画像工学特論 レポート

163377 宮田木織

2018 年 7 月 24 日

課題 2

式と式番号を以下のように置きなおす。

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha^2 & 2x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 & 2f_0 y_\alpha & f_0^2 \end{pmatrix}^\top \quad \cdots \text{誤差を含む点データ} \tag{1}$$

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 & 2\bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{y}_\alpha^2 & 2f_0 \bar{y}_\alpha & f_0^2 \end{pmatrix}^\top \quad \cdots x_\alpha \text{ と } y_\alpha \text{ を真値とした } \boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \end{pmatrix}^\top \quad \cdots \text{楕円のパラメータ} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \quad \cdots \text{レポート問題文中式 (2) より} \tag{4}$$

2-1

全ての $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ について下式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) = 0 \tag{5}$$

ここから単純に考えると、$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ に関しては、下式の $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ の 2 乗和 J_{LS} が最小となるような $\boldsymbol{u}$ がパラメータとして最もらしいと言える。

$$J_{LS} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 \tag{6}$$

最小二乗法は、この考えに基づき、J_{LS} を目的関数として最小化することで、$\boldsymbol{u}$ を推測する手法である。

ここで、式 (6) を展開・整理すると下式となる。

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 &= \sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_\alpha,\boldsymbol{u})^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u}\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u} \\
&= \boldsymbol{u}^\top\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\right)\boldsymbol{u} \qquad (7)
\end{aligned}$$

式 (7) を式 (4) を用いて置きなおすことで、J_{LS} は以下のように書くことができる。

$$J_{LS} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}) \qquad (8)$$

以上のとおり、最小二乗法で楕円のパラメータを推定するときの目的関数 J_{LS} が示された。

2-2

誤差と共分散行列

x_α と y_α は、それぞれを真値と誤差の和として以下のように表せる。

$$x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \Delta x_\alpha, \quad y_\alpha = \bar{y}_\alpha + \Delta y_\alpha \qquad (9)$$

これを用いて $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ を表すと、以下のようになる。

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha + \Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha \qquad (10)$$

$$\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix}2\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha & 2\Delta x_\alpha\bar{y}_\alpha + 2\bar{x}_\alpha\Delta y_\alpha & 2\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha & 2f_0\Delta x_\alpha & 2f_0\Delta y_\alpha & 0\end{pmatrix}^\top \qquad (11)$$

$$\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix}\Delta x_\alpha^2 & 2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha & \Delta y_\alpha^2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top \qquad (12)$$

ここで、誤差が確率変数であるとみなし、$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の共分散行列を下式のように定義する。ただし、$\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha$ は十分に小さいものとして無視している。

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] \qquad (13)$$

$$\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top = 4\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\end{pmatrix} \qquad (14)$$

$$
\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 \Delta x_\alpha^2 \\ \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha^2 \bar{y}_\alpha + \bar{x}_\alpha^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ f_0 \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha^2 \\ f_0 \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ \Delta x_\alpha^2 \bar{y}_\alpha^2 + 2\bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha^2 \Delta y_\alpha^2 \\ \bar{y}_\alpha^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta y_\alpha^2 \\ f_0(\Delta x_\alpha^2 \bar{y}_\alpha + \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha) \\ f_0(\bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha \Delta y_\alpha^2) \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ \bar{y}_\alpha^2 \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha \Delta y_\alpha^2 \\ \bar{y}_\alpha^2 \Delta y_\alpha^2 \\ f_0 \bar{y}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \\ f_0 \bar{y}_\alpha \Delta y_\alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} f_0 \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha^2 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} f_0 \bar{x}_\alpha \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

更に、誤差が互いに独立な期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従うなら、

$$
E[\Delta x_\alpha] = E[\Delta y_\alpha] = E[\Delta x_\alpha \Delta y_\alpha] = 0, \quad E[\Delta x_\alpha^2] = E[\Delta y_\alpha^2] = \sigma \tag{15}
$$

であるため、共分散行列は以下のように書ける。

最尤推定

楕円とそれぞれの点との距離の総和として、マハラノビス距離を以下のように定義する。

$$
J = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \boldsymbol{V}_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]^{-1} (\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) \right) \tag{16}
$$