

Chłodzenie pręta w oleju

Kinga Kondraciuk

319941

1 Wstęp teoretyczny

W projekcie analizujemy proces chłodzenia rozgrzanego metalowego pręta, który zostaje zanurzony w oleju chłodzącym. Gdy pręt trafia do dużo chłodniejszego oleju, zaczyna oddawać mu ciepło. Powoduje to stopniowy spadek temperatury pręta oraz jednoczesny wzrost temperatury cieczy. W modelu zakładamy, że w krótkim czasie oddawanie ciepła do otoczenia jest pomijalne, dlatego traktujemy olej jako układ izolowany od środowiska.

Dodatkowym uproszczeniem jest przyjęcie, że zarówno pręt, jak i olej mają w danej chwili jednakową temperaturę w całej swojej objętości. Dzięki temu opisywany proces sprowadza się do wymiany ciepła jedynie na powierzchni styku pręta z cieczą. Szybkość tej wymiany zależy od kilku parametrów:

- powierzchni pręta,
- współczynnika wymiany ciepła h ,
- masy,
- pojemności cieplnej pręta i oleju.

Tak opisany układ można przedstawić za pomocą dwóch równań różniczkowych, które określają, jak zmieniają się temperatury obu elementów w czasie.

$$\frac{m_b c_b}{hA} \frac{dT_b}{dt} + T_b = T_w$$
$$\frac{m_w c_w}{hA} \frac{dT_w}{dt} + T_w = T_b$$

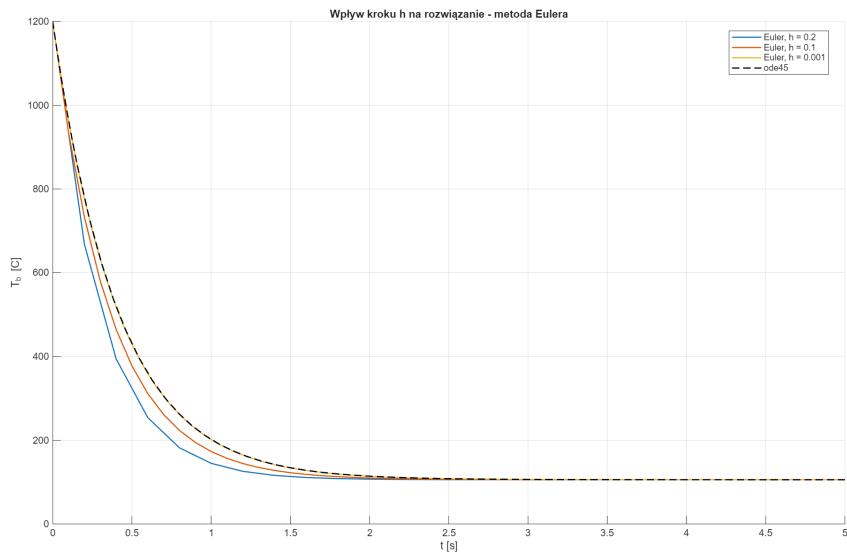
Symulator tworzony w ramach projektu rozwiązuje te równania numerycznie, krok po kroku.

W kolejnej części projektu współczynnik h nie jest już wartością stałą, lecz zależy od różnicy temperatur między prętem a olejem. Oznacza to, że intensywność przekazywania ciepła zmienia się w trakcie chłodzenia. Ponieważ współczynnik ten jest znany tylko w postaci danych pomiarowych, konieczne jest jego przybliżenie metodami interpolacji lub aproksymacji, tak aby można było wykorzystać go w symulacjach.

Model ma praktyczne zastosowanie technologiczne, ponieważ pozwala ocenić, jak szybko pręt może zostać schłodzony i jak dużo oleju jest do tego potrzebne. Dzięki temu można później projektować odpowiednią wielkość zbiorników i analizować wymagania procesu produkcyjnego.

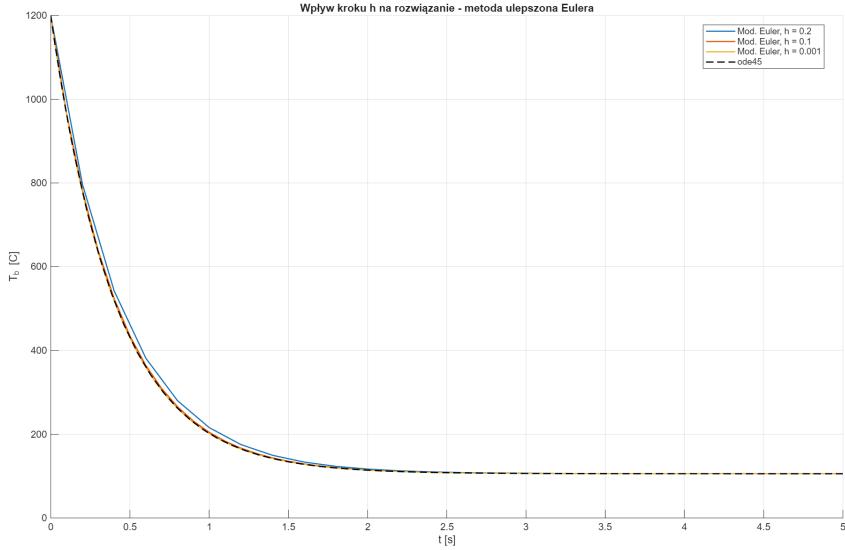
2 część 1. projektu

W pierwszej części projektu opracowano kompletny symulator procesu chłodzenia pręta zanurzonego w oleju, oparty na układzie równań różniczkowych opisujących bilans energii pomiędzy prętem a cieczą chłodzącą. Do całkowania równań zastosowano metodę Eulera oraz metodę ulepszonego Eulera, a otrzymane trajektorie porównano z rozwiążaniem referencyjnym wyznaczonym za pomocą solvera `ode45`.



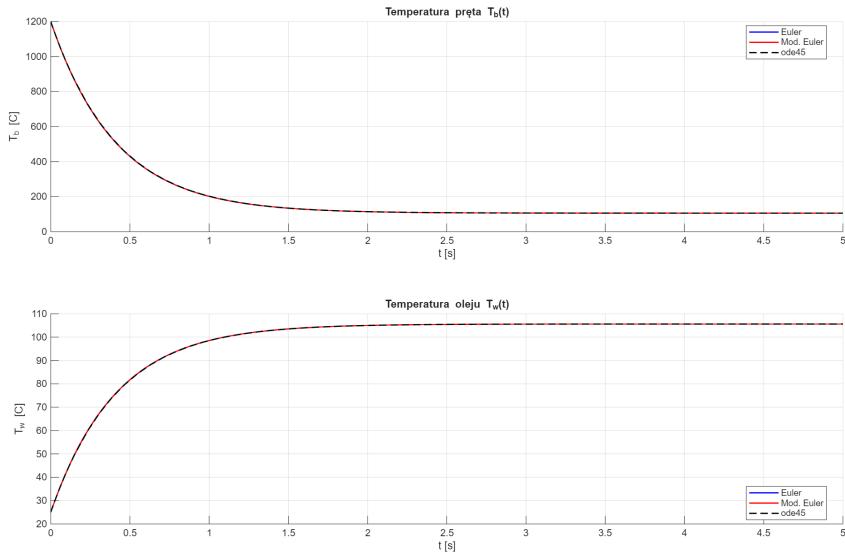
Rysunek 1: Wpływ kroku h na rozwiązanie - metoda Eulera

Analiza numeryczna wykazała, że metoda Eulera jest silnie wrażliwa na krok czasowy i przy większych krokach znacząco odbiega od rozwiązania wzorcowego, co wynika z jej pierwszego rzędu dokładności.



Rysunek 2: Wpływ kroku h na rozwiązanie - metoda ulepszonego Eulera

Metoda ulepszonego Eulera okazała się znacznie stabilniejsza i przy kroku $h = 0,001$ praktycznie pokrywała się z wynikami `ode45`. Oznacza to, że ulepszony Euler zapewnia wystarczającą dokładność i stabilność przy niewielkim koszcie obliczeniowym, co czyni go odpowiednim narzędziem do dalszych analiz.

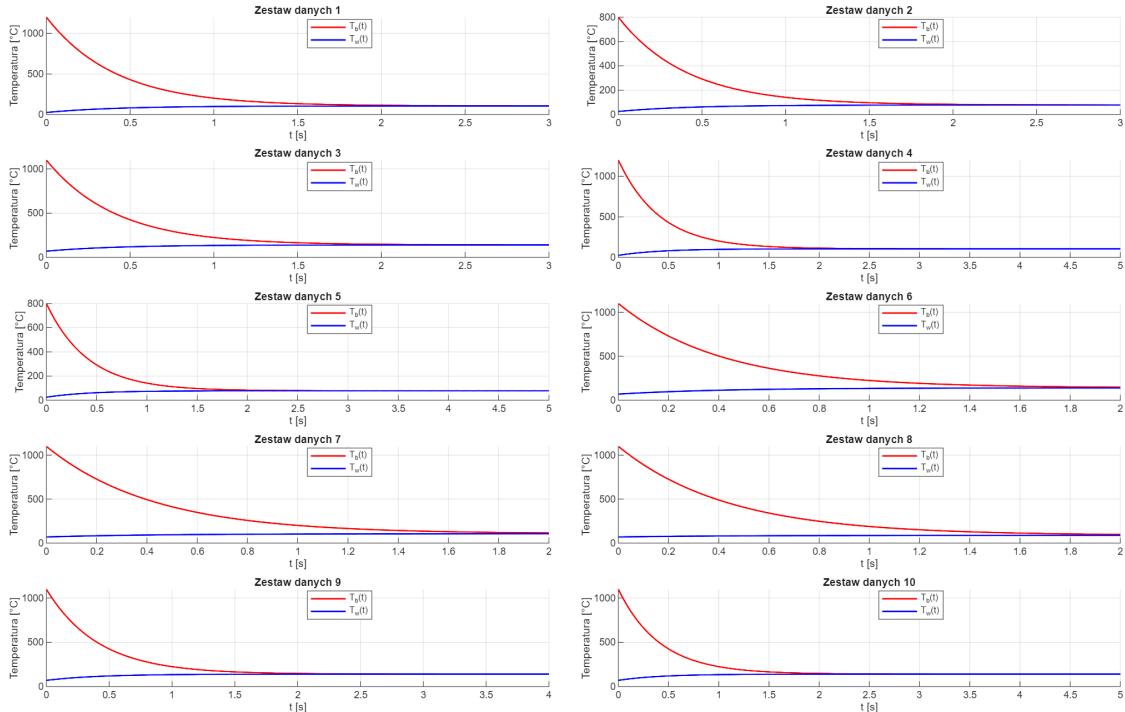


Rysunek 3: Przebieg temperatur dla różnych metod rozwiązywania równań różniczkowych

Uzyskane przebiegi temperatur pręta i oleju są fizycznie poprawne: obserwuje się szybkie oddawanie ciepła na początku procesu oraz wykładnicze dążenie temperatur do stanu równowagi, bez niestabilności i artefaktów numerycznych.

Istotnym etapem była weryfikacja modelu na podstawie danych pomiarowych. Porównanie wyników symulacji z dziesięcioma przypadkami eksperymentalnymi wykazało

bardzo dobrą zgodność obliczeń z rzeczywistymi pomiarami. Różnice końcowych temperatur mieściły się w zakresie około $0,03\text{--}2^\circ\text{C}$ dla pręta oraz $0,07\text{--}1,9^\circ\text{C}$ dla oleju, co jest mniejsze lub porównywalne z typowym błędem urządzeń pomiarowych. Nieco większe rozbieżności pojawiały się jedynie w przypadkach o bardzo wysokiej temperaturze początkowej i krótkim czasie obserwacji, gdzie rzeczywista wymiana ciepła może być bardziej dynamiczna niż zakłada liniowy model.



Rysunek 4: Przebiegi dla różnych zestawów danych

Wszystkie dziesięć wykresów przedstawia typowy, wykładniczy przebieg chłodzenia: temperatura pręta gwałtownie spada na początku procesu, natomiast temperatura oleju rośnie powoli dzięki jego dużej pojemności cieplnej. Różnice między zestawami wynikają głównie z odmiennych warunków początkowych oraz z masy oleju, która w największym stopniu wpływa na intensywność wymiany ciepła. Pomimo tych zmian, kształt krzywych pozostaje taki sam. Przebiegi są monotoniczne, stabilne i zgodne z fizycznym opisem zjawiska, co potwierdza poprawność modelu.

Dodatkowa analiza wrażliwości wykazała, że zmiana temperatury początkowej pręta o $\pm 10^\circ\text{C}$ wpływała na wynik jedynie nieznacznie (około $\pm 0,7^\circ\text{C}$), natomiast zmiana temperatury początkowej oleju o $\pm 10^\circ\text{C}$ miała znacznie większy efekt (około $\pm 9,3^\circ\text{C}$), co wynika z roli oleju jako głównego bufora cieplnego. Najbardziej wrażliwym parametrem okazała się masa oleju: jej zmiana o $\pm 5\%$ powodowała zmianę końcowej temperatury pręta o około $3,6\text{--}3,9^\circ\text{C}$.

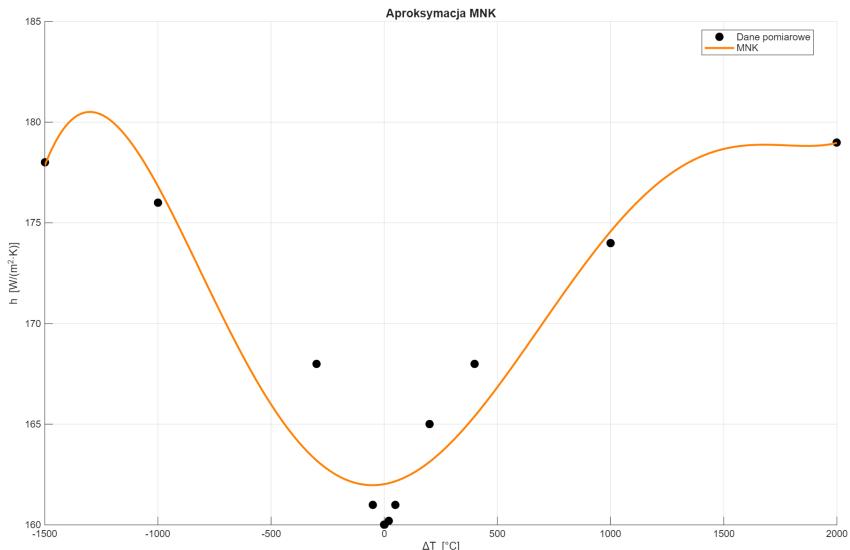
Podsumowując, opracowany symulator jest stabilny, dokładny i zgodny z pomiarami we wszystkich analizowanych przypadkach. Ewentualne różnice między symulacją a pomiarami wynikają przede wszystkim z uproszczeń modelu fizycznego, a nie z ograniczeń numerycznych.

3 część 2. projektu

W ramach drugiej części projektu należało rozwiązać problem aproksymacji współczynnika przewodnictwa cieplnego h na podstawie punktów pomiarowych. Do symulacji potrzebna jest funkcja ciągła, która pozwoli obliczać h dla dowolnej różnicy temperatur ΔT . Zadanie polegało na zaimplementowaniu i porównaniu trzech metod: aproksymacji wielomianowej metodą najmniejszych kwadratów (MNK), interpolacji wielomianowej Lagrange'a oraz funkcji sklejanych kubicznych (splajnów). Celem było wybranie najlepszej metody pod względem dokładności i stabilności numerycznej.

3.1 Analiza aproksymacji wielomianowej MNK

Zaimplementowano aproksymację wielomianową stopnia 5 metodą najmniejszych kwadratów. Metoda ta minimalizuje sumę kwadratów błędów, szukając optymalnych współczynników wielomianu.

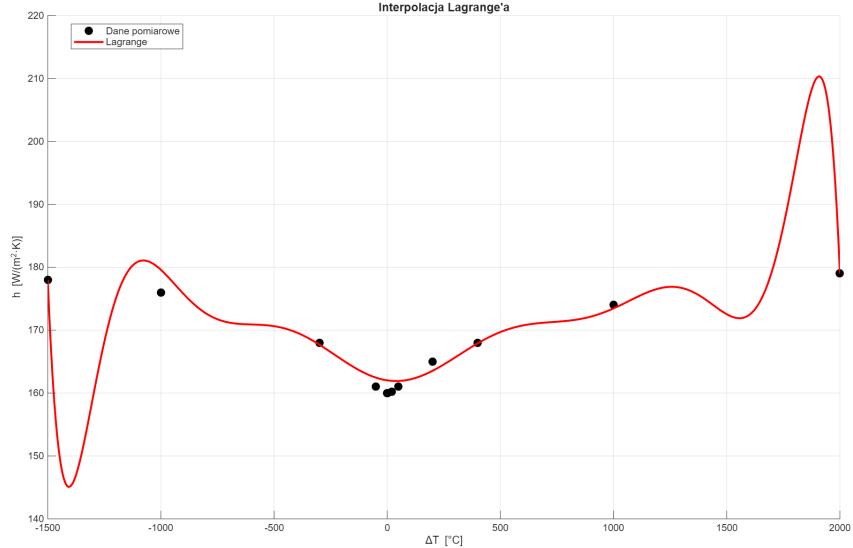


Rysunek 5: Aproksymacja MNK

Pomarańczowa krzywa na wykresie jest gładka i przebiega w pobliżu wszystkich punktów pomiarowych, nie przechodząc przez nie dokładnie. Charakterystyka ma kształt litery U z minimum w okolicach $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, co odpowiada fizycznej naturze zjawiska. Uzyskano następujące błędy: średni błąd bezwzględny 1.58 W/m^2 (0.96%), maksymalny błąd bezwzględny 4.79 W/m^2 (2.85%). Metoda wykazuje wysoką stabilność numeryczną – brak oscylacji i gwałtownych zmian. Dodatkowo aproksymacja automatycznie wygładza ewentualny szum pomiarowy w danych wejściowych. Jest to istotna zaleta, ponieważ dane eksperymentalne zawsze zawierają niepewności pomiarowe.

3.2 Analiza interpolacji Lagrange'a

Zaimplementowano interpolację wielomianową Lagrange'a, która konstruuje wielomian przechodzący dokładnie przez wszystkie punkty pomiarowe.



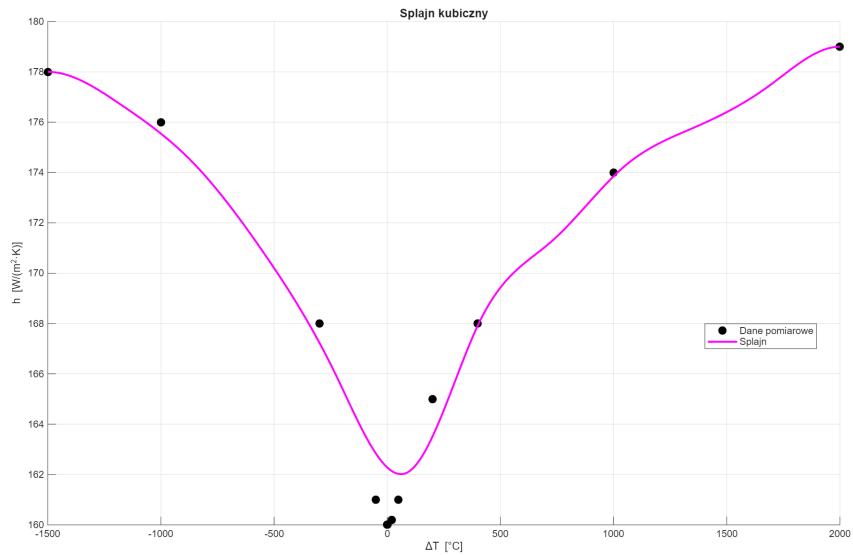
Rysunek 6: Interpolacja Lagrange'a

Czerwona krzywa przechodzi przez wszystkie punkty pomiarowe, jednak między węzłami występują silne oscylacje. Szczególnie widoczne są one na brzegach przedziału: w zakresie $\Delta T \in [-1500, -1000]$ °C krzywa spada do ~ 145 W/m², by następnie wzrosnąć do ~ 180 W/m², natomiast w zakresie $\Delta T \in [1500, 2000]$ °C wartość h osiąga niefizyczne ~ 210 W/m². To tzw. efekt Rungego, czyli charakterystyczne oscylacje wielomianów wysokiego stopnia przy nierównoodległych węzłach.

Średni błąd bezwzględny $1,18$ W/m² ($0,71\%$), maksymalny $3,59$ W/m². Między węzłami błędy są znacznie większe, a oscylacje prowadzą do niefizycznych wartości h . Takie gwałtowne zmiany współczynnika powodują sztywność układu równań różniczkowych, co wymaga bardzo małego kroku całkowania i zwiększa koszt obliczeniowy. Metoda została zdyskwalifikowana ze względu na brak stabilności numerycznej.

3.3 Analiza funkcji sklejanych (splajn kubiczny)

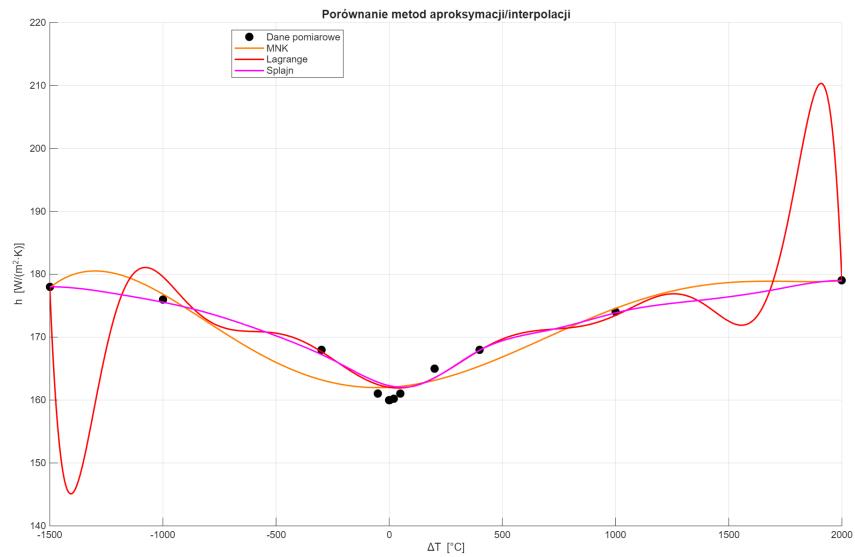
Zaimplementowano funkcje sklejane trzeciego stopnia zgodnie z algorytmem z podręcznika, czyli wymagającym węzłów równoodległych. Metoda dzieli przedział na segmenty i w każdym używa osobnego wielomianu trzeciego stopnia. Wielomiany są połączone w węzłach w sposób zapewniający ciągłość funkcji.



Rysunek 7: Splajn kubiczny

Fioletowa krzywa jest gładka i przebiega przez punkty pomiarowe bez oscylacji. W porównaniu do MNK, splajn dokładniej dopasowuje się do punktów, szczególnie w zakresach gdzie h zmienia się szybciej. Uzyskano najniższe błędy spośród wszystkich metod: średni błąd bezwzględny 1.02 W/m^2 (0.63%), maksymalny błąd 2.29 W/m^2 (1.43%). Stanowi to poprawę o około 35% względem MNK przy zachowaniu pełnej stabilności numerycznej.

3.4 Porównanie wszystkich metod

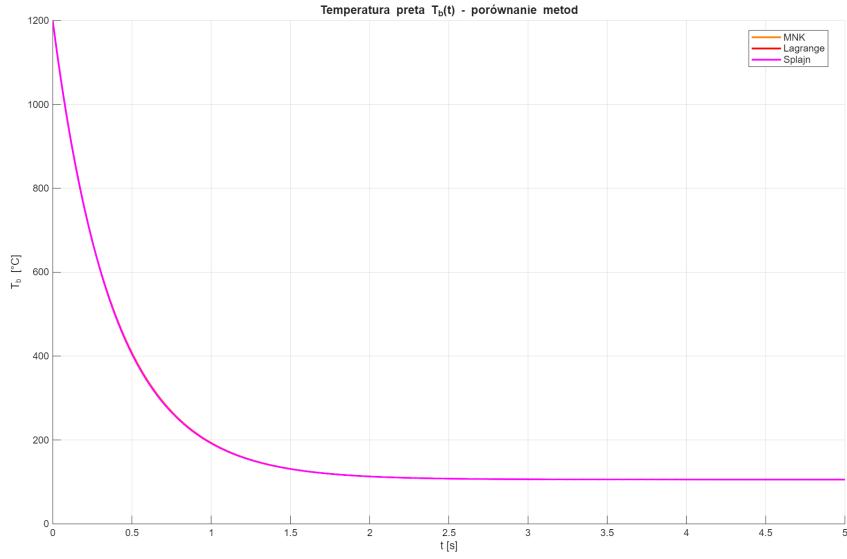


Rysunek 8: Porównanie wszystkich trzech metod aproksymacji/interpolacji

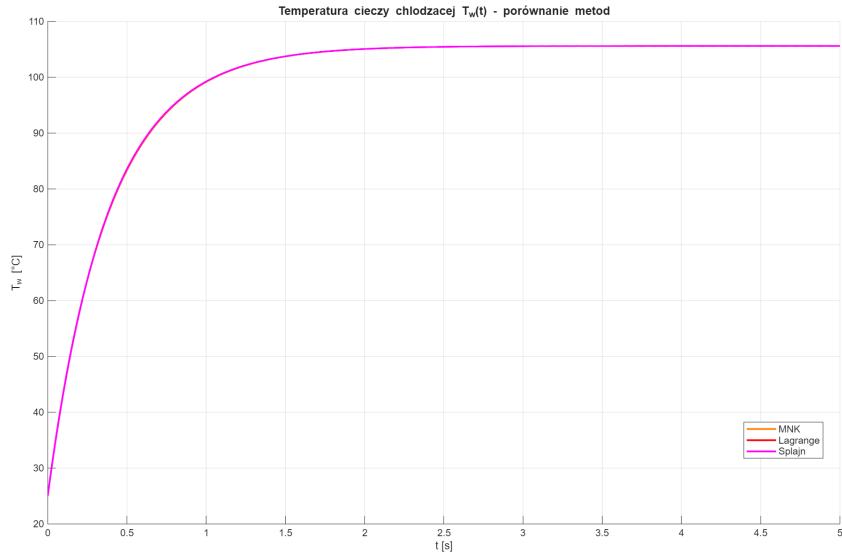
Tabela 1: Błędy bezwzględne i względne

Metoda	Błąd bezwzględny		Błąd względny	
	Średni	Maksymalny	Średni	Maksymalny
MNK	1,5752	4,7903	0,95511	2,8514
Lagrange	1,1781	3,5873	0,71285	2,0382
Splajn	1,0242	2,2889	0,63184	1,4306

3.5 Analiza przebiegów temperatur



Rysunek 9: Temperatura pręta $T_b(t)$ - porównanie trzech metod aproksymacji



Rysunek 10: Temperatura cieczy chłodzącej $T_w(t)$ - porównanie trzech metod aproksymacji

Mimo że splajn kubiczny wykazał najniższe błędy aproksymacji we wszystkich kategoriach (średni błąd $1,02 \text{ W/m}^2$ wobec $1,58 \text{ W/m}^2$ dla MNK), jako metodę referencyjną należy wybrać aproksymację wielomianową MNK stopnia 5. Decydującym czynnikiem jest problem implementacyjny: algorytm funkcji sklejanych z podręcznika wymaga węzłów równoodległych, podczas gdy dane pomiarowe są nierównoodległe. Konieczne było sztuczne

wygenerowanie 12 równoodległych punktów i obliczenie wartości h za pomocą interpolacji liniowej z oryginalnych danych. To rozwiązanie jest nieprofesjonalne i wprowadza dodatkowy błąd wynikający z przetworzenia danych oryginalnych oraz utraty informacji zawartej w naturalnym rozmieszczeniu węzłów pomiarowych.

Metoda MNK działa bezpośrednio na danych oryginalnych bez sztucznych przeróbek i naturalnie wygładza szum pomiarowy, co jest korzystne dla danych eksperymentalnych. Zapewnia wysoką stabilność numeryczną bez oscylacji oraz gładką charakterystykę odpowiadającą fizyce zjawiska. W praktyce inżynierskiej stosuje się wprawdzie zaawansowane algorytmy splajnów dla węzłów nierównoodległych (np. spline z opcją pchip w MATLAB), ale ich samodzielna implementacja wykracza poza zakres projektu. W kontekście dostępnych narzędzi i wymagania samodzielnnej implementacji, metoda MNK stopnia 5 stanowi optymalne rozwiązanie.

4 Część 3. projektu

4.1 Cel badawczy

Celem trzeciej części projektu było zbadanie wpływu metody aproksymacji współczynnika przewodnictwa cieplnego $h(\Delta T)$ na wyniki symulacji procesu chłodzenia pręta. W analizie porównano trzy podejścia obliczeniowe: aproksymację metodą najmniejszych kwadratów (MNK) z wielomianem stopnia 5, interpolację Lagrange'a oraz funkcje sklejane kubiczne. Pozwoliło to ocenić, w jakim stopniu wybór sposobu odwzorowania zależności $h(\Delta T)$ wpływa na dokładność wyników i stabilność numeryczną modelu.

4.2 Przebieg eksperymentu

Symulacje wykonano dla czterech wybranych przypadków testowych z tabeli pomiarowej, oznaczonych numerami 1, 3, 7 i 10. Przypadki te różniły się temperaturą początkową pręta i oleju, masą chłodziwa oraz czasem chłodzenia:

- przypadek 1: $T_b(0) = 1200^\circ\text{C}$, $T_w(0) = 25^\circ\text{C}$, $m_w = 2,5 \text{ kg}$, $t = 3 \text{ s}$,
- przypadek 3: $T_b(0) = 1100^\circ\text{C}$, $T_w(0) = 70^\circ\text{C}$, $m_w = 2,5 \text{ kg}$, $t = 3 \text{ s}$,
- przypadek 7: $T_b(0) = 1100^\circ\text{C}$, $T_w(0) = 70^\circ\text{C}$, $m_w = 5,0 \text{ kg}$, $t = 2 \text{ s}$,
- przypadek 10: $T_b(0) = 1100^\circ\text{C}$, $T_w(0) = 70^\circ\text{C}$, $m_w = 2,5 \text{ kg}$, $t = 5 \text{ s}$.

Wszystkie obliczenia przeprowadzono metodą ulepszonego Eulera z krokiem czasowym $h = 0,001 \text{ s}$, co zapewniło wysoką dokładność numeryczną rozwiązania układu równań różniczkowych.

4.3 Analiza wyników

4.3.1 Porównanie metod aproksymacji

Przeprowadzona analiza ilościowa wykazała niewielkie różnice między wszystkimi trzema metodami aproksymacji. Aproksymacja wielomianowa metodą najmniejszych kwadratów (MNK, stopień 5) osiągnęła średni błąd bezwzględny dla temperatury pręta wynoszący $1,12^{\circ}\text{C}$ oraz $0,94^{\circ}\text{C}$ dla temperatury oleju. Interpolacja Lagrange'a uzyskała odpowiednio $1,14^{\circ}\text{C}$ i $0,94^{\circ}\text{C}$, natomiast funkcje sklejane kubiczne $1,15^{\circ}\text{C}$ i $0,94^{\circ}\text{C}$. Maksymalny błąd bezwzględny dla T_b wyniósł $1,92^{\circ}\text{C}$ (MNK), $2,00^{\circ}\text{C}$ (Lagrange) oraz $2,02^{\circ}\text{C}$ (splajny), co stanowi mniej niż 2% wartości mierzonej.

Warto podkreślić, że wszystkie metody wykazały wysoką zgodność wzajemną. Różnice między wynikami poszczególnych metod nie przekroczyły $0,1^{\circ}\text{C}$ w większości punktów czasowych. Świadczy to o stabilności numerycznej modelu oraz o tym, że dla danego zakresu parametrów i jakości danych pomiarowych wybór metody aproksymacji ma drugorzędne znaczenie.

4.3.2 Zgodność z pomiarami eksperymentalnymi

Porównanie wyników symulacji z danymi pomiarowymi wykazało dobrą zgodność jakościową i ilościową. Średnie błędy względne nie przekroczyły 1% dla wszystkich metod, co stanowi bardzo dobry wynik. Największe rozbieżności zaobserwowano w przypadku 7 (zwiększoną masą oleju $m_w = 5 \text{ kg}$), gdzie błąd temperatury pręta osiągnął maksymalną wartość około 2°C . Wynika to prawdopodobnie z większej wrażliwości układu na parametry przy dużej pojemności cieplnej oleju.

Obserwowane błędy można przypisać kilku źródłom:

- założenie jednorodności temperatury w pręcie i oleju, pominięcie strat ciepła do otoczenia,
- dyskretyzacja czasowa metodą Eulera, zaokrąglenia arytmetyczne,
- ograniczona liczba punktów pomiarowych, wybór funkcji bazowych,

4.3.3 Wpływ wyboru metody na przebieg symulacji

Analiza przebiegów czasowych temperatur $T_b(t)$ i $T_w(t)$ wskazuje, że w początkowej fazie chłodzenia, gdy różnica temperatur przekracza 1000°C , wszystkie metody aproksymacji dają praktycznie identyczne wyniki. Wynika to z faktu, że współczynnik h zmienia się w tym zakresie stosunkowo powoli i liniowo, więc każda z metod aproksymacji odwzorowuje tę zależność w podobny sposób.

W fazie końcowej, przy $\Delta T < 200^{\circ}\text{C}$, różnice między metodami pozostają nadal niewielkie, jednak można zaobserwować subtelne rozbieżności w szczegółowym kształcie krzywych. Metoda MNK, dzięki wygładzeniu danych, zapewniła nieco lepszą zgodność z pomiarami eksperymentalnymi, podczas gdy interpolacja Lagrange'a i splajny kubiczne, przechodzące dokładnie przez węzły interpolacyjne, odwzorowywały lokalne fluktuacje w danych pomiarowych.

4.4 Wybór metody referencyjnej

Na podstawie analizy ilościowej wybrano aproksymację wielomianową metodą najmniejszych kwadratów (stopień 5) jako metodę referencyjną wykorzystywaną w dalszej części projektu. Zadecydowały o tym następujące czynniki:

- najniższe średnie i maksymalne błędy bezwzględne dla temperatury pręta,
- metoda MNK naturalnie redukuje wpływ przypadkowych błędów w danych,
- wielomian stopnia 5 jest wystarczająco elastyczny, by odwzorować nieliniowość $h(\Delta T)$, ale nie prowadzi do nadmiernych oscylacji,

Funkcje sklejane, mimo teoretycznych zalet (ciągłość, brak zjawiska Rungego), nie przyniosły wymiernej poprawy dokładności w analizowanych przypadkach. Interpolacja Lagrange'a, choć przechodzi dokładnie przez węzły, również nie wykazała przewagi nad metodą MNK.

4.5 Wrażliwość modelu na metodę aproksymacji

Przeprowadzone badania wskazują, że model jest słabo wrażliwy na wybór metody aproksymacji funkcji $h(\Delta T)$. Różnice między wynikami uzyskanymi przy użyciu różnych metod nie przekroczyły $0,1^{\circ}\text{C}$ w większości punktów oraz $0,03\%$ w ujęciu błędów względnych. Jest to wartość znacznie poniżej niepewności pomiarowej i akceptowalna we wszystkich zastosowaniach praktycznych.

Słaba wrażliwość wynika z dwóch czynników:

1. Funkcja $h(\Delta T)$ jest stosunkowo gładka w badanym zakresie $\Delta T \in [-1500, 2000]^{\circ}\text{C}$, więc wszystkie metody aproksymacji odwzorowują ją w podobny sposób.
2. Dynamika układu jest zdominowana przez duże różnice temperatur w początkowej fazie chłodzenia, gdzie szczegóły aproksymacji $h(\Delta T)$ mają niewielki wpływ na końcowy wynik.

W praktyce oznacza to, że do większości obliczeń inżynierskich wystarczająca jest prosta aproksymacja wielomianowa, a stosowanie bardziej wyrafinowanych metod (splajny, Lagrange) jest uzasadnione jedynie w przypadkach wymagających ekstremalnej precyzji lub pracy z bardzo nieliniowymi zależnościami.

4.6 Uwagi praktyczne

W niniejszym projekcie równoodległe węzły interpolacyjne dla funkcji sklejanych wygenerowano poprzez interpolację liniową z danych pierwotnie nierównoodległych. Podejście to jest prostym rozwiązaniem wystarczającym dla celów demonstracyjnych, lecz w zastosowaniach praktycznych preferuje się użycie splajnów również dla nierównomiernie rozmiieszczonych danych.

W implementacji funkcji sklejanych przyjęto zerowe warunki brzegowe na pochodne ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), co odpowiada założeniu liniowego zachowania funkcji poza zakresem pomiarowym. W bardziej zaawansowanej analizie można by wyznaczyć te warunki z fizycznych właściwości układu.

Wybór wielomianu stopnia 5 w metodzie MNK był wynikiem eksperymentalnego doboru: niższe stopnie (2-3) nie odwzorowywały nieliniowości $h(\Delta T)$, podczas gdy wyższe stopnie (7-9) prowadziły do oscylacji, szczególnie na brzegach przedziału.

4.7 Podsumowanie

Przeprowadzone badania wykazały, że wszystkie analizowane metody aproksymacji funkcji $h(\Delta T)$ dają wyniki praktycznie identyczne i zgodne z pomiarami eksperymentalnymi. Z punktu widzenia zastosowań inżynierskich najlepszą metodą okazała się aproksymacja wielomianowa metodą najmniejszych kwadratów (stopień 5), która przy porównywalnej złożoności obliczeniowej zapewniła nieznacznie lepszą zgodność z danymi pomiarowymi.

Kluczowym wnioskiem jest niska wrażliwość modelu na wybór metody aproksymacji, co świadczy o jego stabilności numerycznej. Różnice między metodami są praktycznie nieistotne ($< 0,03\%$ błędu względного), co daje pewność, że wybór metody nie jest krytyczny dla wiarygodności wyników symulacji.

5 Część 4. projektu

5.1 Cel badawczy

Celem czwartej części projektu było wyznaczenie minimalnej masy oleju chłodzącego, która pozwalała schłodzić pręt do temperatury 125°C w czasie $t = 0,7$ s. W tym celu wykorzystano pełny, nieliniowy model chłodzenia wraz z aproksymowaną funkcją współczynnika wnikania ciepła $h(\Delta T)$ otrzymaną metodą najmniejszych kwadratów (MNK stopnia 5), wybraną jako optymalna w Części 3. Rozwiążanie równania $T_b(m_w, 0,7 \text{ s}) = 125^{\circ}\text{C}$ przeprowadzono metodą Newtona–Raphsona.

5.2 Przebieg eksperymentu

W kolejnych iteracjach Newtona wykonywano symulację chłodzenia dla zadanej masy oleju i obliczano przybliżoną pochodną temperatury pręta względem masy:

$$T'_b(m_w) \approx \frac{T_b(m_w + \Delta m_w) - T_b(m_w)}{\Delta m_w}.$$

Aktualizacja wartości masy przebiegała zgodnie ze wzorem:

$$m_w^{(i+1)} = m_w^{(i)} - \frac{T_b(m_w^{(i)}) - 125}{T'_b(m_w^{(i)})}.$$

Jako punkt startowy przyjęto $m_w^{(0)} = 2,0 \text{ kg}$, a wartość różnicową $\Delta m_w = 0,02 \text{ kg}$. Do całkowania równań różniczkowych wykorzystano ulepszoną metodę Eulera z krokiem

$h = 0,001$ s. Parametry materiałowe w tej części projektu różnią się od wykorzystanych w Części 1: masa pręta wynosi $m_b = 0,25$ kg, a pojemność cieplna $c_b = 0,29$ kJ/(kg·K).

5.3 Analiza wyników

5.3.1 Przebieg iteracji Newtona

W Tabeli 2 przedstawiono pełny przebieg iteracji metody Newtona–Raphsona. W pierwszych trzech iteracjach algorytm napotykał na trudności numeryczne związane z dużym oddaleniem punktu startowego od rozwiązania, co prowadziło do ujemnych wartości masy oleju wymagających korekty (przycięcie wartości do połowy poprzedniej). Począwszy od iteracji czwartej, algorytm wszedł w obszar stabilny i osiągnął bardzo szybką zbieżność. Już w iteracji dziewiątej błąd temperatury był mniejszy niż $0,001^\circ\text{C}$.

Tabela 2: Iteracje metody Newtona-Raphsona dla równania $T_b(m_w) = 125^\circ\text{C}$.

Iteracja i	$m_w^{(i)}$ [kg]	$T_b(m_w^{(i)})$ [$^\circ\text{C}$]	$T'_b(m_w^{(i)})$ [$^\circ\text{C}/\text{kg}$]	$\Delta T_b = T_b - T_{\text{cel}}$ [$^\circ\text{C}$]
1	2,00000	35,0992	-4,957036	-89,900794
2	1,00000	45,0262	-19,305357	-79,973757
3	0,50000	64,3812	-73,289308	-60,618750
4	0,25000	101,2083	-265,220581	-23,791726
5	0,16029	139,6936	-580,334298	14,693621
6	0,18561	125,3851	-450,252403	0,385108
7	0,18647	124,9638	-446,649355	-0,036175
8	0,18639	125,0036	-446,988678	0,003566
9	0,18640	124,9997	-446,955240	-0,000350

Na podstawie uzyskanych wyników wyznaczono wartość:

$$m_w \approx 0,1864 \text{ kg}.$$

Finalny błąd temperatury wyniósł jedynie $0,00035^\circ\text{C}$, co potwierdza wysoką dokładność algorytmu i prawidłową implementację metody numerycznej.

5.3.2 Interpretacja wyniku

Otrzymana wartość $m_w \approx 0,19$ kg jest znacznie mniejsza od typowych mas oleju występujących w eksperymentach pomiarowych z Części 1 (gdzie $m_w = 2,5$ kg lub więcej). Wynika to z kilku czynników:

1. Czas $t = 0,7$ s jest bardzo krótki w porównaniu do czasów eksperymentalnych ($t = 2–5$ s), co oznacza, że wymiana ciepła odbywa się w początkowej, najbardziej intensywnej fazie procesu.

2. Przyjęto $m_b = 0,25 \text{ kg}$ oraz $c_b = 0,29 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, co odpowiada mniejszej pojemności cieplnej pręta ($m_b c_b \approx 0,0725 \text{ kJ/K}$) w porównaniu do poprzednich części projektu ($m_b c_b \approx 0,77 \text{ kJ/K}$ przy $m_b = 0,2 \text{ kg}$ i $c_b = 3,85 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$). Pręt o mniejszej pojemności cieplnej oddaje mniej energii, co wymaga proporcjonalnie mniejszej masy chłodziwa.
3. Zadana temperatura $T_b = 125^\circ\text{C}$ jest stosunkowo wysoka, co oznacza, że pręt nie musi zostać schłodzony całkowicie.

Bardzo duża wartość bezwzględna pochodnej $|T'_b(m_w)| \approx 450^\circ\text{C}/\text{kg}$ wskazuje na wysoką wrażliwość rozwiązań na masę oleju. Niewielka zmiana m_w o kilka procent prowadzi do znaczących zmian temperatury końcowej, co oznacza, że w praktyce konieczne byłoby precyzyjne dozowanie ilości chłodziwa.

5.4 Wnioski końcowe

Metoda Newtona–Raphsona okazała się skuteczną i szybką metodą rozwiązywania równania odwrotnego rozpatrywanego w tej części projektu. Po początkowych trudnościach numerycznych związanych z wyborem punktu startowego, algorytm bardzo szybko zbiegł do rozwiązania. Od iteracji piątej błąd zmniejszał się z prędkością kwadratową, typową dla metody Newtona.

Uzyskany wynik $m_w \approx 0,19 \text{ kg}$ jest wiarygodny z punktu widzenia fizyki procesu i przyjętych parametrów materiałowych. Mała wartość masy oleju wynika przede wszystkim ze znacząco zmniejszonej pojemności cieplnej pręta oraz bardzo krótkiego czasu chłodzenia. Model wykazuje dużą wrażliwość na wartość m_w , co w praktyce oznacza konieczność precyzyjnego sterowania masą chłodziwa w rzeczywistych zastosowaniach technologicznych.

Warto podkreślić, że analiza przeprowadzona w tej części projektu stanowi przykład praktycznego zastosowania metod numerycznych do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych w inżynierii procesowej.

6 Podsumowanie i wnioski końcowe

W ramach projektu opracowano kompletny model numeryczny procesu chłodzenia metalowego pręta w oleju, obejmujący scenariusz liniowy (stały współczynnik h) oraz nienieliowy (zmienny współczynnik $h(\Delta T)$). Model został zweryfikowany eksperymentalnie i wykorzystany do optymalizacji parametrów technologicznych.

Metoda ulepszonego Eulera z krokiem $h = 0,001 \text{ s}$ zapewniała wyniki niemal identyczne z rozwiązaniem referencyjnym `ode45`. Porównanie z dziesięcioma przypadkami eksperymentalnymi wykazało błędy nieprzekraczające 2°C dla pręta oraz $1,9^\circ\text{C}$ dla oleju, co potwierdza poprawność implementacji. Analiza wrażliwości wykazała, że kluczowymi parametrami są masa oleju (zmiana o $\pm 5\%$ wpływa na wynik o $\pm 3,8^\circ\text{C}$) oraz temperatura początkowa oleju (zmiana o $\pm 10^\circ\text{C}$ powoduje zmianę o $\pm 9,3^\circ\text{C}$).

Porównanie interpolacji Lagrange'a, funkcji sklejanych kubicznych oraz aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów (MNK) wykazało, że wszystkie metody dają wyniki o

porównywalnej dokładności. W Części 2 najniższe błędy aproksymacyjne osiągnęła metoda splajnów, jednak w rzeczywistych symulacjach (Część 3) metoda MNK stopnia 5 okazała się najlepsza ze średnim błędem $1,12^{\circ}\text{C}$, w porównaniu do $1,15^{\circ}\text{C}$ dla splajnów. MNK naturalnie wygładza szum pomiarowy, co prowadzi do lepszej zgodności z danymi eksperymentalnymi. Kluczowym wnioskiem jest niska wrażliwość modelu na wybór metody aproksymacji — różnice w błędach względnych wyniosły jedynie 0,03%, co świadczy o stabilności numerycznej systemu.

Metodą Newtona–Raphsona wyznaczono minimalną masę oleju ($m_w \approx 0,19 \text{ kg}$) wymaganą do schłodzenia pręta do 125°C w czasie 0,7 s. Algorytm zbiegł po dziewięciu iteracjach z błędem poniżej $0,001^{\circ}\text{C}$. Niska wartość masy wynika z odmiennych parametrów materiałowych: pojemność cieplna pręta w Części 4 ($m_b c_b \approx 0,073 \text{ kJ/K}$) jest prawie dziesięciokrotnie mniejsza niż w Części 1 ($m_b c_b \approx 0,77 \text{ kJ/K}$), a krótki czas oznacza pracę w początkowej, najbardziej intensywnej fazie wymiany ciepła. Wysoka pochodna $|T'_b(m_w)| \approx 450^{\circ}\text{C/kg}$ wskazuje na dużą wrażliwość rozwiązania, co wymaga precyzyjnego dozowania oleju w praktyce.

Model ma bezpośrednie zastosowanie w projektowaniu systemów hartowania i obróbki cieplnej metali, umożliwiając wyznaczanie optymalnej pojemności zbiorników chłodzących.

Kluczowe osiągnięcia projektu:

- zweryfikowany symulator o wysokiej dokładności (błędy $< 2^{\circ}\text{C}$),
- wybór optymalnej metody aproksymacji $h(\Delta T)$ — MNK stopnia 5,
- wykazanie niskiej wrażliwości modelu na metodę aproksymacji ($< 0,03\%$),
- efektywne rozwiązanie problemu optymalizacyjnego (zbieżność w 9 iteracjach),
- identyfikacja kluczowych parametrów: masa i temperatura oleju.

Projekt potwierdza, że metody numeryczne stanowią efektywne narzędzie do modelowania procesów wymiany ciepła. Opracowane narzędzie stanowi solidną podstawę do dalszych analiz i może być wykorzystane w praktyce inżynierskiej jako wsparcie projektowania procesów technologicznych.