

画像工学特論 レポート

163377 宮田木織

2018 年 7 月 24 日

課題 2

式と式番号を以下のように置きなす。

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = (x_\alpha^2 \quad 2x_\alpha y_\alpha \quad y_\alpha^2 \quad 2f_0 y_\alpha \quad f_0^2)^\top \quad \dots \text{誤差を含む点データ} \quad (1)$$

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = (\bar{x}_\alpha^2 \quad 2\bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \quad \bar{y}_\alpha^2 \quad 2f_0 \bar{y}_\alpha \quad f_0^2)^\top \quad \dots x_\alpha \text{ と } y_\alpha \text{ を真値とした } \boldsymbol{\xi}_\alpha \quad (2)$$

$$\boldsymbol{u} = (A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F)^\top \quad \dots \text{楕円のパラメータ} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \quad \dots \text{レポート問題文中式 (2) より} \quad (4)$$

2-1

最小二乗法は、誤差の性質を考慮せず、素朴な考え方で楕円のパラメータ \boldsymbol{u} を推測する手法である。

まず、楕円の性質より、全ての $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ について下式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) = 0 \quad (5)$$

ここから単純に考えると、 $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ に関しては、下式の $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ の 2 乗和 J_{LS} が最小となるような \boldsymbol{u} がパラメータとして最もらしいと言える。

$$J_{LS} = \sum_{\alpha=1}^N (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 \quad (6)$$

最小二乗法は、この考えに基づき、 J_{LS} を目的関数として最小化することで、 \mathbf{u} を推測する手法である。

ここで、式 (6) を展開・整理すると下式となる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_{\alpha})^2 &= \sum_{\alpha=1}^N (\boldsymbol{\xi}_{\alpha}, \mathbf{u})^2 \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\xi}_{\alpha}^{\top} \mathbf{u} \boldsymbol{\xi}_{\alpha}^{\top} \mathbf{u} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{u}^{\top} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha}^{\top} \mathbf{u} \\
 &= \mathbf{u}^{\top} \left(\sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha}^{\top} \right) \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{7}$$

式 (7) を式 (4) を用いて置きなおすことで、 J_{LS} は以下のように書くことができる。

$$J_{LS} = (\mathbf{u}, \mathbf{M}\mathbf{u}) \tag{8}$$

以上のとおり、最小二乗法で楕円のパラメータを推定するときの目的関数 J_{LS} が示された。

2-2

最尤推定は、 $\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$ の誤差の確率的な性質を考え、マハラノビス距離（各 $\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$ と楕円との幾何学的距離の総和に等しい）を最小化することで楕円のパラメータ \mathbf{u} を推定する手法である。

誤差と共分散行列

誤差が互いに独立な期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従うと考え、共分散行列を定義する。

まず、 x_{α} と y_{α} は、それぞれを真値と誤差の和として以下のように表せる。

$$x_{\alpha} = \bar{x}_{\alpha} + \Delta x_{\alpha}, \quad y_{\alpha} = \bar{y}_{\alpha} + \Delta y_{\alpha} \tag{9}$$

これを用いて $\boldsymbol{\xi}_{\alpha}$ を表すと、以下のようになる。

$$\boldsymbol{\xi}_{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\xi}}_{\alpha} + \Delta_1 \boldsymbol{\xi}_{\alpha} + \Delta_2 \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \tag{10}$$

$$\Delta_1 \boldsymbol{\xi}_\alpha = (2\bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha \quad 2\Delta x_\alpha \bar{y}_\alpha + 2\bar{x}_\alpha \Delta y_\alpha \quad 2\bar{y}_\alpha \Delta y_\alpha \quad 2f_0 \Delta x_\alpha \quad 2f_0 \Delta y_\alpha \quad 0)^\top \quad (11)$$

$$\Delta_2 \boldsymbol{\xi}_\alpha = (\Delta x_\alpha^2 \quad 2\Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \quad \Delta y_\alpha^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^\top \quad (12)$$

ここで、誤差が確率変数であるとみなし、 $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の共分散行列を下式のように定義する。ただし、 $\Delta_2 \boldsymbol{\xi}_\alpha$ は十分に小さいものとして無視している。

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = E[\Delta_1 \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta_1 \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] \quad (13)$$

$$\Delta_1 \boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta_1 \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top = 4 \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 \Delta x_\alpha^2 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ f_0 \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha^2 \\ f_0 \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ \Delta x_\alpha^2 \bar{y}_\alpha^2 + 2\bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha^2 \Delta y_\alpha^2 \\ \bar{y}_\alpha^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta y_\alpha^2 \\ f_0 (\Delta x_\alpha^2 \bar{y}_\alpha + \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha) \\ f_0 (\bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha \Delta y_\alpha^2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ \bar{y}_\alpha^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta y_\alpha^2 \\ \bar{y}_\alpha^2 \Delta y_\alpha^2 \\ f_0 \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ f_0 \bar{y}_\alpha \Delta y_\alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{d} &= \begin{pmatrix} f_0 \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha^2 \\ f_0 (\Delta x_\alpha^2 \bar{y}_\alpha + \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha) \\ f_0 \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ f_0^2 \Delta x_\alpha^2 \\ f_0^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e} &= \begin{pmatrix} f_0 \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ f_0 (\bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha \Delta y_\alpha^2) \\ f_0 \bar{y}_\alpha \Delta y_\alpha^2 \\ f_0^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ f_0^2 \Delta y_\alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{f} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

更に、誤差が互いに独立な期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従うなら、

$$E[\Delta x_\alpha] = E[\Delta y_\alpha] = E[\Delta x_\alpha \Delta y_\alpha] = 0, \quad E[\Delta x_\alpha^2] = E[\Delta y_\alpha^2] = \sigma \quad (15)$$

であるため、共分散行列は以下のように書ける。 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ は、共分散行列から σ^2 を括りだしたもので、正規化共分散行列という。

$$V[\xi_\alpha] = 4 \begin{pmatrix} \sigma^2 \bar{x}_\alpha^2 & \sigma^2 \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & f_0 \sigma^2 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 \\ \sigma^2 \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \sigma^2 (\bar{y}_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2) & \sigma^2 \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & f_0 \sigma^2 \bar{y}_\alpha & f_0 \sigma^2 \bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & \sigma^2 \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \sigma^2 \bar{y}_\alpha^2 & 0 & f_0 \sigma^2 \bar{y}_\alpha & 0 \\ f_0 \sigma^2 \bar{x}_\alpha & f_0 \sigma^2 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 \sigma^2 \bar{x}_\alpha & f_0 \sigma^2 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$= \sigma^2 V_0[\xi_\alpha] \quad (17)$$

最尤推定

ここまでで求めた共分散行列を用い、マハラノビス距離を以下のように定義する。

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V[\xi_\alpha]^{-1} (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (18)$$

これを式 (5) を制約条件としてラグランジュ乗数を導入し、最小化する。

ラグランジュ関数は

$$L = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V[\xi_\alpha]^{-1} (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha (\bar{\xi}_\alpha, \mathbf{u}) \quad (19)$$

であり、これを λ_α と $\bar{\xi}_\alpha$ でそれぞれ偏微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\xi}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_\alpha} = 0 \quad (20)$$

となる。