

# Praktikumsbericht

## Numerische Strömungssimulation

Lisa Kusch (288941), Mariya Statnikova (290363)

September 10, 2011

# Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Potentialströmung</b>	<b>3</b>
2.1	Lösung einer Laplacegleichung auf rechteckigem Iterationsgebiet	3
2.1.1	Diskretisierung . . . . .	3
2.1.2	Lösungsverfahren . . . . .	4
2.1.3	Testbeispiele . . . . .	4
2.2	Lösung einer Laplacegleichung auf krummlinig berandetem Iterationsgebiet . . . . .	6
2.2.1	Diskretisierung . . . . .	7
2.2.2	Testfälle . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Konvektions-Diffusions-Gleichung</b>	<b>10</b>
3.1	Klassisches Diskretisierungsschema . . . . .	11
3.2	Diskretisierungsschema unter Benutzung der analytischen Lösung	12
3.3	Testbeispiele . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Impulsgleichung</b>	<b>14</b>
4.1	Diskretisierung bei bekannter Druckverteilung . . . . .	14
4.2	Testergebnisse bei bekannter Druckverteilung . . . . .	15
4.3	Diskretisierung mit der Druck-Korrektur-Gleichung (SIMPLE-Algorithmus) . . . . .	17
4.4	Testergebnisse mit der Druck-Korrektur-Gleichung . . . . .	18

# 1 Einleitung

Dieser Praktikumsbericht befasst sich mit der Programmierungsaufgabe zur Vorlesung Numerische Strömungssimulation (Simulationstechnik 5) betreut durch Dr.-Ing. Bernd Binninger und Dipl.-Ing. Jens Henrik Göbbert. Das Praktikum besteht aus 4 Teilaufgaben zu verschiedenen Themen im Bereich der Strömungssimulation.

## 2 Potentialströmung

Im Folgenden geht es um die Berechnung einer Potential- und Stromfunktion unter der Annahme einer stationären, inkompressiblen, wirbelfreien, zweidimensionalen Strömung in einem Kanal. Das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung besitzt eine Potentialfunktion, falls es wirbelfrei und inkompressibel ist. Mit der Kontinuitätsgleichung erhält man die Laplacegleichung für die Potentialfunktion  $\Phi$

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

mit dem zugehörigen Geschwindigkeitsfeld

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}. \quad (2)$$

Senkrecht zu den Potentiallinien stehen die Stromlinien, die gleichzeitig auch tangential zum Geschwindigkeitsfeld liegen. Diese lassen sich durch die Stromfunktion  $\Psi$  berechnen, die ebenfalls eine Laplacegleichung (1) erfüllt.

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit der Lösung dieser Laplacegleichung auf einem rechteckigem und einem krummlinig berandetem Iterationsgebiet. Zur Lösung der elliptischen Differentialgleichung benötigt man außerdem Randbedingungen. Dabei bietet es sich an auf dem Rand die analytische Lösung von bekannten Potentialströmungen vorzugeben.

### 2.1 Lösung einer Laplacegleichung auf rechteckigem Iterationsgebiet

#### 2.1.1 Diskretisierung

Das zwei-dimensionale Strömungsfeld wird in ein geradliniges Gitter mit Gitterpunkten  $(i, j)$  eingebettet. Die zweiten Ableitungen entlang der x- und y-Achse im Punkt  $(i, j)$  werden wie folgt diskretisiert

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2). \quad (3)$$

Eingesetzt in (1) und umgeformt nach  $\Phi_{i,j}$  ergibt sich

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} (\Delta y^2(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j}) + \Delta x^2(\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1})). \quad (4)$$

### 2.1.2 Lösungsverfahren

Zur Lösung der diskretisierten Gleichung bietet sich ein iteratives Verfahren für lineare Gleichungssysteme wie zum Beispiel das Jacobi- oder das Gauß-Seidel-Verfahren an. Zunächst wird dem  $\Phi$  auf den Randpunkten der Randwert zugewiesen. Die inneren Punkte werden mit 0 initialisiert. Beide Verfahren gehen alle Gitterpunkte, die nicht Randwerte enthalten, durch und benutzen die vier umliegenden Punkte (siehe Abbildung 1) zur Berechnung eines neuen Wertes für (4) in jedem Iterationsschritt. Das Jacobi-Verfahren benutzt für die Berechnung die Werte des vorigen Iterationsschritts während das Gauß-Seidel-Verfahren auch die neu berechneten Werte benutzt.

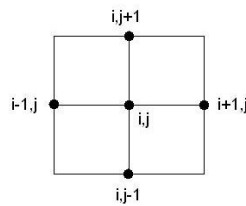


Figure 1: Differenzenstern der Ordnung 2

Falls die gewünschte Iterationszahl erreicht ist oder die Differenz zwischen zwei Iterationsschritten einen vorgegebenen Minimalwert erreicht hat, bricht der Algorithmus ab.

### 2.1.3 Testbeispiele

#### Parallelströmung

Als einfacher Testfall lässt sich eine Parallelströmung mit

$$u_{\infty} = 1.0, \quad v_{\infty} = 1.0$$

verwenden. Der Testfall wurde auf einem Gitter mit 10x10 Gitterpunkten durchgeführt.

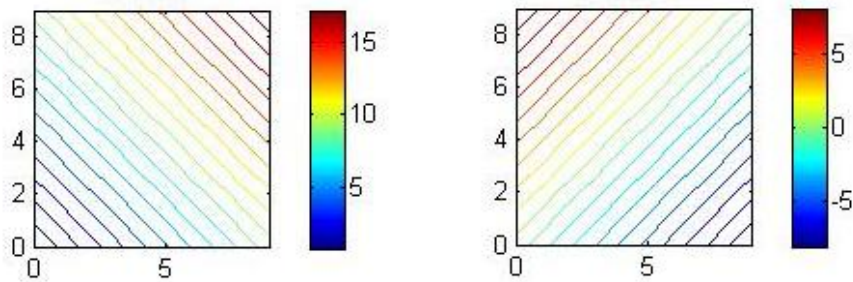


Figure 2: Isolinien für Potential- (links) und Stromlinien (rechts) der Parallelströmung

In Abbildung 2 erkennt man, dass Potential- und Stromlinien senkrecht aufeinander stehen. Die zugehörigen Geschwindigkeiten stellen Abbildung 3

und 4 dar. Man kann sehen, dass das einfache Problem mit der vorgegebenen Fehlerordnung genau gelöst wird.

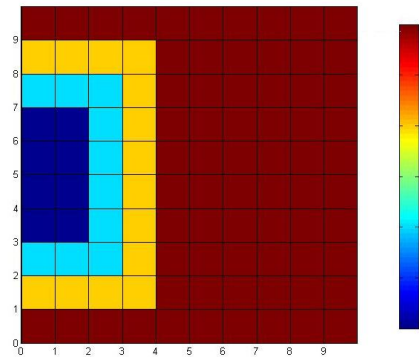


Figure 3: Geschwindigkeitskomponenten der Parallelströmung in x-Richtung

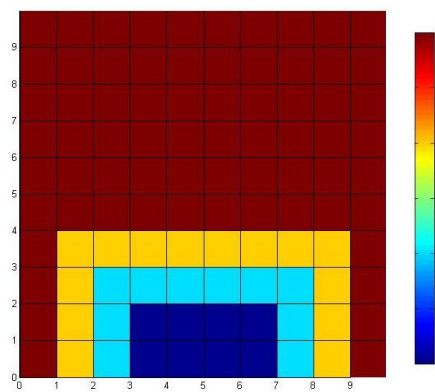


Figure 4: Geschwindigkeitskomponenten der Parallelströmung in y-Richtung

Der Testfall wurde mit den zwei verschiedenen Verfahren durchgeführt. In der folgenden Tabelle erkennt man den klaren Vorteil der Gauß-Seidel-Verfahren, da dieses als Einzelschrittverfahren schneller konvergiert. Unter Benutzung eines Relaxationsfaktors von 1.5 für Gauß-Seidel erreicht man sogar eine noch geringere Iterationszahl.

	Jacobi	Gauß-Seidel	G-S Relaxation 1.5
Iterationen	323	118	27

### Ebene Staupunktströmung

In der folgenden Abbildung werden die Potential- und Stromlinien einer ebenen Staupunktströmung mit  $a = 1$  auf einem 25x25-Gitter dargestellt.

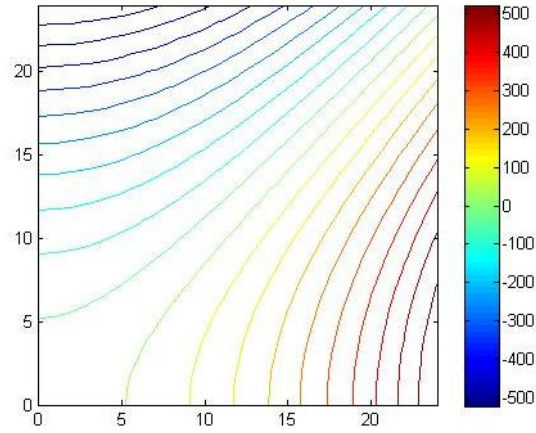


Figure 5: Potentiallinien für ebene Staupunktströmung

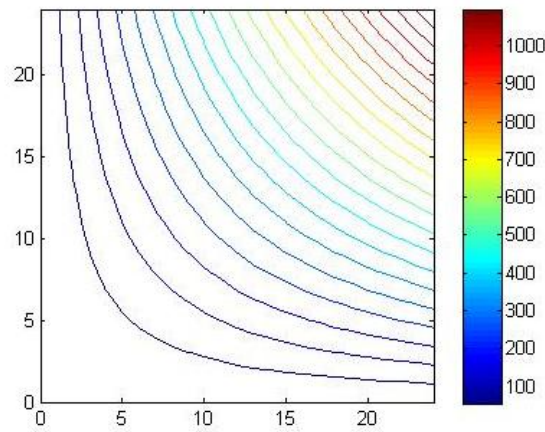


Figure 6: Stromlinien für ebene Staupunktströmung

## 2.2 Lösung einer Laplacegleichung auf krummlinig berandetem Iterationsgebiet

Um Probleme auf einem krummlinig berandetem Gebiet zu lösen, bietet es sich an eine Koordinatentransformation vom krummlinigen Gebiet  $x - y$  auf das rechteckige Gebiet  $\xi - \eta$  einzuführen.

Die Laplace-Gleichung (1) mit den transformierten Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  ergibt sich zu

$$\left( \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \phi = 0 \quad (5)$$

mit den Parametern  $\alpha_i$

$$\alpha_1 = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \quad (6)$$

$$\alpha_2 = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \quad (7)$$

$$\alpha_3 = 2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$\alpha_4 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$\alpha_5 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \quad (10)$$

### 2.2.1 Diskretisierung

Zur Diskretisierung der Gleichung bietet es sich an  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$  zu setzen. Mit zentralen Differenzen ergibt sich die Gleichung für  $\Phi_{i,j}$  analog zu (4)

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{8(\alpha_1 + \alpha_2)} (\alpha_3 \Phi_{i-1,j-1} + (4\alpha_2 - 2\alpha_5) \Phi_{i,j} - 1 - \alpha_3 \Phi_{i+1,j-1}) \quad (11)$$

$$+ (4\alpha_1 - 2\alpha_4) \Phi_{i-1,j} + (4\alpha_1 + 2\alpha_4) \Phi_{i+1,j} - \alpha_3 \Phi_{i-1,j+1} \quad (12)$$

$$+ (4\alpha_2 + 2\alpha_5) \Phi_{i,j+1} + \alpha_3 \Phi_{i+1,j+1}) \quad (13)$$

Der iterative Löser benutzt jetzt alle 8 umliegenden Punkte zur Lösung (siehe Abbildung 7).

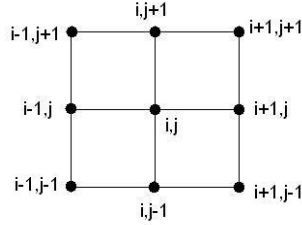


Figure 7: Stencil für transformierte Differenzen

Die  $\alpha_i$  lassen sich entweder allgemein durch die Diskretisierung mittels zentraler Differenzen oder für gegebene Problemstellungen, wie zum Beispiel eine Kanalströmung mit vorgegebenen Wänden, direkt durch Differenzieren ermitteln. In diesem Fall wurde sich für eine allgemeine Diskretisierung wie zum Beispiel

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi(x + \Delta x) - \xi(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (14)$$

mit

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n - 1}$$

entschieden.

### 2.2.2 Testfälle

#### Strömung durch einen krummlinig berandeten Kanal

Um eine Strömung in einem krummlinig berandeten Kanal mit Unterseite  $h_u(x)$  und Oberseite  $h_o(x)$  sowie Eintritt bei  $x_u$  und Austritt bei  $x_o$  darzustellen lässt sich die folgende Transformation auf ein Rechteck mit Breite  $a$  und Höhe  $b$  verwenden

$$\xi(x, y) = (a - 1) \frac{x - x_u}{x_o - x_u} \quad \eta(x, y) = (b - 1) \frac{y - h_u(x)}{h_o(x) - h_u(x)}. \quad (15)$$

Umgestellt nach  $x$  und  $y$  ergibt sich

$$x(\xi) = x_u + \xi \frac{x_o - x_u}{a - 1} \quad y(\xi, \eta) = h_u(x(\xi)) + \eta \frac{h_o(x(\xi)) - h_u(x(\xi))}{b - 1}. \quad (16)$$

Verwendet man für die  $\alpha_i$  direktes Differenzieren vereinfachen sich diese zu

$$\alpha_1 = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \quad (17)$$

$$\alpha_2 = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \quad (18)$$

$$\alpha_3 = 2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (19)$$

$$\alpha_4 = 0 \quad (20)$$

$$\alpha_5 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (21)$$

Die Funktionen für die Ränder sind gegeben als

$$h_o(x) = 0.25 \sin(x \frac{\pi}{2}) + 3) \quad (22)$$

$$h_u(x) = 0.25 \sin(x \frac{\pi}{2}) + 1) \quad (23)$$

Am Eintritt wird ein konstantes Geschwindigkeitsprofil in x-Richtung vorgegeben. Es gilt  $u = 60$  und  $v = 0$ . Weiterhin gilt

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (24)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (25)$$

Für die Randbedingungen der Potentialfunktion entlang der Kanalwände kann man die Gleichung

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{v}{u} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}} \quad (26)$$



mittels zentraler Differenzen in  $\xi$ -Richtung und einseitigen Differenzen in  $\eta$ -Richtung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}_{i,j} = 0.5(-\Phi_{i,j+2} + 4\Phi_{i,j+1} - 3\Phi_{i,j}) \quad (27)$$

diskretisieren. Dadurch ergibt sich zum Beispiel als Randwert für  $\Phi$  am unteren Rand

$$\Phi_{i,j} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial h_u}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}}{3 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h_u}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)} (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}) + \frac{1}{3} (4\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j+2}). \quad (28)$$

Am Eintrittsrand kann man  $\Phi$  mittels einseitiger Differenzen angewendet auf die Gleichung für  $u$  (23) bestimmen.

Es gilt

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (29)$$

Für die Stromfunktion muss deswegen ein lineares Profil am Ein- und Austrittsrand vorgegeben werden. Auf den Rändern werden konstante Werte für  $\Psi$  verwendet.

Abbildung 8 zeigt die Isolinien für die Stromfunktion und die Potentialfunktion. Das lineare Profil der Stromfunktion wird über den gekrümmten Kanal beibehalten. Die Isolinien der Potentialfunktion stehen senkrecht auf den Kanalwänden.

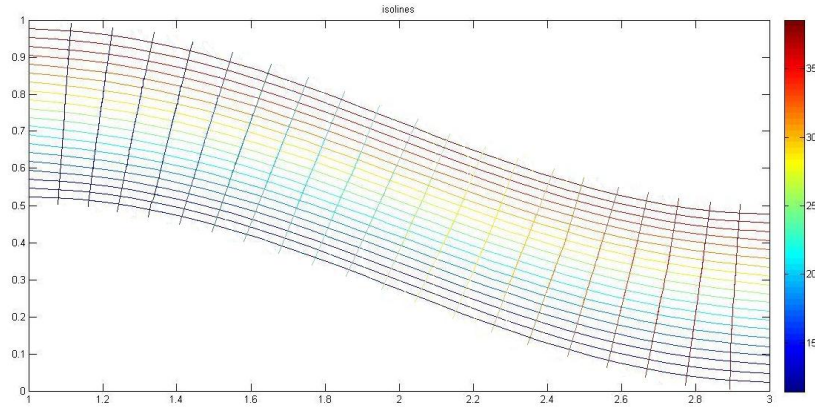


Figure 8: Isolinien für die Stromfunktion und die Potentialfunktion

Die Krümmung des Kanals beeinflusst das vorgegebene Geschwindigkeitsprofil in  $x$  und  $y$  Richtung. Mittels der Formeln in (23) lassen sich die Geschwindigkeiten bestimmen (siehe Abbildung 9 und 10). Dabei ist es wichtig einseitige Differenzen in  $\xi$  und  $\eta$  am Rand zu verwenden.

Der Druckbeiwert  $c_p$  lässt sich über die Bernoulligleichung herleiten zu

$$c_p = 1 - \frac{u^2 + v^2}{u_\infty^2}$$

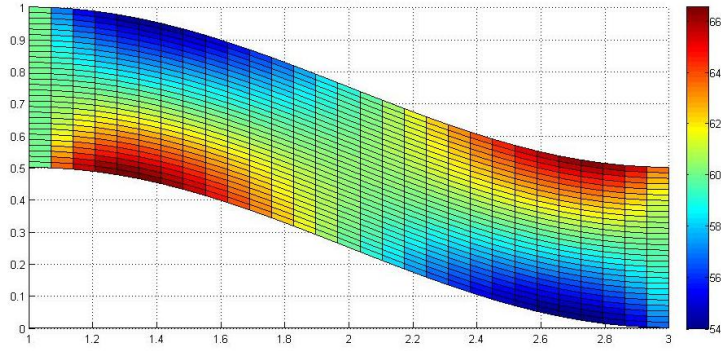


Figure 9: Geschwindigkeit  $u$  in  $x$ -Richtung

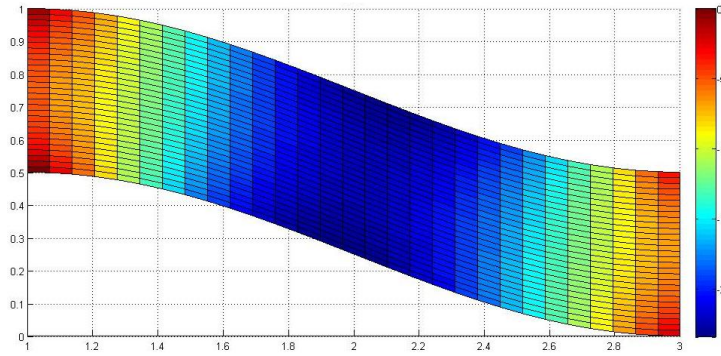


Figure 10: Geschwindigkeit  $v$  in  $y$ -Richtung

Als Referenzgeschwindigkeit wird am Eintrittsrand  $u_\infty = 60$  festgelegt. In der folgenden Abbildung ist die Verteilung des Druckes anhand des Druckbeiwerts dargestellt.

#### Strömung durch einen Diffusor

Es lässt sich auch ein Beispiel für eine Düse entwerfen. Dabei lassen sich die Ränder wie im vorigen Beispiel behandeln. In Abbildung 12 sieht man, dass die Geschwindigkeit mit dem Querschnitt der Düse abnimmt während der Druckbeiwert zunimmt (siehe Abbildung 13).

### 3 Konvektions-Diffusions-Gleichung

Im folgenden Abschnitt geht es um die Lösung einer zwei-dimensionalen, inkompressiblen Konvektions-Diffusions-Gleichung mittels der Finite-Volumen-Methode. Dabei geht es um die Berechnung einer skalaren Größe bei vorgegebenem Geschwindigkeitsfeld. Die Gleichung für die passive Größe  $\Phi$  mit gegebener Dichte  $\rho$  und problemabhängigem Diffusionskoeffizient  $\lambda$  lautet dabei

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial(\phi)}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho v \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right) dV = 0. \quad (30)$$

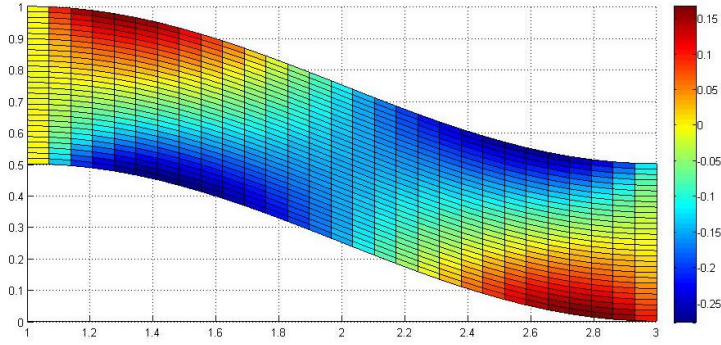


Figure 11: Druckverteilung

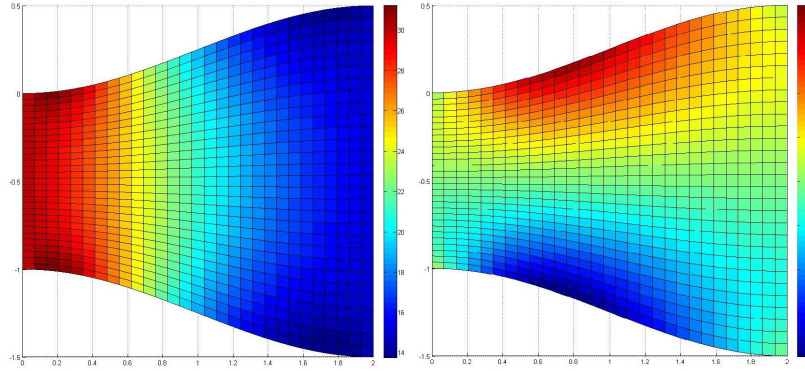


Figure 12: links: Geschwindigkeit  $u$ , rechts: Geschwindigkeit  $v$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatz vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial(\phi)}{\partial t} dV + \int_{\delta\Omega} \left( \rho u \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dA = 0. \quad (31)$$

Dadurch erhält man eine typische Bilanzgleichung auf einem Volumenelement  $\Omega$  mit ein- und ausströmenden Flüssen über den Rand  $\delta\Omega$ .

Es werden zwei verschiedene Diskretisierungsschemata auf einem kartesischen Gitter betrachtet. Auf beide Lösungsalgorithmen lässt sich wieder ein iterativer Löser anwenden.

### 3.1 Klassisches Diskretisierungsschema

Zur numerischen Lösung von (29) wird das Lösungsgebiet in einzelne rechteckige Teilvolumina unterteilt. Auf jedem Teilvolumen soll die obige Gleichung erfüllt sein. Die Zeitableitung wird durch ein explizites Eulerzeitschrittverfahren mit Zeitschrittweite  $\Delta t$  realisiert. Die daraus entstandene Gleichung für das Volumen  $\Delta x \Delta y$  mit den Kanten  $N$ ,  $S$  mit der Kantenlänge  $\Delta y$  und  $O$ ,  $W$  mit der Kantenlänge  $\Delta x$  lautet

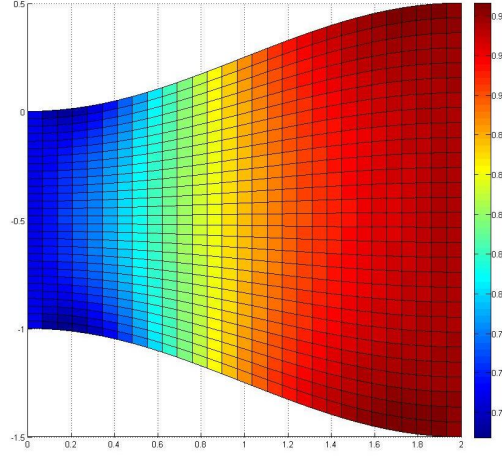


Figure 13: Druckverteilung

$$\Phi^k = \Phi^{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} ((f_W - f_E)\Delta y + (f_S - f_N)\Delta x). \quad (32)$$

Die Flüsse über die 4 Kanten

$$f_{W/E} = \rho u \phi_{W/E} - \lambda \frac{\partial \phi_{W/E}}{\partial x}, \quad f_{S/N} = \rho v \phi_{S/N} - \lambda \frac{\partial \phi_{S/N}}{\partial y} \quad (33)$$

müssen durch konsistente numerische Flüsse diskretisiert werden. Der diffusive Term kann durch zentrale Differenzen wie in folgendem Beispiel (vereinfacht für ein äquidistantes Gitter) diskretisiert werden.

$$\frac{\partial \Phi_W}{\partial x} = \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (34)$$

Um für den konvektiven Term die Größe  $\Phi$  auf den Kanten zu approximieren bieten sich verschiedene Methoden an.

Eine Möglichkeit ist es unter der Annahme eines stückweise linearen Verlaufs von  $\Phi$  zentral zu mitteln, also

$$\Phi_W \approx \frac{\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{2}. \quad (35)$$

Die oftmals physikalisch korrektere Lösung aufgrund eines hohen konvektiven Transports ist die sogenannte Upwind-Diskretisierung

$$\phi_W = \begin{cases} \phi_{i-1,j} & , u > 0 \\ \phi_{i,j} & , u < 0 \end{cases} \quad (36)$$

### 3.2 Diskretisierungsschema unter Benutzung der analytischen Lösung

Es existiert eine analytische Lösung für die eindimensionale, stationäre Konvektions-Diffusions-Gleichung auf einem Gebiet der Länge  $l$ , in der Pecletzahl als Verhältnis

von Konvektion zu Diffusion  $Pe = \frac{\rho u l}{\lambda}$  auftritt. Unter Ausnutzung der Lösung kann der konvektive Term in (31) für verschiedene Peclet-Zahlen geeignet approximiert werden. Es lassen sich allgemeine Koeffizienten vor den  $\Phi$ -Termen bestimmen, die Funktionen der Peclet-Zahl enthalten.

Es ergibt sich die Lösungsvorschrift an  $\Phi_{i,j}$  für den  $(k+1)$ ten Zeitschritt

$$\tilde{a}_p \phi_{i,j}^{k+1} = a_N \phi_{i,j+1}^k + a_E \phi_{i+1,j}^k + a_S \phi_{i,j-1}^k + a_W \phi_{i-1,j}^k + b \quad (37)$$

$$\tilde{a}_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^k \quad (38)$$

$$a_N = D_n \Delta x A(|Pe_n|) + \max(-\rho v \Delta x, 0) \quad (39)$$

$$a_E = D_e \Delta y A(|Pe_e|) + \max(-\rho u \Delta y, 0) \quad (40)$$

$$a_S = D_s \Delta x A(|Pe_s|) + \max(\rho v \Delta x, 0) \quad (41)$$

$$a_W = D_w \Delta y A(|Pe_w|) + \max(\rho u \Delta y, 0) \quad (42)$$

$$b = a_p^k \Phi_p^k \quad (43)$$

$$a_p^v = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (44)$$

$$D_i = \frac{\lambda_i}{\Delta}. \quad (45)$$

Die Funktion  $A(|Pe|)$  repräsentiert hierbei die unterschiedlichen Schemata wie zum Beispiel Upwind oder das Exponentialgesetz aus der analytischen Lösung.

### 3.3 Testbeispiele

#### Vergleich von Upwind und zentralen Differenzen mit analytischer Lösung

Um die verwendeten Verfahren zur Approximierung des Flusses zu untersuchen, bietet es sich an die Ergebnisse der Verfahren mit der analytischen Lösung aus der Peclet-Zahl zu bestimmen. Dabei betrachtet man einen reinen Fluss in x-Richtung auf einem 3x3 Gitter mit dem Wert  $\Phi_0 = 1.0$  auf dem linken Rand und  $\Phi_l = 3.0$  auf dem rechten Rand. Die analytische Lösung für den Wert  $\Phi$  in der Mitte für eine beliebige Peclet-Zahl lautet

$$\Phi = \Phi_0 + (\Phi_l - \Phi_0) \frac{\exp(Pex/l) - 1}{\exp(Pe) - 1}$$

Im folgenden Beispiel wird die Peclet-Zahl allein durch die Geschwindigkeit in x-Richtung variiert. Dabei gilt  $\rho = 1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $l = 2$ .  $\lambda$  wurde hinreichend klein gewählt, damit der konvektive Anteil der Gleichung mehr gewichtet wird und damit die Ergebnisse anschaulicher werden.

Die Tabelle 3.3 zeigt die Ergebnisse der analytischen Lösung für verschiedene Peclet-Zahlen im Vergleich zu den 2 verschiedenen Diskretisierungen des Flusses.

Pe	analyt. Lösung	Upwind-Diskr.	zentrale Diskr.
1000	1.0000	1.0040	-248
1	1.7551	1.8000	1.7500
0.02	1.9950	1.7278	1.9950
0	2.0000	2.0000	2.0000

Man erkennt, dass die analytische Lösung für große Peclet-Zahlen durch die Upwind-Diskretisierung sehr gut approximiert wird, während die Diskretisierung mit zentralen Ausdrücken zur numerischen Instabilität führt und keine sinnvolle Lösung liefert. Für eine Peclet-Zahl im Bereich von 1 ist der Unterschied zwischen beiden Verfahren sehr klein, sodass sich beide Verfahren gut eignen. Für eine sehr kleine Peclet-Zahl wiederum ist es vorteilhafter die zentrale Diskretisierung zu wählen. Für eine Peclet-Zahl von 0 berechnet der Algorithmus nur den diffusiven Anteil und dieser wird vom Algorithmus exakt gelöst.

## 4 Impulsgleichung

Um ein Geschwindigkeitsfeld in einer Strömung zu ermitteln, benutzt man die Impulsgleichung für die Geschwindigkeitskomponenten. Die Struktur der Impulsgleichung entspricht der bereits behandelten Konvektions-Diffusion-Gleichung und kann für zweidimensionale, inkompressible Strömungen wie folgt formuliert werden

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial(uu)}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial(uv)}{\partial y} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (46)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial(vv)}{\partial y} - \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (47)$$

### 4.1 Diskretisierung bei bekannter Druckverteilung

Bei einer bekannten Druckverteilung reichen die obigen Gleichungen direkt zur Lösung des Geschwindigkeitsfeldes aus. Dabei wird der Druck wie zuvor die skalare Größe  $\Phi$  in den Zellmittelpunkten vorgegeben, während die Geschwindigkeiten auf den Zellrändern zugewiesen werden. An den Gebietsrändern werden Randbedingungen für die Geschwindigkeiten vorgegeben. Um einen stabilen Algorithmus zu erhalten, ist es erlaubt ein versetztes Gitter für die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  im Vergleich zum Druck  $p$  zu verwenden (siehe Abbildung 14).

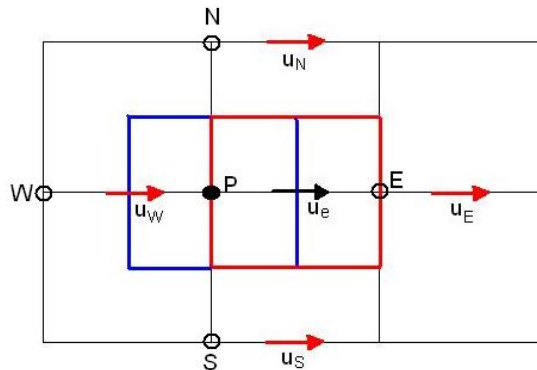


Figure 14: versetztes Kontrollvolumen  $u$  (rot) zu  $p$  (blau)



Damit ergibt sich unter Benutzung von zentralen Differenzen für  $\frac{\partial p}{\partial x}$  folgende Formel für die Geschwindigkeitskomponente  $u$  in x-Richtung

$$\tilde{a}_P u_e^{k+1} = a_E u_E^k + a_W u_W^k + a_S u_S^k + a_N u_N^k + b + (p_P - p_E) \Delta y_P \quad (48)$$

Dabei werden dieselben Variablen wie in Gleichung (32) verwendet. Zur Berechnung der Peclet-Zahlen in den Koeffizienten  $a_i$  müssen zusätzlich einige Geschwindigkeiten gemittelt werden.

Für die Ränder der Berechnung wird die Geschwindigkeit über den Rand mit Ordnung 1 extrapoliert. So können sowohl feste Wände, wo auf dem Rand die Geschwindigkeit 0 vorgegeben wird, als auch bewegte Wände und Ausströmränder simuliert werden.

## 4.2 Testergebnisse bei bekannter Druckverteilung

### Couette-Strömung

Die Couette-Strömung beschreibt die Strömung zwischen zwei parallelen Platten, wobei sich die obere Platte mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt. Im Testbeispiel ist wurde der Abstand der Platten auf 30 und die Länge auf 80 Längeneinheiten gesetzt und die obere Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit 30. Das vorgegebene Druckfeld ist hierbei konstant. Eine allgemeine ausgebildete Strömung zwischen zwei Platten genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Bei konstantem Druckfeld und den Randbedingungen  $u(y = 0) = 0$  (Haftbedingung) und  $u(y = 30) = 30$  ergibt sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil

$$u(y) = y,$$

welches man auch in der Strömungsberechnung in Abbildung 15 erkennen kann. Dabei wurden die Anfangswerte entsprechend der sich ausgebildeten Geschwindigkeit gewählt.

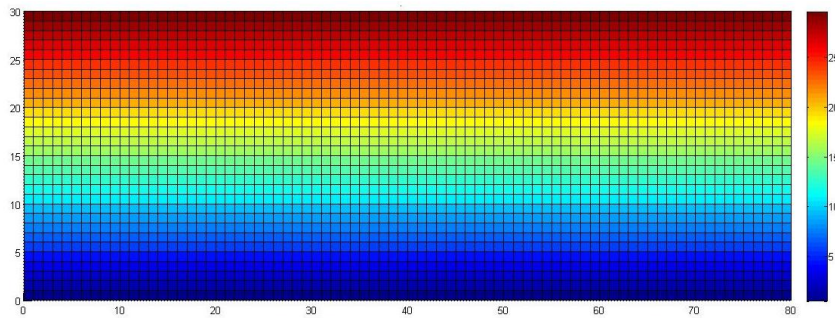


Figure 15: Geschwindigkeit in x-Richtung

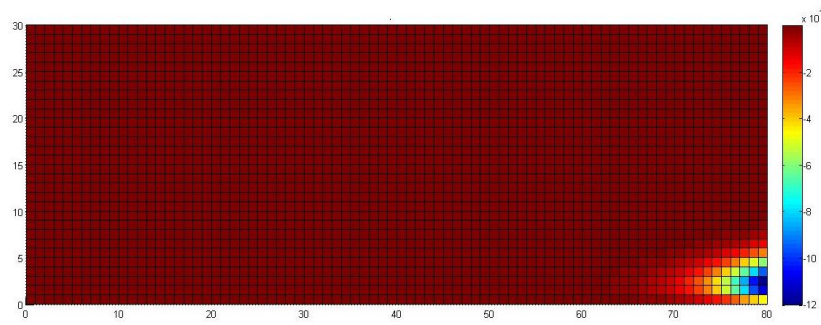


Figure 16: absoluter Fehler

Es wurde einer Genauigkeit von  $10^{-9}$  gerechnet. Die Fehlerverteilung ist in Abbildung 16 zu sehen.

#### Nicht ausgebildete Couette-Strömung

Gibt man als Anfangswerte am linken Rand eine mittlere Geschwindigkeit von 15 vor, so kann man eine sich ausbildende Couette-Strömung erkennen. Diese wurde mit einem Diffusionskoeffizienten von 1 (Abbildung 17) und 50 (Abbildung 18) berechnet.

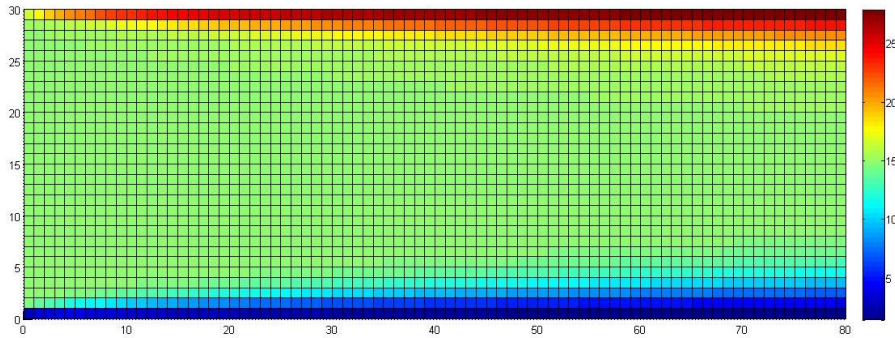


Figure 17: Geschwindigkeit in x-Richtung

#### Ausgebildete Strömung zwischen zwei parallelen Platten

Als ein Testfall bietet sich die Strömung zwischen zwei Platten bei vorgegebenem Eintrittsgeschwindigkeitsprofil passend zur Druckverteilung an. Am oberen und unteren Rand werden die Geschwindigkeiten aufgrund der Haftbedingung auf 0 gesetzt.

Gerechnet wurde auf einem Gebiet der Länge 3 und Höhe 1 auf einem 10x30-Gitter. Dabei wurde eine Druckverteilung von

$$p(x, y) = 15 - 5x.$$

Das zugehörige parabolische Geschwindigkeitsfeld lautet

$$u(y) = -2.5 * y^2 + 2.5.$$



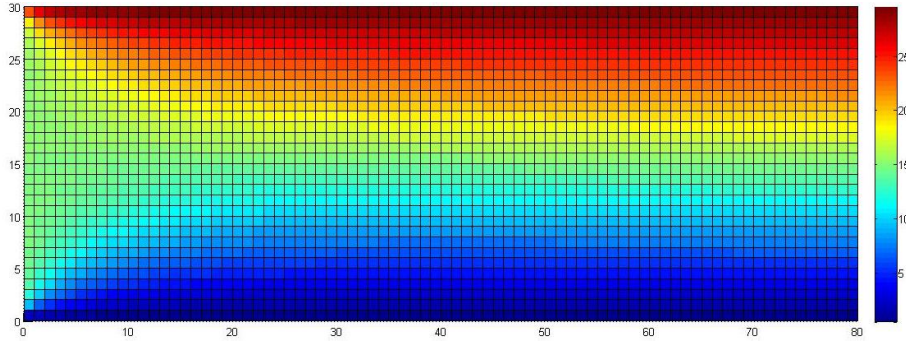


Figure 18: Geschwindigkeit in x-Richtung

Dieses Geschwindigkeitsfeld wurde auch am linken Rand vorgegeben. Außerdem gilt nach wie vor  $\eta = \rho = 1$ . Abbildung (19) zeigt, dass das Geschwindigkeitsprofil unter den Randbedingungen beibehalten wird.

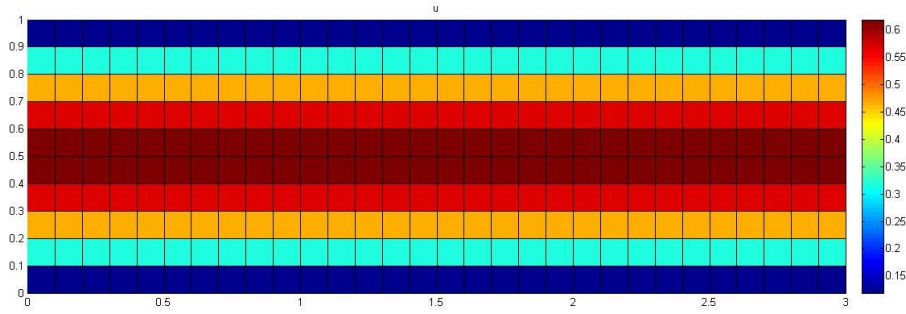


Figure 19: Geschwindigkeit in x-Richtung

### 4.3 Diskretisierung mit der Druck-Korrektur-Gleichung (SIMPLE-Algorithmus)

Im folgenden soll der Druck ebenfalls ermittelt werden. Dazu benutzt man den SIMPLE-Algorithmus (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation). Dabei werden Korrektur-Gleichungen für den Druck und die Geschwindigkeitskomponenten angesetzt. Zunächst werden über ein geschätztes Druckfeld  $p^*$  die geschätzten Geschwindigkeitskomponenten  $u^*$  und  $v^*$  analog zu Gleichung (43) berechnet. Für die Korrekturgleichung für den Druck  $p'$  wird die Kontinuitätsgleichung über eine Finite-Volumen-Bilanz angesetzt. Dabei ergeben sich die Druckkorrekturgleichungen.

$$\tilde{a}_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (49)$$

mit

$$\tilde{a}_P = a_N + a_E + a_S + a_W \quad (50)$$

$$a_E = \rho \Delta y^2 / \tilde{a}_e, \quad a_W = \rho \Delta y^2 / \tilde{a}_w \quad (51)$$

$$a_N = \rho \Delta x^2 / \tilde{a}_n, \quad a_S = \rho \Delta x^2 / \tilde{a}_s \quad (52)$$

$$b = (\rho u_w^* \Delta y - \rho u_e^* \Delta y) + (\rho v_s^* \Delta x - \rho v_n^* \Delta x) \quad (53)$$

Der so ermittelte Korrekturwert muss auf den geschätzten Druck aufaddiert werden. Außerdem müssen die Geschwindigkeitskomponenten mit den Gleichungen

$$u_e = u_e^* + (p'_P - p'_E) \Delta y / \tilde{a}_e \quad (54)$$

$$v_n = v_n^* + (p'_P - p'_N) \Delta x / \tilde{a}_n \quad (55)$$

$$(56)$$

bestimmt werden.

Diesen Algorithmus wendet man so lange an, bis keine Druckkorrektur mehr nötig ist, also  $b = 0$  gilt. Dann wird die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Der Algorithmus wird auf jeder Druckzelle ausgeführt, die keine Randbedingungen vorgegeben hat. Um eine Wand zu simulieren gibt man eine Druckdifferenz von 0 vor, da über die Wand kein Fluss stattfindet.

## 4.4 Testergebnisse mit der Druck-Korrektur-Gleichung

### Laminare Rohrströmung

In diesem Testfall wurde der Druck am rechten Rand mit 0.25 vorgegeben. Die erste Iteration erfolgt mit einem Druck von 0 und einer Geschwindigkeit  $u = 1$ ,  $v = 0$  im Feld. Außerdem gilt die Haftbedingungen am oberen und unteren Rand und am linken Rand wurde eine konstantes Geschwindigkeitsprofil mit  $u = 0.4$  vorgegeben. In Abbildung 20 und 21 erkennt man wie sich über die Kanallänge eine parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil einstellt, während sich ein lineares Druckprofil entlang des Kanals ausbildet.

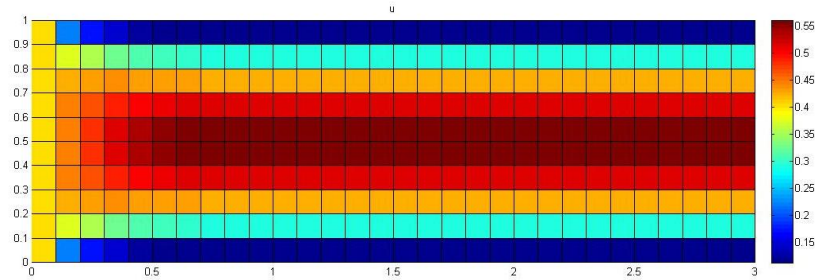


Figure 20: Geschwindigkeit in x-Richtung

### Rohrströmung mit Hindernis

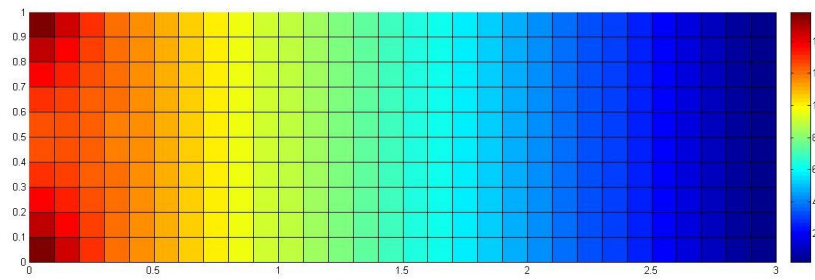


Figure 21: Druckverteilung

Im folgenden Testfall wird wieder die Strömung in einem Rohr mit festen Wänden betrachtet. Dabei werden die gleichen Randbedingungen wie im obigen Testfall vorgeschrieben. In dem Rohr befindet sich ein quadratisches Hindernis. Dabei müssen die Haftbedingungen auch auf dem Rand des Hindernis erfüllt sein. Es bildet sich zunächst eine Rohrströmung wie oben aus. Die Störung der Strömung vor dem Hindernis ist wegen des konvektiven Anteils schon vorher erkennbar. Um das Hindernis herum bildet sich eine schneller Strömung aus, da durch eine kleinere Querschnittsfläche der gleiche Massenfluss fließen muss. Dies kann in Abbildung 22 klar erkennen. Die entsprechende Druckverteilung sieht man in Abbildung 23.

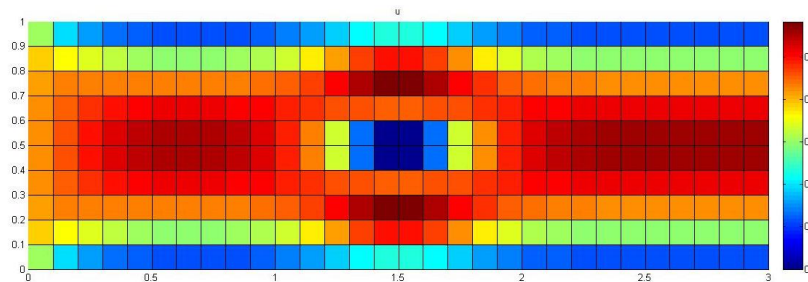


Figure 22: gemittelte Geschwindigkeit in x-Richtung

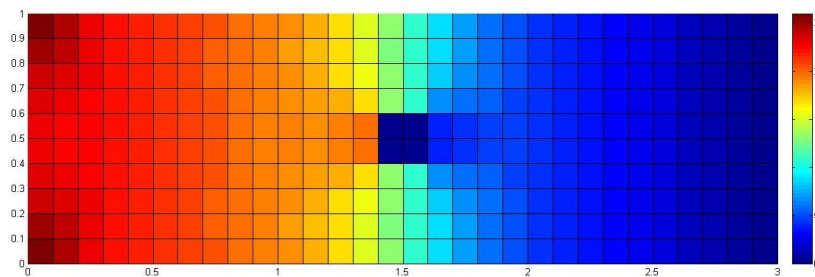


Figure 23: Druckverteilung