

Carlos M. Vélez S.
Enlace permanente
Otros temas y recursos

Versión 6/11/2018

Preguntas de motivación:

- (1) ¿Cómo el método de asignación de polos por realimentación del estado logra la estabilidad y eliminación del error de un sistema dinámico?
- (2) ¿Qué sentido tiene diseñar un control que utilice la información de todo el estado si normalmente solo se miden un conjunto menor de variables?
- (3) ¿Qué condiciones debe cumplir el sistema lineal para poder controlarse con este tipo de controladores?
- (4) ¿Cómo se aplica un control lineal a un sistema no lineal?

- El control es mejor si se tiene más información del sistema
- Máxima información de un proceso: variables de estado
- Si se miden todas las variables de estado el sistema no tendrá polos y se evitan los problemas con polos de fase no mínima
- La ubicación de polos por realimentación del estado requiere que el proceso sea **completamente controlable**
- En la mayoría de los procesos la medición de todos los estados es costoso o impracticable. En este caso se deben estimar algunas variables de estado. El sistema debe ser **observable**
- El diseño por realimentación del estado puede dividirse en dos etapas (**principio de separación**):
 1. Diseño con todas las variables de estado disponibles
 2. Estimación de las variables de estado no medidas
- Caso más general: asignación de polos por realimentación de la salida. Los algoritmos son aún más complejos.
 - Formulación: $A_{cl} = A - BKC$

- Métodos para la estimación de las variables de estado no medibles:
 - Observadores de estado (Luenberger, 1966)
 - Filtro de Kalman (Kalman, 1960)
- Formas del controlador de realimentación del estado:
 - Regulador estático: $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 - Regulador dinámico
- La realimentación del estado puede utilizarse para asignar los polos en lazo cerrado en una posición deseada:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}_{cl}\mathbf{x}(k)$$

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_{cl}| = P(z) = z^n + p_1z^{n-1} + \cdots + p_{n-1}z + p_n$$

- El esfuerzo de control aumenta con un movimiento más drástico de los polos

Solución simple para un caso particular

■ Planteamiento del problema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K})\mathbf{x}(k)$$

- Si $\mathbf{\Phi}_{cl}$ es la matriz deseada en lazo cerrado (se puede expresar en la forma de Jordan, donde sus valores propios son los polos deseados) se tiene

$$\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}_{cl}$$

$$\text{Si } m = n, \mathbf{K} = \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_{cl})$$

- En general, el número de entradas es diferente al número de estados
- Con un esquema de muestreo multifrecuencia se pueden obtener matrices cuadradas

Método de Ackermann (sistemas SISO)

- Modelo del sistema: $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k)$
- Forma canónica controlable del modelo del sistema

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{\Phi}^* \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{\Gamma}^* u(k)$$

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{T} = \mathbf{M}_c^* \mathbf{M}_c^{-1} \quad \mathbf{M}_c^* = \mathbf{T}\mathbf{M}_c$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}\mathbf{\Phi}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}^* = \mathbf{T}\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Polinomio característico deseado

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_{n-1} z + p_n$$

Método de Ackermann (sistemas SISO)

■ Modelo en lazo cerrado

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \Phi^* \mathbf{x}^*(k) + \Gamma^* u(k), \quad u(k) = -\mathbf{K}^* \mathbf{x}^*(k)$$

$$\mathbf{x}^*(k+1) = (\Phi^* - \Gamma^* \mathbf{K}^*) \mathbf{x}^*(k)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^* & k_2^* & \cdots & k_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & \cdots & -p_1 \end{bmatrix}$$

■ Solución de la ecuación anterior

$$\mathbf{K}^* = [p_n - a_n \quad p_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad p_1 - a_1]$$

$$u = -\mathbf{K}^* \mathbf{x}^* = -\mathbf{K}^* \mathbf{T} \mathbf{x} = -\mathbf{K} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^* \mathbf{T} = [p_n - a_n \quad p_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad p_1 - a_1] \mathbf{M}_c^* \mathbf{M}_c^{-1}$$

Método de Ackermann (sistemas SISO)

- La expresión anterior puede llevarse a una forma más simple:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{P}(\Phi)$$

$$\mathbf{P}(\Phi) = \Phi^n + p_1 \Phi^{n-1} + \dots + p_{n-1} \Phi + p_n \mathbf{I}$$

- Se observa que el sistema debe ser controlable
- Matlab: `acker(Fi, Gamma, Polos_deseados)`
- Ejemplo de problemas con modelos no controlables:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\mathbf{M}_c) = 1 \neq 2$$

- Modelo no controlable
- Ecuación característica en lazo cerrado:

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2 + k_2)$$

- Se pueden asignar los polos **solo** en $(-1, \lambda_c)$, siendo λ_c arbitrario
- No se pueden ubicar los polos en cualquier otra posición

Caso de múltiples entradas

- Cálculos más complejos y solución no única
- Existen varios métodos de solución que se enfrentan a problemas de confiabilidad y sensibilidad numérica
- Condición necesaria y suficiente: sistema controlable
- Ya que existen más grados de libertad en la selección de la matriz de realimentación, es posible satisfacer otros requerimientos de diseño: asignación de vectores propios y minimización de la sensibilidad
- La respuesta mejora, ya que hay más libertad para seleccionar las acciones de control
- Formulación del problema:
 - Encontrar la matriz \mathbf{K} de manera que $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ tenga los valores propios deseados
- Matlab
 - Ubicación de polos por realimentación del estado: [place](#).
 - Restricción: la multiplicidad de un polo no debe ser mayor que el número de entradas

Caso de múltiples entradas – Método de reducción a una entrada

- Un sistema controlable con múltiples entradas siempre puede ser transformado, por medio de una realimentación del estado, a un sistema controlable con una sola entrada. **Lema:**
 - Dado el sistema (\mathbf{A}, \mathbf{B}) controlable, para toda matriz $\Gamma \in \mathbf{R}^{m \times 1} \neq 0$ y casi toda matriz $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, el siguiente sistema en lazo abierto resultante con entrada escalar v es controlable y tiene valores propios distintos:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\Gamma v$$

- Al sistema con una entrada se le puede aplicar la fórmula de Ackermann para obtener la matriz de realimentación \mathbf{F}
- Matriz en lazo cerrado con el control $v = -\mathbf{F}\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\Gamma\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B}(\Gamma\mathbf{F} - \mathbf{K})$$

- Para el sistema MIMO la matriz de control es:

$$\mathbf{K} = \Gamma\mathbf{F} - \mathbf{K}$$

- Se adiciona un integrador a la planta y se realiza el diseño sobre el nuevo modelo. El integrador se incluye luego en el regulador
- El modelo de la planta con el integrador es:

$$\mathbf{V}(z) = \frac{1}{z-1} \mathbf{E}(z), \quad z\mathbf{V}(z) = \mathbf{V}(z) + \mathbf{E}(z), \quad \mathbf{e}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k)$$

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{v}(k) + \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k) = \mathbf{v}(k) + \mathbf{r}(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{v}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{0}_{n \times p} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0}_{p \times m} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{p \times p} \end{bmatrix} \mathbf{r}(k)$$

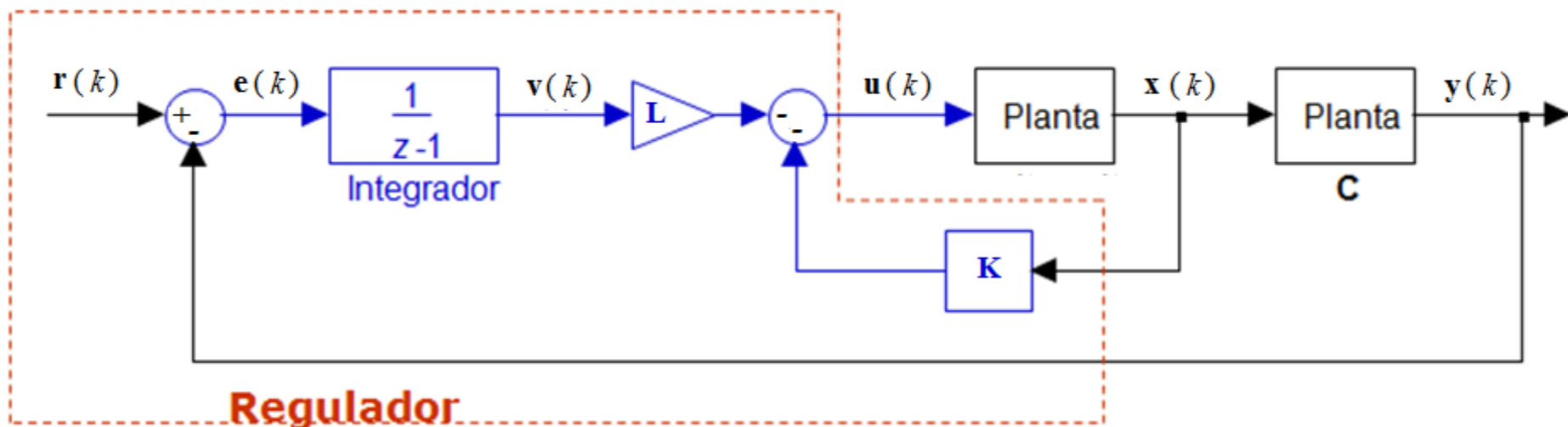
$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{\Phi}}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{\Gamma}}_1\mathbf{u}(k) + \tilde{\mathbf{\Gamma}}_2\mathbf{r}(k)$$

- Ley de control

$$\mathbf{u}(k) = -\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}}(k), \quad \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\tilde{\mathbf{\Phi}} - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_1\tilde{\mathbf{K}})\tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{\Gamma}}_2\mathbf{r}(k)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{m \times (n+p)} = [\mathbf{K} \quad \mathbf{L}], \quad \mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) - \mathbf{L}\mathbf{v}(k)$$

■ Estructura de control



Ejemplo 1 - Método de sustitución (caso SISO)

■ Modelo discreto de la planta

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = [1 \quad -0.4] \mathbf{x}(k), \quad T = 1 \text{ seg}$$

■ Polos de la planta: 0.2, -0.5

■ Regulador de ubicación de polos por realimentación del estado

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -[k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

■ Modelo en lazo cerrado

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}u(k), \quad u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{K})\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.3 - k_1 & 0.2 - k_2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{K} = \text{place}([-0.3 \ 0.2; 0.5 \ 0], [1; 0], [0.1, 0.1])$$

$$\mathbf{K} = \text{acker}([-0.3 \ 0.2; 0.5 \ 0], [1; 0], [0.1, 0.1])$$

Ejemplo 1 (cont.)

- Ecuación característica en lazo cerrado

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0, \quad z^2 + (k_1 + 0.3)z + 0.5k_2 - 0.1 = 0$$

- Polos deseados: 0.1, 0.1
- Ecuación característica deseada:

$$(z - 0.1)(z - 0.1) = z^2 - 0.2z + 0.01$$

- Solución al problema de ubicación de polos:

$$z^2 + (k_1 + 0.3)z + 0.5k_2 - 0.1 = z^2 - 0.2z + 0.01$$

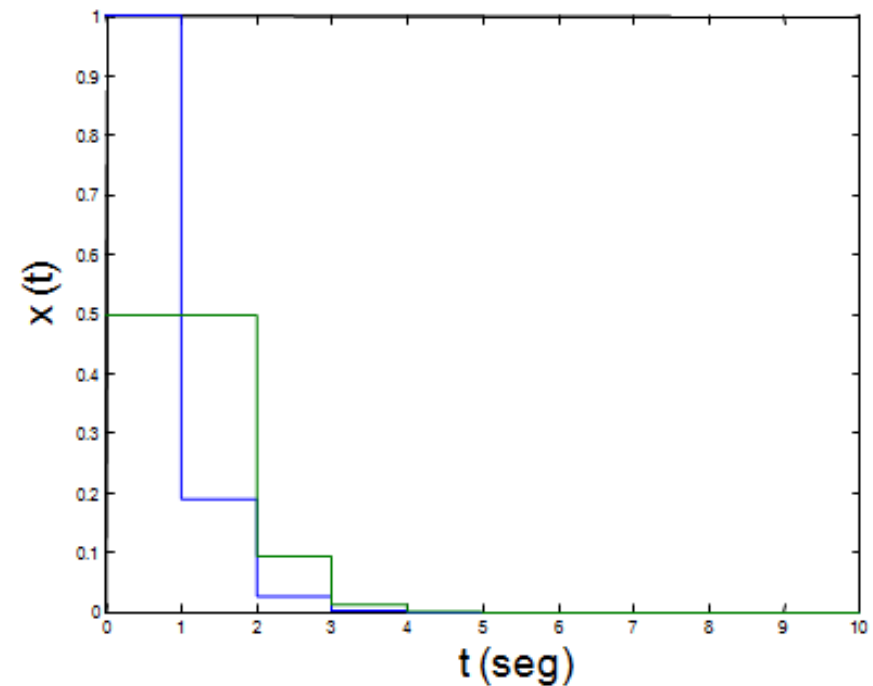
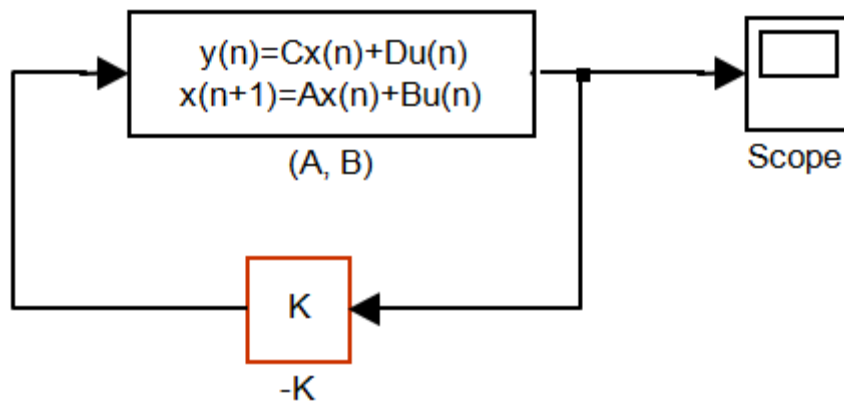
$$k_1 = -0.5, k_2 = 0.22$$

$$u(k) = - \begin{bmatrix} -0.5 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Control
estático

Ejemplo 1 (cont.)

■ Resultados de la simulación



Ejemplo 2 - Método de Ackermann (sistemas SISO)

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = [1 \quad -0.4] \mathbf{x}(k), \quad T = 1 \text{ seg}$$

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 1 & -0.3 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad P(z) = (z - 0.1)(z - 0.1) = z^2 - 0.2z + 0.01$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{\Phi}^2 - 0.2\mathbf{\Phi} + 0.01\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.26 & -0.1 \\ -0.25 & 0.11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1] \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{\Phi}) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -0.3 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.26 & -0.1 \\ -0.25 & 0.11 \end{bmatrix} = [-0.5 \quad 0.22]$$

Ejemplo 3 - Caso de múltiples entradas

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k), \quad T = 1 \text{ seg}$$

Polos deseados: $[0, 0, 0]$

- Se seleccionan arbitrariamente las siguientes matrices

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma K}) \mathbf{x} + \mathbf{\Gamma v} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.75 & 2 & 3.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$\text{eig}(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma K}) = [-1.6231, -0.0734, 4.1965]$$

Ejemplo 3 (cont.)

- Se aplica la fórmula de Ackermann para obtener

$$\mathbf{F} = [0.1225 \quad 0.4314 \quad 2.0098]$$

- La matriz de control del sistema MIMO es:

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Gamma F} - \mathbf{\kappa} = \begin{bmatrix} -0.8775 & -1.5686 & -0.9902 \\ 1.4902 & 4.7255 & 6.0392 \end{bmatrix}$$

- Verificación de los polos en lazo cerrado:

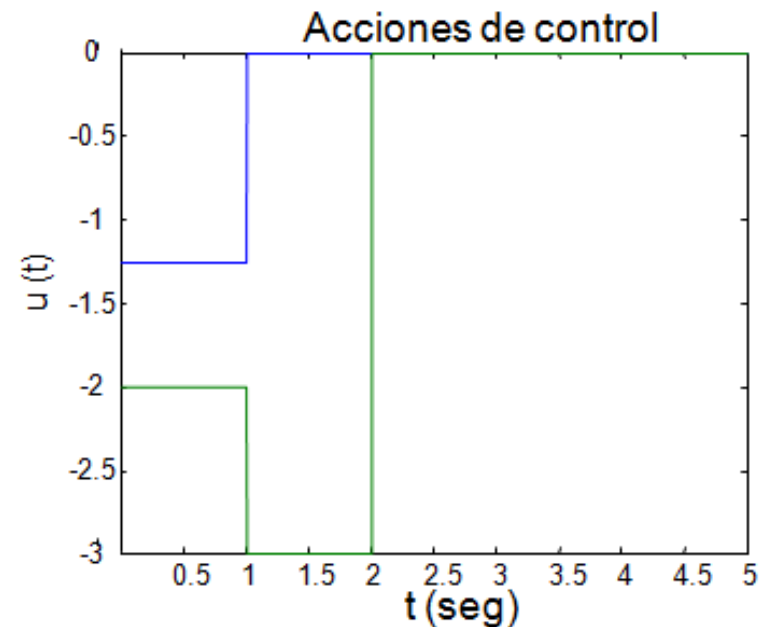
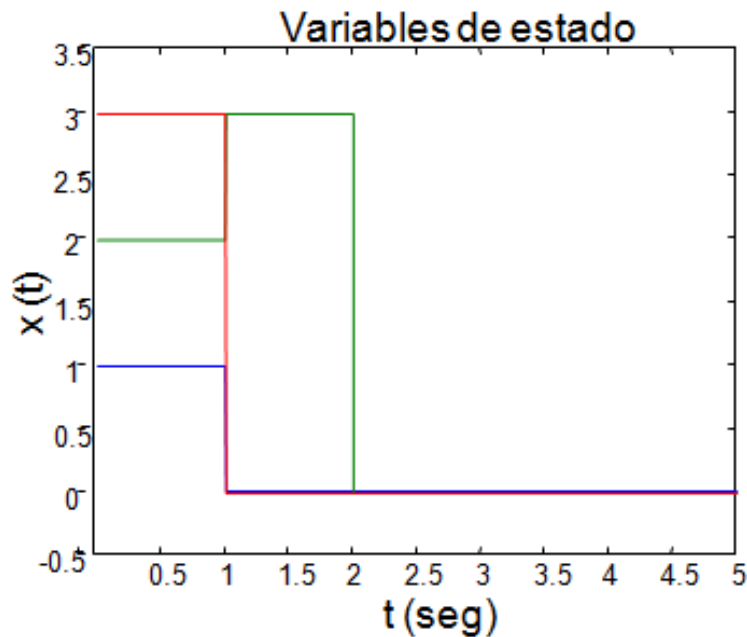
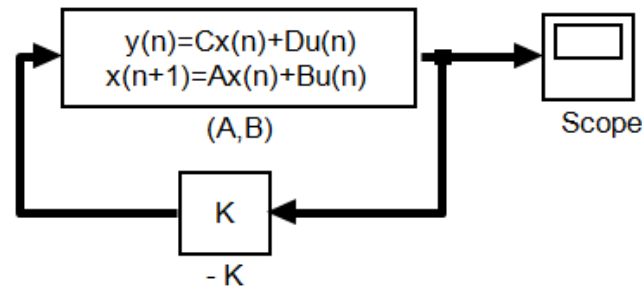
$$\text{eig}(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Gamma K}) = [0.49 \pm 0.85i, -0.98] \times 10^{-5}$$

- Cálculo con Matlab: `S=ss([0 1 0;0 0 1;-0.25 0 0.5],[0 1;0 0;1 0],[1 0 0;0 1 0;0 0 1],[0 0;0 0;0 0]); K=place(S.A, S.B, [0,0,0.000001])`

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3 (cont.)

■ Resultados de la simulación



Ejemplo 4 – Eliminación del error en estado estacionario

■ Planta SISO

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = [1 \quad -0.4] \mathbf{x}(k), \quad T = 1 \text{ seg}$$

■ Polos de la planta: $P(z) = (z - 0.1)(z - 0.1) = z^2 - 0.2z + 0.01$

■ Adicionando un integrador:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$P(z) = (z - 0.1)^3 = z^3 - 0.3z^2 + 0.03z - 0.001$$

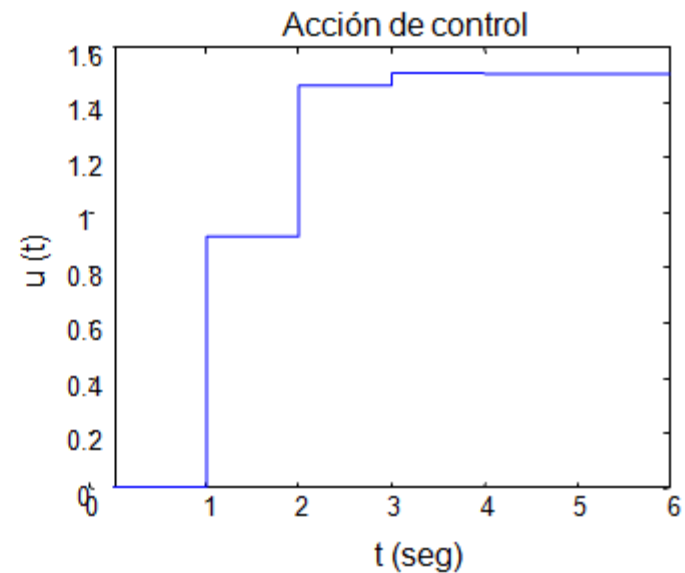
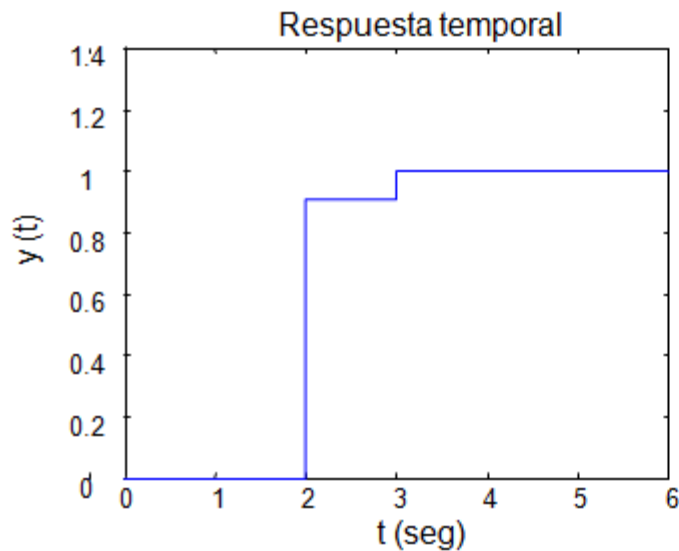
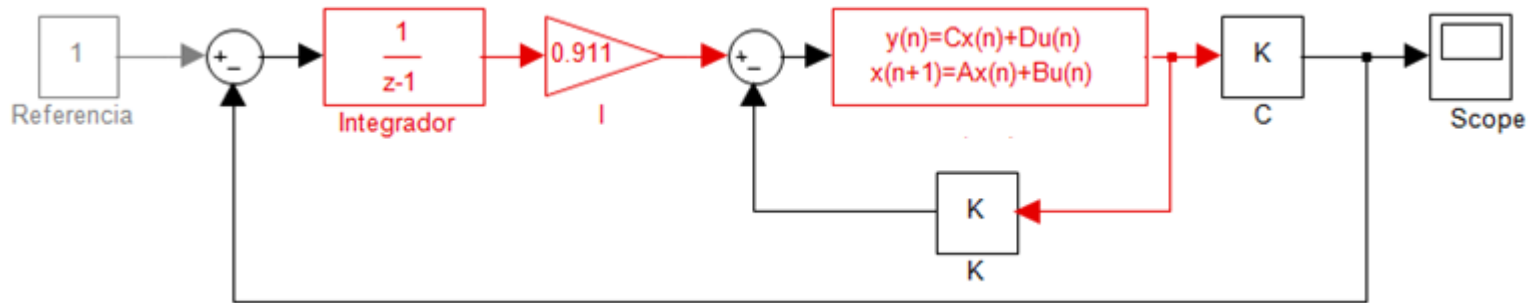
■ Polos deseados:

■ Cálculo con Matlab: `S = ss([-0.3 0.2; 0.5 0], [1; 0], [1 -0.4], 0, 'Ts', 1); Sa = ss([S.A [0; 0]; -S.C 1], [S.B; 0], [1 0 0], 0, 'Ts', 1); K = acker(Sa.A, Sa.B, [0.1, 0.1, 0.1])`

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad L] = [0.4 \quad -0.1625 \quad -0.9112]$$

Ejemplo 4 (cont.)

■ Resultados de la simulación



Ejemplo 5 – Eliminación del error en estado estacionario

■ Planta MIMO arbitraria:

$S = ss(rand(2,2), rand(2,2), rand(2,2), zeros(2,2), 'Ts', 0.1);$

■ Función de Matlab para el cálculo del regulador

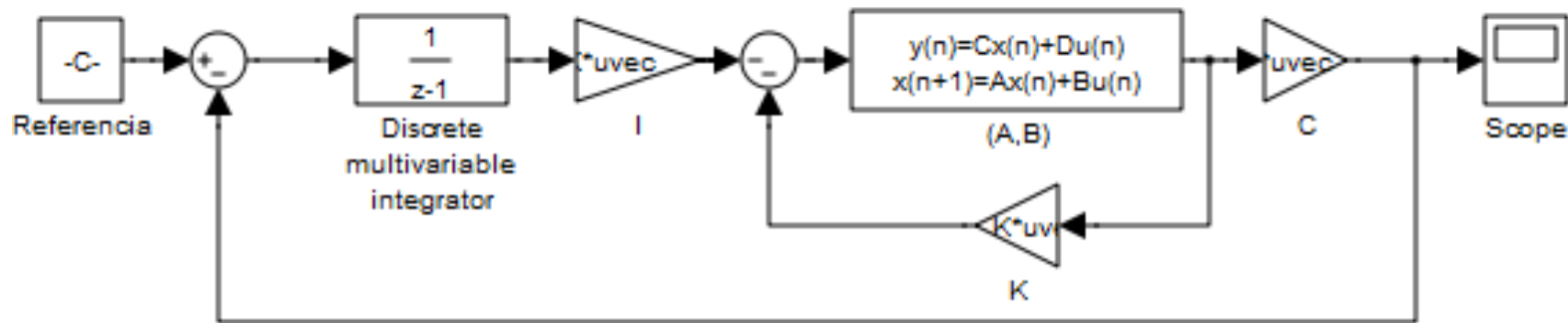
```
function [K,L] = poles_int(S,P)
[p,m]=size(S.D); [n,n]=size(S.A);
if length(P) ~= (n+p)
    disp(['Debe asignar (n+p)= ' num2str(n+p) ' polos'])
    K=[]; L=[];
    return
end
A = [S.A zeros(n,p); -S.C eye(p)];
B = [S.B; zeros(p,m)];
if p+m==2
    K1 = acker(A,B,P);
else
    K1 = place(A,B,P);
end
K = K1(:,1:n); L = K1(:,n+1:n+p);
```

■ Cálculo del regulador:

$[K,L] = poles_int(S,[0.1,0.2,0.3,0.4])$

Ejemplo 5 (cont.)

■ Diagrama de simulación



- Se implementó el integrador multivariable como una ecuación de estado:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)$$

$$y(k) = \mathbf{x}(k)$$

Ejemplo 5 (cont.)

- Resultados de la simulación (referencias: 1 y 2)

