że dla  $n > N$  spełnione są nierówności:

$$5|x_n - p|^2 - \epsilon \leq |x_{n+1} - p| \leq 5|x_n - p|^2 + \epsilon$$

Oznacza to, że różnica pomiędzy  $(n+1)$ -szym przybliżeniem  $x_{n+1}$  i dokładnym pierwiastkiem  $p$  może przyjmować, dla wystarczająco dużych  $n$  wartości dowolnie mało różniące się od  $5|x_n - p|^2$

$$|x_{n+1} - p| \approx 5|x_n - p|^2$$

Przyjmijmy, że obliczyliśmy przybliżenie  $x_n$  pierwiastka, różniące się od niego o mniej niż 0,1 tzn:  $|x_n - p| < 0.1$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - p| &\cong 5 \cdot (0,1)^2 = 0.05 \\ |x_{n+2} - p| &\cong 5 \cdot (0.05)^2 = 0.0025 \\ |x_{n+3} - p| &\cong 5 \cdot (0.0025)^2 = 0.00003125 \end{aligned}$$

Widzimy więc, że różnice pomiędzy kolejnymi przybliżeniami i pierwiastkiem dokładnym szybko maleją. Założymy, że metoda jest rzędu 3, a stała asymptotyczna równa się 5. Zakładając, że  $|x_n - p| < 0.1$  otrzymujemy teraz:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - p| &\cong 5 \cdot (0,1)^3 = 0.005 \\ |x_{n+2} - p| &\cong 5 \cdot (0.005)^3 = 0.000000625 \end{aligned}$$

Zatem metoda rzędu 3 jest wyraźnie szybsza od metody rzędu 2.

Gdyby wziąć metodę rzędu 2 ze stałą  $C = 1$ , to przy takiej samej przyjętej dokładności między  $n$ -tym przybliżeniem a pierwiastkiem:  $|x_n - p| < 0.1$  dostajemy:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - p| &\cong 0.01 \\ |x_{n+2} - p| &\cong 0.0001 \\ |x_{n+3} - p| &\cong 0.0000001 \end{aligned}$$

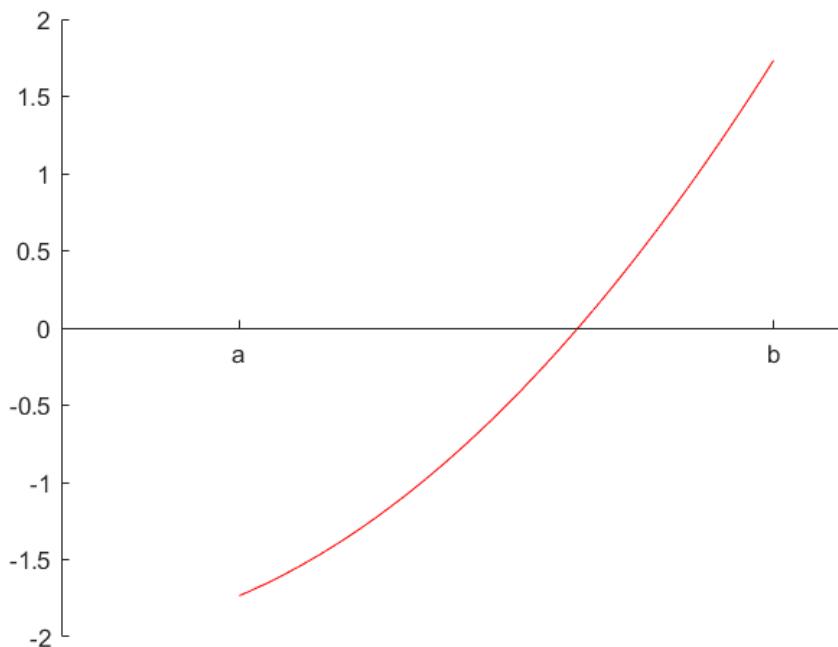
Metoda rzędu 2 ze stałą 1 jest nieco szybsza od metody rzędu 2 ze stałą 5, ale wolniejsza od metody rzędu 3 ze stałą większą.



## 6. Metoda bisekcji

Omówimy teraz najprostsze metody znajdowania pierwiastków równania nieliniowego  $f(x) = 0$ . Podamy za każdym razem warunki wystarczające i konieczne, aby ciąg iteracyjny był zbieżny do szukanego pierwiastka. W każdej z omawianych metod rozpatrujemy przedział izolacji  $(a, b)$  w którym znajduje się aktualnie szukany pierwiastek, jeśli pierwiastków jest więcej - więcej jest przedziałów izolacji, metodę stosujemy po kolejno do każdego przedziału izolacji osobno.

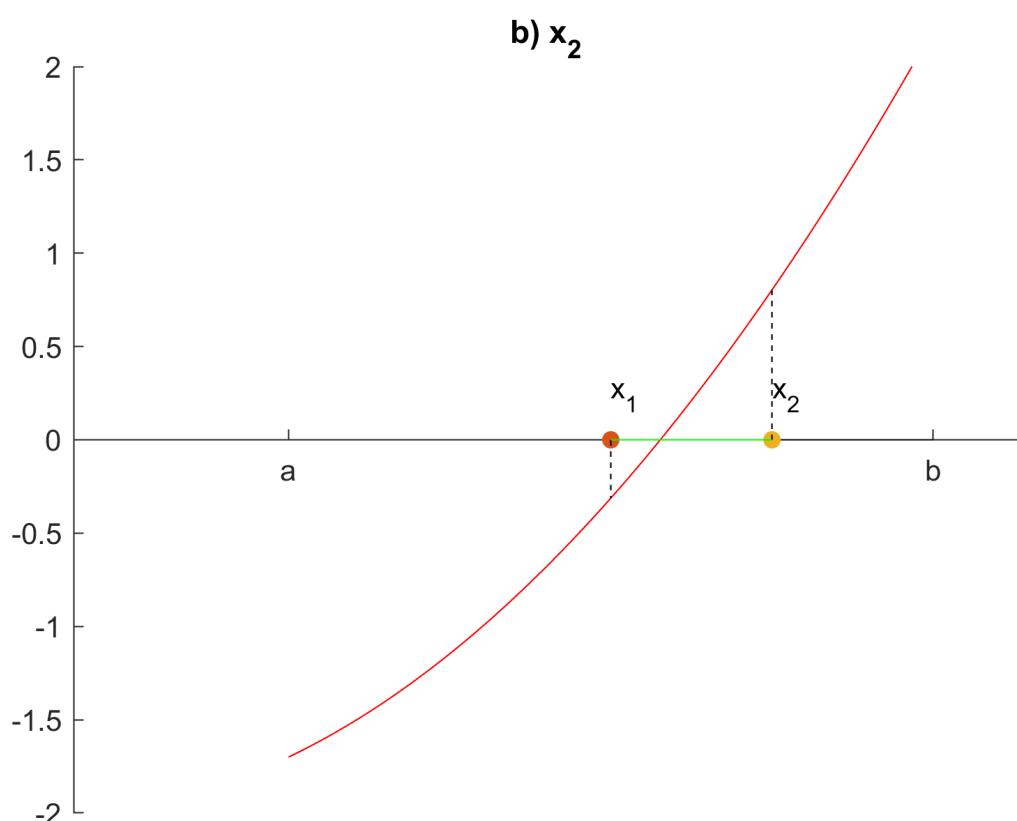
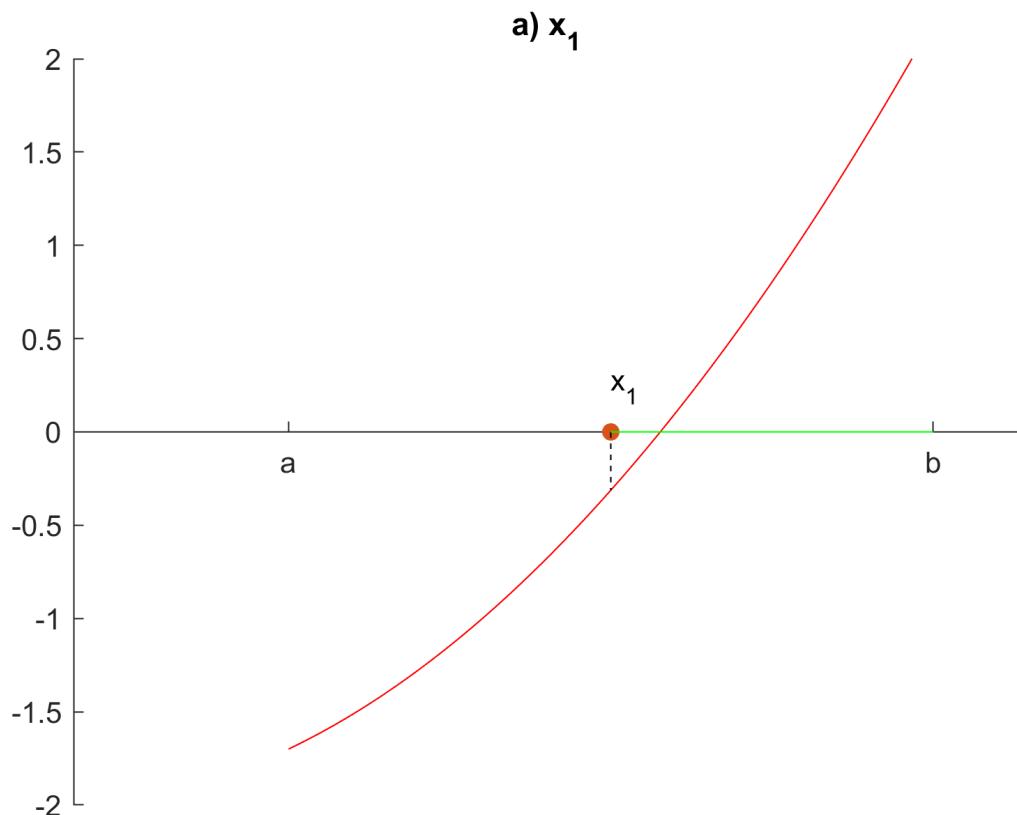
**Metoda bisekcji.** Założenia: Funkcja  $f$  jest funkcją ciągłą na  $[a, b]$ , oraz  $f(a)f(b) < 0$ .

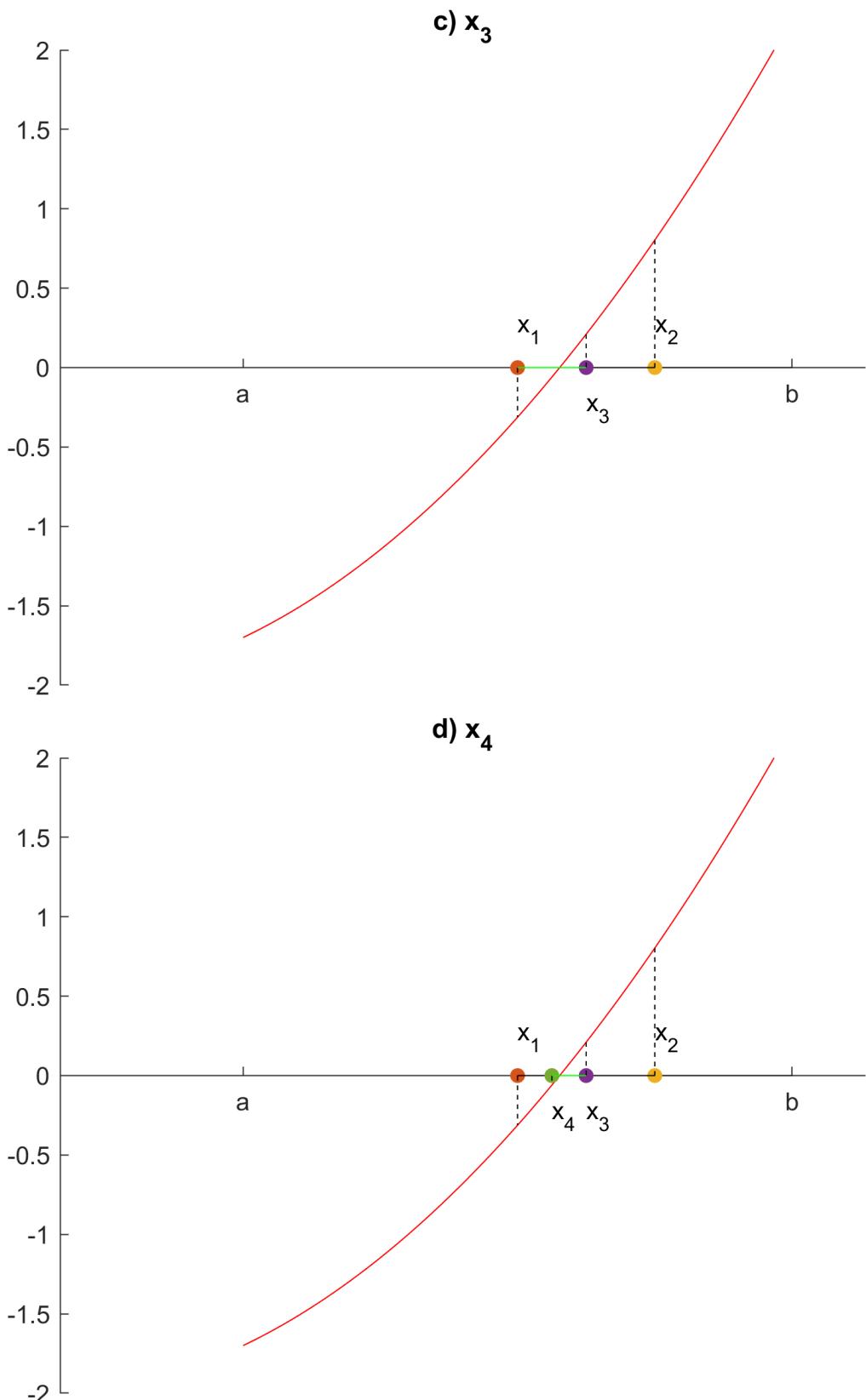


Rys. 7.7. W przedziale  $[a, b]$  jest jeden pierwiastek rzeczywisty równania  $f(x) = 0$ .

Opis metody: Dzielimy przedział  $[a, b]$  na połowy punktem:  $x_1 = \frac{a+b}{2}$

- a) (Rys. 7.8a) Wybieramy przedział, w którym funkcja zmienia znak, czyli w naszym przypadku  $[x_1, b]$ ,
- b) (Rys. 7.8b) Dzielimy go na połowę punktem  $x_2$  i wybieramy znów przedział, w którym funkcja zmienia znak, w naszym przypadku  $[x_1, x_2]$ ,
- c) (Rys. 7.8c) Dzielimy go na połowę punktem  $x_3$ , wybieramy przedział  $[x_1, x_3]$ ,
- d) (Rys. 7.8d) dzielimy znów na pół punktem  $x_4$  wybieramy przedziałik  $[x_4, x_3]$  itd.





Rys. 7.8. Kolejne cztery iteracje szukanego pierwiastka.

Jeśli  $f(x_1) = 0$  to  $x_1$  jest pierwiastkiem równania. Jeśli  $f(x_1)$  jest różne od zera to z otrzymanych dwóch podprzedziałów  $[a, x_1]$  i  $[x_1, b]$  wybieramy ten, w którym funkcja  $f$  zmienia znak. Z kolei ten przedział dzielimy na połowy punktem  $x_2$  i badamy wartość funkcji w  $x_2$  oraz znaki w otrzymanych podprzedziałach, wybierając do dalszych obliczeń zawsze ten, w którym funkcja zmienia znak. Otrzymujemy albo po  $n$  krokach  $f(x_n) = 0$  albo ciąg

podprzedziałów takich, że  $f(x_n)f(x_{n+1}) < 0$  przy czym  $x_n, x_{n+1}$  są końcami przedziału, a jego długość  $|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{2^n}(b-a)$ .

Ponieważ, z konstrukcji, lewe końce przedziałów tworzą ciąg niemalejący i ograniczony z góry (przez  $p$ ), a prawe końce przedziałów tworzą ciąg nieskończony i ograniczony dołu (przez  $p$ ), to istnieje granica wspólna dla tych ciągów równa  $p$ .

Podstawową zaletą tej metody jest jej prostota i pewność, że w każdej kolejnej iteracji szukany pierwiastek leży między dwiema wartościami zmiennej  $x$ , dla których funkcja zmienia znak. Teoretycznie można uzyskać dowolną dokładność przy obliczeniach pierwiastka, stosować iterację tak dugo, aż

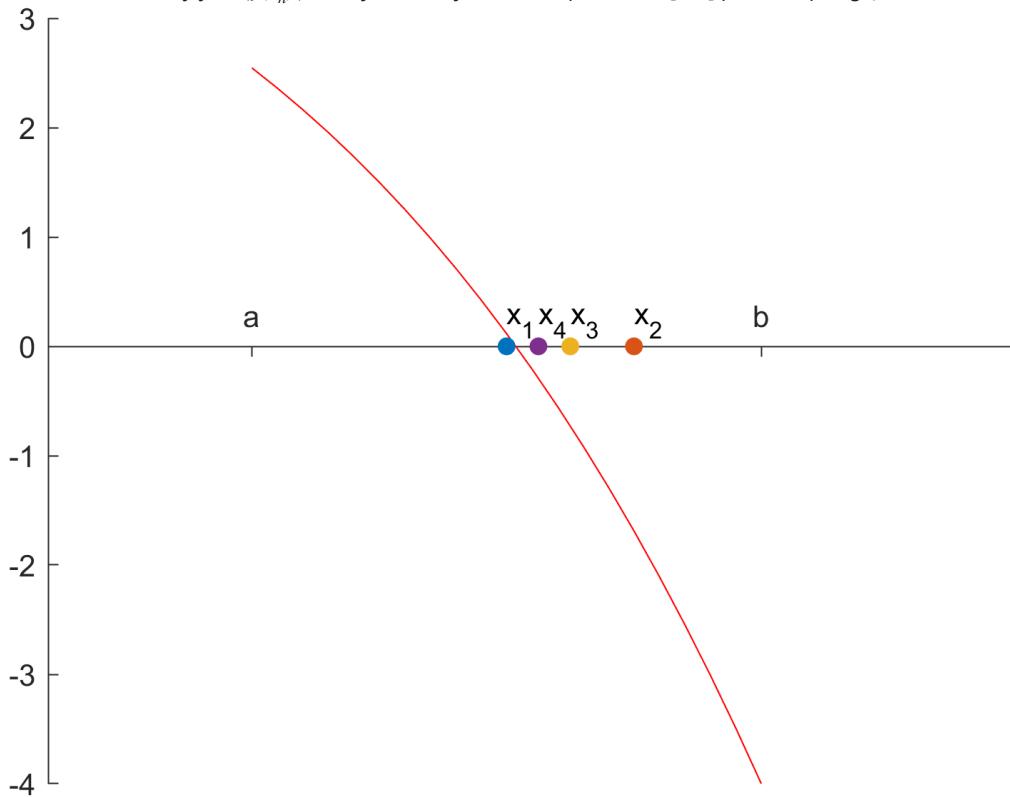
$$|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{2^n}(b-a) < \varepsilon \quad (7.5.1)$$

Jednak przy dużej ilości kroków, błędy zaokrągleń mogą nie dopuścić do otrzymania żądanej dokładności. Metoda ta jest wolno zbieżna, bo z konstrukcji wynika, że przedziały mają za każdym razem mniejszą długość tylko o połowę. Rząd metody bisekcji jest równy 1.

### Przykład 7.5

#### Przykład

Szukamy pierwiastka wielomianu  $f(x) = x^8 - 10x^6 + 5$  w przedziale  $[a, b]$ , gdzie  $a = 0.8, b = 1$  z dokładnością  $d = 0.0001$ , gdzie dokładność oznacza dla nas zakończenie iteracji jeśli  $|f(x_n)| < d$ , i jeśli funkcja nie ma w przedziale  $[a, b]$  punktów przegięcia.



Rys. 7.9. Ilustracja graficzna 4 iteracji.

Na rysunku pokazany jest wielomian w rozpatrywanym przedziale. Widać, że funkcja  $f$  nie ma punktów przegięcia w tym przedziale, i zmienia znak w  $[a, b]$ . Punkt  $x_1 = \frac{a+b}{2} = 0.9$ .

Otrzymujemy następujące wyniki, ciąg  $\{x_n\}$  dla  $j = 1, \dots, 13$

[ 0.9000 ]

```
0.9500
0.9250
0.9125
0.9062
0.9031
0.9047
0.9039
0.9035
0.9037
0.9036
0.9037
0.9036 ]
```

Ciąg  $\{x_n\}$  nie jest monotoniczny, oscyluje wokół pierwiastka  $p$  wielomianu  $f(x)$ .

Ostatnia iteracja daje nam pierwiastek z podaną dokładnością  $x_{13} = 0.903638$  i  $f(x_{13}) = 0.000016$ .

Jeśli warunkiem stopu będzie warunek  $|x_{n-2} - x_{n-1}| < d$  to dostaniemy jako pierwiastek 11-tą iterację  $x_{11} = 0.903613$  i wartość funkcji  $f: f(x_{11}) = 0.000771$ .

Oto skrypt w MATLABie rozwiązuający zadanie oraz generujący powyższy wykres

```
a=0.8;
b=1;
f = @(x) (x.^8)-10*x.^6+5;
xd = a:0.01:b;

% konfiguracja ładnego wykresu
close all
figure
set(gca,'visible','off')
axes('color', 'none', 'YAxisLocation', 'origin', 'XAxisLocation', 'origin')
hold on
plot(xd,f(xd),'r')
xlim([a-0.1*a,b+b*0.1*b]);
xticks([a, b])
xticklabels({'a','b'})

% w tej zmiennej zapamiętamy wyniki poszczególnych iteracji
X_i = []
d = 1e-4;
for i=1:100
    x = (a+b)/2
    X_i = [X_i x];

    % rysujemy tylko cztery pierwsze punkty
    if i < 5
        scatter(X_i,0,'filled');
        text(x,0.25, sprintf('x_%d',i))
    end

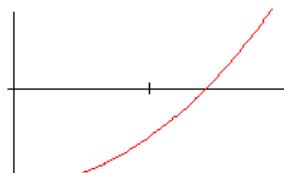
    % wybieramy przedział do kolejnej iteracji
    if (f(a)*f(x) < 0)
        b = x;
    else
        a = x;
    end

    % kryterium stopu procedury
    if (i>1) && (abs(X_i(end-1) - X_i(end))< d )
        break;
    end
end
X_i'
f(x)
```

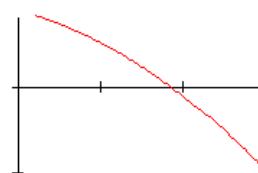


## 7. Metoda siecznych

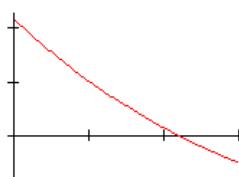
Założenia: Funkcja  $f$  jest klasy  $C^2(a,b)$ , zmienia znak w przedziale  $(a, b)$  oraz pochodne pierwsza i druga mają stały znak w rozpatrywanym przedziale. To znaczy, że w przedziale izolacji  $(a, b)$  może zachodzić któryś z czterech podanych na rysunkach przypadków:



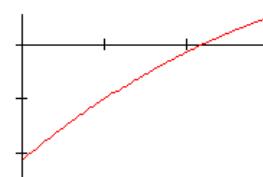
funkcja rośnie, jest wypukła



funkcja maleje , jest wkłasta



funkcja maleje , jest wypukła



funkcja rośnie , jest wkłasta

**Rys 7.10.** Możliwe przypadki wykresów funkcji  $f$  w przedziale izolacji  $(a, b)$ .

Na rysunku opieramy się o przypadek, kiedy pierwsza i druga pochodna są dodatnie i startujemy z punktu  $(b=x_0)$  oraz z punktu  $(x_1)$  leżącego po lewej stronie  $(b)$ , ale po prawej stronie od pierwiastka.

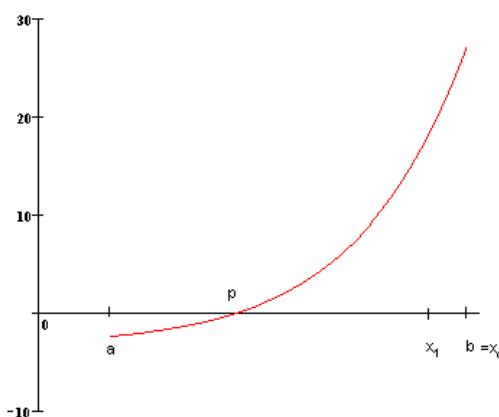
*Opis metody:* Metoda siecznych jest metodą dwukrokową, startujemy z dwóch punktów  $(x_0)$  i  $(x_1)$  takich, że  $f(x_0)f''(x_0)>0$ ,  $f(x_1)f''(x_1)>0$ . Przez punkty  $(x_0, f(x_0))$  i  $(x_1, f(x_1))$  prowadzimy sieczną i przecinamy ją z osią  $(Ox)$ , punkt przecięcia wyznacza następną iterację  $(x_2)$ .

$$\begin{aligned} y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) \end{aligned}$$

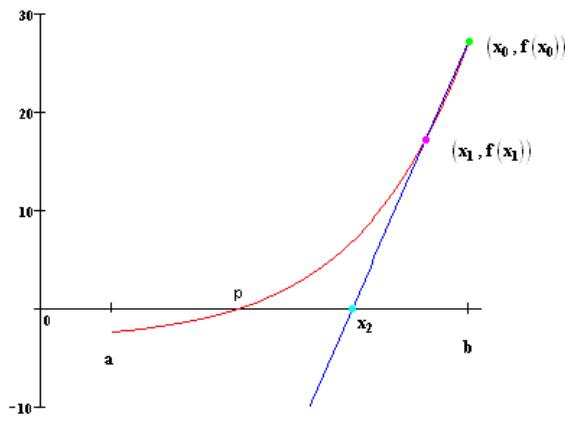
stąd

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

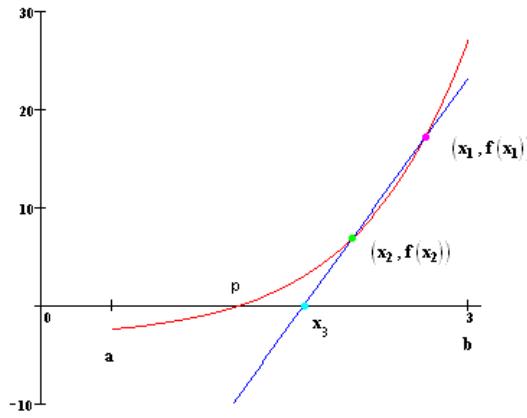
Jeśli  $f(x_2) = 0$  to  $x_2$  jest pierwiastkiem, jeśli nie, przez punkty  $(x_1, f(x_1))$  i  $(x_2, f(x_2))$  prowadzimy sieczną i przecinamy ją z osią  $(Ox)$ , dostajemy następną iterację:  $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$ .



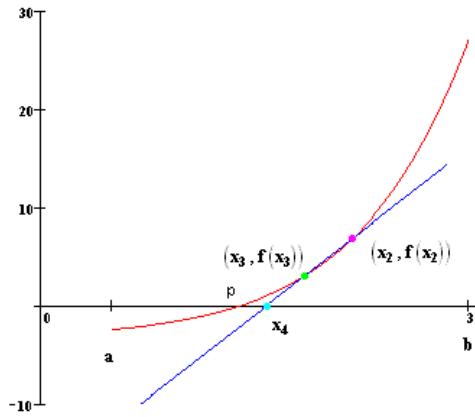
a) Przez punkty  $(x_0, f(x_0))$  i  $(x_1, f(x_1))$  prowadzimy prostą i przecinamy ją z osią  $Ox$ , punkt przecięcia oznaczamy przez  $x_2$ ,



b) Przez punkty  $(x_1, f(x_1))$  i  $(x_2, f(x_2))$  prowadzimy prostą i przecinamy ją z osią  $Ox$ , punkt przecięcia oznaczamy przez  $x_3$ ,



c) Przez punkty  $(x_2, f(x_2))$  i  $(x_3, f(x_3))$  prowadzimy prostą i przecinamy ją z osią  $Ox$ , punkt przecięcia oznaczamy przez  $x_4$  itd.,



**Rys. 7.11.** Kolejne trzy iteracje w metodzie siecznych.

Postępując kolejno w wyżej opisany sposób otrzymamy wzór ogólny na ciąg iteracyjny:

$$(x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}) \quad (7.6.1)$$

Jeśli nie będziemy przestrzegać spełnienia warunków na punkty startu, ciąg może być zbieżny do pierwiastka, ale nie zawsze (przykład 7.7).

Dla tej metody jest prawdziwe twierdzenie:

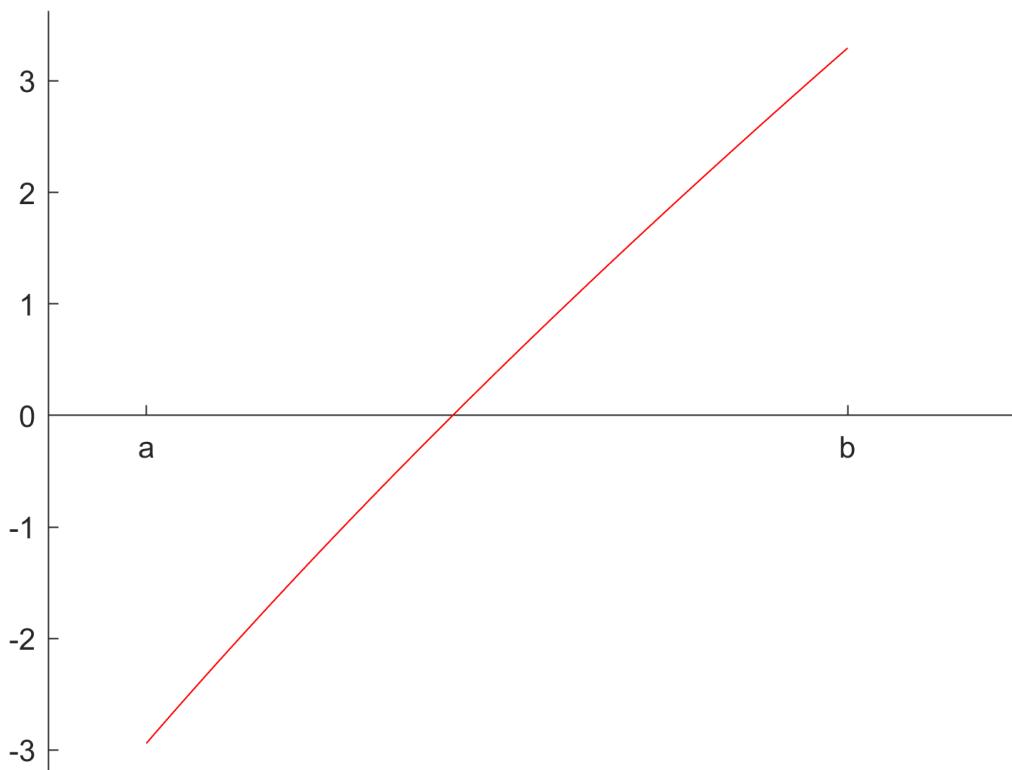
## Twierdzenie

Jeśli w otoczeniu  $|x-p|<\delta$  pierwiastka  $p$  równania  $f(x)=0$  funkcja  $f$  ma ciągłą drugą pochodną, a pierwsza i druga pochodna jest różna od zera w tym otoczeniu oraz przybliżenia  $x_0$  i  $x_1$  ( $x_0 \neq x_1$ ) są dostatecznie bliskie pierwiastka  $p$ , to metoda sęcznych jest zbieżna, jej rzad jest równy  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618 \dots$ , a stała asymptotyczna błędu jest równa  $C = \left(\frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

### Przykład 7.6

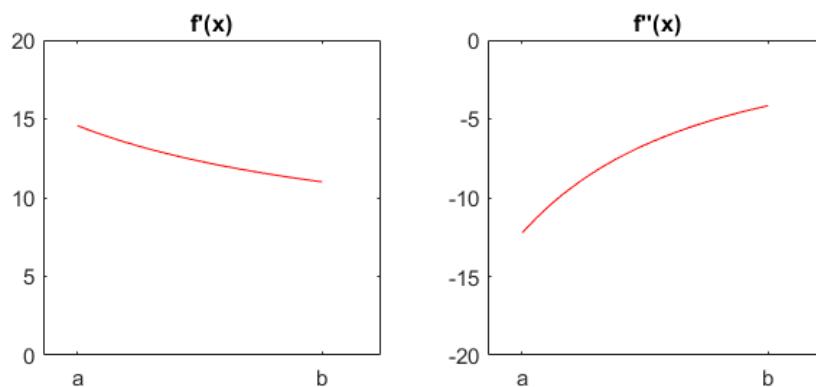
#### Przykład

Rozpatrujemy równanie  $6x+6\ln x-5=0$  w przedziale  $(0.7, 1.2)$  z dokładnością  $d=10^{-8}$ .



Rys. 7.12. Wykres funkcji  $f$  w podanym przedziale.

Na rysunku widać, że funkcja zmienia znak w danym przedziale. Na następnych rysunkach są zilustrowane pierwsza i druga pochodna funkcji  $f$  w tym samym przedziale.



Rys. 7.13. Wykresy pochodnych funkcji  $\lambda(f)$ .

Widać, że pierwsza pochodna jest dodatnia w rozpatrywanym przedziale, a druga pochodna jest ujemna w  $\langle [a, b] \rangle$ . Spełnione są założenia dla metody siecznych, pochodne są ciągłe i nie zmieniają znaku w  $\langle [a, b] \rangle$ .

Możemy zastosować metodę siecznych, wybierając za punkty startu takie punkty, w których funkcja ma taki sam znak jak druga pochodna. Ponieważ druga pochodna jest ujemna wybieramy punkty po lewej stronie pierwiastka, w którym funkcja też jest ujemna  
 $(X_0=a, x_1=a+0.01)$

Za pomocą wzoru iteracyjnego na  $x_{n+1}$  dostajemy wektor iteracji, wzór jest przeliczany tak długo dopóki nie będzie osiągnięta dokładność, tzn. aż  $|f(x_n)| < \epsilon$ . Gdzie  $\epsilon$  jest stosunkowo mała założona przez nas liczbą, która stanowi kryterium zbieżności.

Wektor iteracji:

```
\begin{aligned} &x_j = \begin{array}{r} \hline 0.7 \\ \hline 0.71 \\ \hline 0.9026114008 \\ \hline 0.9173854594 \\ \hline 0.9184219035 \\ \hline 0.91842661 \\ \hline 0.9184266114 \\ \hline \end{array} \end{aligned}
```

Rozwiæzaniem jest:  $x_6 = 0.9184266114$ , dla którego  $f(x_6) = -2,309 \cdot 10^{-14}$

Przykładowa implementacja w MATLABie:

```

a=0.7;
b=1.2;
f = @(x) 6*x+6*log(x)-5;

x = [a a+0.01];
d = 1e-13;
max_iter = 20;
iter = 1;
n=2;
while abs(f(x( n ))) > d && iter < max_iter
x(n+1) = x( n ) - f(x( n ))*(x( n )-x(n-1)) / (f(x( n )) - f(x(n-1)));
iter = iter + 1;
n = n + 1;
end
format long
x
format short

```

Uruchomienie programu daje wynik:

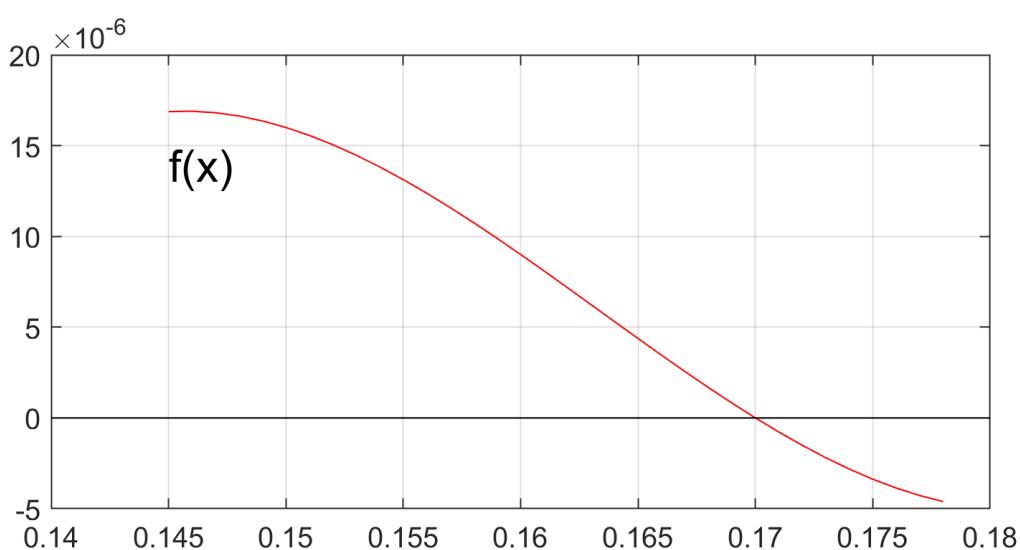
```
x =  
    0.700000000000000  0.710000000000000  0.902611400765419  0.917385459390865  0.918421903512899  0.918426609980826  
0.918426611372439
```

### Przykład 7.7

## Przykład

Przykład ilustruje sytuację, w której nie są spełnione założenia przy jakich możemy stosować tę metodę. Dane jest równanie:  $\sqrt{x^3 - 0.49x^2 + 0.0791} - x - 0.004199 = 0$

Szukamy pierwiastka tego równania w przedziale  $\langle [0.145, 0.178] \rangle$ . Pierwiastek istnieje, bo jak widać na rysunku, funkcja zmienia znak, ten pierwiastek jest blisko punktu 0,17.

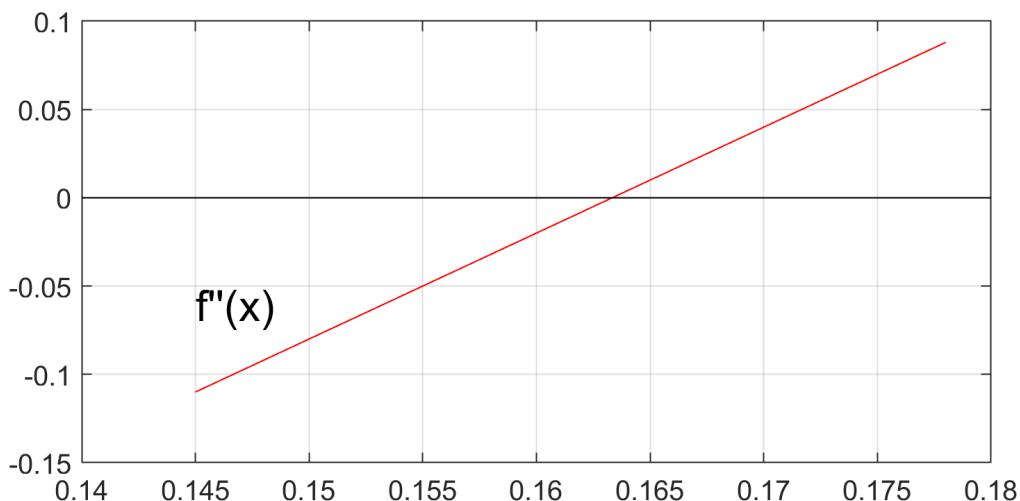


Rys. 7.14. Wykres funkcji  $f$  w podanym przedziale.

Znajdziemy ten pierwiastek metodą siecznych. Startujemy z punktów:  $x_0 = a$  i  $x_1 = a + 0,01$  i stosujemy wzór:

$$(x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{f'(x_n) - f'(x_{n-1})})$$

Dostajemy dla 10 iteracji  $x_{10} = 0.19$  i  $f(x_{10}) = 0$ . Jednak **to nie jest pierwiastek z tego przedziału**, nasz pierwiastek był blisko punktu 0.17. Dlaczego tak się stało? Pochodna druga zmienia znak w tym przedziale, w dodatku wystartowaliśmy ze złych punktów. Ponieważ wykres drugiej pochodnej jest następujący:



Rys. 7.15. Wykres drugiej pochodnej, która zmienia znak w rozpatrywanym przedziale.

Przedział nie może być w tym wypadku taki duży, powinniśmy zmienić go na  $[0.165, 0.178]$  i sprawdzić pozostałe założenia.

## 8. Metoda stycznych - Newtona

Podobnie jak w metodzie siecznych w metodzie stycznych założymy, że funkcja  $f$  jest klasy  $C^2(a,b)$ , zmienia znak w przedziale  $(a, b)$  oraz pochodne pierwsza i druga mają stały znak w rozpatrywanym przedziale. To znaczy, że w przedziale izolacji  $(a, b)$  może zachodzić któryś z czterech podanych na rysunku 7.10 przypadków.

Opis metody: Metodę opiszemy korzystając z przypadku pierwszego, kiedy pierwsza pochodna jest dodatnia (funkcja rośnie) i druga pochodna jest dodatnia (funkcja jest wypukła).

Jako punkt startu obieramy taki punkt  $x_0$ , w którym funkcja ma taki sam znak jak druga pochodna:  $f'(x_0) > 0$ , w naszym przypadku punkt  $b$  - ponieważ w tym punkcie funkcja jest dodatnia tak jak druga pochodna. Z punktu  $(x_0, f(x_0))$  wystawiamy styczną do krzywej  $y = f(x)$ . Równanie stycznej ma postać:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

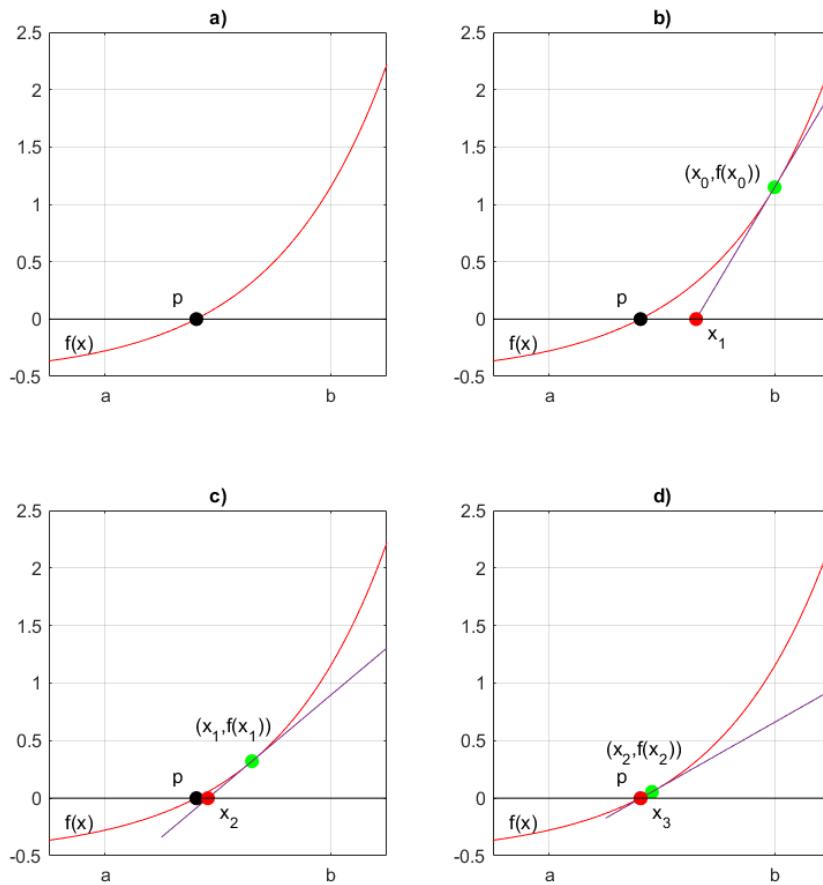
Przecinamy styczną z osią  $Ox$  i otrzymany punkt przecięcia jest pierwszym przybliżeniem pierwiastka. Wstawiając zatem za  $y$  zero a za  $x$  wartość  $x_1$  otrzymujemy:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Jeśli  $f(x_1) = 0$  to  $x_1$  jest pierwiastkiem, jeśli nie, postępujemy analogicznie dalej, z punktu  $(x_1, f(x_1))$  wystawiamy styczną do krzywej i przecinamy ją z osią  $Ox$ :  $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ , przyjmujemy  $^*y = 0$ , i otrzymujemy:  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ .

Na rysunku 7.16 przedstawione zostały kolejne iteracje metody Newtona dla przykładowej funkcji z dodatnimi wartościami pierwszej i drugiej pochodnej  $f'(x)$ . Kolejne rysunki przedstawiają:

- a) - przebieg funkcji  $f(x)$  z poszukiwanym pierwiastkiem  $p$ ,
- b) Przez punkt  $(x_0, f(x_0))$  prowadzimy styczną do  $f(x)$  i przecinamy ją z osią  $Ox$ , punkt przecięcia oznaczamy przez  $x_1$ ,
- c) Przez punkt  $(x_1, f(x_1))$  prowadzimy styczną i przecinamy ją z osią  $Ox$ , punkt przecięcia oznaczamy przez  $x_2$ ,
- d) Przez punkt  $(x_2, f(x_2))$  prowadzimy styczną i przecinamy ją z osią  $Ox$ , punkt przecięcia oznaczamy przez  $x_3$ .



Rys. 7.16. a) Przebieg funkcji  $f(x)$  i b), c), d) kolejne trzy iteracje w metodzie stycznych.

Powtarzając w ten sposób budowanie kolejnej iteracji otrzymujemy ciąg iteracyjny  $x_n$  określony wzorem :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7.7.1)$$

Ciąg ten przy podanych założeniach jest zbieżny do szukanego pierwiastka  $p$ . Może się zdarzyć, że startując z innego punktu, nie spełniającego podany warunek  $f(x_0)f'(x_0) > 0$ , ciąg iteracyjny też będzie zbieżny do szukanego pierwiastka, ale bez tego warunku nie mamy gwarancji, że ciąg  $x_n$  zbiega do  $p$  (przykład 7.9).

Dla tej metody jest prawdziwe twierdzenie:

## Twierdzenie

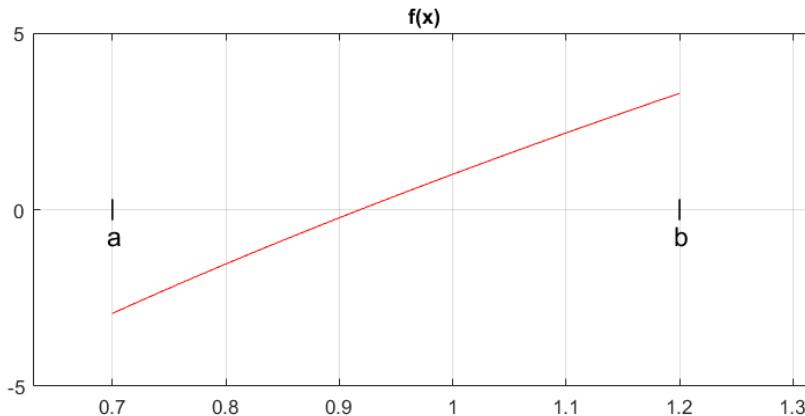
Jeżeli w otoczeniu  $|x-p|<\delta$  pierwiastka  $p$  równania  $f(x)=0$  funkcja  $f$  ma ciągłą drugą pochodną oraz pierwsza i druga pochodna są różne od zera w tym otoczeniu oraz  $x_0$  leży wystarczająco blisko pierwiastka  $p$ , to metoda Newtona jest rzędu 2 ze stałą asymptotyczną błędem  $C=\frac{|f''(p)|}{|2f'(p)|}$ .

Metoda Newtona jest szybkozbieżną metodą jednokrokową wymagającą na każdym kroku obliczania jednej wartości funkcji i jednej wartości pierwszej pochodnej.

### Przykład 7.8

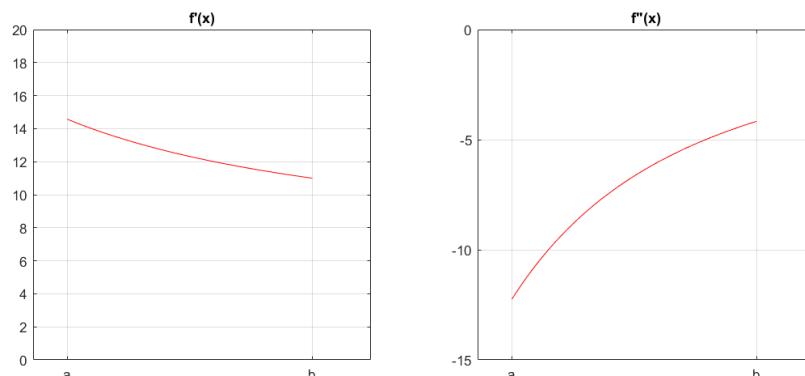
## Przykład

Rozpatrujemy równanie  $6x+6 \ln x - 5 = 0$  w przedziale  $[0.7, 1.2]$ . Na rysunku 7.17 widać, że funkcja zmienia znak w danym przedziale



**Rys. 7.17.** Wykres funkcji  $f$  w przedziale  $[0.7, 1.2]$ .

Na rysunkach 7.18a i 7.18b zilustrowane są pierwsza i druga pochodna funkcji  $f$  w tym samym przedziale. Widać, że pierwsza pochodna jest dodatnia w rozpatrywanym przedziale, a druga pochodna jest ujemna w  $[a, b]$ . Spełnione są założenia dla metody Newtona, pochodne są ciągłe i nie zmieniają znaku w  $[a, b]$ .



**Rys. 7.18.** Wykres pochodnych w rozpatrywanym przedziale.

Możemy zastosować metodę Newtona przyjmując za punkt startu ten koniec przedziału  $[a, b]$ , dla którego jest spełniony warunek  $f(x_0)f'(x_0)>0$ . W tym przypadku jest to punkt  $a$ , zatem  $x_0 = a$ . Dla dokładności  $d=10^{-8}$  otrzymujemy 4 iteracje i  $x_4=0.9184266114$  jest przybliżonym pierwiastkiem równania oraz  $f(x_4)=0$  (przyjmujemy za zero wszystkie liczby mniejsze niż  $10^{-15}$ ).

Wektor iteracji ma postać:  $\{j = 0, 1..4\}$

$$\begin{aligned} x_j = & 0.7 \\ & 0.9017681142 \\ & 0.9183466866 \\ & 0.9184266096 \\ & 0.9184266114 \end{aligned}$$

Ten sam przykład, dla tej samej dokładności obliczyliśmy w poprzednim temacie metodą siecznych. Aby otrzymać żądaną dokładność

trzeba było dla tamtej metody wziąć o dwie iteracje więcej. Metoda stycznych (Newtona) jest zatem szybciej zbieżną metodą.

### Przykład 7.18

#### Przykład

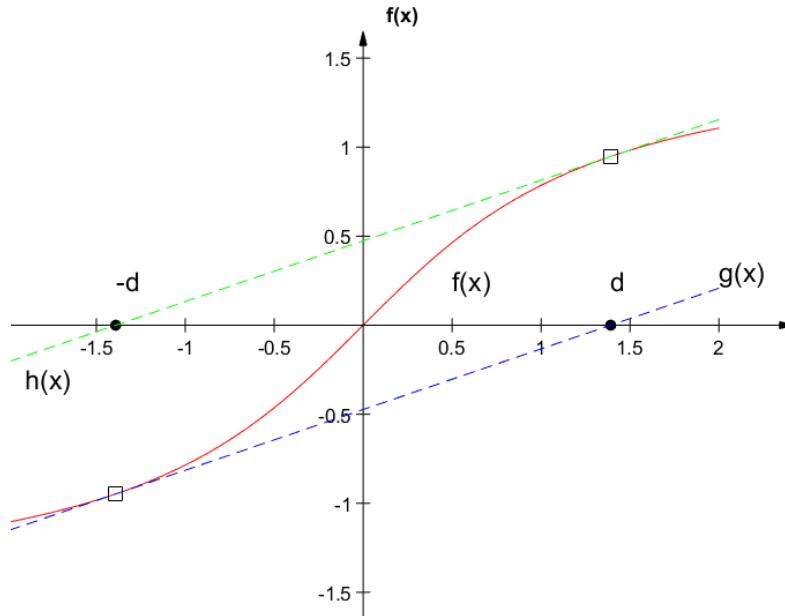
Rozpatrujemy równanie  $\arctg(x)=0$  w przedziale  $[-2, 2]$ . Jako punkt startu, w celu demonstracji zjawiska zapętlenia, obieramy dokładny pierwiastek równania:

$$\arctg x - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

Oznaczmy ten pierwiastek przez  $d$  i w przybliżeniu równa się on  $1.39125043$ . Będziemy stosować metodę Newtona dla równania:  $\arctg x = 0$  z punktem startowym  $x_0 = d$ .

Wstawiamy z punktu  $(d, f(d))$  styczną do krzywej  $\arctg(x)$ :  $g(x) = f'(x-d) + f(d)$  i przecinamy ją z osią  $Ox$  wyznaczając punkt  $x_1$ .

Okazuje się że punkt przecięcia będzie  $x_1 = -d$ . Jeśli z punktu  $(-d, f(-d))$  wystawimy do krzywej  $\arctg(x)$  styczną:  $h(x) = f'(-d)(x+d) + f(-d)$  i przetniemy ją z osią  $Ox$  dostaniemy znów punkt  $x_2 = d$ . W ten sposób metoda Newtona "zapętliła" się i ze wzoru Newtona dostajemy na zmianę punkty  $d$  i  $-d$  jako kolejne iteracje, a widać na rysunku, że pierwiastkiem równania jest  $p=0$ .



**Rys. 7.19.** Wykres funkcji  $f$  i stycznych wychodzących z punktów  $(d,0)$  i  $(-d,0)$ .

To zapętlenie wynika z tego, że druga pochodna zmienia znak w przedziale  $[-2, 2]$ , ma w zerze punkt przegięcia. Nie są zatem spełnione założenia podane do metody Newtona.

## 9. Pierwiastki wielokrotne

Metody iteracyjne wymagają na ogół, aby szukany pierwiastek był pierwiastkiem jednokrotnym. Tak jest przy metodzie Newtona i metodzie siecznych. Metoda bisekcji dopuszcza pierwiastki nieparzystokrotne, przy parzystokrotnych funkcja nie zmienia znaku w przedziale izolacji. Na ogół nie znamy krotności szukanych pierwiastków.

Wprowadzamy funkcję pomocniczą  $( u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} )$  i rozwiążujemy równanie  $( u(x)=0 )$  zamiast równania  $( f(x)=0 )$ . Równanie  $( u(x)=0 )$  ma takie same pierwiastki jak równanie  $( f(x)=0 )$ , ale wszystkie są jednokrotne.

Ponieważ:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f'(x)(f'(x) - f(x)f''(x))}{(f'(x))^2} \\ &= \frac{f'(x)(1 - u(x)f''(x))}{(f'(x))^2} = 1 - u(x)\frac{f''(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

wzory na metodę Newtona i metodę siecznych przybierają postać:

dla metody Newtona (stycznych):

$$(x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}) \quad (7.8.1)$$

gdzie  $( u'(x_n) = 1 - u(x_n)\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} )$

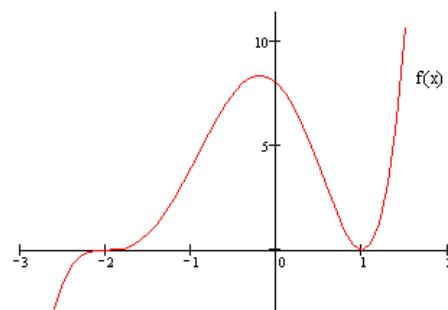
dla metody siecznych:

$$(x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{u'(x_n) - u'(x_{n-1})}) \quad (7.8.2)$$

### Przykład 7.19

#### Przykład

Funkcja nieliniowa  $( f(x) = (x-1)^2(x+2)^3 )$  będzie wielomianem stopnia piątego mającym jeden pierwiastek dwukrotny i jeden trzykrotny.

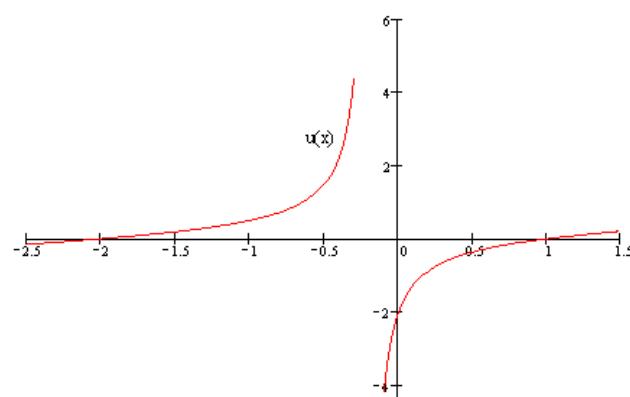


Rys. 7.20. Wykres funkcji  $( f )$ .

Obliczymy jej pochodną i następnie wprowadzimy funkcję  $( u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} )$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2(x+2)^3 \\ f'(x) &= 2(x-1)(x+2)^3 + 3(x-1)^2(x+2)^2 = (x-1)(x+2)^2[2(x+2) + 3(x-1)] = (x-1)(x+2)^2(5x+1) \end{aligned}$$

Równanie  $( u(x)=0 )$  ma dwa pierwiastki, takie jak funkcja  $( f )$  ale są już jednokrotne. Funkcja  $( u )$  nie jest ciągła na całej osi  $( R )$ , ale istnieją przedziały izolacji pierwiastków, w których jest ciągła i ma ciągłe pochodne.



Rys. 7.21. Wykres funkcji  $\backslash(u\backslash)$ .

## 10. Układy równań nieliniowych

Dany jest układ  $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$  niewiadomymi:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (7.9.1)$$

który będziemy zapisywać wektorowo:  $\begin{cases} F(x)=0 \end{cases}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Warunki istnienia rozwiązań układu są znacznie trudniejsze do sprawdzenia, a nawet nie można sformułować jednolitego kryterium istnienia rozwiązania bez założenia szczególnych własności odwzorowania  $F$ , takich jak różniczkowalność itd. Będziemy zakładać istnienie rozwiązania układu  $\begin{cases} F(x)=0 \end{cases}$  i ograniczymy się do jednej metody: poszukiwania rozwiązań metodą Newtona.

Rozpatrzmy metodę iteracyjną jednokrokową daną ogólnym wzorem:  $\begin{cases} x^{k+1} = G(x^k) \\ x^0 \text{ wektor początkowy} \end{cases}$  i wektor początkowy  $x^0$ , który będziemy dobierać dostatecznie blisko rozwiązania.

### Definicja

Niech  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Punkt  $w$  nazywamy punktem przyciągania metody iteracyjnej (ewentualnie punktem stacjonarnym), jeżeli istnieje takie otoczenie  $U$  tego punktu, że obierając dowolny wektor początkowy  $x^0$  z tego otoczenia uzyskamy ciąg punktów  $x^1, x^2, \dots, x^n$  zbieżny do  $w$ . Największe z tych otoczeń nazywamy obszarem przyciągania punktu  $w$  (punktu stacjonarnego).

Oznaczmy przez :

$$\begin{cases} F(x) = \begin{aligned} & f_1(x_1, \dots, x_n) \\ & \vdots \\ & f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \end{cases} \quad (7.9.2)$$

oraz

$$\begin{cases} J(x) = \begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ & \vdots \\ & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \end{cases} \quad (7.9.3)$$

Jeśli funkcje  $f_i(x)$  są różniczkowalne w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu  $p$ , w którym  $F(p)=0$ , i macierz  $J(x)$  jest w tym otoczeniu nieosobliwa, to jeśli wektor startu dobierzemy odpowiednio blisko punktu  $p$  to punkt  $p$  jest punktem przyciągania metody iteracyjnej danej wzorem ( metoda Newtona):

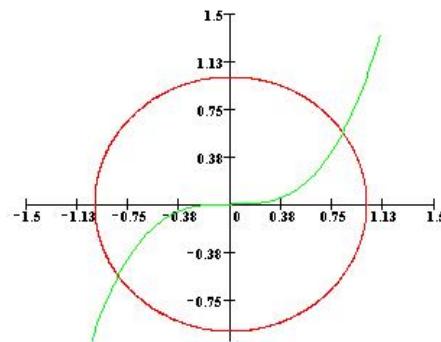
$$x^{n+1} = x^n - J^{-1}(F(x^n)) \quad (7.9.4)$$

### Przykład 7.20

#### Przykład

Rozpatrujemy układ równań:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ & x^3 - y = 0 \end{aligned}$$



**Rys. 7.22.** Graficzna interpretacja układu.

Na rysunku czerwona linia opisuje pierwsze równanie, zielona drugie. Widać, że krzywe przecinają się w dwóch punktach, układ ma dwa rozwiązania. Lewą stronę pierwszego równania oznaczamy przez  $f_1(x,y)$ , lewą stronę drugiego równania oznaczamy przez  $f_2(x,y)$ . Oznaczmy przez:

$$\begin{aligned} F(x, y) = & \left[ \begin{array}{l} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{array} \right] \text{ oraz } J(x, y) = \left[ \begin{array}{ll} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Znajdziemy rozwiązanie w pierwszej ćwiartce. Jako wektor startu bierzemy (odczytujemy z rysunku), wektor  $(z)$  ma pierwszą współrzędną  $(x)$  a drugą  $(y)$ .

$$(z^{\langle 0 \rangle}) = \left[ \begin{array}{l} 0.9 \\ 0.5 \end{array} \right]$$

Korzystając ze wzoru Newtona dla układów równań:

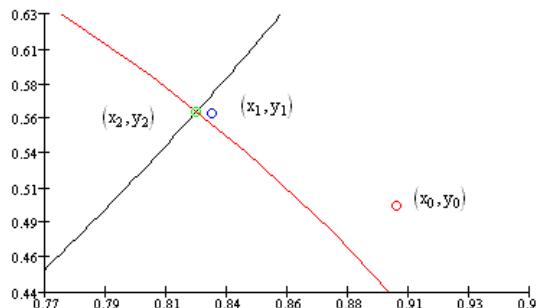
$$(x^{\langle 1 \rangle}) = (x^{\langle 0 \rangle}) - \left( \begin{array}{l} F(x^{\langle 0 \rangle}) \\ F(x^{\langle 0 \rangle}) \end{array} \right)^{-1} F'(x^{\langle 0 \rangle})$$

dostajemy dokładności  $(d=10^{-8})$ , tzn.  $|f(z^{\langle n \rangle})| \leq d$  | całą macierz iteracji, w kolumnach której są kolejne wektory iteracyjne:

$$\begin{aligned} (\mathbf{z}) = & \left[ \begin{array}{l} 0.9 \\ 0.831678 \\ 0.826062 \\ 0.826031 \\ 0.5 \\ 0.562979 \\ 0.563608 \\ 0.563624 \end{array} \right] \\ & \vdots \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest trzecia iteracja skąd  $(x = 0.826031)$ , a  $(y = 0.563624)$ .

Na rysunku, w dużym powiększeniu, czerwone kółeczko to punkt startu, pierwsze przybliżenie to niebieskie kółeczko, drugie przybliżenie to zielone kółeczko, a rozwiązanie przybliżone, czyli trzecia iteracja pokrywa się na rysunku z drugą.



**Rys. 7.23.** Kolejne trzy iteracje rozwiązywania układu.

Wartość funkcji wektorowej opisującej równania jest dla tego rozwiązania następująca:

$$(F(z^{\langle \rangle})) = \left[ \begin{array}{l} 1.19 \cdot 10^{-9} \\ 2.294 \cdot 10^{-9} \end{array} \right]$$

Jeśli będziemy brać jako wektor startu wektor o współrzędnych o przeciwnych znakach

$$(z^{\langle 0 \rangle}) = \left[ \begin{array}{l} -0.9 \\ -0.5 \end{array} \right]$$

dostaniemy symetryczne rozwiązanie  $(x = -0.826031)$ , a  $(y = -0.563624)$ .

Przykład rozwiązywany w MATLABie w postaci implementacji naiwnej - ręcznie wpisanych iteracji, oraz w postaci algorytmicznej.

```
% Implementacja naiwna (niezalecana)

% w poniższych wzorach przyjęta: x(1) - x, x(2) - y
F = @(x) ([x(1).^2 + x(2).^2 - 1; x(1).^3 - x(2)]);
DF = @(x) ([2*x(1) 2*x(2); 3*x(1)^2 -1])

x0 = [0.9
      0.5]

x1 = x0 - inv(DF(x0))*F(x0);
x2 = x1 - inv(DF(x1))*F(x1);
x3 = x2 - inv(DF(x2))*F(x2)

F(x3)

% Implementacja algorytmiczna,
% z określeniem maksymalnej liczby iteracji
x0 = [0.9
      0.5];
X = [x0];

max_iter = 10;
n = 1;
d = 1e-8;
while (n < max_iter && norm(F(X(:,n))) > d)
    X(:,n+1) = X(:,n) - inv(DF(X(:,n)))*F(X(:,n));
    % lub wydajniej, aby uniknąć odwracania macierzy
    % X(:,n+1) = X(:,n) - DF(X(:,n)) \ F(X(:,n));
    n = n+1;
end

n
F(X(:,n))
format long
X
format short
```

W wyniku uruchomienia skryptu otrzymamy wynik:

```
x3 =
  0.8260
  0.5636

ans =
  1.0e-08 *
  0.1190
  0.2294

n =
  4

ans =
  1.0e-08 *
  0.1190
  0.2294

X =
  Columns 1 through 3
  0.900000000000000  0.831678486997636  0.826061782413291
  0.500000000000000  0.562978723404255  0.563607908816801
  Column 4
  0.826031358607699
  0.563624161819281
```