Introducción a la teoría de juegos

Pablo Osorio López
Ingeniería Matemática

Universidad EAFIT

25 de febrero de 2020

Resumen

La teoría de juegos estudia como un conjunto de jugadores racionales interactúa ante un ”juego”describiendo el conflicto y la cooperación que puede haber entre estos. Es utilizada principalmente en la economía gracias a que ha contribuido a comprender la conducta humana frente a la toma de decisiones. Sin embargo, también ha sido aplicada en la biología, la computación y las ciencias humanas. El trabajo a continuación presenta una recopilación de conceptos introductorios así como de los principales métodos de solución para problemas de decisión incluyendo el equilibrio de Nash. Además se analizan diferentes ejemplos, en especial, el dilema del prisionero, un ejemplo clásico de la teoría de juegos.

1. Introducción

La teoría de juegos estudia de manera formal y abstracta las decisiones que pueden tomar diversos adversarios en conflicto y hace predicciones sobre estas. Describe el conflicto dado en la cooperación entre seres racionales. Tales decisiones se deben hacer teniendo en cuenta las acciones que tomarán los demás adversarios. La teoría de juegos es capaz de ofrecer cuestiones de interés para diferentes ámbitos, siendo principalmente utilizado en la economía pero también ha sido aplicado a ramas de las ciencias sociales y la biología.

Aunque la palabra *juego* comúnmente se refiere a diversión, la teoría de juegos va más allá, siendo más claramente un análisis matemático de conflictos, explicando diferentes tipos de cooperación. Los jugadores son entes decisores que se considerarán racionales, y se citan a conflictos biológicos, militares,politicos,etc. El concepto fundamental para hacer predicciones sobre los juegos es el famoso *equilibrio de Nash* (Rodríguez, 2005).

2. Estado del arte

Desarrollada en sus comienzos como una herramienta para el estudio de la economía se formalizó como teoría con los trabajos de (von Neumann, 1928), y posteriormente un desarrollo de (Morgenstern, 1968). Fue ampliamente desarrollada durante la guerra fría, debido sobre todo a su aplicación en el ámbito militar. Se ha aplicado para explicar conductas animales, siendo principalmente importante el surgimiento del dilema del prisionero en la que el egoísmo perjudica a los jugadores. En su propia tesis doctoral (Nash, 1951), en la cual se introduce el concepto de equilibrio de Nash se produce un cambio en la percepción económica de los académicos, con una explicación clara de la razón por la cual el interés individual no siempre conlleva al interés colectivo.

Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten ganaron el premio nobel de economía en 1994 al desarrollar los conceptos alrededor del equilibrio de Nash y probar su existencia. En 2005, los teóricos de juegos Thomas Schelling y Robert Aumann ganaron el premio Nobel de Economía. Schelling trabajó en modelos dinámicos, los primeros ejemplos de la teoría de juegos evolutiva. Por su parte, Aumann contribuyó más a la escuela del equilibrio. En el 2007, Roger Myerson, junto con Leonid Hurwicz y Eric Maskin, recibieron el premio Nobel de Economía por "sentar las bases de la teoría de diseño de mecanismos".

3. Conceptos importantes

Un **problema de decisión** consiste de los siguientes componentes:

- **Acciones**: todas las alternativas que puede escoger cada jugador.
- **Resultados**: las posibles consecuencias que pueden resultar de cualquier acción.
- **Preferencias**: una descripción de como un jugador prefiere los posibles resultados. Se utilizan las relaciones de preferencia (x $\succeq$ y, es decir, x es al menos tan deseable como y), comúnmente para este propósito se usan las **funciones de utilidad**.

Pueden clasificarse en diferentes tipos, siendo los principales los juegos:

- **Deterministas:** en los cuales cada decisión tiene un resultado conocido.
- **De riesgo:** si las acciones que tiene el jugador tiene un conjunto de posibles resultados cada uno con una probabilidad de ocurrencia asociada.

Un **juego** en su forma normal consiste de los siguientes componentes:

- Un conjunto finito de **jugadores** $N = \{1, 2, ..., n\}$.
- Una colección de **estrategias puras** $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$.
- **Funciones de pago**: $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, cada una asignando una función de pago a cada combinación de estrategias tal que $v_i : S_1 \times S_2 \times ... \times S_n \implies$ R

Un jugador que tenga que elegir una decisión, elegirá la acción a^* tal que maximice su función de utilidad $v(.)$.

En un **juego** se asumirá que los siguientes cuatro componentes son de "**sentido común**.entre los participantes:

1. todas las acciones de los jugadores
2. todos los resultados
3. como las acciones afectan los resultados.

4. preferencias de los jugadores a los resultados.

Un evento E es de **sentido común** si todos saben E y además todos saben que todos saben E y así sucesivamente.

Una *estrategia pura* $s_i \in S_i$ es un plan de acción del conjunto de posibles acciones entre las cuales se puede decidir.

Un conjunto de estrategias $s \in S$ **pareto domina** otro conjunto de estrategias $s' \in S$ si $v_i(s) \geq v_i(s')\, \forall i$ y la desigualdad se cumple para al menos un i, también se dirá que s' es pareto dominada. Una estrategia es óptima de pareto si no es dominada por otra estrategia.

Una **matriz de pagos** para un juego de dos jugadores estará definida de la siguiente manera.

		Jugador 2		
		b_1	$\dots$	b_m
Jugador 1	a_1	$v_1(a_1,b_1), v_2(a_1,b_1)$	$\dots$	$v_1(a_1,b_m), v_2(a_1,b_m)$
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_n	$v_1(a_n,b_1), v_2(a_n,b_1)$	$\dots$	$v_1(a_n,b_m), v_2(a_n,b_m)$

Tipos de juegos según su orden de escogencia

- Simúltaneos (principalmente se trabaja este tipo de juego).
- Consecutivos

Tipos de juegos según la cooperación entre jugadores

- No-cooperativos (principalmente estudiaremos estos).
- Cooperativos.

4. Problemas de decisión

En la solución de problemas es claro que el jugador racional busca siempre llevar a cabo las acciones que resulten en el valor esperado más alto en los resultados, como está previamente definido en la sección 3.

Ejemplo 1: Supongamos que usted es el manager de una empresa, debe decidir si comienza un proyecto de investigación y desarrollo sobre un producto o simplemente no hacerlo. En este caso su conjunto de acciones sería A=$\{g,s\}$ donde g representa llevar a cabo el proyecto y s representa no hacerlo. El llevar a cabo el proyecto asegurará que el producto tenga un 75 % de probabilidad de éxito, en caso de no llevar a cabo el proyecto el producto mantendrá su 50 % de probabilidad de éxito. Si el producto que usted comercia es exitoso usted percibirá una ganancia de 10 unidades monetarias, en cambio si el producto fracasa su ganancia es 0. Suponga usted que la decisión de llevar el proyecto a cabo no tiene costo. El árbol de decisión que representa el problema se expone en la figura 1.

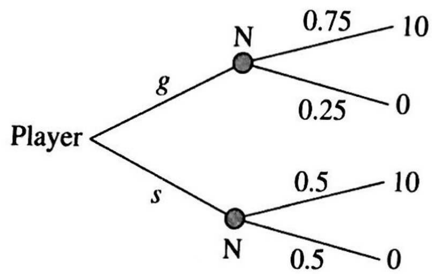

Figura 1: Tomada de Tadelis (2013)

En este caso la solución al problema es encontrada haciendo uso del valor esperado.

$$E(g) = 0{,}75 \times 10 + 0{,}25 \times 0 = 7{,}5$$
$$E(s) = 0{,}5 \times 10 + 0{,}5 \times 0 = 5$$

Donde se concluye que la opción g es la que usted debe elegir, es decir, usted debería llevar a cabo el proyecto.

Para problemas de decisión de un sólo jugador de mayor tamaño se pueden utilizar técnicas iterativas como inducción hacia atrás o programación dinámica en general.

5. Teoría de juegos (2 o más jugadores)

Suposiciones utilizadas en la teoría de juegos para juegos no cooperativos:

- **Los jugadores son RACIONALES**, es decir, el jugador siempre elige las opciones que maximicen su función de pago.
- **Los jugadores son INTELIGENTES**, es decir, conocen todas las posibles acciones, resultados y preferencias de los jugadores.
- **Sentido común**, el hecho de que todos los jugadores son racionales e inteligentes es sentido común entre todos los jugadores.
- Todas las predicciones o equilibrios de una solución deben de ser auto-impuestas por el mismo juego.

5.1. Dominancia en estrategias puras

En un juego, la estrategia s_i' es **estrictamente dominada** por otra estrategia s_i si para todo conjunto de decisiones posibles de los otros jugadores, elegir la estrategia s_i siempre es preferido a elegir s_i'. Es decir:

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i}) \text{ para toda } s_{-i}$$

Donde s_{-i} representa el conjunto de estrategias de todos los jugadores a excepción de jugador i.
Se sabe que un jugador nunca escogerá una estrategia estrictamente dominada.

Una estrategia s_i es **estrategia dominante** si para cualquier estrategia que escojan el resto de adversarios s_{-i}, la decisión s_i es preferida a cualquier otra estrategia pura s_i'.

Ejemplo 2: Dos ladrones son atrapados por atracar un banco, para condenarlos es necesario que se incriminen mutuamente. Si ninguno de los ladrones incrimina al otro, entonces se le asignará a cada uno 1 año de cárcel por otro tipo de crímenes menores que se les puede probar. Si uno coopera con la policía y el otro decide callar, entonces al que cooperó se dejará en libertad mientras que al otro se le darán 15 años. Si los dos deciden cooperar con la policía a cada uno se le condenará con 10 años.

		Individuo 2	
		Calla	Coopera
Individuo 1	Calla	-1,-1	-15,0
	Coopera	0,-15	-10,-10

El primer elemento de la matriz de pagos es $v_1(Calla, Calla), v_2(Calla, Calla) = -1, -1$.
Los jugadores tienen una estrategia dominante la cual es confesar. Ya que ante cualquier elección del otro jugador **confesar** siempre resulta en menos años en la cárcel, cada individuo tenderá a confesar. Y no es de sorprender que el abogado de cada individuo les aconseje confesar.
¿Por qué entonces en la vida real los ladrones no siempre se incriminan mutuamente?

- Llegan a un solución cooperativa, para alcanzar un óptimo de pareto en el que conjuntamente pasen menos años en la cárcel.
- La función de pago no solamente depende del tiempo que cada jugador va a pasar en la cárcel: una variante puede ser que el individuo es altruista es decir, se interesa tanto por su tiempo en la cárcel como el de su compañero de fechorías, otra variante puede ser el hecho de que delatar tiene consecuencias que deben tenidas en cuenta en la función de pago (venganza, mafia, reconocimiento público).

5.2. Solución iterada de estrategias dominadas

Basadas en dos conclusiones por parte de jugadores racionales:

- Un jugador racional nunca jugará una estrategia dominada.
- Si un jugador racional tiene una estrategia estrictamente dominante entonces la jugará.

El hecho de que se presume que todos los jugadores son racionales y tienen sentido común permite eliminar estrategias que no se jugarán.

Se parte del hecho de que cada jugador i tiene un conjunto de estrategias S_i original. El método consiste de dos pasos:

1. Defina k=0 como el número de iteraciones.
2. Se busca en cada jugador estrategias dominadas. En caso de que haya alguna estrategia estrictamente dominada se define un nuevo juego con las estrategias S_i^k que no contenga

las estrategias dominadas del jugador i. Asigne k = k + 1 y se repite este paso hasta que no haya más estrategias estrictamente dominadas que eliminar.

3. Las nuevas estrategias en S_i^k son las predicciones razonables.

Ejemplo 3: Se define el siguiente juego:

		Jugador 2		
		X	Y	Z
Jugador 1	A	4,3	5,1	6,2
	B	2,1	8,4	3,6
	C	3,0	9,6	2,8

Es claro que la decisión Y es dominada por la decisión Z. Lo que nos deja el siguiente juego.

		Jugador 2	
		X	Z
Jugador 1	A	4,3	6,2
	B	2,1	3,6
	C	3,0	2,8

En este caso se puede ver que la decisión A es dominante. Por lo que se sabe que el jugador 1 elegirá esta.

		Jugador 2	
		X	Z
Jugador 1	A	4,3	6,2

Y para este juego la opción X es dominante para el jugador 2.

		Jugador 2
		X
Jugador 1	A	**4,3**

Por lo tanto la predicción al juego hecha por el método de generación de columnas con $k = 3$ iteraciones es que el jugador 1 escogerá la estrategia A mientras que el jugador 2 escogerá la estrategia X.

Nota: Las predicciones realizadas con este método no son necesariamente óptimos de Pareto, lo cual implica que los jugadores no elegirán soluciones deseables si se dejan a su criterio.

5.3. Equilibrio de Nash de estrategias puras

Un equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias $(s_1^*, ..., s_n^*)$ si ningún jugador tiene motivación alguna para cambiar la decisión tomada. Es decir, para el jugador i, dado el conjunto de estrategias de los otros jugadores $(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$ la opción s_i^* es una de las estrategias no dominadas. Es decir, de existir alguna otra opción rentable para algún jugador, la situación anterior dejaría de ser un equilibrio de Nash.

Nota: Los equilibrios de Nash no son necesariamente óptimos de Pareto, ya que puede suceder que si los jugadores se organizan y cooperan, pudiesen llegar a una mejor escogencia de estrategias.

Ejemplo 4: Sea el ejemplo del juego de los prisioneros con la siguiente matriz de pagos.

		Individuo 2	
		Calla	Coopera
Individuo 1	Calla	-1,-1	-15,0
	Coopera	0,-15	-10,-10

Este juego tiene las estrategias dominantes de cada individuo que es confesar. Además presenta el equilibrio de Nash en la predicción confesar-confesar ya que ninguno de los dos individuos tiene incentivos para cambiar esa estrategia.

5.3.1. Método para hallar equilibrio de Nash de estrategias puras

Se parte de la matriz de pagos y se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Para cada columna (*estrategias del jugador 2*) hallar el valor de pago más grande para el jugador 1. Subrayar este par ordenado.

2. Para cada fila en la matriz (*estrategias del jugador 1*) hallar el valor de pago más grande para el jugador 2. Hacer una raya sobre este par ordenado.

3. Si un conjunto de estrategias en la matriz está subrayada y a la vez tiene una línea encima, es un equilibrio de Nash.

Aplicado al ejemplo de los prisioneros:

		Individuo 2	
		Calla	Coopera
Individuo 1	Calla	-1,-1	$\overline{-15,0}$
	Coopera	$\underline{0,-15}$	$\underline{\overline{-10,-10}}$

Lo cual implica que el dilema de los prisioneros tiene un único equilibrio de Nash en las estrategias cooperar-cooperar.

Ejemplo 5: Ejemplo con más de un equilibrio de Nash.
Batalla de los sexos definido en (Zapardiel Quirós, 2014): "Juana y Jaime están planeando pasar la noche del sábado juntos. Juana prefiere la ópera y Jaime la lucha libre. A pesar de que ambos difieran en gustos, prefieren estar juntos a separados. Esta situación queda plasmada en la siguiente matriz:"

		Jaime	
		Lucha libre	Opera
Juana	Lucha libre	2,1	0,0
	Opera	0,0	1,2

Aplicando el método anterior, obtenemos:

		Jaime	
		Lucha libre	Opera
Juana	Lucha libre	$\overline{\underline{2,1}}$	0,0
	Opera	0,0	$\overline{\underline{1,2}}$

El cual no tiene estrategias dominantes y cuenta con dos equilibrios de Nash.

5.4. Estrategias Mixtas

Definición: sean $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{im}\}$ las estrategias puras del jugador i. Se define ΔS_i como el simplex de S_i, es decir el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre S_i. Una estrategia mixta para un jugador i es un elemento $\sigma_i \in \Delta S_i$, tal que $\sigma_i = \{\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \ldots, \sigma_i(s_{im})\}$ es una distribución de probabilidad sobre S_i, donde $\sigma_i(s_i)$ es la probabilidad de que el jugador i escoja s_i. El valor esperado de la estrategia pura s_i cuando sus oponentes juegan con una estrategia mixta σ_{-i} es:

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i}} \sigma_{-i} s_{-i} v_i(s_i, s_{-i})$$

5.4.1. Equilibrio de Nash para estrategias mixtas

La estrategia mixta $\sigma* = (\sigma_1*, \sigma_2*, \ldots, \sigma_n*)$ es un equilibrio de Nash, si para para cada jugador σ_i* es la mejor respuesta a $\sigma_{-i}*$.

Ejemplo 6: Sea el juego de escoger cara o sello para dos jugadores, si los dos tienen cara o los dos tiene sello gana el jugador 1, en caso contrario, gana el jugador 2. Este juego es representado por la siguiente matriz de pago:

		Jugador 2	
		C	S
Jugador 1	C	1,-1	-1,1
	S	-1,1	1,-1

Este juego claramente no tiene un equilibrio de Nash de estrategias puras, pero veamos que si lo tiene en estrategias mixtas.

Para simplificar la notación se definirá p como la probabilidad de que el jugador 1 juegue cara (por lo que $1 - p$ es la probabilidad de que juegue sello). Similarmente q será la probabilidad de que el jugador 2 juegue cara.

Utilizado la definición de valor esperado se podría llegar a:

$$v_1(C, q) = q \times 1 + (1 - q) \times (-1) = 2q - 1$$
$$v_1(S, q) = q \times (-1) + (1 - q) \times 1 = 1 - 2q$$

Se quisiera saber cuando es preferible para el jugador 1 elegir Cara a Sello.

$$2q - 1 > 1 - 2q$$

Lo cual implica que $q > 1/2$, esto significa que siempre que el jugador 2 tenga una preferencia a escoger cara, el jugador 1 debería escoger cara. Asimismo ocurre que si el jugador 2 tiene una preferencia a escoger sello entonces el jugador 1 también debería tenerla. Mientras tanto si el jugador 2 define $q = 1/2$ es decir no tiene preferencia entre escoger cara o sello, entonces el jugador 1 puede escoger libremente $p \in [0, 1]$ es decir puede tener una preferencia arbitraria a Cara o Sello sin tener consecuencias en el resultado.
Análogamente para el jugador 2, si el jugador 1 tuviese una preferencia a Cara $p > 1/2$ entonces lo conveniente seria escoger sello $q = 0$, si el jugador 1 tuviese preferencia por sello $p < 1/2$ entonces lo conveniente sería escoger cara $q = 1$, pero si el jugador 1 no tiene preferencia por escoger cara o sello $p = 1/2$ entonces realmente cualquier valor de $q \in [0, 1]$ es la respuesta más conveniente.

Para buscar un equilibrio de Nash buscamos decisiones (p, q) tal que para los dos jugadores sean lo más conveniente. Se encuentra la correspondencia $p = q = 1/2$. Es claro que en este punto ningún jugador está incentivado a modificar su conducta de ”aleatoriedad”.

NOTAS

- Un juego puede tener equilibrio de Nash de estrategias puras y similarmente tener un equilibrio de Nash de estrategias mixtas.
- Se ha visto que se puede utilizar algunos tipos de generalizaciones para 5.2 utilizando estrategias mixtas expuestas simultáneamente por los investigadores (Pearce, 1984) y (Bernheim, 1984).
- En su propia tesis doctoral (Nash, 1951), en la cual se introduce el concepto de equilibrio de Nash, Nash además de definir el concepto de equilibrio que lleva su nombre, prueba que para todo juego con conjuntos de estrategias finitos para todos los jugadores existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Referencias

Bernheim, B Douglas. 1984. Rationalizable strategic behavior. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1007–1028.

Morgenstern, Oskar. 1968. Game theory: theoretical aspects. *International Encyclopedia of the Social Sciences*, **6**, 61–68.

Nash, John. 1951. Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, 286–295.

Pearce, David G. 1984. Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1029–1050.

Rodríguez, Fernando Fernández. 2005. Teoría de juegos: análisis matemático de conflictos. *Sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas*, **5**.

Tadelis, Steven. 2013. *Game theory: an introduction.* Princeton University Press.

von Neumann, John. 1928. Sur la théorie des jeux. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, **186**(25), 1689–91.

Von Neumann, John, & Morgenstern, Oskar. 1944. Theory of games and economic behavior.

Zapardiel Quirós, Clara. 2014. La teoría de los juegos y sus aplicaciones en la economía actual.