

öderder2

# Pratkikumsbericht zur Vorlesung Numerische Strömungssimulation

Thomas Camminaidy (297538), Peter Collienne (296711)

31. August 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Potentialströmung</b>	<b>4</b>
2.1	Diskretisierung auf einem äquidistanten orthogonalen Gitter . . . . .	4
2.1.1	Testfall Parallelströmung . . . . .	5
2.1.2	Testfall Wirbel . . . . .	6
2.2	Diskretisierung auf einem äquidistanten krummlinigen Gitter . . . . .	7
2.2.1	Randbedingungen . . . . .	8
2.2.1.1	Einström- und Ausströmränder . . . . .	8
2.2.1.2	Undurchlässige Wände . . . . .	8
2.2.2	Testfall Diffusor . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Gittergenerierung</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Konvektions-Diffusions Strömung</b>	<b>10</b>
4.1	Diskretisierung . . . . .	10
4.1.1	Testfall nur Diffusion . . . . .	10
4.1.2	Testfall nur Konvektion . . . . .	11
4.1.3	Testfall Diffusion und Konvektion a) . . . . .	11
4.1.4	Testfall Diffusion und Konvektion b) . . . . .	12
4.2	Analytische Lösung . . . . .	12
4.3	Lösung der Impulsgleichung . . . . .	13
4.3.1	Testfall Couette Strömung . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Konvektions-Diffusions Strömung mit Berechnung des Druckfeldes</b>	<b>14</b>
5.1	SIMPLE . . . . .	14
5.1.1	Vorgehen . . . . .	14
5.1.2	Testfall Simple . . . . .	15
5.2	SIMPLER . . . . .	15
5.2.1	Testfall Simpler . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>15</b>

# 1 Einleitung

Der Vorliegende Bericht fasst die Inhalte des Programmierpraktikums zur Vorlesung Numerische Strömungssimulation im Sommersemester 2012 bei Dr.-Ing. Bernd Binniger zusammen. Die Programmieraufgaben lassen sich in vier Themen unterteilen die in diesem Bericht enthalten sind. Ziel des Praktikums war es einen eigenen Strömungslöser mit Gittergenerierung zu implementieren und anhand verschiedener Testfälle zu validieren. Zuerst befassten wir uns mit der Potentialströmung und einem passenden Lösungsverfahren. Anschließend fertigten wir einen Gittergenerator an, den wir im nächsten Schritt als Grundlage für die Lösung der Konvektions-Diffusions-Gleichung und anschließend der Impulsgleichung verwendet haben.

## 2 Potentialströmung

Potentialströmungen beschreiben das Strömungsfeld unter der Annahme einer inkompressiblen, reibungsfreien, wirbelfreien, zweidimensionalen Strömung. Die Geschwindigkeiten des Fluids ergeben sich dann als Ableitung der Potential- bzw. Stromfunktion.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ und } v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Beschreibung der Geschwindigkeiten und unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung lässt sich dann die 2D-Laplace Gleichung für die Potentialfunktion  $\Phi$  beschreiben. Ausgangspunkt für die Beschreibung der Strömung ist die Kontinuitätsgleichung, welche unter Berücksichtigung von (1) eine 2D-Laplace Gleichung für die Potentialfunktion  $\Phi$  darstellt.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \Delta \Phi = 0 \quad (4)$$

Neben der Potentialfunktion erfüllt ebenfalls die Stromfunktion  $\Psi$  eine Laplacegleichung. Charakteristisch für Potentialströmungen ist, dass die Isolinien der Potentialfunktion und Stromfunktion Senkrecht aufeinander stehen. Dies wird im folgenden auch als Kriterium für die Bewertung unseres Programms benutzt. Zusätzlich zu der Laplacegleichung benötigt eine PDE auch noch Randbedingungen die durch die gegebene Geometrie und z.B. Haftbedingungen vorgegeben sind.

### 2.1 Diskretisierung auf einem äquidistanten orthogonalen Gitter

Um die Laplacegleichung (2) zu lösen müssen die Ableitungen numerisch mittels finite Differenzen Approximiert werden. Auf einem äquidistanten lassen sich die Laplacegleichung  $\Delta \Phi = 0$  schreiben als

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (5)$$

Dabei bezeichnet  $i$  den Laufindex in x-Richtung, also  $x_i = \Delta x \cdot i$  und  $j$  analog den Laufindex in y-Richtung. Um eine Iterationsvorschrift für  $\Phi_{i,j}$  zu erhalten, wird Gleichung (5) umgeformt.

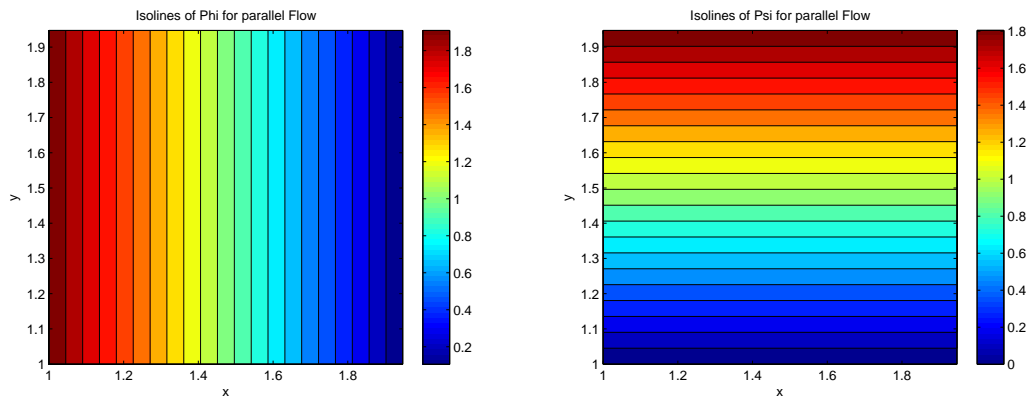
$$\Phi_{i,j} = \frac{\Delta x^2(\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}) + \Delta y^2(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j})}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (6)$$

Um für die Potentialfunktion zu lösen, iterieren wir mit Vorschrift (6) solange über unser Rechengebiet, bis  $\Phi$  auskonvergiert ist. Das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren sind zwei mögliche Implementierungen. Der Unterschied zwischen den beiden Methoden liegt in der Verwendung der benachbarten Gitterpunkte  $\Phi_{i\pm 1,j\pm 1}$ . Das Jacobi-Verfahren verwendet dabei die Punkte aus

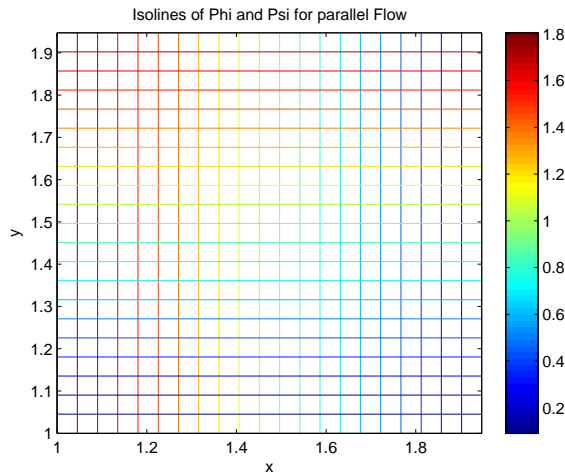
dem Letzten Iterationsschritt, während das Gauß-Seidel-Verfahren schon im momentanen Zeitschritt aktualisierte Punkte berücksichtigt. Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert dabei in unseren Testfällen deutlich schneller als das Jacobi-Verfahren. Als weitere Option der Konvergenzbeschleunigung lässt sich das Gauß-Seidel-Verfahren noch mit einem Relaxationsfaktor versehen, bei dem entweder eine Über- oder eine Unterrelaxation verwendet werden kann.

### 2.1.1 Testfall Parallelströmung

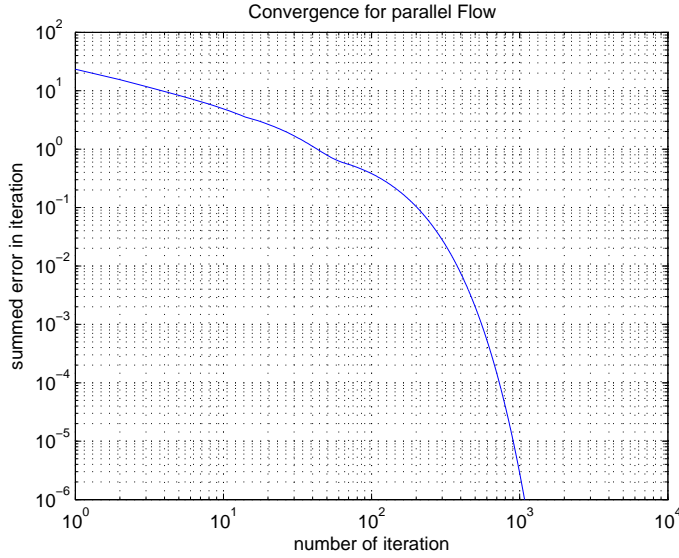
Zu Beginn wählen wir uns einen möglichst einfachen Testfall. Dazu setzen wir  $\Omega = [0, 1]^2$  als Einheitsquadrat welches wir in 20 Punkte in X-Richtung und 20 Punkte in Y-Richtung aufteilen. Als Fehlertoleranz setzen wir  $\epsilon = 1e - 6$ , und setzen das Potential am linken Rand fest auf  $\Phi = 2$  und für den rechten Rand  $\Phi = 0$ . Die beiden Grafiken Zeigen die Isolinien der Potential- und Stromfunktion.



Die folgende Grafik legt die Isolinien von Psi und Phi übereinander. Es zeigt sich, dass diese wie gefordert senkrecht aufeinander stehen.



Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert nach 1079 Schritten. Im nachstehenden Plot ist zu sehen, dass die Konvergenzgeschwindigkeit mit zunehmender Iterationsanzahl zunimmt. Dieses Phänomen lässt sich an mehreren Testfällen vorfinden.



### 2.1.2 Testfall Wirbel

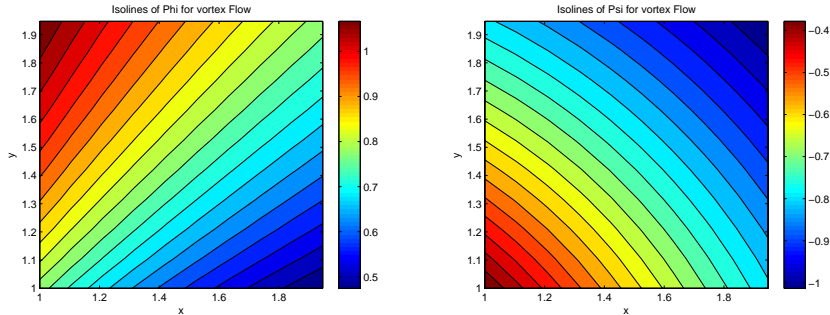
Als zweiten Testfall haben wir die Potentialfunktion für einen Wirbel gewählt. Das Gebiet für diesen Fall ist  $\Omega = [1, 2]^2$  mit erneut 20 Punkten pro Dimension. Der Wirbelmittelpunkt befindet sich im Punkt  $(0, 0)$ . Das Potential für einen Wirbel ergibt sich zu

$$\Phi = \frac{E}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7)$$

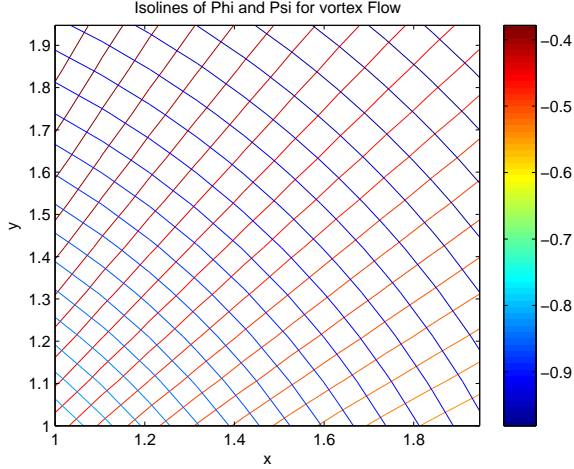
Analog ergibt sich die Stromfunktion zu

$$\Psi = -\frac{E}{2\pi} \sqrt{y^2 + x^2} \quad (8)$$

Der Wirbelmittelpunkt wurde bewusst außerhalb des Gebietes gewählt, da mit der obigen Iterationsvorschrift für  $\Phi$  nur endliche Werte erzeugt werden; im Wirbelmittelpunkt hat das Potential allerdings eine Singularität. In unserem Fall haben wir  $\frac{E}{2\pi} = 1$  gewählt. Zu sehen sind erneut die Isolines der Potential- und Stromfunktion.



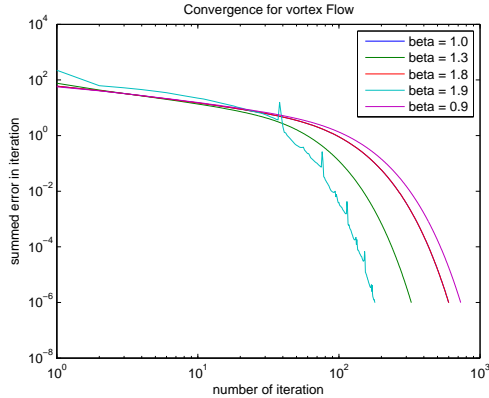
Im folgenden sind die Isolinien überlagert. Es wird auch hier deutlich, dass diese senkrecht aufeinander stehen.



Die Relaxation erstellt in jedem Iterationsschritte die Lösung im Folgeschritt als Linearkombination aus der Lösung im letzten Schritt und dem aktuellen Schritt.

$$\Phi^k = \Phi^{k-1} + \beta(\Phi^{\tilde{k}} - \Phi^{k-1}) \quad (9)$$

Für Die Iteration wurden unterschiedliche Werte für den Relaxationsfaktor gewählt. Dabei sieht man signifikante Unterschiede in der Anzahl der benötigten Iterationsschritte. So benötigt das Gauß-Seidel-Verfahren ohne Relaxation 601 Iterationsschritte um die Toleranz von  $\epsilon = 1e-6$  zu erreichen. Wesentlich schneller konvergiert das Verfahren für  $\beta = 1.8$ . Zusätzlich sind noch die Fehlerplots für  $\beta = 0.9$ ,  $\beta = 1.3$ ,  $\beta = 1.9$  beigefügt.



## 2.2 Diskretisierung auf einem äquidistanten krummlinigen Gitter

Da in der Realität die Geometrie der Objekte wesentlich komplexer ist, kommt es fast immer zu krummlinigen Integrationsgebieten. Um die Laplacegleichung aber weiter wie gewohnt lösen zu können, versucht man, die physikalische Ebene auf ein rechteckiges Rechengebiet zu transformieren. Dabei transformieren wir die Koordinaten von der  $x - y$ -Ebene in die  $\xi - \eta$ -Ebene des Rechengebietes. Wodurch sich folgende Beziehungen ergeben

$$x = x(\xi, \eta) \quad y = y(\xi, \eta) \quad (10)$$

$$\xi = \xi(x, y) \quad \eta = \eta(x, y) \quad (11)$$

Durch diese Abhängigkeiten, ergeben sich beim Berechnen der 2. Ableitungen für die Laplacegleichung zusätzliche Terme, resultierend aus der Kettenregel. Somit transformiert man die Laplace-

gleichung zu

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial \eta} + \alpha_6\right) \Phi = 0 \quad (12)$$

wobei  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  aus den Ableitungen der Beziehungen in (7) und (8) und der gegebenen Geometrie resultieren. Dabei wird Einfachheit halber auf ein Rechteckgebiet transformiert für das  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$  gilt. Somit ergibt sich analog zu (6) die Iterationsvorschrift für  $\Phi_{i,j}$  auf einem krummlinigen Gitter zu

$$\begin{aligned} 8(\alpha_1 + \alpha_2)\Phi_{i,j} &= \Phi_{i-1,j-1}\alpha_3 \\ &+ \Phi_{i,j-1}(4\alpha_2 - 2\alpha_5) \\ &- \Phi_{i+1,j-1}\alpha_3 \\ &+ \Phi_{i-1,j}(4\alpha_1 - 2\alpha_4) \\ &+ \Phi_{i+1,j}(4\alpha_1 + 2\alpha_4) \\ &- \Phi_{i-1,j+1}\alpha_3 \\ &+ \Phi_{i,j+1}(4\alpha_2 + 2\alpha_5) \\ &+ \Phi_{i+1,j+1}\alpha_3 \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.2.1 Randbedingungen

### 2.2.1.1 Einström- und Ausströmränder

Als Randbedingungen für Ein- und Austrittsrand genügt ein einfaches Geschwindigkeitsprofil, dass durch Integration in eine passende Randbedingung für die Potentialgleichung überführt werden kann. In unseren Testfällen beschreiben wir das parallele Einströmen des Fluids in unsere Geometrie, weshalb das Potential an Ein- und Austrittsrand jeweils konstant gesetzt wird.

### 2.2.1.2 Undurchlässige Wände

Auf dem Rand folgt die Strömung der Kontur, da die Potentialströmung eine reibungsfreie Strömung beschreibt. Deshalb gilt auf dem Rand

$$\frac{dh}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{-1} \quad (14)$$

Somit folgt für den transformierten Raum

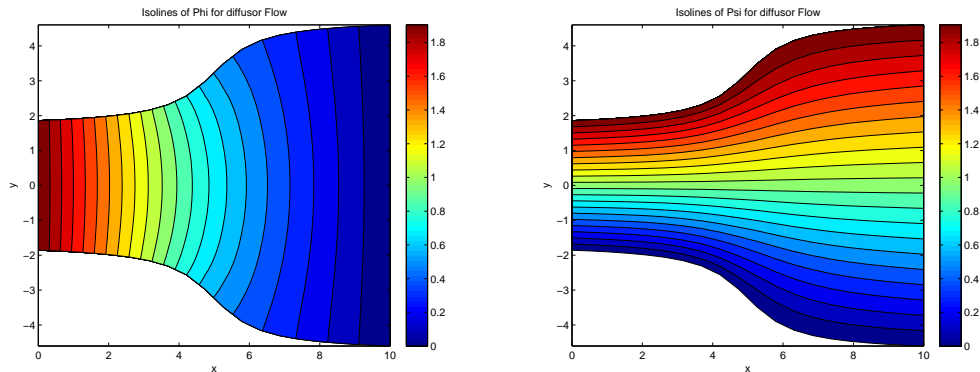
$$\frac{dh}{dx} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{-1} \quad (15)$$

Statt der Anwendung von zentralen finiten Differenzen muss am  $\eta$ -Rand auf die Formulierung mittels einseitiger finiter Differenzen zurückgegriffen werden. Einsetzen der einseitigen Differenzen in  $\eta$ -Richtung in Gleichung (12) liefert eine Vorschrift zur Berechnung von  $\Phi_{0,j}$  bzw.  $\Phi_{N,j}$ . Die notwendige Ableitung  $\frac{dh}{dx}$  wird auch mittels finiter Differenzen aus der vorgegebenen Kontur berechnet. In der Implementierung wird dann in jedem Iterationsschritt zuerst  $\Phi_{0,j}$  und  $\Phi_{N,j}$  bestimmt und im Folgenden die Potentialgleichung für das innere des Gebietes berechnet.

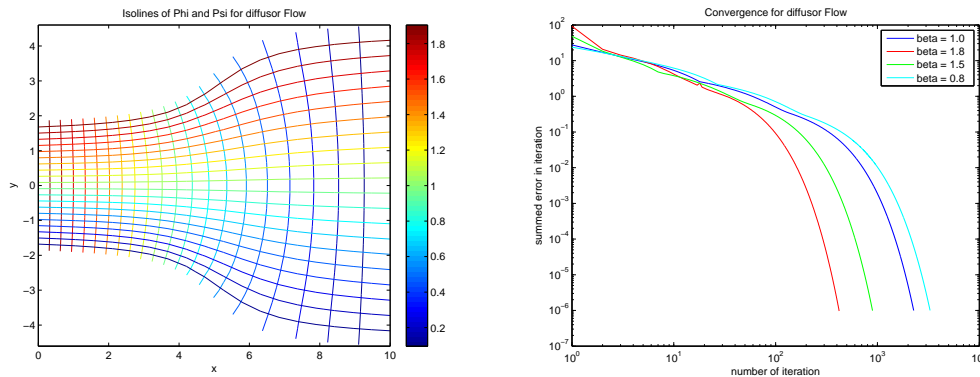
## 2.2.2 Testfall Diffusor

Im folgenden Testfall lösen wir die Potentialgleichung für einen Diffusor. Die Kontur des Diffusors approximieren wir mittels der Funktion  $\tan^{-1}(x)$  bzw.  $-\tan^{-1}(x)$  für Ober- und Unterkante. So erreichen wir ein paralleles Ein- und Ausströmen in unsere Kontur. Die in (12) benötigten Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  werden mittels finiter Differenzen berechnet. Als linke und rechte Randbedingung wird jeweils ein festes Potential vorgegeben. Die beiden folgenden Grafiken zeigen die Isolinien für jeweils die Potential- und Stromlinien.



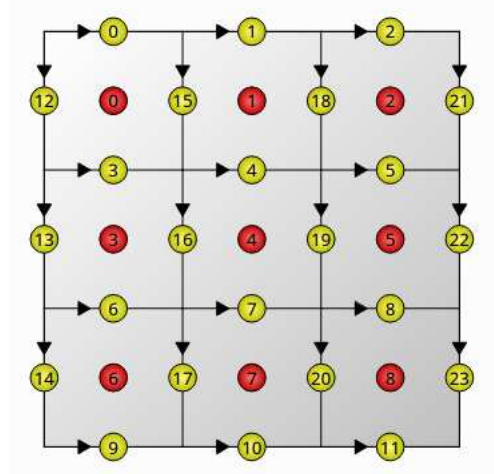


Hier noch einmal übereinander gelegt, so dass man erkennen kann, dass die Isolinen senkrecht aufeinander stehen. Zudem ist auch eine Übersicht über die gegebenen Konvergenzgeschwindigkeiten bei unterschiedlichen Relaxationsfaktoren gegeben.



### 3 Gittergenerierung

Die folgende Konvektions-Diffusions Strömung benötigt zur Berechnung eine Aufteilung des Gebietes in Finite Elemente. Unser Gittergenerator unterteilt das rechteckige Gebiet in eine wählbare Anzahl an Zellen. Jede Zelle hat eine ID und ist umrandet von vier Kanten; Norden, Süden, Osten und Westen, welche auch nummeriert sind. So lässt sich der Fluss über den Rand einer Zelle durch den Fluss über diese vier Kanten beschreiben. Im folgenden ist ein Beispiele eines Gitters zu sehen. Im diesem Fall wurde das Gebiet in 3x3 Teilgebiete unterteilt.



## 4 Konvektions-Diffusions Strömung

Im Gegensatz zur Potentialströmung wird nun eine Strömung mittels der Finite-Elemente Methode (FEM) beschrieben. Ausgangspunkt für die Beschreibung der Strömung ist die integrierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV + \int_{\Omega} \text{div}(\rho v) dV = 0 \quad (16)$$

Welche unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf folgende Form führt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV + \oint_{\partial\Omega} (\rho v) \cdot dA = 0 \quad (17)$$

Zur Lösung wird im folgenden konstante Dichte  $\rho$  angenommen. Soll auch noch Konvektion beschrieben werden, lässt sich die Erhaltungsgleichung formulieren als:

$$\rho \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \phi dV + \int_{\partial\Omega} \rho u \phi - \lambda \frac{\partial}{\partial x} \phi + \rho v \phi - \lambda \frac{\partial}{\partial y} \phi dA = 0 \quad (18)$$

Diese Gleichung wird dann als Ausgangspunkt für die Diskretisierung genommen, da sie die Änderung des Skalars  $\phi$  in abhängigkeit des Flusses über die Grenzen beschreibt.

### 4.1 Diskretisierung

Die naive Herangehensweise zur Approximierung der Strömung führt zu der Vorumu Wir approximieren das Integrationsgebiet durch rechteckige Finite Elemente, so dass der Rand des Gebietes aufgeteilt wird in vier Kanten die im folgenden mit Norden, Osten, Süden und Westen bezeichnet werden. Die Änderung von  $\phi$  lässt sich dann wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\Delta t} = \sum_i f_i \cdot l_i \quad (19)$$

Wobei  $l_i = \Delta y$  für  $i = \text{Westen, Osten}$  und  $l_i = \Delta x$  für  $i = \text{Norden, Süden}$ . Mit dem Fluss

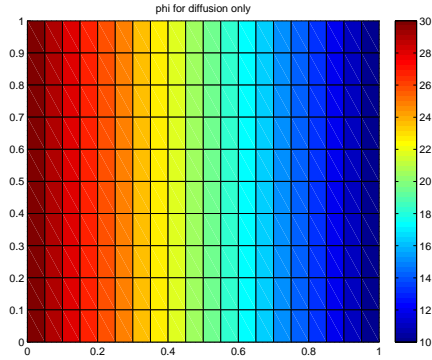
$$f_{\text{Ost}} = -(\rho u \phi_{\text{Ost}} - \lambda \frac{\partial}{\partial x} \phi_{\text{Ost}}), \quad f_{\text{West}} = \rho u \phi_{\text{West}} - \lambda \frac{\partial}{\partial x} \phi_{\text{West}} \quad (20)$$

$$f_{\text{Nord}} = -(\rho v \phi_{\text{Nord}} - \lambda \frac{\partial}{\partial y} \phi_{\text{Nord}}), \quad f_{\text{Süd}} = \rho v \phi_{\text{Süd}} - \lambda \frac{\partial}{\partial y} \phi_{\text{Süd}} \quad (21)$$

Da unser vorgegebener Fluss aus Richtung Süd-West einströmt, verwenden wir für  $\frac{\partial}{\partial x} \phi$  und  $\frac{\partial}{\partial y} \phi$  das Upwind-Schema, also  $\frac{\partial}{\partial x} \phi \approx \frac{1}{\Delta x}(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j})$  und  $\frac{\partial}{\partial y} \phi \approx \frac{1}{\Delta y}(\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1})$ .

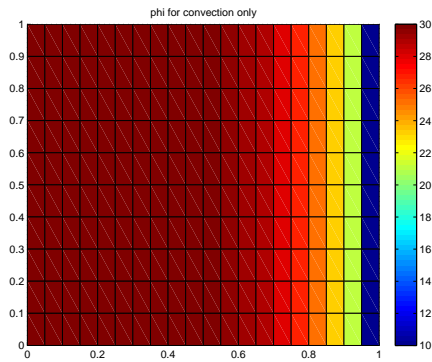
#### 4.1.1 Testfall nur Diffusion

Die folgenden Testfälle sind alle auf dem selben Gitter der Dimension 20x10 gerechnet worden. Zuerst setzten wir  $u = 0$  und  $v = 0$  um ausschließlich Diffusion zu simulieren. Wir wählen  $\lambda = 0.1$  und so stellt sich in der Theorie ein lineares Profil für  $\phi$  zwischen dem linken und rechten Rand ein. Dies zeigt sich auch in unserer Berechnung.



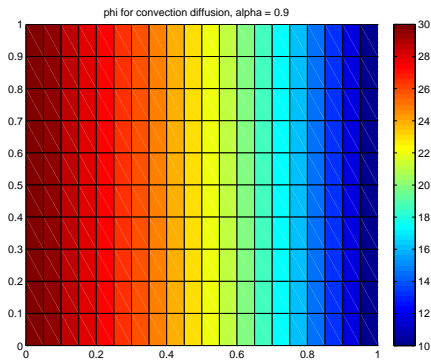
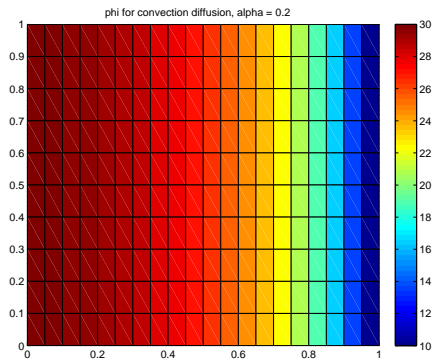
#### 4.1.2 Testfall nur Konvektion

Um zu testen, ob auch die Konvektion korrekt simuliert wird, setzen wir im folgenden  $u = 1$ ,  $v = 0$  und  $\lambda = 0$ . Es ist zu erwarten, dass der Potentialwert von links über das Gitter getragen wird und sich ein nicht lineares Gefälle hin zum rechten Rand einstellt. Bei kurzer Simulationsdauer wird der Wert des linken Randes weniger weit in das Gebiet hineingetragen. Lässt man  $t \rightarrow \infty$ , so würde sich im ganzen Gebiet der Wert des linken Randes einstellen.



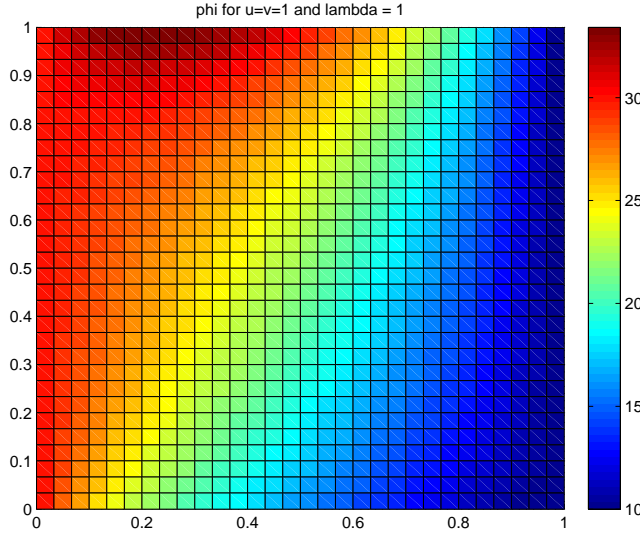
#### 4.1.3 Testfall Diffusion und Konvektion a)

Führt man nun beide Effekte zusammen so wirken die beiden Phänomen einander entgegen. So trägt die Konvektion das Potential des Einströmrandes in das Rechengebiet, die Diffusion wirkt dem entgegen, indem sie für einen Ausgleich der Potentiale zwischen Ein- und Auströmrand sorgt. Bei gleicher Geschwindigkeit bewirkt ein größeres  $\lambda$ , dass die Lösung des linken Randes weniger weit in das Rechengebiet eindringt. Die beiden Grafiken zeigen dieses Phänomen für  $\lambda = 0.2$  und  $\lambda = 0.9$ .



#### 4.1.4 Testfall Diffusion und Konvektion b)

Zuletzt wollen wir den Fall simulieren, dass  $u = v = 1$  und  $\lambda > 0$  gilt. Das heißt, dass unsere Strömung aus Richtung Süd-West in das Rechengebiet einströmt. Da oberer und unterer Rand eine undurchlässige Wand darstellen, bewirkt die Konvektion, dass sich am oberen linken Rand das höchste Potential einstellt, da sich an dieser Stelle ein Staupunkt der Strömung befindet. Somit steigt das Potential an diesem Staupunkt für längere Simulationsdauer immer weiter an, bis sich ein stationärer Wert einstellt, in dem die Diffusion das Ansteigen des Potentials durch die Konvektion kompensiert. Das Rechengebiet wurde in diesem Fall in 30x30 Zellen aufgeteilt.



## 4.2 Analytische Lösung

Für den Fall einer eindimensionalen Strömung lässt sich mittels der Peclet Zahl  $Pe = \frac{\rho ul}{\lambda}$  eine analytische Lösung angeben. Man kann eine Iterationsvorschrift für  $\phi_{i,j}$  in Abhängigkeit der Peclet Zahl aufstellen. Das Verfahren ist damit für den instationären Fall gegeben als:

$$\tilde{a}_p \phi^{\nu+1} = a_o \phi_o + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b \quad (22)$$

$$b = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \phi_p^\nu \quad (23)$$

$$\tilde{a}_p = a_o + a_w + a_n + a_s + \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (24)$$

wobei sich die Koeffizienten  $a_{o,n,w,s}$  in Abhängigkeit der Peclet Zahl schreiben lassen.

$$a_o = D_o \Delta y A(|Pe_o|) + \max(-f_o \Delta y, 0)$$

$$a_w = D_w \Delta y A(|Pe_w|) + \max(f_w \Delta y, 0)$$

$$a_s = D_s \Delta x A(|Pe_s|) + \max(f_s \Delta x, 0)$$

$$a_n = D_n \Delta x A(|Pe_n|) + \max(-f_n \Delta x, 0)$$

Die Koeffizienten  $D_{o,w,s,n}$  liefern eine Reihe von Verfahren. Hier seien nur kurz das Exponential-gesetzt Zentral Differenzen und das Upwind Verfahren 1. Ordnung erwähnt.

### 4.3 Lösung der Impulsgleichung

Setzt man nun nicht mehr das Geschwindigkeitsfeld als gegeben voraus, lässt sich dieses mit Hilfe der Impulsgleichungen aus dem Druckfeld bestimmen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\phi_x = -\frac{\partial}{\partial x}p \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial y}\phi_y = -\frac{\partial}{\partial y}p \quad (26)$$

mit

$$\phi_x = \rho u u - \eta \frac{\partial}{\partial x}u \quad (27)$$

$$\phi_y = \rho v v - \eta \frac{\partial}{\partial y}v \quad (28)$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich das Geschwindigkeitsfeld in direkter Abhängigkeit zum Druckfeld lösen. Da die Impulsgleichungen die selbe Struktur haben wie die Konvektions-Diffusions Gleichungen lässt sich das Geschwindigkeitsfeld mit einem ähnlichen Ansatz lösen.

$$\tilde{a}_p u_e^{\nu+1} = a_o u_o^\nu + a_w u_w^\nu + a_n u_n^\nu + a_s u_s^\nu + b + (p_p - p_E)\Delta y_P \quad (29)$$

$$\tilde{a}_p v_e^{\nu+1} = a_o v_o^\nu + a_w v_w^\nu + a_n v_n^\nu + a_s v_s^\nu + b + (p_p - p_E)\Delta x_P \quad (30)$$

Mit den gleichen Koeffizienten wie in (22). Wir setzen den Druck als gesuchten Wert in der Zelle an und betrachten die Geschwindigkeiten auf den Zellrändern. Ein Problem welches bei der Diskretisierung mittels finiter Differenzen entsteht ist eine Entkopplung benachbarter Drücke. Somit kann es zu einem hohen Druckgradienten zwischen den Stellen  $(i, j)$  und  $(i+1, j)$  kommen, dieser würde aber unberücksichtigt bleiben, da der Druckgradient zwischen  $(i, j)$  und  $(i+2, j)$  gleich null ist. Das Resultat wäre eine Zick-Zack-Verteilung des Druckes. Deshalb werden im folgenden versetzte Gitter benutzt, welche das Problem der Entkopplung vermeiden.

#### 4.3.1 Testfall Couette Strömung

Wir betrachten im folgenden die Couette Strömung. Diese beschreibt den Fluss zwischen zwei Blatten unendlicher Ausdehnung. Dabei bleibt die obere Platte fest und die untere Platte wird ruckartig auf eine vorgegebene Geschwindigkeit  $u_\infty$  beschleunigt. Beschreiben lässt sich das Problem über folgende Gleichungen

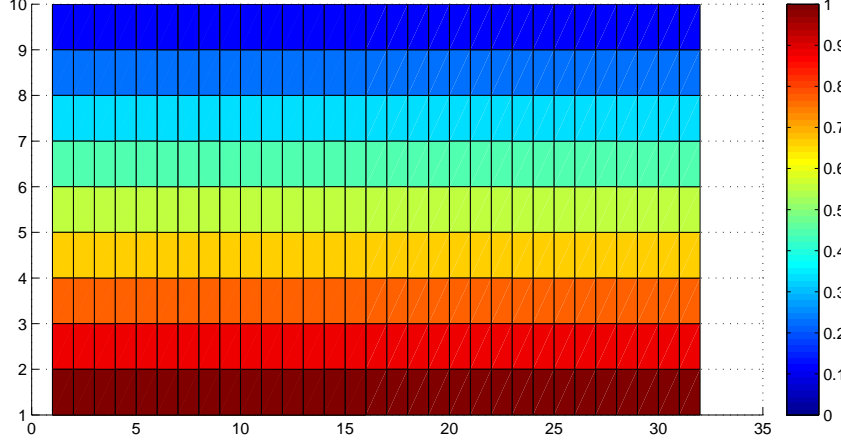
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x}p \quad (31)$$

$$u(x, y = H) = 0 \quad (32)$$

$$u(x, y = 0) = u_\infty \quad (33)$$

Die Gleichung (32) und (33) sind dabei das Resultat der Haftbedingung.

Lässt man die Lösung auskonvergieren, so stellt sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil zwischen oberer und unterer Platte ein. In unserer Rechnung ist  $u_\infty = 1$  und unser Gebiet in der Höhe 10 Einheiten und in der Länge 32 Einheiten lang.



## 5 Konvektions-Diffusions Strömung mit Berechnung des Druckfeldes

### 5.1 SIMPLE

Im letzten Schritt möchten wir den Druck nun nicht mehr vorgeben, sondern auch von dem Löser berechnen lassen. Dafür verwenden wir den SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation) Algorithmus: Wir schätzen zunächst ein Druckfeld und berechnen auf Basis dessen ein vorläufiges Geschwindigkeitsfeld. Mit Anwendung der Kontinuitätsgleichung auf Finiten Volumen erhalten wir einen Korrekturterm für den Druck.

#### 5.1.1 Vorgehen

Zuerst wird das Druckfeld  $p^*$  geschätzt. Auf dieser Basis wird mit den Gleichungen (22)-(24) ein geschätztes Geschwindigkeitsfeld  $u^*$ ,  $v^*$  berechnet.

Da  $p^*$  eine Schätzung des tatsächlichen Druckes ist, muss der Korrekturterm  $p'$  mittels

$$\tilde{a}_p p' = a_o p'_o + a_w p'_w + a_n p'_n + a_s p'_s + b \quad (34)$$

berechnet werden. Nun kann man ein Update für den Druck durchführen mittels der sich als  $p = p^* + p'$ , oder bei gegebenem Relaxationsfaktor als  $p = p^* + \omega p'$ , zusammensetzt. Anschließend wird auch das Geschwindigkeitsfeld korrigiert über die Gleichungen:

$$u = u^* + \Delta p'_u \frac{A_u}{\tilde{a}_u} \quad (35)$$

$$v = v^* + \Delta p'_v \frac{A_v}{\tilde{a}_v} \quad (36)$$

Nun geht man zurück zur Berechnung des geschätzten Geschwindigkeitsfeldes und wiederholt dieses Verfahren bis es auskonvergiert ist. Dies äußert sich dadurch, dass  $b = 0$  mit

$$b = (\rho^{\nu+1} - \rho^\nu) \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + ((\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_o) + ((\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n) \quad (37)$$

Bei einem rechteckigen Rechengbiet und unter Annahme einer inkompressiblen Strömung lässt sich (37) vereinfachen zu

$$b = \rho A_w(u_w^* - u_o^*) + \rho A_n(v_s^* - v_n^*) \quad (38)$$

### 5.1.2 Testfall Simple

Der von uns angefertigte Code kann eine Strömung mittels des Simple Algorithmus nicht simulieren. Es kommt zu dem Problem, dass der Druckkorrekturterm auch bei beliebiger Wahl von  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  nicht konvergiert sondern in einigen Fällen divergiert und somit keine brauchbaren Ergebnisse für das Geschwindigkeitsfeld liefern kann.

## 5.2 SIMPLER

Der Simpler Algorithmus stellt eine Verbesserung des Simple Algorithmus dar. Näherung in der Herleitung der Druckkorrektur Gleichung im Simple Algorithmus führen zu einer überschätzung der Druckkorrektur, was oft kleine Werte für  $\omega$  als Relaxationsfaktor notwendig macht. Um eine erhöhte Konvergenzrate zu erhalten wird der Druckkorrektur nun auf einen anderen Weg berechnet. Zudem wird das Update in der Geschwindigkeit nicht weiter in Relation zur Druckkorrektur gesetzt.

$$u_o = \hat{u}_e + (p_P - p_E)A_e/\tilde{a}_e \text{ mit} \quad (39)$$

$$\hat{u}_e = \frac{1}{\tilde{a}_e} \left( \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b \right) \quad (40)$$

Man erhält als Gleichung für das Druckfeld

$$\tilde{a}_p p = a_o p_o + a_w p_w + a_n p_n + a_s p_s + b \quad (41)$$

wobei  $b$  nun in Abhängigkeit von  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  gesetzt wird. Im Gegensatz zum Simple Algorithmus hat dieses Verfahren den Vorteil, dass bei einer guten Näherung des Geschwindigkeitsfeldes keine signifikante Druckkorrektur vorhanden ist. Da  $b$  als Maß für die Konvergenz genommen wird, ist der Simpler Algorithmus damit schneller.

### 5.2.1 Testfall Simpler

Da der Simpler Algorithmus auf dem Simple Algorithmus aufbaut, erhielten wir den selben Fehler wie bei der Simple Implementierung.

## 6 Zusammenfassung

Im folgenden wollen wir kurz einen selbstkritischen Blick auf die von uns angefertigten Milestones liefern. Der von uns angefertigte Löser für die Potentialströmung liefert durchweg gute Ergebnisse, unabhängig von der vorgegebenen Strömung und bei beliebigen krummen aber differenzierbaren Gebieten. Besitzt das Gebiet einen Knick so kommt durch die Approximation der Ableitungen mittels Finiter Differenzen zu größeren Fehlern basierend auf dem Abbruchfehler der Taylorreihe nach der ersten Ordnung. Diese pflanzen sich allerdings nicht weiter in das Gebiet fort sondern treten lokal auf. Auch der für die Lösung der Konvektions-Diffusions Gleichung benötigte Gittergenerator erzeugt eine richtig nummerierte Aufteilung des Gebietes in Finite Elemente. Unser Konvektions-Diffusions Löser liefert bei freier Wahl von  $\lambda$  physikalisch sinnvolle Ergebnisse. Es lässt sich ein quantitativer Unterschied im Strömungsfeld bei verschiedenen Werten für  $\lambda$  feststellen und es ist zu erkennen, dass die Phänomene Konvektion und Diffusion einander entgegengerichtet wirken. Der Algorithmus bleibt auch bei einem nicht-parallel einströmen in das Rechengbiet stabil, wie sich in Abschnitt 4.1.4 erkennen lässt.

Auch der schwierigere Fall der Couette Strömung mit vorgegebenem Druckfeld wird von uns gelöst und zeigt das analytisch vorhergesagte Strömungsmuster.

Probleme treten bei uns auf, wenn das Druckfeld nicht mehr als vorgegebene angenommen wird sondern im Falle des Simple(r) Algorithmus berechnet werden muss. Die Tatsache, dass das Druckfeld divergiert lässt sich dadurch begründen, dass auch der Druckkorrekturwert nicht gegen null konvergiert.

## Literatur

- [1] W. Dahmen und A. Reusken, Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer-Lehrbuch 2., korr. Aufl. 2008
- [2] Wolfgang Schröder, Fluidmechanik, Wissenschaftsverlag Mainz 3., korr. Aufl. 2010
- [3] B. Binniger und D. Mayer, Vorlesungsunterlagen zur Numerischen Strömungssimulation, <http://www.itv.rwth-aachen.de/index.php?id=50>
- [4] M. Meinke, Computational Fluid Dynamics I+II, [http://www.aia.rwth-aachen.de/vlueb/vl/numerische\\_stroemungsmechanik\\_i/material/cfd%20I+II\\_1.pdf](http://www.aia.rwth-aachen.de/vlueb/vl/numerische_stroemungsmechanik_i/material/cfd%20I+II_1.pdf)
- [5] N. Gauger, handschriftliches Vorlesungsskript Mathematische Grundlagen 5, Wintersemester 2011/2012