# Kap 5: Den Generelle Solowmodel (med tek. vækst)

Makro I

Casper Worm Hansen

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

ntroduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

Transitionsligningen

Steady state

Fest of modeller

SS

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

denfor SS inearisering

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligningei

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab

Vækstregnskab Konklusion

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion

Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).

- Kap 5: Generel Solowmodel
  - Makro I

#### Introduktion

- ▶ Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).
- Arsag: aftagende marginalprodukt mht. kapital (+ n og  $\delta$ ).

- Kap 5: Generel Solowmodel
  - Makro I

#### Introduktion

- Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).
- Arsag: aftagende marginalprodukt mht. kapital (+ n og  $\delta$ ).
- Er ingen vækst (på lang sigt) ét problem?



Solowmodel Makro I

Kap 5: Generel

- Introduktion

- Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).
- Arsag: aftagende marginalprodukt mht. kapital (+ n og  $\delta$ ).
- Er ingen vækst (på lang sigt) ét problem?
- Stemmer dårligt overens med empiri for vestlige lande for de sidste 200 år.

- Kap 5: Generel Solowmodel
  - Makro I

#### Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

> Analyse af nodellen Tilde-variable

C. . . . . .

Foot of modellar

SS

Fest af modelle

Test af modelle udenfor SS

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninger

Vækstregnskab

ldé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- ▶ Ingen positiv vækst på lang sigt i Basal Solow (kap. 3).
- ▶ Årsag: aftagende marginalprodukt mht. kapital (+ n og  $\delta$ ).
- Er ingen vækst (på lang sigt) ét problem?
- Stemmer dårligt overens med empiri for vestlige lande for de sidste 200 år.
- Måske mangler modellen noget?

▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse. Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

Steady state

teady state

Fest af modellen i

SS-ligningen: OLS

Test af modelle

Linearisering Konvergenshastighede

Vækstr

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - D

- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- 'B vokser over tid.' ⇒ mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion



- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- 'B vokser over tid.' ⇒ mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion



- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- → 'B vokser over tid.' ⇒ mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.
- ▶ På lang sigt (dvs. i 'SS', hvor vækstraterne i øk. er konstante, dvs. SS vækstbanen):

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

> nodellen Filde-variable

eady state

Test af modellen i SS

est of modelle

denfor SS
Linearisering

Konvergenshastighe Konvergensligninger

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion



- Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- 'B vokser over tid.' ⇒ mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.
- På lang sigt (dvs. i 'SS', hvor vækstraterne i øk. er konstante, dvs. SS vækstbanen):
  - Vækst fra kapitalakkmulation = 0 ⇒

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion



- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- → 'B vokser over tid.' ⇒ mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.
- På lang sigt (dvs. i 'SS', hvor vækstraterne i øk. er konstante, dvs. SS vækstbanen):
  - Vækst fra kapitalakkmulation  $= 0 \Rightarrow$
  - ► Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

> nodellen Tilde-variable

> > eady state

Test af modellen i SS

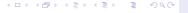
SS-ligningen: OLS

est af modellen denfor SS . . .

Linearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnska

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion



- ▶ Den generelle Solowmodel (kap. 5) er præcis ligesom den basale Solowmodel (kap. 3), med én enkelt undtagelse.
- → 'B vokser over tid.' ⇒ mulighed for vækst i BNP/arbejder i SS (samtidig med konvergens fra aftagende marginalprodukt på kapital).
- Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst + vækst fra kapitalakkumulation.
- På lang sigt (dvs. i 'SS', hvor vækstraterne i øk. er konstante, dvs. SS vækstbanen):
  - lacktriangle Vækst fra kapitalakkmulation  $=0 \Rightarrow$
  - ▶ Vækst i BNP/arbejder = teknologisk vækst.
  - Vækst i BNP?



Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion

Model

Modellens ligninge Kausalanalyse

> nodellen Tilde-variable

> > eady state

Test af modellen i SS

S-ligningen: OLS

udenfor SS Linearisering Konvergenshastigheder

Vækstregnskal

ldé Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK Konklusion



# Hvad er teknologisk vækst?

► Teknologi: "Opskrifter"/"blue prints" til at kombinere inputs.

#### Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

#### Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

Tilde-variable Transitionsligningen

#### teady state

Fest af modellen i

SS-ligningen: OLS

Test af modelle

dentor 55 .inearisering Convergenshastighed

Konvergenshastighede Konvergensligningen

### Vækstregnskab

ldé Vækstregnskal:

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

# Hvad er teknologisk vækst?

- ► Teknologi: "Opskrifter"/"blue prints" til at kombinere inputs.
- Teknologisk vækst: nye, forbedrede opskrifter, så samme inputs giver mere output.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

#### Introduktion



## Hvad er teknologisk vækst?

- ► Teknologi: "Opskrifter"/"blue prints" til at kombinere inputs.
- Teknologisk vækst: nye, forbedrede opskrifter, så samme inputs giver mere output.
- Eksempler: J. Watt (dampmaskine), T. Edison (elektriske glødelampe), H. Ford (samlebåndsarbejdet), osv. osv.

#### Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

#### Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

#### eady state

Test af modellen i SS

SS\_ligningen: OLS

est af modell

inearisering Convergenshastighed

ækstregnskab

#### Vækstregnskab Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion



▶ Udskift  $B \mod A_t^{1-\alpha}$ .

Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen

Transitionsligninger

#### teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Took of modeller

lest at modellen idenfor SS

Linearisering
Konvergenshastighede

Vækst

ldé Vækstregnskal

Vækstregnskab -Konklusion

- ▶ Udskift  $B \mod A_t^{1-\alpha}$ .
- ▶  $A_t$  vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g:

$$A_{t+1} = (1+g)\,A_t$$
,  $A_0$  givet

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse at modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

teady state

SS

SS-ligningen: OLS

Fest af modelle Idenfor SS

Linearisering Konvergenshastighede Konvergensligningen

Vækstreg

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

- ▶ Udskift  $B \mod A_t^{1-\alpha}$ .
- $ightharpoonup A_t$  vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g:

$$A_{t+1} = \left(1 + g
ight) A_t$$
,  $A_0$  givet

► Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modeller Ienfor SS

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninger

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- ▶ Udskift  $B \mod A_t^{1-\alpha}$ .
- $ightharpoonup A_t$  vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g:

$$A_{t+1} = \left(1 + g
ight) A_t$$
,  $A_0$  givet

- ► Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter g = 0 og  $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow \text{kap. 5}$ ⇒ kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

ady state

Test af modellen i SS

est af modell denfor SS

Linearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

- ▶ Udskift  $B \mod A_t^{1-\alpha}$ .
- ▶  $A_t$  vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g:

$$A_{t+1} = (1+g) A_t$$
,  $A_0$  givet

- ► Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter g = 0 og  $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow \text{kap. 5}$   $\Rightarrow \text{kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3)}.$
- Basal Solow er altså ét specialtilfælde af Generel Solow.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger

modellen
Tilde-variable

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS
Fest af modellen

Linearisering Konvergenshastigheder

Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- ▶ Udskift  $B \mod A_t^{1-\alpha}$ .
- ▶  $A_t$  vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g:

$$A_{t+1} = \left(1 + g
ight) A_t$$
,  $A_0$  givet

- ► Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter g = 0 og  $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow \text{kap. 5}$ ⇒ kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).
- Basal Solow er altså ét specialtilfælde af Generel Solow.
  - Resultater og intuition i kap. 5 minder om kap. 3.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninge Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

est af modellen

Linearisering Konvergenshastighede Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

- ▶ Udskift B med  $A_t^{1-\alpha}$ .
- $\triangleright$   $A_t$  vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g:

$$A_{t+1} = (1+g) A_t$$
,  $A_0$  givet

- Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter g = 0 og  $A_{1-\alpha}^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow \text{kap. 5}$  $\Rightarrow$  kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).
- Basal Solow er altså ét specialtilfælde af Generel Solow.
  - Resultater og intuition i kap. 5 minder om kap. 3.
  - ► Fx: hvorfor er dér (betinget) konvergens i den generelle Solowmodel?

- ▶ Udskift  $B \mod A_t^{1-\alpha}$ .
- ▶  $A_t$  vokser med konstant (eksogen) vækstrate, g:

$$A_{t+1} = \left(1 + g
ight) A_t$$
,  $A_0$  givet

- ► Senere: endogen vækst (kap 8 og 9), hvor g kommer til at være bestemt af modellen.
- ▶ Bemærk, hvis vi sætter g = 0 og  $A_0^{\frac{1}{1-\alpha}} = B \Rightarrow \text{kap. 5}$ ⇒ kap. 3 (dvs. så kommer vi tilbage til kap. 3).
- Basal Solow er altså ét specialtilfælde af Generel Solow.
  - Resultater og intuition i kap. 5 minder om kap. 3.
  - Fx: hvorfor er dér (betinget) konvergens i den generelle Solowmodel?
  - Svar ligesom i kap. 3 aftagende marginal produkt mht. kapital. > < nedslidning/udtynding</li>

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

### Model

Modellens ligninge

modellen
Tilde-variable

ady state

Test af modellen i SS

Fest af modeller Idenfor SS

Linearisering Konvergenshastighede Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab

Vækstregnskab - D Konklusion

# Formen af teknologisk vækst

▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt  $\Rightarrow A_t$  indgår i parentes med  $L_t$ ; dvs.  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ .

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

teady state

Fest af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Fest af modelle idenfor SS

Linearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

#### Model

Alternative former for tek, fremskridt:

Model

Modellens ligninger

Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Fest af modelle Idenfor SS

Linearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt  $\Rightarrow A_t$  indgår i parentes med  $L_t$ ; dvs.  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ .
- ► Alternative former for tek. fremskridt:
  - 1. Hicks-neutral tek. fremskridt:  $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$

### Formen af teknologisk vækst

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt  $\Rightarrow A_t$  indgår i parentes med  $L_t$ ; dvs.  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ .
- ► Alternative former for tek. fremskridt:
  - 1. Hicks-neutral tek. fremskridt:  $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
  - 2. **Solow-neutral** tek. fremskridt:  $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

eady state

teady state

est af modellen i

SS-ligningen: OLS

est af modelle

Linearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

med  $L_t$ ; dvs.  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ . Alternative former for tek, fremskridt:

**Harrod-neutral** tek. fremskridt  $\Rightarrow A_t$  indgår i parentes

1. **Hicks-neutral** tek. fremskridt:  $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$ 2. **Solow-neutral** tek. fremskridt:  $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$ 

Hvorfor anvender vi generelt Harrod-neutral tek. fremskridt? Svar: pga. balanceret vækst.

Model

### Formen af teknologisk vækst

- Kap 5: Generel Solowmodel
  - Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen

Transitionsligningen

ort of modelle

SS ligningon: OLS

SS-ligningen:

denfor SS
Linearisering

Linearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt  $\Rightarrow A_t$  indgår i parentes med  $L_t$ ; dvs.  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ .
- Alternative former for tek. fremskridt:
  - 1. **Hicks-neutral** tek. fremskridt:  $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
  - 2. **Solow-neutral** tek. fremskridt:  $Y_t = F(A_tK_t, L_t)$
- ► Hvorfor anvender vi generelt Harrod-neutral tek. fremskridt? Svar: pga. balanceret vækst.
  - Én undtagelse: med Cobb-Douglas produktionsfunktionen er formen af tek. vækst uden betydning. Hvorfor?

### Formen af teknologisk vækst

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

Transitionsligningen

Test of modelle

SS-ligningen: OLS

SS-ligningen: (

udenfor SS
Linearisering
Konvergenshastighede

Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- ▶ **Harrod-neutral** tek. fremskridt  $\Rightarrow A_t$  indgår i parentes med  $L_t$ ; dvs.  $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ .
- ▶ Alternative former for tek. fremskridt:
  - 1. **Hicks-neutral** tek. fremskridt:  $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
  - 2. **Solow-neutral** tek. fremskridt:  $Y_t = F(A_t K_t, L_t)$
- ► Hvorfor anvender vi generelt Harrod-neutral tek. fremskridt? Svar: pga. balanceret vækst.
  - Én undtagelse: med Cobb-Douglas produktionsfunktionen er formen af tek. vækst uden betydning. Hvorfor?
  - Formen af tek. vækst har altså betydning, når substitutionselasticiteten ml. kapital of arbejdskraft er forskellig fra 1

# Solowmodel med (harrod-neutral) tek. vækst

$$egin{aligned} Y_t &= \mathcal{K}^lpha_t \left( A_t L_t 
ight)^{1-lpha}, \ 0 < lpha < 1 \ &\mathcal{K}_{t+1} = \mathcal{S}_t + (1-\delta)\mathcal{K}_t, \ 0 < \delta < 1, \ \mathcal{K}_0 \ ext{givet} \ &\mathcal{S}_t = s Y_t, \ 0 < s < 1 \ &\mathcal{L}_{t+1} = (1+n)\,\mathcal{L}_t, \ \mathcal{L}_0 \ ext{givet} \ &\mathcal{A}_{t+1} = (1+g)\,\mathcal{A}_t, \ \mathcal{A}_0 \ ext{givet} \end{aligned}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

. . . .

Modellens ligninger

Analyse af modellen Tilde-variable

Steady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

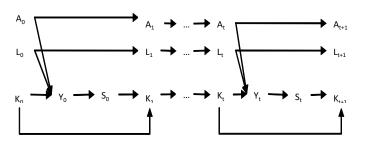
Test af modelle

Linearisering Konvergenshastighed

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - Dh

### Kausalanalyse



Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

SS-ligningen: OLS
Test of modellen

idenfor SS Linearisering

Linearisering Konvergenshastigh Konvergensligninge

Konvergensligning Vækstregnskab

Vækstregnsk Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

# Fremgangsmåden

▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$  konstante i SS.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Andal

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

Transitionsligningen

teady state

Fest af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Fest af modelle idenfor SS

dentor SS inearisering

Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

## Fremgangsmåden

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$ konstante i SS.
- Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Tilde-variable

### Fremgangsmåden

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$  konstante i SS.
- Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ► Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder =  $sk_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}$ , og  $A_t$  er konstant voksende.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Andal

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

Tilde-variable
Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

S-ligningen: OLS

est af modellen denfor SS

.inearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstre

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$  konstante i SS.
- Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ► Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder =  $sk_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}$ , og  $A_t$  er konstant voksende.
  - → i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad ⇒ ingen SS!

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

/lodel

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

Tilde-variable Transitionsligningen

eady state

Fest af modellen i SS

S-ligningen: OL

est af modelle denfor SS

nearisering onvergenshastighed onvergensligningen

Vækstregnskab

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$  konstante i SS.
- Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ► Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder =  $sk_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}$ , og  $A_t$  er konstant voksende.
  - → i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad ⇒ ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variabler:

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

**Tilde-variable** Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

55-ligningen: OL

lest af modelle idenfor SS

∟inearisering Konvergenshastigh∈ Konvergensligninge

Vækstregnskab Idé



- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$  konstante i SS.
- Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ► Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder =  $sk_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}$ , og  $A_t$  er konstant voksende.
  - → i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad ⇒ ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variabler:
  - $ilde{k}_t = rac{K_t}{A_t L_t}$ : Kapital pr. effektiv arbejder.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Andel

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

Tilde-variable Transitionsligninger

eady state

Fest af modellen i SS

est af modelle

denfor SS

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninger

ldé Vækstregnskab



Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Tilde-variable

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$ konstante i SS.
- Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder  $= sk_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}$ , og  $A_t$  er konstant voksende.
  - ▶ ⇒ i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad  $\Rightarrow$  ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variabler:
  - $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t I_t}$ : Kapital pr. effektiv arbejder.
  - $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t I_t}$ : BNP pr. effektiv arbejder.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

/lodel

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

Tilde-variable
Transitionsligninger

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: Ol

lest af modelle idenfor SS

Linearisering Konvergenshastigh

Vækstregnskab

Vækstregnskab

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$  konstante i SS.
- Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ► Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder =  $sk_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}$ , og  $A_t$  er konstant voksende.
  - → i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad ⇒ ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variabler:
  - $ilde{k}_t = rac{K_t}{A_t L_t}$ : Kapital pr. effektiv arbejder.
  - $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$ : BNP pr. effektiv arbejder.
- Hvorfor?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Vlodel

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

Transitionsligninger

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

udenfor SS

Linearisering
Konvergenshastigh

Vækstregnskab

ldé

- ▶ I kap. 3 analyserede vi modellen i  $k_t$  og  $y_t \Rightarrow k^*$  og  $y^*$  konstante i SS.
- Nu er det ikke tilfældet. Hvorfor?
- ► Tænk på Solowdiagrammet, hvor opsparing pr. arbejder =  $sk_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}$ , og  $A_t$  er konstant voksende.
  - → i pr. arbejder termer flytter opsparingskurven sig hele tiden opad ⇒ ingen SS!
- ▶ I kap. 5: analysér modellen i tilde-variabler:
  - $ilde{k}_t = rac{K_t}{A_t L_t}$ : Kapital pr. effektiv arbejder.
  - $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t}$ : BNP pr. effektiv arbejder.
- Hvorfor?
- Det viser sig, at tilde-variabler er konstante i SS.

$$lacksquare$$
 Altså  $ilde{k}_t=rac{K_t}{A_tL_t}=rac{k_t}{A_t}$  og  $ilde{y}_t=rac{Y_t}{A_tL_t}=rac{y_t}{A_t}$ 

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse :

Tilde-variable

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test of modeller

est af modeller denfor SS

Linearisering Konvergenshastighed

/ækstregnskab

Vækstregnskab Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - Dł

- lacksquare Altså  $ilde{k}_t=rac{K_t}{A_tL_t}=rac{k_t}{A_t}$  og  $ilde{y}_t=rac{Y_t}{A_tL_t}=rac{y_t}{A_t}$
- Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable
Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Fest af modelle idenfor SS

Linearisering Konvergenshastighed

Konvergensligningen Vækstregnskab

Vækstregnskab Idé

- lacksquare Altså  $ilde{k}_t=rac{K_t}{A_tL_t}=rac{k_t}{A_t}$  og  $ilde{y}_t=rac{Y_t}{A_tL_t}=rac{y_t}{A_t}$
- Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.
- ► Hvad er tolkningen af tilde-variabler?

#### Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse a

#### Tilde-variable

Transitionsligninger

Steady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

Test af modelle

denfor SS inearisering

Konvergenshastigher Konvergensligningen

Vækstr

ldé Vækstregnskab

Vækstregnska Konklusion

- ▶ Altså  $ilde{k}_t = rac{K_t}{A_t L_t} = rac{k_t}{A_t}$  og  $ilde{y}_t = rac{Y_t}{A_t L_t} = rac{y_t}{A_t}$
- Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.
- Hvad er tolkningen af tilde-variabler?
- Hmm, svært at svare på de giver i hvert fald ingen mening i virkelighedens verden!

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse a modellen

Tilde-variable

teady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninge

Vækstre

ldé Vækstregnskab

Vækstregnskab Konklusion

- lacksquare Altså  $ilde{k}_t = rac{K_t}{A_t L_t} = rac{k_t}{A_t}$  og  $ilde{y}_t = rac{Y_t}{A_t L_t} = rac{y_t}{A_t}$
- Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.
- Hvad er tolkningen af tilde-variabler?
- Hmm, svært at svare på de giver i hvert fald ingen mening i virkelighedens verden!
- Her er vi interesserede i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$ .

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse a

Tilde-variable

eadv state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninge

Vækstre

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Tilde-variable

- Altså  $\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t I_t} = \frac{k_t}{A_t}$  og  $\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t I_t} = \frac{y_t}{A_t}$
- Dvs. hhv. kapital og BNP justeret for teknologi og befolkning.
- Hvad er tolkningen af tilde-variabler?
- Hmm, svært at svare på de giver i hvert fald ingen mening i virkelighedens verden!
- Her er vi interesserede i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$ .
- $\triangleright$   $\tilde{V}_t$  og  $\tilde{k}_t$  bruger vi kun fordi det er hensigtsmæssigt, når vi skal løse modellen (de ender med at blive konstante  $\Rightarrow$  SS)

1. Divider derfor først kapitalakk med  $A_{t+1}L_{t+1}$ :

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{S_t + (1-\delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Transitionsligningen

1. Divider derfor først kapitalakk med  $A_{t+1}L_{t+1}$ :

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{S_t + (1-\delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

2. Indsæt  $L_{t+1}=(1+n)\,L_t$ ,  $A_{t+1}=(1+n)\,A_t$  og  $S_t=sY_t$ :

$$\begin{split} \tilde{k}_{t+1} &= \frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{L_t (1+n)A_t (1+g)} \\ &= \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left( s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t \right). \end{split}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

odellen ilde-variable

Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modelle udenfor SS

Linearisering Konvergenshastighed

Konvergenshastighede Konvergensligningen

Vækstre<sub>i</sub>

1. Divider derfor først kapitalakk med  $A_{t+1}L_{t+1}$ :

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{S_t + (1 - \delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

2. Indsæt  $L_{t+1} = (1+n) L_t$ ,  $A_{t+1} = (1+n) A_t$  og  $S_{t} = sY_{t}$ :

$$\begin{split} \tilde{k}_{t+1} &= \frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{L_t (1+n)A_t (1+g)} \\ &= \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left( s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t \right). \end{split}$$

3. Indsæt tilde-prod.fkt.,  $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ :

$$ilde{k}_{t+1} = rac{1}{\left(1+
ho
ight)\left(1+arphi
ight)} \left(s ilde{k}_t^lpha + \left(1-\delta
ight) ilde{k}_t
ight).$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Transitionsligningen

1. Divider derfor først kapitalakk med  $A_{t+1}L_{t+1}$ :

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}A_{t+1}} = \frac{S_t + (1-\delta)K_t}{A_{t+1}L_{t+1}}$$

2. Indsæt  $L_{t+1} = (1+n) L_t$ ,  $A_{t+1} = (1+n) A_t$  og  $S_t = sY_t$ :

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{sY_t + (1-\delta)K_t}{L_t (1+n)A_t (1+g)} \\
= \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left(s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t\right).$$

3. Indsæt tilde-prod.fkt.,  $ilde{y}_t = ilde{k}_t^{lpha}$ :

$$ilde{k}_{t+1} = rac{1}{\left(1+n
ight)\left(1+g
ight)} \left(s ilde{k}_t^lpha + \left(1-\delta
ight) ilde{k}_t
ight).$$

▶ Dette er en ikke-lineær differensligning i  $k_t$ .

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable Transitionsligningen

Chardy at the

Fest af modellen

SS-ligningen: OLS

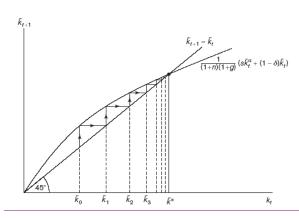
Test af modelle udenfor SS

inearisering Convergenshastighede

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

### Transitionsligningen - diagram:



Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

Introduktion

. . . . .

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen

Transitionsligningen

Transitionsiigiiiiig

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninger

Vækstregnskab Idé

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

eady state

lest af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

denfor SS
Linearisering

Linearisering Konvergenshastighede Konvergensligningen

Vækstre

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - Dh

Find Solowligningen ved at trække  $\tilde{k}_t$  fra transitionsligningen på begge sider:

$$ilde{k}_{t+1} - ilde{k}_t = rac{1}{\left(1+n
ight)\left(1+g
ight)} \left[s ilde{k}_t^lpha - \left(n+g+\delta+ng
ight) ilde{k}_t
ight].$$

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modeller udenfor SS

udentor 55 Linearisering Konvergenshastighed

Konvergensligningen Vækstregnskab

ldé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

Find Solowligningen ved at trække  $\tilde{k}_t$  fra transitionsligningen på begge sider:

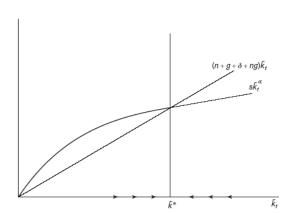
$$ilde{k}_{t+1} - ilde{k}_t = rac{1}{\left(1+n
ight)\left(1+g
ight)} \left[s ilde{k}_t^lpha - \left(n+g+\delta+ng
ight) ilde{k}_t
ight].$$

Find den modificerede Solowligning ved at dividér Solowligningen med  $\tilde{k}_t$ :

$$\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{\left(1 + n\right)\left(1 + g\right)} \left[ s \tilde{k}_t^{\alpha - 1} - \left(n + g + \delta + ng\right) \right].$$

#### Solowdiagrammet

► Transition mod SS i Solowdiagrammet.



Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse af modellen

Transitionsligningen

Steady state

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modell

denfor SS Linearisering

Konvergenshast Konvergensligni

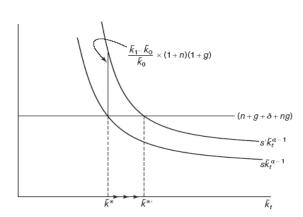
Vækstre

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab -

Vækstregnsl Konklusion

### Det modificerede Solowdiagram

• Stigning i opsparingsraten i periode t = 0:



Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

N.A. - I.-I

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen

Transitionsligningen

teady state

Fest af modellen

SS-ligningen: OLS

Test af modell

Linearisering Konvergenshastig

Konvergenslignir

Vækstre Idé

• Sæt  $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$  i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

▶ Sæt  $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$  i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$ilde{k}^* = \left(rac{s}{n+g+\delta+ng}
ight)^{rac{1}{1-lpha}}$$

Indsæt i  $\tilde{\mathbf{y}}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ :

$$\tilde{y}^* = \left(\tilde{k}^*\right)^{\alpha} = \left(\frac{\mathsf{s}}{n+e+\delta+ne}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

▶ Sæt  $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$  i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$ilde{k}^* = \left(rac{s}{n+g+\delta+ng}
ight)^{rac{1}{1-lpha}}$$

Indsæt i  $\tilde{\mathbf{y}}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ :

$$ilde{y}^* = \left( ilde{k}^*
ight)^lpha = \left(rac{s}{n+g+\delta+ng}
ight)^{rac{lpha}{1-lpha}}$$

▶ Politik der øger  $\tilde{k}^*$  og  $\tilde{y}^*$ :

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

• Sæt  $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$  i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$ilde{k}^* = \left(rac{s}{n+g+\delta+ng}
ight)^{rac{1}{1-lpha}}$$

Indsæt i  $\tilde{\mathbf{y}}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ :

$$ilde{y}^* = \left( ilde{k}^*
ight)^lpha = \left(rac{s}{n+g+\delta+ng}
ight)^{rac{lpha}{1-lpha}}$$

- ▶ Politik der øger  $\tilde{k}^*$  og  $\tilde{y}^*$ :
  - højere s, lavere n, lavere  $\delta$ ,

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Sæt  $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$  i transitionsligningen (solowligning eller mod. solowligning):

$$ilde{k}^* = \left(rac{s}{n+g+\delta+ng}
ight)^{rac{1}{1-lpha}}$$

▶ Indsæt i  $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ :

$$ilde{y}^* = \left( ilde{k}^*
ight)^lpha = \left(rac{s}{n+g+\delta+ng}
ight)^{rac{lpha}{1-lpha}}$$

- ▶ Politik der øger  $\tilde{k}^*$  og  $\tilde{y}^*$ :
  - højere s, lavere n, lavere  $\delta$ ,
  - ▶ lavere *g* ???.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable Transitionsligninge

Steady state

oteauy state

SS

SS-ligningen: OLS

denfor SS
Linearisering

Konvergenshast Konvergensligni

Vækstregi

Idé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$  (kommer fra def.  $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$ )

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.
- Vi er interesseret i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$  (kommer fra def.  $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$ )
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbeider som  $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.
- Vi er interesseret i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$  (kommer fra def.  $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_s}$ )
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som  $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$ 
  - tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$  (kommer fra def.  $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$ )
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som  $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$ 
  - tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder
- 5-min-øvelse:

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.
- ▶ Vi er interesseret i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$  (kommer fra def.  $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$ )
- lacksquare Lad benævne SS BNP/arbejder som  $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t ilde{y}^*$ 
  - tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder

#### ▶ 5-min-øvelse:

1. Beskriv - vha. Matma. - hvordan  $y_t^*$  udvilker sig over tid i SS. [hint: løs  $A_{t+1} = (1+g)A_t$ ]

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

> nalyse af nodellen Filde-variable

. . . . . .

Steady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

inearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

/ækstregnskab Idé Vækstregnskab

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.
- Vi er interesseret i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$  (kommer fra def.  $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$ )
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som  $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$ 
  - tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder

#### 5-min-øvelse:

- 1. Beskriv vha. Matma. hvordan  $y_t^*$  udvilker sig over tid i SS. [hint: løs  $A_{t+1} = (1+g)A_t$ ]
- 2. Hvordan påvirker én stigning i g SS vækstbanen for BNP/arbeider?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.
- Vi er interesseret i  $y_t = A_t \tilde{y}_t$  (kommer fra def.  $\tilde{y}_t \equiv \frac{y_t}{A_t}$ )
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som  $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$ 
  - tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder

#### 5-min-øvelse:

- 1. Beskriv vha. Matma. hvordan  $y_t^*$  udvilker sig over tid i SS. [hint: løs  $A_{t+1} = (1+g)A_t$ ]
- 2. Hvordan påvirker én stigning i g SS vækstbanen for BNP/arbeider?
- 3. Hvordan påvirker én stigning i s SS vækstbanen for BNP/arbejder?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

- ▶ Dvs. højere g er dårligt? Husk at  $\tilde{y}_t$  er en kunstig variabel.
- lacktriangle Vi er interesseret i  $y_t = A_t ilde{y}_t$  (kommer fra def.  $ilde{y}_t \equiv rac{y_t}{A_t}$ )
- ▶ Lad benævne SS BNP/arbejder som  $y_t^* \Rightarrow y_t^* = A_t \tilde{y}^*$ 
  - tænke det som én SS vækstbane for BNP/arbejder

#### ► 5-min-øvelse:

- 1. Beskriv vha. Matma. hvordan  $y_t^*$  udvilker sig over tid i SS. [hint: løs  $A_{t+1} = (1+g)A_t$ ]
- Hvordan påvirker én stigning i g SS vækstbanen for BNP/arbejder?
- 3. Hvordan påvirker én stigning i s SS vækstbanen for BNP/arbejder?
- 4. Hvordan påvirker én stigning i s SS vækstbanen for forbrug/arbejder?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninge Kausalanalyse

> nalyse af odellen

Transitionsligning

#### Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

lenfor SS inearisering

inearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

/ækstregnskab Idé

#### Steady state - ligningen

▶ Ligningen for SS vækstbanen,  $y_t^*$ :

$$\begin{array}{rcl} \ln y_t^* & = & \displaystyle \ln A_0 + \overbrace{t \ln \left( 1 + g \right)}^{\approx g} + \\ & & \displaystyle \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( \ln s - \ln \left( n + g + \delta + ng \right) \right). \end{array}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

teady state

est af modellen i

SS ligningon: OLS

SS-ligningen: OLS

lenfor SS inearisering

Linearisering Konvergenshastighede Konvergensligningen

Vækstr

dé Vækstregnskab

▶ Ligningen for SS vækstbanen,  $y_t^*$ :

$$\begin{array}{rcl} \ln y_t^* & = & \underbrace{\ln A_0 + \underbrace{t \ln \left( 1 + g \right)}_{\approx g} +}_{\alpha} \\ & & \underbrace{\frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( \ln s - \ln \left( n + g + \delta + ng \right) \right)}_{\approx g}. \end{array}$$

▶ Antag: alle lande i SS. i 2003,  $g + \delta + ng = 0,075$ , samme  $A_t$  (dvs,  $A_0$ , g, t) for alle lande  $\Rightarrow$ 

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

est af modell

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninge

Vækstre

▶ Ligningen for SS vækstbanen,  $y_t^*$ :

$$\begin{array}{rcl} \ln y_t^* & = & \underbrace{\ln A_0 + \underbrace{t \ln \left( 1 + g \right)}_{\approx g} +}_{\alpha} \\ & \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( \ln s - \ln \left( n + g + \delta + ng \right) \right). \end{array}$$

- ▶ Antag: alle lande i SS. i 2003,  $g + \delta + ng = 0,075$ , samme  $A_t$  (dvs,  $A_0$ , g, t) for alle lande  $\Rightarrow$ 
  - ► Eller antag  $A_{i,0} \Rightarrow \text{indgår i fejlled } (\zeta_i)$ , men hvis  $A_{i,0}$  ikke er korreleret med højreside-variabel, ikke noget problem! Realistisk?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Modellens ligninge

Analyse af modellen

Tilde-variable Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est at modellen denfor SS .inearisering Konvergenshastigheder

Konvergenshast Konvergensligni

ldé Vækstregnskab

Vækstregnskab - E Konklusion

▶ Ligningen for SS vækstbanen,  $y_t^*$ :

$$\begin{array}{rcl} \ln y_t^* & = & \underbrace{\ln A_0 + \underbrace{t \ln \left( 1 + g \right)}_{\approx g} +}_{\alpha} \\ & \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( \ln s - \ln \left( n + g + \delta + ng \right) \right). \end{array}$$

- ▶ Antag: alle lande i SS. i 2003,  $g + \delta + ng = 0,075$ , samme  $A_t$  (dvs,  $A_0$ , g, t) for alle lande  $\Rightarrow$ 
  - ▶ Eller antag  $A_{i,0} \Rightarrow \text{indgår i fejlled } (\zeta_i)$ , men hvis  $A_{i,0}$  ikke er korreleret med højreside-variabel, ikke noget problem! Realistisk?
- Regressionsligning:

$$\ln y_{i,03} = \gamma_0 + \gamma_1 \left( \ln s_i - \ln \left( n_i + 0,075 \right) \right) + \zeta_i.$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

ntroduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

denfor SS
inearisering
inovergenshastigheden

Vækstregnska Idé

▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen?  $\hat{\gamma}_1 = 1,51$  (dvs.  $\hat{\alpha} = 0,6$ ), SF= 0,14.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

eady state

Fest af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modellen

denfor 55 Linearisering Konvergenshastighed

Konvergenshastigh Konvergensligning

Vækstr

lé Takatrognakah

Vækstregnskab Konklusion

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen?  $\hat{\gamma}_1 = 1,51$  (dvs.  $\hat{\alpha} = 0,6$ ), SF= 0,14.
- ▶ Modelforudsigelse:  $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0$ , 5, hvis  $\alpha = 1/3$ .

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse af modellen Tilde-variable

Steady state

est af modellen

SS-ligningen: OLS

S-ligningen: OLS

est af modeller Ienfor SS

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninger

Vækstre

dé

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen?  $\hat{\gamma}_1 = 1,51$  (dvs.  $\hat{\alpha} = 0,6$ ), SF= 0,14.
- ► Modelforudsigelse:  $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0$ , 5, hvis  $\alpha = 1/3$ .
- ▶ Kondfidensinterval:  $\hat{\gamma}_1 \pm 1,96 \times \text{SF} = [1,24;1,80] \Rightarrow$  (empiriske) estimat er signifikant forskellig fra modelforudsigelse.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

st af modelle enfor SS

inearisering

Konvergenshastigl

Konvergensligning

Vækstre

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen?  $\hat{\gamma}_1 = 1,51$  (dvs.  $\hat{\alpha} = 0,6$ ), SF= 0,14.
- ► Modelforudsigelse:  $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0$ , 5, hvis  $\alpha = 1/3$ .
- ▶ Kondfidensinterval:  $\hat{\gamma}_1 \pm 1,96 \times \text{SF} = [1,24;1,80] \Rightarrow$  (empiriske) estimat er signifikant forskellig fra modelforudsigelse.
- ▶ Problem med empiri eller model?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

st af modeller lenfor SS

Linearisering Konvergenshastighe Konvergensligninge

Vækstre

- ▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen?  $\hat{\gamma}_1 = 1,51$  (dvs.  $\hat{\alpha} = 0,6$ ), SF= 0,14.
- ▶ Modelforudsigelse:  $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0$ , 5, hvis  $\alpha = 1/3$ .
- ▶ Kondfidensinterval:  $\hat{\gamma}_1 \pm 1,96 \times \text{SF} = [1,24;1,80] \Rightarrow$  (empiriske) estimat er signifikant forskellig fra modelforudsigelse.
- Problem med empiri eller model?
  - ▶ Empiri: korrelation er ikke kausalitet. Hvis y påvirker s og n, så vil det øge  $\hat{\gamma}_1$  'kunstigt' (omvendt kausalitetsproblem).

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modellen denfor SS inearisering convergenshastigheden

Vækstregns

▶ Data fra 65 lande: Hvad finder vi ved trykke på OLS knappen?  $\hat{\gamma}_1 = 1,51$  (dvs.  $\hat{\alpha} = 0,6$ ), SF= 0,14.

► Modelforudsigelse:  $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 0$ , 5, hvis  $\alpha = 1/3$ .

- ▶ Kondfidensinterval:  $\hat{\gamma}_1 \pm 1,96 \times \text{SF} = [1,24;1,80] \Rightarrow$  (empiriske) estimat er signifikant forskellig fra modelforudsigelse.
- Problem med empiri eller model?
  - ▶ Empiri: korrelation er ikke kausalitet. Hvis y påvirker s og n, så vil det øge  $\hat{\gamma}_1$  'kunstigt' (omvendt kausalitetsproblem).
  - Model: Måske skal der flere variable ind i modellen ⇒ fx kap. 6 udvides modellen med human kapital.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

.....

Modellens ligninger

nodellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modellen lenfor SS inearisering onvergenshastigheden onvergensligningen

Vækstregnskab Idé



## Hvorfor teste modellen udenfor SS

▶ SS regression: hvad nu hvis landene ikke er i SS?

### Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

### Test of modellen

udenfor SS

## Hvorfor teste modellen udenfor SS

- ▶ SS regression: hvad nu hvis landene ikke er i SS?
- ► Empirisk konvergenshastighed vs. teoretisk?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable

Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

Test af modellen

udenfor SS Linearisering

Konvergenshastighede Konvergensligningen

Vækstregnska

ldé

## Hvorfor teste modellen udenfor SS

- ▶ SS regression: hvad nu hvis landene ikke er i SS?
- Empirisk konvergenshastighed vs. teoretisk?
- Svar: konvergensligningen, analytisk løsning (=aprox) for væksten udenfor SS.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

C. . . . . .

teady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering
Konvergenshastighede

Vækstre

Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS? Transitionsligningen har svaret:

$$ilde{k}_{t+1} = rac{1}{\left(1+n
ight)\left(1+g
ight)} \left(s ilde{k}_t^{lpha} + \left(1-\delta
ight) ilde{k}_t
ight).$$

Kap 5: Generel Solowmodel

### Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse af nodellen

Tilde-variable Transitionsligningen

teady state

Fest af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test at modell Idenfor SS

## Linearisering

Konvergenshastigheder Konvergensligningen

Vækstreg

Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS? Transitionsligningen har svaret:

$$ilde{k}_{t+1} = rac{1}{\left(1+n
ight)\left(1+g
ight)}\left(s ilde{k}_t^{lpha} + \left(1-\delta
ight) ilde{k}_t
ight).$$

▶ Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.

Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

o-lightingen. OL.

est af modellei Ienfor SS

## Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstregns

Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS? Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{\left(1+n\right)\left(1+g\right)} \left(s \tilde{k}_t^\alpha + \left(1-\delta\right) \tilde{k}_t\right).$$

- ► Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.
- Én løsning på problemet er  $\delta=1\Rightarrow$

$$\ln \tilde{k}_{t+1} = \ln s - \ln \left[ \left( 1 + n \right) \left( 1 + g \right) \right] + \alpha \ln \tilde{k}_t$$
,

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

eady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

denfor SS

#### udenfor SS Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstreg

Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS? Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{\left(1+n\right)\left(1+g\right)} \left(s \tilde{k}_t^\alpha + \left(1-\delta\right) \tilde{k}_t\right).$$

- ► Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.
- Én løsning på problemet er  $\delta=1\Rightarrow$

$$\ln ilde{k}_{t+1} = \ln s - \ln \left[ \left( 1 + n 
ight) \left( 1 + g 
ight) 
ight] + lpha \ln ilde{k}_t$$
 ,

 $lackbox{ }$  Dvs. hvis  $\delta=1$  er transitionsligningen log lineær.

Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

Introduktion

### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

### nodellen Tilde-variable

teady state

### leady state

Test af modellen i SS

Fest af modell

udenfor SS

### Linearisering

Konvergenshastigheder Konvergensligningen

### Vækstreg Idé

Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS? Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{\left(1+n\right)\left(1+g\right)} \left(s \tilde{k}_t^\alpha + \left(1-\delta\right) \tilde{k}_t\right).$$

- ► Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.
- Én løsning på problemet er  $\delta=1\Rightarrow$

$$\ln ilde{k}_{t+1} = \ln s - \ln \left[ \left( 1 + n 
ight) \left( 1 + g 
ight) 
ight] + lpha \ln ilde{k}_t$$
 ,

- lacktriangle Dvs. hvis  $\delta=1$  er transitionsligningen log lineær.
- ▶ Det kan omskrives til (vha. produktionsfunktionen):

$$\ln \tilde{y}_{t+1} = \alpha \left[ \ln s - \ln \left( 1 + n \right) \left( 1 + g \right) \right] + \alpha \ln \tilde{y}_t,$$

Kap 5: Generel

Makro I

Introduktion

Madal

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

est af modell

idenfor SS

### Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

/ækstregi

ldé

Hvordan udvikler modellens variable sig udenfor SS? Transitionsligningen har svaret:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{\left(1+n\right)\left(1+g\right)} \left(s \tilde{k}_t^\alpha + \left(1-\delta\right) \tilde{k}_t\right).$$

- ► Løsningen? Umiddelbart ingen analytisk løsning, der kan frembringe én reg. ligning vi kan teste.
- lacktriangle Én løsning på problemet er  $\delta=1\Rightarrow$

$$\ln \tilde{k}_{t+1} = \ln s - \ln \left[ \left( 1 + n \right) \left( 1 + g \right) \right] + \alpha \ln \tilde{k}_t,$$

- lackbox Dvs. hvis  $\delta=1$  er transitionsligningen log lineær.
- Det kan omskrives til (vha. produktionsfunktionen):

$$\ln \tilde{y}_{t+1} = \alpha \left[ \ln s - \ln \left( 1 + n \right) \left( 1 + g \right) \right] + \alpha \ln \tilde{y}_t,$$

▶ Hvis vi løser denne får vi: (se næste slide).

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

denfor SS

### Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

þkstregr

ldé

(forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = lpha^t \left( ilde{y}_0 - rac{\Gamma}{1-lpha} 
ight) + rac{\Gamma}{1-lpha}$$

hvor  $\Gamma = \alpha \left[ \ln s - \ln (1+n) (1+g) \right]$ .

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Linearisering

(forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = lpha^t \left( ilde{y}_0 - rac{\Gamma}{1-lpha} 
ight) + rac{\Gamma}{1-lpha}$$

 $\text{hvor }\Gamma=\alpha\,[\ln s-\ln\left(1+n\right)\left(1+g\right)].$ 

▶ Hvad er  $\frac{\Gamma}{1-\alpha}$  =?

### Kap 5: Generel Solowmodel

### Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse af modellen

Tilde-variable Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

est af modell

### udenfor SS Linearisering

Konvergenshastigheder Konvergensligningen

Vækstre

(forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left( \tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

 $\text{hvor }\Gamma=\alpha\,[\ln s-\ln\left(1+\mathit{n}\right)\left(1+\mathit{g}\right)].$ 

- ▶ Hvad er  $\frac{\Gamma}{1-\alpha}$  =?
- ▶ Problem?  $\delta = 1$  virker lidt urealistisk, hvis én periode er lig med 1 år.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modelle

idenfor SS

### Linearisering Konvergenshastigheder

Konvergenshastigheder Konvergensligningen

Vækstre

(forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left( \tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

hvor  $\Gamma = \alpha \left[ \ln s - \ln \left( 1 + n \right) \left( 1 + g \right) \right]$ .

- ▶ Hvad er  $\frac{\Gamma}{1-\alpha}$  =?
- ▶ Problem?  $\delta = 1$  virker lidt urealistisk, hvis én periode er lig med 1 år.
  - ► Løsning 1: antag én periode er lig med 50 år (eller mere) ⇒ besværlig fortolkning.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Fest af modelle Idenfor SS

## Linearisering Konvergenshastighede

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstregnska

(forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left( \tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

hvor  $\Gamma = \alpha \left[ \ln s - \ln \left( 1 + n \right) \left( 1 + g \right) \right]$ .

- ▶ Hvad er  $\frac{\Gamma}{1-\alpha} = ?$
- ▶ Problem?  $\delta=1$  virker lidt urealistisk, hvis én periode er lig med 1 år.
  - ► Løsning 1: antag én periode er lig med 50 år (eller mere) ⇒ besværlig fortolkning.
  - ▶ Lad os prøve med løsning  $2 \Rightarrow$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

Transitionsligninger

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

## Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstreg

(forsat fra forrige slide)

$$\ln y_t = \alpha^t \left( \tilde{y}_0 - \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha}$$

 $\text{hvor }\Gamma=\alpha\left[\ln s-\ln\left(1+\mathit{n}\right)\left(1+\mathit{g}\right)\right].$ 

- ▶ Hvad er  $\frac{\Gamma}{1-\alpha} = ?$
- ▶ Problem?  $\delta=1$  virker lidt urealistisk, hvis én periode er lig med 1 år.
  - ► Løsning 1: antag én periode er lig med 50 år (eller mere) ⇒ besværlig fortolkning.
  - ▶ Lad os prøve med løsning  $2 \Rightarrow$
  - Løsning 2: linearisér transitionslign., så behøver vi ikke antage  $\delta=1$  for at løse differensligningen.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

Steady state

SS

Test af modelle

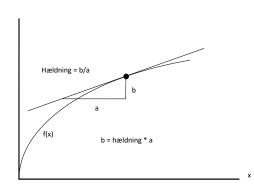
denfor SS

### Linearisering Konvergenshastighede

Konvergensligningen

dé

# Matma'en i linearisering - illustration 1



### Kap 5: Generel Solowmodel

### Makro I

Introduktion

#### Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

## modellen

I ilde-variable Transitionsligninger

#### teady state

Test af modellen i

### SS-ligningen: OLS

Test af mode

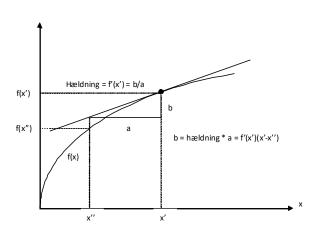
### Linearisering

Konvergenshastigheder Konvergensligningen

### Vækstr

ldé

# Matma'en i linearisering - illustration 2



Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

Introduktion

#### . . . . .

Modellens ligninger Kausalanalyse

### modellen

Tilde-variable Transitionsligninger

#### teady state

Test af modellen i

### SS-ligningen: OLS

est af modell denfor SS

### Linearisering

Konvergenshastighede Konvergensligningen

### Vækstr

dé /ækstregnskab

Vækstregnskab Konklusion

Vi bruger følgende approksimation:

$$f(x') - f(x'') \approx b = f'(x')(x' - x'') \Leftrightarrow$$
  
 $f(x'') - f(x') \approx b = f'(x')(x'' - x').$ 

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Linearisering

Vi bruger følgende approksimation:

$$f(x') - f(x'') \approx b = f'(x')(x' - x'') \Leftrightarrow$$
  
 $f(x'') - f(x') \approx b = f'(x')(x'' - x').$ 

▶ Lidt anden notation:  $x' = x^* \text{ og } f(x) = y \Rightarrow$ 

$$y - y^* \approx f'(x^*)(x - x^*)$$
.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

rodellen Filde-variable

i ransitionsiigninį

teady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

est af model

Linearisering

Linearisering Konvergenshastigheder

Vækstregnskab

▶ Vi bruger følgende approksimation:

$$f(x') - f(x'') \approx b = f'(x')(x' - x'') \Leftrightarrow$$
  
 $f(x'') - f(x') \approx b = f'(x')(x'' - x').$ 

▶ Lidt anden notation:  $x' = x^* \text{ og } f(x) = y \Rightarrow$ 

$$y - y^* \approx f'(x^*)(x - x^*)$$
.

▶ Vi siger at vi har "lineariseret f(x) omkring  $x^*$ .

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i

Test of modell

udenfor SS

### Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstreg

Vi bruger følgende approksimation:

$$f(x') - f(x'') \approx b = f'(x')(x' - x'') \Leftrightarrow$$
  
 $f(x'') - f(x') \approx b = f'(x')(x'' - x').$ 

▶ Lidt anden notation:  $x' = x^* \text{ og } f(x) = y \Rightarrow$ 

$$y - y^* \approx f'(x^*)(x - x^*)$$
.

- ▶ Vi siger at vi har "lineariseret f(x) omkring  $x^*$ .
- Det var matma'en. Nu bogens notation:

$$ilde{k}_{t+1} - ilde{k}^* pprox ilde{G}'\left( ilde{k}^*
ight)\left( ilde{k}_t - k^*
ight)$$
 ,

hvor  $\tilde{k}_{t+1} \equiv G(\tilde{k}_t)$  er transitionsligningen.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

. . . . .

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

Transitionsligninger

teady state

Test af modellen i SS

T- 1 C - 1-11

idenfor SS

### Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

▶ Linearisér  $G(\tilde{k}_t)$  omkring  $\tilde{k}^*$ :

$$\begin{array}{ccc} G\left(\tilde{k}_{t}\right) - G\left(\tilde{k}^{*}\right) & = & G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\left(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}\right) \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^{*} & = & G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\left(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}\right) \end{array}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

### Makro I

Linearisering

▶ Linearisér  $G\left(\tilde{k}_{t}\right)$  omkring  $\tilde{k}^{*}$ :

$$G\left(\tilde{k}_{t}\right) - G\left(\tilde{k}^{*}\right) = G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\left(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}\right) \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^{*} = G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\left(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}\right)$$

▶ Dette er en lineær differensligning i  $\tilde{k}_t$ , hvor vi kunne løse for  $\tilde{k}_t$ .

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

teady state

steady State

Test af modellen i SS

Test af model

denfor SS

### Linearisering Konvergenshastighede

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstregnsk

▶ Linearisér  $G\left(\tilde{k}_{t}\right)$  omkring  $\tilde{k}^{*}$ :

$$G\left(\tilde{k}_{t}\right) - G\left(\tilde{k}^{*}\right) = G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\left(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}\right) \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^{*} = G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\left(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}\right)$$

- ▶ Dette er en lineær differensligning i  $\tilde{k}_t$ , hvor vi kunne løse for  $\tilde{k}_t$ .
  - hvor

$$G'\left(\tilde{k}_{t}\right) = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left[\alpha s(\tilde{k}_{t})^{\alpha-1} + (1-\delta)\right],$$

som i SS, hvor  $\tilde{k} = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  er:

$$G'(\tilde{k}) = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[ \alpha(n+g+\delta+ng) + (1-\delta) \right],$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

teady state

SS ... OLS

est af modelle

Linearisering

Konvergenshastigheden

Vækstregnskab

ldé

▶ Linearisér  $G(\tilde{k}_t)$  omkring  $\tilde{k}^*$ :

$$G\left(\tilde{k}_{t}\right) - G\left(\tilde{k}^{*}\right) = G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\left(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}\right) \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^{*} = G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\left(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}\right)$$

- ▶ Dette er en lineær differensligning i  $\tilde{k}_t$ , hvor vi kunne løse for  $\tilde{k}_t$ .
  - hvor

$$G'(\tilde{k}_t) = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[ \alpha s(\tilde{k}_t)^{\alpha-1} + (1-\delta) \right],$$

som i SS, hvor  $\tilde{k} = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  er:

$$G'(\tilde{k}) = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[ \alpha(n+g+\delta+ng) + (1-\delta) \right],$$

4 D > 4 B > 4 B > 4 B > B = 900

Men vi er mere interesserede i logaritmer ≈ vækstrater.
 ⇒ endnu en linearisering

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

> analyse at nodellen Tilde-variable Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i SS

Test af model udenfor SS

Linearisering

## Konvergenshastigheder

Konvergensligningen

Vækstregi Idé

▶ Linearisér  $H(\tilde{k}_t) = \ln k_t$  omkring  $\tilde{k}^*$ 

$$\frac{H(\tilde{k}_{t})}{\ln \tilde{k}_{t}} - \frac{H(\tilde{k}^{*})}{\ln \tilde{k}^{*}} \approx H'(\tilde{k}^{*})(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}) = \frac{1}{k^{*}}(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}) \Leftrightarrow \tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*} = \tilde{k}^{*}(\ln \tilde{k}_{t} - \ln \tilde{k}^{*}),$$
(\*)

og så må det gælde at

$$\tilde{\textit{k}}_{t+1} - \tilde{\textit{k}}^* = \tilde{\textit{k}}^* \left( \ln \tilde{\textit{k}}_{t+1} - \ln \tilde{\textit{k}}^* \right) \tag{**}$$

### Kap 5: Generel Solowmodel

### Makro I

### Linearisering

Linearisér  $H(\tilde{k}_t) = \ln k_t$  omkring  $\tilde{k}^*$ 

$$\frac{H(\tilde{k}_{t})}{\ln \tilde{k}_{t}} - \frac{H(\tilde{k}^{*})}{\ln \tilde{k}^{*}} \approx H'(\tilde{k}^{*})(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}) = \frac{1}{k^{*}}(\tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*}) \Leftrightarrow \tilde{k}_{t} - \tilde{k}^{*} = \tilde{k}^{*}(\ln \tilde{k}_{t} - \ln \tilde{k}^{*}),$$
(\*)

og så må det gælde at

$$ilde{k}_{t+1} - ilde{k}^* = ilde{k}^* \left( \ln ilde{k}_{t+1} - \ln ilde{k}^* 
ight)$$
 (\*\*)

Indsæt nu - fx - (\*) og (\*\*) i den 'oprindelige' lineariseret transitionslign.⇒

$$\begin{array}{lcl} \tilde{k}^{*} \left( \ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^{*} \right) & \approx & G' \left( \tilde{k}^{*} \right) \left( \tilde{k}^{*} \left( \ln \tilde{k}_{t} - \ln \tilde{k}^{*} \right) \right) \Leftrightarrow \\ & \ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^{*} & \approx & G' \left( \tilde{k}^{*} \right) \left( \ln \tilde{k}_{t} - \ln \tilde{k}^{*} \right) \end{array}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

Test af modeller

idenfor SS

Linearisering Konvergenshastighed

/ækstregnskab

Vækstregnskal Idé

#### Linearisering - trin 3

▶ Vi vil gene vide hvordan BNP/arbejder udvikler sig

#### Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

#### Linearisering

#### Linearisering - trin 3

- Vi vil gene vide hvordan BNP/arbejder udvikler sig
- ▶ Brug derfor produktionsfunktion  $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ , der kan omskrives til In  $\tilde{y}_t = \alpha \ln \tilde{k}_t \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_t = \ln \tilde{k}_t$

$$\frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}^* \quad \approx \quad G'\left(\tilde{k}^*\right) \left(\frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_t - \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}^*\right) \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}^* \quad \approx \quad G'\left(\tilde{k}^*\right) \left(\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*\right)$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

est of model

est af modelle denfor SS

#### Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstregnska

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

#### Linearisering - trin 3

- Vi vil gene vide hvordan BNP/arbejder udvikler sig
- ▶ Brug derfor produktionsfunktion  $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$ , der kan omskrives til In  $\tilde{y}_t = \alpha \ln \tilde{k}_t \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_t = \ln \tilde{k}_t$

$$\begin{split} \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}^* &\approx & G'\left(\tilde{k}^*\right) \left(\frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}_t - \frac{1}{\alpha} \ln \tilde{y}^*\right) \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}^* &\approx & G'\left(\tilde{k}^*\right) \left(\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*\right) \end{split}$$

Omskriv lidt og vi får:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t \approx \left[1 - G'\left(\tilde{k}^*\right)\right] \left(\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t\right)$$

$$\overbrace{\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_{t}}^{\text{evækst i } \tilde{y}} = \underbrace{\frac{\text{konvergenshastighed}, \lambda}{\left(1 - G'\left(\tilde{k}^{*}\right)\right)}}_{\text{konvergenshastighed}} \times \underbrace{\frac{\text{eafstand fra } \tilde{y}_{t} \text{ til } \tilde{y}^{*} \text{ (i \%)}}{\left(\ln \tilde{y}^{*} - \ln \tilde{y}_{t}\right)}}_{\text{log}}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

ntroduktion

Andal

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

3-lightingen: OL3

est af modelle denfor SS

#### udenfor SS Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

þkstregnskal Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - D Konklusion

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$$
 .

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Konvergenshastigheden

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$$
 .

lacktriangle Dvs.  $\lambda=1-G'\left( ilde{k}^*
ight)$  måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Konvergenshastigheden

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$$
 .

- ightharpoonup Dvs.  $\lambda=1-G'\left( ilde{k}^*
  ight)$  måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ▶ Ved indsættelse fås:

$$G'\left(\tilde{k}^*\right) \Rightarrow \lambda \approx (1-\alpha)\left(n+g+\delta\right) \approx 0,05$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OL

est af modelle denfor SS

inearisering

Konvergenshastigheden

Konvergensligninger

ldé Vækstregnskab

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$$
 .

- ightharpoonup Dvs.  $\lambda=1-G'\left( ilde{k}^*
  ight)$  måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ► Ved indsættelse fås:

$$G'\left(\tilde{k}^*\right) \Rightarrow \lambda \approx (1-\alpha)\left(n+g+\delta\right) \approx 0,05$$

▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

teady state

Test af modellen i SS

est af model

lentor 55 inearisering

Konvergensligningen

Konvergensligningen

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$$
 .

- ▶ Dvs.  $\lambda = 1 G'(\tilde{k}^*)$  måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ► Ved indsættelse fås:

$$G'\left(\tilde{k}^*\right) \Rightarrow \lambda \approx (1-\alpha)\left(n+g+\delta\right) \approx 0,05$$

- ▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.
- Større  $\alpha \Rightarrow$  langsommere konvergens. Intuition?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est at modeller lenfor SS :----

Konvergenshastigheden

Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda imes (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$$
 .

- ▶ Dvs.  $\lambda = 1 G'(\tilde{k}^*)$  måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- Ved indsættelse fås:

$$G'\left(\tilde{k}^*\right) \Rightarrow \lambda \approx (1-\alpha)\left(n+g+\delta\right) \approx 0,05$$

- Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.
- Større  $\alpha \Rightarrow$  langsommere konvergens. Intuition?
- Større  $\alpha \Rightarrow$  kapital vigtigere  $\Rightarrow$  mindre tendens til aftagende marginal produkt mht.  $k_t \Rightarrow$  langsommere konvergens.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Konvergenshastigheden

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times \left( \ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t \right).$$

- ▶ Dvs.  $\lambda = 1 G'(\tilde{k}^*)$  måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- ► Ved indsættelse fås:

$$G'\left(\tilde{k}^*\right) \Rightarrow \lambda \approx (1-\alpha)\left(n+g+\delta\right) \approx 0,05$$

- ▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.
- Større  $\alpha \Rightarrow$  langsommere konvergens. Intuition?
- Større  $\alpha \Rightarrow$  kapital vigtigere  $\Rightarrow$  mindre tendens til aftagende marginal produkt mht.  $k_t \Rightarrow$  langsommere konvergens.
- Grænsetilfældet hvor  $\alpha=1\Rightarrow$  konstant marginal produkt  $\lambda=?$

Kap 5: Generel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: Ol

denfor SS Linearisering

Konvergenshastigheden Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - D Konklusion

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \lambda \times (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t)$$
 .

- ▶ Dvs.  $\lambda = 1 G'(\tilde{k}^*)$  måler hvor stor en andel, der lukkes af det resterende gap til SS i hver periode.
- Ved indsættelse fås:

$$G'(\tilde{k}^*) \Rightarrow \lambda \approx (1-\alpha)(n+g+\delta) \approx 0,05$$



- ▶ Dvs. 5% = 1/20 af gabet lukkes i hver periode.
- Større  $\alpha \Rightarrow$  langsommere konvergens. Intuition?
- Større  $\alpha \Rightarrow$  kapital vigtigere  $\Rightarrow$  mindre tendens til aftagende marginal produkt mht.  $k_t \Rightarrow$  langsommere konvergens.
- Grænsetilfældet hvor  $\alpha=1\Rightarrow$  konstant marginal produkt  $\lambda=?$
- Med konvergenshastigheden  $\lambda$ , hvor mange år tager før dét indledende gap i BNP/arbejder,  $\ln \tilde{y}^* \ln \tilde{y}_t$ , er halveret?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

eady state

SS modellen i

Test af modellen Idenfor SS

Konvergenshastigheden

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab Vækstregnskab - Di

## Udledning af konvergensligning - trin 4

Omskriv ovenstående ligning og indsæt

$$1 - G'(\tilde{k}^*) \equiv \lambda$$
:

$$\begin{split} \ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t &\approx \left[1 - G'\left(\tilde{k}^*\right)\right] \left(\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t\right) \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_{t+1} &= \lambda \ln \tilde{y}^* + (1 - \lambda) \ln \tilde{y}_t. \end{split}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Konvergensligningen

## Udledning af konvergensligning - trin 4

• Omskriv ovenstående ligning og indsæt  $1 - G'(\tilde{k}^*) \equiv \lambda$ :

$$\begin{split} \ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t &\approx \left[1 - G'\left(\tilde{k}^*\right)\right] \left(\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t\right) \Leftrightarrow \\ \ln \tilde{y}_{t+1} &= \lambda \ln \tilde{y}^* + (1 - \lambda) \ln \tilde{y}_t. \end{split}$$

▶ 1.-ordens lineær differensligning i ln  $\tilde{y}_t$ . Løsning: ln  $\tilde{y}_t = f(t, \tilde{y}_0)$  der opfylder ovenstående ligning.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse af nodellen Tilde-variable Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i

est af modellen denfor SS

Linearisering Konvergenshastighede Konvergensligningen

onvergensiigninge ækstreønskah

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

### Løsningen af differenslignings - trin 4

Fra noten om differensligninger ved vi, at én lineær 1. ordens diff ligning,  $x_{t+1} = ax_t + b$ , har følgende løsning:

$$x_t = a^t(x_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable Transitionsligningen

teady state

Fest af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

denfor SS

nearisering onvergenshastighed

#### Konvergensligningen

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK

## Løsningen af differenslignings - trin 4

Fra noten om differensligninger ved vi, at én lineær 1. ordens diff ligning,  $x_{t+1} = ax_t + b$ , har følgende løsning:

$$x_t = a^t(x_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a} \ (a \neq 1)$$

► Anvend denne løsningsformel:

$$\begin{array}{rcl} & \ln \tilde{y}_t & = & (1-\lambda)^t \left( \ln \tilde{y}_0 - \frac{\lambda \ln \tilde{y}^*}{1-(1-\lambda)} \right) + \\ & \frac{\lambda \ln \tilde{y}^*}{1-(1-\lambda)} & \Leftrightarrow & \\ & \ln \tilde{y}_t & = & \ln \tilde{y}^* + (1-\lambda)^t \left( \ln \tilde{y}_0 - \ln \tilde{y}^* \right) \Leftrightarrow \\ & \ln \tilde{y}_t & = & \left[ 1 - (1-\lambda)^t \right] \ln \tilde{y}^* + (1-\lambda)^t \ln \tilde{y}_0 \end{array}$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

malyse at nodellen Tilde-variable Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

est af modelle denfor SS

Linearisering Konvergenshastighede Konvergensligningen

/ækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

ightharpoonup Nu: omskrive på ovenstående, så vi får en testbar ligning, der siger noget om vækstraten i  $y_t$  udenfor SS

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

. . . .

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

teady state

Fest af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

inearisering onvergenshastighed

Konvergensligningen

Vækstregnskal

ldé Vækstregnskab

Konklusion

- Nu: omskrive på ovenstående, så vi får en testbar ligning, der siger noget om vækstraten i  $y_t$  udenfor SS
- ▶ Indsæt et specifikt tidspunkt T (dvs. t = T):

$$\ln \tilde{y}_{\mathcal{T}} = \left[1 - \left(1 - \lambda\right)^{\mathcal{T}}\right] \ln \tilde{y}^* + \left(1 - \lambda\right)^{\mathcal{T}} \ln \tilde{y}_0,$$

herefter træk In $\tilde{y}_0$  fra på begge sider:

$$\ln \tilde{y}_{\mathcal{T}} - \ln \tilde{y}_{0} = \left[1 - (1 - \lambda)^{\mathcal{T}}\right] \left(\ln \tilde{y}^{*} - \ln \tilde{y}_{0}\right)$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

. . . . .

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

55-ligningen: C

est af modelle denfor SS

inearisering Convergenshastighed

Konvergensligningen

ldé Vækstregnskab

- Nu: omskrive på ovenstående, så vi får en testbar ligning, der siger noget om vækstraten i  $y_t$  udenfor SS
- ▶ Indsæt et specifikt tidspunkt T (dvs. t = T):

$$\ln \tilde{y}_{\mathcal{T}} = \left[1 - (1 - \lambda)^{\mathcal{T}}\right] \ln \tilde{y}^* + (1 - \lambda)^{\mathcal{T}} \ln \tilde{y}_0,$$

herefter træk In  $\tilde{y}_0$  fra på begge sider:

$$\ln \tilde{y}_{\mathcal{T}} - \ln \tilde{y}_{0} = \left[1 - \left(1 - \lambda\right)^{\mathcal{T}}\right] \left(\ln \tilde{y}^{*} - \ln \tilde{y}_{0}\right)$$

▶ ⇒ næste slide

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Madal

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse af nodellen Tilde-variable

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: O

est af modelle denfor SS

Linearisering Konvergenshastighe

Konvergensligningen

Idé
Vækstregnskab
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK

▶ Dividér med T, indsæt  $\ln \tilde{y}_t = \ln y_t - \ln A_t$  for både t = T og t = 0 og omarrangér (dvs. $\ln \tilde{y}_T = \ln y_T - \ln A_T$  og  $\ln \tilde{y}_0 = \ln y_0 - \ln A_0$ ):

$$\frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} = \frac{\overbrace{\ln A_T - \ln A_0}^{\approx g}}{T} + \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} \left( \ln A_0 + \ln \tilde{y}^* - \ln y_0 \right).$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

teady state

SS modellen i

SS-ligningen: OLS

denfor SS
Linearisering

Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

#### Konvergensligningen - intuition

Konvergensligningen:

$$\frac{\overbrace{\ln y_T - \ln y_0}}{T} = \underbrace{\frac{\text{teknologisk vækst}}{g} + \\ \underbrace{\frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} \left(\ln A_0 + \ln \tilde{y}^* - \ln y_0\right)}_{\text{teknologisk vækst}}.$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modellen denfor SS -inearisering

Konvergensligningen

ldé
Vækstregnskab
Vækstregnskab
Vækstregnskab

## Konvergensligningen - test

Nu skal vi bruge at  $\ln \tilde{y}^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} [\ln s - \ln (n+g+\delta+ng)]$ :

$$\frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} = g + \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} \ln A_0$$

$$-\frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} \ln y_0 + \frac{\beta_2}{T}$$

$$\frac{\beta_2}{T} \ln s - \ln (n + g + \delta + ng)$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Madal

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady stat

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

Test af modellen

Linearisering
Konvergenshastighede

Konvergensligningen

Vækstregn Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - D Konklusion

### Konvergensligningen - test

Dermed har vi følgende regressionsligning:

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Konvergensligningen

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

I inearisering

inearisering onvergenshastighed

Konvergensligningen

ækstregnsk: Ié

Vækstregnskab Vækstregnskab - D Konklusion

Dermed har vi følgende regressionsligning:

$$\frac{\ln y_{i,2003} - \ln y_{i,1960}}{43} = \beta_0 - \beta_1 \ln y_{i,1960} + \beta_2 \left[ \ln s_i - \ln (n_i + 0,075) \right] + \varepsilon_i,$$

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

Test af modelle udenfor SS

inearisering Konvergenshastighed

Konvergensligningen

/ækstregnskab Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - D Konklusion

▶ Dermed har vi følgende regressionsligning:

$$\begin{array}{ll} \frac{\ln y_{i,2003} - \ln y_{i,1960}}{43} & = & \beta_0 - \beta_1 \ln y_{i,1960} + \\ & & \beta_2 \left[ \ln s_i - \ln \left( n_i + 0,075 \right) \right] + \varepsilon_i, \end{array}$$

► Hvor  $y_{T=43}$  er BNP/arbejder i 2003 og  $y_{t=0}$  er BNP/arbejder i 1960.

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

SS
SS-ligningen: OLS

Test af modellen udenfor SS

Linearisering Konvergenshastighed

Konvergensligningen

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

Dermed har vi f
ølgende regressionsligning:

Dermed har vi lølgende regressionsligning

 $\begin{array}{ll} \frac{\ln y_{i,2003} - \ln y_{i,1960}}{43} & = & \beta_0 - \beta_1 \ln y_{i,1960} + \\ & & \beta_2 \left[ \ln s_i - \ln \left( n_i + 0,075 \right) \right] + \varepsilon_i, \end{array}$ 

- ▶ Hvor  $y_{T=43}$  er BNP/arbejder i 2003 og  $y_{t=0}$  er BNP/arbejder i 1960.
- Denne ligning kan vi bruge til at holde den generelle Solowmodel op i mod data.

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

eady state

SS SS-ligningen: OLS

udenfor SS
Linearisering

Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

▶ Dermed har vi følgende regressionsligning:

$$\begin{array}{ll} \frac{\ln y_{i,2003} - \ln y_{i,1960}}{43} & = & \beta_0 - \beta_1 \ln y_{i,1960} + \\ & & \beta_2 \left[ \ln s_i - \ln \left( n_i + 0,075 \right) \right] + \varepsilon_i, \end{array}$$

- ▶ Hvor  $y_{T=43}$  er BNP/arbejder i 2003 og  $y_{t=0}$  er BNP/arbejder i 1960.
- Denne ligning kan vi bruge til at holde den generelle Solowmodel op i mod data.
- Bemærk vi gik hele den lange 'lineariseringsvej' for at få én linær ligning frem, fordi vi ellers ikke ville kunne teste modellen vha. OLS.

Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater:  $\hat{\beta}_1=0,006,~(sf=0,0015).~\hat{\beta}_2=0,016,~(sf=0,0025).$ 

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen

Tilde-variable Transitionsligningen

teady state

Fest af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modellen denfor SS

inearisering Convergenshastighed

Konvergensligningen

/ækstregnskal Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

- Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater:  $\hat{\beta}_1=0,006,~(sf=0,0015).~\hat{\beta}_2=0,016,~(sf=0,0025).$
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv.  $\beta_1$  og  $\beta_2$ ?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

inearisering Konvergenshastighed

Konvergensligningen

ækstregnskal 14

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - D

Vækstregnskab Konklusion

- Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater:  $\hat{\beta}_1=0,006,~(sf=0,0015).~\hat{\beta}_2=0,016,~(sf=0,0025).$
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv.  $\beta_1$  og  $\beta_2$ ?

$$\beta_1 = \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} = \frac{1 - (1 - 0.05)^{43}}{43} = 0,021.$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

est af modelle denfor SS

earisering nvergenshastighed

Konvergensligningen

ækstregnska Ié

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

- Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater:  $\hat{\beta}_1=0,006,~(sf=0,0015).~\hat{\beta}_2=0,016,~(sf=0,0025).$
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv.  $\beta_1$  og  $\beta_2$ ?

$$\beta_1 = \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} = \frac{1 - (1 - 0.05)^{43}}{43} = 0,021.$$

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010.$$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen:

denfor SS
.inearisering

Konvergensligningen

-akatraanakah

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater:  $\hat{\beta}_1=0,006,~(sf=0,0015).~\hat{\beta}_2=0,016,~(sf=0,0025).$
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv.  $\beta_1$  og  $\beta_2$ ?

$$\beta_1 = \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} = \frac{1 - (1 - 0.05)^{43}}{43} = 0,021.$$

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010.$$

▶ Hvad er konfidensintervallerne hhv. for  $\hat{\beta}_1$  og  $\hat{\beta}_2$ ?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OI

denfor SS
Linearisering

Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater:  $\hat{\beta}_1=0,006,~(sf=0,0015).~\hat{\beta}_2=0,016,~(sf=0,0025).$
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv.  $\beta_1$  og  $\beta_2$ ?

$$\beta_1 = \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} = \frac{1 - (1 - 0.05)^{43}}{\frac{43}{100}} = 0,021.$$

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010.$$

- ▶ Hvad er konfidensintervallerne hhv. for  $\hat{\beta}_1$  og  $\hat{\beta}_2$ ?
  - 95% KI  $\hat{eta}_1 \pm 2*sf = [0,003;0,009]$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: Ol

denfor SS

Linearisering

Konvergenshastigheden

Konvergensligningen

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK



- Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater:  $\hat{\beta}_1=0,006,~(sf=0,0015).~\hat{\beta}_2=0,016,~(sf=0,0025).$
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv.  $\beta_1$  og  $\beta_2$ ?

$$\beta_1 = \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} = \frac{1 - (1 - 0.05)^{43}}{43} = 0,021.$$

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010.$$

- ▶ Hvad er konfidensintervallerne hhv. for  $\hat{\beta}_1$  og  $\hat{\beta}_2$ ?
  - 95% KI  $\hat{\beta}_1 \pm 2 * sf = [0,003;0,009]$
  - 95% KI  $\hat{\beta}_2 \pm 2 * sf = [0,011;0,021]$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

ntroduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: C

udenfor SS
Linearisering
Konvergenshastigheden
Konvergensligningen

#### /ækstregnskah

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab

Vækstregnskab - Di Konklusion

- Stikprøve med 65 lande: empiri foreslår følgende estimater:  $\hat{\beta}_1=0,006,~(sf=0,0015).~\hat{\beta}_2=0,016,~(sf=0,0025).$
- ▶ Hvad er vores teoretiske forventning til hhv.  $\beta_1$  og  $\beta_2$ ?

$$\beta_1 = \frac{1 - (1 - \lambda)^T}{T} = \frac{1 - (1 - 0.05)^{43}}{\frac{43}{100}} = 0,021.$$

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{1-\alpha} = 0,021 \frac{1/3}{1-1/3} = 0,010.$$

- ▶ Hvad er konfidensintervallerne hhv. for  $\hat{\beta}_1$  og  $\hat{\beta}_2$ ?
  - 95% KI  $\hat{\beta}_1 \pm 2 * sf = [0,003;0,009]$
  - 95% KI  $\hat{\beta}_2 \pm 2 * sf = [0,011;0,021]$
- ► Hvad er konklusionen?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

ntroduktion

Andel

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

ady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: Ol

denfor SS .inearisering Konvergenshastigheder

Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

# Konklusion - konvergensligningen

▶ Teoretisk  $\beta_1$  for stor ift. empirisk estimat,  $\hat{\beta}_1 \Rightarrow$  teoretisk konvergenshastighed for høj ift. empirisk.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

Analyse af modellen Tilde-variable Transitionsligninger

eady state

est af modellen

SS\_ligningen: OLS

Test af modell

denfor SS inearisering

Konvergenshastighed Konvergensligningen

onvergensligningen

Vækstregn Idé

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab -

Konklusion

### Konklusion - konvergensligningen

- ▶ Teoretisk  $\beta_1$  for stor ift. empirisk estimat,  $\hat{\beta}_1 \Rightarrow$  teoretisk konvergenshastighed for høj ift. empirisk.
- ▶ Teoretisk  $\beta_2$  for lav ift. empirisk estimat,  $\hat{\beta}_2 \Rightarrow$  effekten af at øge s eller mindske n på væksten er større i virkeligheden ift. hvad vi forventer.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Andal

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligninger

st af modellen enfor SS nearisering

nearisering onvergenshastighe

Konvergensligningen

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK



- ▶ Teoretisk  $\beta_1$  for stor ift. empirisk estimat,  $\hat{\beta}_1 \Rightarrow$  teoretisk konvergenshastighed for høj ift. empirisk.
- ► Teoretisk  $\beta_2$  for lav ift. empirisk estimat,  $\hat{\beta}_2 \Rightarrow$  effekten af at øge s eller mindske n på væksten er større i virkeligheden ift. hvad vi forventer.
- ► Konklusionen på  $\beta_2$  passer nogenlunde ok med konklusionen fra SS ligningen.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

lodel

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OL

est af modelle denfor SS

inearisering onvergenshastighed

### Konvergensligningen

ldé
Vækstregnskab
Vækstregnskab - DK



• Hvis vi kan øge teoretisk  $\alpha$  ved at udvide  $kapitalbegrebet \Rightarrow$ 

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Konvergensligningen

- Hvis vi kan øge teoretisk α ved at udvide kapitalbegrebet ⇒
- ▶ Lavere teoretisk  $\lambda$ , større teoretisk effekt af s og n på vækst.  $\Rightarrow$

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen Tilde-variable

teady state

\_\_\_\_

SS

o-lightingen. OL.

est af modellen denfor SS

nearisering onvergenshastighed

Konvergensligningen

/ ækstregn: Idé

Idé Vækstregnskab Vækstregnskab

- ► Hvis vi kan øge teoretisk α ved at udvide kapitalbegrebet ⇒
- Lavere teoretisk λ, større teoretisk effekt af s og n på vækst. ⇒
- ▶ Bedre overensstemmelse ml. empiri og teori.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

ntroduktion

. . .

Modellens ligninger Kausalanalyse

> nodellen Tilde-variable Transitionsligningen

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OL

Fest af modelle Idenfor SS

inearisering Konvergenshastighed

Konvergensligningen

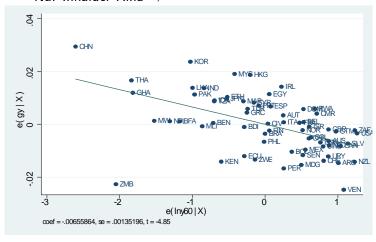
/ækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion



### Er Kina's vækstproces særlig?

► I den forrige 65-lande-stikprøve er Kina ikke inkluderet.
Nu: Inkuldér Kina ⇒



▶ Passer Kina ind i vores Solowmodel med: stort gap (=lavt initialt BNP/arbejder) og høj vækst!?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

IIILIOGUKLIOI

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

> nodellen Filde-variable

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

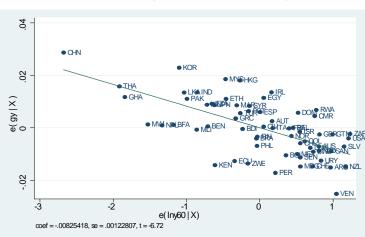
udenfor SS
Linearisering
Konvergenshastigheden
Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - E Konklusion

# Er Kina's vækstproces særlig?

▶ Nu uden Zimbabwe (men stadig med Kina)



Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Mar Ial

Modellens ligninger

nodellen Tilde-variable

tendy state

eady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen: OLS

udenfor SS
Linearisering
Konvergenshastigheder
Konvergensligningen

ækstregnskab dé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DI Konklusion

## Er Kina's vækstproces særlig?

Blog på 'Altandetlige.dk': Carl-Johan Dalgaard (prof. ØI) anskuer Kina's vækstproces på en anden, men alligevel tilsvarende måde ('bag-på-konvolutten beregning'):

http://altandet lige.dk/blog/carljohandalgaard/kina-vaekstmirakel-558

- ide: Kina ikke er særlig, men følger bare Solowmodellen forudsigelser med højt vækst pga. stort initialt gap i indkomst.
- Antagelser:
  - USA er i SS
  - ▶ Konvergensrate  $\lambda = 0,02$  (ifølge R. Barro men hvad sagde Solowmodellen?)
  - g = 0.015 (eller deromkring)
- Fakta:
  - 6% vækst pr. år fra 1978 til 2011
  - ► 1978:  $\frac{y_{china}}{y_{us}^*} = 0,04$

Kap 5: Generel

Makro I

ntroduktion

Vlodel

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable Transitionsligninge

ady state

Test af modellen i SS

S-ligningen: Ol

enfor SS nearisering onvergenshastigheden

Konvergensligningen

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

## Er Kina's vækstprocess særlig?

Konsistenstjek: Hvad skal Kina's SS BNP/arbejder være ift. USA for at disse tal giver mening i en Solow kontekst?

$$\begin{array}{ccc} \frac{\ln y_T - \ln y_0}{T} & = & g + \\ & & \frac{1 - \left(1 - \lambda\right)^T}{T} \left( \ln \frac{\tilde{y}^*_{china}}{\tilde{y}^*_{us}} - \ln \frac{\tilde{y}_{0,china}}{\tilde{y}^*_{us}} \right) \end{array}$$

- ▶ Vi har (umiddelbart) kun data for In  $\frac{y_{0,china}}{y_{us}^*} = 0,04$
- hvis In  $A_0$  (dvs. i 1973) er ens for begge lande, så er In  $\frac{\tilde{y}_{0,china}}{\tilde{v}^*}=0$ , 04
- ► Med tal:

$$\begin{array}{rcl} 0.06 & = & 0.015 + \\ & & \frac{1 - \left(1 - 0.02\right)^{33}}{33} \left( \ln \frac{\tilde{y}^*_{china}}{\tilde{y}^*_{us}} - \ln 0.04 \right) \end{array}$$

 $\frac{y_{china}}{\tilde{y}_{us}^*} = 0,85$ . Urealistisk?



Kap 5: Generel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

teady state

Test af modellen i

denfor SS

Linearisering

Konvergenshastigheden

Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK Konklusion

#### Kap 5: Generel Solowmodel

#### Makro I

Introduktion

### Andal

Modellens ligninge Kausalanalyse

> modellen Tilde-variable

Cir. I. i. i.

### teady state

SS Test af modellen i

SS-ligninge

Test af model udenfor SS

Linearisering Konvergenshast

Konvergenshas Konvergenslign

Vækstregnskab

### ldé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

- Hvor kommer væksten fra, hvis man ser på fx DK fra 1960-2000?
- Kapital, uddannelse (human kapital) eller TFP?
- Bruges eksempelvis til at undersøge DK's vækst de sidste ti år.
- Kun én antagelse: produktionsfunktionen.

## Vækstregnskab

Antag at produktionen er givet ved Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^{\alpha} \left( A_t L_t \right)^{1-\alpha}.$$

Pr. arbejder:

$$y_t = k_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}$$
.

▶ Tag In og differens fra t til T og dividér med T - t:

$$\underbrace{\frac{\mathbf{g}_{t,T}^{\mathbf{y}}}{T-t}}_{\mathbf{g}_{t,T}^{\mathbf{y}}} = \alpha \underbrace{\frac{\mathbf{g}_{t,T}^{\mathbf{k}}}{T-t}}_{\mathbf{g}_{t,T}^{\mathbf{y}}} + (1-\alpha) \underbrace{\frac{\mathbf{g}_{t,T}^{\mathbf{k}}}{T-t}}_{\mathbf{g}_{t,T}^{\mathbf{y}}}.$$

▶ Hvor fx  $g_{t,T}^y$  er den gennemsnitlige (årlige) vækstrate i BNP/arbejder fra t til T

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

eady state

est af modellen i S

SS-ligningen: OLS

lest af modellen udenfor SS Linearisering Konvergenshastigheden Konvergensligningen

/ækstregnskal Idé

ldé Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK Konklusion

Modellens ligninger Kausalanalyse

modellen
Tilde-variable
Transitionsligningen

Steady state

Test af modellen i

SS-ligningen: OLS

Test of mode

lest af modellen idenfor SS Linearisering Konvergenshastighed

Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK

Vækstregnskabsformel:

$$g_{t,T}^{y} = \alpha g_{t,T}^{k} + (1 - \alpha) g_{t,T}^{A}$$

- ► Eksempel: Danmark fra 1950-2010. Her var den gnst. vækstrate i y:  $g_{50,10}^y = 0,022$ .
- ▶ Vi har data for kapital (dvs.  $k_T$ ,  $k_t$  og dermed  $g_{t,T}^k$ ) fra PWT,  $g_{50.10}^k = 0,034$ , og vi ved at  $\alpha = 1/3$ .

Analyse af modellen Tilde-variable

Transitionsligning

T- 1 C - 1-11

Fest of model

lenfor SS inearisering

Konvergensligninge

Vækstregnskab Idé

Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

► Hvad med  $g_{50.10}^A$ ? Ingen data for teknologisk vækst...

► Men hvis vi indsætter  $g_{50,10}^{\gamma} = 0$ , 022,  $g_{50,10}^{k} = 0$ , 034 og  $\alpha = 1/3$  er  $g_{50,10}^{A}$  den ukendte:

$$g_{50,10}^A = \frac{g_{50,10}^y - \alpha g_{50,10}^k}{1 - \alpha} = 0,016.$$

- Vi siger at  $g_{50,10}^A$  er residualt beregnet. Fortolkning: Måler alt det vi ikke har med i modellen.
- Kan indeholde teknologi, men også institutioner, uddannelse, mv.

## Vækstregnskab - Bidrag

Dvs. væksten kan dekomponeres i en kapitalakkumulationsdel og en TFP-del som måler "alt andet":

$$g_{t,T}^{y} = \overbrace{\alpha g_{t,T}^{k}}^{\text{kapitalakkmulation}} + \overbrace{(1-\alpha) \, g_{t,T}^{A}}^{\text{TFP}}$$

- ► For DK, 1950-2010:  $\alpha g_{50,10}^k = 0,034/3 = 0,011$  og  $g_{50,10}^A (1-\alpha) = (1-1/3) \times 0,016 = 0,011$ .
- Dvs. vækstbidragene fra kapitalakkumulation og TFP er ca. lige store.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Andel

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

teady state

Test af modellen i SS

S-ligningen: (

denfor SS
inearisering
convergenshastigheder

Vækstregnskab

ldé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

### 2-min-øvesle

▶ Vækstregnskab i DK 2000-10:  $g_{00,10}^y = 0,003,$  $g_{00,10}^k = 0,030$ 

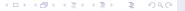
- 1. Hvor stort var vækstbidraget fra kapital,  $\alpha g_{00,10}^k$ ?
- 2. Hvad gav det største bidrag til væksten, kapital eller TFP?
- 3. Hvor stor var TFP-væksten,  $g_{00,10}^A$ ?

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I



Vækstregnskab - DK



## Konklusion - vækstregnskab DK 2000-10

- Den lave vækst skyldes ikke kapitalakkumulation.
- Hvis bidraget fra kapitalakkumulation fraregnes er residualet, TFP-vækst, negativt!
- Dvs. spm om hvad der skabte den lave vækst i det sidste årti er (indtil videre) uløst.
- Dog en lidt kort periode. Finanskrise kan påvirke resultatet.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

> nodellen Tilde-variable

> > eady state

Test af modellen i

SS-ligningen: C

est af modelle denfor SS

inearisering Konvergenshastighed Konvergensligningen

Vækstregnskab Idé Vækstregnskab

Vækstregnskab - DK



### Konklusion - vækstregnskab

- Redskab til at dekomponere væksten.
- ► TFP: residual som måler alt det vi ikke har data for i produktionsfunktionen.
- Senere: udvidelse med human kapital ⇒ bedre forståelse af residualet.

Kap 5: Generel Solowmodel

Makro I

Introduktion

Model

Modellens ligninger Kausalanalyse

nodellen Tilde-variable

teady state

Test af modellen i SS

SS-ligningen:

est af modelle denfor SS

inearisering

Vækstregnskab

Idé Vækstregnskab Vækstregnskab - DK

