

1 Einleitung

Der Vorliegende Bericht fasst die Inhalte des Programmierpraktikums zur Vorlesung Numerische Strömungssimulation im Sommersemester 2012 bei Dr.-Ing. Bernd Binninger und Dipl.-Ing. Jens Henrik Göbbert zusammen. Die Programmieraufgaben lassen sich in vier Themen unterteilen die in diesem Bericht enthalten sind. Ziel des Praktikums war es einen eigenen Strömungslöser mit Gittergenerierung zu implementieren und anhand verschiedener Testfälle zu validieren. Zuerst befassten wir uns mit der Potentialströmung und einem passenden Lösungsverfahren. Anschließend fertigten wir einen Gittergenerator an, den wir im nächsten Schritt als Grundlage für die Lösung der Konvektions-Diffusions-Gleichung und anschließend der Impulsgleichung verwendet haben.

2 Potentialströmung

Potentialströmungen beschreiben das Strömungsfeld unter der Annahme einer inkompressiblen, reibungsfreien, wirbelfreien, zweidimensionalen Strömung. Die Geschwindigkeiten des Fluids ergeben sich dann als Ableitung der Potential- bzw. Stromfunktion.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ und } v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Beschreibung der Geschwindigkeiten und unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung lässt sich dann die 2D-Laplace Gleichung für die Potentialfunktion Φ beschreiben. Ausgangspunkt für die Beschreibung der Strömung ist die Kontinuitätsgleichung, welche unter Berücksichtigung von (1) eine 2D-Laplace Gleichung für die Potentialfunktion Φ darstellt.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \Delta \Phi = 0 \quad (4)$$

Neben der Potentialfunktion erfüllt ebenfalls die Stromfunktion Ψ eine Laplacegleichung. Charakteristisch für Potentialströmungen ist, dass die Isolinien der Potentialfunktion und Stromfunktion Senkrecht aufeinander stehen. Dies wird im folgenden auch als Kriterium für die Bewertung unseres Programms benutzt. Zusätzlich zu der Laplacegleichung benötigt eine PDE auch noch Randbedingungen die durch die gegebene Geometrie und z.B. Haftbedingungen vorgegeben sind.

2.1 Diskretisierung auf einem äquidistanten orthogonalen Gitter

Um die Laplacegleichung (2) zu lösen müssen die Ableitungen numerisch mittels finite Differenzen Approximiert werden. Auf einem äquidistanten lassen sich die Laplacegleichung $\Delta \Phi = 0$ schreiben als

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (5)$$

Dabei bezeichnet i den Laufindex in x-Richtung, also $x_i = \Delta x \cdot i$ und j analog den Laufindex in y-Richtung. Um eine Iterationsvorschrift für $\Phi_{i,j}$ zu erhalten, wird Gleichung (5) umgeformt.

$$\Phi_{i,j} = \frac{\Delta x^2(\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}) + \Delta y^2(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j})}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (6)$$

Um für die Potentialfunktion zu lösen, iterieren wir mit Vorschrift (6) solange über unser Rechengebiet, bis Φ auskonvergiert ist. Das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren sind zwei mögliche Implementierungen. Der Unterschied zwischen den beiden Methoden liegt in der Verwendung der benachbarten Gitterpunkte $\Phi_{i\pm 1,j\pm 1}$. Das Jacobi-Verfahren verwendet dabei die Punkte aus

dem Letzten Iterationsschritt, während das Gauß-Seidel-Verfahren schon im momentanen Zeitschritt aktualisierte Punkte berücksichtigt. Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert dabei in unseren Testfällen deutlich schneller als das Jacobi-Verfahren. Als weitere Option der Konvergenzbeschleunigung lässt sich das Gauß-Seidel-Verfahren noch mit einem Relaxationsfaktor versehen, bei dem entweder eine Über- oder eine Unterrelaxation verwendet werden kann.

2.1.1 Testfall Parallelströmung

von links, von unten fehler über zeit u, v, phi

2.1.2 Testfall Wirbel

wirbel unten links in der ecke

2.2 Diskretisierung auf einem äquidisten krummlinigen Gitter

Da in der Realität die Geometrie der Objekte wesentlich komplexer ist, kommt es fast immer zu krummlinigen Integrationsgebieten. Um die Laplacegleichung aber weiter wie gewohnt lösen zu können, versucht man, die physikalische Ebene auf ein rechteckiges Rechengebiet zu transformieren. Dabei transformieren wir die Koordinaten von der $x - y$ -Ebene in die $\xi - \eta$ -Ebene des Rechengebietes. Wodurch sich folgende Beziehungen ergeben

$$x = x(\xi, \eta) \qquad y = y(\xi, \eta) \qquad (7)$$

$$\xi = \xi(x, y) \qquad \eta = \eta(x, y) \qquad (8)$$

Durch diese Abhängigkeiten, ergeben sich beim Berechnen der 2. Ableitungen für die Laplacegleichung zusätzliche Terme, resultierend aus der Kettenregel. Somit transformiert man die Laplacegleichung zu

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial \eta} + \alpha_6 \right) \Phi = 0 \qquad (9)$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ aus den Ableitungen der Beziehungen in (7) und (8) resultieren. Dabei wird einfachheitshalber auf ein Rechengebiet transformiert für das $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ gilt. Somit ergibt sich analog zu (6) die Iterationsvorschrift für $\Phi_{i,j}$ auf einem krummlinigen Gitter zu