画像工学特論 レポート

141304 沼田輝明 141304 水原宝英
163309 井上澪 163377 宮田木織

2018 年 7 月 25 日

担当箇所

それぞれの担当箇所は以下の通り。

- 沼田：課題 1
- 水原：課題 1
- 井上：課題 2-3
- 宮田：課題 2-1、課題 2-2

課題 2

式と式番号を以下のように置きなおす。

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha^2 & 2x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 & 2f_0 x_\alpha & 2f_0 y_\alpha & f_0^2 \end{pmatrix}^\top \qquad \cdots \text{誤差を含む点データ} \tag{1}$$

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 & 2\bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{y}_\alpha^2 & 2f_0 \bar{x}_\alpha & 2f_0 \bar{y}_\alpha & f_0^2 \end{pmatrix}^\top \qquad \cdots x_\alpha \text{ と } y_\alpha \text{ を真値とした } \boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \end{pmatrix}^\top \qquad \cdots \text{楕円のパラメータ} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \qquad \cdots \text{レポート問題文中式 (2) より} \tag{4}$$

2-1

最小二乗法は、誤差の性質を考慮せず、素朴な考え方で楕円のパラメータ $\boldsymbol{u}$ を推測する手法である。

まず、楕円の性質より、全ての $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ について下式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) = 0 \tag{5}$$

ここから単純に考えると、$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ に関しては、下式の $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ の 2 乗和 J_{LS} が最小となるような $\boldsymbol{u}$ がパラメータとして最もらしいと言える。

$$J_{LS} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 \tag{6}$$

最小二乗法は、この考えに基づき、J_{LS} を目的関数として最小化することで、$\boldsymbol{u}$ を推測する手法である。

ここで、式 (6) を展開・整理すると下式となる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 &= \sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_\alpha,\boldsymbol{u})^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u}\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u} \\
&= \boldsymbol{u}^\top\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\right)\boldsymbol{u}
\end{aligned} \tag{7}
$$

式 (7) を式 (4) を用いて置きなおすことで、J_{LS} は以下のように書くことができる。

$$
J_{LS} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}) \tag{8}
$$

以上のとおり、最小二乗法で楕円のパラメータを推定するときの目的関数 J_{LS} が示された。

2-2

最尤推定は、$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の誤差の確率的な性質を考え、マハラノビス距離（各 $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ と楕円との幾何学的距離の総和に等しい）を最小化することで楕円のパラメータ $\boldsymbol{u}$ を推定する手法である。

誤差と共分散行列

誤差が互いに独立な期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従うと考え、共分散行列を定義する。

まず、x_α と y_α は、それぞれを真値と誤差の和として以下のように表せる。

$$
x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \Delta x_\alpha, \quad y_\alpha = \bar{y}_\alpha + \Delta y_\alpha \tag{9}
$$

これを用いて $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ を表すと、以下のようになる。

$$
\boldsymbol{\xi}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha + \Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{10}
$$

$$
\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} 2\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha & 2\Delta x_\alpha\bar{y}_\alpha + 2\bar{x}_\alpha\Delta y_\alpha & 2\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha & 2f_0\Delta x_\alpha & 2f_0\Delta y_\alpha & 0 \end{pmatrix}^\top \tag{11}
$$

$$
\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} \Delta x_\alpha^2 & 2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha & \Delta y_\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \tag{12}
$$

ここで、誤差が確率変数であるとみなし、$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の共分散行列を下式のように定義する。ただし、$\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha$ は十分に小さいものとして無視している。

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] \tag{13}$$

$$\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top = 4\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 \Delta x_\alpha^2 \\ \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2\Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha^2 \\ f_0\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ \Delta x_\alpha^2\bar{y}_\alpha^2 + 2\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha^2\Delta y_\alpha^2 \\ \bar{y}_\alpha^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha^2 \\ f_0(\Delta x_\alpha^2\bar{y}_\alpha + \bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha) \\ f_0(\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha\Delta y_\alpha^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ \bar{y}_\alpha^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha^2 \\ \bar{y}_\alpha^2\Delta y_\alpha^2 \\ f_0\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} f_0\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha^2 \\ f_0(\Delta x_\alpha^2\bar{y}_\alpha + \bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha) \\ f_0\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0^2\Delta x_\alpha^2 \\ f_0^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} f_0\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0(\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha\Delta y_\alpha^2) \\ f_0\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha^2 \\ f_0^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0^2\Delta y_\alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

更に、誤差が互いに独立な期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従うなら、

$$E[\Delta x_\alpha] = E[\Delta y_\alpha] = E[\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha] = 0, \quad E[\Delta x_\alpha^2] = E[\Delta y_\alpha^2] = \sigma \tag{15}$$

であるため、共分散行列は以下のように書ける。$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ は、共分散行列から σ^2 を括りだしたもので、正規化共分散行列という。

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = 4\begin{pmatrix} \sigma^2\bar{x}_\alpha^2 & \sigma^2\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & 0 & f_0\sigma^2\bar{x}_\alpha & 0 & 0 \\ \sigma^2\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & \sigma^2(\bar{y}_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2) & \sigma^2\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & f_0\sigma^2\bar{y}_\alpha & f_0\sigma^2\bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & \sigma^2\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & \sigma^2\bar{y}_\alpha^2 & 0 & f_0\sigma^2\bar{y}_\alpha & 0 \\ f_0\sigma^2\bar{x}_\alpha & f_0\sigma^2\bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0\sigma^2\bar{x}_\alpha & f_0\sigma^2\bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$= \sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \tag{17}$$

最尤推定

ここまでで求めた共分散行列を用い、マハラノビス距離を以下のように定義する。

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\right) \tag{18}$$

これを式 (5) を制約条件としてラグランジュ乗数を導入し、最小化する。

ラグランジュ関数は

$$L = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\right) - \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \boldsymbol{u}) \tag{19}$$

であり、これを λ_α と $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ でそれぞれ偏微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha} = -\,2V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]^{-}1(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) - \lambda_\alpha \boldsymbol{u} \qquad = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_\alpha} = -(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \boldsymbol{u}) \qquad = 0 \tag{21}$$

となる。

式 (20) を $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ について解くと、下式となる。

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = \frac{\lambda_a}{2} V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{22}$$

これを式 (21) に代入して