

Kap 5: Den Generelle Solowmodel (med tek. vækst)

Makro I

Casper Worm Hansen

Problemet med den basale Solowmodel

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).

Teknologisk vækst!

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).
- ▶ Årsag: aftagende marginalprodukt mht. kapital (+ n og δ).

Teknologisk vækst!

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).
- ▶ Årsag: aftagende marginalprodukt mht. kapital (+ n og δ).
- ▶ Er ingen vækst (på lang sigt) ét problem?

Teknologisk vækst!

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).
- ▶ Årsag: aftagende marginalprodukt mht. kapital (+ n og δ).
- ▶ Er ingen vækst (på lang sigt) ét problem?
- ▶ Stemmer dårligt overens med empiri for vestlige lande for de sidste 200 år.

Teknologisk vækst!

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).
- ▶ Årsag: aftagende marginalprodukt mht. kapital (+ n og δ).
- ▶ Er ingen vækst (på lang sigt) ét problem?
- ▶ Stemmer dårligt overens med empiri for vestlige lande for de sidste 200 år.
- ▶ Måske mangler modellen noget?

Teknologisk vækst!

Kap. 5 vs. kap. 3: Hvad er nyt?

- Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Kap. 5 vs. kap. 3: Hvad er nyt?

- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- ▶ 'B vokser over tid.' \Rightarrow mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Kap. 5 vs. kap. 3: Hvad er nyt?

- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- ▶ 'B vokser over tid.' \Rightarrow mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- ▶ Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Kap. 5 vs. kap. 3: Hvad er nyt?

- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- ▶ 'B vokser over tid.' \Rightarrow mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- ▶ Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.
- ▶ På lang sigt (dvs. i 'SS', hvor vækstraterne i øk. er konstante, dvs. SS vækstbanen):

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Kap. 5 vs. kap. 3: Hvad er nyt?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- ▶ 'B vokser over tid.' \Rightarrow mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- ▶ Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.
- ▶ På lang sigt (dvs. i 'SS', hvor vækstraterne i øk. er konstante, dvs. SS vækstbanen):
 - ▶ Vækst fra kapitalakkumulation = 0 \Rightarrow

Kap. 5 vs. kap. 3: Hvad er nyt?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- ▶ 'B vokser over tid.' \Rightarrow mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- ▶ Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.
- ▶ På lang sigt (dvs. i 'SS', hvor vækstraterne i øk. er konstante, dvs. SS vækstbanen):
 - ▶ Vækst fra kapitalakkumulation = 0 \Rightarrow
 - ▶ Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst.

Kap. 5 vs. kap. 3: Hvad er nyt?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- ▶ 'B vokser over tid.' \Rightarrow mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- ▶ Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.
- ▶ På lang sigt (dvs. i 'SS', hvor vækstraterne i øk. er konstante, dvs. SS vækstbanen):
 - ▶ Vækst fra kapitalakkumulation = 0 \Rightarrow
 - ▶ Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst.
 - ▶ Vækst i BNP?



Hvad er teknologisk vækst?

- Teknologi: "Opskrifter"/"blue prints" til at kombinere inputs.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Hvad er teknologisk vækst?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Teknologi: "Opskrifter"/"blue prints" til at kombinere inputs.
- ▶ Teknologisk vækst: nye, forbedrede opskrifter, så samme inputs giver mere output.

Hvad er teknologisk vækst?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Teknologi: "Opskrifter"/"blue prints" til at kombinere inputs.
- ▶ Teknologisk vækst: nye, forbedrede opskrifter, så samme inputs giver mere output.
- ▶ Eksempler: J. Watt (dampmaskine), T. Edison (elektriske glødelampe), H. Ford (samlebåndsarbejdet), osv. osv.

Teknologisk vækst i modellen

- ▶ Udskift B med $A_t^{1-\alpha}$.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Teknologisk vækst i modellen

- ▶ Udskift B med $A_t^{1-\alpha}$.
- ▶ A_t vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t, A_0 \text{ givet}$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Teknologisk vækst i modellen

- ▶ Udskift B med $A_t^{1-\alpha}$.
- ▶ A_t vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t, A_0 \text{ givet}$$

- ▶ Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.

Teknologisk vækst i modellen

- ▶ Udskift B med $A_t^{1-\alpha}$.
- ▶ A_t vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t, A_0 \text{ givet}$$

- ▶ Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter $g = 0$ og $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow$ kap. 5 \Rightarrow kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Udskift B med $A_t^{1-\alpha}$.
- ▶ A_t vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t, A_0 \text{ givet}$$

- ▶ Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter $g = 0$ og $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow$ kap. 5 \Rightarrow kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).
- ▶ Basal Solow er altså ét specialtilfælde af Generel Solow.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Teknologisk vækst i modellen

- ▶ Udskift B med $A_t^{1-\alpha}$.
- ▶ A_t vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t, A_0 \text{ givet}$$

- ▶ Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter $g = 0$ og $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow$ kap. 5 \Rightarrow kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).
- ▶ Basal Solow er altså ét specialtilfælde af Generel Solow.
 - ▶ Resultater og intuition i kap. 5 minder om kap. 3.

- ▶ Udskift B med $A_t^{1-\alpha}$.
- ▶ A_t vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t, A_0 \text{ givet}$$

- ▶ Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter $g = 0$ og $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow$ kap. 5 \Rightarrow kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).
- ▶ Basal Solow er altså ét specialtilfælde af Generel Solow.
 - ▶ Resultater og intuition i kap. 5 minder om kap. 3.
 - ▶ Fx: hvorfor er dér (betinget) konvergens i den generelle Solowmodel?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Udskift B med $A_t^{1-\alpha}$.
- ▶ A_t vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t, A_0 \text{ givet}$$

- ▶ Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter $g = 0$ og $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow$ kap. 5 \Rightarrow kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).
- ▶ Basal Solow er altså ét specialtilfælde af Generel Solow.
 - ▶ Resultater og intuition i kap. 5 minder om kap. 3.
 - ▶ Fx: hvorfor er dér (betinget) konvergens i den generelle Solowmodel?
 - ▶ Svar - ligesom i kap. 3 - aftagende marginal produkt mht. kapital. $> <$ nedslidning/udtynding

Formen af teknologisk vækst

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt $\Rightarrow A_t$ indgår i parentes med L_t ; dvs. $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Formen af teknologisk vækst

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt $\Rightarrow A_t$ indgår i parentes med L_t ; dvs. $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.
- ▶ Alternative former for tek. fremskridt:

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt $\Rightarrow A_t$ indgår i parentes med L_t ; dvs. $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.
- ▶ Alternative former for tek. fremskridt:
 1. **Hicks-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt $\Rightarrow A_t$ indgår i parentes med L_t ; dvs. $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.
- ▶ Alternative former for tek. fremskridt:
 1. **Hicks-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
 2. **Solow-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt $\Rightarrow A_t$ indgår i parentes med L_t ; dvs. $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.
- ▶ Alternative former for tek. fremskridt:
 1. **Hicks-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
 2. **Solow-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$
- ▶ Hvorfor anvender vi generelt Harrod-neutral tek. fremskridt? Svar: pga. balanceret vækst.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt $\Rightarrow A_t$ indgår i parentes med L_t ; dvs. $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.
- ▶ Alternative former for tek. fremskridt:
 1. **Hicks-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
 2. **Solow-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$
- ▶ Hvorfor anvender vi generelt Harrod-neutral tek. fremskridt? Svar: pga. balanceret vækst.
 - ▶ Én undtagelse: med Cobb-Douglas produktionsfunktionen er formen af tek. vækst uden betydning. Hvorfor?

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt $\Rightarrow A_t$ indgår i parentes med L_t ; dvs. $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$.
- ▶ Alternative former for tek. fremskridt:
 1. **Hicks-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
 2. **Solow-neutral** tek. fremskridt: $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$
- ▶ Hvorfor anvender vi generelt Harrod-neutral tek. fremskridt? Svar: pga. balanceret vækst.
 - ▶ Én undtagelse: med Cobb-Douglas produktionsfunktionen er formen af tek. vækst uden betydning. Hvorfor?
 - ▶ Formen af tek. vækst har altså betydning, når substitutionselasticiteten ml. kapital og arbejdskraft er forskellig fra 1

Solowmodel med (harrod-neutral) tek. vækst

Introduktion

Model

Modellens ligninger

Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable

Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden

Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK

Konklusion

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$K_{t+1} = S_t + (1 - \delta)K_t, \quad 0 < \delta < 1, \quad K_0 \text{ givet}$$

$$S_t = sY_t, \quad 0 < s < 1$$

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t, \quad L_0 \text{ givet}$$

$$A_{t+1} = (1 + g)A_t, \quad A_0 \text{ givet}$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger

Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable

Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden

Konvergensligningen

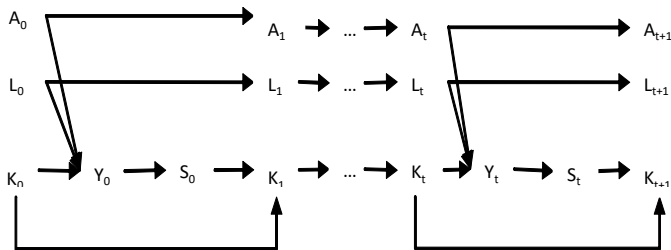
Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK

Konklusion



Fremgangsmåden

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Fremgangsmåden

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.
- ▶ Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.
- ▶ Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ▶ Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder $= sk_t^\alpha A_t^{1-\alpha}$, og A_t er konstant voksende.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.
- ▶ Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ▶ Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder $= sk_t^\alpha A_t^{1-\alpha}$, og A_t er konstant voksende.
 - ▶ \Rightarrow i pr. arbejder termener flytter opsparingskurven sig hele tiden opad \Rightarrow ingen SS!

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.
- ▶ Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ▶ Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder $= sk_t^\alpha A_t^{1-\alpha}$, og A_t er konstant voksende.
 - ▶ \Rightarrow i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad \Rightarrow ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variabler:

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.
- ▶ Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ▶ Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder $= sk_t^\alpha A_t^{1-\alpha}$, og A_t er konstant voksende.
 - ▶ \Rightarrow i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad \Rightarrow ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variable:

- ▶ $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$: Kapital pr. effektiv arbejder.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.
- ▶ Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ▶ Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder $= sk_t^\alpha A_t^{1-\alpha}$, og A_t er konstant voksende.
 - ▶ \Rightarrow i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad \Rightarrow ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variabler:
 - ▶ $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$: Kapital pr. effektiv arbejder.
 - ▶ $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$: BNP pr. effektiv arbejder.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.
- ▶ Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ▶ Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder $= sk_t^\alpha A_t^{1-\alpha}$, og A_t er konstant voksende.
 - ▶ \Rightarrow i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad \Rightarrow ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variable:
 - ▶ $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$: Kapital pr. effektiv arbejder.
 - ▶ $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$: BNP pr. effektiv arbejder.
- ▶ Hvorfor?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i k_t og $y_t \Rightarrow k^*$ og y^* konstante i SS.
- ▶ Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ▶ Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder $= sk_t^\alpha A_t^{1-\alpha}$, og A_t er konstant voksende.
 - ▶ \Rightarrow i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad \Rightarrow ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variabler:
 - ▶ $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$: Kapital pr. effektiv arbejder.
 - ▶ $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$: BNP pr. effektiv arbejder.
- ▶ Hvorfor?
- ▶ Det viser sig, at tilde-variabler er konstante i SS.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable

Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK

Konklusion

► Altså $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} = \frac{k_t}{A_t}$ og $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{y_t}{A_t}$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Altså $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} = \frac{k_t}{A_t}$ og $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{y_t}{A_t}$
- ▶ Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Altså $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} = \frac{k_t}{A_t}$ og $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{y_t}{A_t}$
- ▶ Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.
- ▶ Hvad er tolkningen af tilde-variable?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergenshastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Altså $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} = \frac{k_t}{A_t}$ og $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{y_t}{A_t}$
- ▶ Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.
- ▶ Hvad er tolkningen af tilde-variable?
- ▶ Hmm, svært at svare på - de giver i hvert fald ingen mening i virkelighedens verden!

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Altså $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} = \frac{k_t}{A_t}$ og $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{y_t}{A_t}$
- ▶ Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.
- ▶ Hvad er tolkningen af tilde-variable?
- ▶ Hmm, svært at svare på - de giver i hvert fald ingen mening i virkelighedens verden!
- ▶ Her er vi interesserede i $y_t = A_t \tilde{y}_t$.

- ▶ Altså $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t} = \frac{k_t}{A_t}$ og $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{y_t}{A_t}$
- ▶ Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.
- ▶ Hvad er tolkningen af tilde-variable?
- ▶ Hmm, svært at svare på - de giver i hvert fald ingen mening i virkelighedens verden!
- ▶ Her er vi interesserede i $y_t = A_t \tilde{y}_t$.
- ▶ \tilde{y}_t og \tilde{k}_t bruger vi kun fordi det er hensigtsmæssigt, når vi skal løse modellen (de ender med at blive konstante \Rightarrow SS)

Transitionsligningen - udledning:

1. Divider derfor først kapitalakk med $A_{t+1}L_{t+1}$:

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{S_t + (1 - \delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

Transitionsligningen - udledning:

1. Divider derfor først kapitalakk med $A_{t+1}L_{t+1}$:

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{S_t + (1 - \delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

2. Indsæt $L_{t+1} = (1 + n) L_t$, $A_{t+1} = (1 + n) A_t$ og $S_t = sY_t$:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{t+1} &= \frac{sY_t + (1 - \delta)K_t}{L_t (1 + n) A_t (1 + g)} \\ &= \frac{1}{(1 + n) (1 + g)} (s\tilde{y}_t + (1 - \delta) \tilde{k}_t) .\end{aligned}$$

Transitionsligningen - udledning:

1. Divider derfor først kapitalakk med $A_{t+1}L_{t+1}$:

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{S_t + (1 - \delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

2. Indsæt $L_{t+1} = (1 + n)L_t$, $A_{t+1} = (1 + n)A_t$ og $S_t = sY_t$:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{t+1} &= \frac{sY_t + (1 - \delta)K_t}{L_t(1 + n)A_t(1 + g)} \\ &= \frac{1}{(1 + n)(1 + g)} (s\tilde{y}_t + (1 - \delta)\tilde{k}_t) .\end{aligned}$$

3. Indsæt tilde-prod.fkt., $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1 + n)(1 + g)} (s\tilde{k}_t^\alpha + (1 - \delta)\tilde{k}_t) .$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Transitionsligningen - udledning:

1. Divider derfor først kapitalakk med $A_{t+1}L_{t+1}$:

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{S_t + (1 - \delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

2. Indsæt $L_{t+1} = (1 + n)L_t$, $A_{t+1} = (1 + n)A_t$ og $S_t = sY_t$:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{t+1} &= \frac{sY_t + (1 - \delta)K_t}{L_t(1 + n)A_t(1 + g)} \\ &= \frac{1}{(1 + n)(1 + g)} (s\tilde{y}_t + (1 - \delta)\tilde{k}_t) .\end{aligned}$$

3. Indsæt tilde-prod.fkt., $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1 + n)(1 + g)} (s\tilde{k}_t^\alpha + (1 - \delta)\tilde{k}_t) .$$

- Dette er en ikke-lineær differensligning i \tilde{k}_t .

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

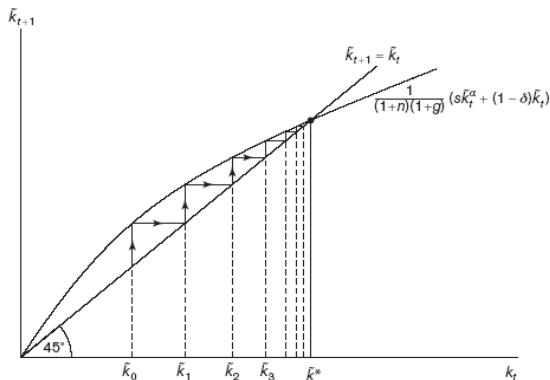
Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Transitionsligningen - diagram:



Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable

Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK

Konklusion

- Find Solowligningen ved at trække \tilde{k}_t fra transitionsligningen på begge sider:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[s\tilde{k}_t^\alpha - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t \right].$$

- Find Solowligningen ved at trække \tilde{k}_t fra transitionsligningen på begge sider:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)} [s\tilde{k}_t^\alpha - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t].$$

- Find den modificerede Solowligning ved at divider Solowligningen med \tilde{k}_t :

$$\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} [s\tilde{k}_t^{\alpha-1} - (n+g+\delta+ng)].$$

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Tilde-variable
Transitionslingen

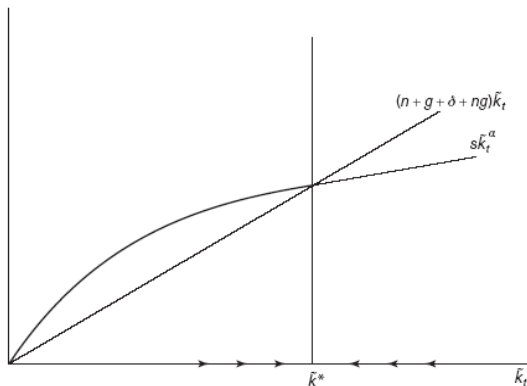
SS-ligningen: OLS

- Linearisering
- Konvergensthastigheden
- Konvergenstningen

Vækstregnskab

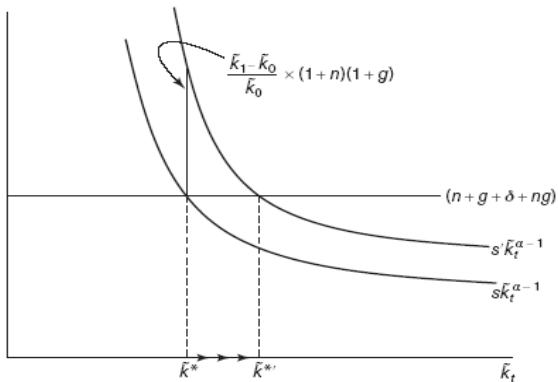
- Idé
- Vækstregnskab
- Vækstregnskab - DK
- Konklusion

- ▶ Transition mod SS i Solowdiagrammet.



Det modificerede Solowdiagram

- Stigning i opsparingsraten i periode $t = 0$:



Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady State i pr. effektiv arbejder (tilde-variable)

- Sæt $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$ i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Steady State i pr. effektiv arbejder (tilde-variable)

- Sæt $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$ i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Indsæt i $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$:

$$\tilde{y}^* = (\tilde{k}^*)^\alpha = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Steady State i pr. effektiv arbejder (tilde-variable)

- ▶ Sæt $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$ i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- ▶ Indsæt i $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$:

$$\tilde{y}^* = (\tilde{k}^*)^\alpha = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- ▶ Politik der øger \tilde{k}^* og \tilde{y}^* :

Steady State i pr. effektiv arbejder (tilde-variable)

- ▶ Sæt $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$ i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- ▶ Indsæt i $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$:

$$\tilde{y}^* = (\tilde{k}^*)^\alpha = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- ▶ Politik der øger \tilde{k}^* og \tilde{y}^* :
 - ▶ højere s , lavere n , lavere δ ,

Steady State i pr. effektiv arbejder (tilde-variable)

- ▶ Sæt $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$ i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- ▶ Indsæt i $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$:

$$\tilde{y}^* = (\tilde{k}^*)^\alpha = \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- ▶ Politik der øger \tilde{k}^* og \tilde{y}^* :
 - ▶ højere s , lavere n , lavere δ ,
 - ▶ lavere g ???.

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

- Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i $y_t = A_t \tilde{y}_t$ (kommer fra def. $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$)

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i $y_t = A_t \tilde{y}_t$ (kommer fra def. $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$)
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i $y_t = A_t \tilde{y}_t$ (kommer fra def. $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$)
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$
 - ▶ tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i $y_t = A_t \tilde{y}_t$ (kommer fra def. $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$)
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$
 - ▶ tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder
- ▶ **5-min-øvelse:**

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i $y_t = A_t \tilde{y}_t$ (kommer fra def. $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$)
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$
 - ▶ tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder
- ▶ **5-min-øvelse:**
 1. Beskriv - vha. Matma. - hvordan y_t^* udvikler sig over tid i SS. [hint: løs $A_{t+1} = (1 + g)A_t$]

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i $y_t = A_t \tilde{y}_t$ (kommer fra def. $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$)
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$
 - ▶ tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder
- ▶ **5-min-øvelse:**
 1. Beskriv - vha. Matma. - hvordan y_t^* udvikler sig over tid i SS. [hint: løs $A_{t+1} = (1 + g)A_t$]
 2. Hvordan påvirker én stigning i g SS vækstbanen for BNP/arbejder?

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i $y_t = A_t \tilde{y}_t$ (kommer fra def. $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$)
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$
 - ▶ tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder
- ▶ **5-min-øvelse:**
 1. Beskriv - vha. Matma. - hvordan y_t^* udvikler sig over tid i SS. [hint: løs $A_{t+1} = (1+g)A_t$]
 2. Hvordan påvirker én stigning i g SS vækstbanen for BNP/arbejder?
 3. Hvordan påvirker én stigning i s SS vækstbanen for BNP/arbejder?

Steady-State "vækstbanen": BNP/arbejder

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at \tilde{y}_t er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i $y_t = A_t \tilde{y}_t$ (kommer fra def. $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$)
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$
 - ▶ tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder
- ▶ **5-min-øvelse:**
 1. Beskriv - vha. Matma. - hvordan y_t^* udvikler sig over tid i SS. [hint: løs $A_{t+1} = (1 + g)A_t$]
 2. Hvordan påvirker én stigning i g SS vækstbanen for BNP/arbejder?
 3. Hvordan påvirker én stigning i s SS vækstbanen for BNP/arbejder?
 4. *Hvordan påvirker én stigning i s SS vækstbanen for forbrug/arbejder?*

Steady state - ligningen

- Ligningen for SS vækstbanen, y_t^* :

$$\ln y_t^* = \ln A_0 + \overbrace{t \ln(1+g)}^{\approx g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} (\ln s - \ln(n+g+\delta+ng)).$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady state - ligningen

- Ligningen for SS vækstbanen, y_t^* :

$$\ln y_t^* = \ln A_0 + \overbrace{t \ln(1+g)}^{\approx g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} (\ln s - \ln(n+g+\delta+ng)).$$

- Antag: alle lande i SS. i 2003, $g + \delta + ng = 0,075$, samme A_t (dvs, A_0 , g , t) for alle lande \Rightarrow

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady state - ligningen

- Ligningen for SS vækstbanen, y_t^* :

$$\ln y_t^* = \ln A_0 + \overbrace{t \ln(1+g)}^{\approx g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} (\ln s - \ln(n+g+\delta+ng)).$$

- Antag: alle lande i SS. i 2003, $g + \delta + ng = 0,075$, samme A_t (dvs, A_0 , g , t) for alle lande \Rightarrow
 - Eller antag $A_{i,0} \Rightarrow$ indgår i fejldet (ζ_i), men hvis $A_{i,0}$ ikke er korreleret med højreside-variable, ikke noget problem! Realistisk?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady state - ligningen

- Ligningen for SS vækstbanen, y_t^* :

$$\ln y_t^* = \ln A_0 + \overbrace{t \ln(1+g)}^{\approx g} + \frac{\alpha}{1-\alpha} (\ln s - \ln(n+g+\delta+ng)).$$

- Antag: alle lande i SS. i 2003, $g + \delta + ng = 0,075$, samme A_t (dvs, A_0 , g , t) for alle lande \Rightarrow
 - Eller antag $A_{i,0} \Rightarrow$ indgår i fejlded (ζ_i), men hvis $A_{i,0}$ ikke er korreleret med højreside-variable, ikke noget problem! Realistisk?
- Regressionsligning:

$$\ln y_{i,03} = \gamma_0 + \gamma_1 (\ln s_i - \ln(n_i + 0,075)) + \zeta_i.$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Steady state - ligningen

- Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen? $\hat{\gamma}_1 = 1,51$ (dvs. $\hat{\alpha} = 0,6$), $SF = 0,14$.

Steady state - ligningen

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen? $\hat{\gamma}_1 = 1,51$ (dvs. $\hat{\alpha} = 0,6$), $SF = 0,14$.
- ▶ Modelforudsigelse: $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,5$, hvis $\alpha = 1/3$.

Steady state - ligningen

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen? $\hat{\gamma}_1 = 1,51$ (dvs. $\hat{\alpha} = 0,6$), $SF = 0,14$.
- ▶ Modelforudsigelse: $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,5$, hvis $\alpha = 1/3$.
- ▶ Kondfidensinterval: $\hat{\gamma}_1 \pm 1,96 \times SF = [1,24; 1,80] \Rightarrow$ (empiriske) estimat er signifikant forskellig fra modelforudsigelse.

Steady state - ligningen

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen? $\hat{\gamma}_1 = 1,51$ (dvs. $\hat{\alpha} = 0,6$), $SF = 0,14$.
- ▶ Modelforudsigelse: $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,5$, hvis $\alpha = 1/3$.
- ▶ Kondfidensinterval: $\hat{\gamma}_1 \pm 1,96 \times SF = [1,24; 1,80] \Rightarrow$ (empiriske) estimat er signifikant forskellig fra modelforudsigelse.
- ▶ Problem med empiri eller model?

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen? $\hat{\gamma}_1 = 1,51$ (dvs. $\hat{\alpha} = 0,6$), $SF = 0,14$.
- ▶ Modelforudsigelse: $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,5$, hvis $\alpha = 1/3$.
- ▶ Kondfidensinterval: $\hat{\gamma}_1 \pm 1,96 \times SF = [1,24; 1,80] \Rightarrow$ (empiriske) estimat er signifikant forskellig fra modelforudsigelse.
- ▶ Problem med empiri eller model?
 - ▶ *Empiri*: korrelation er ikke kausalitet. Hvis y påvirker s og n , så vil det øge $\hat{\gamma}_1$ 'kunstigt' (omvendt kausalitetsproblem).

Steady state - ligningen

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen? $\hat{\gamma}_1 = 1,51$ (dvs. $\hat{\alpha} = 0,6$), $SF = 0,14$.
- ▶ Modelforudsigelse: $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,5$, hvis $\alpha = 1/3$.
- ▶ Kondfidensinterval: $\hat{\gamma}_1 \pm 1,96 \times SF = [1,24; 1,80] \Rightarrow$ (empiriske) estimat er signifikant forskellig fra modelforudsigelse.
- ▶ Problem med empiri eller model?
 - ▶ *Empiri*: korrelation er ikke kausalitet. Hvis y påvirker s og n , så vil det øge $\hat{\gamma}_1$ 'kunstigt' (omvendt kausalitetsproblem).
 - ▶ *Model*: Måske skal der flere variable ind i modellen \Rightarrow fx kap. 6 udvides modellen med human kapital.

Hvorfor teste modellen udenfor SS

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ SS regression: hvad nu hvis landene ikke er i SS?

Hvorfor teste modellen udenfor SS

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergenshastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ SS regression: hvad nu hvis landene ikke er i SS?
- ▶ Empirisk konvergenshastighed vs. teoretisk?

Hvorfor teste modellen udenfor SS

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ SS regression: hvad nu hvis landene ikke er i SS?
- ▶ Empirisk konvergensthastighed vs. teoretisk?
- ▶ Svar: konvergensligningen, analytisk løsning (=approx) for væksten udenfor SS.

Linearisering - hvorfor?

- ▶ Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS?
Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} (s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t) .$$

Linearisering - hvorfor?

- ▶ Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS?
Transitions ligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} (s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t).$$

- ▶ Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.

Linearisering - hvorfor?

- ▶ Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS?
Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} (s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t).$$

- ▶ Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.
- ▶ Én løsning på problemet er $\delta = 1 \Rightarrow$

$$\ln \tilde{k}_{t+1} = \ln s - \ln [(1+n)(1+g)] + \alpha \ln \tilde{k}_t,$$

Linearisering - hvorfor?

- ▶ Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS?
Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} (s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t).$$

- ▶ Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.
- ▶ Én løsning på problemet er $\delta = 1 \Rightarrow$

$$\ln \tilde{k}_{t+1} = \ln s - \ln [(1+n)(1+g)] + \alpha \ln \tilde{k}_t,$$

- ▶ Dvs. hvis $\delta = 1$ er transitionsligningen log lineær.

Linearisering - hvorfor?

- ▶ Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS?
Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} (s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t).$$

- ▶ Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.
- ▶ Én løsning på problemet er $\delta = 1 \Rightarrow$

$$\ln \tilde{k}_{t+1} = \ln s - \ln [(1+n)(1+g)] + \alpha \ln \tilde{k}_t,$$

- ▶ Dvs. hvis $\delta = 1$ er transitionsligningen log lineær.
- ▶ Det kan omskrives til (vha. produktionsfunktionen):

$$\ln \tilde{y}_{t+1} = \alpha [\ln s - \ln (1+n)(1+g)] + \alpha \ln \tilde{y}_t,$$

Linearisering - hvorfor?

- ▶ Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS?
Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} (s\tilde{k}_t^\alpha + (1-\delta)\tilde{k}_t).$$

- ▶ Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.
- ▶ Én løsning på problemet er $\delta = 1 \Rightarrow$

$$\ln \tilde{k}_{t+1} = \ln s - \ln [(1+n)(1+g)] + \alpha \ln \tilde{k}_t,$$

- ▶ Dvs. hvis $\delta = 1$ er transitionsligningen log lineær.
- ▶ Det kan omskrives til (vha. produktionsfunktionen):

$$\ln \tilde{y}_{t+1} = \alpha [\ln s - \ln (1+n)(1+g)] + \alpha \ln \tilde{y}_t,$$

- ▶ Hvis vi løser denne får vi: (se næste slide).

Linearisering - hvorfor?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- (forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left(\tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

hvor $\Gamma = \alpha [\ln s - \ln (1 + n) (1 + g)]$.

Linearisering - hvorfor?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- (forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left(\tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

hvor $\Gamma = \alpha [\ln s - \ln (1 + n) (1 + g)]$.

- Hvad er $\frac{\Gamma}{1 - \alpha} = ?$

Linearisering - hvorfor?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ (forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left(\tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

hvor $\Gamma = \alpha [\ln s - \ln (1 + n) (1 + g)]$.

- ▶ Hvad er $\frac{\Gamma}{1 - \alpha} = ?$
- ▶ Problem? $\delta = 1$ virker lidt urealistisk, hvis én periode er lig med 1 år.

Linearisering - hvorfor?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ (forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left(\tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

hvor $\Gamma = \alpha [\ln s - \ln (1 + n) (1 + g)]$.

- ▶ Hvad er $\frac{\Gamma}{1 - \alpha} = ?$
- ▶ Problem? $\delta = 1$ virker lidt urealistisk, hvis én periode er lig med 1 år.
 - ▶ Løsning 1: antag én periode er lig med 50 år (eller mere) \Rightarrow besværlig fortolkning.

Linearisering - hvorfor?

- ▶ (forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left(\tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

hvor $\Gamma = \alpha [\ln s - \ln (1 + n) (1 + g)]$.

- ▶ Hvad er $\frac{\Gamma}{1 - \alpha} = ?$
- ▶ Problem? $\delta = 1$ virker lidt urealistisk, hvis én periode er lig med 1 år.
 - ▶ Løsning 1: antag én periode er lig med 50 år (eller mere) \Rightarrow besværlig fortolkning.
 - ▶ Lad os prøve med løsning 2 \Rightarrow

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Linearisering - hvorfor?

- ▶ (forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left(\tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

hvor $\Gamma = \alpha [\ln s - \ln (1 + n) (1 + g)]$.

- ▶ Hvad er $\frac{\Gamma}{1 - \alpha} = ?$
- ▶ Problem? $\delta = 1$ virker lidt urealistisk, hvis én periode er lig med 1 år.
 - ▶ Løsning 1: antag én periode er lig med 50 år (eller mere) \Rightarrow besværlig fortolkning.
 - ▶ Lad os prøve med løsning 2 \Rightarrow
 - ▶ Løsning 2: lineariser transitionslign., så behøver vi ikke antage $\delta = 1$ for at løse differensligningen.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Matma'en i linearisering - illustration 1

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

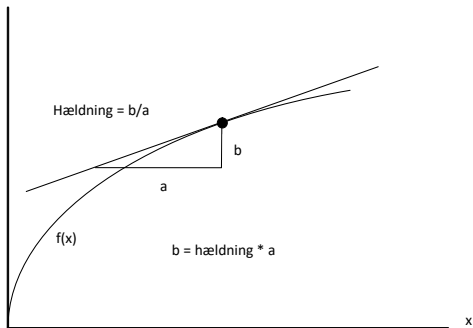
Vækstregnskab

Idé

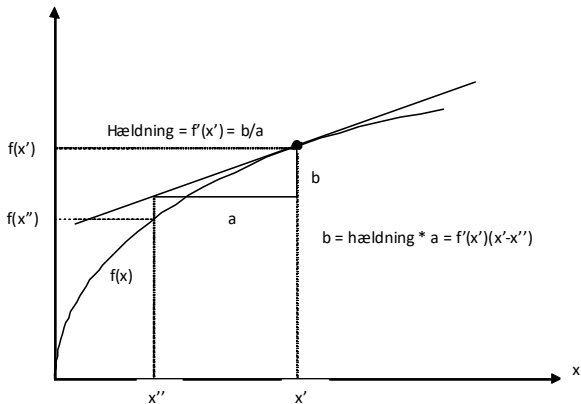
Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK

Konklusion



Matma'en i linearisering - illustration 2



Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- Vi bruger følgende approksimation:

$$\begin{aligned}f(x') - f(x'') &\approx b = f'(x') (x' - x'') \Leftrightarrow \\f(x'') - f(x') &\approx b = f'(x') (x'' - x') .\end{aligned}$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Vi bruger følgende approksimation:

$$\begin{aligned}f(x') - f(x'') &\approx b = f'(x') (x' - x'') \Leftrightarrow \\f(x'') - f(x') &\approx b = f'(x') (x'' - x') .\end{aligned}$$

- ▶ Lidt anden notation: $x' = x^*$ og $f(x) = y \Rightarrow$

$$y - y^* \approx f'(x^*) (x - x^*) .$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Vi bruger følgende approksimation:

$$\begin{aligned}f(x') - f(x'') &\approx b = f'(x') (x' - x'') \Leftrightarrow \\f(x'') - f(x') &\approx b = f'(x') (x'' - x') .\end{aligned}$$

- ▶ Lidt anden notation: $x' = x^*$ og $f(x) = y \Rightarrow$

$$y - y^* \approx f'(x^*) (x - x^*) .$$

- ▶ Vi siger at vi har "lineariseret $f(x)$ omkring x^* ."

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Vi bruger følgende approksimation:

$$\begin{aligned}f(x') - f(x'') &\approx b = f'(x') (x' - x'') \Leftrightarrow \\f(x'') - f(x') &\approx b = f'(x') (x'' - x') .\end{aligned}$$

- ▶ Lidt anden notation: $x' = x^*$ og $f(x) = y \Rightarrow$

$$y - y^* \approx f'(x^*) (x - x^*) .$$

- ▶ Vi siger at vi har "lineariseret $f(x)$ omkring x^* .
- ▶ Det var matma'en. Nu bogens notation:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* \approx G'(\tilde{k}^*) (\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) ,$$

hvor $\tilde{k}_{t+1} \equiv G(\tilde{k}_t)$ er transitionsligningen.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Linearisering - trin 1

- Lineariser $G(\tilde{k}_t)$ omkring \tilde{k}^* :

$$\begin{aligned}G(\tilde{k}_t) - G(\tilde{k}^*) &= G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* &= G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*)\end{aligned}$$

Linearisering - trin 1

- ▶ Linearisér $G(\tilde{k}_t)$ omkring \tilde{k}^* :

$$\begin{aligned}G(\tilde{k}_t) - G(\tilde{k}^*) &= G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* &= G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*)\end{aligned}$$

- ▶ Dette er en lineær differensligning i \tilde{k}_t , hvor vi kunne løse for \tilde{k}_t .

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK
Konklusion

Linearisering - trin 1

- ▶ Linearisér $G(\tilde{k}_t)$ omkring \tilde{k}^* :

$$\begin{aligned}G(\tilde{k}_t) - G(\tilde{k}^*) &= G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* &= G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*)\end{aligned}$$

- ▶ Dette er en lineær differensligning i \tilde{k}_t , hvor vi kunne løse for \tilde{k}_t .
 - ▶ hvor

$$G'(\tilde{k}_t) = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[\alpha s (\tilde{k}_t)^{\alpha-1} + (1-\delta) \right],$$

som i SS, hvor $\tilde{k} = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ er:

$$G'(\tilde{k}) = \frac{1}{(1+n)(1+g)} [\alpha(n+g+\delta+ng) + (1-\delta)],$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Linearisering - trin 1

- ▶ Linearisér $G(\tilde{k}_t)$ omkring \tilde{k}^* :

$$\begin{aligned}G(\tilde{k}_t) - G(\tilde{k}^*) &= G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* &= G'(\tilde{k}^*)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*)\end{aligned}$$

- ▶ Dette er en lineær differensligning i \tilde{k}_t , hvor vi kunne løse for \tilde{k}_t .
 - ▶ hvor

$$G'(\tilde{k}_t) = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[\alpha s (\tilde{k}_t)^{\alpha-1} + (1-\delta) \right],$$

som i SS, hvor $\tilde{k} = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ er:

$$G'(\tilde{k}) = \frac{1}{(1+n)(1+g)} [\alpha(n+g+\delta+ng) + (1-\delta)],$$

- ▶ Men vi er mere interesserede i logaritmer \approx vækstrater.
 \Rightarrow endnu en linearisering

Linearisering - trin 2

- Linearisér $H(\tilde{k}_t) = \ln k_t$ omkring \tilde{k}^*

$$\underbrace{\ln \tilde{k}_t}_{H(\tilde{k}_t)} - \underbrace{\ln \tilde{k}^*}_{H(\tilde{k}^*)} \approx H'(\tilde{k}^*) (\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) = \frac{1}{\tilde{k}^*} (\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \Leftrightarrow$$
$$\tilde{k}_t - \tilde{k}^* = \tilde{k}^* (\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*), \quad (*)$$

og så må det gælde at

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* = \tilde{k}^* (\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^*) \quad (**)$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Linearisering - trin 2

- Linearisér $H(\tilde{k}_t) = \ln k_t$ omkring \tilde{k}^*

$$\underbrace{\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*}_{H(\tilde{k}_t) - H(\tilde{k}^*)} \approx H'(\tilde{k}^*) (\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) = \frac{1}{\tilde{k}^*} (\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \Leftrightarrow$$
$$\tilde{k}_t - \tilde{k}^* = \tilde{k}^* (\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*), \quad (*)$$

og så må det gælde at

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* = \tilde{k}^* (\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^*) \quad (**)$$

- Indsæt nu - fx - (*) og (**) i den 'oprindelige' lineariseret transitionslign. \Rightarrow

$$\tilde{k}^* (\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^*) \approx G'(\tilde{k}^*) (\tilde{k}^* (\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*)) \Leftrightarrow$$
$$\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^* \approx G'(\tilde{k}^*) (\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*)$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Linearisering - trin 3

- ▶ Vi vil gerne vide hvordan BNP/arbejder udvikler sig

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Linearisering - trin 3

- ▶ Vi vil gerne vide hvordan BNP/arbejder udvikler sig
- ▶ Brug derfor produktionsfunktion $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^\alpha$, der kan omskrives til $\ln \tilde{y}_t = \alpha \ln \tilde{k}_t \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_t = \ln \tilde{k}_t$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}^* &\approx G'(\tilde{k}^*) \left(\frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_t - \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}^* \right) \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}^* &\approx G'(\tilde{k}^*) (\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*)\end{aligned}$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion



$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) .$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden

Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK

Konklusion

Konvergensthastighed



$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) .$$

- Dvs. $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^*)$ måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden

Konvergenzligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK

Konklusion

Konvergensthastighed



$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) .$$

- ▶ Dvs. $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^*)$ måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ▶ Ved indsættelse fås:

$$G'(\tilde{k}^*) \Rightarrow \lambda \approx (1 - \alpha)(n + g + \delta) \approx 0,05$$



$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) .$$

- ▶ Dvs. $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^*)$ måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ▶ Ved indsættelse fås:

$$G'(\tilde{k}^*) \Rightarrow \lambda \approx (1 - \alpha)(n + g + \delta) \approx 0,05$$

- ▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergenzligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK
Konklusion



$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) .$$

- ▶ Dvs. $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^*)$ måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ▶ Ved indsættelse fås:

$$G'(\tilde{k}^*) \Rightarrow \lambda \approx (1 - \alpha)(n + g + \delta) \approx 0,05$$

- ▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.
- ▶ Større $\alpha \Rightarrow$ langsommere konvergens. Intuition?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering

Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé

Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK
Konklusion



$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) .$$

- ▶ Dvs. $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^*)$ måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ▶ Ved indsættelse fås:

$$G'(\tilde{k}^*) \Rightarrow \lambda \approx (1 - \alpha)(n + g + \delta) \approx 0,05$$

- ▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.
- ▶ Større $\alpha \Rightarrow$ langsommere konvergens. Intuition?
- ▶ Større $\alpha \Rightarrow$ kapital vigtigere \Rightarrow mindre tendens til aftagende marginal produkt mht. $k_t \Rightarrow$ langsommere konvergens.



$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) .$$

- ▶ Dvs. $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^*)$ måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ▶ Ved indsættelse fås:

$$G'(\tilde{k}^*) \Rightarrow \lambda \approx (1 - \alpha)(n + g + \delta) \approx 0,05$$

- ▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.
- ▶ Større $\alpha \Rightarrow$ langsommere konvergens. Intuition?
- ▶ Større $\alpha \Rightarrow$ kapital vigtigere \Rightarrow mindre tendens til aftagende marginal produkt mht. $k_t \Rightarrow$ langsommere konvergens.
- ▶ Grænsetilfældet hvor $\alpha = 1 \Rightarrow$ konstant marginal produkt $\lambda = 0$



$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) .$$

- ▶ Dvs. $\lambda = 1 - G'(\tilde{k}^*)$ måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ▶ Ved indsættelse fås:

$$G'(\tilde{k}^*) \Rightarrow \lambda \approx (1 - \alpha)(n + g + \delta) \approx 0,05$$



- ▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.
- ▶ Større $\alpha \Rightarrow$ langsommere konvergens. Intuition?
- ▶ Større $\alpha \Rightarrow$ kapital vigtigere \Rightarrow mindre tendens til aftagende marginal produkt mht. $k_t \Rightarrow$ langsommere konvergens.
- ▶ Grænsetilfældet hvor $\alpha = 1 \Rightarrow$ konstant marginal produkt $\lambda = 0$
- ▶ Med konvergensthastigheden λ , hvor mange år tager før dét indledende gap i BNP/arbejder, $\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t$, er halveret?

Udledning af konvergensligning - trin 4

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- Omskriv ovenstående ligning og indsæt $1 - G'(\tilde{k}^*) \equiv \lambda$:

$$\begin{aligned}\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t &\approx [1 - G'(\tilde{k}^*)] (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_{t+1} &= \lambda \ln \tilde{y}^* + (1 - \lambda) \ln \tilde{y}_t.\end{aligned}$$

Udledning af konvergensligning - trin 4

- Omskriv ovenstående ligning og indsæt $1 - G'(\tilde{k}^*) \equiv \lambda$:

$$\begin{aligned}\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t &\approx [1 - G'(\tilde{k}^*)] (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_{t+1} &= \lambda \ln \tilde{y}^* + (1 - \lambda) \ln \tilde{y}_t.\end{aligned}$$

- 1.-ordens lineær differensligning i $\ln \tilde{y}_t$. Løsning:
 $\ln \tilde{y}_t = f(t, \tilde{y}_0)$ der opfylder ovenstående ligning.

Løsningen af differenslignings - trin 4

- Fra noten om differensligninger ved vi, at én lineær 1. ordens diff ligning, $x_{t+1} = ax_t + b$, har følgende løsning:

$$x_t = a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Løsningen af differenslignings - trin 4

- Fra noten om differensligninger ved vi, at én lineær 1. ordens diff ligning, $x_{t+1} = ax_t + b$, har følgende løsning:

$$x_t = a^t(x_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

- Anvend denne løsningsformel:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{y}_t &= (1-\lambda)^t \left(\ln \tilde{y}_0 - \frac{\lambda \ln \tilde{y}^*}{1-(1-\lambda)} \right) + \\ &\frac{\lambda \ln \tilde{y}^*}{1-(1-\lambda)} \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_t &= \ln \tilde{y}^* + (1-\lambda)^t (\ln \tilde{y}_0 - \ln \tilde{y}^*) \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_t &= [1 - (1-\lambda)^t] \ln \tilde{y}^* + (1-\lambda)^t \ln \tilde{y}_0 \end{aligned}$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Konvergensligningen - trin 5

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- Nu: omskrive på ovenstående, så vi får en testbar ligning, der siger noget om vækstraten i y_t udenfor SS

- ▶ Nu: omskrive på ovenstående, så vi får en testbar ligning, der siger noget om vækstraten i y_t udenfor SS
- ▶ Indsæt et specifikt tidspunkt T (dvs. $t = T$):

$$\ln \tilde{y}_T = \left[1 - (1 - \lambda)^T\right] \ln \tilde{y}^* + (1 - \lambda)^T \ln \tilde{y}_0,$$

herefter træk $\ln \tilde{y}_0$ fra på begge sider:

$$\ln \tilde{y}_T - \ln \tilde{y}_0 = \left[1 - (1 - \lambda)^T\right] (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_0)$$

- ▶ Nu: omskrive på ovenstående, så vi får en testbar ligning, der siger noget om vækstraten i y_t udenfor SS
- ▶ Indsæt et specifikt tidspunkt T (dvs. $t = T$):

$$\ln \tilde{y}_T = \left[1 - (1 - \lambda)^T\right] \ln \tilde{y}^* + (1 - \lambda)^T \ln \tilde{y}_0,$$

herefter træk $\ln \tilde{y}_0$ fra på begge sider:

$$\ln \tilde{y}_T - \ln \tilde{y}_0 = \left[1 - (1 - \lambda)^T\right] (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_0)$$

- ▶ \Rightarrow næste slide

- Dividér med T , indsæt $\ln \tilde{y}_t = \ln y_t - \ln A_t$ for både $t = T$ og $t = 0$ og omarrangér
(dvs. $\ln \tilde{y}_T = \ln y_T - \ln A_T$ og $\ln \tilde{y}_0 = \ln y_0 - \ln A_0$):

$$\frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} = \frac{\overbrace{\ln A_T - \ln A_0}^{\approx g}}{T} + \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} (\ln A_0 + \ln \tilde{y}^* - \ln y_0).$$

Konvergenzligningen - intuition

- ▶ Konvergenzsigningen:

$$\frac{\overbrace{\ln y_T - \ln y_0}^{\text{gnst. vækst i } y}}{T} = \underbrace{\quad}_{\text{teknologisk vækst } g} + \underbrace{\quad}_{\text{vækst fra kapitalakkumulation} \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} (\ln A_0 + \ln \tilde{y}^* - \ln y_0)}.$$

- Nu skal vi bruge at

$$\ln \tilde{y}^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} [\ln s - \ln (n + g + \delta + ng)]:$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} = & \overbrace{g + \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} \ln A_0}^{\beta_0} \\ & - \overbrace{\frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} \ln y_0}^{\beta_1} + \\ & + \overbrace{\frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} \frac{\alpha}{1 - \alpha}}^{\beta_2} * \\ & [\ln s - \ln (n + g + \delta + ng)] \end{aligned}$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Konvergensligningen - test

- Dermed har vi følgende regressionsligning:

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Konvergensligningen - test

- ▶ Dermed har vi følgende regressionsligning:

- ▶
$$\frac{\ln y_{i,2003} - \ln y_{i,1960}}{43} = \beta_0 - \beta_1 \ln y_{i,1960} + \beta_2 [\ln s_i - \ln (n_i + 0,075)] + \varepsilon_i,$$

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Dermed har vi følgende regressionsligning:

- ▶
$$\frac{\ln y_{i,2003} - \ln y_{i,1960}}{43} = \beta_0 - \beta_1 \ln y_{i,1960} + \beta_2 [\ln s_i - \ln (n_i + 0,075)] + \varepsilon_i,$$

- ▶ Hvor $y_{T=43}$ er BNP/arbejder i 2003 og $y_{t=0}$ er BNP/arbejder i 1960.

- ▶ Dermed har vi følgende regressionsligning:

- ▶
$$\frac{\ln y_{i,2003} - \ln y_{i,1960}}{43} = \beta_0 - \beta_1 \ln y_{i,1960} + \beta_2 [\ln s_i - \ln (n_i + 0,075)] + \varepsilon_i,$$

- ▶ Hvor $y_{T=43}$ er BNP/arbejder i 2003 og $y_{t=0}$ er BNP/arbejder i 1960.
- ▶ Denne ligning kan vi bruge til at holde den generelle Solowmodel op i mod data.

- ▶ Dermed har vi følgende regressionsligning:

- ▶
$$\frac{\ln y_{i,2003} - \ln y_{i,1960}}{43} = \beta_0 - \beta_1 \ln y_{i,1960} + \beta_2 [\ln s_i - \ln (n_i + 0,075)] + \varepsilon_i,$$

- ▶ Hvor $y_{T=43}$ er BNP/arbejder i 2003 og $y_{t=0}$ er BNP/arbejder i 1960.
- ▶ Denne ligning kan vi bruge til at holde den generelle Solowmodel op i mod data.
- ▶ Bemærk vi gik hele den lange 'lineariseringsvej' for at få én linær ligning frem, fordi vi ellers ikke ville kunne teste modellen vha. OLS.

- ▶ Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater: $\hat{\beta}_1 = 0,006$, ($sf = 0,0015$). $\hat{\beta}_2 = 0,016$, ($sf = 0,0025$).

- ▶ Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater: $\hat{\beta}_1 = 0,006$, ($sf = 0,0015$). $\hat{\beta}_2 = 0,016$, ($sf = 0,0025$).
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv. β_1 og β_2 ?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergenshastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater: $\hat{\beta}_1 = 0,006$, ($sf = 0,0015$). $\hat{\beta}_2 = 0,016$, ($sf = 0,0025$).
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv. β_1 og β_2 ?

$$\beta_1 = \frac{1-(1-\lambda)^T}{T} = \frac{1-(1-0,05)^{43}}{43} = 0,021.$$

- ▶ Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater: $\hat{\beta}_1 = 0,006$, ($sf = 0,0015$). $\hat{\beta}_2 = 0,016$, ($sf = 0,0025$).
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv. β_1 og β_2 ?
 - ▶ $\beta_1 = \frac{1-(1-\lambda)^T}{T} = \frac{1-(1-0,05)^{43}}{43} = 0,021$.
 - ▶ $\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010$.

- ▶ Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater: $\hat{\beta}_1 = 0,006$, ($sf = 0,0015$). $\hat{\beta}_2 = 0,016$, ($sf = 0,0025$).
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv. β_1 og β_2 ?
 - ▶ $\beta_1 = \frac{1-(1-\lambda)^T}{T} = \frac{1-(1-0,05)^{43}}{43} = 0,021$.
 - ▶ $\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010$.
- ▶ Hvad er konfidensintervallerne hhv. for $\hat{\beta}_1$ og $\hat{\beta}_2$?

- ▶ Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater: $\hat{\beta}_1 = 0,006$, ($sf = 0,0015$). $\hat{\beta}_2 = 0,016$, ($sf = 0,0025$).
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv. β_1 og β_2 ?
 - ▶ $\beta_1 = \frac{1-(1-\lambda)^T}{T} = \frac{1-(1-0,05)^{43}}{43} = 0,021$.
 - ▶ $\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010$.
- ▶ Hvad er konfidensintervallerne hhv. for $\hat{\beta}_1$ og $\hat{\beta}_2$?
 - ▶ 95% KI $\hat{\beta}_1 \pm 2 * sf = [0,003; 0,009]$

- ▶ Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater: $\hat{\beta}_1 = 0,006$, ($sf = 0,0015$). $\hat{\beta}_2 = 0,016$, ($sf = 0,0025$).
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv. β_1 og β_2 ?
 - ▶ $\beta_1 = \frac{1-(1-\lambda)^T}{T} = \frac{1-(1-0,05)^{43}}{43} = 0,021$.
 - ▶ $\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010$.
- ▶ Hvad er konfidensintervallerne hhv. for $\hat{\beta}_1$ og $\hat{\beta}_2$?
 - ▶ 95% KI $\hat{\beta}_1 \pm 2 * sf = [0,003; 0,009]$
 - ▶ 95% KI $\hat{\beta}_2 \pm 2 * sf = [0,011; 0,021]$

- ▶ Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater: $\hat{\beta}_1 = 0,006$, ($sf = 0,0015$). $\hat{\beta}_2 = 0,016$, ($sf = 0,0025$).
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv. β_1 og β_2 ?
 - ▶ $\beta_1 = \frac{1-(1-\lambda)^T}{T} = \frac{1-(1-0,05)^{43}}{43} = 0,021$.
 - ▶ $\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010$.
- ▶ Hvad er konfidensintervallerne hhv. for $\hat{\beta}_1$ og $\hat{\beta}_2$?
 - ▶ 95% KI $\hat{\beta}_1 \pm 2 * sf = [0,003; 0,009]$
 - ▶ 95% KI $\hat{\beta}_2 \pm 2 * sf = [0,011; 0,021]$
- ▶ Hvad er konklusionen?

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af
modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i
SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen
udenfor SS

Linearisering
Konvergenshastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- Teoretisk β_1 for stor ift. empirisk estimat, $\hat{\beta}_1 \Rightarrow$ teoretisk konvergenshastighed for høj ift. empirisk.

- ▶ Teoretisk β_1 for stor ift. empirisk estimat, $\hat{\beta}_1 \Rightarrow$ teoretisk konvergenshastighed for høj ift. empirisk.
- ▶ Teoretisk β_2 for lav ift. empirisk estimat, $\hat{\beta}_2 \Rightarrow$ effekten af at øge s eller mindske n på væksten er større i virkeligheden ift. hvad vi forventer.

- ▶ Teoretisk β_1 for stor ift. empirisk estimat, $\hat{\beta}_1 \Rightarrow$ teoretisk konvergenshastighed for høj ift. empirisk.
- ▶ Teoretisk β_2 for lav ift. empirisk estimat, $\hat{\beta}_2 \Rightarrow$ effekten af at øge s eller mindske n på væksten er større i virkeligheden ift. hvad vi forventer.
- ▶ Konklusionen på β_2 passer nogenlunde ok med konklusionen fra SS ligningen.

Konklusion - konvergensligningen

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Hvis vi kan øge teoretisk α ved at udvide kapitalbegrebet \Rightarrow

Konklusion - konvergensligningen

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Hvis vi kan øge teoretisk α ved at udvide kapitalbegrebet \Rightarrow
- ▶ Lavere teoretisk λ , større teoretisk effekt af s og n på vækst. \Rightarrow

Konklusion - konvergensligningen

Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

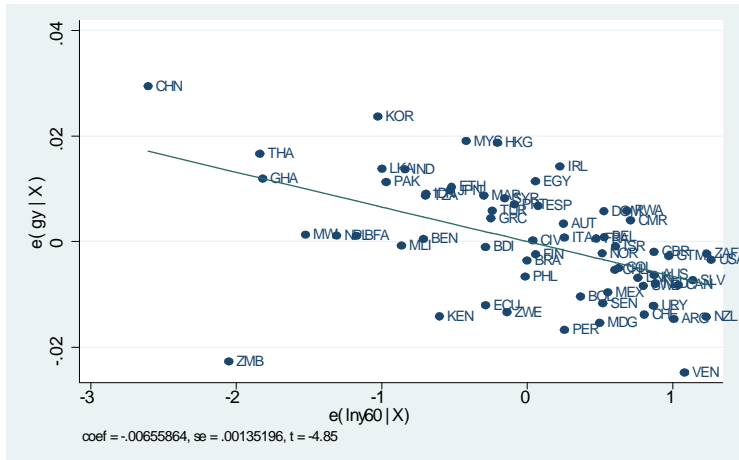
Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

- ▶ Hvis vi kan øge teoretisk α ved at udvide kapitalbegrebet \Rightarrow
- ▶ Lavere teoretisk λ , større teoretisk effekt af s og n på vækst. \Rightarrow
- ▶ Bedre overensstemmelse ml. empiri og teori.

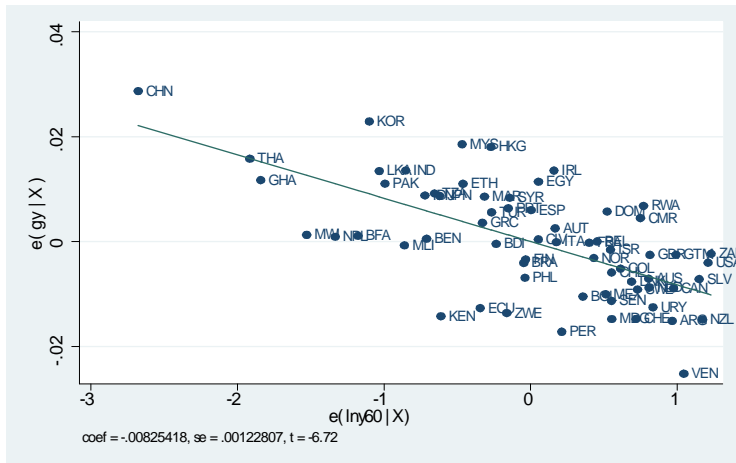
- ▶ I den forrige 65-lande-stikprøve er Kina ikke inkluderet.
Nu: Inkluderer Kina \Rightarrow



- ▶ Passer Kina ind i vores Solowmodel med: stort gap (=lavt initialt BNP/arbejder) og høj vækst!?

Er Kina's vækstproces særlig?

► Nu uden Zimbabwe (men stadig med Kina)



Introduktion

Model

Modellens ligninger
Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergensthastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK
Konklusion

Er Kina's vækstproces særlig?

- ▶ Blog på 'Altandetlige.dk': Carl-Johan Dalgaard (prof. ØI) anskuer Kina's vækstproces på en anden, men alligevel tilsvarende måde ('bag-på-konvolutten beregning'):

<http://altandetlige.dk/blog/carljohandalgaard/kina-vaekstmirakel-558>

- ▶ ide: Kina ikke er særlig, men følger bare Solowmodellen forudsigelser med højt vækst pga. stort initialt gap i indkomst.
- ▶ Antagelser:
 - ▶ USA er i SS
 - ▶ Konvergensrate $\lambda = 0,02$ (ifølge R. Barro - men hvad sagde Solowmodellen?)
 - ▶ $g = 0.015$ (eller deromkring)
- ▶ Fakta:
 - ▶ 6% vækst pr. år fra 1978 til 2011
 - ▶ 1978: $\frac{Y_{china}}{Y_{us}^*} = 0,04$

Er Kina's vækstprocess særlig?

- Konsistenstjek: Hvad skal Kina's SS BNP/arbejder være ift. USA for at disse tal giver mening i en Solow kontekst?

$$\frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} = g + \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} \left(\ln \frac{\tilde{y}_{china}^*}{\tilde{y}_{us}^*} - \ln \frac{\tilde{y}_{0,china}}{\tilde{y}_{us}^*} \right)$$

- Vi har (umiddelbart) kun data for $\ln \frac{y_{0,china}}{y_{us}^*} = 0,04$
- hvis $\ln A_0$ (dvs. i 1973) er ens for begge lande, så er $\ln \frac{\tilde{y}_{0,china}}{\tilde{y}_{us}^*} = 0,04$
- Med tal:

$$0.06 = 0.015 + \frac{1 - (1 - 0.02)^{33}}{33} \left(\ln \frac{\tilde{y}_{china}^*}{\tilde{y}_{us}^*} - \ln 0.04 \right)$$

- $\frac{\tilde{y}_{china}^*}{\tilde{y}_{us}^*} = 0,85$. Urealistisk?

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

- ▶ Antag at produktionen er givet ved Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}.$$

- ▶ Pr. arbejder:

$$y_t = k_t^\alpha A_t^{1-\alpha}.$$

- ▶ Tag ln og differens fra t til T og divider med $T - t$:

$$\frac{\overbrace{\ln y_T - \ln y_t}^{g_{t,T}^y}}{T - t} = \alpha \frac{\overbrace{\ln k_{t+1} - \ln k_t}^{g_{t,T}^k}}{T - t} + (1 - \alpha) \frac{\overbrace{\ln A_{t+1} - \ln A_t}^{g_{t,T}^A}}{T - t}.$$

- ▶ Hvor fx $g_{t,T}^y$ er den gennemsnitlige (årlige) vækstrate i BNP/arbejder fra t til T

- ▶ Vækstregnskabsformel:

$$g_{t,T}^y = \alpha g_{t,T}^k + (1 - \alpha) g_{t,T}^A$$

- ▶ Eksempel: Danmark fra 1950-2010. Her var den gnst. vækstrate i y : $g_{50,10}^y = 0,022$.
- ▶ Vi har data for kapital (dvs. k_T , k_t og dermed $g_{t,T}^k$) fra PWT, $g_{50,10}^k = 0,034$, og vi ved at $\alpha = 1/3$.

- ▶ Hvad med $g_{50,10}^A$? Ingen data for teknologisk vækst...
- ▶ Men hvis vi indsætter $g_{50,10}^y = 0,022$, $g_{50,10}^k = 0,034$ og $\alpha = 1/3$ er $g_{50,10}^A$ den ukendte:

$$g_{50,10}^A = \frac{g_{50,10}^y - \alpha g_{50,10}^k}{1 - \alpha} = 0,016.$$

- ▶ Vi siger at $g_{50,10}^A$ er residuelt beregnet. Fortolkning: Måler alt det vi ikke har med i modellen.
- ▶ Kan indeholde teknologi, men også institutioner, uddannelse, mv.

- Dvs. væksten kan dekomponeres i en kapitalakkumulationsdel og en TFP-del som måler "alt andet":

$$g_{t,T}^y = \overbrace{\alpha g_{t,T}^k}^{\text{kapitalakkumulation}} + \overbrace{(1 - \alpha) g_{t,T}^A}^{\text{TFP}}$$

- For DK, 1950-2010: $\alpha g_{50,10}^k = 0,034/3 = 0,011$ og $g_{50,10}^A (1 - \alpha) = (1 - 1/3) \times 0,016 = 0,011$.
- Dvs. vækstbidragene fra kapitalakkumulation og TFP er ca. lige store.

- ▶ Den lave vækst skyldes ikke kapitalakkumulation.
- ▶ Hvis bidraget fra kapitalakkumulation fraregnes er residualet, TFP-vækst, negativt!
- ▶ Dvs. spm om hvad der skabte den lave vækst i det sidste årti er (indtil videre) uløst.
- ▶ Dog en lidt kort periode. Finanskrise kan påvirke resultatet.

- ▶ Redskab til at dekomponere væksten.
- ▶ TFP: residual som måler alt det vi ikke har data for i produktionsfunktionen.
- ▶ Senere: udvidelse med human kapital \Rightarrow bedre forståelse af residualet.