

7 Rozdział

Strona: [LeIA](#)
Kurs: Metody numeryczne (2025Z)
Książka: 7 Rozdział

Wydrukowane przez użytkownika: Kinga Kondraciuk
Data: niedziela, 30 listopada 2025, 14:15

Spis treści

- 1. Równania nieliniowe**
- 2. Wprowadzenie**
- 3. Izolacja pierwiastków**
- 4. Uwagi o dokładności**
- 5. Rząd metody**
- 6. Metoda bisekcji**
- 7. Metoda siecznych**
- 8. Metoda stycznych - Newtona**
- 9. Pierwiastki wielokrotne**
- 10. Układy równań nieliniowych**

1. Równania nieliniowe

Równanie nieliniowe np. równanie kwadratowe, logarytmiczne, wykładnicze, trygonometryczne, będziemy zapisywać ogólnie jako równanie postaci:

$$f(x) = 0 \tag{7.1.1}$$

gdzie funkcja f jest funkcją nieliniową zmiennej rzeczywistej x i jest funkcją ciągłą na pewnym przedziale skończonym lub nieskończonym (a, b) . Zwróćmy szczególną uwagę na zero z prawej strony równania, które jest istotne z punktu widzenia większości istniejących algorytmów. Z uwagi na tą postać (zero z prawej strony) często mówi się, że poszukujemy **zer** równania, czyli pierwiastków, dla których wartość wyrażenia z lewej strony przyjmuje wartość zero. Jedną z możliwych metod rozwiązywania równań nieliniowych jest metoda graficzna, polegająca na narysowaniu przebiegu funkcji z lewej strony równania i odczytanie wartości x dla których przebieg przecina oś OX .

2. Wprowadzenie

Poznane metody analityczne rozwiązywania równań nieliniowych dotyczą pewnej wąskiej klasy funkcji $f(x)$, np. wielomianów stopnia nie większego niż czwarty, natomiast olbrzymiej klasy równań nieliniowych - głównie równań przestępnych - nie da się rozwiązać dokładnie. Potrzebne są metody przybliżone, które umożliwiają znalezienie pierwiastków rzeczywistych tych równań z góry podaną dokładnością. Niektóre z tych metod, oraz problemy z nimi związane, będą przedstawione w tym rozdziale.

Definicja

Liczbę rzeczywistą p , która spełnia równanie $f(x) = 0$ tzn. dla której $f(p) = 0$, nazywamy pierwiastkiem rzeczywistym równania lub zerem funkcji f .

Definicja

Liczbę rzeczywistą p nazywamy k -krotnym pierwiastkiem równania $f(x) = 0$ lub k -krotnym miejscem zerowym funkcji f , jeśli dla wartości p funkcja i jej pochodne do $k-1$ rzędu włącznie przyjmują wartość zero, natomiast wartość pochodnej k -tego rzędu jest różna od zera, tzn:

$$f(p) \equiv 0, \quad f'(p) \equiv 0, \quad \dots \quad f^{(k-1)}(p) \equiv 0, \quad f^{(k)}(p) \neq 0$$

Przedstawione poniżej przybliżone metody rozwiązywania równań nieliniowych, można stosować jedynie pod warunkiem, że znany jest pewien przedział, w którym znajduje się jeden i tylko jeden pierwiastek rzeczywisty danego równania. Taki przedział będziemy nazywać *przedziałem izolacji* dla równania $f(x) = 0$. Przedziały izolacji, przed przystąpieniem do rozwiązywania równań, będziemy wyznaczać graficznie.

Wybrane przybliżone metody rozwiązywania równań nieliniowych są metodami iteracyjnymi, polegającymi na budowaniu ciągu przybliżeń liczb rzeczywistych:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

zbieżnego do szukanego rozwiązania - pierwiastka p - równania $f(x) = 0$. Oczywiście, aby ciąg $\{x_n\}$ był zbieżny do pierwiastka p niezbędne są na ogół dodatkowe, oprócz ciągłości, założenia o funkcji f , które będą podane przy każdej metodzie osobno.

Ograniczymy się do metod jednokrokowych, polegających na znalezieniu następnego przybliżenia x_{n+1} , mając dane jego poprzednie przybliżenie x_n , oraz do metod dwukrokowych, polegających na znalezieniu następnego przybliżenia x_{n+1} , mając obliczone dwa poprzednie x_{n-1} i x_n . Formuły określające ciągi przybliżeń można zapisać ogólnie w postaci:

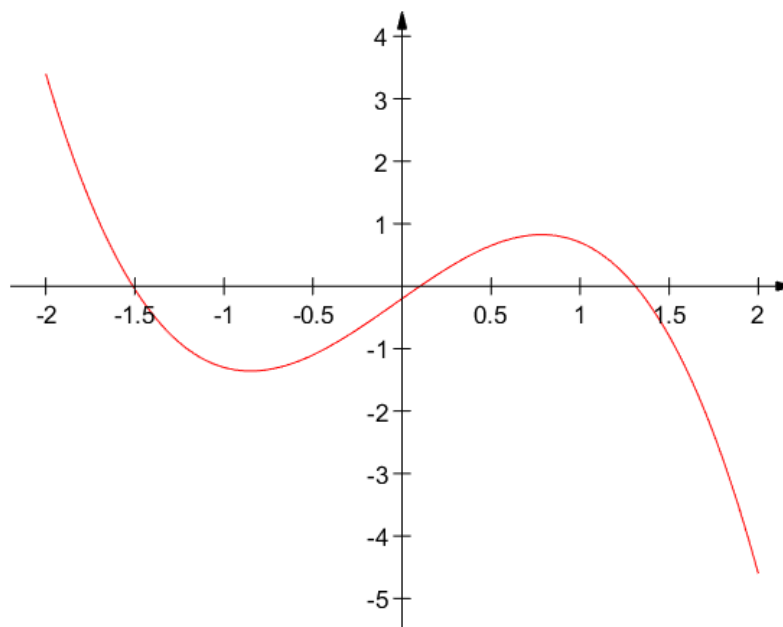
- $x_{n+1} = F(x_n)$ - dla metod jednokrotnych,
- $x_{n+1} = F(x_{n-1}, x_n)$ - dla metod dwukrotnych.

Będziemy korzystać z następujących twierdzeń:

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f ciągła w przedziale $[a, b]$ ma na końcach tego przedziału różne znaki tzn. $f(x)f(b) < 0$, to wewnątrz tego przedziału istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.

Ilustracja twierdzenia: Na rysunku funkcja jest ciągła o postaci $f(x) = -0.2 + 2x - 0.1x^2 - x^3$ i $f(b) < 0, f(a) > 0$. Funkcja przecina oś OX trzy razy, ma zatem trzy pierwiastki rzeczywiste w przedziale (a, b) .

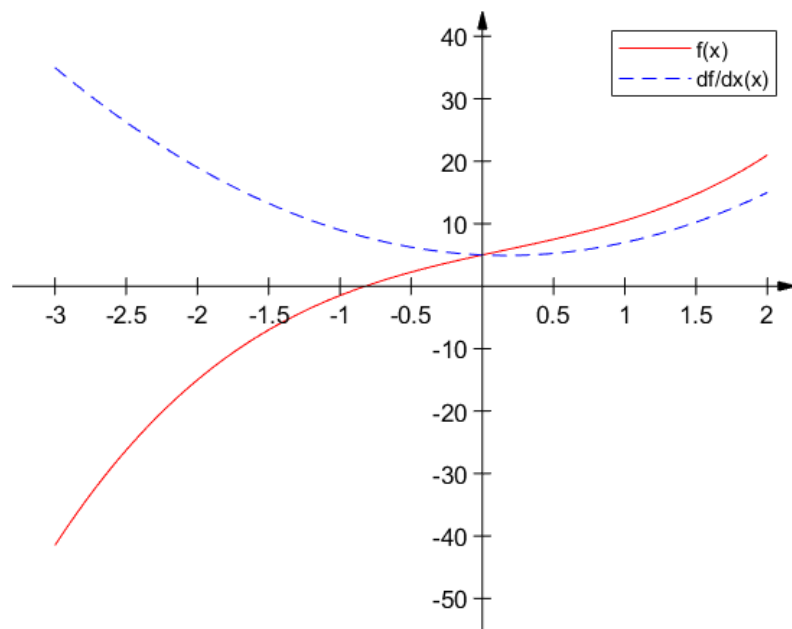


Rys 7.1. - Wykres funkcji ciągłej f zmieniającej znak trzy razy w przedziale $[-2, 2]$.

Twierdzenie

Jeżeli w przedziale (a, b) istnieje pochodna $f'(x)$ i nie zmienia znaku w tym przedziale tzn. albo jest w nim cały czas dodatnia albo ujemna, a $f(a)f(b) < 0$, to równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek jednokrotny.

Ilustracja twierdzenia: Na rysunku funkcja $f(x) = 5 + 5x - 0.5x^2 + x^3$ jest ciągła, ma ciągłą pochodną $f'(x) = 5 - x + 3x^2$, która jest cały czas dodatnia w $\langle a, b \rangle$, tzn.: funkcja w $\langle a, b \rangle$ rośnie, oraz $f(a)f(b) < 0$, raz tylko wykres funkcji przecina się z osią OX .



Rys. 7.2. Wykres funkcji ciągłej f (linia czerwona), zmieniającej znak raz w przedziale $[-3, 2]$, oraz jej pochodnej $f'(x)$, która w całym przedziale jest dodatnia (przerywana linia niebieska).

3. Izolacja pierwiastków

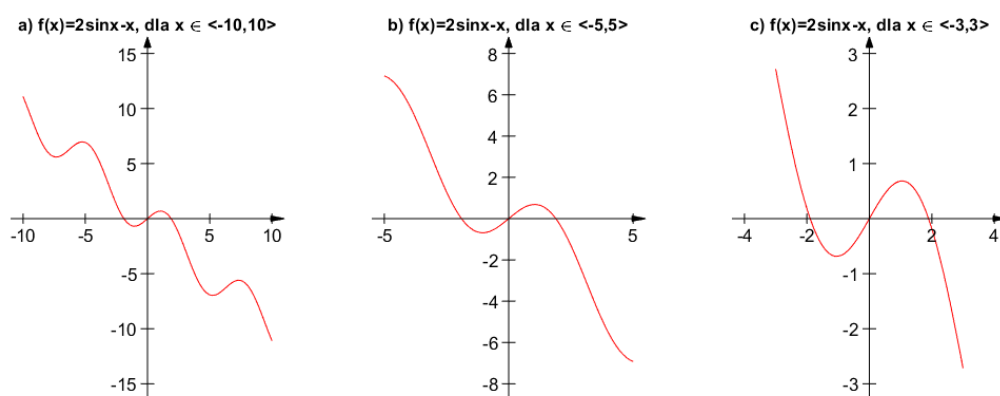
Najprostszą metodą przekonania się czy równanie $f(x) = 0$ posiada pierwiastki rzeczywiste jest narysowanie funkcji f i osi OX , i przekonanie się czy funkcja przecina się z osią. Można tym sposobem znaleźć przedziały, które się nie przecinają, a w których znajduje się po jednym pierwiastku danego równania. Zilustrujemy to na przykładzie.

Przykład 7.1

Przykład

Znaleźć przedziały izolacji równania: $2 \sin(x) - x = 0$

Rysujemy w kartezjańskim układzie współrzędnych funkcję f na możliwie dużym przedziale, a potem tak zawężamy ten przedział, aby nie stracić pierwiastków - aby wszystkie nadal były na wykresie. Rysunek 8.3a) przedstawia funkcję w przedziale $< -10, 10 >$, rysunek 8.3b) w przedziale $< -5, 5 >$, a rysunek 8.3c) w przedziale $< -3, 3 >$.



Rys. 7.3. Izolacja pierwiastków równania $f(x) = 0$, funkcja $f(x)$.

Jak widać na rysunku funkcja $f(x)$ dąży do nieskończoności, gdy argumenty dążą do minus nieskończoności i dąży do minus nieskończoności, gdy argumenty dążą do nieskończoności. Można przyjąć, że wszystkie pierwiastki danego równania tzn. wszystkie punkty przecięcia funkcji z osią Ox , są w przedziale $< -3, 3 >$. Widzimy, że równanie ma pierwiastek $x = 0$, co łatwo sprawdzić, drugi pierwiastek w przedziale np. $(1, 5; 2, 5)$ i trzeci pierwiastek w przedziale np. $(-2, 5; -1)$. Zatem równanie ma trzy przedziały izolacji: $(-2, 5; -1)$, $(-0, 5; 0, 5)$ i $(1; 2, 5)$. Oczywiście widać, że przedziały izolacji nie są wyznaczone jednoznacznie, można podać je w postaci: $(-2, 2; -1, 3)$, $(-0, 2; 0, 2)$ i $(1, 3; 2, 2)$. Więcej pierwiastków równanie nie posiada.

Inną metodą graficzną jest rysowanie równania $f(x) = 0$ za pomocą dwóch funkcji, jeśli równanie da się przedstawić w postaci różnicy funkcji $g(x) - h(x) = 0$. Punkty przecięcia funkcji g i h , są pierwiastkami równania $f(x) = 0$.

Przykład 7.2

Przykład

Ponieważ rozpatrywane równanie można przedstawić jako równanie:

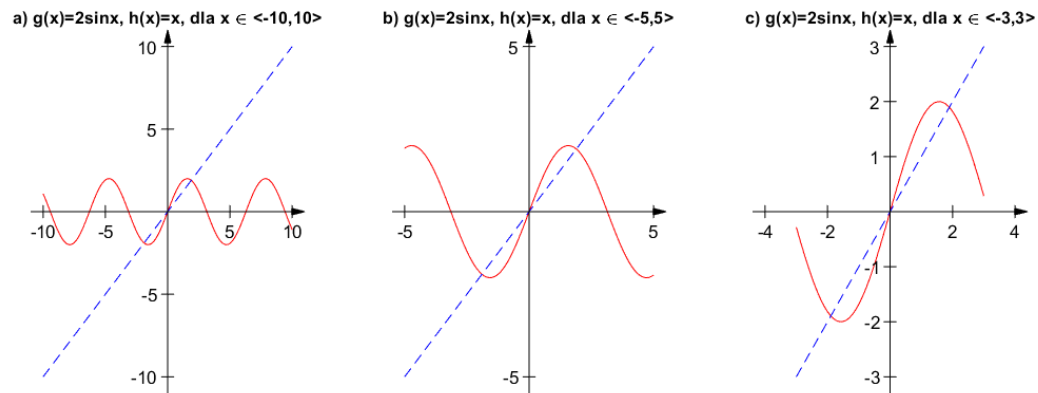
$$2 \sin(x) = x$$

to oznaczając przez $g(x) = 2 \sin(x)$, a przez $h(x) = x$, narysujemy te funkcje w takim samym przedziale jak poprzednio funkcję f .

Funkcje g i h przecinają się w zerze i dla tych samych x , w których funkcja f przecina się z osią OX . Funkcje te nie przecinają się w innym przedziale, bo funkcja g jest funkcją ograniczoną o wartościach w przedziale $[-2, 2]$, a funkcja h rośnie na prawo do nieskończoności, a na

lewo maleje do minus nieskończoności.

Rysunek 8.4a) przedstawia funkcje w przedziale $< -10, 10 >$, rysunek 8.4b) w przedziale $< -5, 5 >$, a rysunek 8.4c) w przedziale $< -3, 3 >$.



Rys. 7.4. Izolacja pierwiastków równania $g(x) = h(x)$.

4. Uwagi o dokładności

Istotnym problemem w metodach iteracyjnych jest decyzja, którą iterację wziąć za przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$, co ma decydować o zakończeniu postępowania iteracyjnego (wyboru warunku "stopu"), lub jak się da oszacować przyjęte przybliżenie w stosunku do nieznanej dokładnej wartości pierwiastka. Do każdej metody będzie ten problem rozważany osobno, tutaj podamy jak można wykorzystać następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Niech p będzie dokładną, a x^* przybliżoną wartością pierwiastka równania $f(x) = 0$, przy czym obie te liczby znajdują się w przedziale domkniętym $[a, b]$. Jeśli f posiada pochodną i jeśli dla x z przedziału $[a, b]$ zachodzi nierówność $|f'(x)| \geq m_1 \geq 0$ to prawdziwe jest oszacowanie :

$$|x^* - p| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1} \quad (1)$$

Dowód. Stosując wzór Lagrange'a otrzymujemy: $f(x^*) - f(p) = (x^* - p)f'(c)$ gdzie wartość c jest liczbą między p i x^* .

Ponieważ $f(p) = 0$ i $f'(c) \geq m_1$ to $|f(x^*) - f(p)| = |f(x^*)| \geq m_1|x^* - p|$ zatem $|x^* - p| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1}$.

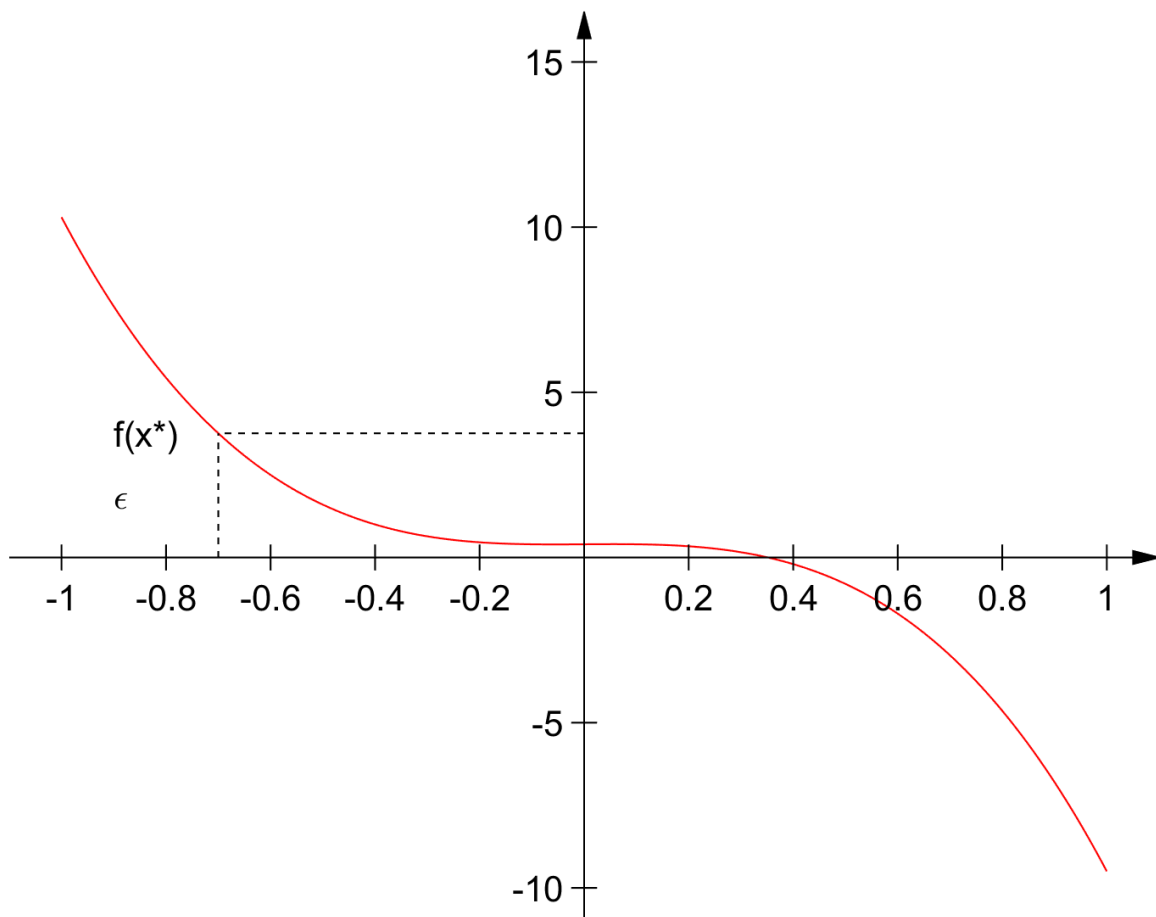
Przykład 7.3

Przykład

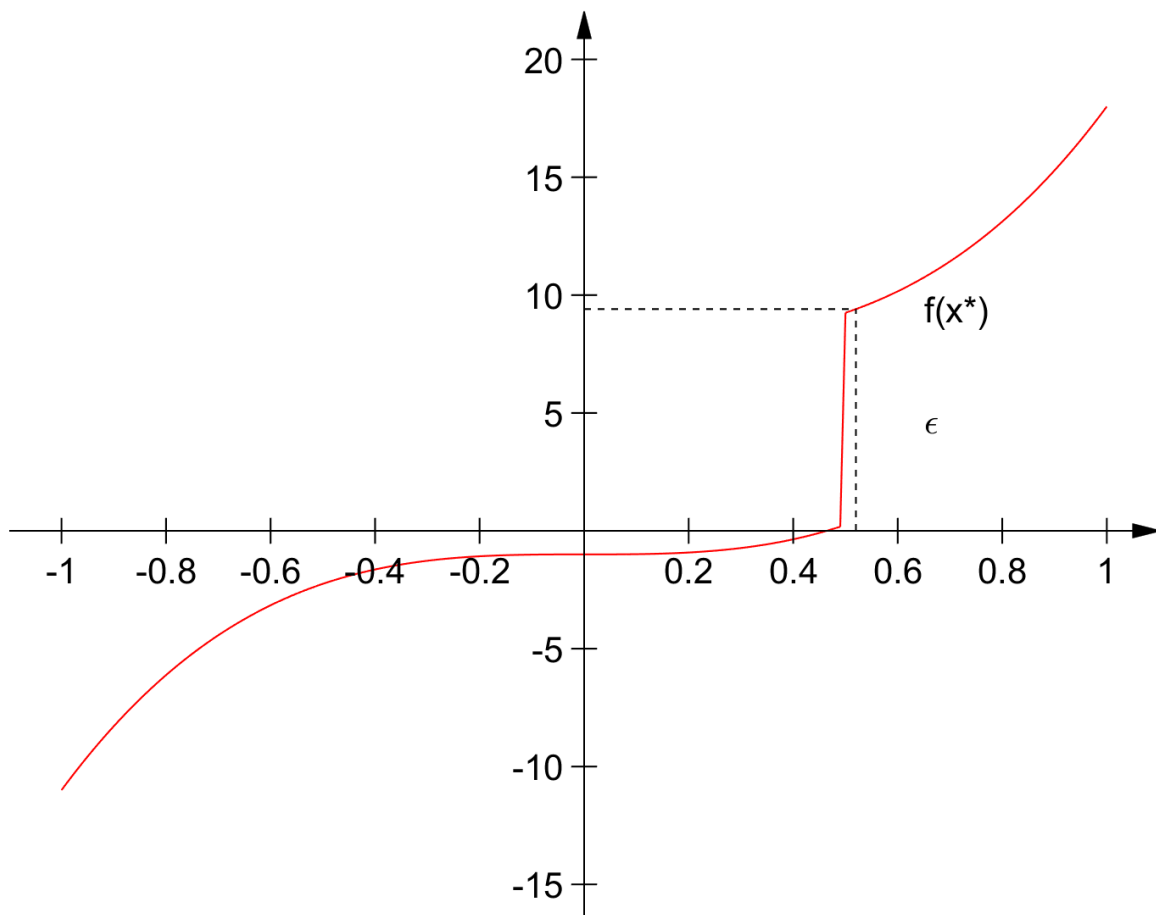
Rozpatrzmy równanie $x^4 - x - 1 = 0$. Weźmy za $x^* = 1.22$. Oszacujemy błąd bezwzględny tego przybliżenia. Mamy $f(x^*) = -0.0047$. Dla $x^* = 1.23$ wartość funkcji $f(x^*) = 0.0588$, dokładny pierwiastek p jest zatem w przedziale $(1.22; 1.23)$. Pochodna $f'(x) = 4x^3 - 1$ jest w tym przedziale rosnąca, a najmniejszą wartość przyjmuje dla $x = 1.22$, zatem $m_1 = 4 \cdot (1.22)^3 - 1 = 6.264$ więc $|x^* - p| \leq \frac{0.0047}{6.264} < 0.001$.

Uwaga

Niekiedy w praktyce ocenia się dokładność przybliżenia pierwiastka x^* według tego, czy liczba $|f(x^*)|$ jest mała, czy duża. Jeśli jest mała, to uważa się że x^* jest dobrym przybliżeniem dokładnej wartości pierwiastka p i na odwrót, jeśli $|f(x^*)|$ jest duże to x^* zostaje uznane za złe przybliżenie. Jak widać z następujących rysunków takie podejście nie zawsze jest prawidłowe. Nie należy również zapominać, że po pomnożeniu równania $f(x) = 0$ przez dowolną liczbę N różną od zera, otrzymujemy równanie równoważne, a liczbę $Nf(x^*)$ można uczynić dowolnie dużą lub dowolnie małą, dzięki doborowi N .



Rys. 7.5. Sytuacja, gdy x^* nie jest bliskie p .



Rys. 7.6. *Sytuacja gdy $f(x^*)$ nie jest bliskie zero.*

W dalszych rozważaniach, aby zapobiec takim opisanym wyżej sytuacjom, będziemy zakładać brak punktów przegięcia funkcji f w przedziałach izolacji, tzn., tak będziemy dobierać (zawężać) przedział izolacji, aby druga pochodna funkcji opisującej lewą stronę równania miała stały znak w rozpatrywanym przedziale.

5. Rząd metody

Podstawowym warunkiem, jaki powinna spełniać dana metoda jest zbieżność ciągu iteracyjnego do pierwiastka równania. Oczywiście, tym lepsza jest metoda im szybciej ciąg przybliżeń jest zbieżny do p . Szybkość zbieżności można określić za pomocą dwóch wielkości:

- rzędu metody,
- i stałej asymptotycznej C błędu metody.

Definicja. Mówimy, że metoda jest rzędu r , jeśli istnieje granica :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|^r} = C \neq 0 \quad (7.4.1)$$

Liczbę C nazywamy stałą asymptotyczną błędu metody.

Uwagi:

1. Jeśli $r = 1$ i $C < 1$ to x_n dąży do p dla dowolnego x_0 - punktu startowego.
2. Jeśli $r > 1$ i x_0 jest dostatecznie bliskie p to x_n zbiega do p .
3. Im większy jest rząd metody i im mniejsza jest stała asymptotyczna błędu, tym szybciej ciąg jest zbieżny do pierwiastka.

Zilustrujemy te uwagi na przykładzie.

Przykład 7.4

Przykład

Załóżmy , że metoda jest rzędu 2, ze stałą asymptotyczną równą 5. Czyli :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|^2} = 5$$

Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje takie N , że dla $n > N$ spełnione są nierówności:

$$5|x_n - p|^2 - \epsilon \leq |x_{n+1} - p| \leq 5|x_n - p|^2 + \epsilon.$$

Oznacza to, że różnica pomiędzy $(n+1)$ -szym przybliżeniem x_{n+1} i dokładnym pierwiastkiem p może przyjmować, dla wystarczająco dużych n wartości dowolnie mało różniące się od $5|x_n - p|^2$

$$|x_{n+1} - p| \approx 5|x_n - p|^2$$

Przyjmijmy, że obliczyliśmy przybliżenie x_n pierwiastka, różniące się od niego o mniej niż 0,1 tzn: $|x_n - p| < 0.1$. Wówczas:

$$|x_{n+1} - p| \cong 5 \cdot (0,1)^2 = 0.05$$

$$|x_{n+2} - p| \cong 5 \cdot (0.05)^2 = 0.0025$$

$$|x_{n+3} - p| \cong 5 \cdot (0,0025)^2 = 0.00003125$$

Widzimy więc, że różnice pomiędzy kolejnymi przybliżeniami i pierwiastkiem dokładnym szybko maleją. Załóżmy, że metoda jest rzędu 3, a stała asymptotyczna równa się 5. Zakładając , że $|x_n - p| < 0.1$ otrzymujemy teraz:

$$|x_{n+1} - p| \cong 5 \cdot (0,1)^3 = 0.005$$

$$|x_{n+2} - p| \cong 5 \cdot (0.005)^3 = 0.00000625$$

Zatem metoda rzędu 3 jest wyraźnie szybsza od metody rzędu 2.

Gdyby wziąć metodę rzędu 2 ze stałą $C = 1$, to przy takiej samej przyjętej dokładności między n -tym przybliżeniem a pierwiastkiem:

$|x_n - p| < 0.1$ dostajemy:

$$|x_{n+1} - p| \cong 0.01$$

$$|x_{n+1} - p| \cong 0.0001$$

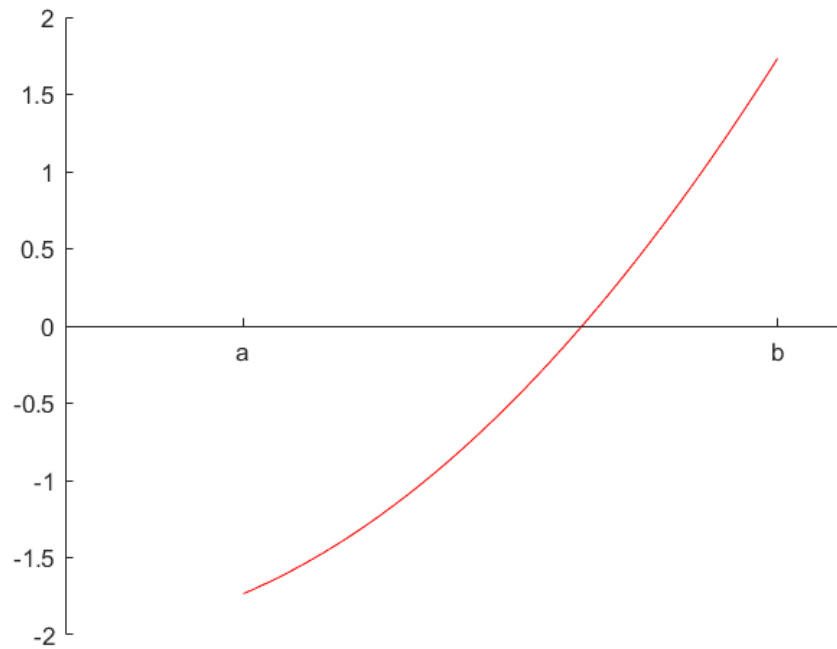
$$|x_{n+3} - p| \cong 0.00000001$$

Metoda rzędu 2 ze stałą 1 jest nieco szybsza od metody rzędu 2 ze stałą 5 , ale wolniejsza od metody rzędu 3 ze stałą większą.

6. Metoda bisekcji

Omówimy teraz najprostsze metody znajdowania pierwiastków równania nieliniowego $f(x) = 0$. Podamy za każdym razem warunki wystarczające i konieczne, aby ciąg iteracyjny był zbieżny do szukanego pierwiastka. W każdej z omawianych metod rozpatrujemy przedział izolacji (a, b) w którym znajduje się aktualnie szukany pierwiastek, jeśli pierwiastków jest więcej - więcej jest przedziałów izolacji, metodę stosujemy po kolei do każdego przedziału izolacji osobno.

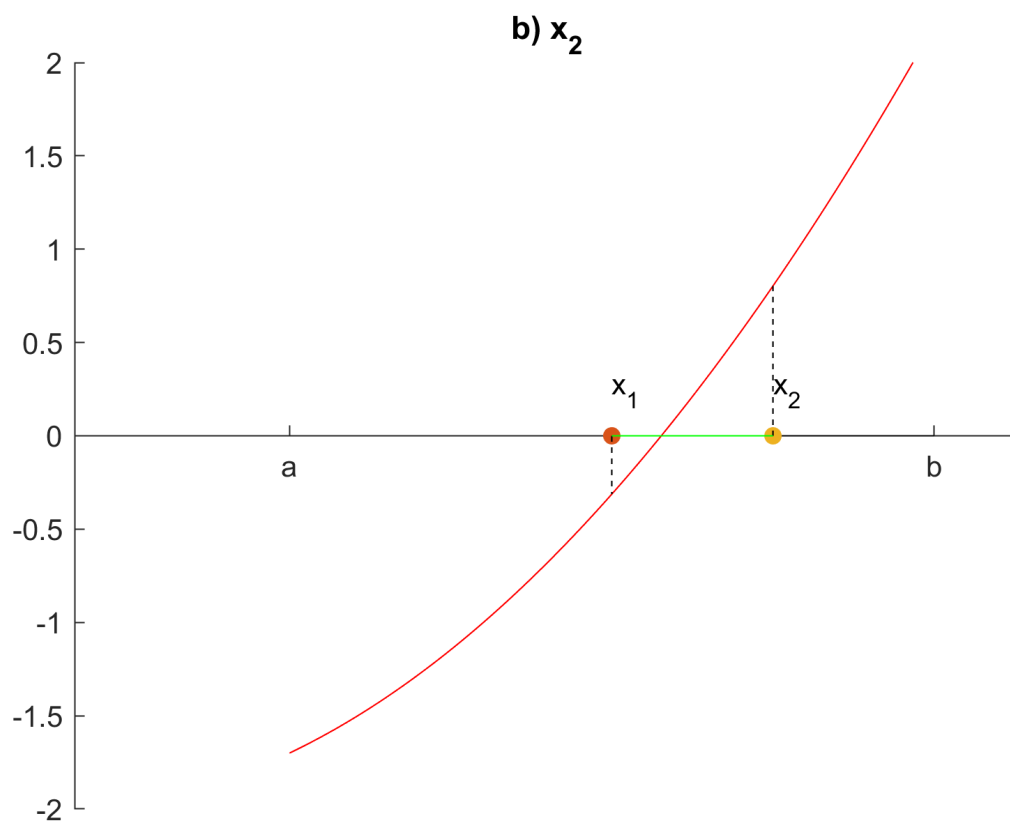
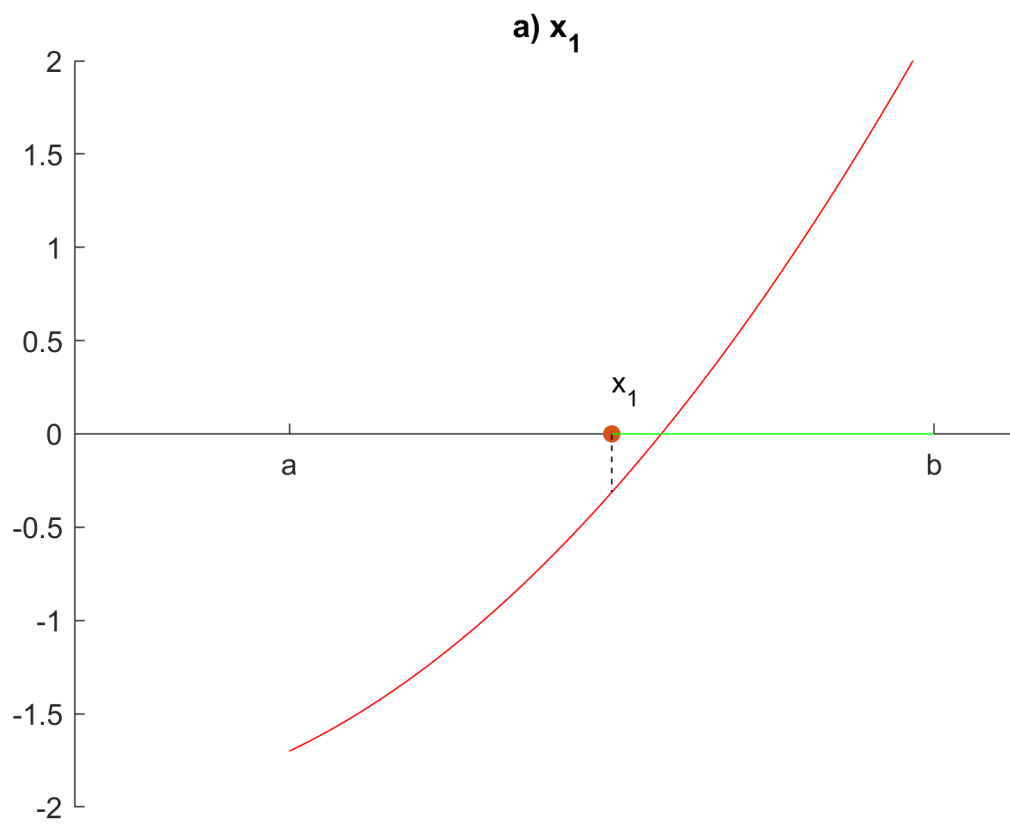
Metoda bisekcji. Założenia: Funkcja f jest funkcją ciągłą na $[a, b]$, oraz $f(a)f(b) < 0$.

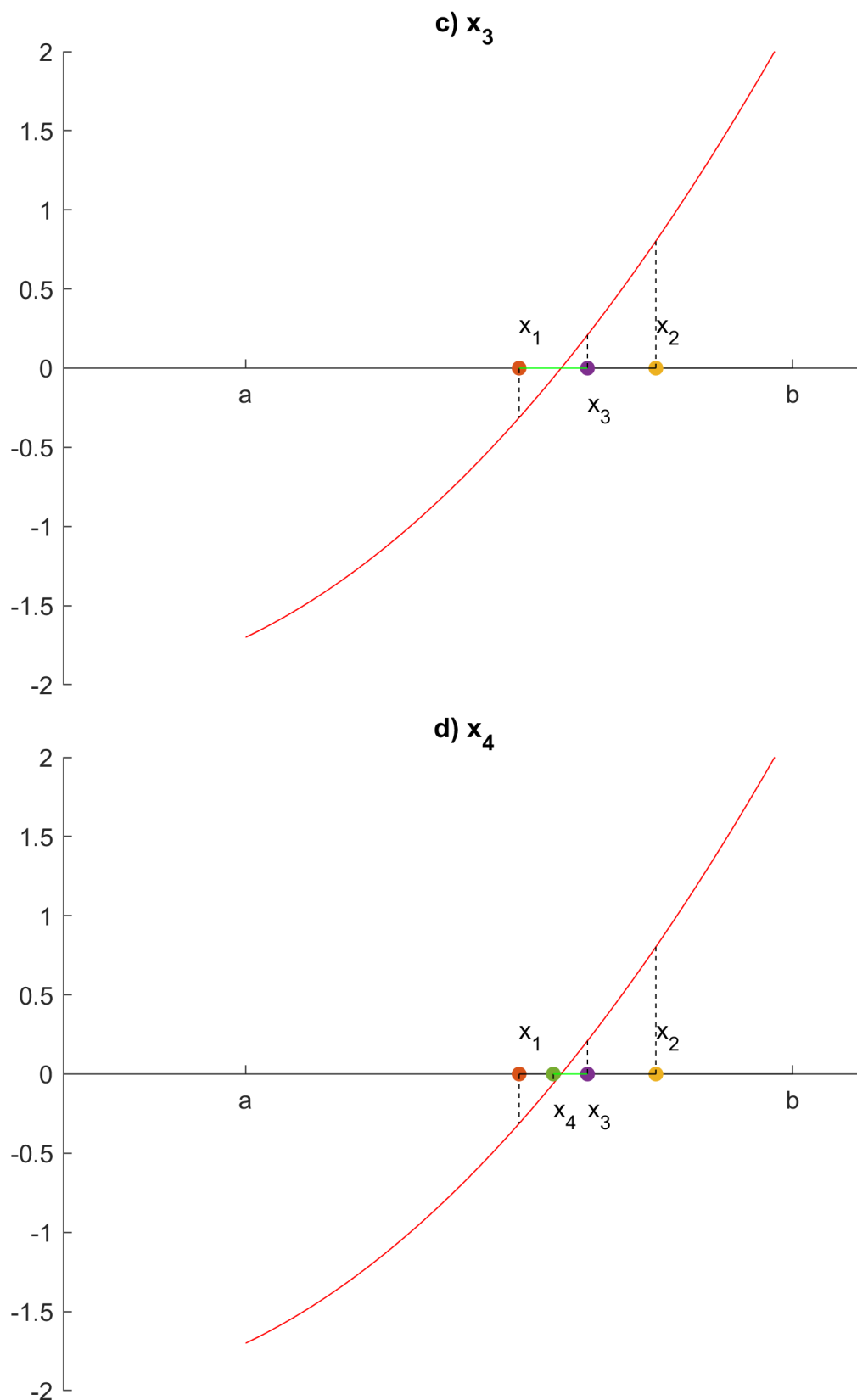


Rys. 7.7. W przedziale $[a, b]$ jest jeden pierwiastek rzeczywisty równania $f(x) = 0$.

Opis metody: Dzielimy przedział $[a, b]$ na połowy punktem: $x_1 = \frac{a+b}{2}$

- a) (Rys. 7.8a) Wybieramy przedział, w którym funkcja zmienia znak, czyli w naszym przypadku $[x_1, b]$,
- b) (Rys. 7.8b) Dzielimy go na połowę punktem x_2 i wybieramy znów przedział, w którym funkcja zmienia znak, w naszym przypadku $[x_1, x_2]$,
- c) (Rys. 7.8c) Dzielimy go na połowę punktem x_3 , wybieramy przedział $[x_1, x_3]$,
- d) (Rys. 7.8d) dzielimy znów na pół punktem x_4 wybieramy przedział $[x_4, x_3]$ itd.





Rys. 7.8. Kolejne cztery iteracje szukanego pierwiastka.

Jeśli $f(x_1) = 0$ to x_1 jest pierwiastkiem równania. Jeśli $f(x_1)$ jest różne od zera to z otrzymanych dwóch podprzedziałów $[a, x_1]$ i $[x_1, b]$ wybieramy ten, w którym funkcja f zmienia znak. Z kolei ten przedział dzielimy na połowy punktem x_2 i badamy wartość funkcji w x_2 oraz znaki w otrzymanych podprzedziałach, wybierając do dalszych obliczeń zawsze ten, w którym funkcja zmienia znak. Otrzymujemy albo po n krokach $f(x_n) = 0$ albo ciąg

podprzedziałów takich, że $f(x_n)f(x_{n+1}) < 0$ przy czym x_n, x_{n+1} są końcami przedziału, a jego długość $|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{2^n}(b-a)$.

Ponieważ, z konstrukcji, lewe końce przedziałów tworzą ciąg niemalejący i ograniczony z góry (przez p), a prawe końce przedziałów tworzą ciąg nierosnący i ograniczony z dołu (przez p), to istnieje granica wspólna dla tych ciągów równa p .

Podstawową zaletą tej metody jest jej prostota i pewność, że w każdej kolejnej iteracji szukany pierwiastek leży między dwiema wartościami zmiennej x , dla których funkcja zmienia znak. Teoretycznie można uzyskać dowolną dokładność przy obliczeniach pierwiastka, stosować iterację tak długo, aż

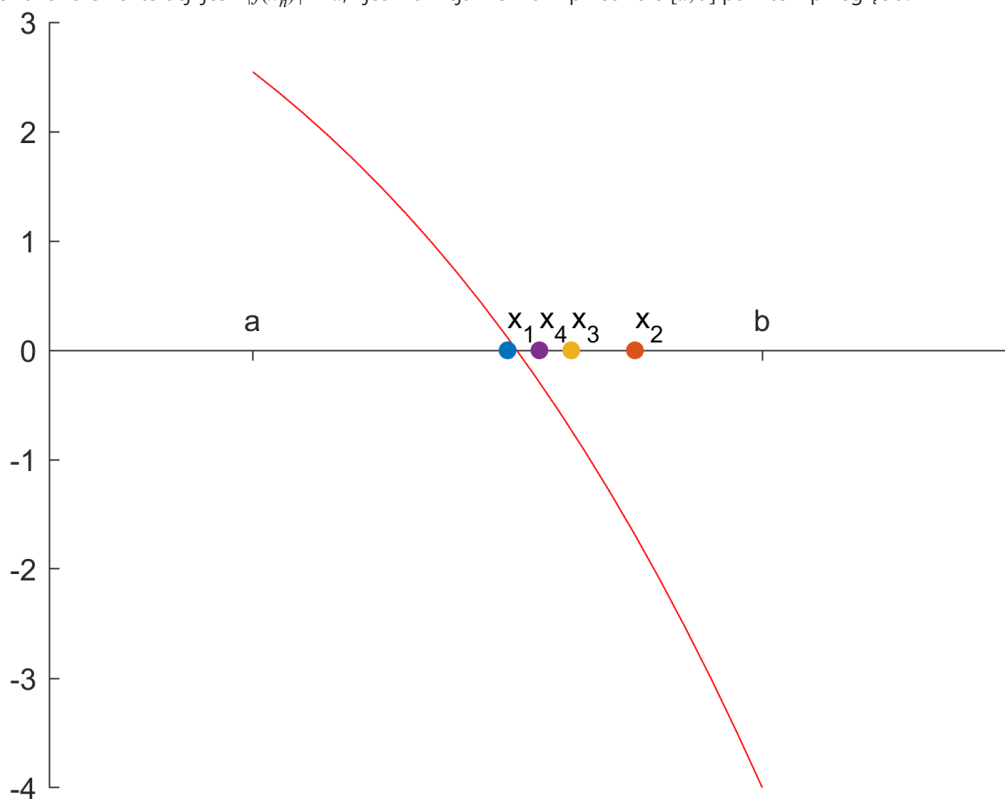
$$|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{2^n}(b-a) < \varepsilon \quad (7.5.1)$$

Jednak przy dużej ilości kroków, błędy zaokrągleń mogą nie dopuścić do otrzymania żądanej dokładności. Metoda ta jest wolno zbieżna, bo z konstrukcji wynika, że przedziały mają za każdym razem mniejszą długość tylko o połowę. Rząd metody bisekcji jest równy 1.

Przykład 7.5

Przykład

Szukamy pierwiastka wielomianu $f(x) = x^8 - 10x^6 + 5$ w przedziale $[a, b]$, gdzie $a = 0.8, b = 1$ z dokładnością $d = 0.0001$, gdzie dokładność oznacza dla nas zakończenie iteracji jeśli $|f(x_n)| < d$, i jeśli funkcja nie ma w przedziale $[a, b]$ punktów przegięcia.



Rys. 7.9. Ilustracja graficzna 4 iteracji.

Na rysunku pokazany jest wielomian w rozpatrywanym przedziale. Widać, że funkcja f nie ma punktów przegięcia w tym przedziale, i zmienia znak w $[a, b]$. Punkt $x_1 = \frac{a+b}{2} = 0.9$.

Otrzymujemy następujące wyniki, ciąg $\{x_n\}$ dla $j = 1, \dots, 13$

[0.9000

```

0.9500
0.9250
0.9125
0.9062
0.9031
0.9047
0.9039
0.9035
0.9037
0.9036
0.9037
0.9036 ]

```

Ciąg $\{x_n\}$ nie jest monotoniczny, oscyluje wokół pierwiastka p wielomianu $f(x)$.

Ostatnia iteracja daje nam pierwiastek z podaną dokładnością $x_{13} = 0.903638$ i $f(x_{13}) = 0.000016$.

Jeśli warunkiem stopu będzie warunek $|x_{n-2} - x_{n-1}| < d$ to dostaniemy jako pierwiastek 11-tą iterację $x_{11} = 0.903613$ i wartość funkcji $f: f(x_{11}) = 0.000771$.

Oto skrypt w MATLABie rozwiązujący zadanie oraz generujący powyższy wykres

```

a=0.8;
b=1;
f = @(x) (x.^8)-10*x.^6+5;
xd = a:0.01:b;

% konfiguracja ładnego wykresu
close all
figure
set(gca,'visible','off')
axes('color','none','YAxisLocation','origin','XAxisLocation','origin')
hold on
plot(xd,f(xd),'r')
xlim([a-0.1*a,b+b*0.1*b]);
xticks([a, b])
xlabel('a','b')

% w tej zmiennej zapamiętamy wyniki poszczególnych iteracji
X_i = []
d = 1e-4;
for i=1:100
    x = (a+b)/2
    X_i = [X_i x];

    % rysujemy tylko cztery pierwsze punkty
    if i < 5
        scatter(X_i,0,'filled');
        text(x,0.25, sprintf('x_%d',i))
    end

    % wybieramy przedział do kolejnej iteracji
    if (f(a)*f(x) < 0)
        b = x;
    else
        a = x;
    end

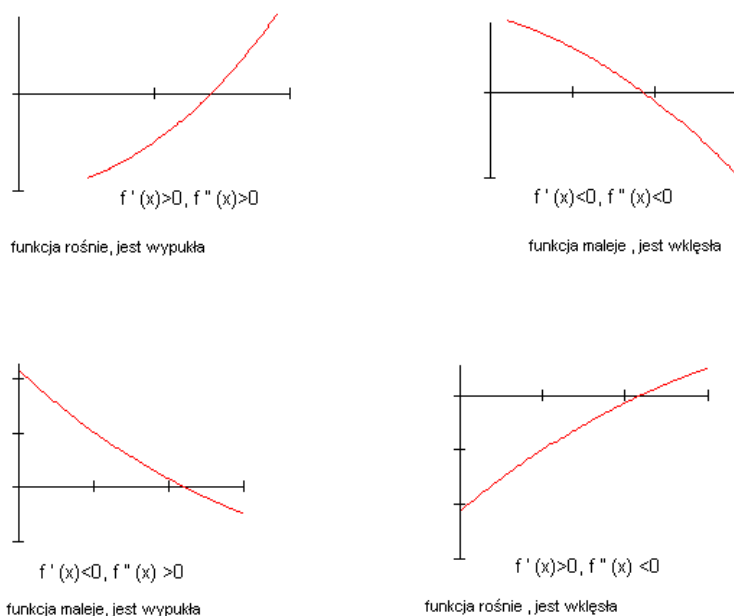
    % kryterium stopu procedury
    if (i>1) && (abs(X_i(end-1) - X_i(end))\(< \lt d \))

        break;
    end
end
X_i'
f(x)

```


7. Metoda siecznych

Założenia: Funkcja f jest klasy $C^2(a,b)$, zmienia znak w przedziale (a, b) oraz pochodne pierwsza i druga mają stały znak w rozpatrywanym przedziale. To znaczy, że w przedziale izolacji (a, b) może zachodzić któryś z czterech podanych na rysunkach przypadków:



Rys 7.10. *Możliwe przypadki wykresów funkcji f w przedziale izolacji (a, b) .*

Na rysunku opieramy się o przypadek, kiedy pierwsza i druga pochodna są dodatnie i startujemy z punktu $(b = x_0)$ oraz z punktu (x_1) leżącego po lewej stronie (b) , ale po prawej stronie od pierwiastka.

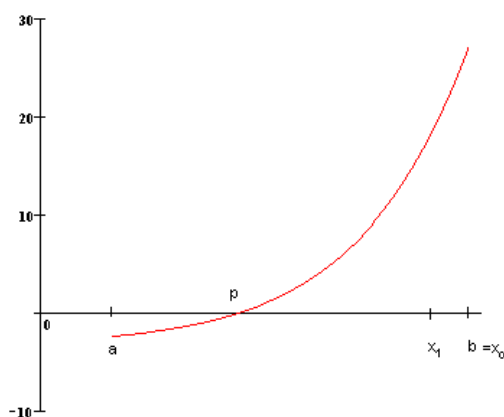
Opis metody: Metoda siecznych jest metodą dwukrokową, startujemy z dwóch punktów (x_0) i (x_1) takich, że $f(x_0)f'(x_0) > 0$, $f(x_1)f'(x_1) > 0$. Przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ prowadzimy sieczną i przecinamy ją z osią (Ox) , punkt przecięcia wyznacza następną iterację (x_2) .

$$\begin{aligned} & y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_1) \\ & \text{dla } y = 0 \end{aligned}$$

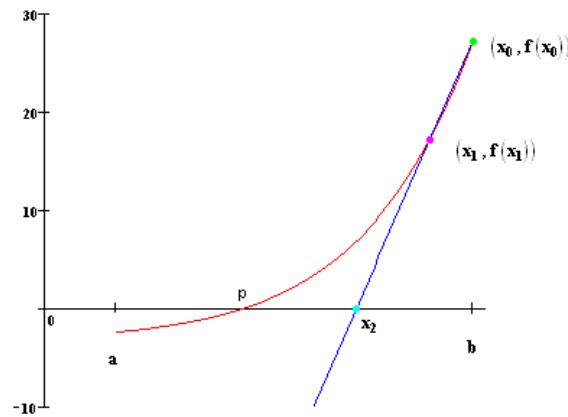
stąd

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

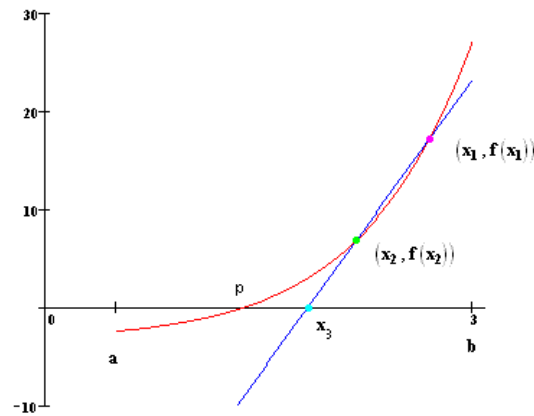
Jeśli $f(x_2) = 0$ to (x_2) jest pierwiastkiem, jeśli nie, przez punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ prowadzimy sieczną i przecinamy ją z osią (Ox) , dostajemy następną iterację: $x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$.



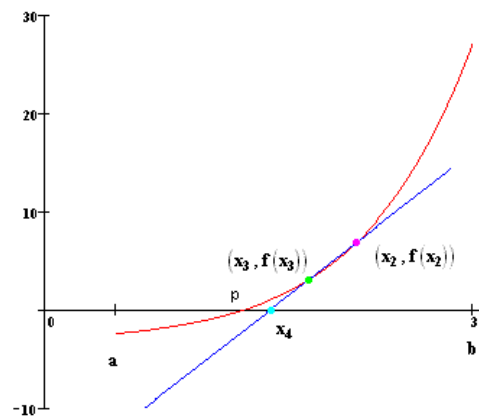
a) Przez punkty $((x_0, f(x_0)))$ i $((x_1, f(x_1)))$ prowadzimy prostą i przecinamy ją z osią (Ox) , punkt przecięcia oznaczamy przez (x_2) ,



b) Przez punkty $((x_1, f(x_1)))$ i $((x_2, f(x_2)))$ prowadzimy prostą i przecinamy ją z osią (Ox) , punkt przecięcia oznaczamy przez (x_3) ,



c) Przez punkty $((x_2, f(x_2)))$ i $((x_3, f(x_3)))$ prowadzimy prostą i przecinamy ją z osią Ox , punkt przecięcia oznaczamy przez (x_4) itd.,



Rys. 7.11. Kolejne trzy iteracje w metodzie siecznych.

Postępując kolejno w wyżej opisany sposób otrzymamy wzór ogólny na ciąg iteracyjny:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (7.6.1)$$

Jeśli nie będziemy przestrzegać spełnienia warunków na punkty startu, ciąg może być zbieżny do pierwiastka, ale nie zawsze (przykład 7.7).

Dla tej metody jest prawdziwe twierdzenie:

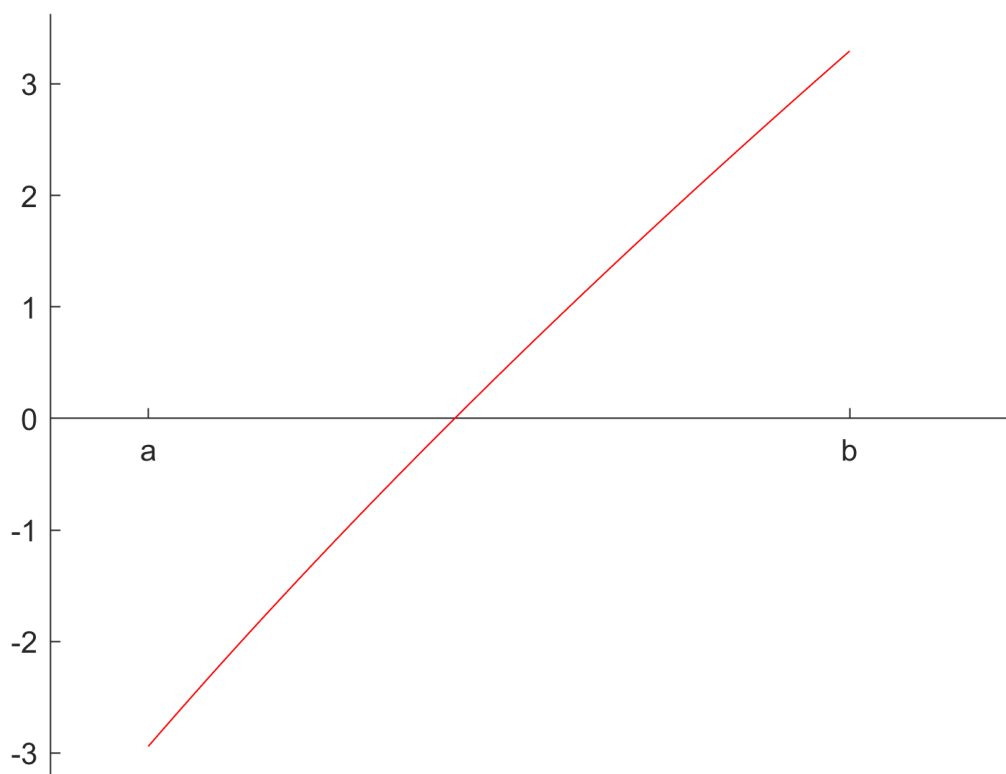
Twierdzenie

Jeśli w otoczeniu $\{x-p|<\delta\}$ pierwiastka $\{p\}$ równania $\{f(x)=0\}$ funkcja $\{f\}$ ma ciągłą drugą pochodną, a pierwsza i druga pochodna jest różna od zera w tym otoczeniu oraz przybliżenia $\{x_0\}$ i $\{x_1\}$ (są różne) są dostatecznie bliskie pierwiastka p , to metoda siecznych jest zbieżna, jej rząd jest równy $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\approx 1.618\dots$, a stała asymptotyczna błędów jest równa $\left(C=\left(\frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|}\right)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$.

Przykład 7.6

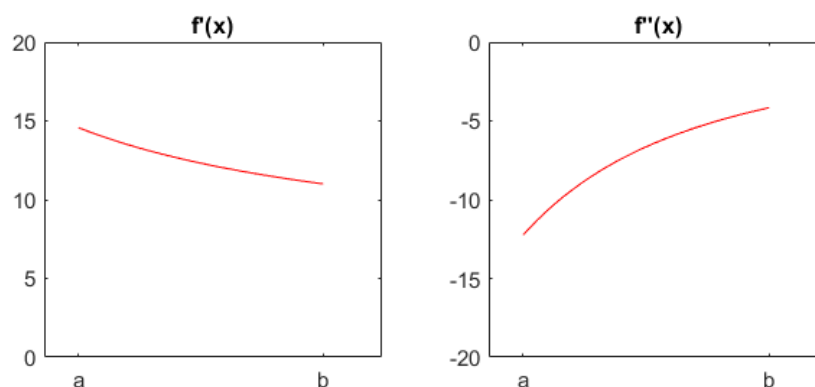
Przykład

Rozpatrujemy równanie: $6x+6\ln x-5=0$ w przedziale $(0.7, 1.2)$ z dokładnością $(d=10^{-8})$.



Rys. 7.12. Wykres funkcji $\{f\}$ w podanym przedziale.

Na rysunku widać, że funkcja zmienia znak w danym przedziale. Na następnych rysunkach są zilustrowane pierwsza i druga pochodna funkcji $\{f\}$ w tym samym przedziale.



Rys. 7.13. Wykresy pochodnych funkcji $f(x)$.

Widać, że pierwsza pochodna jest dodatnia w rozpatrywanym przedziale, a druga pochodna jest ujemna w $[a, b]$. Spełnione są założenia dla metody siecznych, pochodne są ciągłe i nie zmieniają znaku w $[a, b]$.

Możemy zastosować metodę siecznych, wybierając za punkty startu takie punkty, w których funkcja ma taki sam znak jak druga pochodna. Ponieważ druga pochodna jest ujemna wybieramy punkty po lewej stronie pierwiastka, w którym funkcja też jest ujemna

$(X_0=a, x_1=a+0.01)$

Za pomocą wzoru iteracyjnego na x_{n+1} dostajemy wektor iteracji, wzór jest przeliczany tak długo dopóki nie będzie osiągnięta dokładność, tzn. aż $|f(x_n)| < d$. Gdzie d jest stosunkowo małą założoną przez nas liczbą, która stanowi kryterium zbieżności.

Wektor iteracji:

$$\begin{aligned} & x_j = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.71 \\ 0.9026114008 \\ 0.9173854594 \\ 0.9184219035 \\ 0.91842661 \\ 0.9184266114 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest: $x_6 = 0.9184266114$, dla którego $f(x_6) = -2,309 \cdot 10^{-14}$.

Przykładowa implementacja w MATLABie:

```
a=0.7;
b=1.2;
f = @(x) 6*x+6*log(x)-5;

x = [a a+0.01];
d = 1e-13;
max_iter = 20;
iter = 1;
n=2;
while abs(f(x(n))) > d && iter < max_iter
    x(n+1) = x(n) - f(x(n))*(x(n)-x(n-1)) / (f(x(n)) - f(x(n-1)));
    iter = iter + 1;
    n = n + 1;
end
format long
x
format short
```

Uruchomienie programu daje wynik:

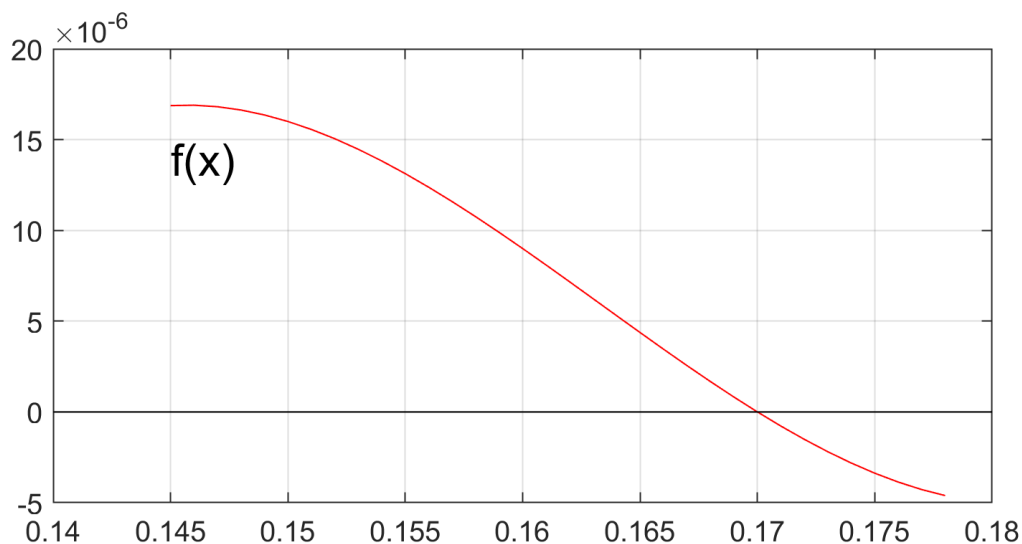
```
x =
    0.700000000000000    0.710000000000000    0.902611400765419    0.917385459390865    0.918421903512899    0.918426609980826
    0.918426611372439
```

Przykład 7.7

Przykład

Przykład ilustruje sytuację, w której nie są spełnione założenia przy jakich możemy stosować tę metodę. Dane jest równanie: $x^3 - 0.49x^2 + 0.0791x - 0.004199 = 0$

Szukamy pierwiastka tego równania w przedziale $[0.145, 0.178]$. Pierwiastek istnieje, bo jak widać na rysunku, funkcja zmienia znak, ten pierwiastek jest blisko punktu 0.17.

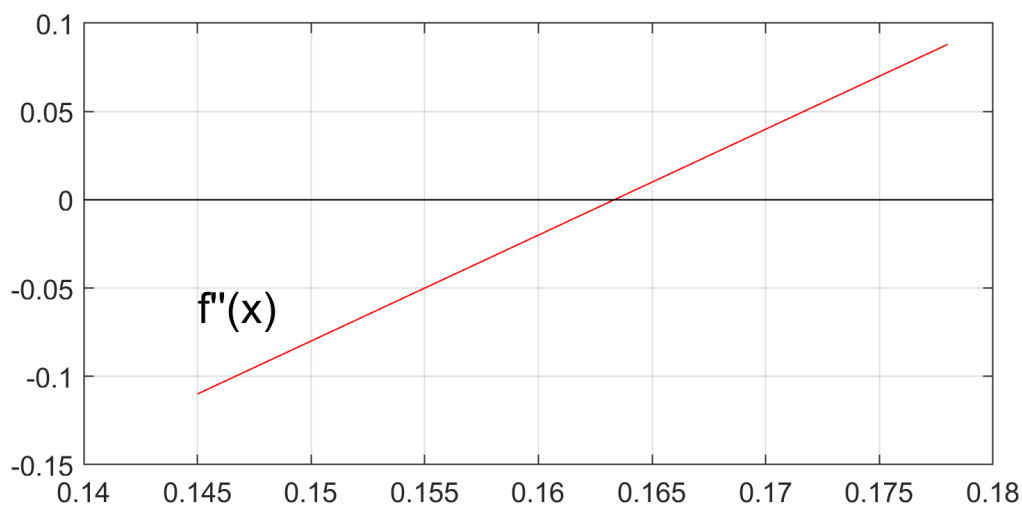


Rys. 7.14. Wykres funkcji $f(x)$ w podanym przedziale.

Znajdziemy ten pierwiastek metodą siecznych. Startujemy z punktów: $x_0 = a$ i $x_1 = a + 0,01$ i stosujemy wzór:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Dostajemy dla 10 iteracji $x_{10} = 0.19$ i $f(x_{10}) = 0$. Jednak **to nie jest pierwiastek z tego przedziału**, nasz pierwiastek był blisko punktu 0.17. Dlaczego tak się stało? Pochodna druga zmienia znak w tym przedziale, w dodatku wystartowaliśmy ze złych punktów. Ponieważ wykres drugiej pochodnej jest następujący:



Rys. 7.15. Wykres drugiej pochodnej, która zmienia znak w rozpatrywanym przedziale.

Przedział nie może być w tym wypadku taki duży, powinniśmy zmienić go na $[0.165, 0.178]$ i sprawdzić pozostałe założenia.

8. Metoda stycznych - Newtona

Podobnie jak w metodzie siecznych w metodzie stycznych założymy, że funkcja f jest klasy $C^2(a,b)$, zmienia znak w przedziale (a, b) oraz pochodne pierwsza i druga mają stały znak w rozpatrywanym przedziale. To znaczy, że w przedziale izolacji (a, b) może zachodzić któryś z czterech podanych na rysunku 7.10 przypadków.

Opis metody: Metodę opiszemy korzystając z przypadku pierwszego, kiedy pierwsza pochodna jest dodatnia (funkcja rośnie) i druga pochodna jest dodatnia (funkcja jest wypukła).

Jako punkt startu obieramy taki punkt x_0 , w którym funkcja ma taki sam znak jak druga pochodna: $f(x_0)f''(x_0) > 0$, w naszym przypadku punkt b - ponieważ w tym punkcie funkcja jest dodatnia tak jak druga pochodna. Z punktu $(x_0, f(x_0))$ wystawiamy styczną do krzywej $y = f(x)$. Równanie stycznej ma postać:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{notag}$$

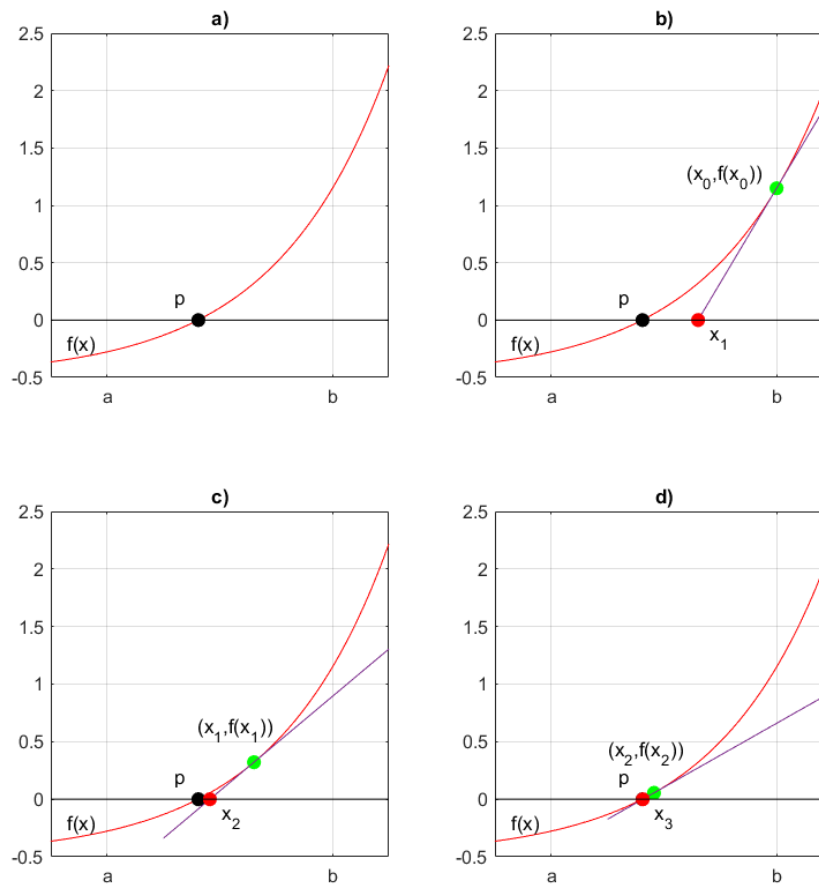
Przecinamy styczną z osią Ox i otrzymany punkt przecięcia jest pierwszym przybliżeniem pierwiastka. Wstawiając zatem za y zero a za x wartość x_1 otrzymujemy:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{notag}$$

Jeśli $f(x_1) = 0$ to x_1 jest pierwiastkiem, jeśli nie, postępujemy analogicznie dalej, z punktu $(x_1, f(x_1))$ wystawiamy styczną do krzywej i przecinamy ją z osią Ox : $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$, przyjmujemy $y = 0$, i otrzymujemy: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Na rysunku 7.16 przedstawione zostały kolejne iteracje metody Newtona dla przykładowej funkcji z dodatnimi wartościami pierwszej i drugiej pochodnej $f(x)$. Kolejne rysunki przedstawiają:

- a) - przebieg funkcji $f(x)$ z poszukiwanym pierwiastkiem p ,
- b) Przez punkt $(x_0, f(x_0))$ prowadzimy styczną do $f(x)$ i przecinamy ją z osią Ox , punkt przecięcia oznaczamy przez x_1 ,
- c) Przez punkt $(x_1, f(x_1))$ prowadzimy styczną i przecinamy ją z osią Ox , punkt przecięcia oznaczamy przez x_2 ,
- d) Przez punkt $(x_2, f(x_2))$ prowadzimy styczną i przecinamy ją z osią Ox , punkt przecięcia oznaczamy przez x_3 .



Rys. 7.16. a) Przebieg funkcji $f(x)$ i b), c), d) kolejne trzy iteracje w metodzie stycznych.

Powtarzając w ten sposób budowanie kolejnej iteracji otrzymujemy ciąg iteracyjny $\{x_n\}$ określony wzorem :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7.7.1)$$

Ciąg ten przy podanych założeniach jest zbieżny do szukanego pierwiastka α . Może się zdarzyć, że startując z innego punktu, nie spełniającego podany warunek $f(x_0)f''(x_0) > 0$, ciąg iteracyjny też będzie zbieżny do szukanego pierwiastka, ale bez tego warunku nie mamy gwarancji, że ciąg $\{x_n\}$ zbiega do α (przykład 7.9).

Dla tej metody jest prawdziwe twierdzenie:

Twierdzenie

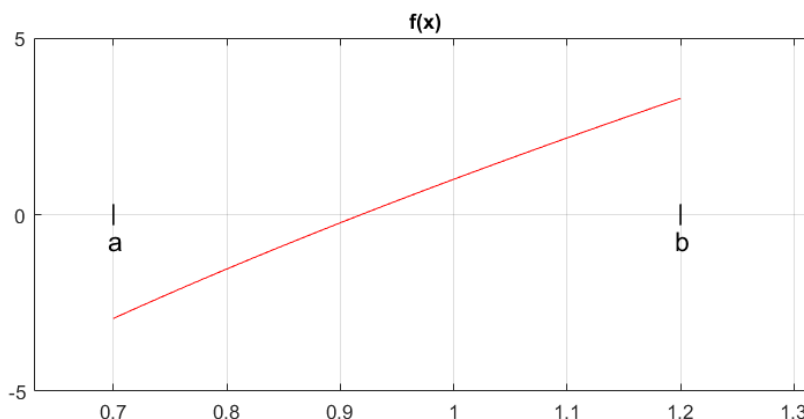
Jeżeli w otoczeniu $(|x-p| < \delta)$ pierwiastka (p) równania $(f(x)=0)$ funkcja (f) ma ciągłą drugą pochodną oraz pierwsza i druga pochodna są różne od zera w tym otoczeniu oraz (x_0) leży wystarczająco blisko pierwiastka (p) , to metoda Newtona jest rzędu 2 ze stałą asymptotyczną błędu $(C = \frac{f''(p)}{2f'(p)})$.

Metoda Newtona jest szybkozbieżną metodą jednokrokową wymagającą na każdym kroku obliczania jednej wartości funkcji i jednej wartości pierwszej pochodnej.

Przykład 7.8

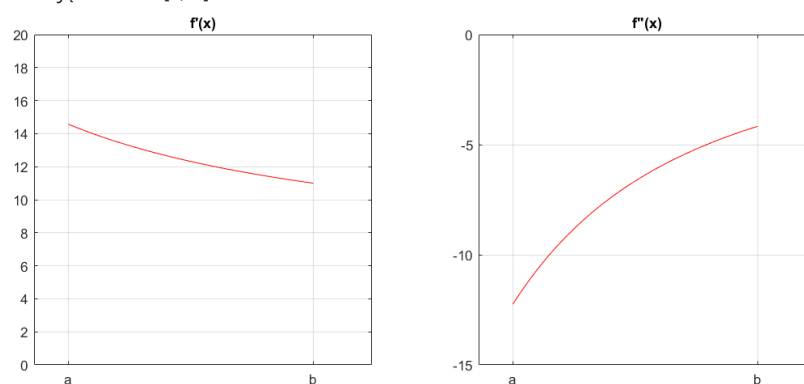
Przykład

Rozpatrujemy równanie : $(6x + 6 \ln x - 5 = 0)$ w przedziale $([0.7, 1.2])$. Na rysunku 7.17 widać, że funkcja zmienia znak w danym przedziale



Rys. 7.17. Wykres funkcji (f) w przedziale $[0.7, 1.2]$.

Na rysunkach 7.18a i 7.18b zilustrowane są pierwsza i druga pochodna funkcji (f) w tym samym przedziale. Widać, że pierwsza pochodna jest dodatnia w rozpatrywanym przedziale, a druga pochodna jest ujemna w $[a, b]$. Spełnione są założenia dla metody Newtona, pochodne są ciągłe i nie zmieniają znaku w $[a, b]$.



Rys. 7.18. Wykres pochodnych w rozpatrywanym przedziale.

Możemy zastosować metodę Newtona przyjmując za punkt startu ten koniec przedziału $([a, b])$, dla którego jest spełniony warunek $(f(x_0)f''(x_0) > 0)$. W tym przypadku jest to punkt (a) , zatem $(x_0 = a)$. Dla dokładności $(d = 10^{-8})$ otrzymujemy 4 iteracje i $(x_4 = 0.9184266114)$ jest przybliżonym pierwiastkiem równania oraz $(f(x_4) = 0)$ (przyjmujemy za zero wszystkie liczby mniejsze niż (10^{-15})).

Wektor iteracji ma postać: $(j = 0, 1, 4)$

$(\begin{aligned} &x_j = \end{aligned})$	$(\begin{aligned} &0.7 \end{aligned})$	$(\begin{aligned} &0.9017681142 \end{aligned})$	$(\begin{aligned} &0.9183466866 \end{aligned})$	$(\begin{aligned} &0.9184266096 \end{aligned})$	$(\begin{aligned} &0.9184266114 \end{aligned})$
--	--	---	---	---	---

Ten sam przykład, dla tej samej dokładności obliczyliśmy w poprzednim temacie metodą siecznych. Aby otrzymać żadaną dokładność

trzeba było dla tamtej metody wziąć o dwie iteracje więcej. Metoda stycznych (Newtona) jest zatem szybciej zbieżną metodą.

Przykład 7.18

Przykład

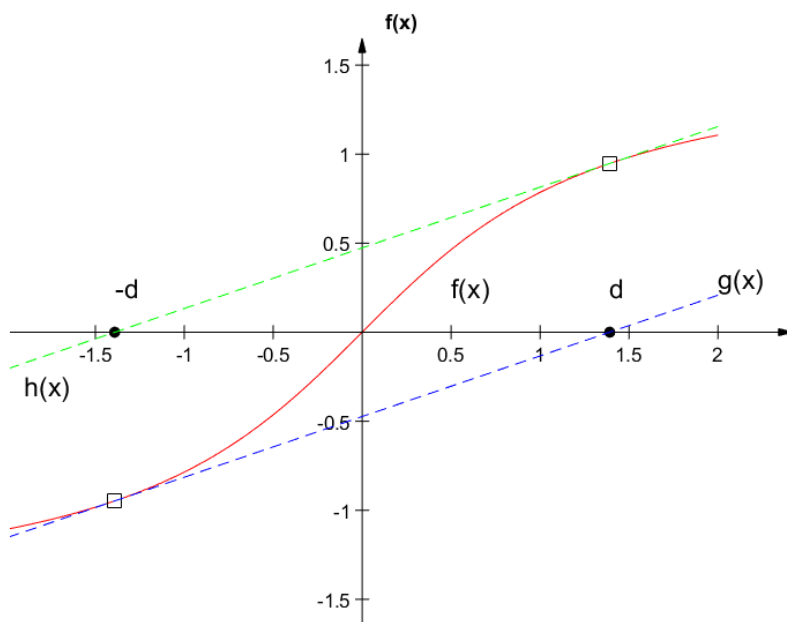
Rozpatrujemy równanie $\arctan(x) = 0$ w przedziale $[-2, 2]$. Jako punkt startu, w celu demonstracji zjawiska zapętlenia, obieramy dokładny pierwiastek równania:

$$\arctan\left(x - \frac{2x}{1+x^2}\right) = 0$$

Oznaczmy ten pierwiastek przez d i w przybliżeniu równa się on 1.39125043 . Będziemy stosować metodę Newtona dla równania: $\arctan(x) = 0$ z punktem startowym $x_0 = d$.

Wystawiamy z punktu $(d, f(d))$ styczną do krzywej $\arctan(x)$: $g(x) = f'(d)(x-d) + f(d)$ i przecinamy ją z osią Ox wyznaczając punkt x_1 .

Okazuje się że punkt przecięcia będzie $x_1 = -d$. Jeśli z punktu $(-d, f(-d))$ wystawimy do krzywej $\arctan(x)$ styczną: $h(x) = f'(-d)(x+d) + f(-d)$ i przetniemy ją z osią Ox dostaniemy znów punkt $x_2 = d$. W ten sposób metoda Newtona "zapętliła" się i ze wzoru Newtona dostajemy na zmianę punkty d i $-d$ jako kolejne iteracje, a widać na rysunku, że pierwiastkiem równania jest $p=0$.



Rys. 7.19. Wykres funkcji $f(x)$ i stycznych wychodzących z punktów $(d, f(d))$ i $(-d, f(-d))$.

To zapętlenie wynika z tego, że druga pochodna zmienia znak w przedziale $[-2, 2]$, ma w zerze punkt przegięcia. Nie są zatem spełnione założenia podane do metody Newtona.

9. Pierwiastki wielokrotne

Metody iteracyjne wymagają na ogół, aby szukany pierwiastek był pierwiastkiem jednokrotnym. Tak jest przy metodzie Newtona i metodzie siecznych. Metoda bisekcji dopuszcza pierwiastki nieparzystokrotne, przy parzystokrotnych funkcja nie zmienia znaku w przedziale izolacji. Na ogół nie znamy krotności szukanych pierwiastków.

Wprowadzamy funkcję pomocniczą $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ i rozwiązujemy równanie $u(x) = 0$ zamiast równania $f(x) = 0$. Równanie $u(x) = 0$ ma takie same pierwiastki jak równanie $f(x) = 0$, ale wszystkie są jednokrotne.

Ponieważ:

$$u'(x) = \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

wzory na metodę Newtona i metodę siecznych przybierają postać:

dla metody Newtona (stycznych):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)} \quad (7.8.1)$$

gdzie $u'(x) = 1 - \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$

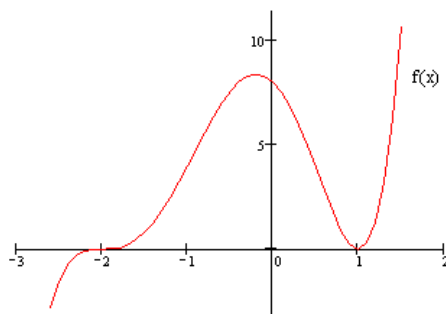
dla metody siecznych:

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})} \quad (7.8.2)$$

Przykład 7.19

Przykład

Funkcja nieliniowa $f(x) = (x-1)^2(x+2)^3$ będzie wielomianem stopnia piątego mającym jeden pierwiastek dwukrotny i jeden trzykrotny.

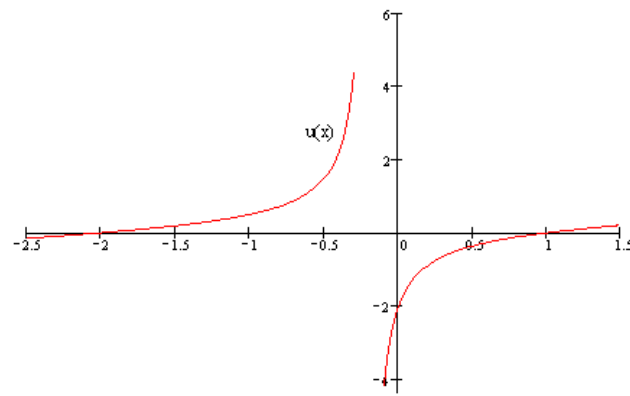


Rys. 7.20. Wykres funkcji $f(x)$.

Obliczymy jej pochodną i następnie wprowadzimy funkcję $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2(x+2)^3 \\ f'(x) &= 2(x-1)(x+2)^3 + 3(x-1)^2(x+2)^2 \\ u(x) &= \frac{(x-1)^2(x+2)^3}{2(x-1)(x+2)^3 + 3(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{5x+1} \end{aligned}$$

Równanie $u(x) = 0$ ma dwa pierwiastki, takie jak funkcja $f(x)$ ale są już jednokrotne. Funkcja $u(x)$ nie jest ciągła na całej osi \mathbb{R} , ale istnieją przedziały izolacji pierwiastków, w których jest ciągła i ma ciągłe pochodne.



Rys. 7.21. Wykres funkcji u .

10. Układy równań nieliniowych

Dany jest układ (n) równań nieliniowych z (n) niewiadomymi:

$$\left(\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right) \quad (7.9.1)$$

który będziemy zapisywać wektorowo: $(F(x)=0)$, gdzie $(x \in \mathbb{R}^n); (F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

Warunki istnienia rozwiązań układu są znacznie trudniejsze do sprawdzenia, a nawet nie można sformułować jednolitego kryterium istnienia rozwiązania bez założenia szczególnych własności odwzorowania (F) , takich jak różniczkowalność itd. Będziemy zakładać istnienie rozwiązania układu $(F(x)=0)$ i ograniczymy się do jednej metody: poszukiwania rozwiązań metodą Newtona.

Rozpatrzmy metodę iteracyjną jednokrokową daną ogólnym wzorem: $(x^{(k)} = G(x^{(k-1)}))$ i wektor początkowy $(x^{(0)})$, który będziemy dobierać dostatecznie blisko rozwiązania.

Definicja

Niech $(G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$. Punkt (w) nazywamy punktem przyciągania metody iteracyjnej (ewentualnie punktem stacjonarnym), jeżeli istnieje takie otoczenie U tego punktu, że obierając dowolny wektor początkowy $(x^{(0)})$ z tego otoczenia uzyskamy ciąg punktów $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})$ zbieżny do (w) . Największe z tych otoczeń nazywamy obszarem przyciągania punktu (w) (punktu stacjonarnego).

Oznaczmy przez :

$$(F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}) \quad (7.9.2)$$

oraz

$$(J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}) \quad (7.9.3)$$

Jeśli funkcje $(f_i(x))$ są różniczkowalne w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu (p) , w którym $(F(p)=0)$, i macierz $(J(x))$ jest w tym otoczeniu nieosobliwa, to jeśli wektor startu dobierzemy odpowiednio blisko punktu (p) to punkt (p) jest punktem przyciągania metody iteracyjnej danej wzorem (metoda Newtona):

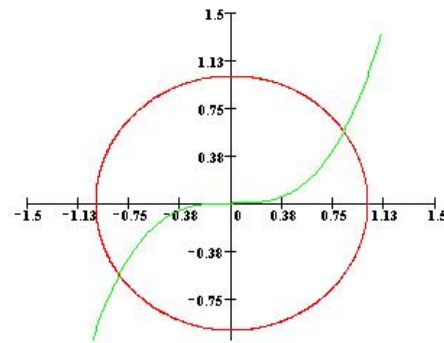
$$(x^{(n+1)} = x^{(n)} - (J(x^{(n)}))^{-1} F(x^{(n)})) \quad (7.9.4)$$

Przykład 7.20

Przykład

Rozpatrujemy układ równań:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ & x^3 - y = 0 \end{aligned}$$



Rys. 7.22. Graficzna interpretacja układu.

Na rysunku czerwona linia opisuje pierwsze równanie, zielona drugie. Widać, że krzywe przecinają się w dwóch punktach, układ ma dwa rozwiązania. Lewą stronę pierwszego równania oznaczmy przez $f_1(x,y)$, lewą stronę drugiego równania oznaczmy przez $f_2(x,y)$. Oznaczmy przez:

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} \text{ oraz } J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Znajdziemy rozwiązanie w pierwszej ćwiartce. Jako wektor startu bierzemy (odczytujemy z rysunku), wektor z ma pierwszą współrzędną x a drugą y .

$$z^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Korzystając ze wzoru Newtona dla układów równań:

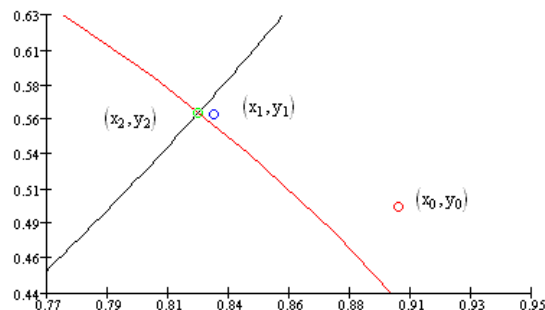
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - J(x^{(n)}, y^{(n)})^{-1} F(x^{(n)}, y^{(n)})$$

dostajemy dokładności $d = 10^{-8}$, tzn. $|f(z^{(n)})| < d$ całą macierz iteracji, w kolumnach której są kolejne wektory iteracyjne:

$$z = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.831678 & 0.826062 & 0.826031 \\ 0.5 & 0.562979 & 0.563608 & 0.563624 \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem jest trzecia iteracja skąd $x = 0.826031$, a $y = 0.563624$.

Na rysunku, w dużym powiększeniu, czerwone kółeczko to punkt startu, pierwsze przybliżenie to niebieskie kółeczko, drugie przybliżenie to zielone kółeczko, a rozwiązanie przybliżone, czyli trzecia iteracja pokrywa się na rysunku z drugą.



Rys. 7.23. Kolejne trzy iteracje rozwiązania układu.

Wartość funkcji wektorowej opisującej równania jest dla tego rozwiązania następująca:

$$F(z^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.19 \cdot 10^{-9} \\ 2.294 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}$$

Jeśli będziemy brać jako wektor startu wektor o współrzędnych o przeciwnych znakach

$$z^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

dostaniemy symetryczne rozwiązanie $x = -0.826031$, a $y = -0.563624$.

Przykład rozwiązyany w MATLABie w postaci implementacji naiwnej - ręcznie wpisywanych iteracji, oraz w postaci algorytmicznej.


```
% Implementacja naiwna (niezalecana)

% w poniższych wzorach przyjęta: x(1) - x, x(2) - y
F = @(x) ([x(1).^2 + x(2).^2 - 1; x(1).^3 - x(2)]);
DF = @(x) ([2*x(1) 2*x(2); 3*x(1)^2 -1]);

x0 = [0.9
      0.5];

x1 = x0 - inv(DF(x0))*F(x0);
x2 = x1 - inv(DF(x1))*F(x1);
x3 = x2 - inv(DF(x2))*F(x2)

F(x3)

% Implementacja algorytmiczna,
% z określeniem maksymalnej liczby iteracji
x0 = [0.9
      0.5];
X = [x0];

max_iter = 10;
n = 1;
d = 1e-8;
while (n < max_iter && norm(F(X(:,n))) > d)
    X(:,n+1) = X(:,n) - inv(DF(X(:,n)))*F(X(:,n));
    % lub wydajniej, aby uniknąć odwracania macierzy
    % X(:,n+1) = X(:,n) - DF(X(:,n)) \ F(X(:,n));
    n = n+1;
end

n
F(X(:,n))
format long
X
format short
```

W wyniku uruchomienia skryptu otrzymamy wynik:

```
x3 =
    0.8260
    0.5636

ans =
    1.0e-08 *
    0.1190
    0.2294

n =
    4

ans =
    1.0e-08 *
    0.1190
    0.2294

X =
Columns 1 through 3
    0.900000000000000    0.831678486997636    0.826061782413291
    0.500000000000000    0.562978723404255    0.563607908816801
Column 4
    0.826031358607699
    0.563624161819281
```