Teoria Sterowania (639B-ARAUT-MEP-TSTUZ)
Dyskretny filtr Kalmana.

(opracował: M.T., ostatnia modyfikacja: 14 listopada 2025)

---

1 Wstęp

Podstawowe zależności dotyczące dyskretnego filtru Kalmana są następujące [1]. Obiekt dynamiczny, z czasem dyskretnym, liniowy, niestacjonarny, jest opisany równaniami:

$$x_k = F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1} \tag{1a}$$
$$y_k = H_k x_k + v_k \tag{1b}$$

gdzie $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $H \in \mathbb{R}^{p\times n}$, tzn. układ ma m wejść i p wyjść, zaś liczba zmiennych stanu (tzn. wymiar wektora stanu) wynosi n. Wektor $x_k \in \mathbb{R}^n$ oznacza stan układu w chwili k, $u_k \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem wymuszeń (w chwili k), $y_k \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi (w chwili k), zaś $w_k \in \mathbb{R}^n$ i v_p są wektorami szumów, odpowiednio na wejściu i wyjściu (w chwili k).
Zakładamy, że $\mathbf{E}(w_k) = 0$, $\mathbf{E}(w_k w_j^{\mathrm{T}}) = Q_k\delta_{k,j}$, $Q_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{E}(v_k) = 0$, $\mathbf{E}(v_k v_j^{\mathrm{T}}) = R_k\delta_{k,j}$, $R_k \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $\mathbf{E}(w_k v_j^{\mathrm{T}}) = 0$, gdzie $\mathbf{E}$ jest operatorem wartości oczekiwanej zmiennej losowej, zaś $\delta_{k,j}$ deltą Kroneckera. Filtr Kalmana jest opisany równaniami

$$P_k^- = F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^{\mathrm{T}} + Q_{k-1} \tag{2a}$$
$$K_k = P_k^- H_k^{\mathrm{T}}\left(H_k P_k^- H_k^{\mathrm{T}} + R_k\right)^{-1} \tag{2b}$$
$$\hat{x}_k^- = F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1}u_{k-1} \tag{2c}$$
$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k\left(y_k - H_k\hat{x}_k^-\right) \tag{2d}$$
$$P_k^+ = \left(I - K_kH_k\right)P_k^-\left(I - K_kH_k\right)^{\mathrm{T}} + K_kR_kK_k^{\mathrm{T}} \tag{2e}$$

dla $k = 1, 2, \ldots$, z warunkami początkowymi

$$\hat{x}_0^+ = \mathbf{E}(x_0), \qquad P_0^+ = \mathbf{E}\left[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^{\mathrm{T}}\right]. \tag{3}$$

Jeżeli rozpatrywany obiekt dynamiczny jest układem stacjonarnym,

$$x_k = Fx_{k-1} + Gu_{k-1} + w_{k-1} \tag{4a}$$
$$y_k = Hx_k + v_k \tag{4b}$$

oraz dodatkowo $R_k = R \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $Q_k = Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, to filtr Kalmana jest opisany równaniami

$$P_k^- = FP_{k-1}^+F^{\mathrm{T}} + Q \tag{5a}$$
$$K_k = P_k^- H^{\mathrm{T}}\left(HP_k^-H^{\mathrm{T}} + R\right)^{-1} \tag{5b}$$
$$\hat{x}_k^- = F\hat{x}_{k-1}^+ + Gu_{k-1} \tag{5c}$$
$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k\left(y_k - H\hat{x}_k^-\right) \tag{5d}$$
$$P_k^+ = \left(I - K_kH\right)P_k^-\left(I - K_kH\right)^{\mathrm{T}} + K_kRK_k^{\mathrm{T}} \tag{5e}$$

dla $k = 1, 2, \ldots$, z warunkami początkowymi (3).

Przykład 1. Weźmy pod uwagę model dyskretny układu dynamicznego

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{6a}$$
$$y_k = Cx_k \tag{6b}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0.4716 & 0.0662 \\ -1.2128 & 0.6524 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.3271 \\ 1.0826 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0061 & -0.6509 \\ -1.2128 & 0.6524 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Załóżmy, że chcemy obliczyć pierwsze sekwencję odpowiedzi tego układu tzn., $y_0, y_1, \ldots, y_N$ dla następujących zadanych wartości sygnału wymuszenia $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$, przy znanym warunku początkowym

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Przyjmujemy $N = 120$, zaś wartości wymuszenia są określone wzorem

$$u(k) = \mathrm{sgn}\left(\sin\left(\frac{5\pi k}{100}\right)\right), \tag{10}$$

gdzie

$$k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

zaś sgn oznacza tzw. funkcję signum. Możemy to zrobić korzystając z kodu przedstawionego w Listingu 1.

2 Zadania

Rozpatrujemy obiekt z jednym wejściem i jednym wyjściem, $m = 1$, $p = 1$ (tzw. układ SISO), trzeciego rzędu, tzn. $n = 3$, dla którego wykonano pomiar odpowiedzi na zadane wymuszenie [Rys. 1(a)]. Dane obiektu znajdują się w pliku `plantData01.mat` zaś wartości odpowiednich sygnałów w pliku `signalsData01.mat`.

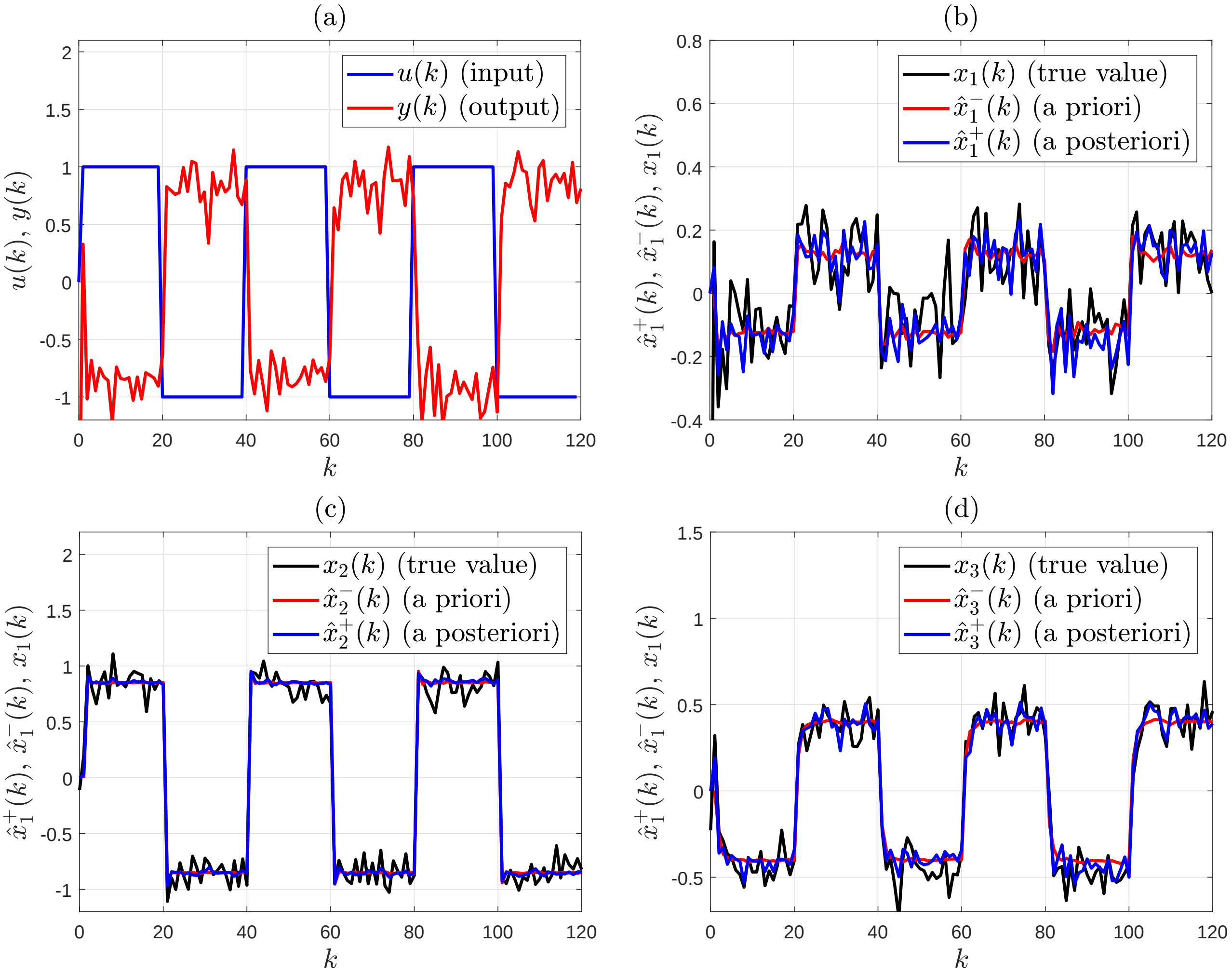
Zadanie 1. Napisać skrypt środowiska MATLAB do wyznaczenia estymat zmiennych stanu rozpatrywanego obiektu dla wartości sygnałów wymuszenia u i odpowiedzi y (z pliku `signalsData01.mat`), zgodnie ze wzorami (5).
Przyjąć $\hat{x}_0^+ = 0$, $P_0^+ = 10\cdot I$ [I jest macierzą jednostkową, $n \times n$, gdzie n jest rzędem układu (4)]. Wykonać odpowiednie wykresy wartości zmiennych stanu i ich estymat, jak na Rys. 1(b)-(c). Wykonać wykres sygnałów wymuszenia i odpowiedzi [Rys. 1(a)] na podstawie danych z pliku `signalsData01.mat`.
Uwaga: Plik `signalsData01.mat` zawiera wartości estymat *a priori* i *a posteriori*. Oczywiście estymaty te trzeba wyznaczyć samodzielnie i sprawdzić czy otrzymany wynik jest zgodny z wartościami podanymi. Przy wyznaczaniu tych estymat, zakładamy, że znamy jedynie zaszumione wartości wejść i wyjść, parametry szumu (tzn. macierze Q i R) oraz macierze modelu.

Listing 1.

```
close all
clear
clc

nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

N = 120;
U = sign(sin(5*pi*(0:N-1)/100));

A = [0.4716 0.0662; -1.2128 0.6524];
B = [0.3271; 1.0826];
C = [1.0061 -0.6509; -1.2128 0.6524];

n = 2; % number of state variables
m = 1; % number of inputs
p = 2; % number of outputs
N = size(U,2);
X = zeros(n,N);
x0 = zeros(n,1);
x = x0;
for k = 1:N
    x = A*x + B*U(:,k);
    X(:,k) = x;
end

X = [x0 X];
Y = C*X;

figure('units','normalized', ...
    'outerposition',[0 0 0.5 1])
subplot(2,1,1)
plot(0:N,Y(1,:),'s-b','MarkerEdgeColor', ...
              'b','MarkerFaceColor','b')
hold on
plot(0:N,Y(2,:),'s-r','MarkerEdgeColor', ...
              'r','MarkerFaceColor','r')
axis([0 N -1.5 1.5])
grid on
set(gca,'FontSize',nfonts);
xlabel('$k$','Interpreter','Latex', ...
    'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$y_{1}(k)$, $y_{2}(k)$', ...
'Interpreter','Latex', ...
    'FontSize',nfontslatex)

subplot(2,1,2)
plot(0:N-1,U(1,:),'s-b','MarkerEdgeColor', ...
              'b','MarkerFaceColor','b')
axis([0 N -1.5 1.5])
grid on
set(gca,'FontSize',nfonts);
xlabel('$k$','Interpreter','Latex', ...
    'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$u(k)$','Interpreter','Latex', ...
    'FontSize',nfontslatex)
```

Literatura

[1] D. Simon. *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞, and Nonlinear Approaches.* Wiley-Interscience, 2006.



Rysunek 1: Panel (a): sygnały wymuszenia u_k i odpowiedzi y_k rozpatrywanego obiektu opisanego równaniami (4) [Zadanie 1]. Panel (b): Wartości zmiennej stanu x_1, jej estymaty *a posteriori* $\hat{x}_1^+$ oraz jej estymaty *a priori* $\hat{x}_1^-$ [Zadanie 1]. Panel (c): Wartości zmiennej stanu x_2, jej estymaty *a posteriori* $\hat{x}_2^+$ oraz jej estymaty *a priori* $\hat{x}_2^-$ [Zadanie 1]. Panel (d): Wartości zmiennej stanu x_3, jej estymaty *a posteriori* $\hat{x}_3^+$ oraz jej estymaty *a priori* $\hat{x}_3^-$ [Zadanie 1].