

1 Teoria

1.1 Układy SISO

Weźmy pod uwagę dyskretny układ dynamiczny SISO, opisany równaniami

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k \quad (1a)$$

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \quad (1b)$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, \dots$. Problem wyznaczenia sygnału sterującego dla osiągnięcia zadanego stanu docelowego można sformułować jako zadanie optymalizacji [1, 2, 3], które polega na znalezieniu ciągu sterowań u_k , $k = k_i, \dots, k_f - 1$, który przeprowadzi układ z określonego stanu początkowego $\mathbf{x}_{k_i} = \mathbf{x}_i$ do zadanego stanu końcowego $\mathbf{x}_{k_f} = \mathbf{x}_f$, dla $k_f > k_i$, $k_i, k_f \in \mathbb{N}$. W dalszym ciągu bez straty ogólności rozważań będziemy zakładać, że $k_i = 0$. Zgodnie z równaniem stanu (1) dla $k_i = 0$ mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}u_0 \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}u_1 \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}u_0) + \mathbf{B}u_1 \\ &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}u_0 + \mathbf{B}u_1 \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}u_2 \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}u_0 + \mathbf{B}u_1) + \mathbf{B}u_2 \\ &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^2\mathbf{B}u_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}u_1 + \mathbf{B}u_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

Ogólnie, rozwiązaniem równania (1) dla $k > 0$ jest

$$\mathbf{x}_k = \underbrace{\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0}_{\text{składowa swobodna}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B}u_j}_{\text{składowa wymuszona}}. \quad (3)$$

W języku teorii obwodów składową swobodną nazywa się składową nieustaloną, natomiast składową wymuszoną – składową ustaloną. Składowa swobodna zależy od warunku początkowego, nie zależy natomiast od wymuszenia. Składowa wymuszona zależy od wymuszenia (tzn. ciągu sterowań), nie zależy natomiast od warunku początkowego. Podstawiając $k = k_f = N$ (N będziemy nazywać horyzontem czasowym) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_N &= \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-1+j} \mathbf{B}u_j \\ &= \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 + [\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^1\mathbf{B} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\mathbf{R} \equiv [\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{B}] \quad (5)$$

oraz

$$\boldsymbol{\mu} \equiv [u_0 \quad u_1 \quad \dots \quad u_{N-2} \quad u_{N-1}]^T \quad (6)$$

możemy napisać zależność (4) zwięźle

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}. \quad (7)$$

Zatem postawione na początku zadanie wyznaczenia sterowania sprowadza się do znalezienia takiego wektora $\boldsymbol{\mu}$, który spełnia zależność

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0, \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ oraz $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$ są określone przez (5) i (6). Wyznaczenie ciągu sterowań $\boldsymbol{\mu}$ sprowadza się zatem do rozwiązania układu równań liniowych (8). Załóżmy, że $N \geq n$, oraz $\text{rank } \mathbf{R} = n$, czyli układ jest N -sterowalny. Jeśli $N > n$ to istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania (8). Daje to możliwość nałożenia dodatkowych ograniczeń na $\boldsymbol{\mu}$.

1.1.1 Sterowanie z minimalną energią

Sterowanie z minimalną energią (ang. *minimum energy control*) polega na wyznaczeniu ciągu sterowań, który minimalizuje wskaźnik

$$E \equiv \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \quad (9)$$

co prowadzi do zadania optymalizacji

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \quad (10a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 \quad (10b)$$

Rozwiązaniem powyższego zadania optymalizacji jest

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^* &= \mathbf{R}^\dagger (\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{R}^T (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} (\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{R}\mathbf{R}^T \quad (12)$$

nazywamy gramianem N -osiągalności (N -reachability gramian), zaś \dagger oznacza pseudoodwrotność Moore’a–Penrose’a macierzy. Założenie $\text{rank } \mathbf{R} = n$ implikuje, że $\text{rank } \mathbf{R}\mathbf{R}^T = n$, zatem gramian N -osiągalności \mathbf{G} jest macierzą odwracalną. Zadanie (10) jest równoważne zadaniu

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_2 \quad (13a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 \quad (13b)$$

1.1.2 Sterowanie z minimalnym wydatkiem

Sterowanie z minimalnym wydatkiem (ang. *minimum fuel control*, zwane również sterowaniem optymalnym ze względu na wydatek) polega na wyznaczeniu ciągu sterowań, który minimalizuje wskaźnik

$$F \equiv \sum_{k=0}^{N-1} |u_k| = \|\boldsymbol{\mu}\|_1, \quad (14)$$

co prowadzi do zadania optymalizacji

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_1 \quad (15a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 \quad (15b)$$

1.1.3 Sterowanie nadażne

Zadanie syntezy sterowania nadażnego (ang. *control for trajectory tracking*) polega na znalezieniu takiego ciągu sterowań aby sygnał wyjściowy y_k układu „śledził” zadaną trajektorię odniesienia (referencyjną) w pewnym horyzoncie czasowym $k \in \{1, \dots, N\}$. Załóżmy, że $\mathbf{x}_0 = 0$. Wówczas, korzystając z (4), otrzymujemy

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} u_0 + \dots + \mathbf{A} \mathbf{B} u_{k-2} + \mathbf{B} u_{k-1}, \quad (16)$$

zaś biorąc pod uwagę równanie wyjścia $y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$ otrzymujemy

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} u_0 + \dots + \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} u_{k-2} + \mathbf{C} \mathbf{B} u_{k-1}, \quad (17)$$

dla $k = 1, \dots, N$, lub równoważnie w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Przyjmując oznaczenia

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

oraz

$$\boldsymbol{\Phi} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

możemy napisać

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu}. \quad (21)$$

Macierz tranzykcji $\boldsymbol{\Phi}$ posiada szczególną strukturę, tzw. strukturę Toeplitza. Jest macierzą dolnotrójkątną, odwracalną dla $\mathbf{C} \mathbf{B} \neq 0$. Oznaczmy trajektorię referencyjną przez $\boldsymbol{\xi}_{\text{ref}}$

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{ref}} = [y_1^{\text{ref}} \quad y_2^{\text{ref}} \quad \dots \quad y_N^{\text{ref}}]^T. \quad (22)$$

Wyznaczenie poszukiwanego sterowania sprowadza się do rozwiązania zadania

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\xi}_{\text{ref}}\|_2. \quad (23)$$

Innymi słowy, dla zadanej referencyjnej sekwencji wyjść (odpowiedzi) $\boldsymbol{\xi}_{\text{ref}}$, minimalizujemy pierwiastek z sumy kwadratów uchybów śledzenia $e_k = y_k - y_k^{\text{ref}}$ (ang. *tracking error*) dla $k = 1, \dots, N$,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^N e_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^N [y_k - y_k^{\text{ref}}]^2} \quad (24)$$

Możemy nakładać dodatkowe ograniczenia na ciąg sterowań $\boldsymbol{\mu}$. Nawet jeśli macierz $\boldsymbol{\Phi}$ jest odwracalna, jest dobrą praktyką rozpatrywać tzw. wersję zregularyzowaną zadania śledzenia, w której wprowadza się wyraz kary (ang. *penalty term*) proporcjonalny do energii sygnału sterującego, co prowadzi do zadania optymalizacji

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\xi}_{\text{ref}}\|_2 + \gamma \|\boldsymbol{\mu}\|_2, \quad (25)$$

gdzie $\gamma > 0$ jest dodatnim współczynnikiem kary, zaś $\gamma \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2$ wspomnianym wyrazem kary. Postawienie zadania w ten sposób umożliwia znalezienie kompromisu (ang. *tradeoff*) pomiędzy uchybem śledzenia a energią sygnału wejściowego. Można rozpatrywać rozmaite modyfikacje zadania (25) np.

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\xi}_{\text{ref}}\|_2 + \gamma \|\boldsymbol{\mu}\|_1, \quad (26)$$

lub

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\xi}_{\text{ref}}\|_2 + \gamma \|\boldsymbol{\mu}\|_2 \quad (27a)$$

$$\text{subject to} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_{\infty} \leq u^{\text{max}} \quad (27b)$$

gdzie $\gamma > 0$ jest ustalonym parametrem zadania.

Stosunkowo łatwo można uwzględnić ograniczenia na szybkość zmian sygnału (ang. *slew rate*). Zauważmy, że dla

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N} \quad (28)$$

mamy

$$\mathbf{D} \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} u_1 - u_0 \\ u_2 - u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} - u_{N-2} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Oznaczając przez s^{max} maksymalną dopuszczalną szybkość zmian sygnału, formułujemy zadanie optymalizacji

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\xi}_{\text{ref}}\|_2 + \gamma \|\boldsymbol{\mu}\|_2 \quad \gamma > 0 \quad (30a)$$

$$\text{subject to} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_{\infty} \leq u^{\text{max}} \quad (30b)$$

$$\|\mathbf{D} \boldsymbol{\mu}\|_{\infty} \leq s^{\text{max}} \quad (30c)$$

1.2 Układy MIMO

Weźmy pod uwagę dyskretny układ dynamiczny MIMO, opisany równaniami

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} u_k \quad (31a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k \quad (31b)$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$, $k = 0, 1, \dots$

Problem wyznaczenia sygnału sterującego dla osiągnięcia zadanego stanu docelowego można sformułować jako zadanie optymalizacji [1, 2, 3], które polega na znalezieniu ciągu sterowań \mathbf{u}_k , $k = k_i, \dots, k_f - 1$, który przeprowadzi układ z określonego stanu początkowego $\mathbf{x}_{k_i} = \mathbf{x}_i$ do zadanego stanu końcowego $\mathbf{x}_{k_f} = \mathbf{x}_f$, dla $k_f > k_i$, $k_i \in \mathbb{N}$. W dalszym ciągu bez straty ogólności rozważań będziemy zakładać, że $k_i = 0$. Zgodnie z równaniem stanu (31) dla $k_i = 0$ mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{B} u_0 \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{x}_1 + \mathbf{B} u_1 \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{B} u_0) + \mathbf{B} u_1 \\ &= \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0 + \mathbf{A} \mathbf{B} u_0 + \mathbf{B} u_1 \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{A} \mathbf{x}_2 + \mathbf{B} u_2 \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0 + \mathbf{A} \mathbf{B} u_0 + \mathbf{B} u_1) + \mathbf{B} u_2 \\ &= \mathbf{A}^3 \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} u_0 + \mathbf{A} \mathbf{B} u_1 + \mathbf{B} u_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (32)$$

Ogólnie, rozwiązaniem równania (31) dla $k > 0$ jest

$$\mathbf{x}_k = \underbrace{\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0}_{\text{składowa swobodna}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_j}_{\text{składowa wymuszona}}. \quad (33)$$

W języku teorii obwodów składową swobodną nazywa się składową nieustaloną, natomiast składową wymuszoną – składową ustaloną. Składowa swobodna zależy od warunku początkowego, nie zależy natomiast od wymuszenia. Składowa wymuszona zależy od wymuszenia (tzn. ciągu sterowań), nie zależy natomiast od warunku początkowego. Podstawiając $k = k_f = N$ (N będziemy nazywać horyzontem czasowym) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_N &= \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-1-j} \mathbf{B} \mathbf{u}_j \\ &= \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 + [\mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^1 \mathbf{B} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N-2} \\ \mathbf{u}_{N-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\mathbf{R} \equiv [\mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \mathbf{B}] \quad (35)$$

oraz

$$\boldsymbol{\mu} \equiv [u_0^T \quad u_1^T \quad \dots \quad u_{N-2}^T \quad u_{N-1}^T]^T \quad (36)$$

gdzie $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, \dots, N-1$, oraz $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{Nm}$, możemy napisać zależność (34) zwięźle

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 + \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}. \quad (37)$$

Zatem postawione na początku zadanie wyznaczenia sterowania sprowadza się do znalezienia takiego wektora $\boldsymbol{\mu}$, który spełnia zależność

$$\mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0, \quad (38)$$

gdzie $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times Nm}$ oraz $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{Nm}$ są określone przez (5) i (6). Wyznaczenie ciągu sterowań $\boldsymbol{\mu}$ sprowadza się zatem do rozwiązania układu równań liniowych (8). Załóżmy, że $Nm \geq n$, oraz $\text{rank } \mathbf{R} = n$, czyli układ jest N -sterowalny. Jeśli $Nm > n$ to istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania (8). Daje to możliwość nałożenia dodatkowych ograniczeń na $\boldsymbol{\mu}$.

1.2.1 Sterowanie z minimalną energią

Sterowanie z minimalną energią (ang. *minimum energy control*) polega na wyznaczeniu ciągu sterowań, który minimalizuje wskaźnik

$$E \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_k\|^2 \quad (39)$$

co prowadzi do zadania optymalizacji

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \quad (40a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 \quad (40b)$$

Rozwiązaniem powyższego zadania optymalizacji jest

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^* &= \mathbf{R}^\dagger (\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathbf{R}^T)^{-1} (\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (41)$$

gdzie

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{R} \mathbf{R}^T \quad (42)$$

nazywamy gramianem N -osiągalności (N -reachability gramian), zaś \dagger oznacza pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a macierzy. Założenie $\text{rank } \mathbf{R} = n$ implikuje, że $\text{rank } \mathbf{R} \mathbf{R}^T = n$, zatem gramian N -osiągalności \mathbf{G} jest macierzą odwracalną. Zadanie (40) jest równoważne zadaniu

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_2 \quad (43a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 \quad (43b)$$

1.2.2 Sterowanie z minimalnym wydatkiem

Sterowanie z minimalnym wydatkiem (ang. *minimum fuel control*, zwane również sterowaniem optymalnym ze względu na wydatek) polega na wyznaczeniu ciągu sterowań, który minimalizuje wskaźnik

$$F \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_k\|_1 = \|\boldsymbol{\mu}\|_1, \quad (44)$$

co prowadzi do zadania optymalizacji

$$\underset{\boldsymbol{\mu}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{\mu}\|_1 \quad (45a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^N \mathbf{x}_0 \quad (45b)$$

1.2.3 Sterowanie nadążne

Zadanie syntezy sterowania nadążnego (ang. *control for trajectory tracking*) polega na znalezieniu takiego ciągu sterowań aby sygnał wyjściowy y_k układu „śledził” zadaną trajektorię odniesienia (referencyjną) w pewnym horyzoncie czasowym $k \in \{1, \dots, N\}$. Załóżmy, że $\mathbf{x}_0 = 0$. Wówczas, korzystając z (34), otrzymujemy

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_0 + \dots + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-2} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1}, \quad (46)$$

zaś biorąc pod uwagę równanie wyjścia $y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$ otrzymujemy

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_0 + \dots + \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-2} + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1}, \quad (47)$$

dla $k = 1, \dots, N$, lub równoważnie w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Przyjmując oznaczenia

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (49)$$

oraz

$$\boldsymbol{\Phi} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

możemy napisać

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu}. \quad (51)$$

Macierz tranzykcji $\Phi \in \mathbb{R}^{Np \times Nm}$ posiada szczególną strukturę, tzw. strukturę Toeplitza. Jest macierzą blokową dolnotrójkątną. Oznaczmy trajektorię referencyjną przez ξ_{ref}

$$\xi_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{\text{ref}} \\ \mathbf{y}_2^{\text{ref}} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N^{\text{ref}} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Wyznaczenie poszukiwanego sterowania sprowadza się do rozwiązania zadania

$$\underset{\mu}{\text{minimize}} \quad \|\Phi\mu - \xi_{\text{ref}}\|_2. \quad (53)$$

Innymi słowy, dla zadanej referencyjnej sekwencji wyjść (odpowiedzi) ξ_{ref} , minimalizujemy pierwiastek z sumy kwadratów uchybów śledzenia $e_k = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^{\text{ref}}\|$ (ang. *tracking error*) dla $k = 1, \dots, N$,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^N e_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^N \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^{\text{ref}}\|^2} \quad (54)$$

Możemy nakładać dodatkowe ograniczenia na ciąg sterowań μ . Dobrą praktyką rozpatrywać tzw. wersję zregularyzowaną zadania śledzenia, w której wprowadza się wyraz kary (ang. *penalty term*) proporcjonalny do energii sygnału sterującego, co prowadzi do zadania optymalizacji

$$\underset{\mu}{\text{minimize}} \quad \|\Phi\mu - \xi_{\text{ref}}\|_2 + \gamma \|\mu\|_2, \quad (55)$$

gdzie $\gamma > 0$ jest dodatnim współczynnikiem kary, zaś $\gamma \|\mu\|_2^2$ wspomnianym wyrazem kary. Postawienie zadania w ten sposób umożliwia znalezienie kompromisu (ang. *tradeoff*) pomiędzy uchybem śledzenia a energią sygnału wejściowego. Można rozpatrywać rozmaite modyfikacje zadania (55) np.

$$\underset{\mu}{\text{minimize}} \quad \|\Phi\mu - \xi_{\text{ref}}\|_2 + \gamma \|\mu\|_1, \quad (56)$$

lub

$$\underset{\mu}{\text{minimize}} \quad \|\Phi\mu - \xi_{\text{ref}}\|_2 + \gamma \|\mu\|_2 \quad (57a)$$

$$\text{subject to} \quad \|\mu\|_{\infty} \leq u^{\max} \quad (57b)$$

gdzie $\gamma > 0$ jest ustalonym parametrem zadania. Stosunkowo łatwo można uwzględnić ograniczenia na szybkość zmian sygnału (ang. *slew rate*). Zauważmy, że dla

$$D = \begin{bmatrix} -I & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -I & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)m \times Nm} \quad (58)$$

mamy

$$D\mu = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N-1} - \mathbf{u}_{N-2} \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Oznaczając przez s^{\max} maksymalną dopuszczalną szybkość zmian sygnału, formułujemy zadanie optymalizacji

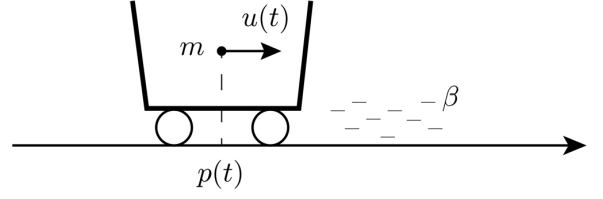
$$\underset{\mu}{\text{minimize}} \quad \|\Phi\mu - \xi_{\text{ref}}\|_2 + \gamma \|\mu\|_2 \quad \gamma > 0 \quad (60a)$$

$$\text{subject to} \quad \|\mu\|_{\infty} \leq u^{\max} \quad (60b)$$

$$\|D\mu\|_{\infty} \leq s^{\max} \quad (60c)$$

2 Przykłady

Rozpatrujemy wózek o masie m (Rys. 1), w położeniu $p(t)$, poruszający się w ustalonym kierunku, na który działa siła wymuszająca $u(t)$ oraz siła oporów ruchu scharakteryzowana współczynnikiem β .



Rysunek 1: Obiekt sterowania. Źródło: [3].

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, ruch wózka jest opisany równaniem

$$u(t) - \beta \dot{p}(t) = m \ddot{p}(t). \quad (61)$$

Oznaczając $x_1(t) = p(t)$, $x_2(t) = \dot{p}(t)$, można napisać równanie (61) w postaci układu dwóch równań pierwszego rzędu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (62a)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha x_2(t) + bu(t), \quad (62b)$$

gdzie

$$\alpha = -\frac{\beta}{m}, \quad b = \frac{1}{m}. \quad (63)$$

Wprowadzając dalej oznaczenia

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

można napisać

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c u(t), \quad (65)$$

Jeżeli przyjmiemy, że interesującym nas sygnałem odpowiedzi rozpatrywanego układu jest położenie wózka, to równanie wyjścia będzie postaci

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Równania (65) oraz (66) opisują układ z czasem ciągłym. Dla układów tego typu można wyznaczać odpowiedniki dyskretnie. Rozważmy ogólny układ LTI z czasem ciągłym

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c u(t), \quad (67a)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad (67b)$$

gdzie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem wymuszeń, zaś $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi. Rozwiązanie równania stanu (67a), dla $t \geq t_0$, wyraża się wzorem

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (68)$$

Układ (67) można zdyskretyzować. Zakładając, że wymuszenie $\mathbf{u}(t)$ jest stałe między kolejnymi chwilami próbkowania

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k\Delta), \quad \text{dla każdego} \quad t \in [k\Delta, (k+1)\Delta[\quad (69)$$

oraz znając stan w chwili $k\Delta$, można wyznaczyć stan w chwili $(k+1)\Delta$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)\Delta) &= e^{\mathbf{A}_c\Delta} \mathbf{x}(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{\mathbf{A}_c((k+1)\Delta-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}_c\Delta} \mathbf{x}(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{\mathbf{A}_c((k+1)\Delta-\tau)} d\tau \mathbf{B}_c \mathbf{u}(k\Delta) \\ &= e^{\mathbf{A}_c\Delta} \mathbf{x}(k\Delta) + \int_0^{\Delta} e^{\mathbf{A}_c\tau} d\tau \mathbf{B}_c \mathbf{u}(k\Delta). \end{aligned} \quad (70)$$

Oznaczając

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k\Delta), \quad \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k\Delta), \quad (71)$$

$$\mathbf{A}_\Delta = e^{\mathbf{A}_c \Delta}, \quad \mathbf{B}_\Delta = \int_0^\Delta e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c d\tau, \quad (72)$$

możemy napisać równania odpowiednika dyskretnego

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_\Delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_\Delta \mathbf{u}(k), \quad (73a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k). \quad (73b)$$

W sytuacjach gdy nie będzie to prowadzić do wątpliwości, będziemy opuszczać indeks Δ przy macierzach \mathbf{A} i \mathbf{B} w równaniu (73a), ponadto, będziemy pisać \mathbf{x}_k oraz \mathbf{u}_k zamiast, odpowiednio, $\mathbf{x}(k)$ oraz $\mathbf{u}(k)$.

Korzystając ze wzorów (71–73) oraz uwzględniając (64) otrzymujemy macierze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha\Delta} - 1) \\ 0 & e^{\alpha\Delta} \end{bmatrix}, \quad (74)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha\Delta} - 1) - \Delta \\ e^{\alpha\Delta} - 1 \end{bmatrix} \quad (75)$$

odpowiednika dyskretnego

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \quad (76a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k, \quad (76b)$$

dla rozpatrywanego obiektu tzn. wózka.

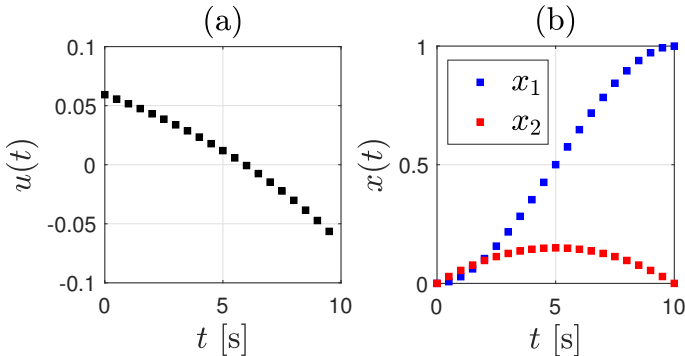
Wyprowadzenie zależności (74)–(75) podano w Dodatku A.

3 Zadania

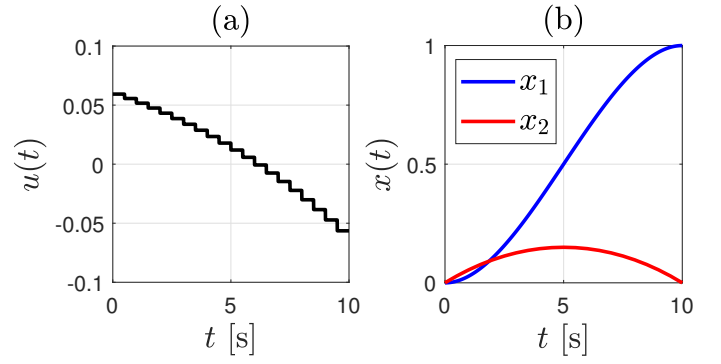
Zadanie 1. Zakładając, że masa rozpatrywanego wózka wynosi $m = 1$ [kg], $\beta = 0.1$ [Ns/m], przedział próbkowania $\Delta = 0.5$ [s], stan początkowy $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$, $t_f = 10$ [s] wyznaczyć optymalny [w sensie sterowania z minimalną energią (13)] ciąg sterowań

$$\boldsymbol{\mu}_{k_f} = [u_0, \dots, u_{N-1}]^T \quad (77)$$

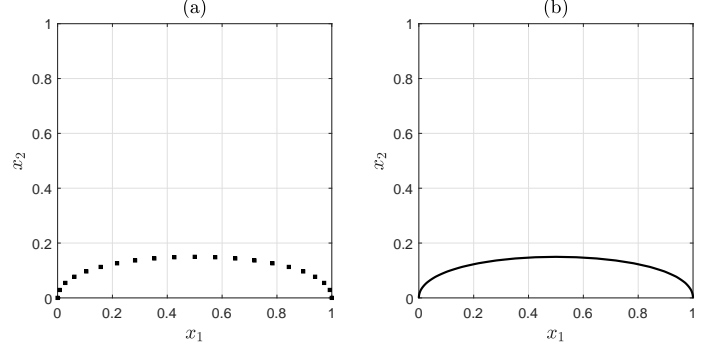
który przeprowadzi układ do stanu końcowego $\mathbf{x}_f = [1 \ 0]^T$ (który odpowiada położeniu końcowemu $p(k_f) = 1$ i prędkości końcowej $\dot{p}(k_f) = 0$). Wyznaczyć trajektorię stanu układu odpowiadającą temu ciągowi sterowań oraz wygenerować wykresy przebiegu $u(t)$ i $x(t)$ przedstawione na Rys. 2–4. Horyzont wynosi $N = t_f/\Delta = 20$. Trajektorię w przestrzeni stanu dla zadanego sterowania można wyznaczyć korzystając z funkcji `lsim` środowiska Matlab. Zadanie (13) jest równoważne zadaniu (10), które jest zadaniem optymalizacji kwadratowej, dlatego można je rozwiązać korzystając z funkcji `quadprog` środowiska Matlab.



Rysunek 2: Sterowanie z minimalną energią - sygnał sterowania $u(t)$. Panel (a): układ z czasem dyskretnym, panel (b): układ z czasem ciągłym. [Zadanie 1]



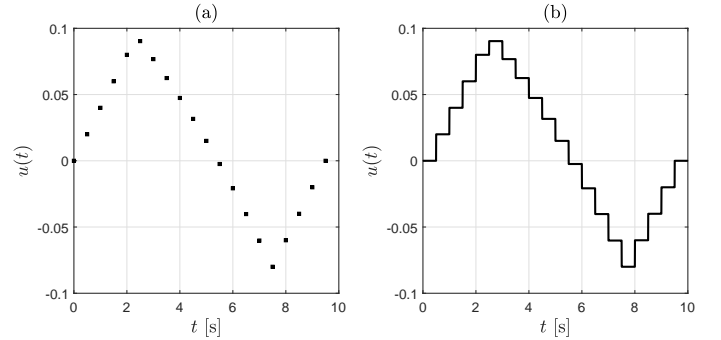
Rysunek 3: Sterowanie z minimalną energią - zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Panel (a): układ z czasem dyskretnym, panel (b): układ z czasem ciągłym. [Zadanie 1]



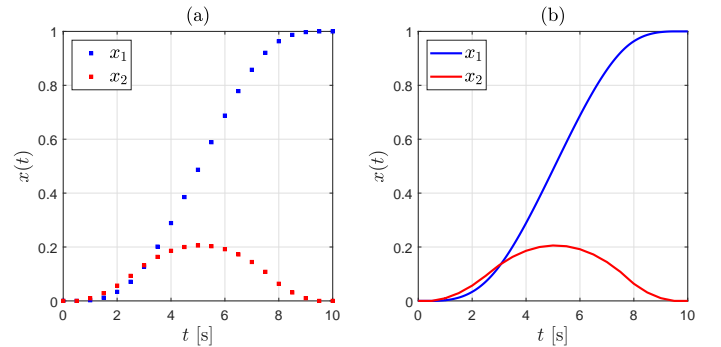
Rysunek 4: Sterowanie z minimalną energią - trajektoria w przestrzeni stanu. Panel (a): układ z czasem dyskretnym, panel (b): układ z czasem ciągłym. [Zadanie 1]

Zadanie 2. Tak jak w Zadaniu 1, przy dodatkowych warunkach $u_0 = u_{N-1} = 0$ oraz

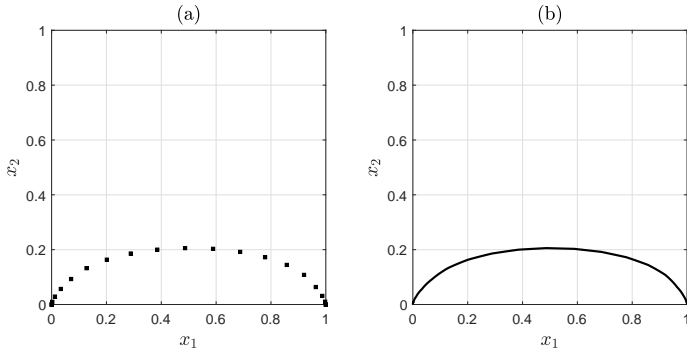
$$|u_{k+1} - u_k| \leq 0.02, \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (78)$$



Rysunek 5: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 2]



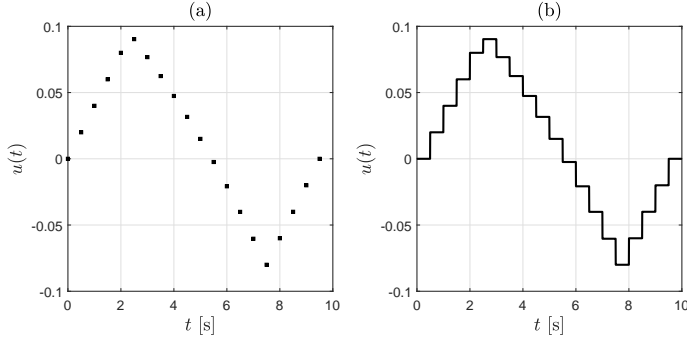
Rysunek 6: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 2]



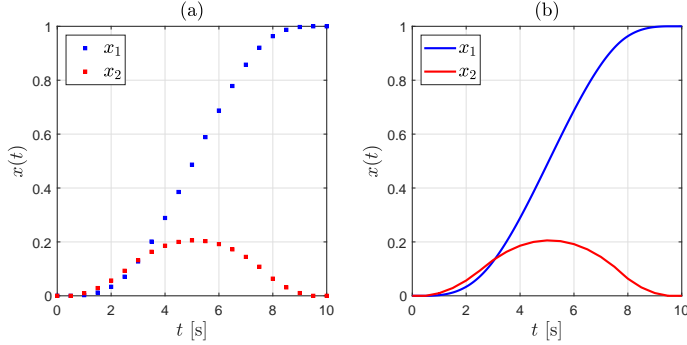
Rysunek 7: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 2]

Zadanie 3. Tak jak w Zadaniu 1, przy dodatkowych warunkach $u_0 = u_{N-1} = 0$ oraz

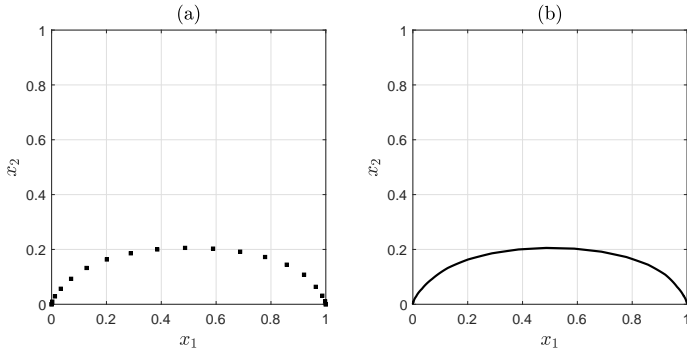
$$u_{k+1} - u_k \leq 0.02, \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (79)$$



Rysunek 8: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 3]

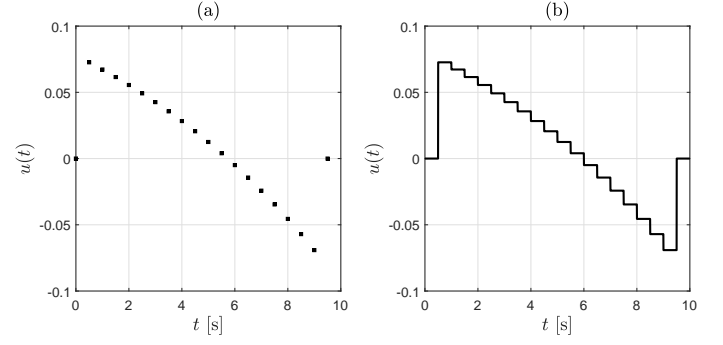


Rysunek 9: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 3]

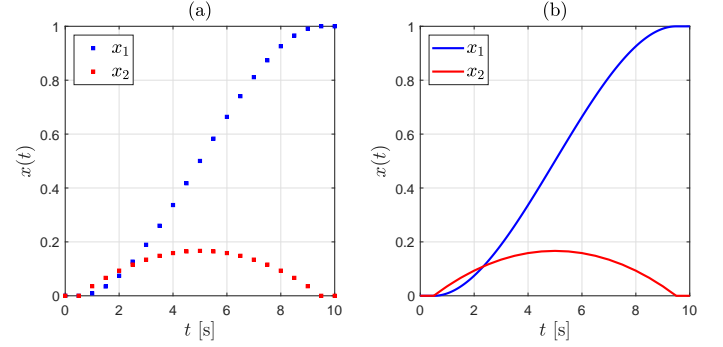


Rysunek 10: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 3]

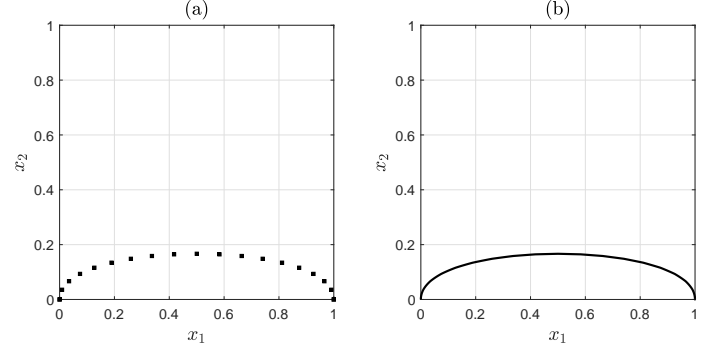
Zadanie 4. Tak jak w Zadaniu 1, przy dodatkowych warunkach $u_0 = u_{N-1} = 0$ (bez warunków na sterowanie).



Rysunek 11: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 4]



Rysunek 12: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 4]

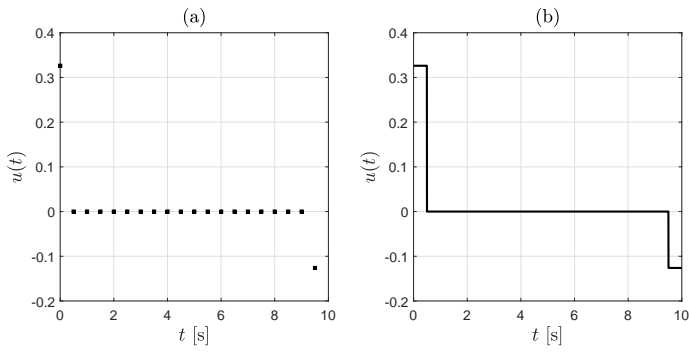


Rysunek 13: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 4]

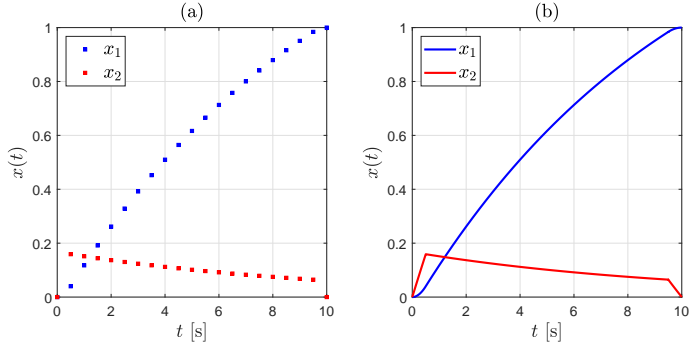
Zadanie 5. Zakładając, że masa rozpatrywanego wózka wynosi $m = 1$ [kg], $\beta = 0.1$ [Ns/m], przedział próbkowania $\Delta = 0.5$ [s], stan początkowy $x_0 = [0 \ 0]^T$, $t_f = 10$ [s] wyznaczyć optymalny [w sensie sterowania z minimalnym wydatkiem (15)] ciąg sterowań

$$\mu_{k_f} = [u_0, \dots, u_{N-1}]^T \quad (80)$$

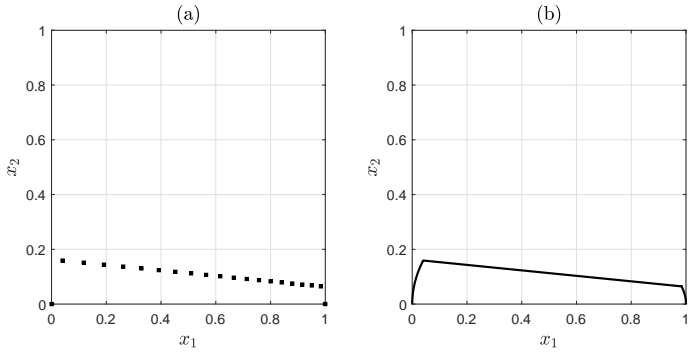
który przeprowadzi układ do stanu końcowego $x_f = [1 \ 0]^T$ (który odpowiada położeniu końcowemu $p(k_f) = 1$ i prędkości końcowej $\dot{p}(k_f) = 0$). Wyznaczyć trajektorię stanu układu odpowiadającą temu ciągowi sterowań oraz wygenerować wykresy przebiegu $u(t)$ i $x(t)$ przedstawione na Rys. 14–16. Horyzont wynosi $N = t_f/\Delta = 20$. Trajektorię w przestrzeni stanu dla zadanego sterowania można wyznaczyć korzystając z funkcji `lsim` środowiska Matlab.



Rysunek 14: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 5]



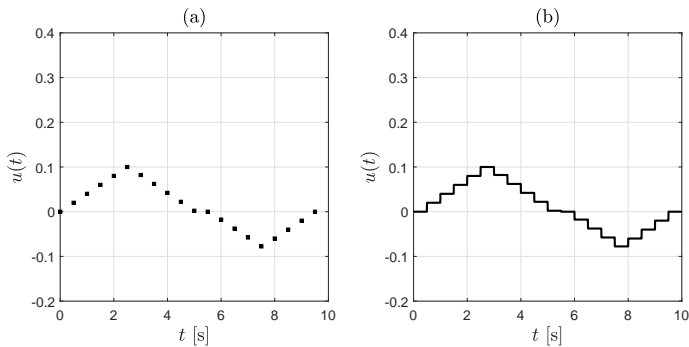
Rysunek 15: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 5]



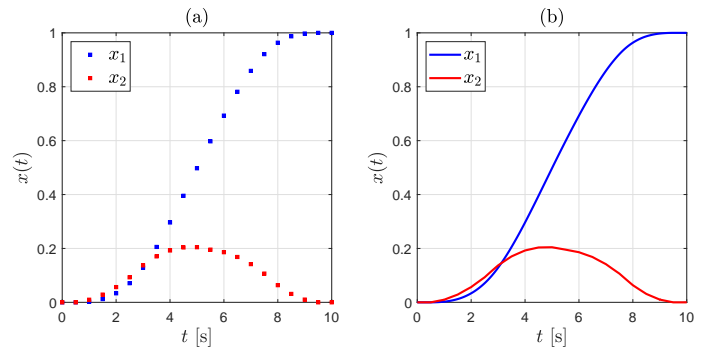
Rysunek 16: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 5]

Zadanie 6. Tak jak w Zadaniu 5, przy dodatkowych warunkach $u_0 = u_{N-1} = 0$ oraz

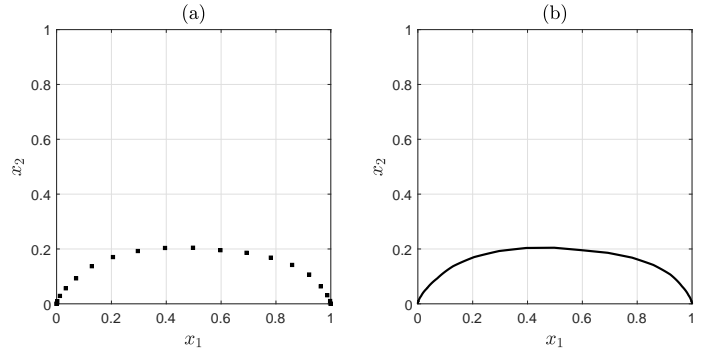
$$|u_{k+1} - u_k| \leq 0.02, \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (81)$$



Rysunek 17: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 6]



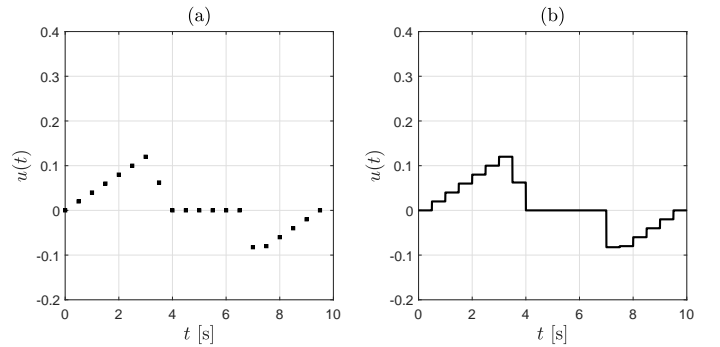
Rysunek 18: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 6]



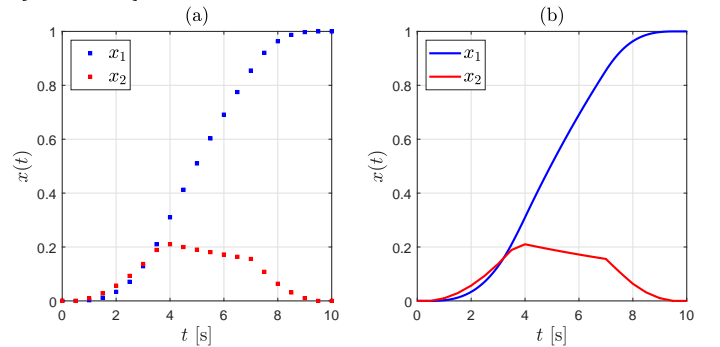
Rysunek 19: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 6]

Zadanie 7. Tak jak w Zadaniu 5, przy dodatkowych warunkach $u_0 = u_{N-1} = 0$ oraz

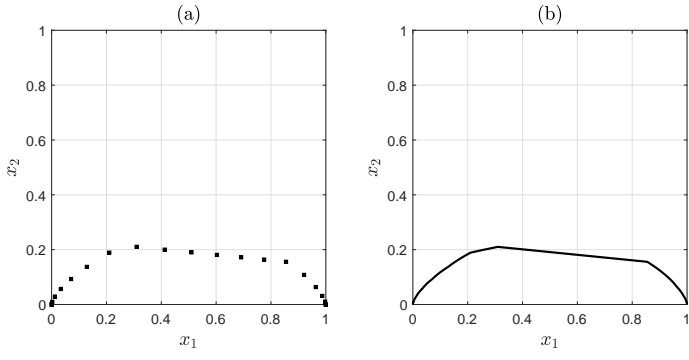
$$u_{k+1} - u_k \leq 0.02, \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (82)$$



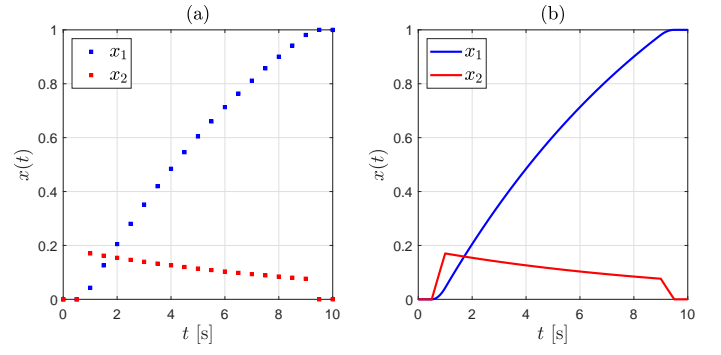
Rysunek 20: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 7]



Rysunek 21: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 7]

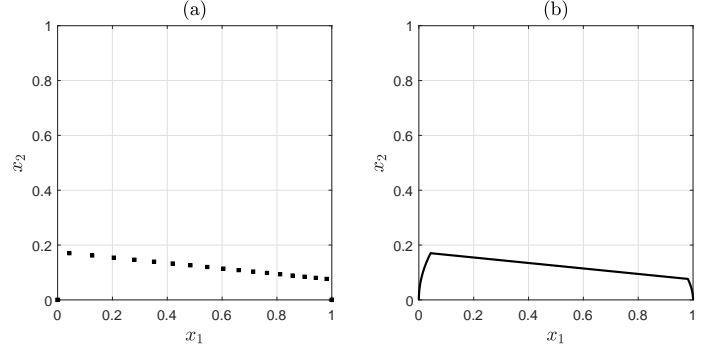


Rysunek 22: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 7]

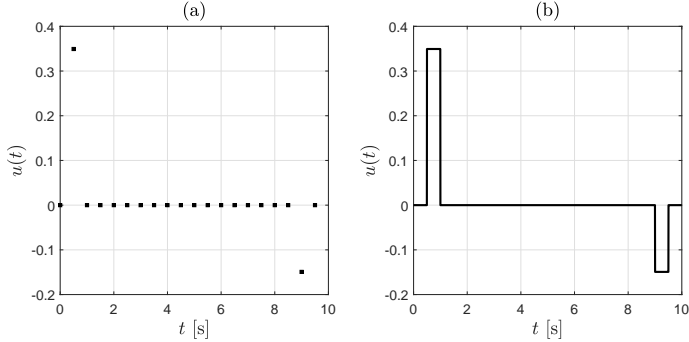


Rysunek 24: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 8]

Zadanie 8. Tak jak w Zadaniu 5, przy dodatkowych warunkach $u_0 = u_{N-1} = 0$ (bez warunków na sterowanie).



Rysunek 25: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 8]



Rysunek 23: Sterowanie z minimalną energią układu z czasem dyskretnym. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): zmienne stanu $x_1(t)$ i $x_2(t)$, panel (c): trajektoria w przestrzeni stanu. [Zadanie 8]

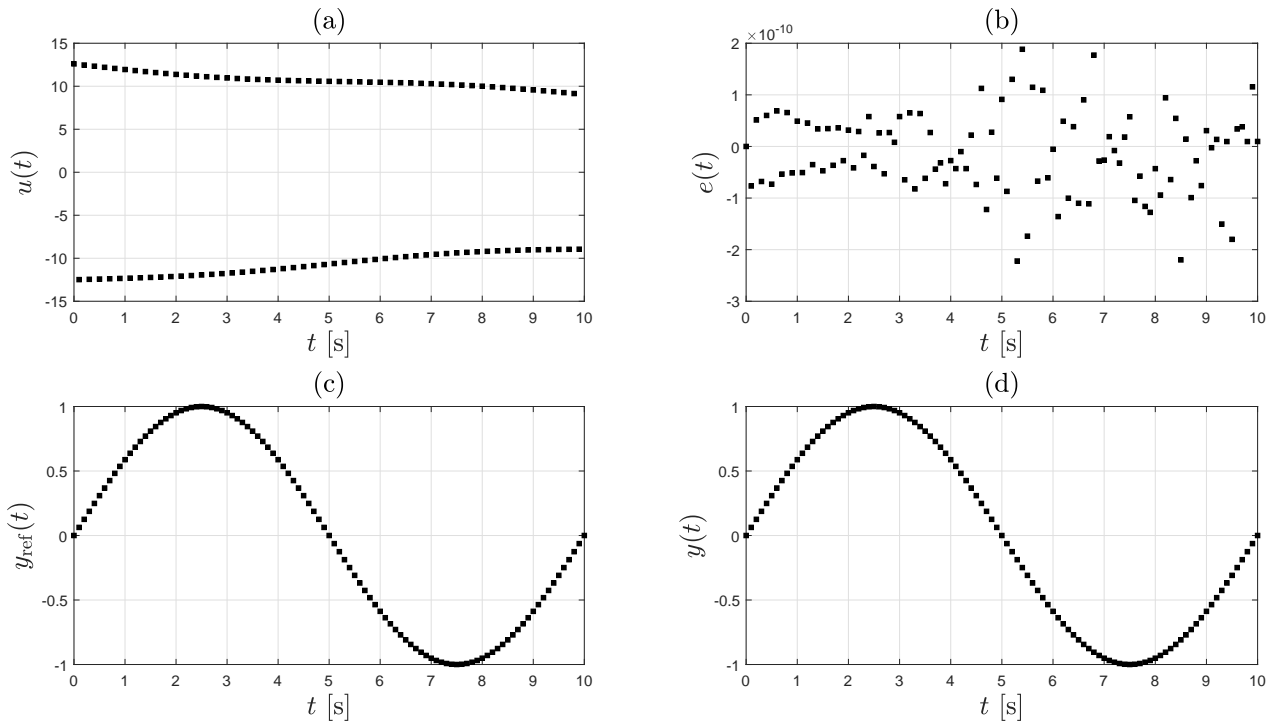
Zadanie 9. Dla $x_0 = [0 \ 0]^T$, $\Delta = 0.1$ [s], $k_f = 100$, $\gamma = 0$ wyznaczyć optymalny [w sensie sterowania nadążnego, zgodnie ze wzorem (25)] ciąg sterowań

$$\mu_{k_f} = [u_0, \dots, u_{k_f-1}]^T \quad (83)$$

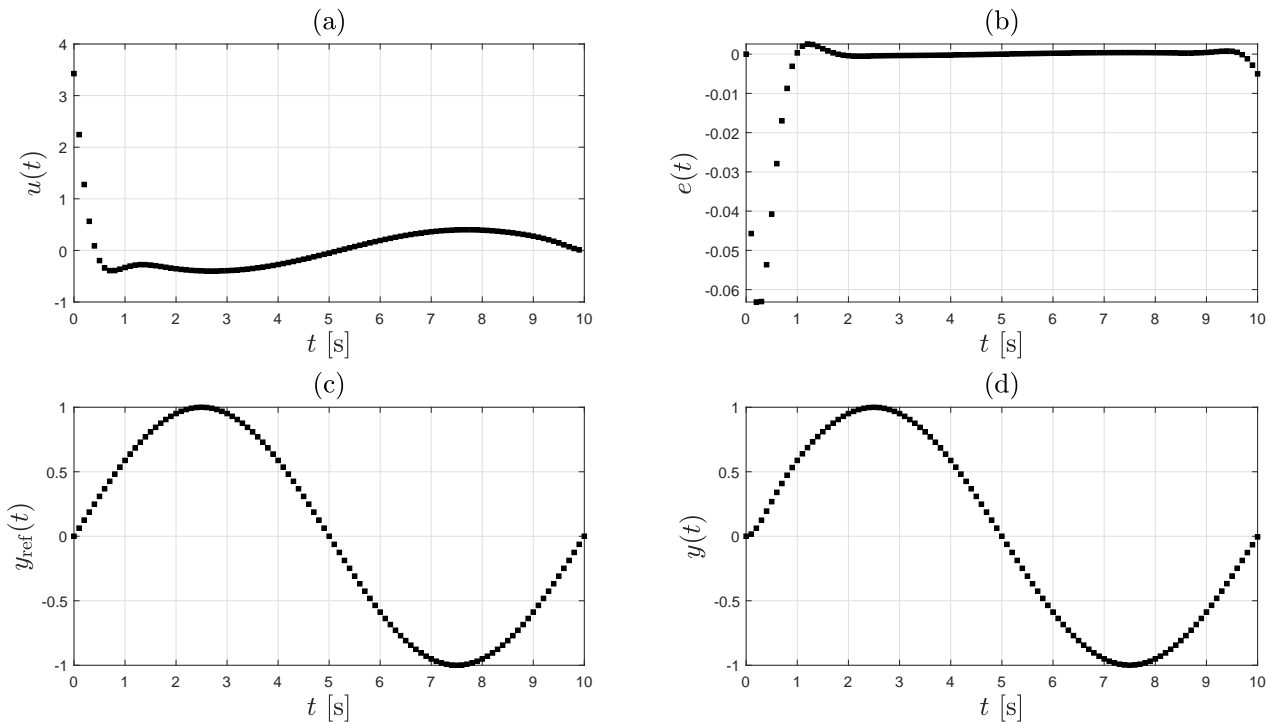
dla trajektorii referencyjnej

$$y_{\text{ref}} = \sin(\omega k \Delta), \quad \omega = \frac{2\pi}{10}, \quad k = 1, \dots, k_f. \quad (84)$$

Wyznaczyć trajektorię stanu układu odpowiadającą temu ciągowi sterowań. Sporządzić rysunki przebiegu $u(t)$ i $x(t)$ tak jak na Rys. 26. Powtórzyć zadanie dla $\gamma = 0.1$ i porównać wyniki (odpowiednie przebiegi dla $\gamma = 0.1$ na Rys. 27).



Rysunek 26: Sterowanie nadążne dla $\gamma = 0$ [wzór (25)]. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): uchyb śledzenia $e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t)$, panel (c): odpowiedź referencyjna $y_{\text{ref}}(t)$, panel (d): odpowiedź układu $y_{\text{ref}}(t)$ na sterowanie $u(t)$. [Zadanie 9]



Rysunek 27: Sterowanie nadążne dla $\gamma = 0.1$ [wzór (25)]. Panel (a): sterowanie $u(t)$, panel (b): uchyb śledzenia $e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t)$, panel (c): odpowiedź referencyjna $y_{\text{ref}}(t)$, panel (d): odpowiedź układu $y_{\text{ref}}(t)$ na sterowanie $u(t)$. [Zadanie 9]

4 Forma sprawozdania

Wszystkie pliki związane z pojedynczym zadaniem należy umieścić w folderze o nazwie `zadanie<nr zadania>`. Następnie wszystkie foldery umieszczamy w jednym folderze nadrzędnym, o nazwie `cwiczenie<nr ćwiczenia>`, kompresujemy do pliku `.zip`, który następnie umieszczamy w ISOD, za pomocą odpowiedniej bramki. Każdy folder musi być „autonomiczny”, tzn. po uruchomieniu skryptu wszystko musi się wykonać, nie mogą pojawiać się jakieś komunikaty, że brakuje danych czy tego typu. Wystąpienie tego typu problemów będzie powodować obniżenie oceny z zadania lub nawet brak zaliczenia danego zadania. Oddanie zadań z danego ćwiczenia po wyznaczonym terminie również będzie skutkowało obniżeniem punktacji.

Bardzo proszę o przestrzeganie podanych zasad, szczególnie dotyczących nazw folderów i plików. Proszę w nazwach tych nie używać spacji, czy polskich liter w rodzaju „ą” lub „ł”, proszę również nie zaczynać ich cyfrą.

Generalnie, o ile nie zostanie wyraźnie powiedziane inaczej, nie ma potrzeby przygotowania formalnych sprawozdań. Wystarczą skrypty, jednak kod musi być czytelny, dobrze skomentowany (ale nie na siłę). Muszą się generować odpowiednie rysunki (również z opisem, tzn. opisem osi, legendą, tytułem). Oczywiście opis zależy od rysunku i nie zawsze potrzebna jest, przykładowo, legenda. Należy podchodzić do tego ze zdrowym rozsądkiem.

Literatura

- [1] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004. <http://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/>.
- [2] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Additional Exercises for Convex Optimization*. 2004. https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook_extra_exercises.pdf.
- [3] G.C. Calafiore and L. El Ghaoui. *Optimization Models*. Control systems and optimization series. Cambridge University Press, 2014.
- [4] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 2013.
- [5] C.M. Bender and S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I*. Springer New York, 1999.

Ponadto

$$\begin{aligned}
 e^{Mt} &= e^{Q\Lambda tQ^{-1}} \\
 &= Q \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} \right] Q^{-1} \\
 &= Q \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} Q^{-1} \\
 &= Q \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} Q^{-1}. \tag{90}
 \end{aligned}$$

Macierze A_c , B_c rozpatrywanego układu z czasem ciągłym, to

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \alpha = -\beta b. \tag{91}$$

Doświadczony czytelnik łatwo zauważy, że

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1}, \tag{92}$$

skąd po uwzględnieniu powyższych rozważań otrzymujemy

$$A = e^{A_c \Delta} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha \Delta} - 1) \\ 0 & e^{\alpha \Delta} \end{bmatrix} \tag{93}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 B &= \int_0^{\Delta} e^{A_c \tau} B_c d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha \tau} - 1) \\ 0 & e^{\alpha \tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} d\tau \\
 &= b \int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha \tau} - 1) \\ e^{\alpha \tau} \end{bmatrix} d\tau \\
 &= -\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha \Delta} - 1) - \Delta \\ e^{\alpha \Delta} - 1 \end{bmatrix} \tag{94}
 \end{aligned}$$

a następnie wzory (74-75). Jedną z metod wyznaczania macierzy e^M jest aproksymacja wielomianami Padé [4, 5]. Obszerne omówienie numerycznego wyznaczania macierzy e^M można znaleźć w [4] oraz podanych tam źródłach.

A Wyprowadzenie zależności (74–75)

Wyprowadzenie zależności (74-75)

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha \Delta} - 1) \\ 0 & e^{\alpha \Delta} \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$B_{\Delta} = -\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha \Delta} - 1) - \Delta \\ e^{\alpha \Delta} - 1 \end{bmatrix} \tag{86}$$

otrzymujemy bezpośrednio ze wzoru (71-72). Najważniejszym krokiem jest wyznaczenie macierzy e^M , gdzie M jest pewną macierzą kwadratową. Bezpośrednio z definicji

$$e^M \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}. \tag{87}$$

Założmy, że macierz M można przedstawić w postaci iloczynu $M = Q\Lambda Q^{-1}$, gdzie Q jest pewną macierzą odwracalną, zaś

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{88}$$

Podstawiając do (87) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 e^M &= e^{Q\Lambda Q^{-1}} \\
 &= Q \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \right] Q^{-1} \\
 &= Q \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} Q^{-1} \\
 &= Q \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} Q^{-1}. \tag{89}
 \end{aligned}$$

B Symulacja układów LTI z czasem dyskretnym

Znając warunek początkowy i ciąg sterowań można wyznaczyć trajektorię stanu rozwiązując równanie stanu (różnicowe). Dla układu (1) możemy skorzystać z poniższego kodu.

```

Xd = zeros(size(x0,1),kf+1);
Xd(:,1) = x0;
for k=1:length(u)
    Xd(:,k+1) = Ad*Xd(:,k)+Bd*u(k);
end

```

C Symulacja układów LTI z czasem ciągłym

Znając warunek początkowy i ciąg sterowań można wyznaczyć trajektorię stanu rozwiązując równanie stanu (różniczkowe). Dla układu (67) możemy skorzystać z poniższego kodu.

```
% cvx_begin
% variable u(kf,1)
% ...
% cvx_end

opts = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-8);
[tPlot,Xc] = ode45(@(t,x) ...
    Ac*x+Bc*u(min(floor(t/Delta)+1,kf)), ...
    [0 tf], x0, opts);
```

Przykład 1. Dane jest tzw. równanie van der Pola

$$\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad (95)$$

gdzie $\mu > 0$ jest parametrem. Chcemy wyznaczyć rozwiązanie tego równania na przedziale $[0, 20]$, dla warunków początkowych $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 0$. Jest to równanie drugiego rzędu, aby skorzystać z procedury `ode45` należy przekształcić je do układu równań pierwszego rzędu. Możemy to zrobić przyjmując oznaczenia $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$. Wówczas mamy

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (96a)$$

$$\dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1, \quad (96b)$$

czyli postać

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (97)$$

na przedziale $[t_{\text{init}}, t_{\text{final}}]$ z warunkiem początkowym

$$x(t_{\text{init}}) = x_0, \quad (98)$$

gdzie

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Zauważmy, że w rozpatrywanym przypadku funkcja $f(t, x(t))$ nie zależy w sposób jawny od zmiennej niezależnej t (która często oznacza czas). Poszukiwane rozwiązanie można wyznaczyć za pomocą kodu z Listingu 1.

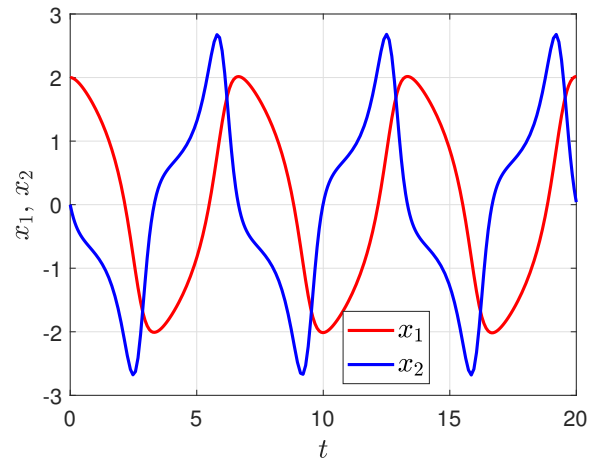
Listing 1.

```
clear
close all
clc
nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

m = 1.0;
f = @(t,x) [x(2); m*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];
tInit = 0.0;
tFinal = 20.0;
xInit = [2; 0];
options = odeset('RelTol',1e-14,'AbsTol',1e-14);
[t,X] = ode45(f,[tInit,tFinal],xInit,options);

figure
plot(t,X(:,1),'r','LineWidth',2.0)
hold on
grid on
plot(t,X(:,2),'b','LineWidth',2.0)
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$t$', 'Interpreter','Latex', ...
    'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$x_{1}$', '\,x_{2}$', ...
    'Interpreter','Latex', 'FontSize',nfontslatex)
legend({'$x_{1}$', '$x_{2}$'}, ...
    'Interpreter','Latex', ...
    'FontSize',nfontslatex, 'Location','Best')
print('VDP.eps', '-depsc', '-r600')
print('VDP.jpg', '-djpeg', '-r600')
print('VDP.pdf', '-dpdf', '-r600')
```

Wykres otrzymanego rozwiązania przedstawia Rys. 28



Rysunek 28: Wartości zmiennych x_1 , x_2 w funkcji czasu t . [Przykład 1]