

## 8 Rozdział

Strona: [LeIA](#)

Kurs: Metody numeryczne (2025Z)

Książka: 8 Rozdział

Wydrukowane przez użytkownika: Kinga Kondraciuk

Data: piątek, 7 listopada 2025, 12:41

## Spis treści

- 1. Całkowanie numeryczne**
- 2. Metody proste trapezów i parabol**
- 3. Metody złożone trapezów i parabol**
- 4. Węzły Legendre'a**
- 5. Uwagi o dokładności**

## 1. Całkowanie numeryczne

Bardzo dużo zagadnień technicznych, fizycznych, mechanicznych sprowadza się do obliczania całek oznaczonych funkcji jednej zmiennej. Można za pomocą tych całek liczyć np.: długości łuków, pola obszarów, pola powierzchni obrotowych, objętości brył obrotowych, masy ciał, momenty statyczne i bezwładności, wartości napięcia dla pól elektrycznych, itd. Dokładne obliczenie tych całek wymaga znajomości funkcji pierwotnych dla funkcji podcałkowych, nie każda jednak funkcja posiada funkcję pierwotną. Zachodzi konieczność znalezienia całki oznaczonej metodą przybliżoną. Dotyczy to zwłaszcza sytuacji gdy przebieg określony jest za pomocą ciągu danych pomiarowych w punktach.

Zajmiemy się w tym rozdziale obliczaniem całek oznaczonych za pomocą wielomianów interpolacyjnych. W całce:

$$\int_a^b f(x) dx$$

będziemy zastępować funkcję  $f(x)$  jej wielomianem interpolacyjnym  $n$ -tego stopnia, którego węzły  $x_0, x_1, \dots, x_n$  będą leżały w przedziale całkowania  $[a, b]$  i będą teraz węzłami całkowania. Ograniczymy się w tym opracowaniu do całkowania funkcji bez osobliwości w przedziale  $[a, b]$ , tzn.: funkcji przyjmującej skończone wartości w rozpatrywanym przedziale, a przedział  $[a, b]$  jest skończony. Wynika z tych założeń, że nie będziemy się zajmować całkowaniem całek niewłaściwych.

Do szacowania błędu całkowania wykorzystamy podane już wcześniej wzory na błąd interpolacji. Błąd ten zależy od pochodnych funkcji podcałkowych (a właściwie ich ekstremalnych wartości w granicach przedziału całkowania) i od węzłów. Będziemy rozpatrywać węzły równoodległe - dla prostoty obliczeń, a również węzły optymalne, tzn.: takie, które minimalizują tę część błędu całkowania, która zależy od węzłów.

Obliczając zatem całkę wstawiamy za  $f(x)$  wielomian interpolacyjny Lagrange'a  $n$ -tego stopnia  $L_n(x)$  dany wzorem:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \Phi_k(x) f(x_k) \quad (8.0.1)$$

gdzie :

$$\Phi_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \quad (8.0.2)$$

jest wielomianem Lagrange'a, a  $x_0, x_1, \dots, x_n$  są węzłami w przedziale  $[a, b]$ .

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b L_n(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^n \Phi_k(x) f(x_k) dx \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \left( \int_a^b \Phi_k(x) dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \\ &= S(f) \end{aligned} \quad (8.0.3)$$

gdzie  $A_k = \int_a^b \Phi_k(x) dx$ .

$A_k$  są współczynnikami zależnymi od węzłów, nie zależą od funkcji podcałkowej  $f(x)$ , łatwo je wyliczyć, bo są to całki ze zwykłych wielomianów w przedziale  $[a, b]$ .

Wzór na wartość  $S(f)$  będziemy nazywać **kwadraturą**.

Błąd przybliżenia:  $E(f) = I(f) - S(f)$ , to różnica między dokładną wartością całki  $I(f)$ , a jej wartością przybliżoną  $S(f)$ . Do celu oszacowania jego górnej granicy będziemy używać wartości całki błędu interpolacji w przedziale  $[a, b]$ . Więcej informacji na ten temat w podrozdziale Uwagi o dokładności.

## 2. Metody proste trapezów i parabol

Rozpatrzymy skończony przedział  $[a, b]$  oraz równoodległe węzły  $x_0, x_1, \dots, x_n$  w tym przedziale:  
 $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_k = a + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Wtedy całka jest równa w przybliżeniu:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \cong \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = S(f)$$

gdzie  $A_k = \int_a^b \Phi_k(x) dx$ , oraz  $\Phi_k(x)$  to wielomiany Lagrange'a.

### Wzór prosty trapezów.

Ustalmy  $n = 1$  i wtedy  $h = b - a$  i mamy dwa węzły  $x_0 = a, x_1 = b$ . Wielomian interpolacyjny Lagrange'a jest stopnia 1 i wstawiając za funkcję  $f(x)$  wielomian  $L_1(x)$  mamy:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right) dx = \\ &= f(x_0) \int_a^b \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx + f(x_1) \int_a^b \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) = S(f) \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

Całki w ostatniej linijce wzoru łatwo obliczyć, bo są to całki oznaczone z wielomianów pierwszego stopnia.

W tym wypadku

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_a^b \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \\ &= \frac{1}{x_0 - x_1} \int_a^b (x - x_1) dx = \\ &= \frac{1}{-h} \int_a^b (x - b) dx = \\ &= \frac{1}{-h} \left( \frac{1}{2} x^2 - bx \right) \Big|_a^b = \\ &= \frac{h}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_a^b \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_a^b (x - a) dx = \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2} x^2 - ax \right) \Big|_a^b = \\ &= \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Możemy wzór na przybliżoną wartość  $I(f)$  zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx \cong A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) \\ &\quad (8.1.2) \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru na błąd interpolacji dostajemy:

$$\begin{aligned} E(f) &= I(f) - S(f) = \int_a^b (I(f) - S(f)) df = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (x - a)(x - b) f''(\xi) dx = \\ &= -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi^*) \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

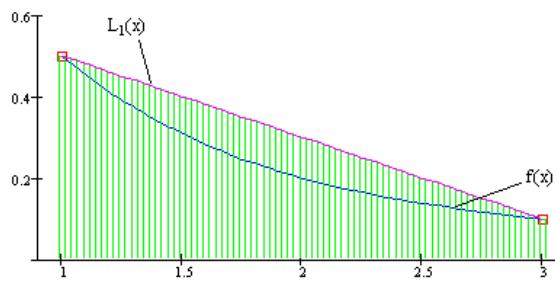
gdzie  $\xi, \xi^* \in [a, b]$ .

Wzór na przybliżoną wartość całki ma prostą interpretację geometryczną. Pokażemy ją na przykładzie.

### Przykład 8.1

## Przykład

Obliczymy przybliżoną wartość całki z funkcji  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  w przedziale  $[1, 3]$  za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia  $n = 1$ . Graficznie, ponieważ dana funkcja jest dodatnia, całka z tej funkcji równa się polu pod krzywą opisaną daną funkcją. Na rysunku 8.1 krzywa jest zaznaczona na niebiesko. Zamiast pola pod krzywą liczymy ze wzoru przybliżonego pole pod prostą łączącą punkty  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$  (czyli pod wielomianem interpolacyjnym pierwszego stopnia) zaznaczoną na czerwono. Pole, które otrzymamy jest zakreskowane na zielono. To zielone pole jest polem trapezu, który "leży" na swojej wysokości  $h$ . I wzór dlatego nosi nazwę wzoru trapezów, a jak widać, we wzorze jest suma podstawa trapezu dzielona przez 2 i pomnożona przez wysokość.



Rys. 8.1. Interpretacja geometryczna wzoru prostego trapezów.

Po wykonaniu obliczeń dostajemy:

$$S(f) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) = 0.6$$

wartość przybliżona całki  $S(f) = 0.6$ , a ponieważ dokładną wartość możemy w tym wypadku podać, bo funkcja pierwotna dla funkcji podcałkowej to  $\arctg(x)$ , zatem  $I(f) = \arctg(b) - \arctg(a) = 0.463648$  (z dokładnością do 6 cyfr po przecinku), to błąd bezwzględny równa się  $bl = |I(f) - S(f)| = 0.136352$ , i stanowi aż 23%. Widać na rysunku, że wartości przybliżona i dokładna znacznie się różnią (pole pod funkcją i pole pod prostą).

### Wzór prosty parabol (Simpsona).

Ponieważ w podanym przykładzie wartość całki obarczona jest dużym błędem, wstawimy zamiast funkcji wielomian interpolacyjny stopnia 2. Ustalmy  $n = 2$  i wtedy  $h = (b - a)/2$  i mamy trzy węzły  $x_0 = a, x_1 = a + h = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ .

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a jest stopnia 2 i wstawiając za funkcję  $f(x)$  wielomian  $L_2(x)$  mamy:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b L_2(x) dx = \\ &= \int_a^b \left( \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right) dx = \\ &= f(x_0) \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx + \\ &\quad + f(x_1) \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx + f(x_2) \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx = \\ &= \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{h}{3} f(x_2) = S(f) \end{aligned} \tag{8.1.4}$$

Ciągi w przedostatniej linijce wzoru łatwo obliczyć, bo są to ciągi oznaczone z wielomianów drugiego stopnia.

W tym wypadku

$$A_0 = \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx = \frac{h}{3}$$

$$A_1 = \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx = \frac{4h}{3}$$

$$A_2 = \int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx = \frac{h}{3}$$

Możemy wzór na przybliżoną wartość  $I(f)$  zapisać w postaci:

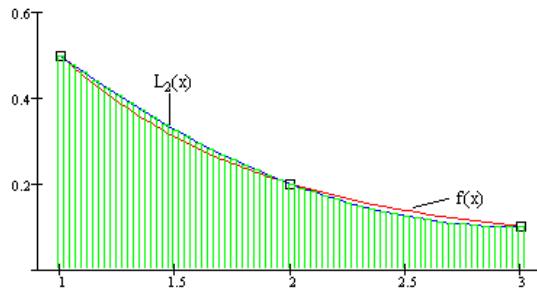
$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \quad (8.1.5)$$

Korzystając ze wzoru na błąd interpolacji dostajemy:

$$E(f) = I(f) - S(f) = \int_a^b (I(f) - S(f)) df = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi^*) \quad (8.1.6)$$

gdzie  $\xi, \xi^* \in [a, b]$ .

Powróćmy do przykładu 8.1. Teraz prowadzimy parabolę przez trzy punkty  $(a, f(a)), ((a+h), f(a+h))$  i  $(b, f(b))$ . Na rysunku 8.2 pole zakreskowane na zielono równa się polu pod parabolą (wielomianem interpolacyjnym stopnia 2) narysowaną na niebiesko, funkcja jest narysowana na czerwono.



Rys 8.2. Interpretacja geometryczna wzoru prostego parabol.

Po obliczeniu przybliżonej wartości całki według wzoru parabol

$$\begin{aligned} S(f) &= A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot 1}{5} + \frac{1}{10} \right) = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

otrzymujemy:  $S(f) = 0.466667$ , błąd bezwzględny  $|I(f) - S(f)| = 0.003019$ , co stanowi tylko 0.3.

### 3. Metody złożone trapezów i parabol

W poprzedniej sekcji rozpatrywaliśmy przybliżone całkowanie funkcji za pomocą wielomianów interpolacyjnych 1 i 2 stopnia z równoodległymi węzłami. Można by wyrowadzić również podobne wzory dla wielomianów wyższych stopni, ale okazało się, że lepiej podzielić przedział całkowania na  $m$  części i w każdym otrzymanym podprzedziale zastosować wzór prosty trapezów lub parabol, korzystając z tego faktu, że całka po przedziale  $[a, b]$  jest sumą całek po otrzymanych podprzedziałach. W ten sposób wyrowadzimy dwa wzory: złożony trapezów i złożony parabol (Simpsona).

#### Wzór złożony trapezów

Dzielimy przedział  $[a, b]$  na  $m$  części:  $h = \frac{b-a}{m}$ ,  $x_k = a + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ . Otrzymamy  $m$  podprzedziałów o długości  $h$ . W każdym z podprzedziałów  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-1$  stosujemy wzór prosty trapezów:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \cong \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (8.2.1)$$

Sumując całki po wszystkich podprzedziałach dostajemy przybliżoną wartość całki w przedziale  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \\ &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^b f(x) dx \cong \\ &\cong \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \dots + \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) + \dots \\ &\dots + \frac{h}{2}(f(x_{m-1}) + f(x_m)) = \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})) + f(x_m)) = \\ &= S(f) \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

Jeśli przesumujemy błędy po wszystkich podprzedziałach otrzymamy:

$$E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi) \quad , \quad \xi \in [a, b] \quad (8.2.3)$$

Zauważmy, że we wzorze na  $S(f)$ , w ostatniej linijce, wartości funkcji podcałkowej w skrajnych węzłach są w nawiasie wzięte z mnożnikiem 1, a w pozostałych węzłach z mnożnikiem 2. Prostą interpretację geometryczną tego faktu zilustrujemy na przykładzie, który był przeliczany w poprzedniej sekcji.

#### Przykład 8.3

##### Przykład

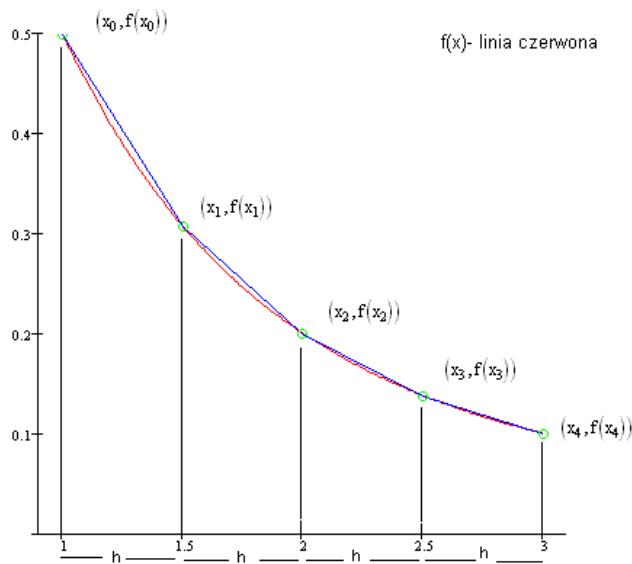
Obliczymy przybliżoną wartość całki z funkcji  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  w przedziale  $[1, 3]$ , dzieląc przedział na 4 części. Mamy:  $m = 4$ ,  $h = 0.5$ , zatem

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{0,5}{2}(f(1) + f(3) + 2(f(1.5) + f(2) + f(2.5))) = \\ &= 0.25 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + 2 \cdot \left( \frac{1}{1+(1.5)^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+(2.5)^2} \right) \right) = 0.473 \end{aligned}$$

Obliczając wartość całki za pomocą funkcji pierwotnej  $F(x) = \arctg(x)$ , otrzymamy  $I(f) = 0.464$ , zatem błąd bezwzględny wyniesie 0.009, tzn. 0.9%.

Graficznie: trzeba obliczyć pola czterech trapezów o tej samej wysokości  $h$ , pierwszy trapez ma podstawy równe  $f(x_0)$  i  $f(x_1)$ , drugi ma podstawy  $f(x_1)$  i  $f(x_2)$ , podstawami trzeciego trapezu są  $f(x_2)$  i  $f(x_3)$  i podstawami czwartego trapezu są  $f(x_3)$  i  $f(x_4)$ .

Jak widać trzy podstawy są wspólne w tych czterech trapezach i dlatego są we wzorze wzięte podwójnie. Skrajne podstawy są uwzględnione tylko raz. Po przesumowaniu pól tych trapezów dostajemy przybliżoną wartość całki  $S(f)$ .



Rys. 8.3. Interpretacja geometryczna wzoru złożonego trapezów.

#### Wzór złożony parabol (Simpsona)

Dzielimy przedział  $[a, b]$  na  $m$  części (ale bierzemy  $m$  **parzyste**):  $h = \frac{b-a}{m}$ ,  $x_k = a + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ . Otrzymamy  $m$  podprzedziałów o długości  $h$ , inaczej  $m/2$  podprzedziałów o długości  $2h$ , w każdym z podprzedziałów o długości  $2h$ :  $[x_i, x_{i+2}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-2$  stosujemy wzór prosty parabol:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \cong \frac{h}{3}(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) \quad (8.2.4)$$

Sumując otrzymane całki po  $m/2$  w podprzedziałach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \\ &= \int_a^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-2}}^b f(x) dx \cong \\ &\cong \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \\ &\quad + \frac{h}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots \\ &\quad + \frac{h}{3}(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) + \dots \\ &\quad + \frac{h}{3}(f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)) = \\ &= \frac{h}{3}(f(x_0) + \\ &\quad + 2(f(x_2) + f(x_4) \dots + f(x_{m-2})) + \\ &\quad + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{m-1})) + \\ &\quad + f(x_m)) = \\ &= S(f) \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

W nawiasie w ostatnim wyrażeniu wartości funkcji w skrajnych węzłach są wzięte z mnożnikiem 1, wartości funkcji w węzłach pozostałych numerach parzystych są z mnożnikiem 2, a w węzłach o numerach nieparzystych z mnożnikiem 4.

Sumując błędy, podane w poprzednim temacie dla wzoru parabol, po  $m/2$  podprzedziałach dostajemy:

$$E(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{(4)}(\xi^*) , \quad \xi^* \in [a, b] \quad (8.2.6)$$

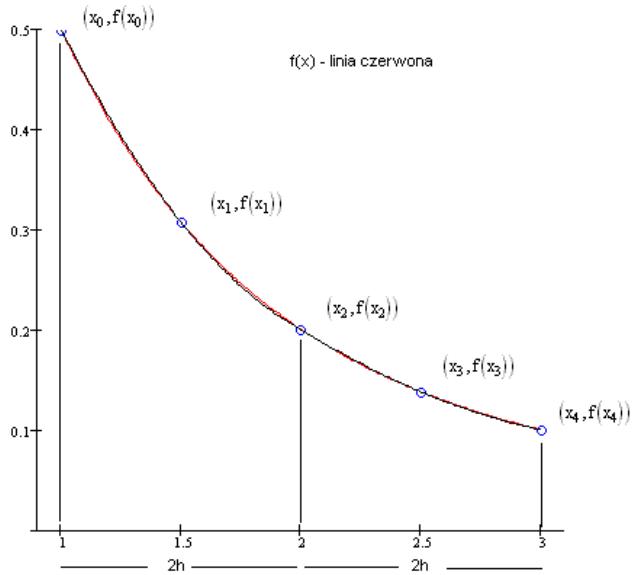
Wróćmy do przykładu 8.1 i obliczmy całkę metodą parabol biorąc też  $m = 4, h = 0.5$ .

Bierzemy podprzedziały  $[1, 2]$  i  $[2, 3]$ , w każdym z nich stosujemy wzór prosty parabol.

Dostajemy:

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) = \\
 &= \frac{h}{3}(f(1) + f(3) + 2 \cdot f(2) + 4 \cdot (f(1.5) + f(2.5))) = 0.4637
 \end{aligned} \tag{1}$$

Korzystając z funkcji pierwotnej, tak jak w przykładzie powyżej dostajemy błąd bezwzględny równy 0.0001, czyli 0.01%. Na rysunku 8.4 są zaznaczone dwie parabole (na czarno), jedna w przedziale  $[1, 2]$ , druga w przedziale  $[2, 3]$ , ale błędy są tak małe, że prawie się pokrywają się z funkcją (na czerwono). Przybliżona wartość całki to suma pól pod tymi parabolami.



Rys. 8.4. Interpretacja geometryczna wzoru złożonego parabol.

## 4. Węzły Legendre'a

W tej sekcji omawiamy kwadratury Gaussa z węzłami Legendre'a. Podajemy również wzory na zależność między ilością podprzedziałów we wzorach złożonych, a dokładnością obliczeń.

Do tej pory obliczaliśmy przybliżoną wartość całki oznaczonej z funkcji  $f(x)$  zastępując ją wielomianami interpolacyjnymi z równoodległymi węzłami. Ale błąd całkowania zależy od położenia węzłów, tak jak w interpolacji, więc choć węzły równoodległe są wygodne do liczenia, nie zawsze są najlepsze. Okazuje się, że optymalnymi węzłami są pierwiastki pewnych wielomianów, które noszą nazwę wielomianów Legendre'a. Nie będziemy wprowadzać tutaj teorii wielomianów ortogonalnych, tylko podamy wartości tych pierwiastków i wartości związkanych z nimi współczynników. Ponieważ pierwiastki wielomianów Legendre'a są w przedziale  $[-1, 1]$ , aby z nich skorzystać, jako z węzłów, zamienimy naszą całkę po przedziale  $[a, b]$  na przedział  $[-1, 1]$  za pomocą podstawienia:  $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$ , wtedy  $dx = \frac{b-a}{2}dt$  i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2}dt = \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Jeśli  $t_k$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$  będą węzłami Legendre'a, to wstawiając za funkcję  $f$  wielomian interpolacyjny stopnia  $n$  z tymi węzłami otrzymamy wzór na przybliżoną kwadraturę :

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \cong \\ &\cong \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k + \frac{b+a}{2}\right) = S(f) \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

gdzie  $A_k = \int_{-1}^1 \Phi_k(x)dx$  nie zależą od funkcji, tylko od węzłów, a w wielomianach  $\Phi_k(x)$  też występują węzły  $t_k$ .

W każdej książce z metod numerycznych jest podana tablica węzłów i współczynników Legendre'a. Podajemy poniżej tabelkę dla wielomianów interpolacyjnych stopnia  $n = 1, 2, 3$  i  $4$ .

<b>n</b>	<b>k</b>	<b>Węzły <math>t_k</math></b>	<b>Współczynniki <math>A_k</math></b>
1	0; 1	$\pm 0.577350$	1
	0; 2	$\pm 0.774597$	$5/9$
2	1	0	$8/9$
	0; 3	$\pm 0.861136$	0.347855
3	1; 2	$\pm 0.339981$	0.652145
	0; 4	$\pm 0.906180$	0.236927
4	1; 3	$\pm 0.538469$	0.478629
	2	0	0.568889

### Przykład 8.4

#### Przykład

Obliczymy przybliżoną wartość całki z funkcji  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  w przedziale  $[1, 3]$  za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia 1 wykorzystując dwa węzły Legendre'a:  $t_0 = -0,577350, t_1 = 0,577350, A_0 = 1, A_1 = 1$ .

Dla  $n = 1$  wzór na  $S(f)$  ma postać :

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)dx \cong \\ &\cong \frac{b-a}{2} \left( A_0 f\left(\frac{b-a}{2}t_0 + \frac{b+a}{2}\right) + A_1 f\left(\frac{b-a}{2}t_1 + \frac{b+a}{2}\right) \right) = S(f) \end{aligned}$$

Przeliczając węzły z przedziału  $[-1, 1]$  do przedziału  $[1, 3]$  otrzymujemy  
 $x_0 = \frac{b-a}{2}t_0 + \frac{b+a}{2} = 1.42265, x_1 = \frac{b-a}{2}t_1 + \frac{b+a}{2} = 2.57735$

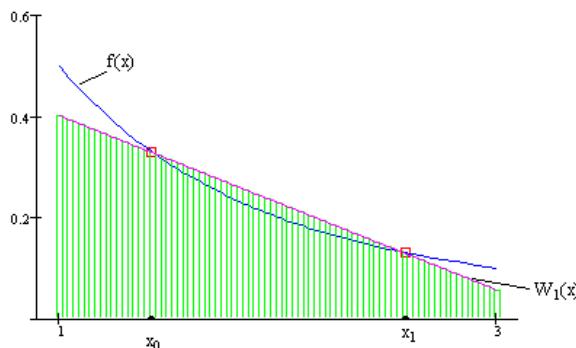
Zatem:

$$S(f) = \frac{3-1}{2} (A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)) = \\ = 1 \cdot (1 \cdot f(1, 42265) + 1 \cdot f(2, 57735)) = 0,462$$

Jak porównamy ten wynik z całką obliczoną za pomocą funkcji pierwotnej  $\text{arctg}(x)$  dostajemy błąd równy 0.002 czyli 0.2%.

Ten przykład był przeliczany na różne sposoby, proszę porównać wynik otrzymany wzorem prostym trapezów.

Graficznie, zamiast pola pod krzywą liczymy ze wzoru przybliżonego pole pod prostą łączącą punkty  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$  (czyli pod wielomianem interpolacyjnym pierwszego stopnia). Pole, które otrzymamy jest zakreskowane na zielono.



**Rys. 8.5.** Interpretacja graficzna wzoru z dwoma węzłami Legendre'a.

Jeśli zastosujemy wielomian stopnia 2, będą nam potrzebne trzy węzły i odpowiadające im trzy współczynniki Legendre'a:

$$t_0 = -0.774597, t_1 = 0, t_2 = 0.774597, A_0 = \frac{5}{9}, A_1 = \frac{8}{9}, A_2 = \frac{5}{9}$$

Wtedy:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{2} (A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)) = S(f)$$

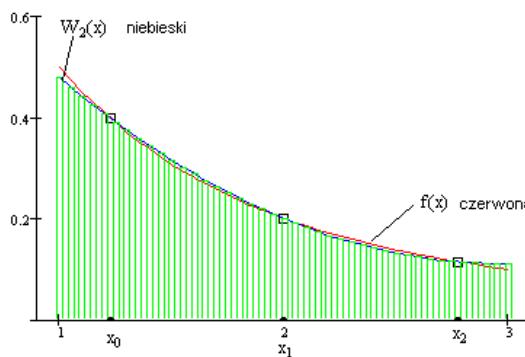
gdzie

$$x_0 = \frac{b-a}{2} t_0 + \frac{b+a}{2} = 1.225403, x_1 = \frac{b-a}{2} t_1 + \frac{b+a}{2} = 2, x_2 = \frac{b-a}{2} t_2 + \frac{b+a}{2} = 2.774597$$

Wstawiając te wartości otrzymujemy:

$$S(f) = \frac{b-a}{2} (A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)) = 0.4637$$

a porównując przybliżoną wartość całki z otrzymaną za pomocą funkcji pierwotnej otrzymujemy błąd 0.00008, czyli 0.008%. Graficznie, zamiast pola pod krzywą liczymy ze wzoru przybliżonego pole pod parabolą przechodzącą przez punkty  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$  (czyli pod wielomianem interpolacyjnym drugiego stopnia). Pole, które otrzymamy jest zakreskowane na zielono.



**Rys. 8.6.** Interpretacja graficzna wzoru z trzema węzłami Legendre'a.

Porównując wyniki, które otrzymaliśmy w powyższych przykładach z wynikami otrzymwanymi za pomocą węzłów równoodległych widzimy, że w tym wypadku liczona tą metodą wartość całki jest bardzo bliska jej wartości "dokładnej". W tym wypadku węzły Legendre'a dają dużo lepszy wynik. Można również, analogicznie jak w przypadku wzorów trapezów i parabol wyrowadzić wzory złożone oparte na 2 lub 3 węzłach Legendre'a i wtedy dokładność jeszcze się poprawi.

## 5. Uwagi o dokładności

W podanych przykładach obliczaliśmy całkę z funkcji, która miała funkcję pierwotną, można było określić błąd wyników, przez porównanie wartości przybliżonej z wartością dokładną. Na ogół całkujemy w sposób numeryczny funkcję taką, dla której nie istnieje funkcja pierwotna, albo trudno ją znaleźć, jednak chcemy aby nasze obliczenia nie przekraczały z góry zadanego błędu. Można to zrobić, jeśli oszacujemy w przedziale całkowania maksymalną wartość modułu drugiej pochodnej dla wzoru trapezów i czwartej pochodnej dla wzoru parabol. Wtedy możemy dobrać tak liczbę podprzedziałów, na które dzielimy przedział  $[a, b]$ , aby uzyskać żądaną dokładność.

Ponieważ wzór na błąd całkowania dla metody trapezów był następujący:

$$E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (8.4.1)$$

to oznaczając przez  $M_2 = \sup$ , błąd bezwzględny całkowania nie przekroczy wartości  $\varepsilon = \left| \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2 \right|$ , skąd przy danym maksymalnym dopuszczalnym błędzie  $\varepsilon$  możemy obliczyć  $m$ , czyli ilość podprzedziałów w metodzie trapezów aby nie został przekroczony.

Mamy:  $m = \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2}$ , ale ponieważ  $m$  musi być liczbą naturalną, bierzemy za  $m$ :

$$m = \lceil \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2} \rceil + 1 \quad (8.4.2)$$

gdzie nawias kwadratowy  $[u]$  oznacza część całkowitą liczby  $u$ .

Dla metody parabol wzór na błąd był następujący:

$$E(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{(4)}(\xi) \quad \text{dla } \xi \in [a, b] \quad (8.4.3)$$

Oznaczamy przez  $M_4 = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$ , wtedy błąd bezwzględny nie przekroczy wartości  $\varepsilon = \left| \frac{(b-a)^5}{180m^4} M_4 \right|$ , zatem wzór na  $m$  jest następujący:  $m = \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M_4}$ , ale  $m$  jest naturalne i musi być **parzyste** zatem:

$$m = 2 \cdot \lceil \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M_4} \rceil + 2 \quad (8.4.4)$$

To sztuczne podzielenie pierwiastka przez 2, a później pomnożenie znów przez 2, zapewnia parzystość otrzymanego  $m$ .

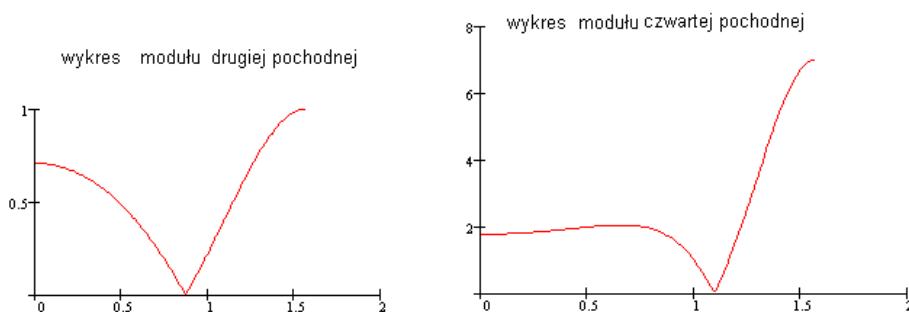
### Przykład 8.5

#### Przykład

Obliczyć z dokładnością  $\varepsilon = 10^{-6}$  długość łuku krzywej  $y = \sin(x)$  w przedziale  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Skorzystamy ze wzoru na długość łuku:  $I = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ , jeśli krzywa jest opisana wzorem  $y = y(x)$  w przedziale  $[a, b]$ .

W naszym przypadku funkcją podcałkową będzie  $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}$ , a ta funkcja nie posiada funkcji pierwotnej, zatem całkę z niej w przedziale  $[a, b]$  liczymy numerycznie. Skorzystamy z metody trapezów i parabol.

Oszacujemy z rysunku wartości modułu drugiej i czwartej pochodnej:



Rys. 8.7. Wykresy wartości bezwzględnych pochodnych: drugiej i czwartej.

Przyjmujemy  $M_2 = 1$ , oraz  $M_4 = 7$ . Wstawiając do odpowiednich wzorów otrzymujemy:

- stosując metodę złożoną trapezów, aby uzyskać dokładność  $10^{-6}$ , musimy podzielić przedział  $[a, b]$  na  $m=569$  części i wtedy otrzymamy wynik  $I = 1.910099$ ,
- a stosując metodę złożoną parabol, aby uzyskać ten sam wynik, wystarczy podzielić przedział na  $m=26$  części.