

6 Rozdział - Aproksymacja

Strona: [LeIA](#)
Kurs: Metody numeryczne (2025Z)
Książka: 6 Rozdział - Aproksymacja

Wydrukowane przez użytkownika: Kinga Kondraciuk
Data: niedziela, 30 listopada 2025, 14:15

Opis

Lekcja jest poświęcona aproksymacji dyskretnej, ograniczamy się jednak tylko do metody najmniejszych kwadratów. Choć głównie są omawiane wielomiany aproksymacyjne algebraiczne, to wzory są wyprowadzone dla dowolnej funkcji aproksymacyjnej, będącej kombinacją liniową zbioru funkcji bazowych.

Spis treści

1. Aproksymacja dyskretna
2. Funkcje aproksymacyjne
3. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi
4. Wielomiany trygonometryczne
5. Błąd aproksymacji
6. Aproksymacja ciągła

1. Aproksymacja dyskretna

Aproksymacja

Aproksymacja, tak jak interpolacja, służy do znajdowania przybliżonych wartości funkcji $f(x)$ w dowolnym punkcie przedziału. Jednak funkcja aproksymacyjna na ogół jest inna niż funkcja interpolacyjna. W przypadku funkcji interpolacyjnej pokrywała się ona w pewnych punktach z funkcją interpolowaną, na funkcję aproksymacyjną nie będziemy narzucać takiego warunku. Będziemy od niej żądać aby była "bliska" funkcji aproksymowanej. Wyjaśnimy co będziemy uważać za "bliskość" dwóch funkcji. Ogólnie chodzi o to, aby wartości tych funkcji w pewnych wyróżnionych punktach były sobie bliskie. Załóżmy, podobnie jak w interpolacji, że z doświadczeń lub pomiarów określiliśmy w $n + 1$ różnych punktach:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

z przedziału $\langle a, b \rangle$ wartości funkcji $y = f(x)$ i te wartości oznaczyliśmy przez:

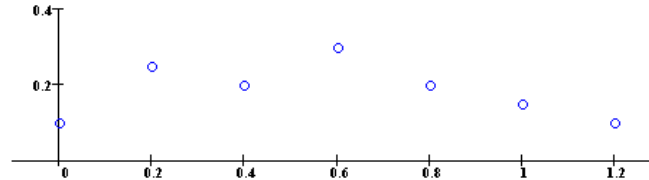
$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

Funkcję aproksymacyjną oznaczmy przez $F(x)$ i będziemy wymagać, aby kwadraty odległości między wartościami y_i a $F(x_i)$ w sumie były jak najmniejsze, tzn.: aby suma

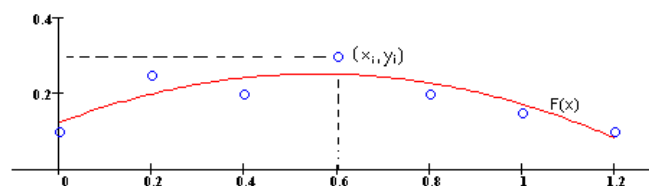
$$H = \sum_{i=0}^n (y_i - F(x_i))^2$$

była minimalna. Taka metoda aproksymacyjna nazywana jest metodą najmniejszych kwadratów. Na rysunku przedstawiona jest na czerwono funkcja aproksymacyjna $F(x)$ i są zaznaczone te odcinki (na czarno), których suma kwadratów długości ma być najmniejsza. Wartości funkcji $F(x_i)$ oznaczone są przez F_i , wartości (x_i, y_i) są zaznaczone kółkami.

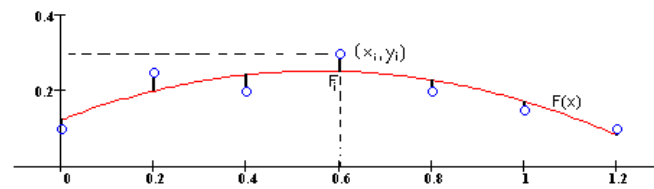
Na rysunku 6.1a) zaznaczone są węzły i wartości funkcji, na rysunku 6.1b) dochodzi jeszcze $F(x)$, na rysunku 6.1c) zaznaczone są dodatkowo odcinki- różnice między $f(x)$ i $F(x)$ w węzłach.



Rys. 6.1a. Wartości funkcji f w węzłach.



Rys. 6.1b. Wartości funkcji f w węzłach i funkcja aproksymacyjna.



Rys. 6.1c. Wartości funkcji f w węzłach i funkcja aproksymacyjna $F(x)$ wraz z zaznaczonymi błędami, czyli różnicami: $(y_i - F(x_i))$.

2. Funkcje aproksymacyjne

Funkcje aproksymacyjne

Założmy, że z doświadczeń lub pomiarów określiliśmy w $n + 1$ różnych punktach :

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

z przedziału $\langle a, b \rangle$ wartości funkcji $y = f(x)$ i te wartości oznaczyliśmy przez:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

Będziemy rozpatrywać funkcje aproksymacyjne w różnej postaci, w szczególności wielomiany algebraiczne i wielomiany trygonometryczne. Jeśli za funkcję aproksymacyjną będziemy brać wielomian m -tego stopnia, to ten wielomian zapisywać będziemy w postaci:

$$W_M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m \quad (6.2.1)$$

gdzie $a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$ to współczynniki rzeczywiste wielomianu, które trzeba znaleźć.

Jeśli za funkcję aproksymacyjną będziemy brać m -ty wielomian trygonometryczny to będzie to następująca funkcja:

$$T_m(x) = a_0 + a_1\cos(c \cdot x) + b_1\sin(c \cdot x) + a_2\cos(2c \cdot x) + b_2\sin(2c \cdot x) + \dots + a_m\cos(mc \cdot x) + b_m\sin(mc \cdot x) \quad (6.2.2)$$

W takim m -tym wielomianie występują cosinusy i sinusy wielokrotności kąta $c \cdot x$, współczynnik c jest znany, niewiadome są współczynniki $a_0, a_i, b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$.

Ogólnie, jeśli funkcja aproksymacyjna oparta będzie na $m + 1$ znanych niezależnych liniowo funkcjach bazowych: $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_m(x)$ to będzie mieć postać: $F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_m\phi_m(x)$ gdzie $a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$ są szukanymi współczynnikami.

Metoda najmniejszych kwadratów polega zatem na znalezieniu współczynników przy funkcjach bazowych takich, aby funkcja określająca sumę kwadratów odchyłań $S = \sum_{i=0}^n (y_i - F(x_i))^2$ była jak najmniejsza.

Oznaczmy przez:

$$\begin{aligned} H(a_0, a_1, \dots, a_m) &= \sum_{i=0}^n (y_i - F(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^n (y_i - (a_0\phi_0(x_i) + a_1\phi_1(x_i) + \dots + a_m\phi_m(x_i)))^2 \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Będziemy szukać minimum tej funkcji $m+1$ zmiennych $a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$. Punkty, w których funkcja wielu zmiennych przyjmuje minimum są punktami, w których zerują się pochodne cząstkowe (jeśli istnieją) tej funkcji po $a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$. Funkcja $H(a)$ jest wielomianem ze względu na niewiadome $a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$, więc te pochodne istnieją i są ciągłe. Otrzymujemy układ $m+1$ równań liniowych na $m+1$ niewiadomych

$$\frac{\partial H}{\partial a_j} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, m$$

Po obliczeniu pochodnych dostajemy:

$$\frac{\partial H}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^n (y_i - (a_0\phi_0(x_i) + a_1\phi_1(x_i) + \dots + a_m\phi_m(x_i))) \cdot (-\phi_j(x_i)) = 0$$

dla $j = 0, 1, 2, \dots, m$, tzn.: układ :

$$a_0 \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i)\phi_j(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i)\phi_j(x_i) + \dots + a_m \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i)\phi_j(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i\phi_j(x_i) \quad (6.2.4)$$

gdzie $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

Rozpisując te równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^n \phi_0^2(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \phi_0(x_i) + \dots + a_m \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \phi_0(x_i) &= \sum_{i=0}^n y_i \phi_0(x_i) \\ a_0 \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \phi_1(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^n \phi_1^2(x_i) + \dots + a_m \sum_{i=0}^n \phi_m(x_i) \phi_1(x_i) &= \sum_{i=0}^n y_i \phi_1(x_i) \\ \dots\dots\dots \\ a_0 \sum_{i=0}^n \phi_0(x_i) \phi_m(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^n \phi_1(x_i) \phi_m(x_i) + \dots + a_m \sum_{i=0}^n \phi_m^2(x_i) &= \sum_{i=0}^n y_i \phi_m(x_i) \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Jeśli oznaczymy przez:

$$M = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (6.2.6)$$

to układ powyższy można zapisać w prostej formie macierzowej:

$$M^T M \cdot A = M^T \cdot Y \quad (6.2.7)$$

W metodzie najmniejszych kwadratów funkcja H jest tak skonstruowana, że posiada zawsze minimum (w najlepszym wypadku jest to zero), nie musimy za każdym razem sprawdzać warunków dostatecznych na istnienie ekstremum funkcji wielu zmiennych. Z liniowej niezależności funkcji bazowych wynika nieosobliwość macierzy układu równań liniowych (macierze mają różne od zera wyznaczniki). Wynika z tego, że rozwiązanie na współczynniki $a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$ istnieje, jest jedyne, zatem możemy znaleźć funkcję aproksymacyjną spełniającą narzucone warunki - minimalizacja sumy kwadratów różnic między funkcją daną a aproksymacyjną w wybranych punktach.

Uwagi:

1. W interpolacji ilość węzłów narzucała stopień wielomianu interpolacyjnego, w aproksymacji wielomian może być stopnia 2, a ilość węzłów 100. Możemy sami sterować stopniem wielomianu. Jeśli natomiast węzłów będzie tyle ile funkcji bazowych to funkcja aproksymacyjna pokrywa się z funkcją interpolacyjną.
2. Macierz, powyżej zdefiniowana, ma tyle wierszy ile jest węzłów, a tyle kolumn ile jest funkcji bazowych. W pierwszej kolumnie jest zerowa funkcja bazowa we wszystkich węzłach, w drugiej kolumnie następna funkcja bazowa dla wszystkich węzłów po kolei, w ostatniej kolumnie jest ostatnia funkcja bazowa dla wszystkich węzłów.
3. Macierz $M^T M$ jest macierzą kwadratową wymiaru $(m+1) \times (m+1)$.

Przykład 6.1

Przykład

Dla $n+1=7$ punktów zmierzaliśmy wartości funkcji $f(x)$ i otrzymaliśmy następujące wyniki (w tabelce):

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
y_i	0.1	0.25	0.2	0.3	0.2	0.15	0.1

Dla $n = 6$ oraz $i = 0, 1, \dots, n$. Szukamy funkcji aproksymacyjnej $F(x)$

$$F(x) = a - 0 + a_1 \sin x + a_2 e^x$$

to znaczy, że bazą dla tej funkcji jest układ $\{1, \sin x, e^x\}$

Macierz M ma w pierwszej kolumnie same jedynki, w drugiej wartości funkcji $\sin x$ dla wszystkich x_i , a w trzeciej kolumnie wartości funkcji e^x dla x_i i wygląda następująco (wyniki podaliśmy z dokładnością do trzech cyfr po przecinku):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0.199 & 1.221 \\ 1 & 0.389 & 1.492 \\ 1 & 0.565 & 1.822 \\ 1 & 0.717 & 2.226 \\ 1 & 0.841 & 2.718 \\ 1 & 0.932 & 3.32 \end{pmatrix}$$

Z układu równań $M^T M \cdot A = M^T \cdot Y$, w którym macierze $M^T M$ i $M^T Y$ są następujące:

$$M^T \cdot M = \begin{pmatrix} 7 & 3.644 & 13.799 \\ 3.644 & 2.601 & 8.831 \\ 13.799 & 8.831 & 31.403 \end{pmatrix} \quad M^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0.66 \\ 2.435 \end{pmatrix}$$

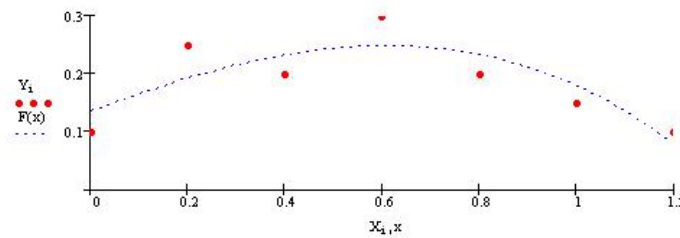
otrzymujemy współczynniki :

$$a = \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0,572 \\ -0,255 \end{pmatrix}$$

Zatem szukana funkcja aproksymacyjna ma postać:

$$F(x) = 0,39 + 0,572\sin x - 0,255e^x$$

Wykres:



Rys. 6.2. Wykres funkcji aproksymacyjnej $F(x)$.

3. Aproksymacja wielomianami algebraicznymi

Aproksymacja wielomianami algebraicznymi

Założmy, że z doświadczeń lub pomiarów określiliśmy w $n+1$ różnych punktach :

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

z przedziału $\langle a, b \rangle$ wartości funkcji $y = f(x)$ i te wartości oznaczyliśmy przez:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

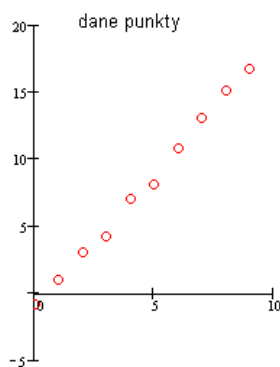
Będziemy rozpatrywać funkcje aproksymacyjne w postaci wielomianów algebraicznych:

$$W_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m \quad (6.3.1)$$

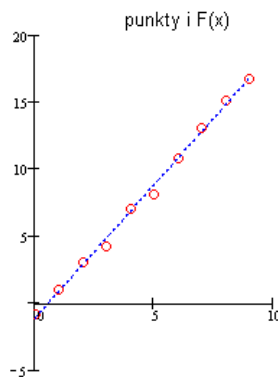
gdzie $a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$ to współczynniki rzeczywiste wielomianu, które trzeba znaleźć. Bazą takiego wielomianu są funkcje: $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$. Zbudujemy macierz M dla tej bazy:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \quad (6.3.2)$$

i aby znaleźć współczynniki $a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$, trzeba rozwiązać układ $M^T M \cdot A = M^T \cdot Y$ z powyższą macierzą. Ponieważ macierz układu $M^T M$ jest na ogół dla wysokich stopni wielomianów źle uwarunkowana (małe błędy danych powodują duże błędy wyników), stosuje się najczęściej aproksymację wielomianami niskich stopni tzn.: $m=1, 2$ lub 3 . Różne programy numeryczne liczą wskaźniki uwarunkowania macierzy i rozwiązują układy równań liniowych. Prześledzimy tylko jeszcze raz powstawanie tego układu dla wielomianu pierwszego i drugiego stopnia. Założmy, że z doświadczeń dostaliśmy takie wartości badanej funkcji (x_i, y_i) , że punkty ułożyły się tak, jak na wykresie na rysunku 6.3. Na rysunku a) są tylko dane punkty, na rysunku b) również wielomian interpolacyjny stopnia 1- oznaczony jako $F(x)$.



Rys. 6.3a. Dane pomiarowe.



Rys. 6.3b. Dane i wykres funkcji liniowej- wielomianu aproksymacyjnego 1 stopnia.

Wtedy naturalnie jest stosować jako funkcję aproksymacyjną wielomian pierwszego stopnia czyli $F(x) = a_0 + a_1 x$.

Jeśli będziemy korzystać z powyższych gotowych wzorów to dostaniemy:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} M^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} M^T M = \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ n & n \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{bmatrix} M^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

Zatem układ na współczynniki niewiadome a_0, a_1 będzie następujący:

$$\begin{aligned} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i &= \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Ten sam układ otrzymamy wracając do funkcji :

$$H(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^n (y_i - F(x_i))^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2$$

i obliczając jej minimum.

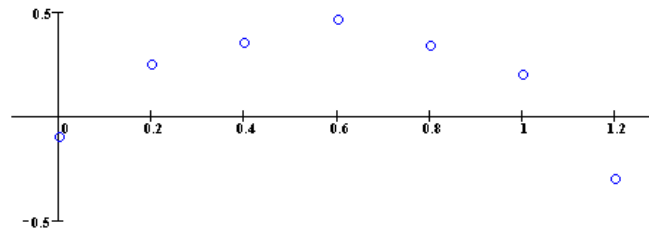
Obliczone pochodne cząstkowe przyrównamy do zera :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a_0} &= 2 \sum_{i=0}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) (-1) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=0}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) (-x_i) = 0 \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

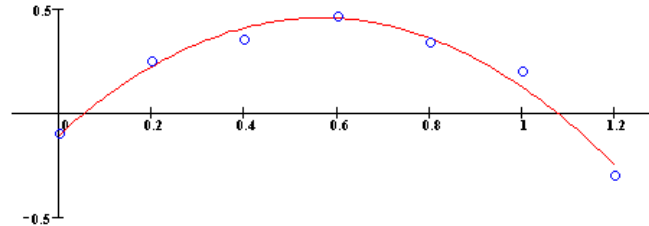
A stąd otrzymamy ten sam układ co podany powyżej.

Jeśli punkty pomiarowe ułożą się tak jak na rysunku poniżej, to nie ma co szukać funkcji aproksymacyjnej jako wielomianu stopnia 1, tylko co najmniej stopnia 2.

Na rysunku 6.4a są tylko dane punkty, na rysunku 6.4b również wielomian interpolacyjny stopnia 2.



Rys. 6.4a. Dane wejściowe - węzły aproksymacji.



Rys. 6.4b. Dane i wykres funkcji kwadratowej- wielomianu aproksymacyjnego 2 stopnia.

W tym wypadku za funkcję aproksymacyjną można przyjąć wielomian $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Wtedy

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \quad M^T M = \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{bmatrix} \quad M^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

I układ na współczynniki a_0, a_1, a_2 jest następujący

$$\begin{aligned} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 &= \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Taki sam układ otrzymamy, jeśli określimy funkcję:

$$H(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^n (y_i - F(x_i))^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2))^2$$

obliczymy jej pochodne cząstkowe po i i przyrównamy je do zera.

Przykład 6.2

Przykład

Funkcja $f(x)$ jest dana w 7 węzłach za pomocą tabelki

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
y_i	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.15	0.1

Będziemy szukać wielomianu aproksymacyjnego stopnia 1. Dla tych danych macierz M ma w pierwszej kolumnie jedynki, w drugiej węzły.

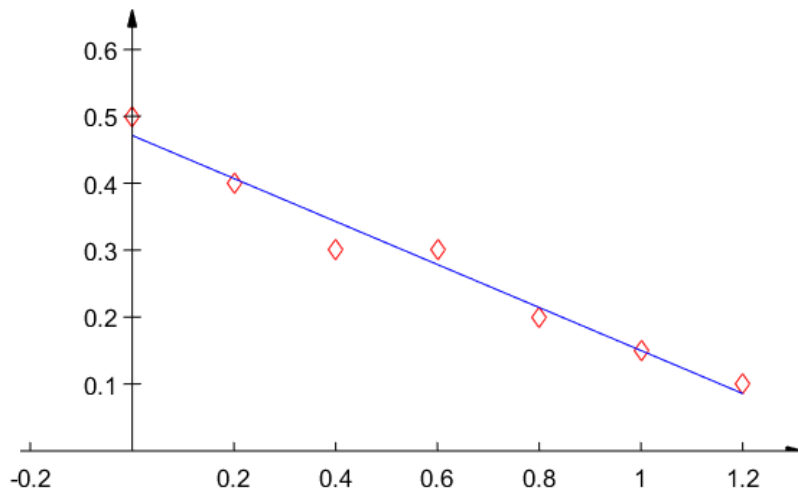
Układ dwóch równań na współczynniki a jest bardzo prosty:

$$7a_0 + 4,2a_1 = 1,95$$

$$4,2a_0 + 3,64a_1 = 0,81$$

Rozwiązując ten układ dostajemy: $a_0 = 0,471$, $a_1 = -0,321$

Zatem wielomian aproksymacyjny pierwszego stopnia ma postać: $W_1(x) = 0,471 - 0,321x$



Rys. 6.5. Wykres funkcji $W_1(x)$.

Powyższy wykres został wygenerowany za pomocą poniższego:

```
xk = [ 0,0.2,0.4,0.6,0.8,1.0,1.2];
nbsp;yk = [ 0.5,0.4,0.3,0.3,0.2,0.15,0.1];

n = length(xk);
m = 1;

M = zeros(n,m+1)
M(:,1) = 1;
for i = 2:m+1
    M(:,i) = xk.^(i-1);
end

a = M'*M \ M'*yk'

xd = linspace(min(xk),max(xk),100);
yd = ones(n,1)*a(1)
for i = 2:m+1
    yd = yd + a(i)*xd.^(i-1);
end
plot(xk,yk,'dr',xd, yd, 'b')
ylim([0,0.6])
xlim([-0.2,1.2])
%centeraxes(gca)
```

4. Wielomiany trygonometryczne

Założmy, że z doświadczeń lub pomiarów określiliśmy w $n + 1$ różnych punktach: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ z przedziału $< a, b >$ wartości funkcji $y = f(x)$ i te wartości oznaczyliśmy przez:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n) \quad (1)$$

Będziemy rozpatrywać jako funkcje aproksymacyjne wielomiany trygonometryczne:

$$T_m(x) = a_0 + a_1 \cos(c \cdot x) + b_1 \sin(c \cdot x) + a_2 \cos(2c \cdot x) + b_2 \sin(2c \cdot x) + \dots + \dots a_m \cos(mc \cdot x) + b_m \sin(mc \cdot x) \quad (6.4.1)$$

W takim m -tym wielomianie występują cosinusy i sinusy wielokrotności kąta cx , współczynnik c jest znany, niewiadome są współczynniki a_0, a_i, b_i $i = 1, 2, \dots, m$. W praktyce, często przyjmuje się współczynnik $c = 1$ lub wielokrotności pewnej częstotliwości $f : c = 2\pi f$.

komentarz -

W celu uproszczenia obliczeń oraz ostatecznych wzorów ograniczymy się do węzłów równoodległych, podzielimy przedział $< a, b >$ na n części, otrzymamy podprzedziały o długości $h = \frac{b-a}{n}$ i węzły $x_i = i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, n$. Najczęściej w obliczeniach przyjmuje się $a = 0$.

Ze względu na okresowość funkcji \sin i \cos przyjmujemy $c = \frac{\pi}{l}$, $l = \frac{n+1}{2}h$. Wtedy pierwszy wielomian trygonometryczny ma postać:

$$T_1(x) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

gdzie współczynniki a_0, a_1, b_1 wyliczamy z zerowania się pochodnych cząstkowych po a_0, a_1, b_1 funkcji:

$$H(a_0, a_1, b_1) = \sum \left(y_i - \left(a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{l}x_i\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}x_i\right) \right) \right)^2 \quad (6.4.2)$$

lub (co ostatecznie będzie równoważne) budujemy macierz M :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos\left(\frac{\pi}{l}x_0\right) & \sin\left(\frac{\pi}{l}x_0\right) \\ 1 & \cos\left(\frac{\pi}{l}x_1\right) & \sin\left(\frac{\pi}{l}x_1\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\left(\frac{\pi}{l}x_n\right) & \sin\left(\frac{\pi}{l}x_n\right) \end{bmatrix}$$

$$M^T M = \begin{bmatrix} n+1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

$$M^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i \cos\left(\frac{\pi}{l}x_i\right) \\ \sum_{i=0}^n y_i \sin\left(\frac{\pi}{l}x_i\right) \end{bmatrix}$$

W tym wypadku macierz układu $M^T M$ jest dobrze uwarunkowana, jest macierzą diagonalną i układ ma bardzo prostą postać:

$$\begin{aligned}
 (n+1)a_0 &= \sum_{i=0}^n y_i, \\
 \frac{n+1}{2}a_1 &= \sum_{i=0}^n y_i \cos\left(\frac{\pi}{l}x_i\right), \\
 \frac{n+1}{2}b_1 &= \sum_{i=0}^n y_i \sin\left(\frac{\pi}{l}x_i\right)
 \end{aligned}
 \tag{6.4.3}$$

Możemy podać wzory na współczynniki a_0, a_1, b_1 :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i, \\
 a_1 &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \cos\left(\frac{\pi}{l}x_i\right), \\
 b_1 &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \sin\left(\frac{\pi}{l}x_i\right)
 \end{aligned}
 \tag{6.4.4}$$

Dla drugiego wielomianu trygonometrycznego:

$$T_2(x) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + a_2 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + b_2 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

współczynniki można wyliczyć analogicznie do powyższych, dostajemy wtedy:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i, \\
 a_1 &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \cos\left(\frac{\pi}{l}x_i\right), \\
 b_1 &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \sin\left(\frac{\pi}{l}x_i\right) \\
 a_2 &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \cos\left(2\frac{\pi}{l}x_i\right), \\
 b_2 &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i \sin\left(2\frac{\pi}{l}x_i\right)
 \end{aligned}
 \tag{6.4.5}$$

Można uogólnić to postępowanie dla wielomianów trygonometrycznych zawierających wyrazy z \cos i \sin kąta m -krotnego.

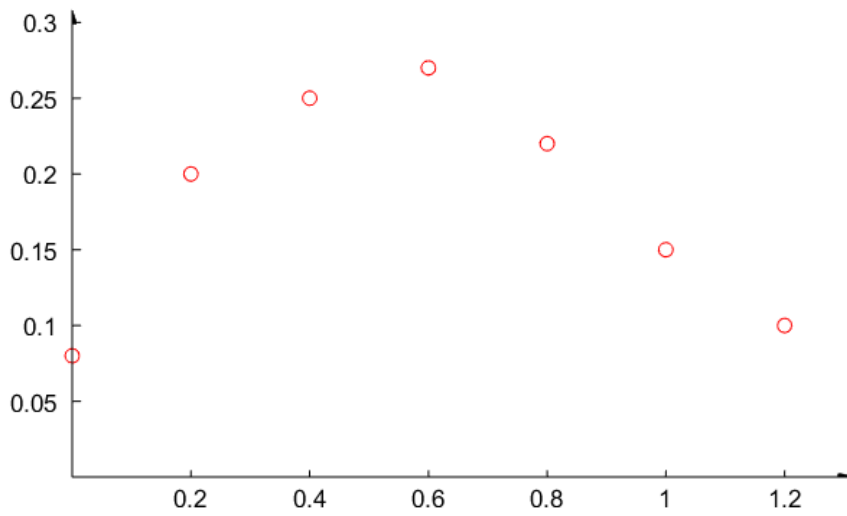
Przykład 7.1

Przykład

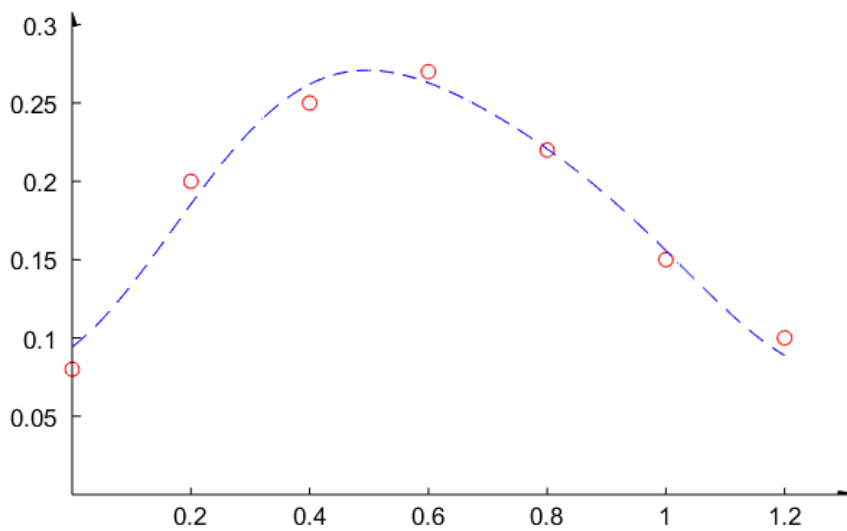
Funkcja jest dana za pomocą tabelki:

xi	y_i
0	0,08
0,2	0,2
0,4	0,25
0,6	0,27
0,8	0,22
1,0	0,15
1,2	0,1

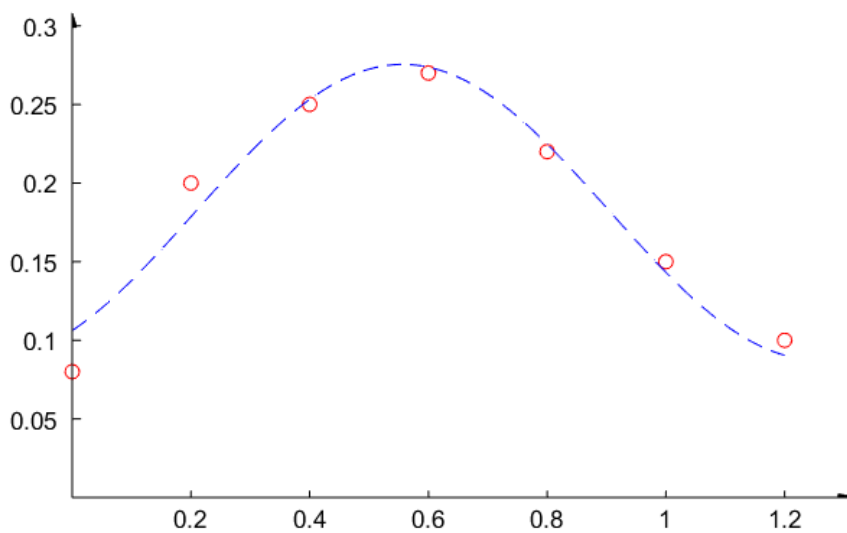
Dane: $n = 6, i = 0, 1, \dots, n, h = 0, 2, l = \frac{n+1}{2}h = 0.7$. Rysunki: 7.1a dane, 7.2b wielomian T_1x , 7.1c wielomian T_2x



Rys. 6.6a. Dane aproksymacyjne.



Rys. 6.6b. Dane i wielomian aproksymacyjny trygonometryczny T_1 .



Rys. 6.6c. Dane i wielomian aproksymacyjny trygonometryczny drugiego stopnia T_2 .

Po obliczeniu współczynników korzystając z powyższych wzorów otrzymujemy:

$$T_1(x) = 0.181 - 0.075 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + 0.056 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (2)$$

$$T_2(x) = 0.181 - 0.075 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + 0.056 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \\ -0.019 \cos\left(2\frac{\pi}{l}x\right) + 0.004 \sin\left(2\frac{\pi}{l}x\right) \quad (3)$$

Skrypt w MATLABie z rozwiązaniem zadania:

```
dane = [
0.0 0.08
0.2 0.2
0.4 0.25
0.6 0.27
0.8 0.22
1.0 0.15
1.2 0.1];
x = dane(:,1);
y = dane(:,2);

n=length(x)-1
h=0.2
l=(n+1)/(2)*h

a0 = 1/(n+1)*sum(y)
a1 = 2/(n+1)*sum(y .* cos(pi/l * x))
b1 = 2/(n+1)*sum(y .* sin(pi/l * x))
a2 = 2/(n+1)*sum(y .* cos(2*pi/l * x))
b2 = 2/(n+1)*sum(y .* sin(2*pi/l * x))

xd = 0:0.01:max(x);
yd = a0 + a1 * cos(pi/l * xd) + b1 * sin(pi/l * xd)

close all
plot(x,y,'or')
centeraxes(gca);

figure
plot(x,y,'or', xd,yd,'--b')
centeraxes(gca);

figure
yd = a0 + a1 * cos(pi/l * xd) + b1 * sin(pi/l * xd) ...
    + a2 * cos(2 * pi/l * xd) + b2 * sin(2 * pi/l * xd)
plot(x,y,'or', xd,yd,'--b')
centeraxes(gca);
```


5. Błąd aproksymacji

Czym będziemy się kierować decydując się na tę, a nie inną funkcję aproksymacyjną? Ponieważ chcemy, aby suma kwadratów odchyleń między funkcją daną a funkcją aproksymacyjną w węzłach była jak najmniejsza, możemy przyjąć dla prostoty, że najlepsza będzie ta funkcja, dla której ta suma jest jak najmniejsza. Będziemy posługiwać się wzorem na średni błąd przypadający na jeden węzeł, to znaczy:

$$bl = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (y_i - F(x_i))^2}{n+1}} \quad (6.5.1)$$

We wzorze pod pierwiastkiem w liczniku jest suma kwadratów odchyleń, którą minimalizowaliśmy, w mianowniku jest ilość węzłów.

Jeśli będziemy szukać funkcji aproksymacyjnej spośród danych możliwych, wybierać będziemy tę dla której wartość powyższego błędu bl jest najmniejsza.

Przykład 7.2

Przykład

Funkcja jest dana za pomocą tabelki:

x_i	y_i
0	0,08
0,2	0,2
0,4	0,25
0,6	0,27
0,8	0,22
1,0	0,15
1,2	0,1

Dane: $n = 6, i = 0, 1, \dots, n, h = 0,2, l = \frac{n+1}{2}h = 0,7$.

W przykładzie tym błędy są odpowiednio równe:
dla podanego w poprzednim temacie wielomianu:

$$T_1(x) = 0.181 - 0.075 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + 0.056 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$T_1(x)$ błąd średni wynosi $bl = 0.014$. Błąd ten wynika z obliczenia sumy:

$$bl = \sqrt{\frac{(0.08 - T_1(0))^2 + (0.2 - T_1(0.2))^2 + (0.25 - T_1(0.4))^2 + \dots + (0.1 - T_1(1.2))^2}{7}}$$

a dla wielomianu $T_2(x)$

$$T_2(x) = 0.181 - 0.075 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + 0.056 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \\ -0.019 \cos\left(2\frac{\pi}{l}x\right) + 0.004 \sin\left(2\frac{\pi}{l}x\right)$$

błąd średni równa się $bl = 0.01$.

Do ewentualnych dalszych obliczeń, modelu numerycznego, itp., wybierzemy z tych dwóch funkcji wielomian drugi $T_2(x)$, bo ma mniejszy średni błąd.

Można stosować inne kryteria doboru funkcji aproksymacyjnej, czasami stosuje się błąd średni statystyczny, ale nie będziemy komplikować rozważań i zostaniemy przy tym najprostszym wzorze na błąd.

6. Aproksymacja ciągła

Będziemy aproksymować funkcję ciągłą $f(x)$ w przedziale (a, b) funkcją $F(x)$ postaci: $F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_m\phi_m(x)$ gdzie $(a_i)_{i=0,1,2,\dots,m}$ są szukanyymi współczynnikami. Jeśli założymy, że funkcje bazowe $(\phi_i(x))_{i=0,1,\dots,m}$ są w przedziale (a, b) całkowalne z kwadratem (tzn. istnieje skończona wartość całki $\int_a^b (\phi_i)^2 dx$) to funkcję aproksymacyjną $F(x)$ będziemy poszukiwać taką, aby funkcja:

$$\int_a^b (F(x) - f(x))^2 dx = \min_{a_0, a_1, \dots, a_m} \int_a^b (a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_m\phi_m(x) - f(x))^2 dx \quad (7.3.1)$$

miała jak najmniejszą wartość. Podobnie jak poprzednio, gdy funkcja $f(x)$ dana była tylko w skończonej ilości punktów, warunkiem koniecznym na minimum funkcji $H(a_0, a_1, \dots, a_m)$ jest zerowanie się pochodnych cząstkowych $\frac{\partial H}{\partial a_j} = 0$ $j=0,1,2,\dots,m$. I tak jak poprzednio układ tych równań posiada jednoznaczne rozwiązanie na współczynniki $(a_i)_{i=0,1,2,\dots,m}$, a warunek konieczny w tym wypadku zapewnia (ze względu na postać funkcji $H(a_0, a_1, \dots, a_m)$) istnienie minimum.

Przykład 7.3

Przykład

Wyznaczyć wielomian aproksymacyjny pierwszego stopnia najlepiej aproksymujący funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ w przedziale $(1, 2)$. Funkcja aproksymacyjna ma postać $F(x) = a_0 + a_1x$ gdzie dwa współczynniki znajdziemy z zerowania się pochodnych funkcji:

$$H(a_0, a_1) = \int_1^2 (f(x) - (a_0 + a_1x))^2 dx$$

po a_0 i po a_1 .

$$\frac{\partial H}{\partial a_0} = -2 \int_1^2 (f(x) - (a_0 + a_1x)) dx = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial a_1} = -2 \int_1^2 x(f(x) - (a_0 + a_1x)) dx = 0$$

Mnożąc obie strony obu równań przez $\frac{1}{2}$ oraz rozdzielając na sumy wyrażenia podcałkowe otrzymujemy:

$$-\int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 (a_0 + a_1x) dx = 0 \quad -\int_1^2 x f(x) dx + \int_1^2 x(a_0 + a_1x) dx = 0$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy układ równań, w którym łatwo wyznaczamy wartości całek analitycznie:

$$\begin{aligned} a_0 \int_1^2 dx + a_1 \int_1^2 x dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ \int_1^2 x dx + a_0 \int_1^2 x dx + a_1 \int_1^2 x^2 dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} x dx \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

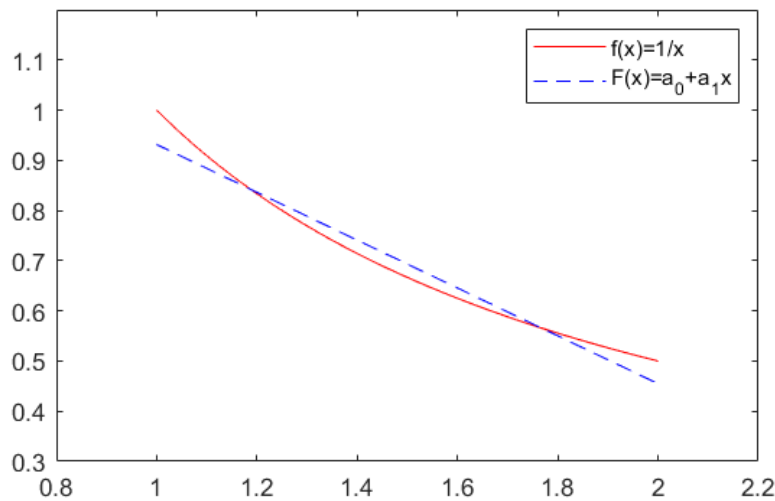
$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_0 + \frac{3}{2}a_1 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{7}{3}a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 2 \\ \ln 2 \end{pmatrix}$$

gdzie całki zostały wyznaczone analitycznie:

$$\begin{aligned} \int_1^2 1 dx &= 2 - 1 = 1 \\ \int_1^2 x dx &= \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2} \\ \int_1^2 x^2 dx &= \frac{1}{3}(8 - 1) = \frac{7}{3} \\ \int_1^2 \frac{1}{x} dx &= \ln 2 \\ \int_1^2 \frac{1}{x} x dx &= \int_1^2 1 dx = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu są liczby: $a_0 = 1.408$, $a_1 = -0.477$, zatem szukana funkcja aproksymacyjna ma postać:

$$F(x) = 1.408 - 0.477x$$



Rys. 6.7. Wykres funkcji $f(x)$ i funkcji aproksymacyjnej $F(x)$.

Implementacja rozwiązania przykładu w MATLABie znajduje się poniżej. Na uwagę zasługuje zastąpienie całki analitycznej numeryczną obliczoną metodą prostokątów (którą wyjaśnimy w kolejnych rozdziałach). W tym celu generujemy wektor x zawierający zbiór 1001 równoodległych punktów w przedziale $(1, 2)$. Dla każdego punktu obliczamy wartość funkcji podcałkowej i mnożymy przez długość h (w przykładowej implementacji $h=0.001$). Zatem, możemy zapisać:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2 - 1 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{1}{x_i} \approx h \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \approx h \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$$

zatem powstaje nam układ równań $Aa=b$ o postaci:

$$\begin{bmatrix} 2-1 \\ \sum_{i=1}^n x_i^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^{-1} & \sum_{i=1}^n x_i^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Należy zauważyć, że dla powyższych funkcji bazowych całki zostały wyznaczone bardzo łatwo analitycznie. Niemniej w ogólnym przypadku, gdy funkcje bazowe są bardziej złożone, to metoda wyznaczania całki numerycznie może okazać się bardziej praktyczna.

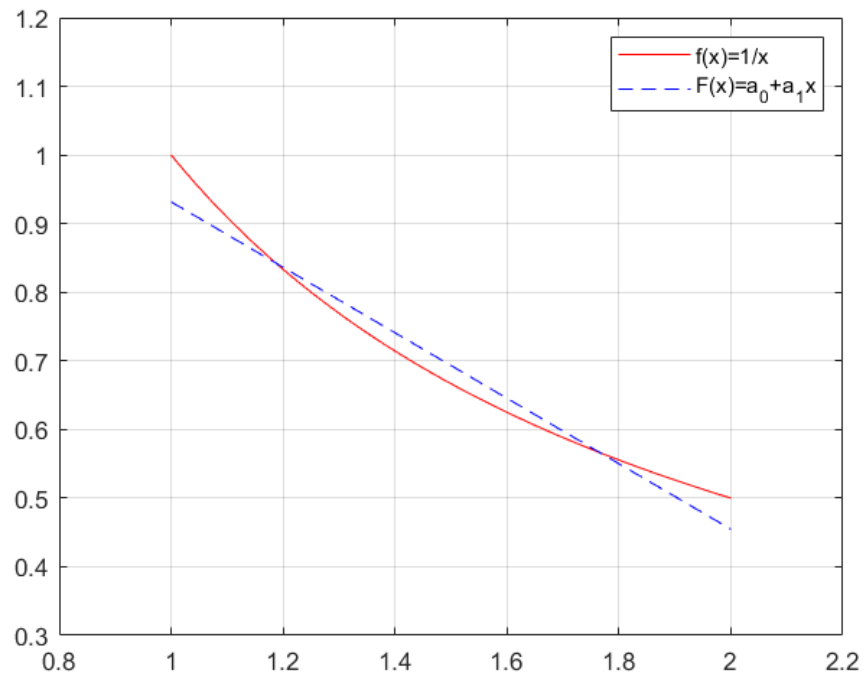
Powyższy przykład został zaimplementowany w MATLABie.

```
f = @(x) (1./x);
h = 0.001;
a=1;
b=2;
x = a:h:b;
n = length(x)
A = [
    b-a sum(x(1:end-1).'*1)*h
    sum(x(1:end-1).'*1)*h sum(x(1:end-1).^2)*h
]
b = [
    sum(1./x(1:end-1))*h
    sum(x(1:end-1).^0)*h
]
a = A\b
a_0 = a(1)
a_1 = a(2)
F = @(x) (a_0 + a_1*x);
close all
plot(x,f(x),'-r', x, F(x), 'b--')
xlim([0.8,2.2])
legend('f(x)=1/x', 'F(x)=a_0+a_1*x')
ylim([0.3,1.2])
```

W wyniku uruchomienia powyższego skryptu otrzymamy bardzo podobny wynik do analitycznego:

```
a_0 =  
1.4086  
a_1 =  
-0.4770
```

oraz wykres



Rys. 6.8. Wykres funkcji $f(x)$ i funkcji aproksymacyjnej $F(x)$ uzyskanej za pomocą całek obliczonych numerycznie.