第一章 信号与系统

- 信号定义与分类
- 复指数信号与正弦信号
- 单位冲激与单位阶跃函数
- 信号的运算与自变量变换
- 系统性质

一、信号定义与分类

1、信号定义

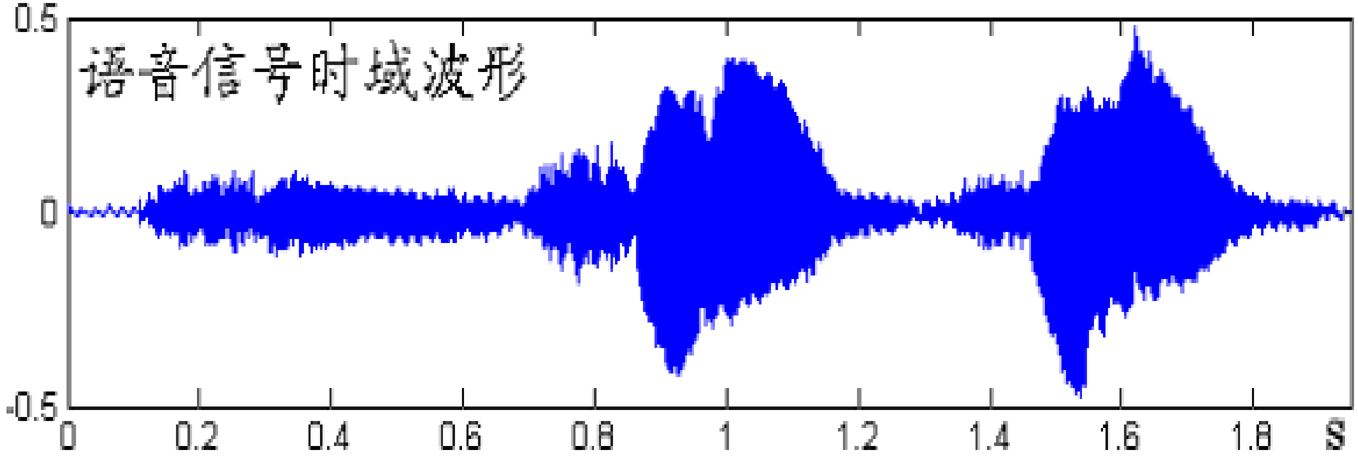
信号可以描述范围极为广泛的**一类物理现象**。**在数学上信号可以表示为一个或多个变量的函数。**

$x(t)$ 一维信号。

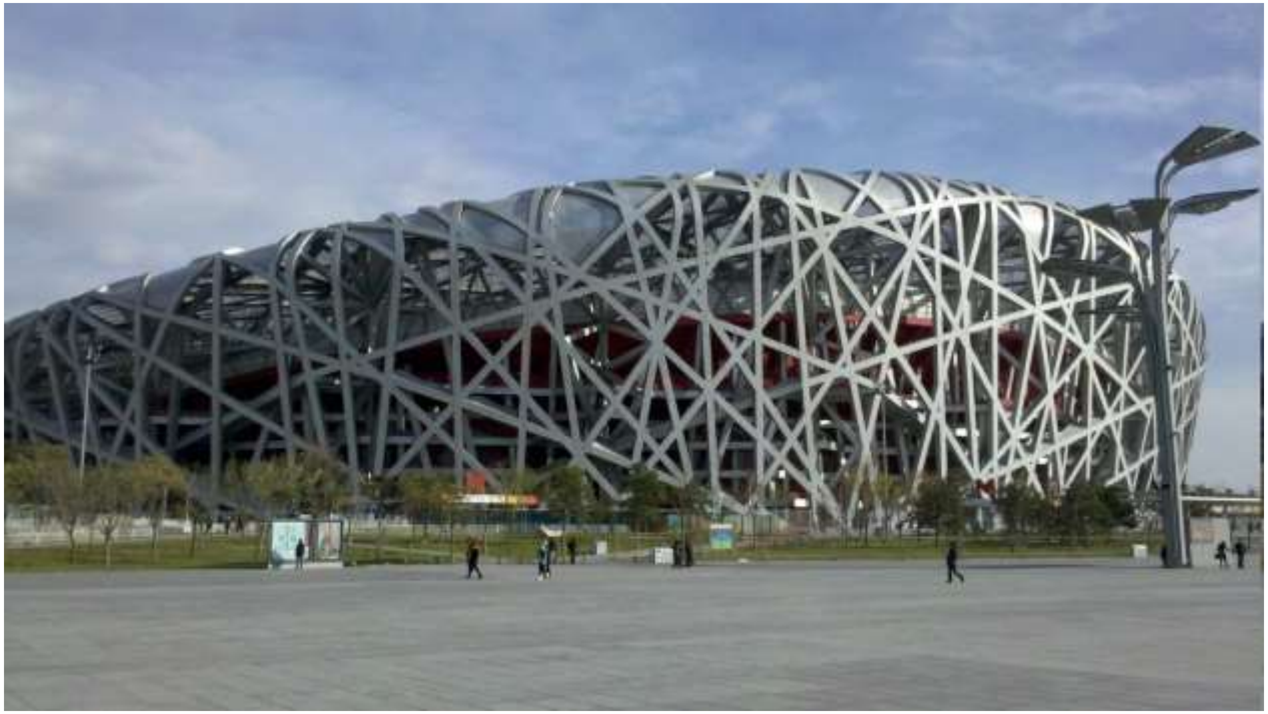
$x(m,n)$ 二维信号。

$x(m,n,t)$ 三维信号。

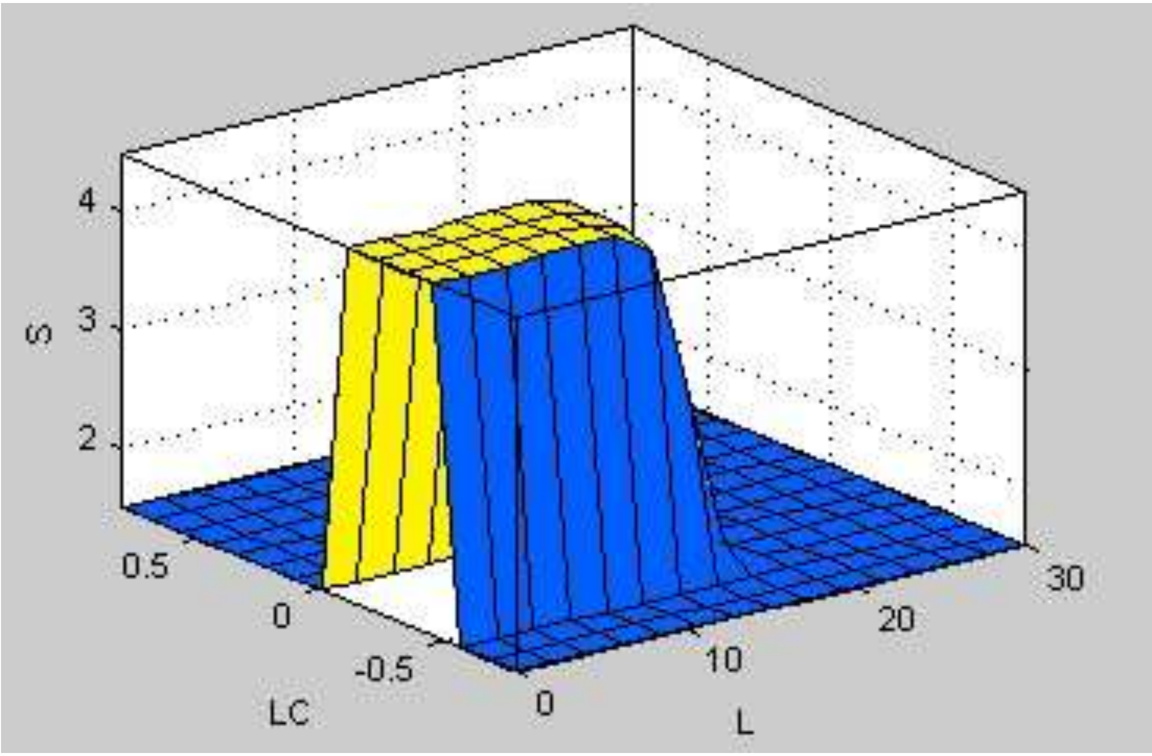
例1. 一维语音信号



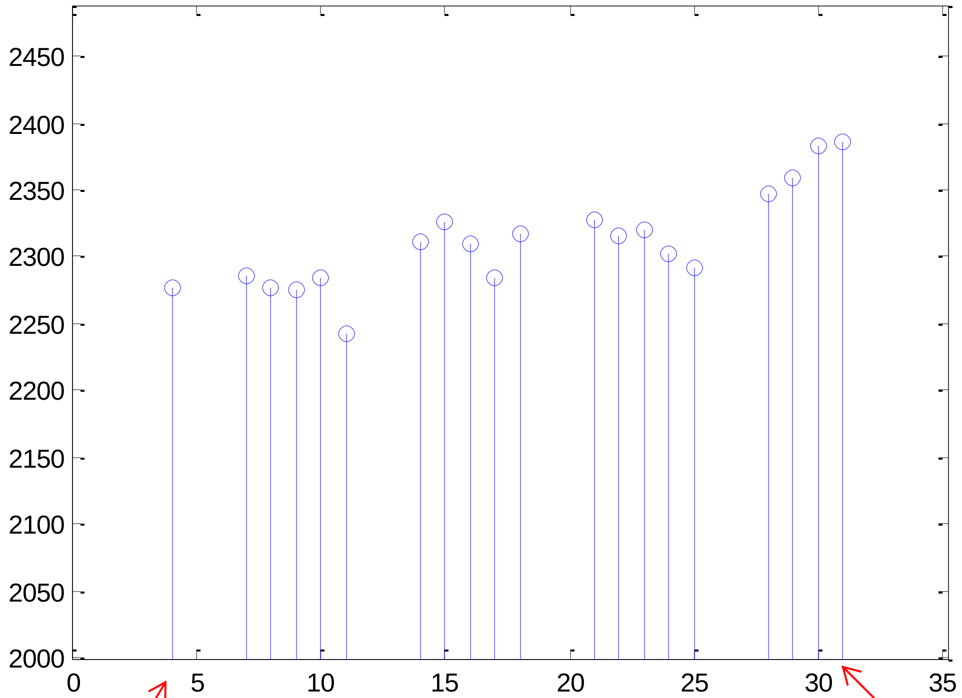
例2. 北京鸟巢图片



例3. MATLAB三维图



例4. 2013年1月上海证券交易所日收盘指数



2013,1.4

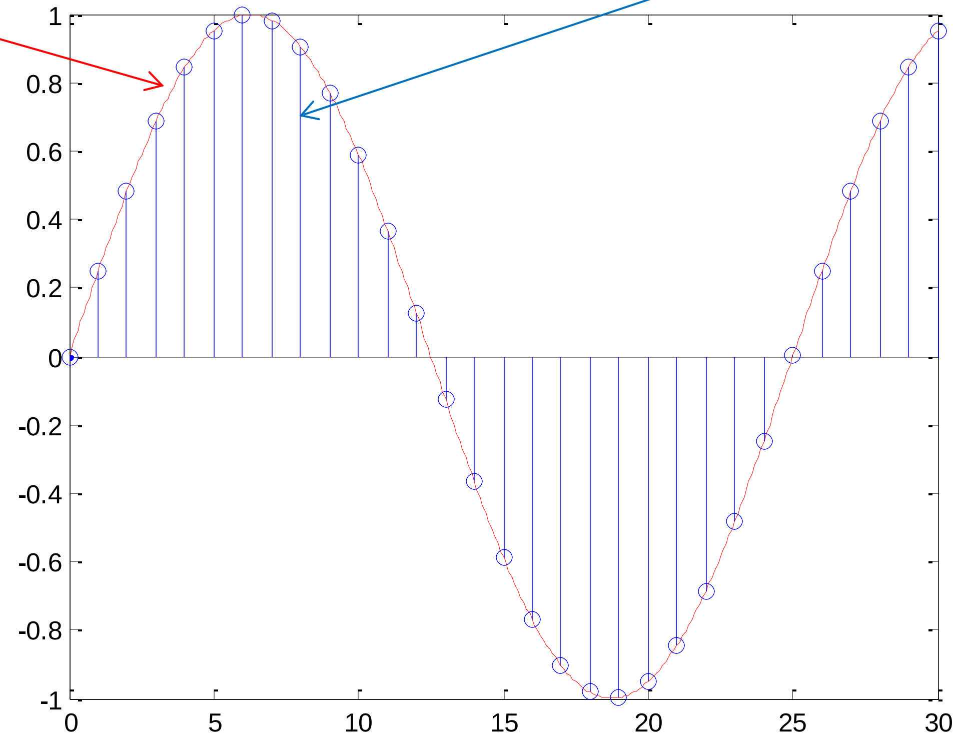
2013.1.31

例5. 正弦采样信号

$$y(t) = \sin(\frac{2\pi}{25}t)$$

$$T = 25$$

每个周期采集25个样值得到离散时间序列 y[n]



定义：

信号是随时间或某几个自变量变化的某种物理量，是携带**信息**的载体。

信号是**代表信息的一个函数或序列**

2、信号分类

1）确定性信号和随机性信号

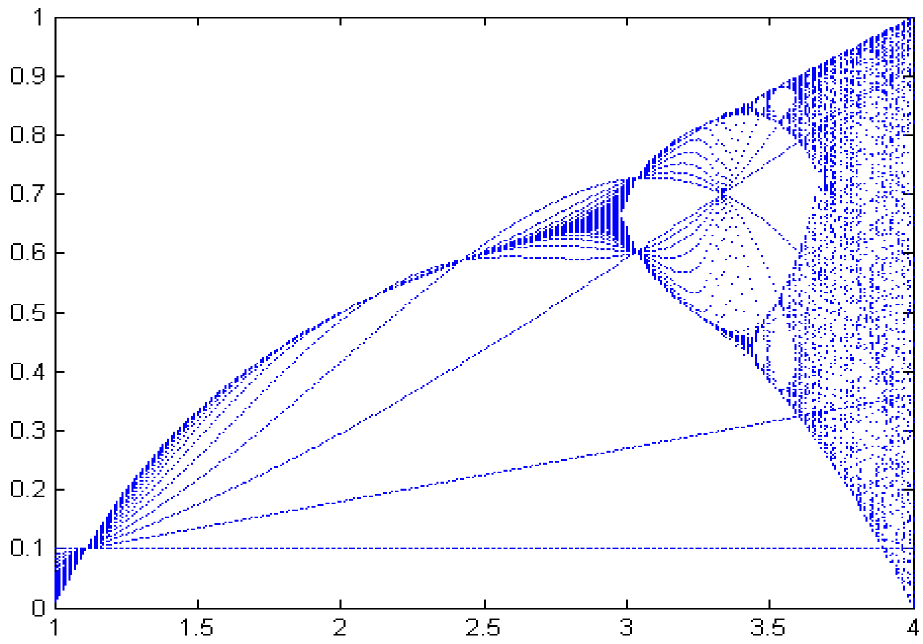
确定信号可以用一个确定的函数表示，对于指定的某一时刻都有一个确定的函数值相对应，而随机信号只能用统计规律来描述。

如前面的正弦信号是确定信号，而上证指数是随机信号。

随机过程可以由确定系统产生？

- Logistic映射：

$$X_{n+1} = \lambda X_n(1 - X_n), \lambda \in (1,4], X_n \in [0,1]$$



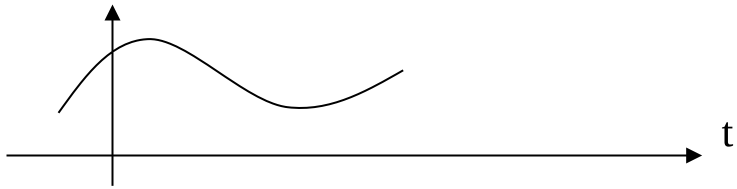
$$\lambda = 3.5966$$

混沌现象（Chaos）

2）连续时间信号与离散时间信号

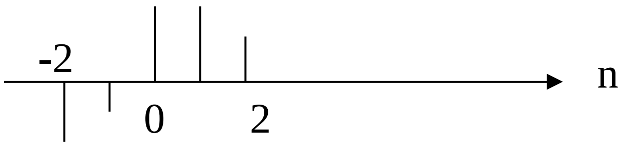
连续时间信号：在任何时刻除了若干个不连续点外都有定义。如温度、压力、流量、电压、电流等

连续信号表示：$x(t)$，t---连续**时间**变量。



离散时间信号（序列）：仅定义在离散时刻.

离散信号表示：$x[n]$，n---离散**时间**变量。



3）周期信号与非周期信号

连续周期信号可表示为

$x(t)=x(t+mT)$， $m=0,\pm 1,\pm 2,$ ----

能使上式成立的**最小正值T** 称为$x(t)$的基波周期

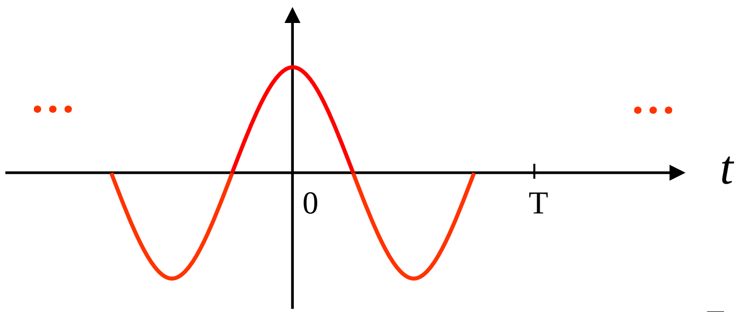
离散周期信号表示为

$x[n]=x[n+mN]$， $m=0,\pm 1,\pm 2,$ ----

能使上式成立的**最小正整数N** 称为$x[n]$的基波周期

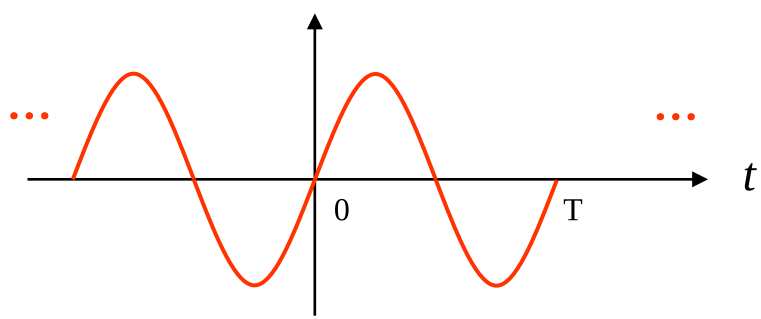
4）奇信号与偶信号

偶信号 $x(t)=x(-t)$ 或 $x[n]=x[-n]$



关于纵轴对称

奇信号 $x(t)=-x(-t)$ 或 $x[n]=-x[-n]$



关于原点对称

任何信号都可分解成奇分量与偶分量之和，其中偶分量为偶函数，奇分量为奇函数.

$$x(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(t)+x(-t)-x(-t)]\ =x_e(t)+x_0(t)$$

其中 $x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$ $\quad x_0(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$

$$x_e(t)=x_e(-t) \qquad x_0(t)=-x_0(-t)$$

以上分解方法同样适用于离散时间信号

$$x_e[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}$$

$$x_0[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[-n]\}$$

5）功率信号和能量信号

信号的能量和功率定义： 设信号电压或电流为$x(t)$，

则它在电阻为1Ω上的瞬时功率为：$p(t) = |x(t)|^2$

在 $t_1 \le t \le t_2$ 内消耗的能量为：$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$

当$T=t_2-t_1$时，平均功率P分别定义为 $P = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$

一个无限大区间内信号的能量与平均功率定义

连续时间信号

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt$$

离散时间序列

$$E = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}|x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$$

$$P = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}|x[n]|^2$$

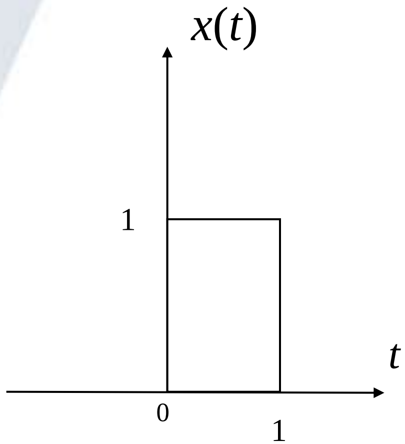
能量信号（能量有限信号）：

如果信号$x(t)$满足: $0<E<\infty$,而$P=0$。

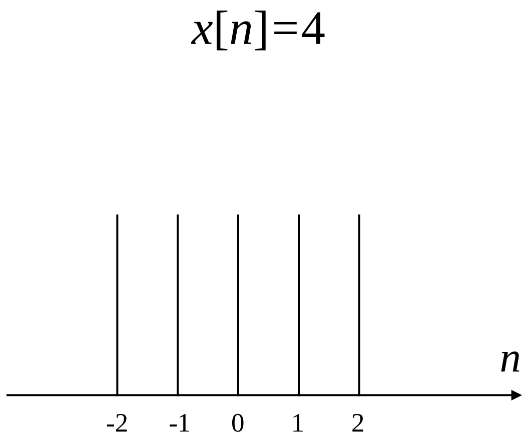
功率信号（功率有限信号）：

如果信号$x(t)$满足：$0 < P < \infty$，而 $E = \infty$ 。

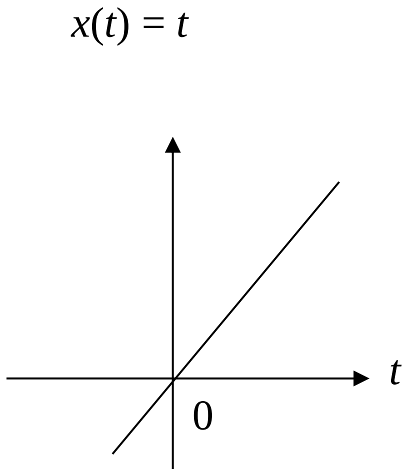
例6



（a）



（b）



（c）

小结

信号

——可以用一个或多个变量表示的函数

本课程讨论的变量是时间 t 或 n

信号的分类

确定信号*与随机信号*

连续时间信号与离散时间信号

周期信号与非周期信号

奇信号与偶信号

能量信号*与功率信号*

二、复指数信号与正弦信号

1. 连续时间复指数信号与正弦信号

连续时间复指数信号 $x(t) = ce^{st}$

式中c 和 s 一般为复数，其中 $s = \sigma + j\omega$

当c 和s均为实数时， 此时$\omega = 0, s = \sigma$ ⇨ **实指数信号**

$$x(t) = ce^{\sigma t}$$

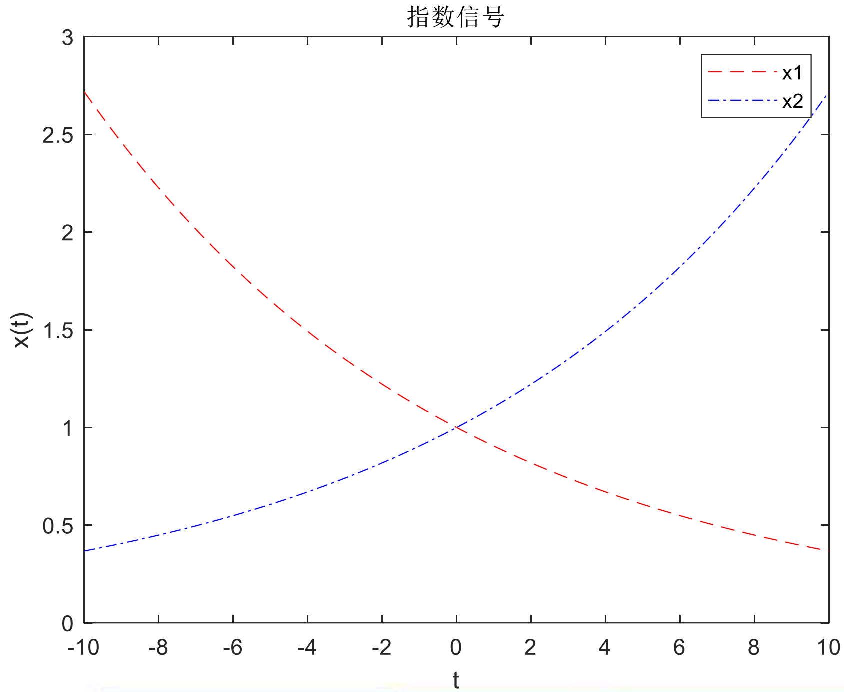
σ>0， $x(t)$随 t 增加指数增长

σ<0， $x(t)$随 t 增加指数衰减

σ=0， $x(t)= c$ 成为直流信号

例 $x(t)=Ae^{at}$

```
A=1;
a1=-0.1; a2=0.1;
t=-10:0.1:10;
x1=A*exp(a1*t);
x2=A*exp(a2*t);
figure(1);
plot(t,x1,'--r',t,x2,'-.b'); %线类型和颜色
axis([-10,10,0,3]);
title('指数信号');
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
```



当σ = 0时，s =jω为纯虚数, ⟹ **复指数信号**

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

(1)是周期信号

$$e^{j\omega_0(t)} = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 T}$$

取 $e^{j\omega_0 T} = 1$ 则 $x(t) = x(t+T)$

使上式成立的最小正值 T 被称作基波周期, 记 T_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

ω_0 为**角频率**，$f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ **频率**，f_0 的单位是赫兹（Hz）

(2) 正弦信号可表示成复指数信号

由欧拉（Euler）公式

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

$$e^{-j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t$$

或

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

正弦信号用复指数信号表示为

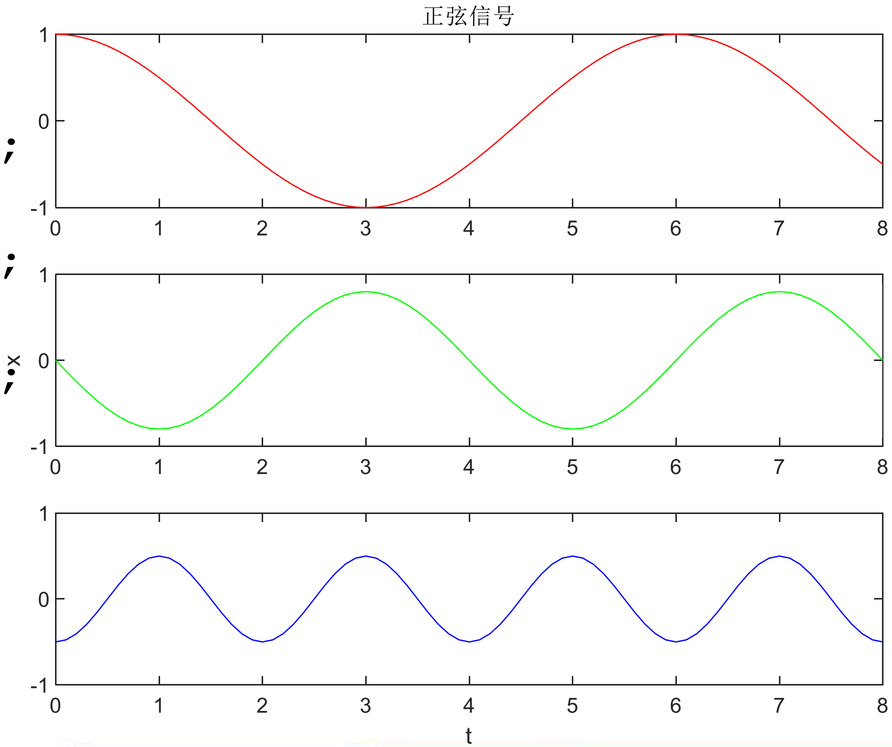
$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t} = A\cdot\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\right\}$$

$$A\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\cdot\mathrm{Im}\left\{e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\right\}$$

ISEE

例1-2 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

```
A0=1; A1=0.8; A2=0.5;
w0=pi/3; w1=pi/2; w2=pi;
phi0=0; phi1= pi/2; phi2=pi;
t=0:0.1:8;
x0=A0*cos(w0*t+phi0);
x1=A1*cos(w1*t+phi1);
x2=A2*cos(w2*t+phi2);
figure(1);
subplot(3,1,1),plot(t,x0,'r');
title(‘正弦信号');
subplot(3,1,2),plot(t,x1,'g');
ylabel('x');
subplot(3,1,3),plot(t,x2,'b');
xlabel('t');
axis([0 8 -1 1]);
```



(3)谐波关系的复指数信号的集合

$$\varphi_k(t) = \left\{ e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

$$k = 0,$$ 直流分量

$$\pm 1,$$ 一次谐波

$$\pm 2, \ \cdots$$ 二次谐波

显然, $\varphi_k(t)$, k≠0, 是周期的，其基波频率为$|k|\omega_0$，基波周期为

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}$$

一般复指数信号：

当$x(t)=Ce^{st}$，将C用极坐标表示，s用直角坐标表示，分别有

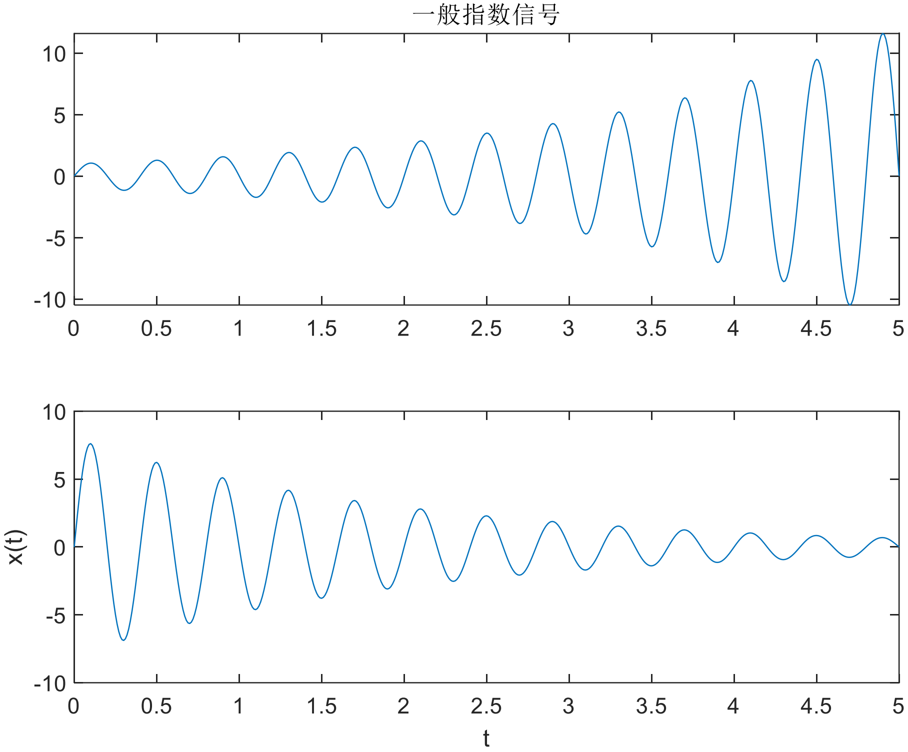
$$C=|c|e^{j\theta}, \qquad s=\sigma+j\omega_0$$

$$Ce^{st}=|c|e^{\sigma t}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$

$$=|c|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t+\theta)+j|c|e^{\sigma t}\sin(\omega_0 t+\theta)$$

例1-3 $x(t)=|A|e^{at}e^{j\omega_0 t}$

```
A0=1;A1=8;
a0=0.5;a1=-0.5;
w0=5*pi;
t=0:0.01:5;
x0=A0*exp(a0*t).*sin(w0*t);
x1=A1*exp(a1*t).*sin(w0*t);
figure(1);
subplot(2,1,1),plot(t,x0);
title('一般指数信号');
subplot(2,1,2),plot(t,x1)
xlabel('t'); ylabel('x(t)');
axis([0,5,-10,10]);
```



2. 离散时间复指数信号与正弦信号

离散时间复指数序列的一般形式为

$$x[n] = ca^n$$

如果c 和a均为实数，---- **实指数序列**。

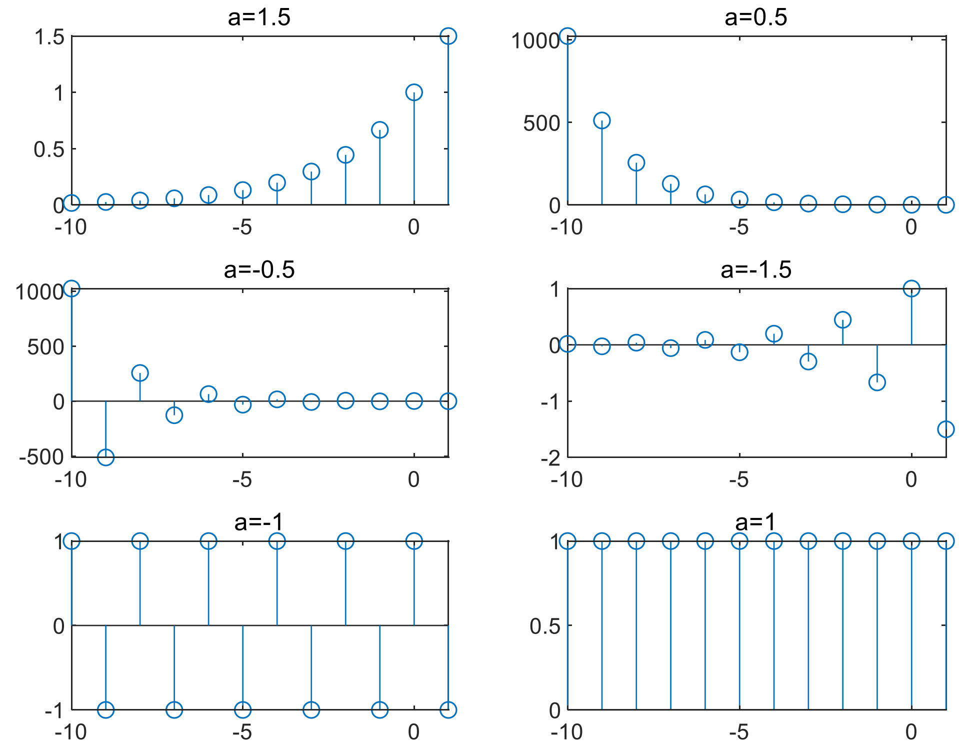
随$|a|$的变化，信号有几种不同的特性。

- 如$|a|>1$，序列值随n 增加指数增长；
- $|a\backslash <1$， 随n 增加指数衰减。
- 如a为正，则ca^n 所有值都具有相同符号；

而当a为负时，则$x[n]$的值符号交替变化。

例1-4 $x[n]=a^n$

```
a0=1.5; a1=0.5; a2=-0.5; a3=-
1.5;a4=-1;a5=1;
n=-10:1;10;
x0=(a0).^n;x1=(a1).^n;x2=(a2).^n;
x3=(a3).^n;x4=(a4).^n;x5=(a5).^n;
figure(1);
subplot(3,2,1),stem(n,x0);
title('a=1.5');
subplot(3,2,2),stem(n,x1);
title('a=0.5');
subplot(3,2,3),stem(n,x2);
title('a=-0.5');
subplot(3,2,4),stem(n,x3);
title('a=-1.5');
subplot(3,2,5),stem(n,x4);
title('a=-1');
subplot(3,2,6),stem(n,x5);
title('a=1');
```



若$|a|=1$时，考虑**纯虚数指数序列**

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}$$

由欧拉公式可知： $e^{j\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n$

正弦序列可用复指数序列表示：

$$A\cos(\omega_0 n+\phi)=A\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(n\omega_0+\phi)}\right\}$$

$$=\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}+\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

(1) $e^{j\omega_0 n}$ 的周期性？

- **周期性要求**

$$y[n+N]=e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n}\cdot e^{j\omega_0 N}=y[n]$$

$$e^{j\omega_0 N}=1 \ \Rightarrow \omega_0 N=2m\pi,\ \ m=0,\pm1,\pm2,\ldots \quad \Rightarrow N=m\frac{2\pi}{\omega_0}$$

$\frac{2\pi}{\omega_0}$ 必为一**有理数**时。

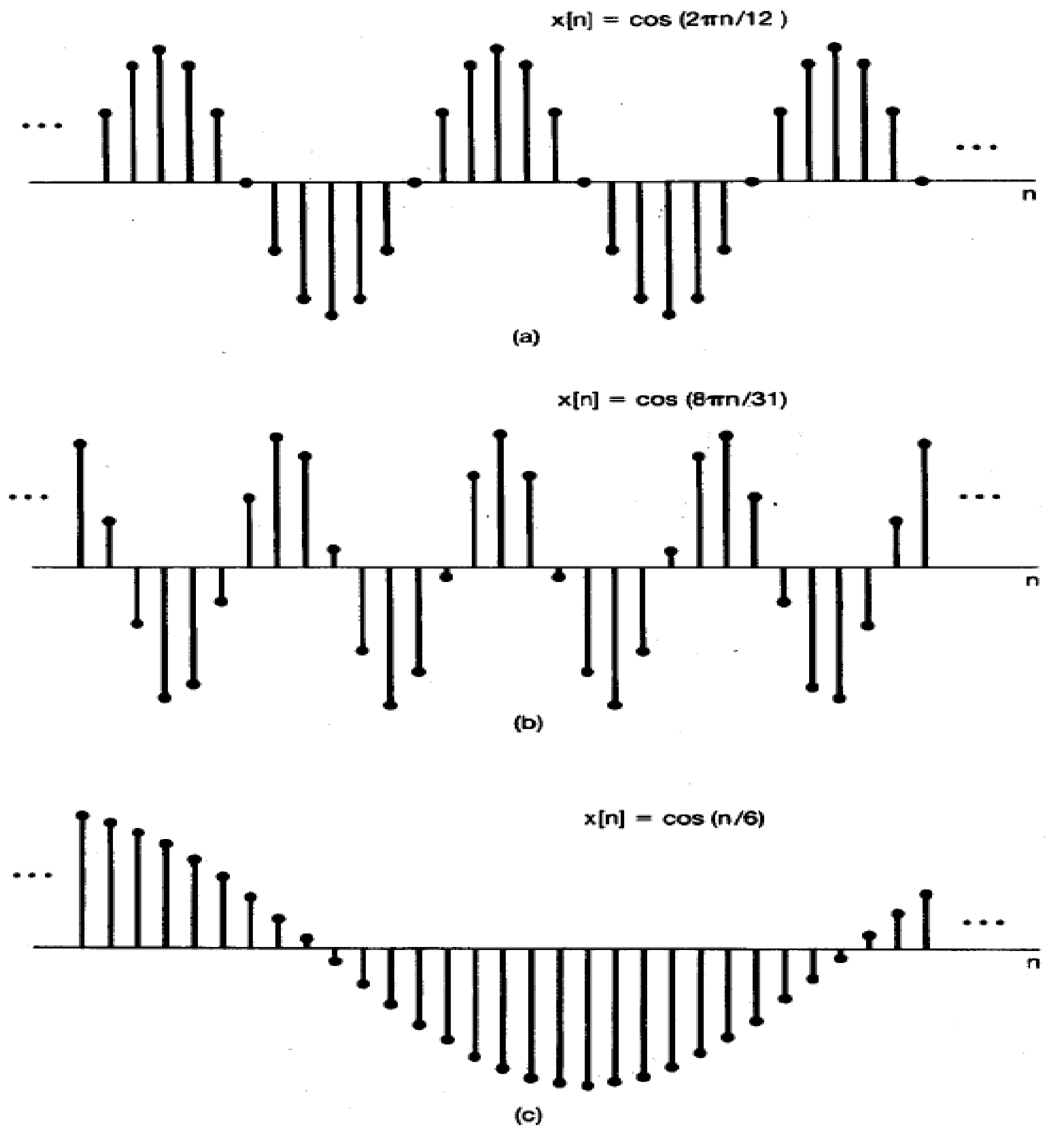


图 1.25　离散时间正弦信号

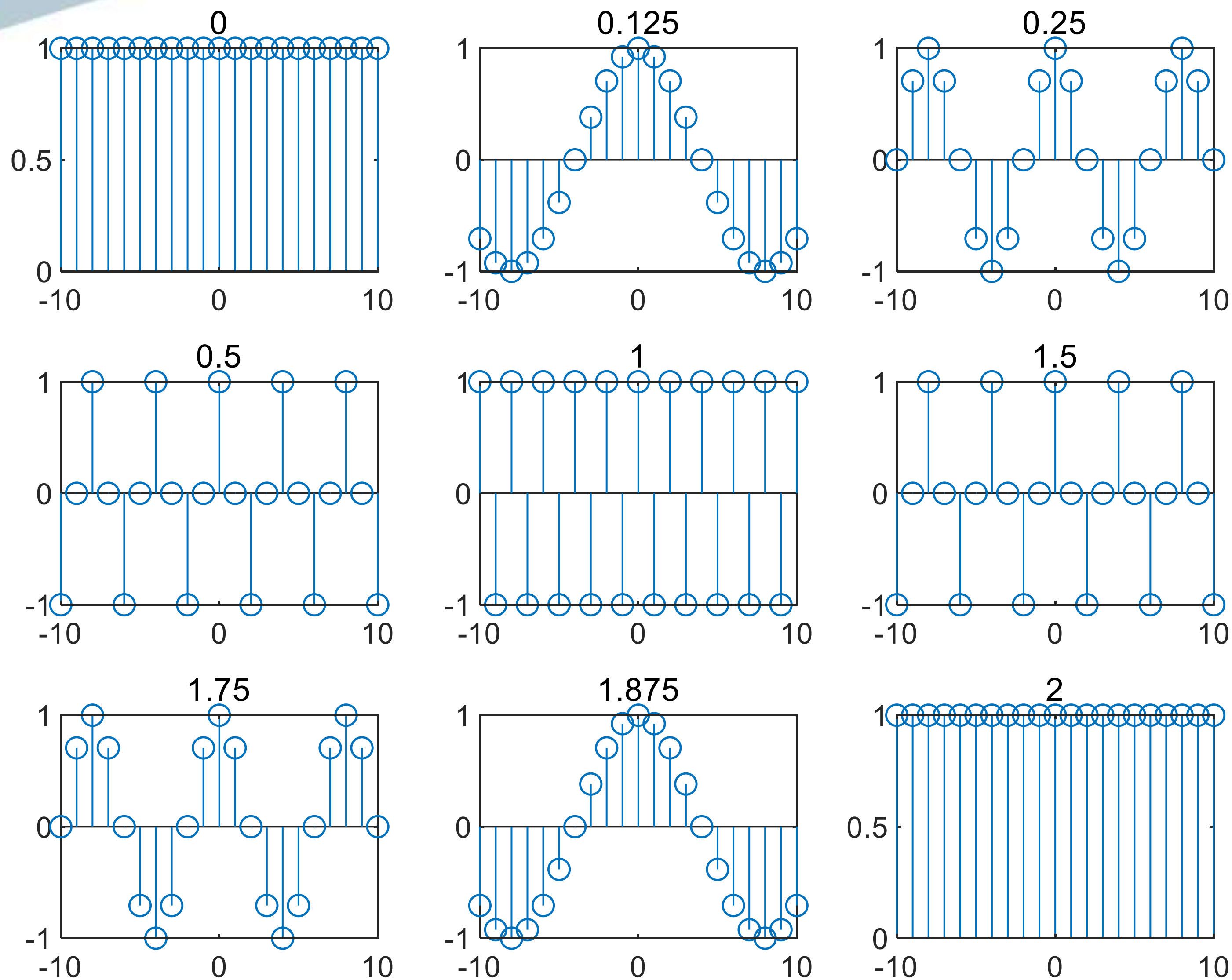
- **ω_0的周期性：周期为2π**

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0+2\pi)n}, \qquad e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$

例1-5 $x[n] = \cos(\omega_0 n)$

```
n=-10:1:10;
w=[0 pi/8 pi/4 pi/2 pi 3*pi/2 7*pi/4 15*pi/8 2*pi];
figure(1);
for i=1:1:9
     x=cos(w(i)*n);
     subplot(3,3,i),stem(n,x);title(w(i)/pi)
end
```

ISEE


0
1
0.5
0
-10
0
10
0.125
1
0
-1
-10
0
10
0.25
1
0
-1
-10
0
10
0.5
1
0
-1
-10
0
10
1
1
0
-1
-10
0
10
1.5
1
0
-1
-10
0
10
1.75
1
0
-1
-10
0
10
1.875
1
0
-1
-10
0
10
2
1
0.5
0
-10
0
10

(2)成谐波关系的复指数序列集

$$\varphi_k[n]=\left\{e^{jk(2\pi/N)n}\right\}, \qquad k=0,\quad \pm1,\quad \pm2,\cdots$$

由于

$$\varphi_{k+N}[n]=e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n}=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\cdot e^{j2\pi n}=\varphi_k[n]$$

…

谐波信号集中只有N个谐波信号是互不相关的。即

$$\varphi_0[n]=1,$$

$$\varphi_1[n]=e^{j\frac{2\pi}{N}n},\ \ldots,$$

$$\varphi_{N-1}[n]=e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}$$

当c，a均为复数，**一般指数序列**

$$a=|a|e^{j\omega_0} \qquad c=|c|e^{j\theta}$$

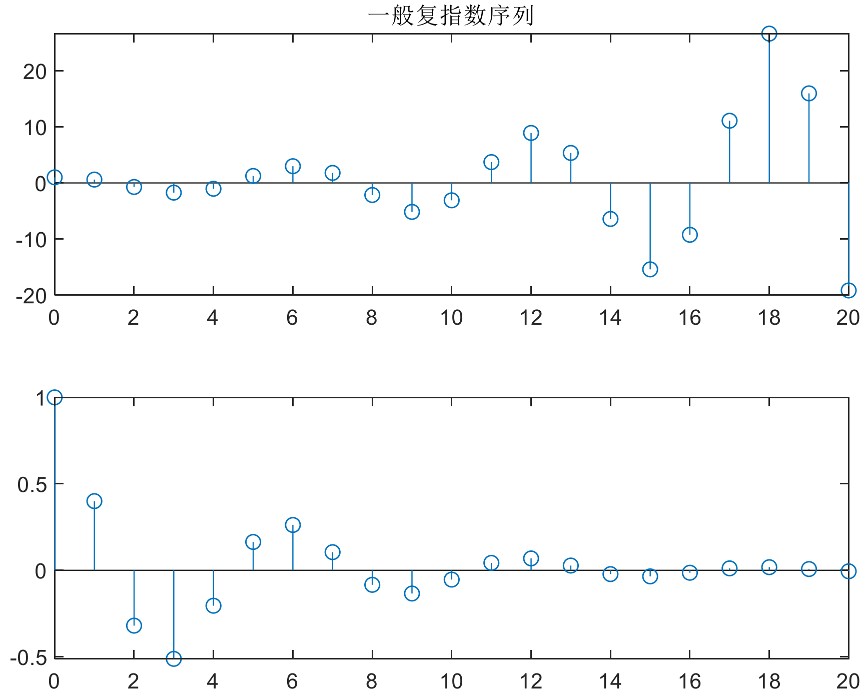
$$x[n]=|c|e^{j\theta}\cdot|a|^n e^{j\omega_0 n}$$

$$=|c||a|^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$

$$=|c||a|^n \cos(\omega_0 n+\theta)+j|c||a|^n \sin(\omega_0 n+\theta)$$

例1-6 $x[n]=|c|\cdot|a|^{n}\cos\omega_0 n$

```
C=1;a0=1.2;a1=0.8;
w=pi/3;
n=0:20;
x0=C*(abs(a0)).^n.*cos(w*n);
x1=C*(abs(a1)).^n.*cos(w*n);
figure(1);
subplot(2,1,1),stem(n,x0);
title('一般复指数序列')
subplot(2,1,2),stem(n,x1);
```



小结

复指数信号作为基本单元信号可以构成许多其他信号

连续复指数信号

$$x(t)=e^{j\omega_0 t}=\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t$$

是周期信号，周期：$T_0=\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$

$\omega_0 \longrightarrow \infty$

离散复指数信号

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n$$

不一定是周期信号，周期信号要求：

$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 是一个有理数，$N=m\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

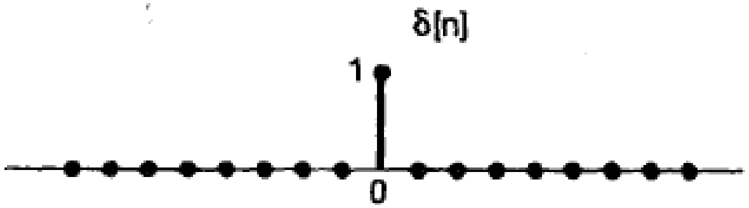
π

三、单位冲激与单位阶跃函数

1、离散时间单位脉冲与单位阶跃序列

1）单位脉冲序列

$$\delta[n]=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$



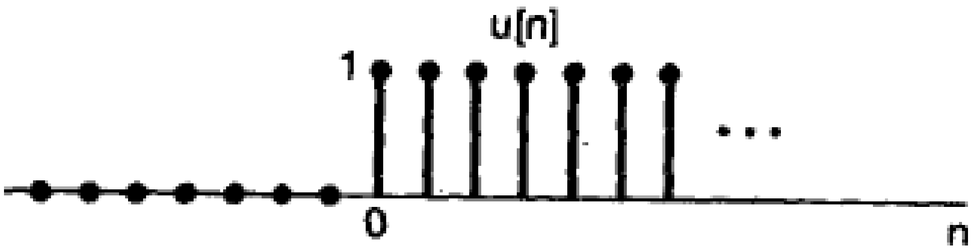
采样特性

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

2）单位阶跃序列

$$u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\ge 0\end{cases}$$



单位脉冲与单位阶跃信号的关系

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

一次差分

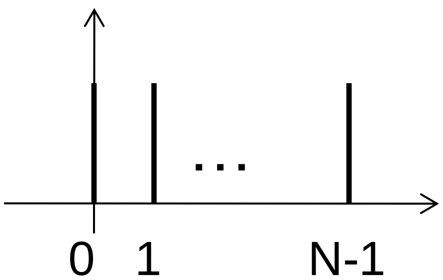
$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$

求和函数

3）矩形序列

矩形序列定义为

$$g_N[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$\text{或}\, g_N[n]=u[n]-u[n-N]$$

单位斜坡序列 $$r[n]=\begin{cases}n, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}=nu[n]$$

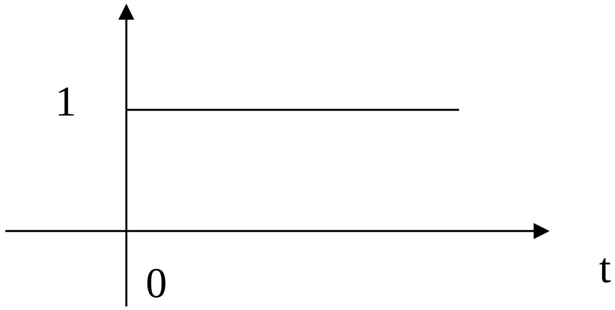
单位脉冲串序列 $$\delta_N[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$$

2、连续时间单位阶跃与单位冲激信号

1）单位阶跃信号

单位阶跃信号定义为

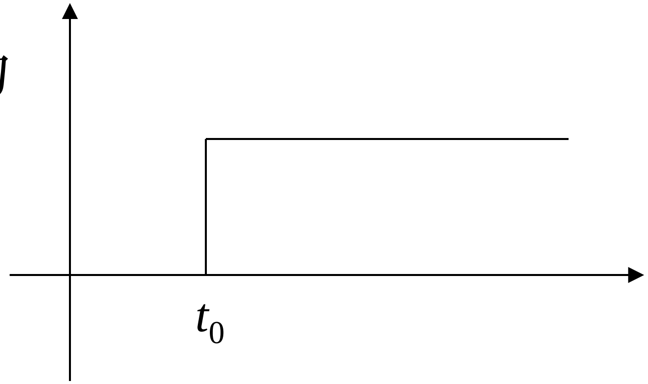
$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



在跳变点*t*=0处无定义

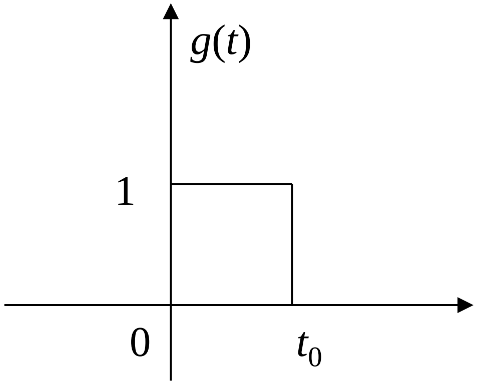
延迟单位阶跃信号，其表示式为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



2）矩形脉冲

$$g(t) = u(t) - u(t - t_0)$$

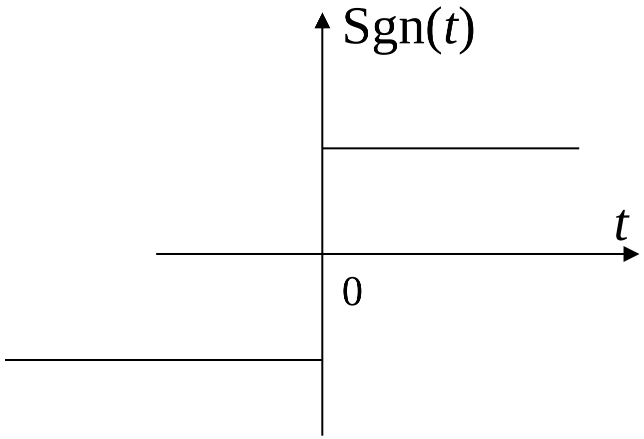


3）符号函数

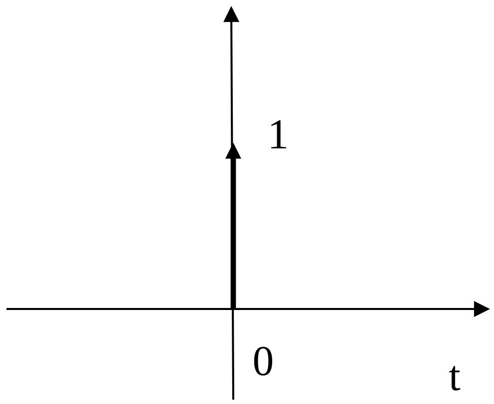
$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

$$= u(t) - u(-t)$$

$$= 2u(t) - 1$$



4）单位冲激信号

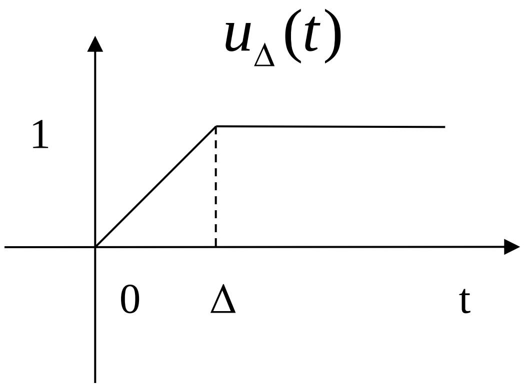


狄拉克定义

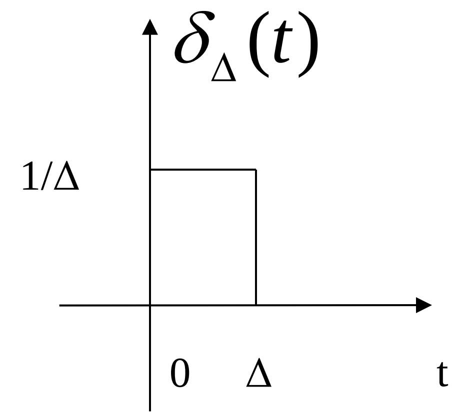
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0, \qquad t \neq 0 \end{cases}$$

$\delta(t)$与$u(t)$关系

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt},\qquad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$



$$\delta_\Delta(t)=\frac{du_\Delta(t)}{dt}$$



$$u(t)=\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

$\delta(t)$的性质

- **抽样性质**

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t), \qquad x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

- **筛选性质**

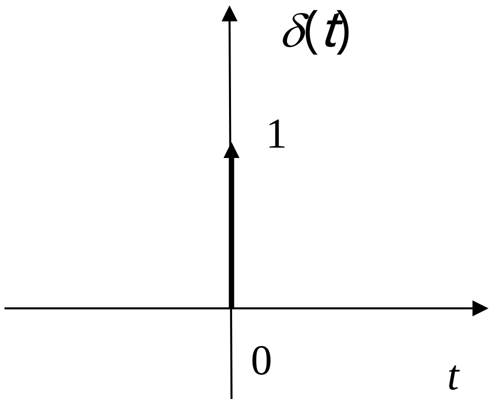
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt=x(0), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

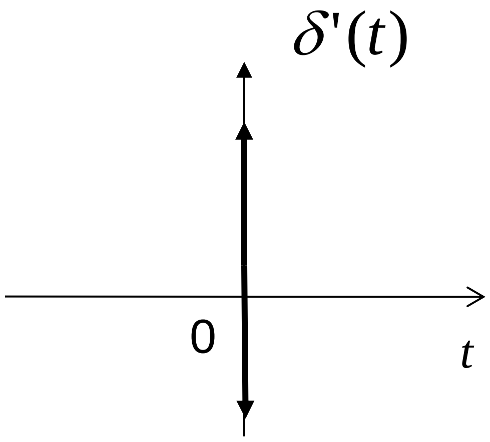
- **偶函数** $\delta(t)=\delta(-t)$

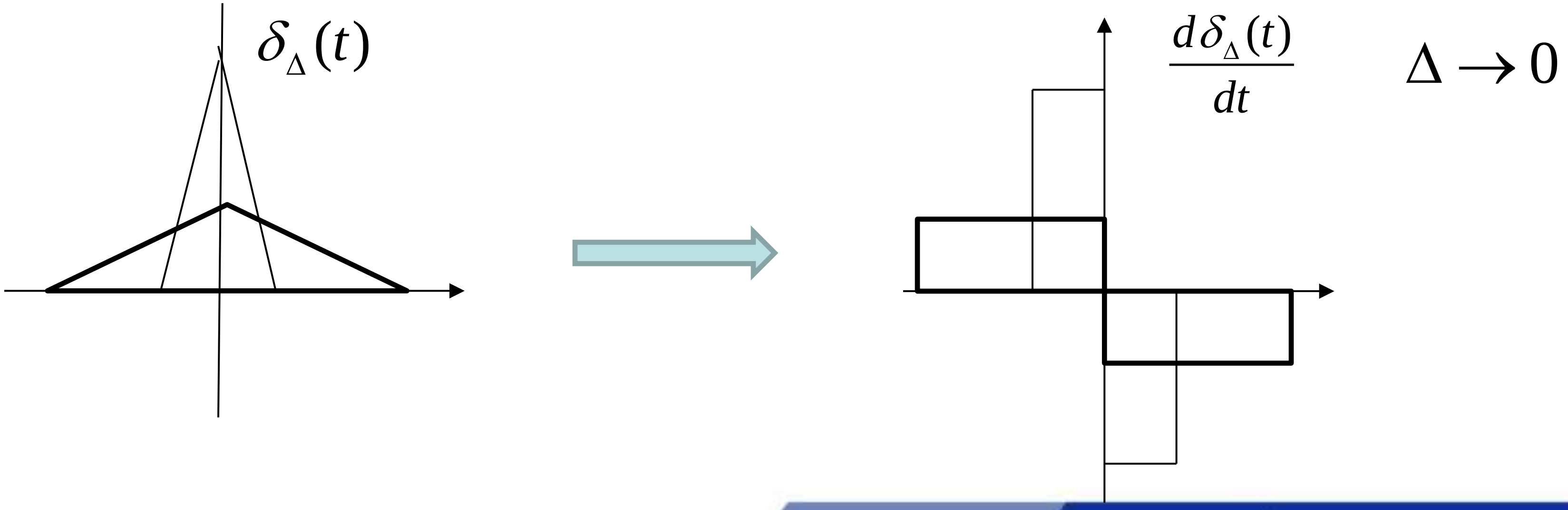
证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)x(t)dt=\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(\tau)x(-\tau)d(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)x(0)d\tau=x(0)$

5）冲激偶信号

冲激函数$\delta(t)$的微分称为冲激偶信号，以 $\delta'(t)$表示。







冲激偶信号重要性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)dt = -x'(0)$$

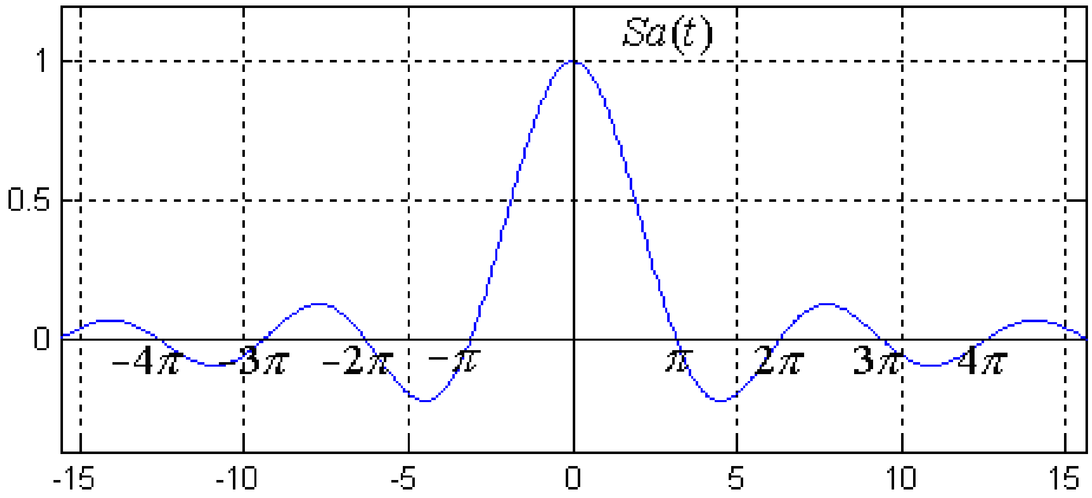
证明: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)d(\delta(t))$

$$= x(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)d(x(t)) = -\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\delta(t)dt = -x'(0)$$

6）单位周期冲激串 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

7）其它连续时间信号

- Sa(t)函数 $Sa(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ *or* $\sin c(t)=\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$



$(1)Sa(t)=Sa(-t)$

$(2)\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)dt=\pi$

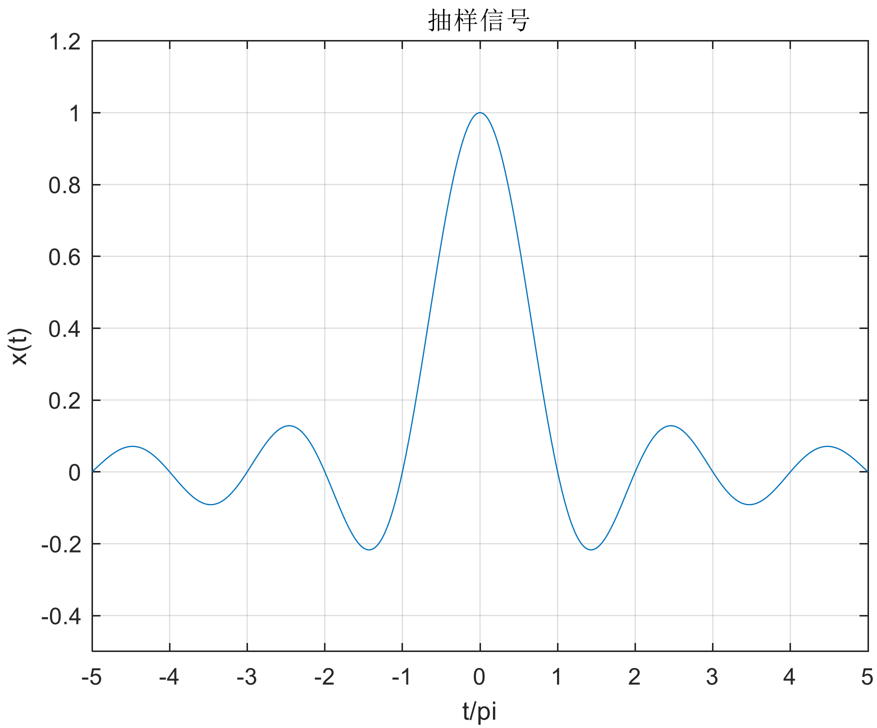
(3)零点：

$t=k\pi,\ \ k=\pm 1,\pm 2,\cdots$

- 高斯函数 $x(t)=Ee^{-(\frac{t}{\tau})^2}$

例1-7 $Sa(t) = \sin c(t/\pi)$

```
t=-5*pi:pi/100:5*pi;
x=sinc(t/pi);
figure(1);
plot(t/pi,x);
grid on;
axis([-5 5 -0.5 1.2]);
title('抽样信号');
xlabel('t/pi'); ylabel('x(t)');
```



小结

单位冲激（脉冲）信号作为基本单位信号可以构成任意信号。

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0, \qquad t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}, \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1], \quad u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

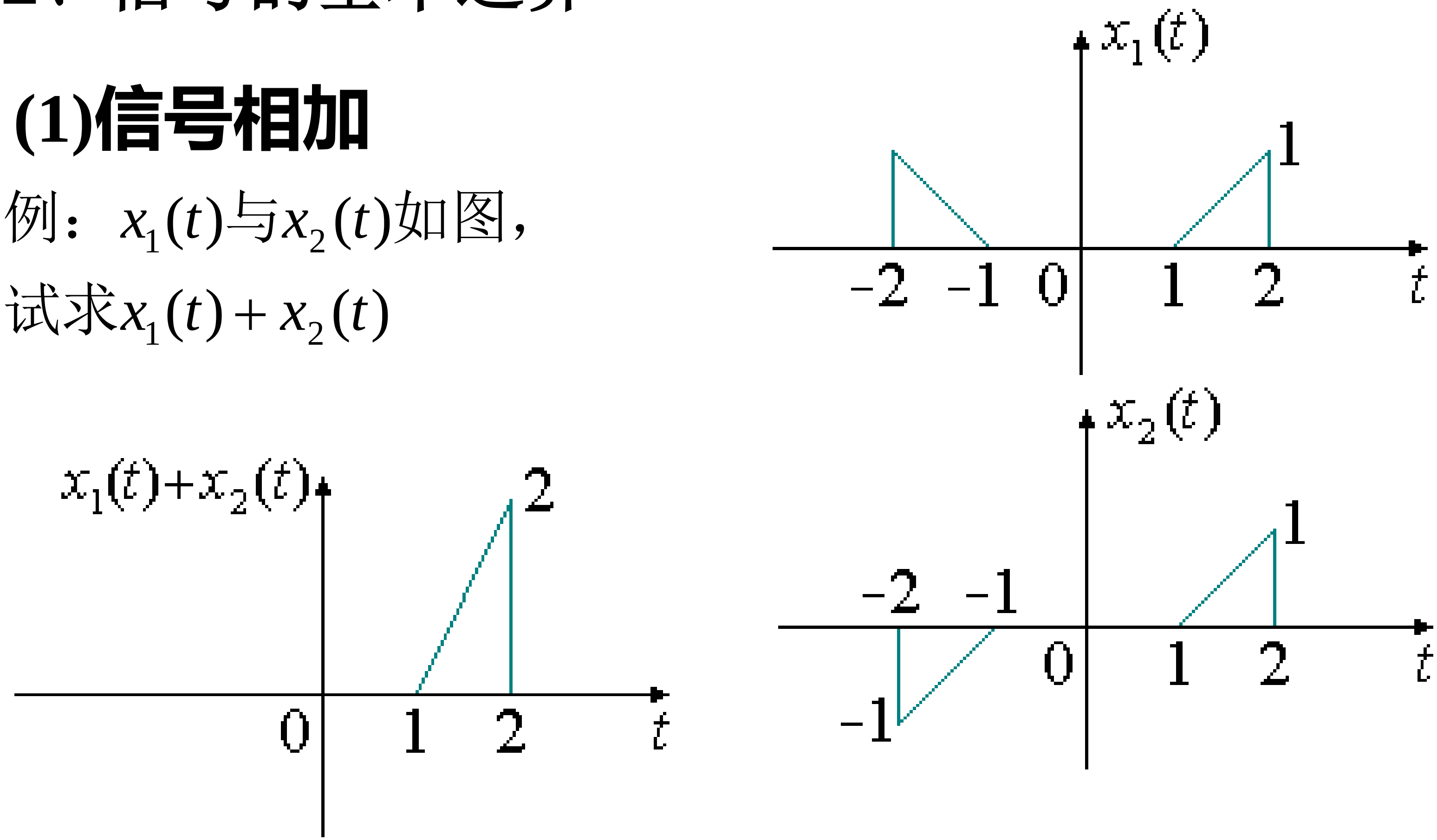
四、信号的运算与自变量变换

1、信号的基本运算

(1)信号相加

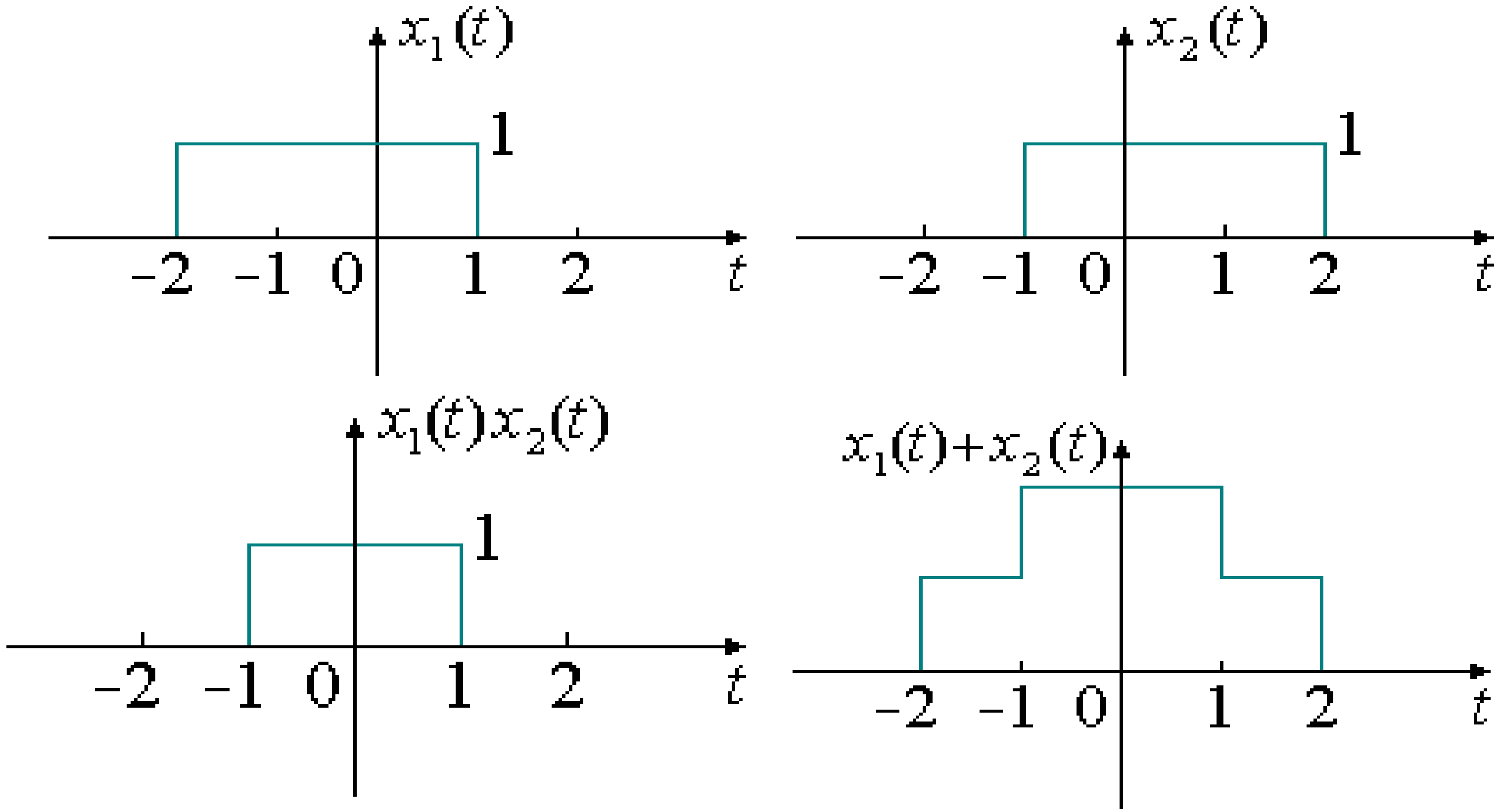
例：$x_1(t)$与$x_2(t)$如图，

试求$x_1(t)+x_2(t)$



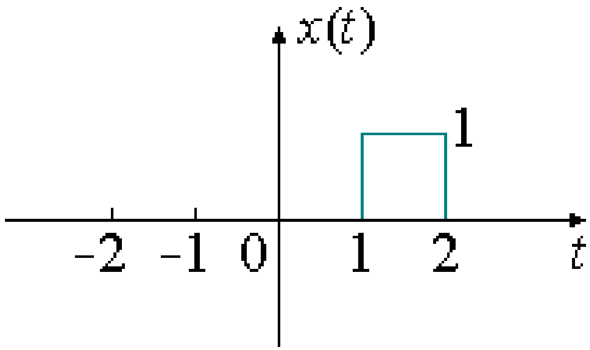
（2）信号相乘

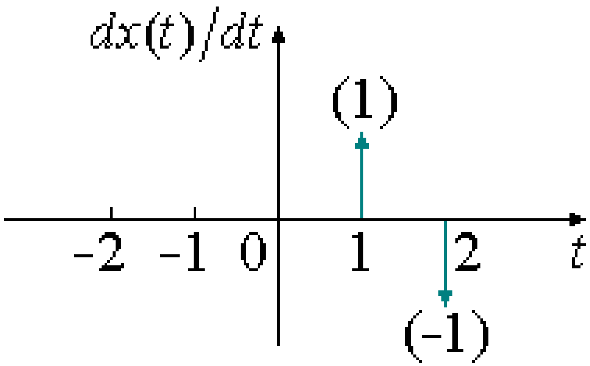
例：$x_1(t)$与$x_2(t)$如图，试求$x_1(t)x_2(t)$，$x_1(t)+x_2(t)$



（3）信号的微分与积分

例：$x(t)$如图，试求$dx(t)/dt$，$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

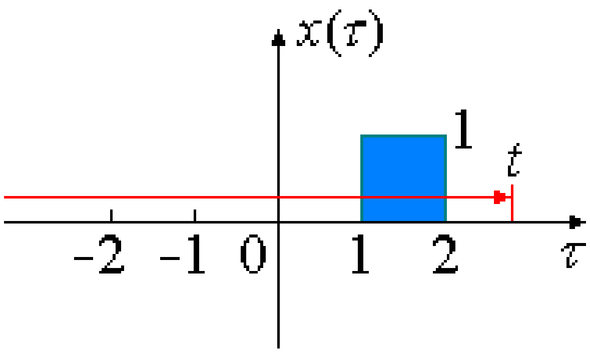




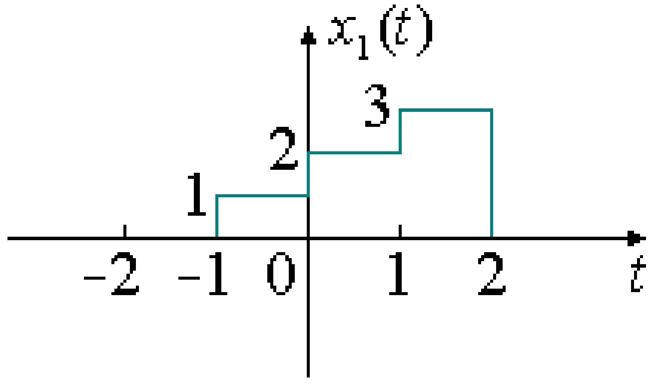
$$x(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

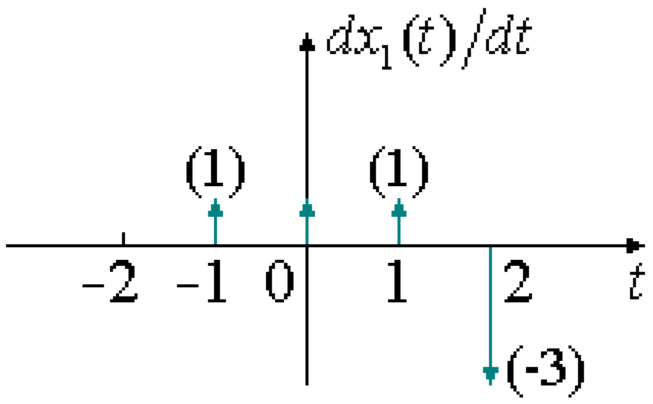
$$dx(t)/dt = \delta(t-1) - \delta(t-2)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t-1 & 1 < t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$



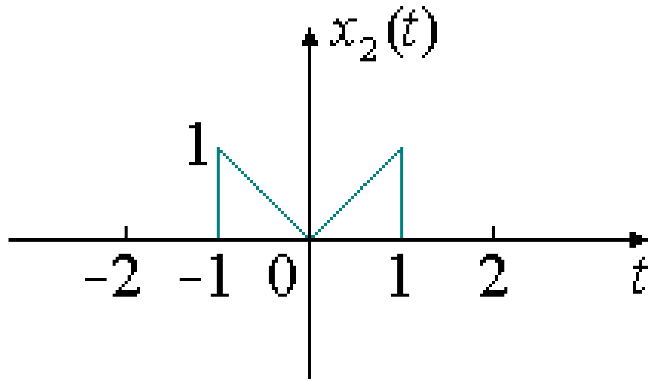
例：$x_1(t)$与$x_2(t)$如图，试求$dx_1(t)/dt, dx_2(t)/dt$

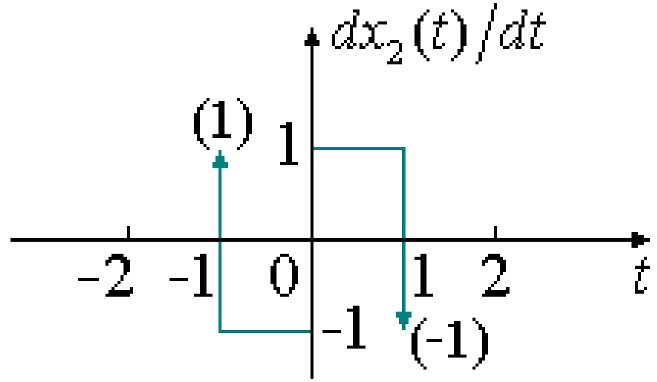




$$x_1(t) = u(t+1) + u(t) + u(t-1) - 3u(t-2)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \delta(t+1) + \delta(t) + \delta(t-1) - 3\delta(t-2)$$





$$x_2(t) = -t[u(t+1) - u(t)] + t[u(t) - u(t-1)]$$

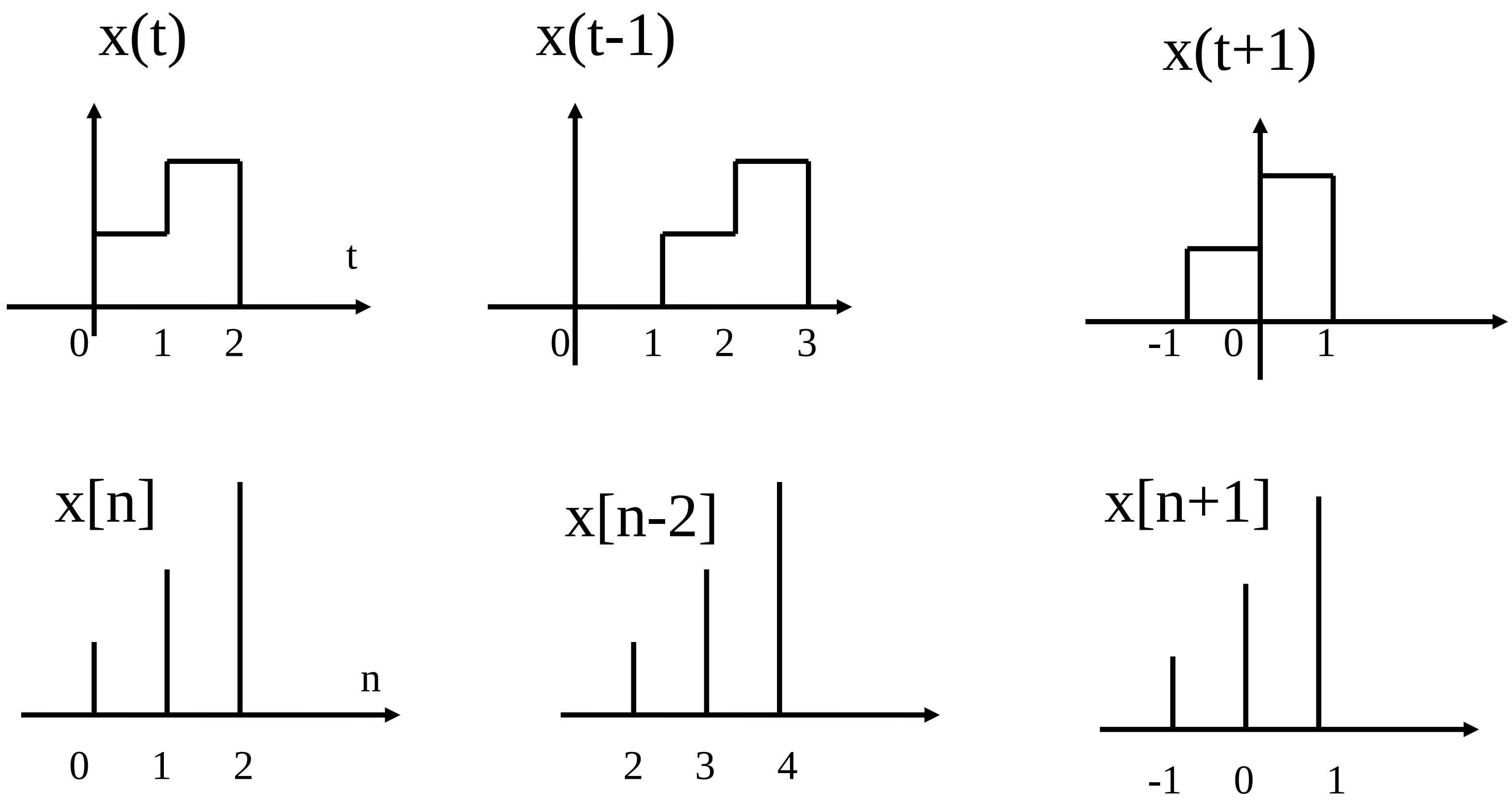
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -[u(t+1) - u(t)] - t[\delta(t+1) - \delta(t)]$$

$$+[u(t) - u(t-1)] + t[\delta(t) - \delta(t-1)]$$

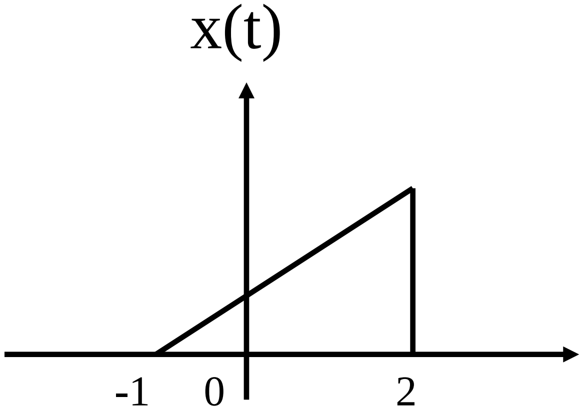
$$= -[u(t+1) - u(t)] + \delta(t+1) + [u(t) - u(t-1)] - \delta(t-1)$$

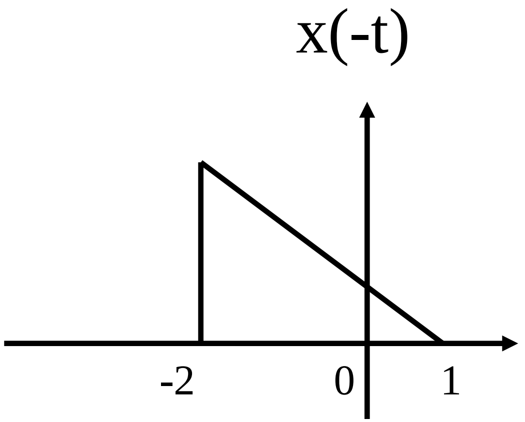
2、信号的自变量变换

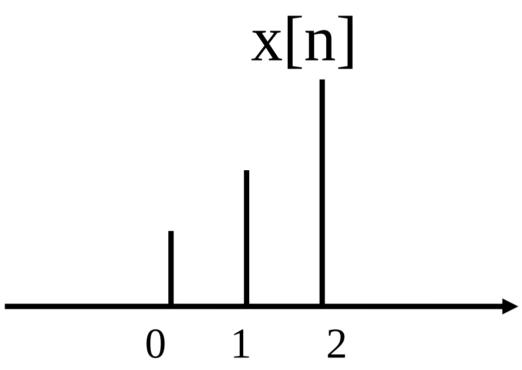
（1）信号的平移

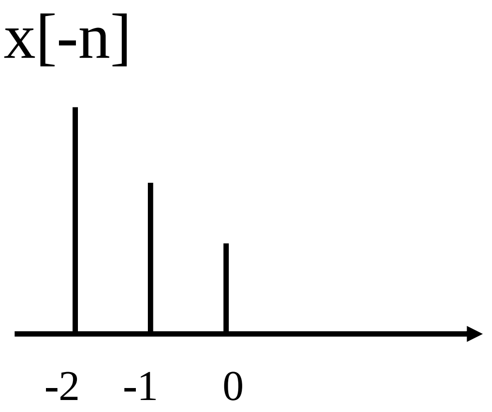


（2）信号的反褶

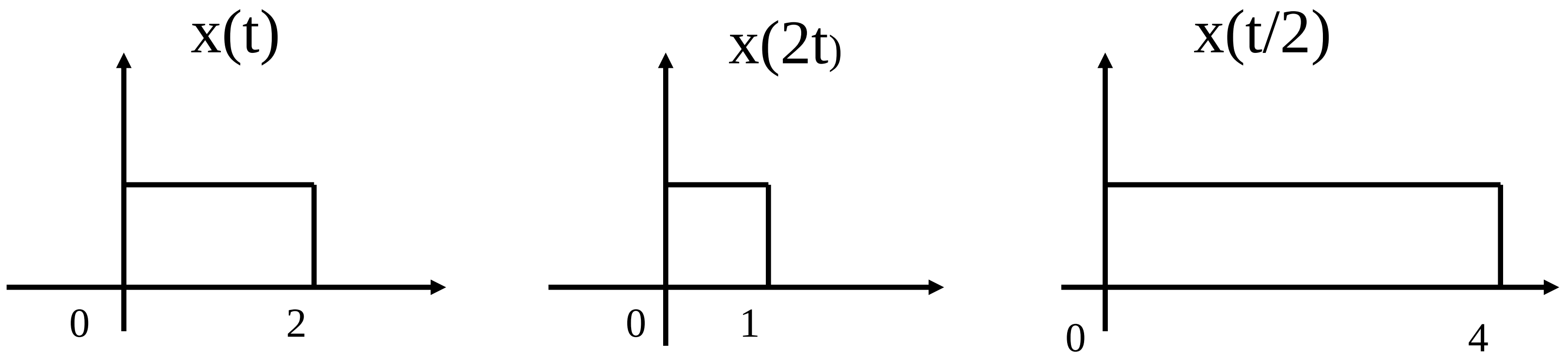






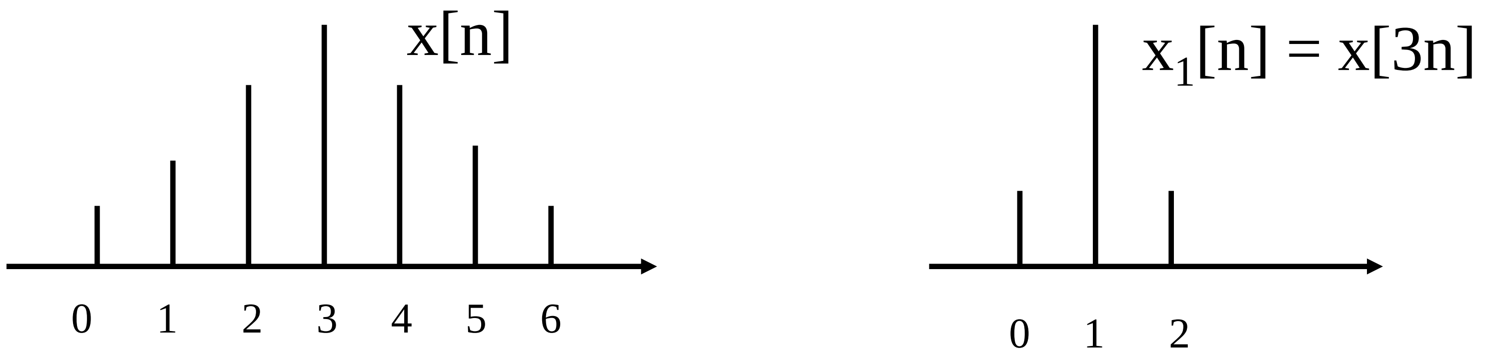


（3）信号的尺度变换



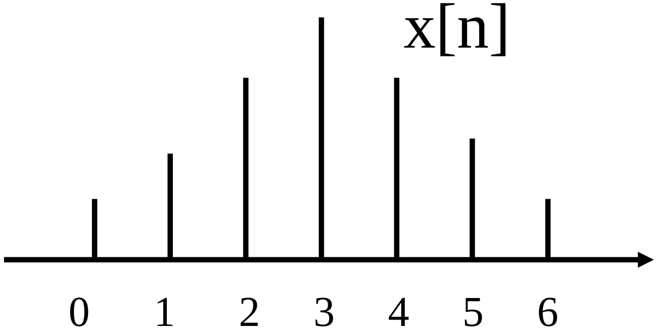
1）离散时间序列——抽取

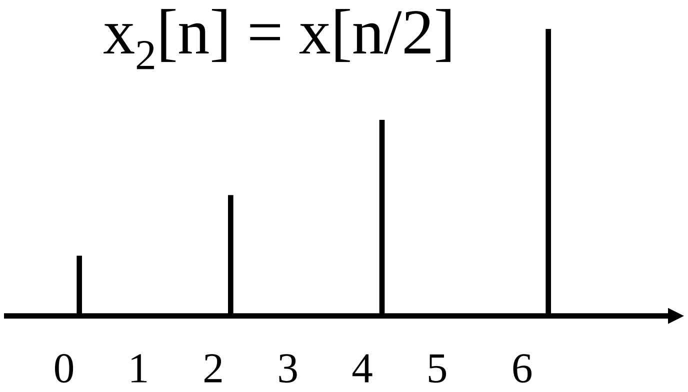
$x_1[n] = x[Nn]$　　N：正整数



2）离散时间序列——内插

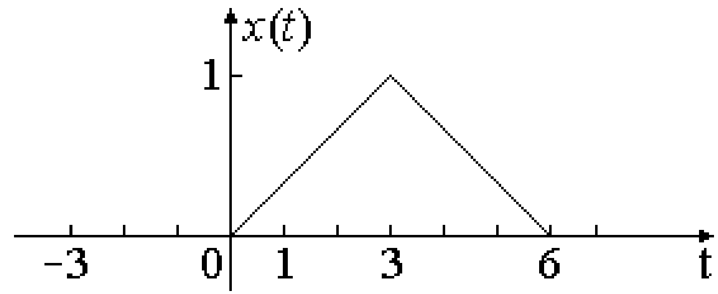
$$x_2[n]=\begin{cases} x[n/N] & n\text{为}N\text{的整倍数} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



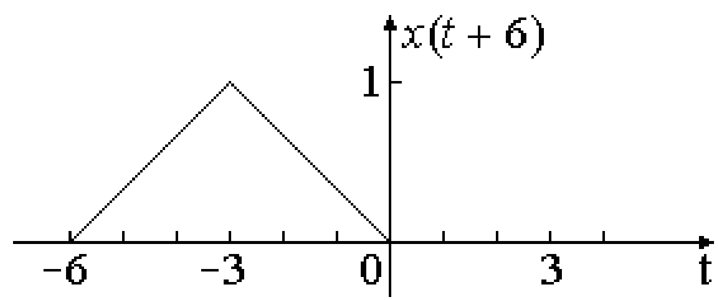


例：已知$x(t)$的如图所示，

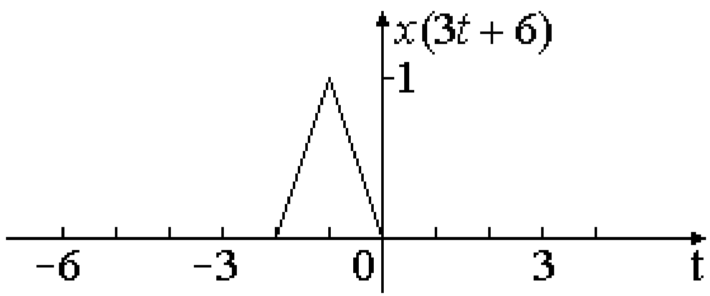
试画出$x(3t+6)$，$x(-3t+6)$



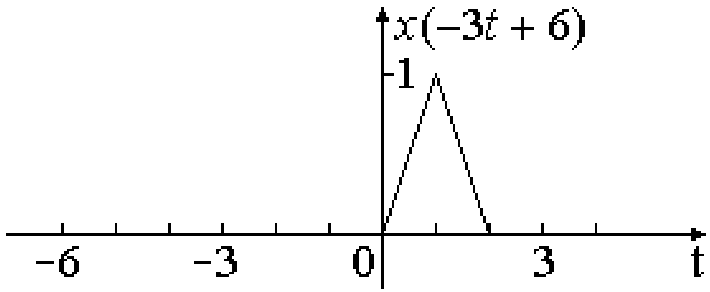
左移6



压缩至1/3

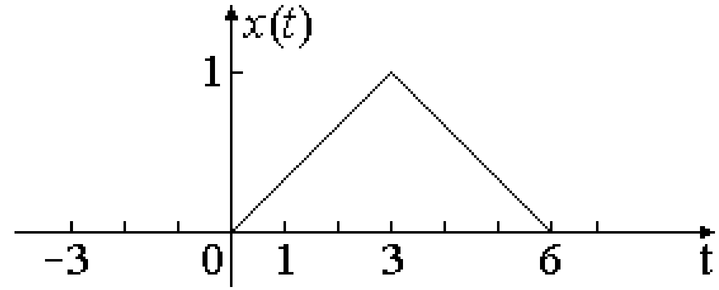


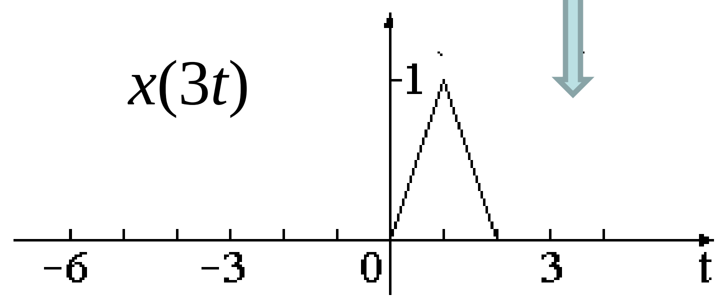
反褶

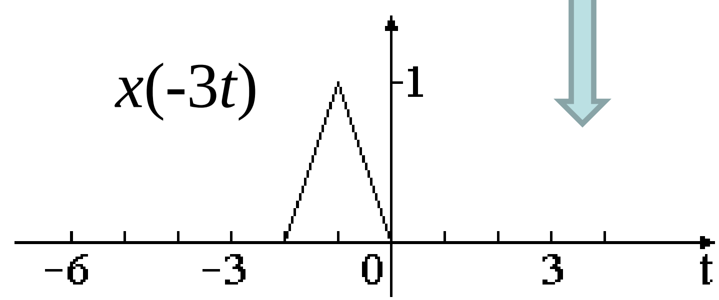


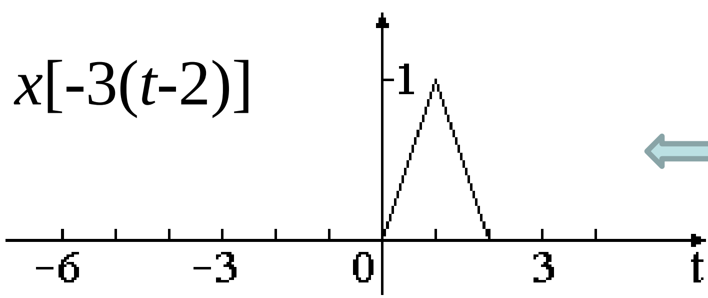
例：已知$x(t)$的如图所示，

试画出$x(-3t+6) = x[-3(t-2)]$









自变量变换小结

$x(t)$ → $\boxed{x(at+b)}$

１移动b（ b>0，左移；反之右移）．

２若a<0 反褶.

３尺度变换，｜a｜>1缩小；反之，放大.

$x(t)$ → $\boxed{x[a(t+b/a)]}$

１尺度变换，｜a｜>1缩小；反之，放大

２若a<0 反褶.

３移动b / a（ b/a>0，左移；反之右移）．

五、系统的描述与性质

1、系统的描述

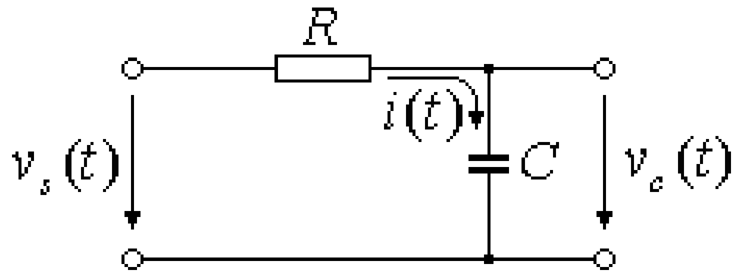
系统是一个能实现某种功能的整体。

系统可以看作是对一组输入信号或数据进行变换或处理的过程，并产生另一组信号或数据作为输出。

$$x(t) \quad \rightarrow \quad y(t)$$

1） 系统的模型

例：图示电路的输入为$v_s(t)$，输出为$v_c(t)$，试给出二者的关系式。



解：$v_s(t) = v_R(t) + v_c(t) = Ri(t) + v_c(t)$

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t)$$

连续时间系统的输入—输出关系可以用微分方程来描述。

计算某一银行户头按月结余的金额

例：输入$x[n]$ ~ 第n个月存入帐户的金额， 输出$y[n]$ ~ 第n个月底帐户上的金额，月 息1%，试给出$x[n]$与$y[n]$的关系。

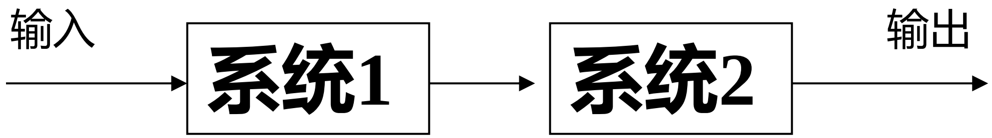
解：$y[n]=1.01y[n-1]+x[n]$

$$y[n]-1.01y[n-1]=x[n]$$

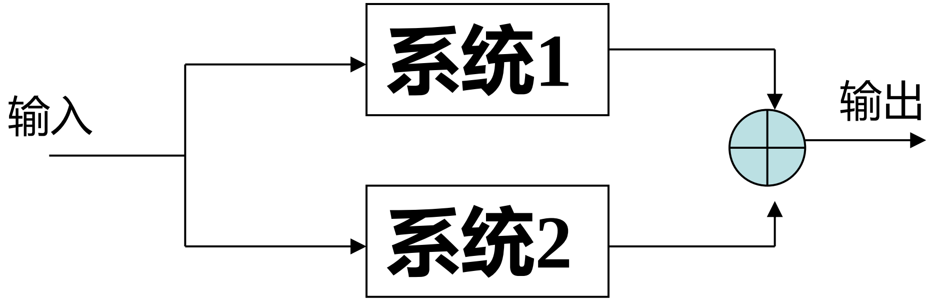
离散时间系统的输入—输出关系可以用差分方程来描述。

2）系统的互联

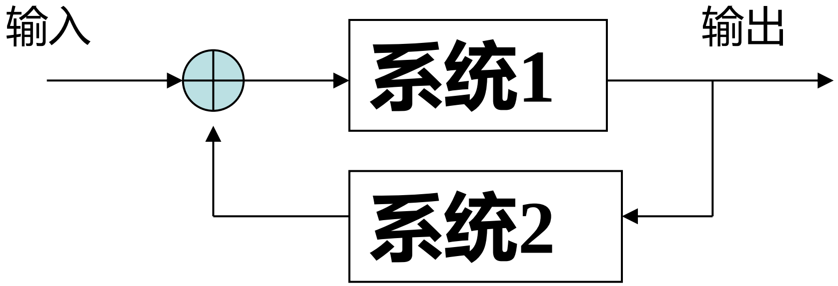
串联或级联



并联



反馈结构



2、系统的基本性质

1）线性系统和非线性系统

线性系统（连续时间或离散时间）：叠加性和齐次性

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t), \qquad x_2(t) \Rightarrow y_2(t)$$

$$ax_1(t) \Rightarrow ay_1(t), \qquad bx_2(t) \Rightarrow by_2(t)$$ **齐次性**

$$x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$ **叠加性**

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

$$x_1[n] \Rightarrow y_1[n], \qquad x_2[n] \Rightarrow y_2[n]$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

例　系统$y(t)=e^{x(t)}$是线性吗？

$$x_1(t)\Rightarrow y_1(t)=e^{x_1(t)}$$

$$x_2(t)\Rightarrow y_2(t)=e^{x_2(t)}$$

$$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$$

$$\Rightarrow y_3(t)=e^{x_3(t)}=e^{ax_1(t)+bx_2(t)}=(y_1(t))^a\cdot(y_2(t))^b$$

$$\neq ay_1(t)+by_2(t)$$

例　系统y[n]=2x[n]+3是线性？

$x_1[n]$ => $y_1[n]=2x_1[n]+3$

$x_2[n]$ => $y_2[n]=2x_2[n]+3$

$x_3[n]=x_1[n]+x_2[2]$

$y_3[n]=2x_3[n]+3=2(x_1[n]+x_2[n])+3\neq y_1[n]+y_2[n]$

非线性（不是零输入零输出）

2）时变系统和时不变系统

系统的时不变性是指系统的行为特性不随时间而变化，即输入输出特性并不随输入的时间而变化的特性。

数学上可描述为：

$$x[n] \rightarrow y[n] \qquad x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$$

$$x(t) \rightarrow y(t) \qquad x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

例　系统y[n]=x[2n+1]是时不变的吗？

这里不能认为对t或者n，全部不变
n，t参与维度

$x_1[n]$ => $y_1[n]=x_1[2n+1]$

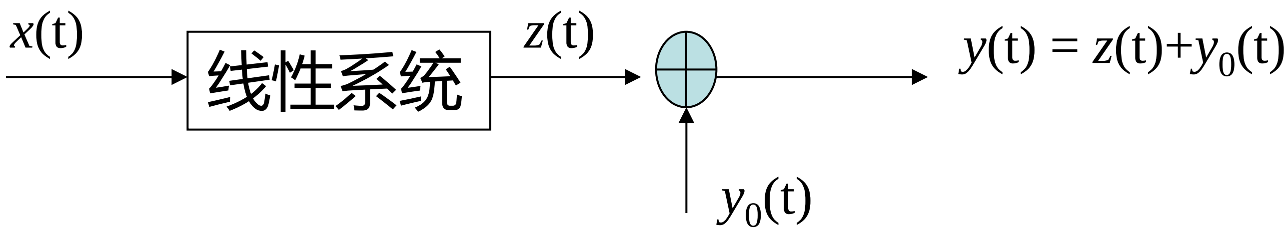
$x_2[n]=x_1[n-n_0]$ => $y_2[n]=x_2[2n+1] =x_1[2n+1-n_0]$

而$y_1[n-n_0]=x_1[2(n-n_0)+1]$

$y_2[n]$ <> $y_1[n-n_0]$是时变的.

一个系统既是线性的，又是时不变的，称作**线性时不变 (Linear Time-invariant , LTI)**系统.

3）增量线性系统



$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = z_1(t) + y_0(t)$$

$$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = z_2(t) + y_0(t)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow$$

$$y_3(t) = z_3(t) + y_0(t) = z_1(t) + z_2(t) + y_0(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$$ 非线性

$x_2(t)$和$x_1(t)$响应之差 $y_2(t) - y_1(t) = \Delta y(t) = \Delta z(t) \sim \Delta x(t)$ 线性关系

例　系统$y[n]=2x[n]+3$是线性？

$x_1[n] \Rightarrow y_1[n]=2x_1[n]+3$

$x_2[n] \Rightarrow y_2[n]=2x_2[n]+3$

$\boldsymbol{\Delta x[n]=x_2[n]-x_1[n]}$

$\boldsymbol{\Delta y[n]=y_2[n]-y_1[n]=2\Delta x[n]}$**---线性**

增量线性系统

4）记忆系统与无记忆系统

无记忆系统：一个系统的输出仅仅决定于该时刻的输入.
反之即为记忆系统。

$$y(t) = 3x^2(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

有记忆？

5）因果性与因果系统（因果信号）

因果性: 如果一个系统在任何时刻的输出只决定于现在以及过去的输入，而与系统以后的输入(将来) 无关。

$$y(t) = x(t-1)$$

$$y[n] = \frac{1}{9}\sum_{k=n-4}^{n+4} x[k]$$

因果？

对于实时系统，非因果性就意味着系统不可实现性。

因果信号：$x(t)=0,\ t<0$

6）可逆性与可逆系统

可逆性：不同的输入下有不同的输出，满足一一对应关系。

不可逆：如果一个系统分别对两个或两个以上不同的输入，能产生相同的输出。

如果一个系统是可逆的，那么就有一个逆系统存在，当该逆系统与原系统接联，等效于一个恒等系统。

$$y(t) = x^2(t)$$

有逆系统？

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

7）系统的稳定性

稳定性： 输入是有界的(即输入的幅度不是无限增长的)则系统的输出也必须是有界。

不稳定性： 如一个系统对有界输入产生的响应是无界的。

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

稳定？

$$y[n]=\sum_{k=-N}^{n}x[k]$$

小结

连续时间系统可以用常系数微分方程描述；
离散时间系统可以用常系数差分方程描述。

系统性质分类：

线性系统
时不变系统
因果系统
稳定系统
增量线性系统（本课程重点讨论的系统）
无记忆系统
可逆系统

本章重点

1.奇偶信号，

$$x_o(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

$$x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

能量信号

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt<\infty$$

$$E=\sum_{-\infty}^{\infty}|x[n]|^2<\infty$$

2. 复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的周期性问题

3. 单位冲激函数 $\delta(t)$ 的计算问题

4. 自变量变换 $x(t)\rightarrow x(at+b)$

5. 判断系统的性质（线性、时不变性、因果性、稳定性）

THANKS