画像工学特論 レポート

141304 沼田輝明 141304 水原宝英
163309 井上澪 163377 宮田木織

2018 年 7 月 26 日

担当箇所

それぞれの担当箇所は以下の通り。

- 沼田：課題 1（プログラム）
- 水原：課題 1（立式）
- 井上：課題 2-3
- 宮田：課題 2-1、課題 2-2

課題 2

式と式番号を以下のように置きなおす。

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha^2 & 2x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 & 2f_0 x_\alpha & 2f_0 y_\alpha & f_0^2 \end{pmatrix}^\top \quad \cdots 誤差を含む点データ \tag{1}$$

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 & 2\bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{y}_\alpha^2 & 2f_0 \bar{x}_\alpha & 2f_0 \bar{y}_\alpha & f_0^2 \end{pmatrix}^\top \quad \cdots x_\alpha と y_\alpha を真値とした \boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \end{pmatrix}^\top \quad \cdots 楕円のパラメータ \tag{3}$$

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \quad \cdots レポート問題文中式 (2) より \tag{4}$$

2-1

最小二乗法は、誤差の性質を考慮せず、素朴な考え方で楕円のパラメータ $\boldsymbol{u}$ を推測する手法である。

まず、楕円の性質より、全ての $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ について下式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) = 0 \tag{5}$$

ここから単純に考えると、$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ に関しては、下式の $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ の 2 乗和 J_{LS} が最小となるような $\boldsymbol{u}$ がパラメータとして最もらしいと言える。

$$J_{LS} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 \tag{6}$$

最小二乗法は、この考えに基づき、J_{LS} を目的関数として最小化することで、$\boldsymbol{u}$ を推測する手法である。

ここで、式 (6) を展開・整理すると下式となる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 &= \sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_\alpha,\boldsymbol{u})^2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u}\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\boldsymbol{u} \\
&= \boldsymbol{u}^\top\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\right)\boldsymbol{u}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

式 (7) を式 (4) を用いて置きなおすことで、J_{LS} は以下のように書くことができる。

$$
J_{LS} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}) \tag{8}
$$

以上のとおり、最小二乗法で楕円のパラメータを推定するときの目的関数 J_{LS} が示された。

2-2

最尤推定は、$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の誤差の確率的な性質を考え、マハラノビス距離（各点 (x_α, y_α) と楕円との幾何学的距離の総和に等しい）を最小化することで楕円のパラメータ $\boldsymbol{u}$ を推定する手法である。

誤差と共分散行列

誤差が互いに独立な期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従うと考え、共分散行列を定義する。

まず、x_α と y_α は、それぞれを真値と誤差の和として以下のように表せる。

$$
x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \Delta x_\alpha, \quad y_\alpha = \bar{y}_\alpha + \Delta y_\alpha \tag{9}
$$

これを用いて $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ を表すと、以下のようになる。

$$
\boldsymbol{\xi}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha + \Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{10}
$$

$$
\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix}2\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha & 2\Delta x_\alpha\bar{y}_\alpha + 2\bar{x}_\alpha\Delta y_\alpha & 2\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha & 2f_0\Delta x_\alpha & 2f_0\Delta y_\alpha & 0\end{pmatrix}^\top \tag{11}
$$

$$
\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix}\Delta x_\alpha^2 & 2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha & \Delta y_\alpha^2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top \tag{12}
$$

ここで、誤差が確率変数であるとみなし、$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の共分散行列を下式のように定義する。ただし、$\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha$ は十分に小さいものとして無視している。

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] \tag{13}$$

$$\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top = 4\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2\Delta x_\alpha^2 \\ \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha^2 \\ f_0\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ \Delta x_\alpha^2\bar{y}_\alpha^2 + 2\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha^2\Delta y_\alpha^2 \\ \bar{y}_\alpha^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha^2 \\ f_0(\Delta x_\alpha^2\bar{y}_\alpha + \bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha) \\ f_0(\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha\Delta y_\alpha^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ \bar{y}_\alpha^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha^2 \\ \bar{y}_\alpha^2\Delta y_\alpha^2 \\ f_0\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} f_0\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha^2 \\ f_0(\Delta x_\alpha^2\bar{y}_\alpha + \bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha) \\ f_0\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0^2\Delta x_\alpha^2 \\ f_0^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} f_0\bar{x}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0(\bar{y}_\alpha\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha + \bar{x}_\alpha\Delta y_\alpha^2) \\ f_0\bar{y}_\alpha\Delta y_\alpha^2 \\ f_0^2\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha \\ f_0^2\Delta y_\alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

更に、誤差が互いに独立な期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従うなら、

$$E[\Delta x_\alpha] = E[\Delta y_\alpha] = E[\Delta x_\alpha\Delta y_\alpha] = 0, \quad E[\Delta x_\alpha^2] = E[\Delta y_\alpha^2] = \sigma \tag{15}$$

であるため、共分散行列は以下のように書ける。

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = 4\sigma^2 \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & 0 & f_0\bar{x}_\alpha & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & (\bar{y}_\alpha^2 + \bar{x}_\alpha^2) & \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & f_0\bar{y}_\alpha & f_0\bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & \bar{y}_\alpha^2 & 0 & f_0\bar{y}_\alpha & 0 \\ f_0\bar{x}_\alpha & f_0\bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0\bar{x}_\alpha & f_0\bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

最尤推定

ここまでで求めた共分散行列を用い、マハラノビス距離を以下のように定義する。

$$J_{ML} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\right) \tag{17}$$

これを式 (5) を制約条件としてラグランジュ乗数を導入し、最小化する。

式 (17) について、ある α に対するラグランジュ関数は

$$L_\alpha = \left(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\right) - \lambda_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \boldsymbol{u}) \tag{18}$$

であり、これを λ_α と $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ でそれぞれ偏微分すると

$$\frac{\partial L_\alpha}{\partial \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha} = -2V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) - \lambda_\alpha \boldsymbol{u} \qquad = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial L_\alpha}{\partial \lambda_\alpha} = -(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \boldsymbol{u}) \qquad = 0 \tag{20}$$

となる。

式 (19) を $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ について解くと、下式となる。

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = \frac{\lambda_a}{2} V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{21}$$

これを式 (20) に代入して

$$\left(\frac{\lambda_a}{2} V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u}\right) = \frac{\lambda_a}{2} V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \boldsymbol{u} = 0 \tag{22}$$

となり、λ について解くと

$$\lambda_\alpha = \frac{-(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{23}$$

となる。これを式 (21) に代入することで、下式の通り $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ と λ_α を消した式を得られる。

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = \frac{1}{2}\frac{-(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\xi}_\alpha \tag{24}$$

最後に式 (17) に代入して

$$J_{ML} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u}, (\frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} V^{-1}[\boldsymbol{\xi}_\alpha] V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u} \right) \tag{25}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \right)^2 (V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \tag{26}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{u})^2}{(\boldsymbol{u}, V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{27}$$

となる。基本的にはこの式を最小化する $\boldsymbol{u}$ を推定することになるが、最小化においては定数倍を考慮する必要が無いため、正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \frac{V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]}{4\sigma^2}$ として、以下の式を用いることができる。

$$J_{ML} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{28}$$

以上のとおり、最尤推定において楕円のパラメータを推定するときの目的関数 J_{ML} が示された。