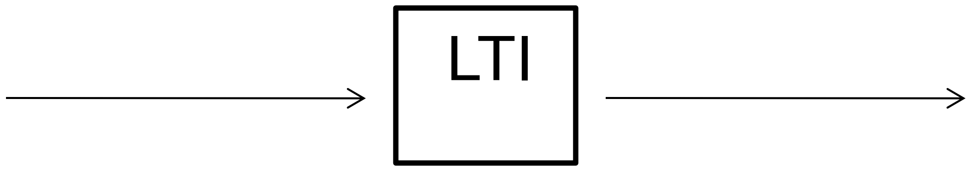
第二章 LTI系统的时域分析

- 离散时间LTI系统的卷积和
- 连续时间LTI系统的卷积积分
- LTI系统的性质
- 连续时间LTI系统的经典解法
- LTI系统的响应分解
- LTI系统的框图

本章讨论LTI系统的**时域分析方法**，讨论如何在时域求解LTI系统的响应问题——卷积法。



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k x_k(t) \qquad\qquad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k y_k(t)$$

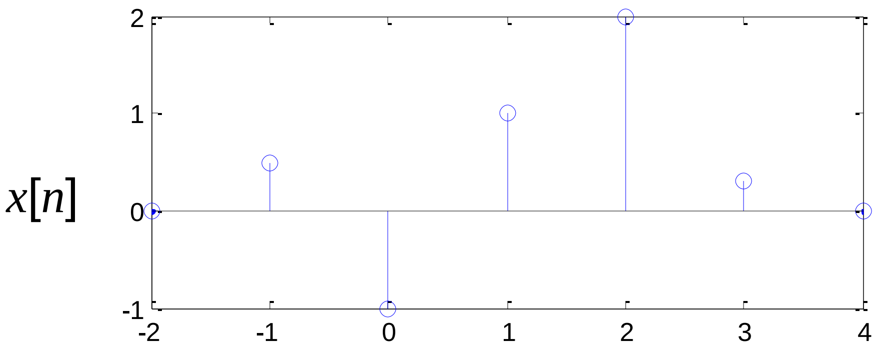
关键问题：

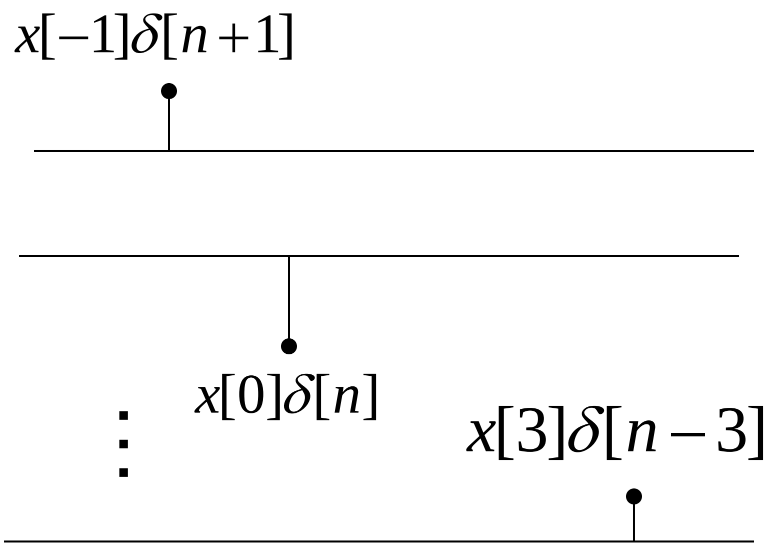
1.找到一个**基本信号**，可以表示一般信号

2.这个基本信号对LTI系统的响应是简单的、易求解的

一、离散时间LTI系统的卷积和

1、离散时间信号的单位脉冲分解





x[n]可以分解成多个脉冲信号

$$x[n] = \cdots + x[-1]\cdot\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

离散时间信号：可以用移位脉冲的加权之和来表示

例 $$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$= \sum_{m=n}^{-\infty} \delta[m] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

ISEE

2、离散时间LTI系统的卷积和

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{LTI}} \longrightarrow h[n]$$

称作**单位脉冲响应**

$$\delta[n-k] \qquad\qquad h[n-k]$$

$$x[k]\delta[n-k] \qquad\qquad x[k]h[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad\qquad y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}= x[n]*h[n]$$

卷积和----离散时间LTI系统的响应

卷积和的物理意义：

离散时间LTI系统的响应y[n]等于输入信号x[n]和系统单位脉冲信号h[n]两信号相互作用的结果，即

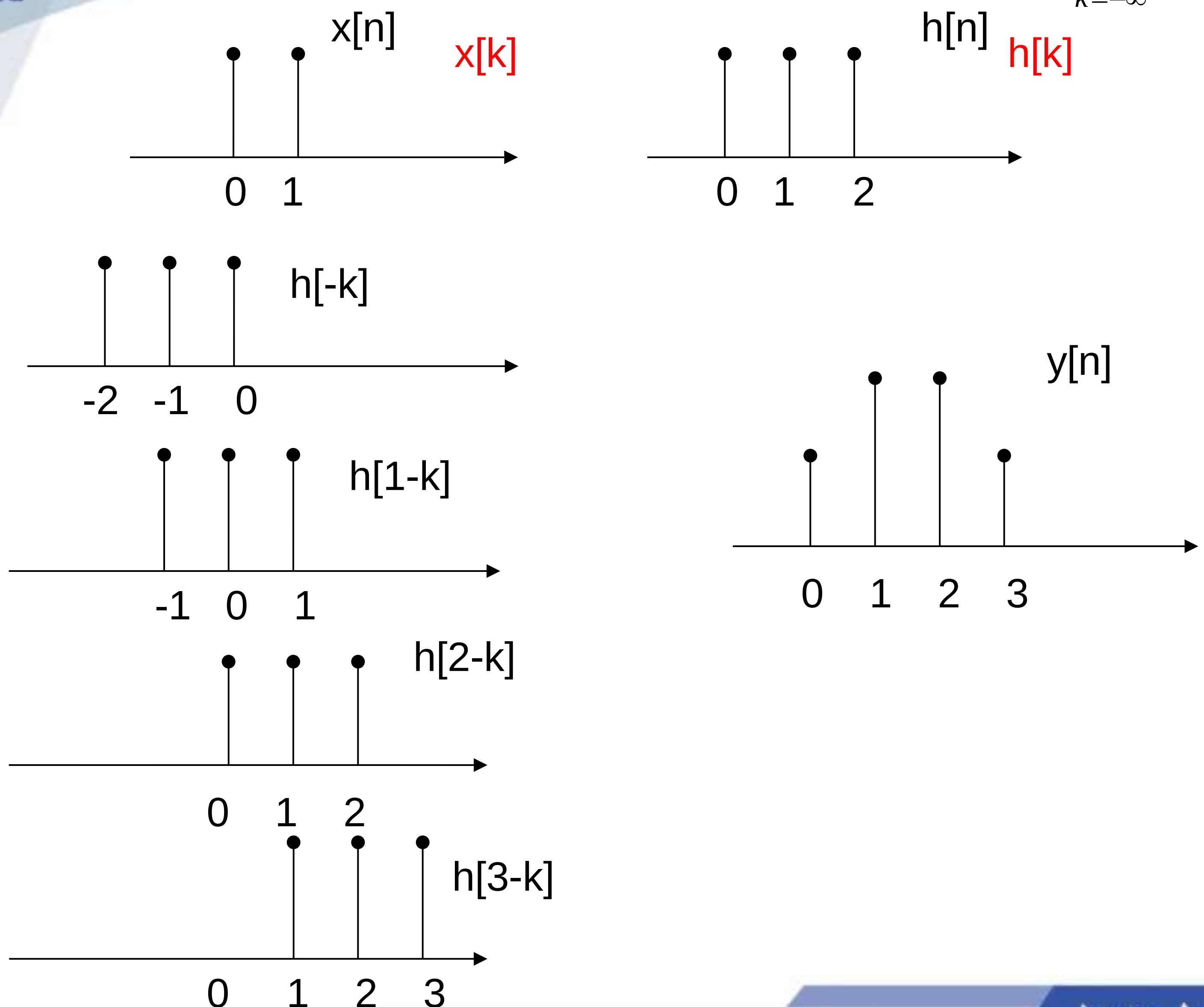
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$h[k]\to h[-k]\to h[n-k]$$

$$\to x[k]\cdot h[n-k]\to \sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot h[n-k]$$

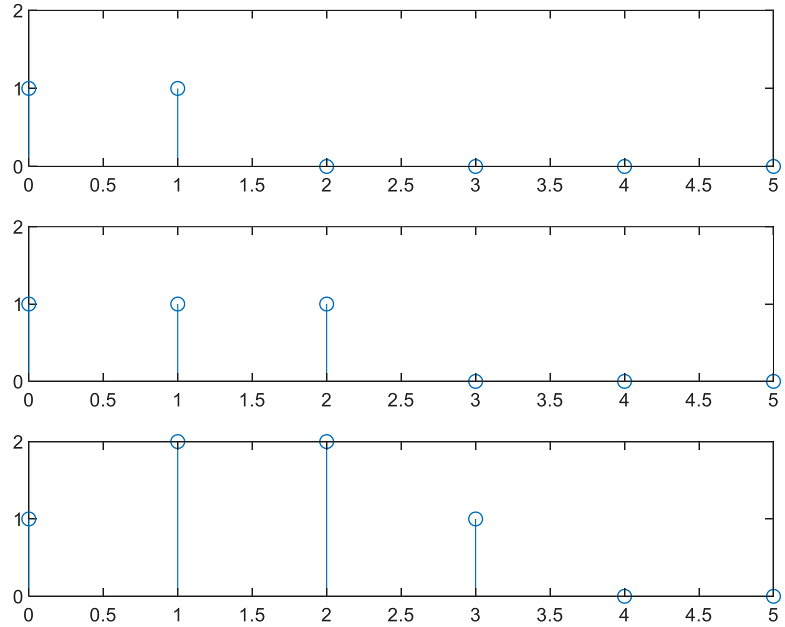
卷积和的运算过程----
翻转，平移，相乘，求和.

例：计算x[n]和h[n]的卷积和 $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$



例2-1

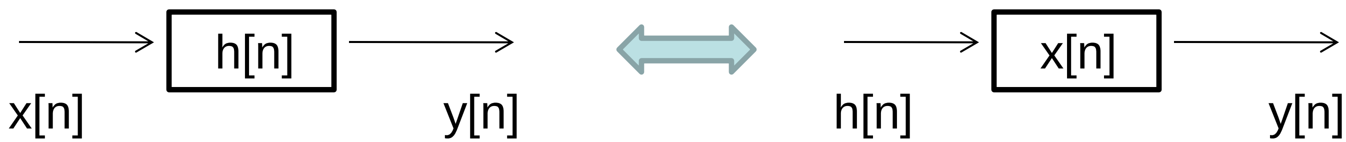
```
n=0:5;
N=length(n);
x=[1 1 zeros(1,N-2)];
h=[1 1 1 zeros(1,N-3)];
y=conv(x,h);
figure(1);
subplot(3,1,1),stem(n,x);
axis([0 5 0 2]);
subplot(3,1,2),stem(n,h);
axis([0 5 0 2]);
subplot(3,1,3),stem(n,y(1:N));
axis([0 5 0 2]);
```



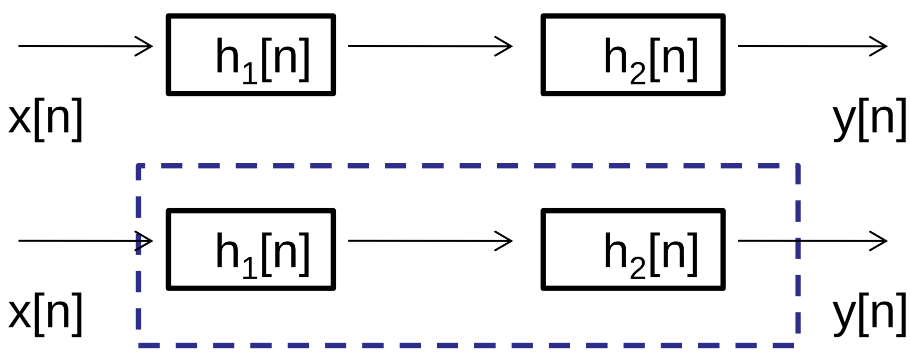
3、卷积和的性质

（1）代数性质

交换律：$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

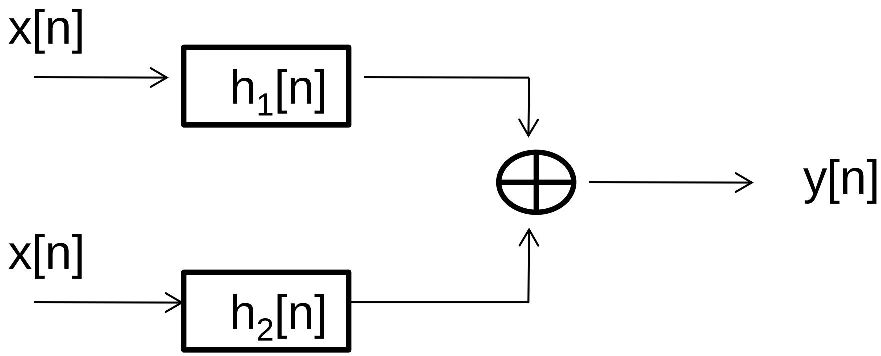


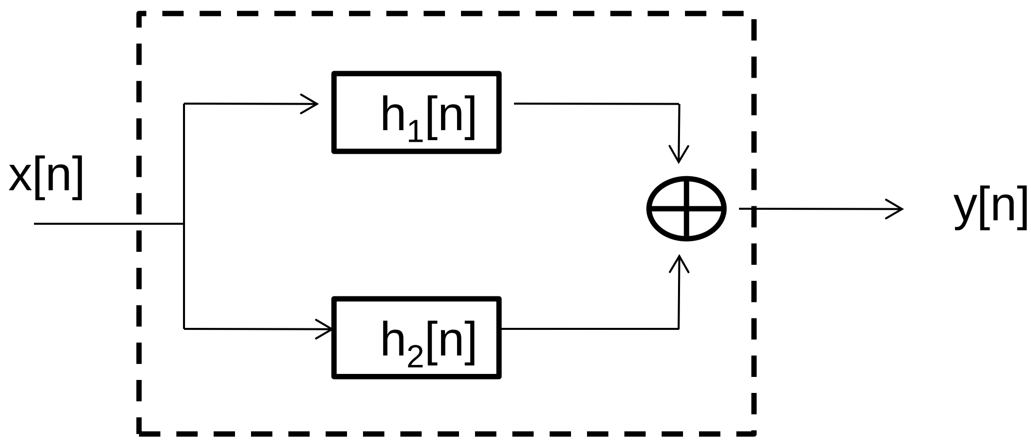
结合律：$\left(x[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]=x[n]*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)$



$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]$$

分配律： $x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]=x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)$





$$h[n]=h_1[n]+h_2[n]$$

（2）与冲激脉冲序列 $\delta[n]$ 和阶跃函数 $u[n]$ 的卷积

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$

$$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$$

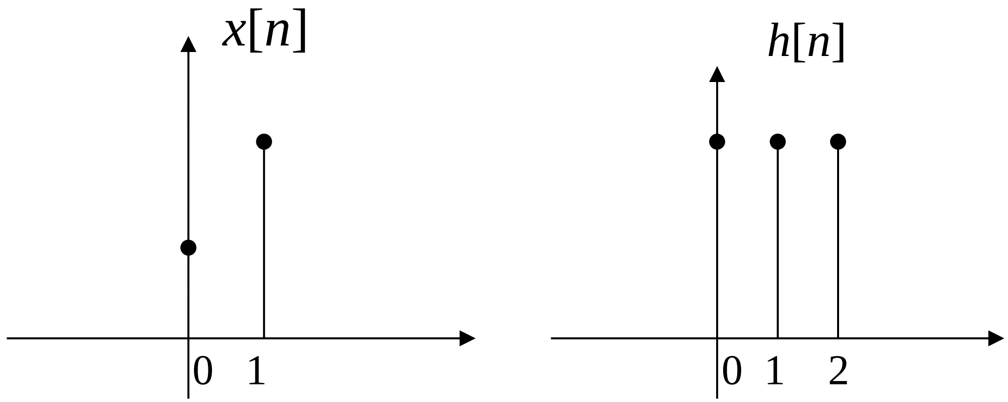
$$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

$$x[n-n_1]*\delta[n-n_2]=x[n-n_1-n_2]$$

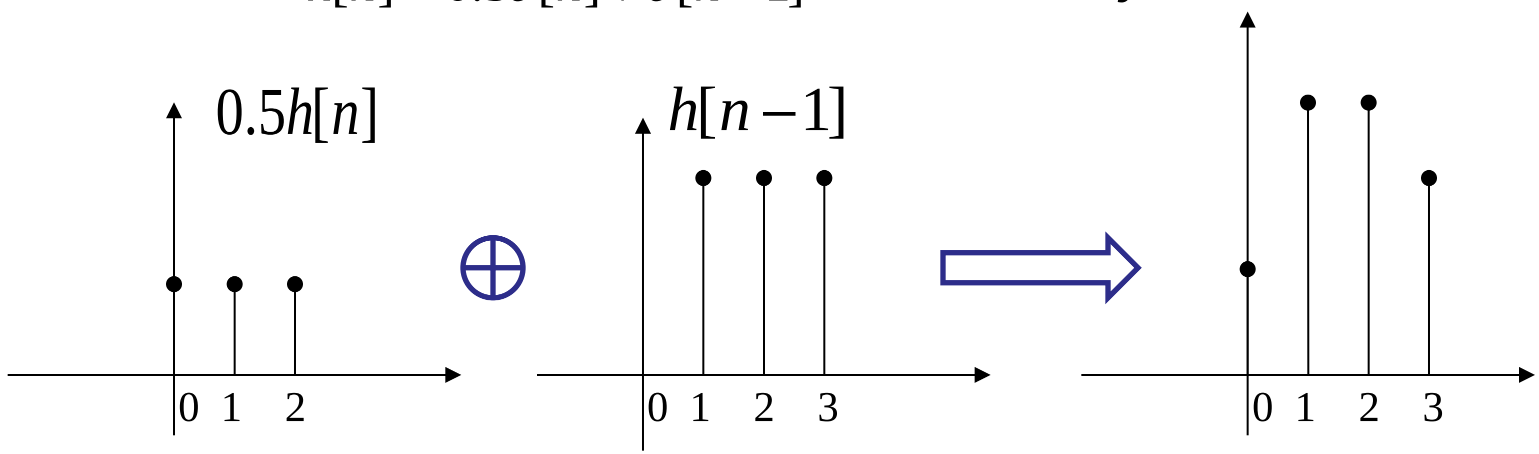
若 $x[n]*h[n]=y[n]$

则 $x[n-n_1]*h[n-n_2]=y[n-n_1-n_2]$

例：计算卷积和



$x[n]=0.5\delta[n]+\delta[n-1] \longrightarrow y[n]=0.5h[n]+h[n-1]$



小结：

1. 离散时间LTI系统的响应求解方法----卷积和

2. 卷积和的性质：

（1）代数性质----简化系统

（2）与单位脉冲函数与单位阶跃信号的响应

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$

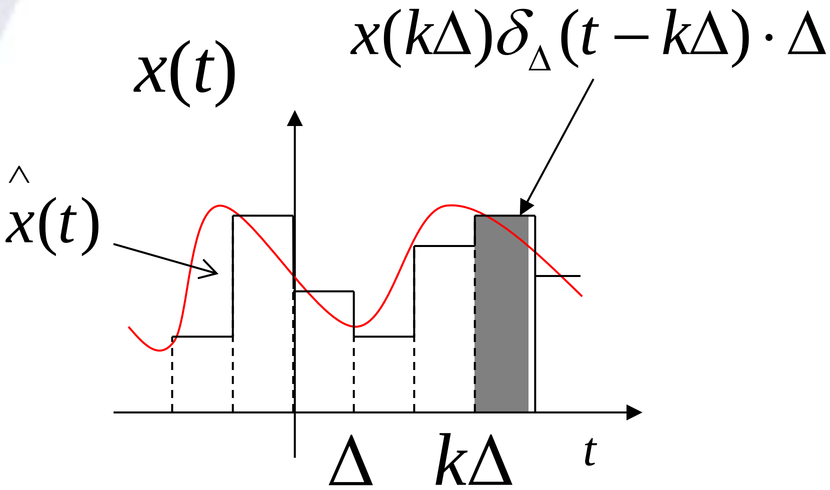
如果LTI系统的单位脉冲响应是单位脉冲函数，即 $h[n]=\delta[n]$
则该系统是恒等系统。

注意：$x[n]\cdot\delta[n]=x[0]\delta[n]$

$$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

二、连续时间LTI系统的卷积积分

1. 信号的脉冲分解



$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t)$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau$$

任一信号可用无穷多个单位冲激函数的移位、加权之"和"（即积分）来表示。

2. 连续时间LTI系统的卷积积分

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h(t)$$ 称作**单位冲激响应**

$$\delta_\Delta(t-k\Delta) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h_\Delta(t-k\Delta)$$

$$x(k\Delta)\cdot\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \qquad x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$x(t)=\lim_{\Delta\to}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$y(t)=\lim_{\Delta\to}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau = x(t)*h(t)$$

卷积积分

- 卷积积分的物理意义: LTI系统对输入信号的响应可以看作是两个信号相互作用的过程：卷积积分运算。

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

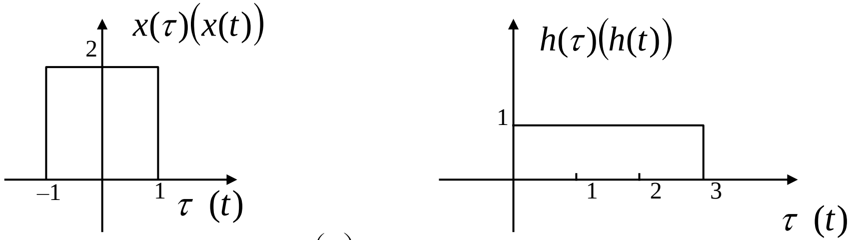
$$h(\tau)\rightarrow h(-\tau)\rightarrow h(t-\tau)$$

$$\rightarrow x(\tau)\cdot h(t-\tau)\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

卷积积分：

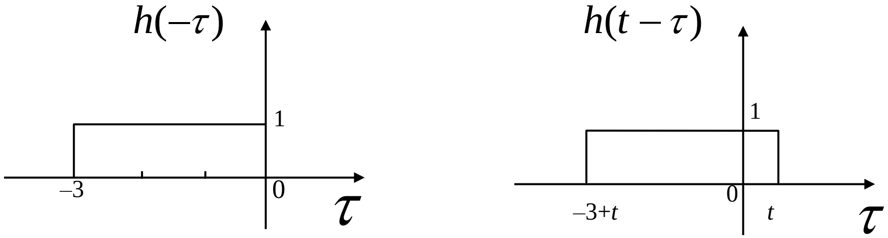
翻转, 平移, 相乘, 积分

例：已知信号 $x(t)$ 和 $h(t)$，求 $y(t)=x(t)*h(t)$



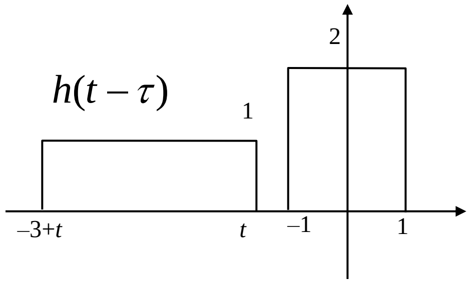
（a）

先做自变量置换，再将 $h(\tau)$ 反转为$h(-\tau)$, 然后沿τ 轴平移 t 得 $h(t-\tau)$



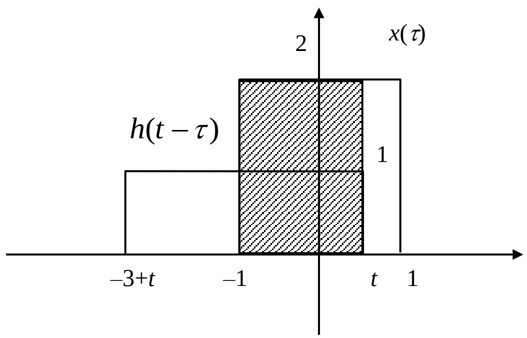
（b）　（c）

(1)当 $t < -1$ 时



$$y(t) = x(t) * h(t) = 0$$

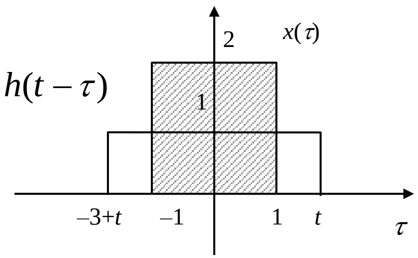
(2)当 $-1 \le t \le 1$ 时



$$y(t) = \int_{-1}^{t} x(\tau) h(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$= \int_{-1}^{t} 2 d\tau = 2(t+1)$$

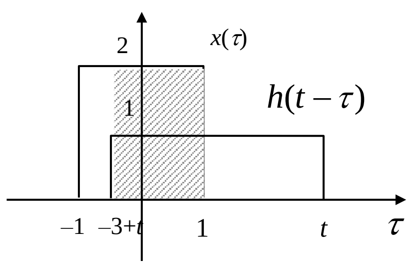
(3)当 $1 \le t \le 2$ 时



$$y(t) = \int_{-1}^{1} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$= \int_{-1}^{1} 2d\tau = 4$$

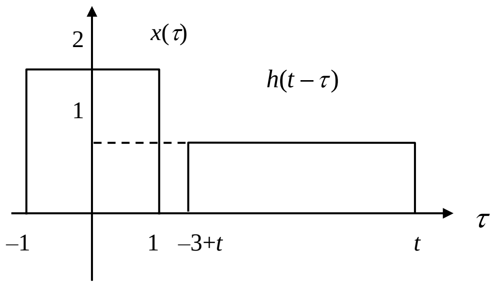
(4)当 $2 \le t \le 4$ 时



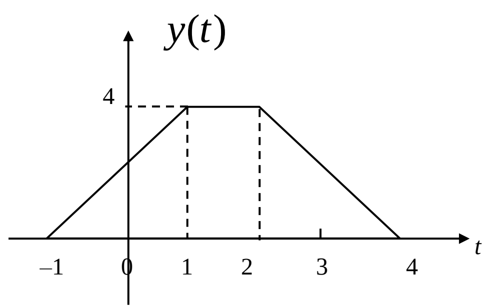
$$y(t) = \int_{-3+t}^{1} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$= \int_{-3+t}^{1} 2d\tau = 2(4-t)$$

(5)当 $t \geq 4$ 时



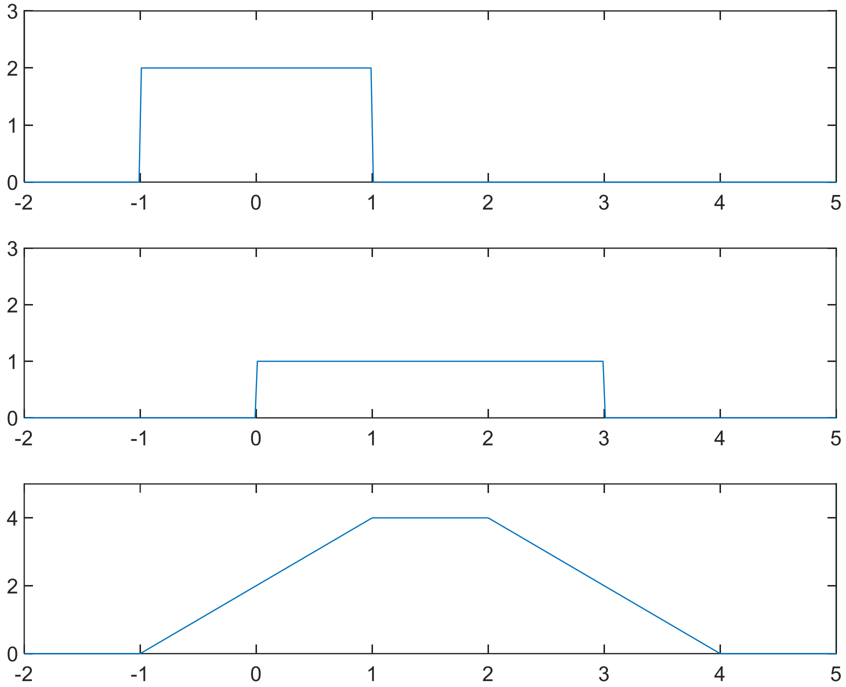
$$y(t) = x(t) * h(t) = 0$$



$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 2(t+1) & -1 \leq t \leq 1 \\ 4 & 1 \leq t \leq 2 \\ 2(4-t) & 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$

例2-2

```
T=0.01;t=-2:T:5;
x=2*0.5*((sign(t+1)+1)-(sign(t-1)+1));
h=0.5*((sign(t)+1)-(sign(t-3)+1));
y=conv(x,h)*T;
t1=-4:T:10;
figure(1);
subplot(3,1,1),plot(t,x);
axis([-2 5 0 3]);
subplot(3,1,2),plot(t,h);
axis([-2 5 0 3]);
subplot(3,1,3),plot(t1,y);
axis([-2 5 0 5]);
```

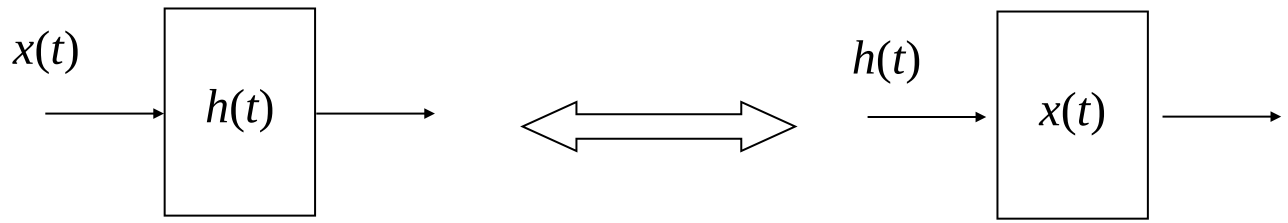


3. 卷积积分的性质

(1) 卷积代数

- 交换律

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

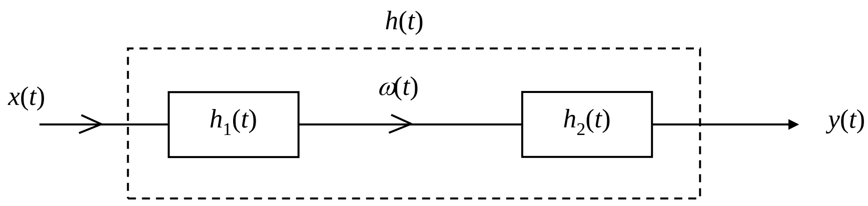


证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau = \int_{\infty}^{-\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)d(-\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\cdot d\lambda$$

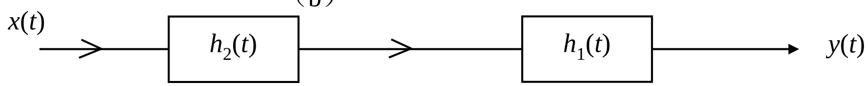
- 结合律

$$\left[x(t)*h_1(t)\right]*h_2(t)=x(t)*\left[h_1(t)*h_2(t)\right]$$



（a）

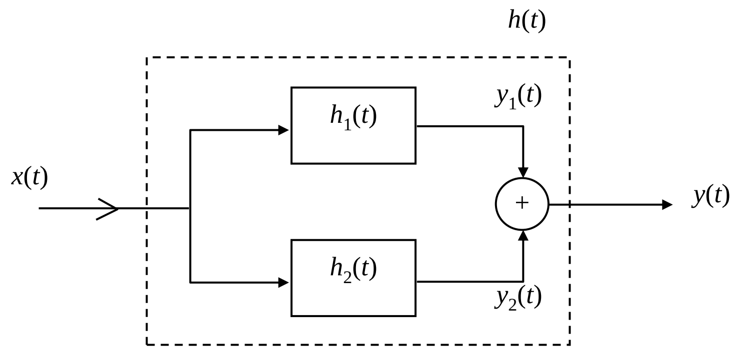
（b）



LTI系统的级联，与各子系统的次序无关，即各子系统连接的顺序可以调换，总系统的单位冲激响应为各子系统的卷积。

- 分配律

$$x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)=x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]$$



$$y_1(t)=x(t)*h_1(t),\ y_2(t)=x(t)*h_2(t)$$

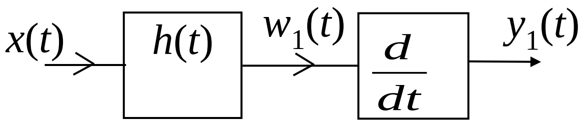
$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

$$=x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$$

并联LTI系统总的单位冲激响应等于各子系统单位冲激响应之和。

(2)卷积的微分与积分特性

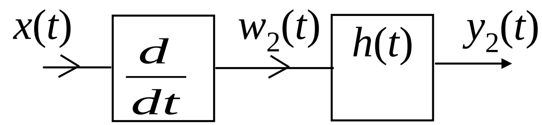
- 卷积的微分性质



（a）

$\Longleftrightarrow$

$y_1(t) = y_2(t)$



（b）

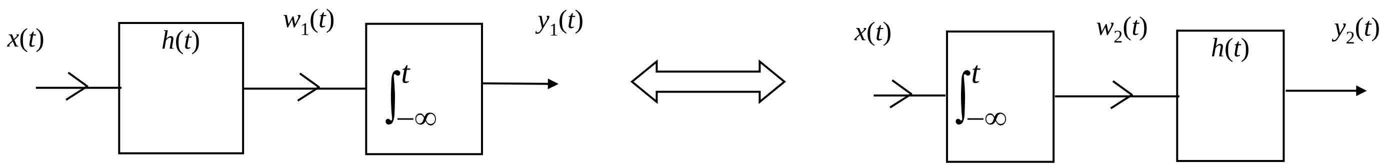
$$y_1(t)=\frac{d\omega_1(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[x(t)*h(t)\right]$$

$$y_2(t)=\omega_2(t)*h(t)=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[x(t)*h(t)\right]=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)*h(t)\right]=\frac{d}{dt}\left[h(t)*x(t)\right]=\frac{dh(t)}{dt}*x(t)$$

- **卷积的积分性质**



（a）（b）

$$\int_{-\infty}^{t}\left[x(\lambda)*h(\lambda)\right]\cdot d\lambda=[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)\cdot d\lambda]*h(t)$$

$$=x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)\cdot d\lambda]$$

- 卷积微分与积分性质的推广

$$r(t)=\left[x_1(t)*x_2(t)\right]$$

$$r^{(i)}(t)=x_1^{(j)}(t)*x_2^{(i-j)}(t)$$

$i=j+(i-j)$, 其中$i, j, i\text{-}j$取正数时为导数的阶次，负数时为重积分的次数

假设 $i=0, j=1, i-j=-1$

$$r(t)=r^{(0)}(t)=x_1^{(1)}(t)*x_2^{(-1)}(t)=x_1^{(-1)}(t)*x_2^{(1)}(t)$$

$$r(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\cdot d\tau*\frac{dx_2(t)}{dt}\quad ?$$

(3)与冲激函数 $\delta(t)$ 和阶跃函数 $u(t)$的卷积

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

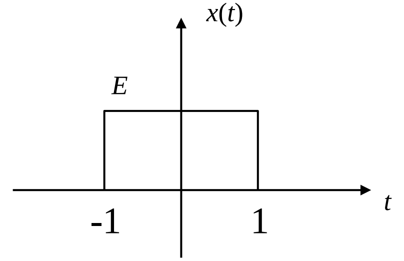
$$x(t)*\delta'(t)=x'(t)*\delta(t)=x'(t)$$

$$x(t)*\delta^{(k)}(t)=x^{(k)}(t)*\delta(t)=x^{(k)}(t)$$

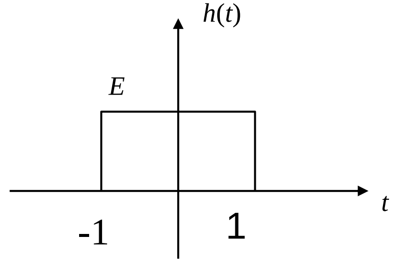
$$x(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=x^{(k)}(t)*\delta(t-t_0)=x^{(k)}(t-t_0)$$

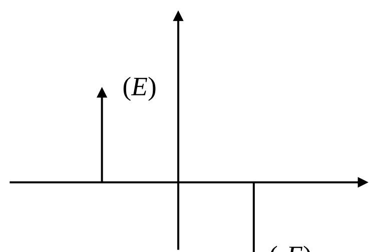
$$x(t)*u(t)=x(t)*\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\cdot d\tau*\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

例: 用卷积性质计算下图两信号的卷积。

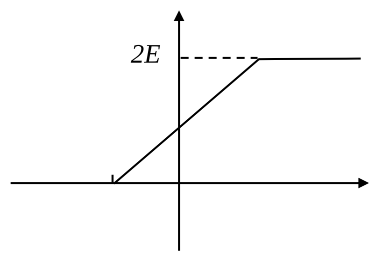


*

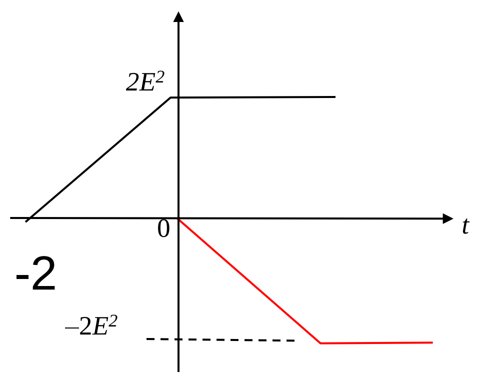




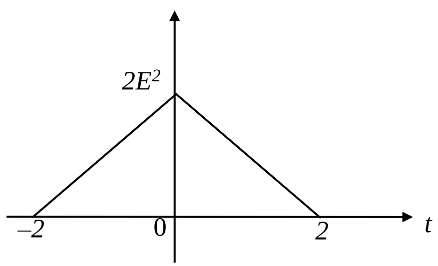
（b）



（c）



（d）



（e）

小结

1. 连续时间LTI系统的响应求解方法----卷积积分

2. 卷积积分的性质：

1）代数性质

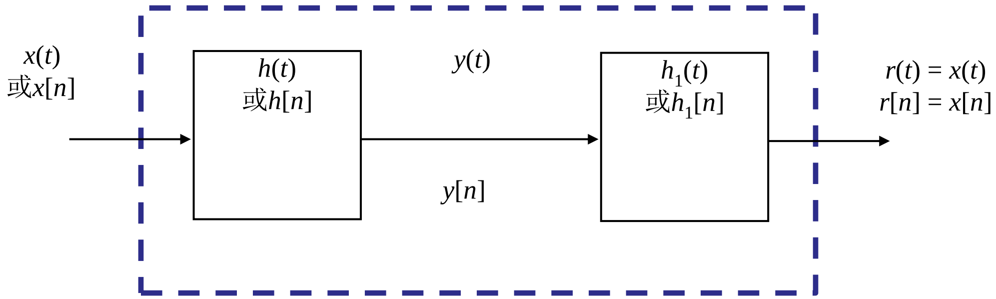
2）与单位冲激函数和单位阶跃函数的卷积

3）卷积积分的微分和积分性质----**可以简化卷积计算**

三、LTI系统性质

1. LTI系统的可逆性与可逆系统

如果一个LTI系统是可逆，那么它就有一个LTI的逆系统存在，原系统和其逆系统的级联为一恒等系统



恒等系统

恒等系统的单位冲激响应是单位冲激函数

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

例：一个连续时间LTI系统的输入输出关系为

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t),$$ 求逆系统.

令 $x(t)=\delta(t)$，可得该系统的单位冲激响应

$$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

设逆系统冲激函数为 $h_1(t)$，根据可逆性有

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t)$$

$$\left(\delta'(t)+\delta(t)\right)*h_1(t)=h'_1(t)+h_1(t)=\delta(t)$$

观察上式，可求得逆系统为

$$y'(t)+y(t)=x(t)$$

2. LTI系统的稳定性

LTI系统稳定性充要条件为：

CT $$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$ 绝对可积

DT $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$ 绝对可和

证明：(1) 必要条件

设一具有单位冲激响应$h(t)$ 的稳定LTI系统的输入信号为

$$x(t)=\begin{cases}0, & h(-t)=0\\ \dfrac{h(-t)}{|h(-t)|}, & h(-t)\neq 0\end{cases}$$

显然 $x(t)$ 为一有界信号, 即 $|x(t)|\leq 1$，对所有 t

则系统输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau$$

当 $t=0$ 时，输出为 $y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(-\tau)\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|\cdot d\tau$

对于稳定系统, $y(0)$ 有界

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|\cdot d\tau<\infty$$

(2)充分条件：

设系统的输入 $x(t)$ 有界，即

$$|x(t)| \le B, \quad \forall t$$

系统输出的绝对值为

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\cdot d\tau\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\cdot|x(t-\tau)|\cdot d\tau$$

$$\le B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\cdot d\tau$$

如 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)d\tau < \infty$，有 $|y(t)| \le B\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|\cdot d\tau < \infty$

同理可证离散LTI系统稳定的充要条件为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| < \infty$

例：考查累加器的稳定性

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

因为 $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=x[n]*u[n]$，则累加器的单位脉冲响应

$$h[n]=u[n]$$

因此有 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u[n]=\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$$

即累加器是非稳定系统。

3.LTI系统的因果性

考虑离散时间LTI系统 其输出可表示为

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]h[n-k]+\sum_{k=n+1}^{\infty}x[k]h[n-k] \quad = 0$$

即在 $k>n$ 时, $h(n-k)=0$

所以，**离散时间LTI系统的因果性的充要条件**

$$h[n]=0,\quad n<0$$

同理，**连续时间LTI系统因果性的充要条件**

$$h(t)=0,\quad t<0$$

例：考查系统 $y(t)=x(t-t_0)$ 的因果性？

其冲激响应为 $h(t)=\delta(t-t_0)$

当 $t_0\geq 0$ 时，是因果系统，系统为一延时器；
当 $t_0<0$ 时，是非因果系统，系统的输出超前输入。

同样，对于离散LTI系统 $y[n]=x[n-n_0]$，仅当 $n_0\geq 0$ 时，

才是因果系统，系统是一离散时间延时器。

4. LTI系统的单位阶跃响应

- 连续时间LTI系统，其单位阶跃响应为

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau$$

- 离散时间LTI系统，其单位阶跃响应为

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

- 阶跃响应和冲激响应之间的关系

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \qquad h[n] = s[n] - s[n-1]$$

5. LTI系统的特征函数

$$\phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\text{CT}} \longrightarrow \lambda_k \bullet \phi_k(t)$$

特征值

特征函数

$\boxed{\text{函数}} \Longrightarrow \boxed{\text{常数乘以输入函数}}$

该结论也可应用于离散时间系统DT

- **复指数信号是LTI系统的特征函数**

$x(t) = e^{st}$ → 连续时间 LTI $h(t)$ → $y(t)$

s---复数

$$y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} \cdot d\tau$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} \cdot d\tau}_{H(s)} \bullet e^{st} = H(s) \bullet e^{st}$$

特征值　　特征函数

$$x[n] = z^n \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{离散时间}\\ \text{LTI}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow y[n]$$

z---复数

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \bullet z^n = H(z) \bullet z^n$$

$H(z)$

特征值　　特征函数

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(s)e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{st}dt$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \Longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(z)z^n$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \Longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

小结

1. LTI系统的性质----可以通过单位冲激响应 $h(t)$ 或单位脉冲响应 $h[n]$去分析

2. LTI系统的特征函数----**阐明了一种LTI系统的分析方法。**
如果一个LTI系统的输入可以表示成复指数信号的线性组合，那么系统的输出也能够表示成相同复指数信号的线性组合，所不同的是输出信号的加权系数为输入信号的加权系数 a_k 和该复指数信号的特征值 $H(s_k)$ 的乘积。即，可以将LTI系统的响应问题从卷积计算简化成乘积计算。

四、连续时间LTI系统的经典解法

1. 若连续时间LTI系统的激励信号为 $x(t)$ ，系统响应为 $y(t)$，则LTI系统可以用常系数微分方程表示

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t)$$

或缩写为：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

2. 经典解法

完全解由两部分组成： $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

齐次解　特解

1）齐次解

由微分方程得到齐次方程

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) = 0$$

特征方程 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

特征根（单实根）： λ_i ， $i = 1, 2, \ldots, n$。

齐次解

$$y_h(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t}, \quad t > 0$$

但 c_i 还没有确定

2）特解

特解的函数形式与激励信号的函数形式有关，将输入信号与特解代入微分方程得到特解函数式中的待定系数，即可给出特解 $y_p(t)$。

3）c_i 系数确定

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}+y_p(t)\text{ ，}\quad t>0$$

根据给定的系统的 n 边界条件确定 n 个待定系数 c_i 。

起始条件： $y^{(k)}(0_-)$，$k=0,1,\cdots,n-1$

初始条件 $y^{(k)}(0_+)$ **=?** $y^{(k)}(0_-)$，$k=0,1,\cdots,n-1$

例：给定线性常系数微分方程 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=f(t)$

求当 $y(0_-)=2$，$y'(0_-)=-1$， $f(t)=2e^{-t}\cdot u(t)$ 时的全解。

1）**齐次解** $\lambda^5+5\lambda+6=0$

$$\lambda_1=-2 \quad \lambda_2=-3$$

$$y_h(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$$

2）**求特解**

根据激励信号的函数形式，其特解可设为 $y_p(t)=Be^{-t}$

其一阶、二阶导数分别为 $y'_p(t)=-Be^{-t}$， $y''_p(t)=Be^{-t}$

代入方程，得 $Be^{-t}+5(-Be^{-t})+6Be^{-t}=2e^{-t}$

解得 $B=1$。方程的特解 $y_p(t)=e^{-t}$

3）**微分方程的全解为**

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + e^{-t}$$

其一阶导数 $y'(t) = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t} - e^{-t}$

并将初始条件代入，得

$$\begin{cases} y(0_+) = y(0_-) = c_1 + c_2 + 1 = 2 \\ y'(0_+) = y'(0_-) = -2c_1 - 3c_2 - 1 = -1 \end{cases}$$

由上式解得 $c_1 = 3, c_2 = -2$

全解 $y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t} \qquad t > 0$

$$= \underbrace{\left(3e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{自由响应}} + \underbrace{e^{-t}u(t)}_{\text{强迫响应}}$$

小结

常系数微分方程的经典解法

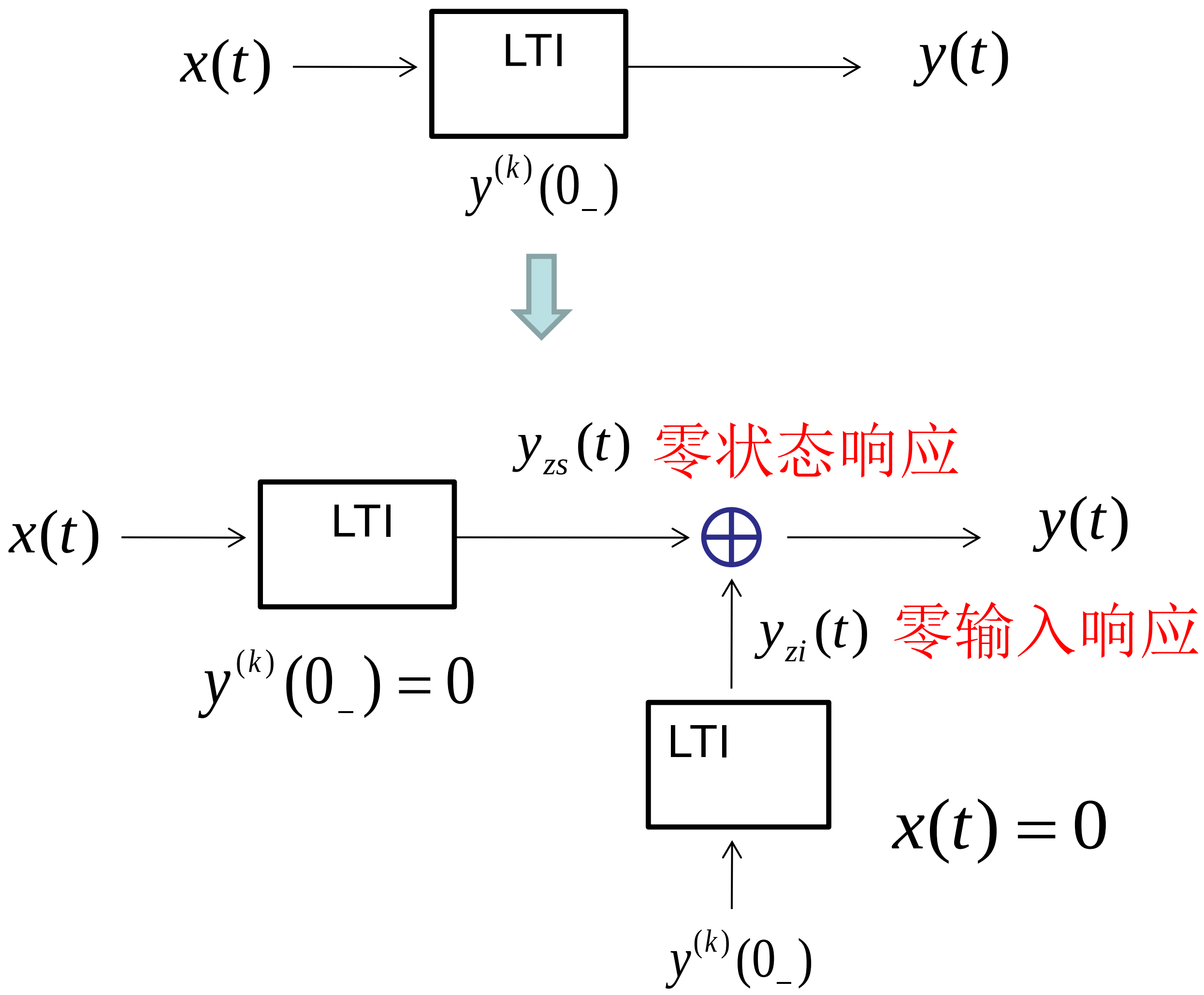
$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}+y_p(t) \qquad t>0$$

齐次解与齐次方程的根与起始条件有关----自由响应

特解与输入函数有关----强迫响应

问题：
（1）没有利用LTI系统的性质
（2）齐次解的系数确定困难

五、LTI系统的响应分解



- LTI系统的响应可以分解为**零输入响应**和**零状态响应**。
  - **零输入响应** $y_{zi}(t)$ ：不考虑外加信号, 即输入信号等于零（$x(t)=0$），仅由系统的起始状态（$y^{(k)}(0_{-})$）所产生的响应。
  - **零状态响应** $y_{zs}(t)$：不考虑系统的起始状态的作用, 即起始状态等于零（$y^{(k)}(0_{-})=0$），仅由系统的外加激励信号$x(t)$所产的响应。

例：上例采用零输入响应和零状态响应求解

(1)零输入响应求解

对于零输入上述微分方程为:

$$\frac{d^2 y_{zi}(t)}{dt^2}+5\frac{dy_{zi}(t)}{dt}+6y_{zi}(t)=0$$

$$y_{zi}(t)=(c_{zi1}e^{-2t}+c_{zi2}e^{-3t}),\quad t>0$$

$$y_{zi}(0_+)=y(0_-)=c_{zi1}+c_{zi2}=2$$

$$y'_{zi}(0_+)=y'(0_-)=-2c_{zi1}-3c_{zi2}=-1$$

没有激励，系统的初始条件 = 起始条件

$$c_{zi1}=5,\quad c_{zi2}=-3,$$

$$y_{zi}(t)=5e^{-2t}-3e^{-3t},\quad t>0$$

(2)零状态响应求解

$$\frac{d^2 y_{zs}(t)}{dt^2}+5\frac{dy_{zs}(t)}{dt}+6y_{zs}(t)=f(t)$$

$$y_{zs}(t)=(c_{zs1}e^{-2t}+c_{zs2}e^{-3t})+e^{-t},\quad t>0$$

因为$y_{zs}(0_+)=c_{zs1}+c_{zs2}+1=0$

$$dy_{zs}(0_+)/dt=-2c_{zs1}-3c_{zs2}-1=0$$

起始状态为零，
初始状态没有变化

得：$c_{zs1}=-2, c_{zs2}=1$

$$y_{zs}(t)=-2e^{-2t}+e^{-3t}+e^{-t},\quad t>0$$

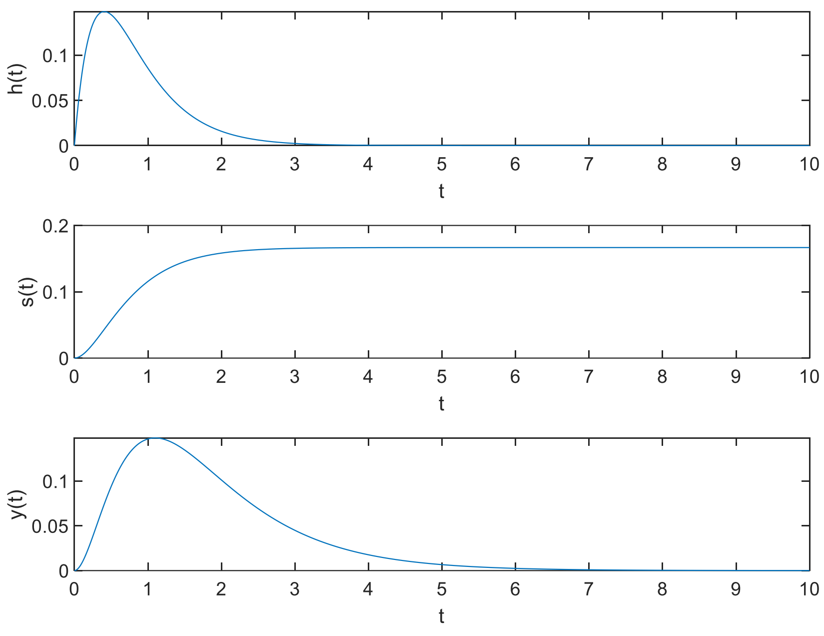
$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\underbrace{(5e^{-2t}-3e^{-3t})u(t)}_{\text{零输入}}+\underbrace{(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t})u(t)}_{\text{零状态}}$$

$$=\underbrace{(3e^{-2t}-2e^{-3t})u(t)}_{\text{自由响应}}+\underbrace{e^{-t}u(t)}_{\text{强迫响应}}$$

例2-3 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=f(t)$ $f(t)=2e^{-t}\cdot u(t)$

Matlab求解单位冲激响应、单位阶跃响应和零状态响应。

```
t=0:0.01:10;
sys=tf([1],[1 5 6]); %获取系统模型
f=2*exp(-t);
h=impulse(sys,t);
%单位冲激响应
s=step(sys,t);
%单位阶跃响应
y=lsim(sys,f,t);
%零响应状态
figure(1);
subplot(3,1,1),plot(t,h);
xlabel('t'),ylabel('h(t)');
subplot(3,1,2),plot(t,s);
xlabel('t'),ylabel('s(t)');
subplot(3,1,3),plot(t,y);
xlabel('t'),ylabel('y(t)');
```



小结——零输入响应

❖连续时间LTI系统（单实根情况 ）

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}^{(k)}(t)=0, \qquad y_{zi}^{(k)}(0_+)=y^{(k)}(0_-) \qquad (k=0,1,\cdots N-1)$$

$$y_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{N} C_{zik} e^{\lambda_k t}, \qquad t \ge 0^+$$

容易求解

❖离散时间系统（单实根情况 ）

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k]=0, \quad y_{zi}[-k]=y[-k] \quad (k=1,2,\cdots N)$$

可以通过零输入差分方程得到初始条件

$$y_{zi}[k], \quad (k=0,1,2,\cdots N-1)$$

$$y_{zi}[n]=\sum_{k=1}^{N} C_{zik}(\lambda_k)^n, \quad n \ge 0$$

小结——零状态响应

连续时间LTI系统： $\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zs}^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$

起始条件 $y^{(k)}(0_-)=0$ 和 $x^{(k)}(0_-)=0$

得到初始条件 $y_{zs}^{(k)}(0_+), k=0,1,...N-1$ 困难

$$y_{zs}(t) = \sum_{k=1}^{N} C_{zsk} e^{\lambda_k t} + B(t)$$

$=x(t)*h(t), \quad t>0$ 知道系统的单位冲激响应 $h(t)$，容易求解

离散时间LTI系统： $\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zs}[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

起始条件 $y[-k]=0, \quad (k=1,2,\cdots N)$ 和 $x[-k]=0, \ k=1,2,\cdots,M$

得到初始条件 $y_{zs}[k], k=0,1,..., N-1$

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=1}^{N} C_{zsk}(\lambda_k)^n + B[n] = x[n]*h[n], \quad n \ge 0$$

小结——系统响应分解（单实根）

- 连续时间LTI系统

$$y(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k e^{\lambda_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}}\qquad t\geq 0^{+}\qquad \text{经典方法}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}e^{\lambda_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}e^{\lambda_k t}+B(t)}_{\text{零状态响应}}$$

自由响应 ≠零输入响应
强迫响应 ≠零状态响应

$$=\sum_{k=1}^{N}C_{zik}e^{\lambda_k t}+x(t)*h(t)\qquad \text{卷积方法}$$

- **离散时间LTI系统**

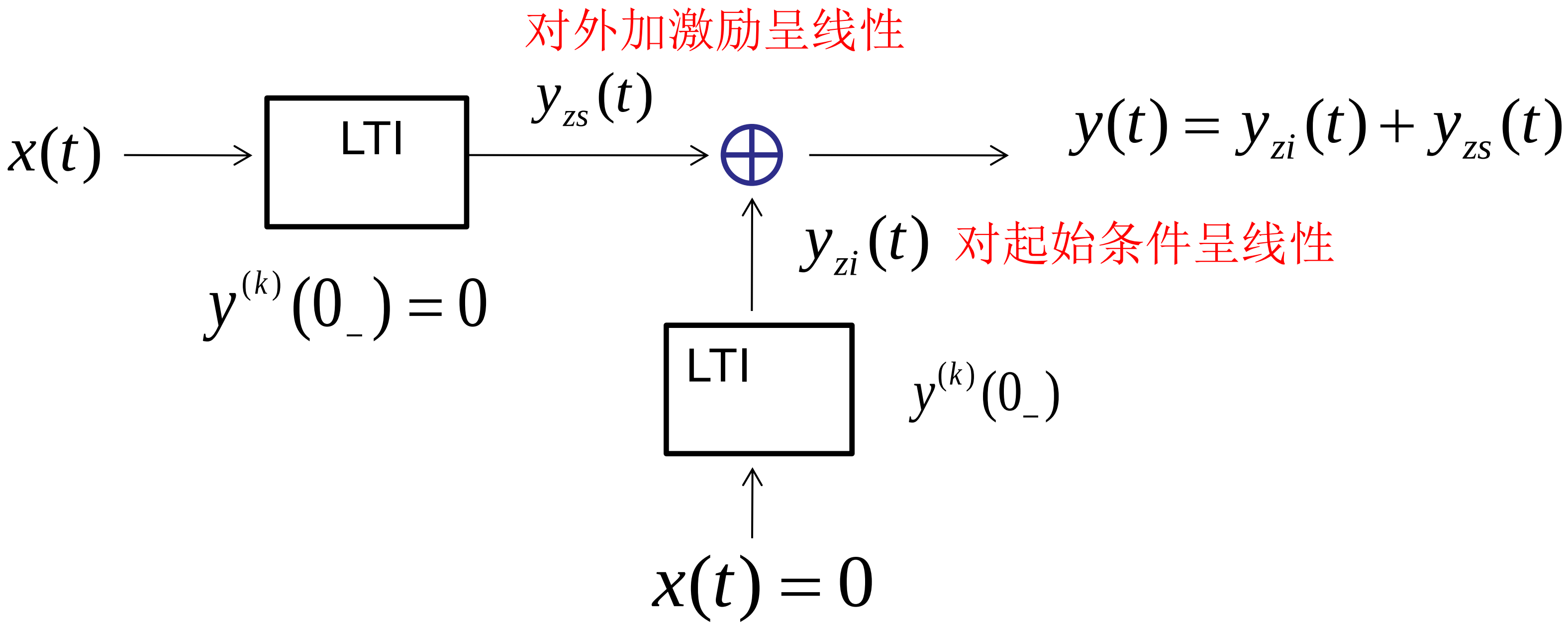
$$y[n]=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k(\lambda_k)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{B[n]}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}(\lambda_k)^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}(\lambda_k)^n+B[n]}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}C_{zik}(\lambda_k)^n+x[n]*h[n]$$

讨论——线性常系数微分（差分）方程描述的系统是LTI系统吗？是因果的吗？

系统的响应 = 零输入响应 + 零状态响应



由于零输入响应的存在，在整个时间轴上（$-\infty<t<\infty$）系统的响应对外加激励（ $x(t),\ t>0$ ）不满足线性和时不变性，也可以是非因果。

在初始松弛（静止）条件下，线性常系数微分/差分方程所描述的系统是因果的，也是LTI的。

若 $x(t)=0,\ t\le t_0$，则 $y(t)=0,\ t\le t_0$ 。-----初始松弛条件

在实际应用中，在初始松弛条件下（$t_0=0$），等效于连续时间系统的起始条件为零，即 $y^{(k)}(0\_)=0,\quad k=0,1,\dots,N-1$

即： $y_{zi}(t)=0,$

因此， $y(t)=y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=0,\quad t<0$

必须满足 $h(t)=0,\quad t<0$

即：系统是因果的。

对于实际的因果系统，起始条件 $y^{(k)}(0\_)$ 可看作是 $t<0$ 时输入激励信号响应的结果，因此，对于输入信号 $x(t),-\infty<t<\infty$

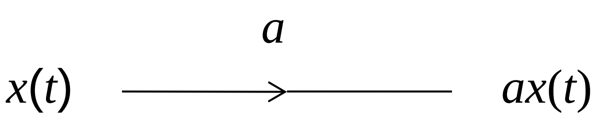
$$y_{zi}(t)=h(t)*(x(t)u(-t)),t>0$$

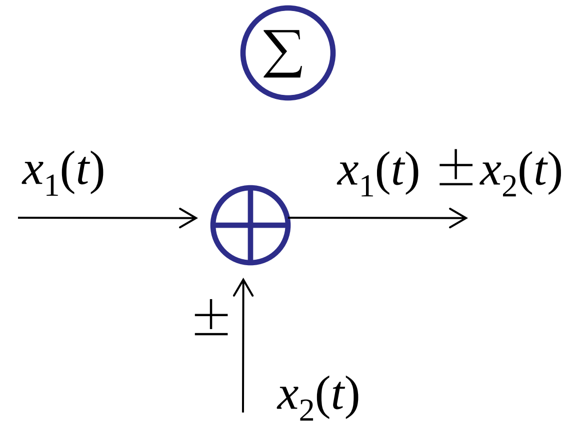
$$y_{zs}(t)=h(t)*(x(t)u(t)),t>0$$

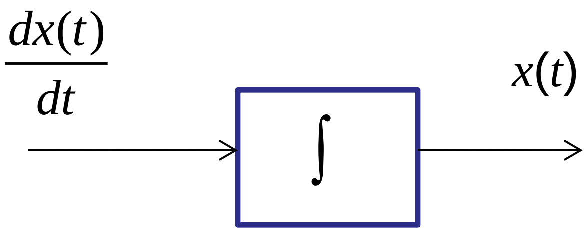
六、LTI系统框图

（1）连续时间LTI系统的框图表示

常用三种基本运算器







一个N阶系统微分方程：

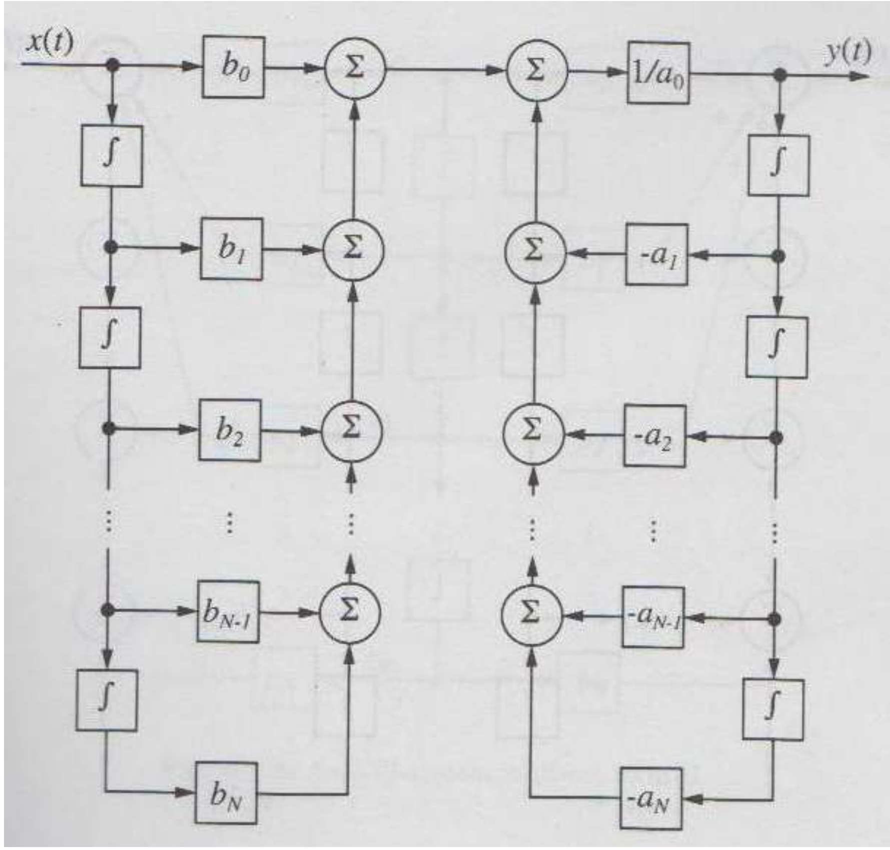
$$\sum_{k=0}^{N}\alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{N}\beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

对上述方程两边做N次积分得，其中 $a_k=\alpha_{N-k}, b_k=\beta_{N-k}$

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\int_{(k)}y(t)dt=\sum_{k=0}^{N}b_k\int_{(k)}x(t)dt$$

$$y(t)=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{N}b_k\int_{(k)}x(t)dt-\sum_{k=1}^{N}a_k\int_{(k)}y(t)dt\right\}$$

$$y(t)=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{N}b_k\int_{(k)}x(t)dt-\sum_{k=1}^{N}a_k\int_{(k)}y(t)dt\right\}$$



直I型结构

22 2. Time-Domain Models of Continuous LTI-Systems

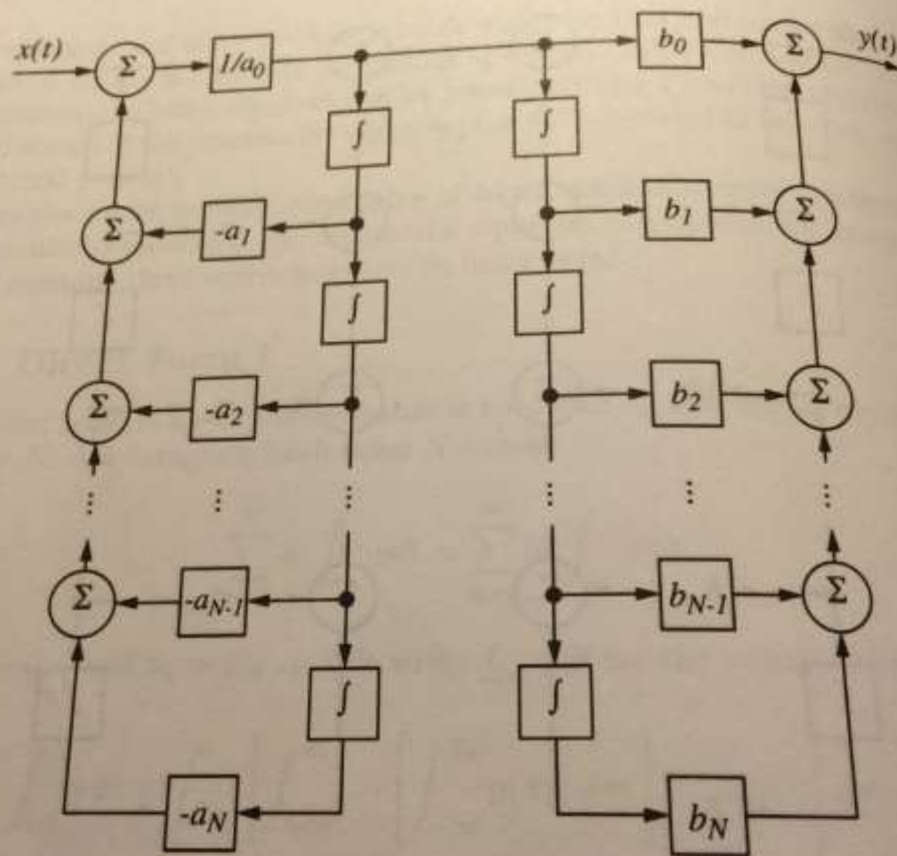
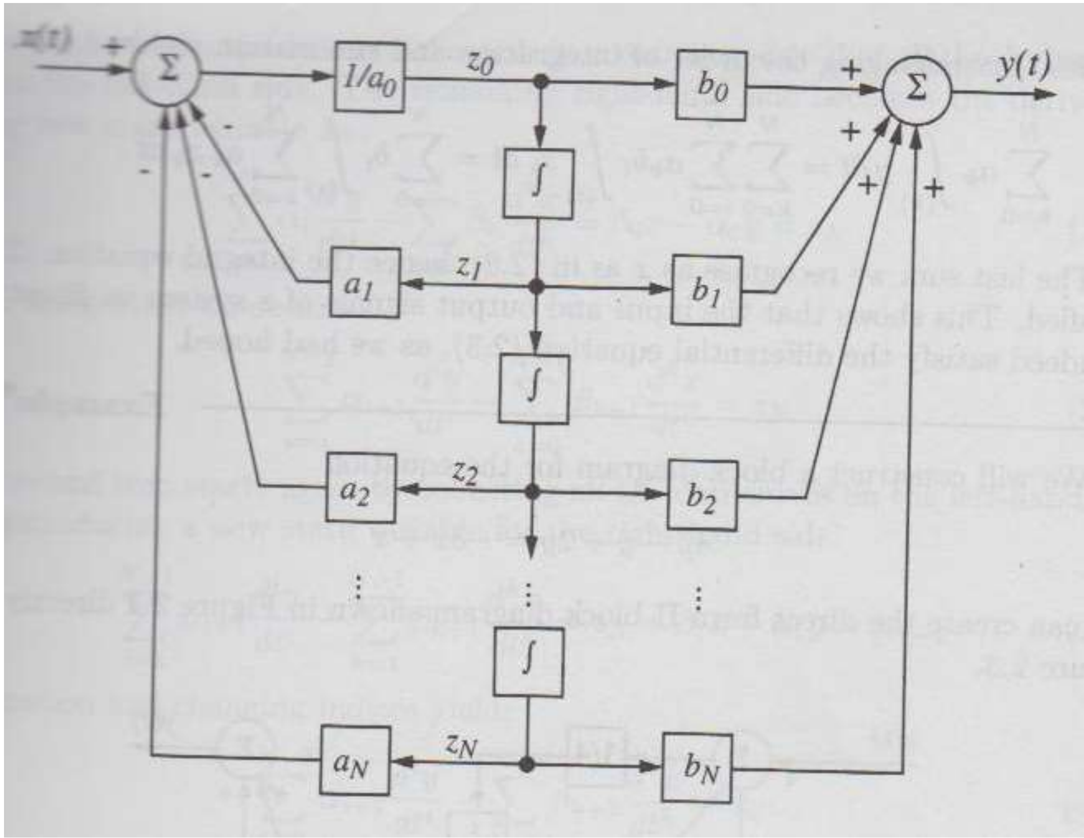


Figure 2.2: Derivation of the block diagram for direct form II from direct form I

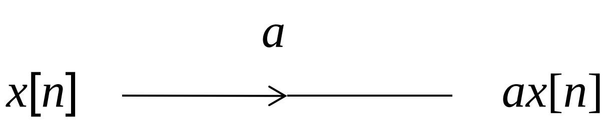
$$y(t)=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{N} b_k \int_{(k)} x(t)dt-\sum_{k=1}^{N} a_k \int_{(k)} y(t)dt\right\}$$

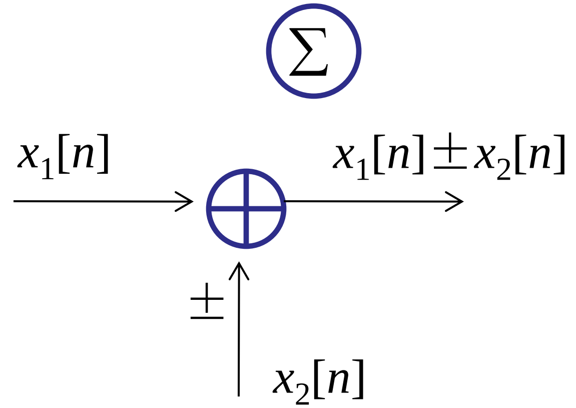


直II型结构

（2）离散时间LTI系统的框图表示

常用三种基本运算器

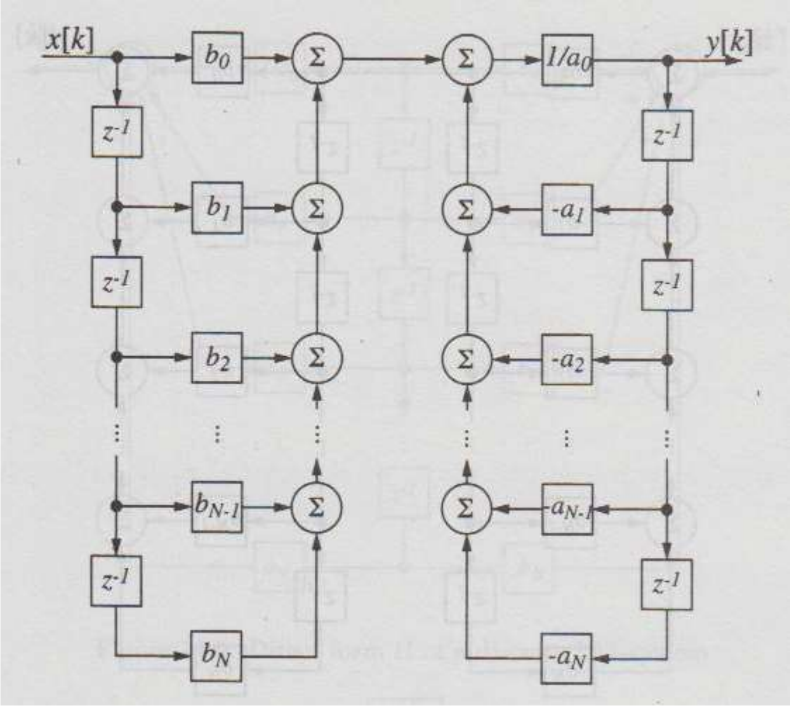




一个N阶差分方程：

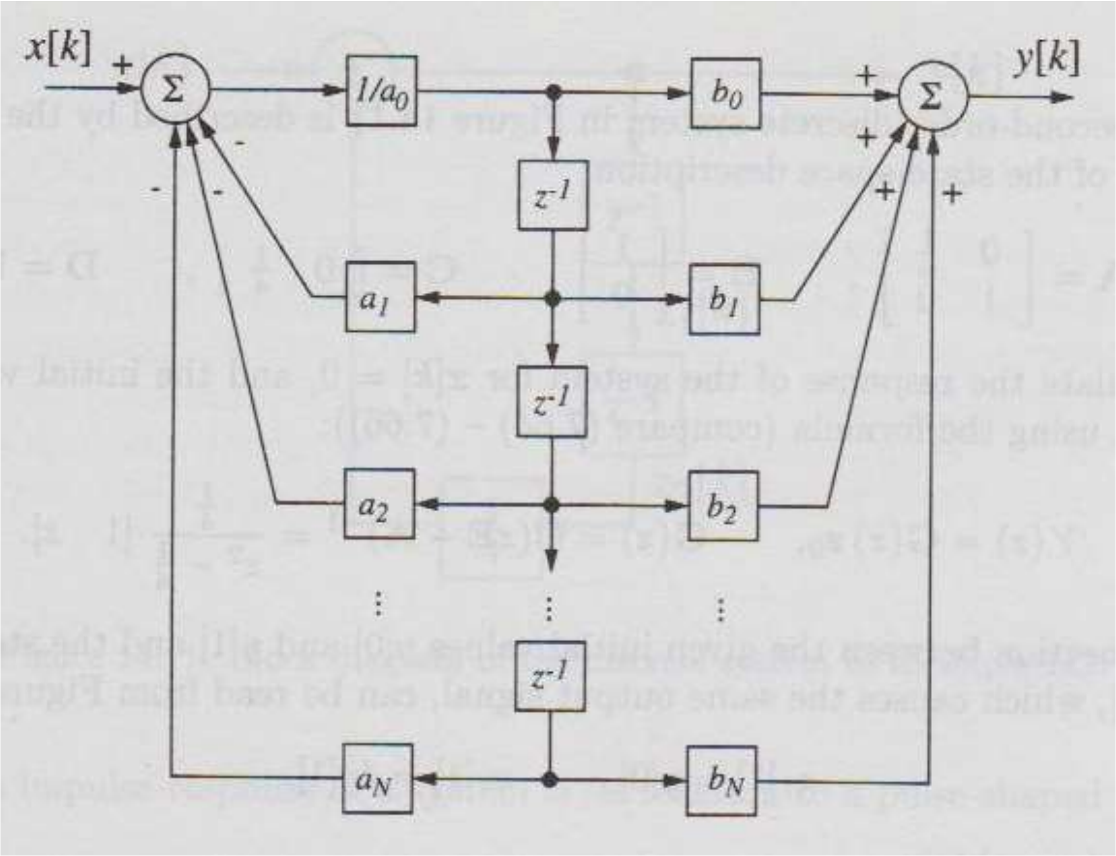
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\}$$



直I型结构

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$



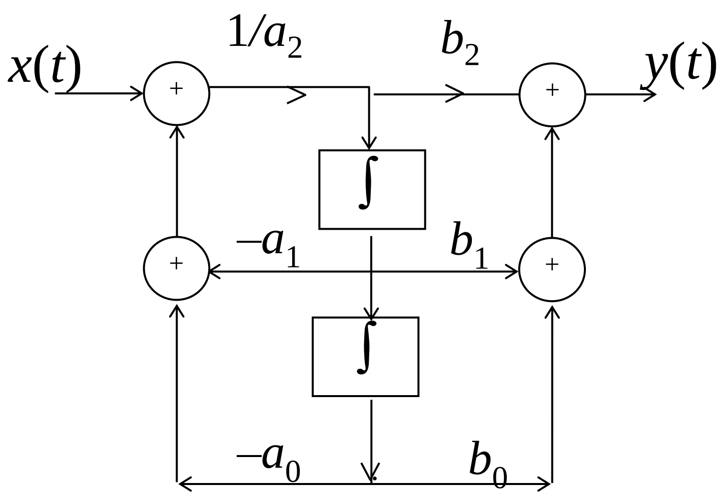
直II型结构

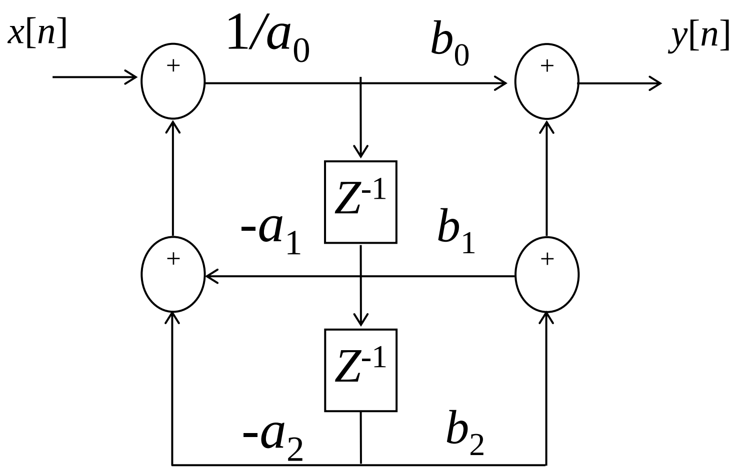
小结

1. 连续LTI系统的框图由加法器、乘法器和积分器构成；
2. 离散LTI系统的框图由加法器、乘法器和延时器构成。

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=b_0x+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]$$





本章总结

1、离散时间LTI系统的卷积和——零状态响应的求解

2、连续时间LTI系统的卷积积分——零状态响应求解

根据卷积的性质（微分与积分性质）、作图法求卷积

3、LTI系统的性质

--可用系统的单位冲激响应去分析

--特征函数，可以求一类信号在整个时间轴上 $-\infty < t < \infty$ 的响应，简化卷积为乘积。

4、连续时间LTI系统的经典解法—— $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

5、LTI系统的响应分解—— $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

零状态响应对外部激励呈线性；
零输入响应对起始条件呈线性。

6、LTI系统的框图——框图模型

Thanks

课堂练习

例：已知 $x[n]=a^n u[n],\ \ 0<a<1,\ \ h[n]=u[n]$

求 $y[n]=x[n]*h[n]$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u[k]u[n-k]=\sum_{k=0}^{n}a^k u[n]$$

$$=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

若上例中的 $x[n]=2^n u[-n]$

求y[n]

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k u[-k]u[n-k]$$

当n<0

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^k=\sum_{l=-n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}=2^n\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m=2^{n+1}$$

当n>=0

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k=2$$

例: 已知一LTI系统的单位冲激响应为 $h(t)=e^{-at}\cdot u(t)$ 系统的输入信号为 $x(t)=e^{-bt}u(t)$, $a\neq b$. 求系统对输入信号的 响应输出 $y(t)$ 。

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b\tau}\cdot u(\tau)\cdot e^{-a(t-\tau)}\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-b\tau}\cdot e^{-a(t-\tau)}\cdot d\tau\cdot u(t)=\int_0^t e^{-at}\cdot e^{(a-b)\tau}\cdot d\tau\cdot u(t)$$

$$=e^{-at}\int_0^t e^{(a-b)\tau}\cdot d\tau\cdot u(t)=e^{-at}\left.\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b}\right|_{\tau=0}^{t}\cdot u(t)$$

$$=\left(\frac{1}{a-b}e^{-bt}-\frac{1}{a-b}e^{-at}\right)u(t)$$

讨论：线性常系数微分（差分）方程描述的系统是LTI系统吗？

给定常系数线性差分方程 $y(n)-ay(n-1)=x(n)$

试求（1）y(-1)=0时的单位脉冲响应

（2）y(0)=0时的单位脉冲响应

（3）y(0)=1时的单位脉冲响应

(1)给定 $x(n)=\delta(n), y(-1)=0$

$$n<0, \quad y(n-1)=\frac{y(n)-x(n)}{a}=0$$

$$n\geq 0, \quad y(0)=ay(-1)+x(0)=0+1=1$$

$$y(1)=ay(0)+x(1)=a+0=a$$

$$y(2)=ay(1)+x(2)=a\cdot a+0=a^2$$

$$\vdots$$

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)=a^n+0=a^n$$

故 $h(n)=y(n)=a^n u(n)$ 因果的。

（2）给定 $x(n)=\delta(n), y(0)=0$

$$n>0,\quad y(n)=ay(n-1)+x(n)=0$$

$$n<0,\quad y(n-1)=(y(n)-x(n))/a$$

$$y(-1)=(y(0)-x(0))/a=(0-1)/a=-a^{-1}$$

$$y(-2)=(y(-1)-x(-1))/a=(-a^{-1}-0)/a=-a^{-2}$$

$$\vdots$$

$$y(n)=y(n+1)/a=-a^{n}$$

故 $h(n)=y(n)=-a^{n}u(-n-1)$ 非因果的

（3）给定 $x(n)=\delta(n), y(0)=1,$

对于 $n>0, \quad y(1)=ay(0)+x(1)=a\cdot 1+0=a$

$$y(2)=ay(1)+x(2)=a\cdot a+0=a^2$$

$$\vdots$$

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)=a^n$$

同理，对于 $n\le -1, \quad y(n)=0$

所以 $y(n)=a^n u(n)$

若取 $x(n)=\delta(n-1), y(0)=1$

同样可递推求得 $y(n)=a^n u(-n-1)$

由上可知，该系统不是时不变的。

若给定 $x(n)=\delta(n)+\delta(n-1), y(0)=1$

递推求得 $y(n)=a^n u(n)+a^{n-1}u(n-1)$

则该系统是非线性的。