Dualité de Poitou-Tate et groupes de Shafarevich-Tate

NumberTheoryEnthusiast

21 Juin 2025

0.1 Groupes de cohomologie de Poitou-Tate

Soit K un corps global, avec $\bar{K}$ une clôture séparable de K, et S un ensemble (non-vide) de places de K. Dans le cas où K est un corps de nombres, on supposera que S contient toutes les places archimédiennes de K. On considère également K_S, l'extension maximale de K (à l'intérieur de $\bar{K}$) non ramifiée en dehors de S, et son groupe de Galois $G_S = \mathrm{Gal}(K_S/K)$. Dans ce cas, on définit l'anneau des S-entiers de K par :

$$\mathcal{O}_{K,S} = \{a \in K : v_{\mathfrak{p}}(a) \geq 0, \text{ pour tout } \mathfrak{p} \notin S\},$$

ainsi que l'ensemble $\mathbb{N}(S)$ par :

$$\mathbb{N}(S) = \left\{ n \in \mathbb{N} : n \in \mathcal{O}_{K,S}^{\times} \right\}.$$

On désignera par Ω_K l'ensemble de toutes les places de K et par Ω_f l'ensemble de toutes les places finies.

Définition 1. On définit la catégorie $\mathrm{Mod}_S(G_S)$ comme étant la catégorie des G_S-modules discrets A tels que :
- A est de type fini ;
- $\#A_{\mathrm{tors}} \in \mathbb{N}(S)$.

Dans ce cas, on notera $A' = \mathrm{Hom}(A, \mathcal{O}_{K,S}^{\times})$ le G_S-module dual de A.

Par ailleurs, il existe deux notions supplémentaires de dualité qui vont nous intéresser dans notre étude. Les voici :
- Si $A \in \mathrm{Mod}_S(G_S)$ est fini et $\#A \in \mathbb{N}(S)$, on définit alors le « **dual de Cartier** » $A^{\vee}$ de A par :

  $$A^{\vee} := \mathrm{Hom}(A, \bar{K}^*).$$

  Dans ce cas, il vient naturellement :

  $$\mathrm{Hom}(A, \bar{K}^*) = \mathrm{Hom}(A, K_S^*).$$

  En effet, on a $\#A \in \mathbb{N}(S)$ donc aucune place $v \notin S$ ne divise $\#A$. Ainsi, il en résulte que $K(\mu_{\#A})/K$ est non-ramifiée en dehors de S et $K(\mu_{\#A}) \subset K_S$. Le résultat souhaité en découle alors.
- Si maintenant B est un groupe topologique abélien, il est d'usage de définir son « **dual topologique** » B^* par :

  $$B^* := \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Soit v une place K et considérons $D_v \subset G_K$ le sous-groupe de décomposition en v. Il est alors connu que le groupe D_v s'identifie au groupe de Galois absolu $G_{K_v} = \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$, où K_v est le complété de K en v. Dans ce cas, on identifiera également les groupes $H^i(K_v, A)$ et $H^i(D_v, A)$ dès lors que $i \neq 0$ ou v non-archimédienne. Si $i = 0$ et v est archimédienne, on définit alors :

$$H^0(K_v, A) := \hat{H}^0(D_v, A) = \begin{cases} A^{G_{\mathbb{R}}}/N_{G_{\mathbb{R}}}(A) & \text{si } v \text{ est réelle} \\ \{0\} & \text{si } v \text{ est complexe} \end{cases},$$

où $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. On rappelle que $\hat{H}^0(D_v, A)$ est le groupe modifié de Tate.

Définition 2. Soit $A \in \mathrm{Mod}_S(G_S)$. On dit que le module A est non ramifié en une place v de K si l'action de I_v sur A est triviale, i.e si on a :

$$A^{I_v} = A,$$

où l'action considérée est celle induite de D_v. Dans ce cas, on définit les groupes de cohomologie non-ramifiée :

$$H^i_{\mathrm{nr}}(K_v, A) := H^i(\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{nr}}/K_v), A).$$

Si v est une place archimédienne, on pose $H^i_{\mathrm{nr}}(K_v, A) := H^i(K_v, A)$.

Remarque 3. Soit $A \in \mathrm{Mod}_S(G_S)$. D'après tout ce qui précède, A est alors non-ramifié sauf en un nombre fini de places de K.

Maintenant que tout cela a été fait, nous sommes désormais en mesure d'introduire les groupes de cohomologie de Poitou-Tate.

Définition 4. Soit $A \in \mathrm{Mod}_S(G_S)$. On définit alors le groupe de cohomologie de Poitou-Tate $\mathbf{P}^i_S(K, A)$ par :

$$\mathbf{P}^i_S(K, A) = \tilde{\prod_{v\in S}} H^i(K_v, A),$$

où $\tilde{\prod\limits_{v\in S}}$ signifie qu'une famille $(x_v)_{v\in S} \in \mathbf{P}^i_S(K, A)$ vérifie $x_v \in H^i(K_v, A)$ pour tout $v \in S$, et $x_v \in H^i_{\mathrm{nr}}(K_v, A)$ pour presque tout $v \in S$.

Soit $A \in \mathrm{Mod}_S(G_S)$ fini. Si on regarde de plus près les groupes $\mathbf{P}^i_S(K, A)$, il vient alors plusieurs spropriétés naturelles.

1. Regardons d'abord le cas $i = 0$. Soit v une place où A est non-ramifié. Alors, I_v agit trivialement sur A et donc :
$$A^{G_{K_v}} = (A^{I_v})^{\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{nr}}/K_v)} = A^{\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{nr}}/K_v)},$$
i.e : $H^0(K_v, A) = H^0_{\mathrm{nr}}(K_v, A)$. Ainsi, il vient alors l'égalité suivante :
$$\mathbf{P}^0_S(K, A) = \prod_{v\in S} H^0(K_v, A).$$

2. Regardons maintenant le cas $i = 2$. Il est connu que, pour une place v finie, la dimension cohomologigue stricte de $\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{nr}}/K_v)$ vaut 1. Dans ce cas, on a :
$$H^2_{\mathrm{nr}}(K_v, A) = 0.$$
Si $(x_v)_{v\in S} \in \mathbf{P}^2_S(K, A)$, alors $x_v \in H^2_{\mathrm{nr}}(K_v, A)$ pour presque toute place $v \in S$. Ainsi, d'après ce qui précède, $x_v = 0$ pour presque toute place finie $v \in S$. De plus, que ce soit pour les places v réelles ou complexes, on a : $H^2(K_v, A) = 0$. Finalement, il vient :
$$\mathbf{P}^2_S(K, A) = \bigoplus_{v\in S} H^2(K_v, A).$$

3. Le cas $i \geq 3$ se traite de la même manière que le cas précédent, à la différence que cette fois-ci on a $H^i(K_v, A) = 0$ pour toute place finie v. Dans ce cas ($i \geq 3$), ne survivent que les places réelles (en nombre fini). Finalement, on a :
$$\mathbf{P}^i_S(K, A) = \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathbb{R}}} H^i(K_v, A), \ \forall i \geq 3.$$

Remarque 5.
1. Si A est fini, on a de plus $\mathbf{P}^0_S(K, A)$ compact et $\mathbf{P}^2_S(K, A)$ discret.
2. Le cas $i = 1$ est un cas légèrement pathologique. Cependant, il n'est pas très difficile de montrer que $\mathbf{P}^1_S(K, A)$ est tout de même localement compact (et non compact).

Dans ce qui suit, nous considérons $A \in \mathrm{Mod}_S(G_S)$ fini tel que $\#A \in \mathbb{N}(S)$. Pour $i \geq 0$, on introduit les applications naturelles
$$\beta^i : H^i(G_S, A) \longrightarrow \prod_{v\in S} H^i(K_v, A).$$
Ces applications vont jouer un rôle crucial en ce qui concerne la dualité de Poitou-Tate. Mais avant de nous intéresser à cela, voyons voir les premières propriétés de ces applications.

Proposition 6. *Soit $A \in Mod_S(G_S)$ fini tel que $\#A \in \mathbb{N}(S)$. Alors, on a :*

$$\mathrm{Im}(\beta^i) \subset \mathbf{P}^i_S(K, A).$$

Démonstration. Soit $x \in H^i(G_S, A)$. Comme A est de type fini, il existe un sous-groupe normal $H \subset \mathrm{Gal}(K_S/L)$ qui agit trivialement sur A. Autrement dit, il existe une sous-extension galoisienne finie L/K de K_S telle que l'action de $\mathrm{Gal}(K_S/L)$ sur A est triviale. De ce fait, on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{inf} : H^i(\mathrm{Gal}(L/K), A) \xrightarrow{\sim} H^i(G_S, A),$$

et x correspond alors à un élément de $H^i(\mathrm{Gal}(L/K), A)$. De plus, L/K est ramifiée en un nombre fini de places, d'où L/K non-ramifiée en dehors de cet ensemble (fini) de places. Ainsi, L/K est non-ramifiée pour presque toute place v de K, et dans ce cas :

$$x_v = \mathrm{res}_v(x) \in H^i_{\mathrm{nr}}(K_v, A).$$

On vient donc de montrer :

$$\mathrm{Im}\left(H^i(G_S, A) \xrightarrow{\beta^i} \prod_{v \in S} H^i(K_v, A)\right) \subset \mathbf{P}^i_S(K, A).$$

□

Dans le cas de $\mathbf{P}^1_S(K, A)$, on a un résultat plus fort concernant l'application β^1. En effet, il s'avère que l'application

$$\beta^1 : H^1(G_S, A) \longrightarrow \mathbf{P}^1_S(K, A)$$

est propre. Pour une preuve de ce résultat, le lecteur intéressé pourra se référer à la proposition 17.10 de [Har17].

Avant de continuer, rappelons un théorème de Tate :

Théorème 7. *1. Soit K un corps p-adique de groupe de Galois Γ. Soit également M un Γ-module fini. Alors, le cup-produit suivant est une dualité parfaite de groupes finis :*

$$H^i(\Gamma, M) \times H^{2-i}(\Gamma, M^\vee) \longrightarrow H^2(K, \bar{K}^*) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où i peut varier entre 0 et 2.

2. Si M est un $G_\mathbb{R}$-module fini, alors le cup-produit suivant est une dualité parfaite de groupes finis :

$$\hat{H}^i(G_\mathbb{R}, M) \times \hat{H}^{2-i}(G_\mathbb{R}, M^\vee) \longrightarrow \mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

où i peut varier dans $\mathbb{Z}$.

Il existe un lien profond entre la notion de dual de Cartier et celle de dual de groupe topologique, et ceci s'illustre notamment avec les groupes $\mathbf{P}^i_S(K, A)$. En particulier, dans le cas $0 \leq i \leq 2$, on a la proposition suivante :

Proposition 8. *Soit $A \in Mod_S(G_S)$ fini tel que $\#A \in \mathbb{N}(S)$. Alors, on a les isomorphismes :*

1.
$$\mathbf{P}^0_S(K, A)^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^2_S(K, A^\vee).$$

2.
$$\mathbf{P}^1_S(K, A)^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1_S(K, A^\vee).$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser le théorème précédent et la formule du dual d'un produit restreint. □

0.2 Théorème de dualité de Poitou-Tate

Cette sous-section est consacrée au théorème principal de la cohomologie galoisienne d'un corps global, à savoir le théorème de dualité de Poitou-Tate. Cependant, il ne sera pas question de proposer une démonstration de ce théorème (hors de propos dans ce texte). L'objectif étant alors de décortiquer chaque termes et applications intervenant dans la suite exacte longue à 9 termes du théorème.

Soit K un corps global, avec $\bar{K}$ une clôture séparable de K, et S un ensemble (non-vide) de places de K. De plus, on fixe un entier i tel que $0 \leq i \leq 2$. D'après la sous-section précédente, nous avons définit et obtenus les applications suivantes :

$$\beta^{2-i} : H^{2-i}(G_S, A^\vee) \longrightarrow \mathbf{P}^{2-i}_S(K, A^\vee),$$

où $A \in \mathrm{Mod}_S(G_S)$ est fini et $\#A \in \mathbb{N}(S)$. Ainsi, d'après la proposition 8, on obtient également des applications :

$$\gamma^i : \mathbf{P}^i_S(K, A) \longrightarrow H^{2-i}(G_S, A^\vee)^*.$$

Définition 9. Soit $A \in \mathrm{Mod}_S(G_S)$ fini tel que $\#A \in \mathbb{N}(S)$. On appelle « **groupes de Shafarevich-Tate** » de A les deux groupes suivants :

1. $$Ш^1_S(K, A) = \mathrm{Ker}\left(\beta^1 : H^1(G_S, A) \longrightarrow \mathbf{P}^1_S(K, A)\right).$$
2. $$Ш^2_S(K, A) = \mathrm{Ker}\left(\beta^2 : H^2(G_S, A) \longrightarrow \mathbf{P}^2_S(K, A)\right).$$

Exemple 10.

1. Soient $m \in \mathbb{N}(S)$ et $K_S^{\mathrm{cd}}/K \subset K_S$ l'extension abélienne maximale de K complètement décomposée (cd) en toutes les places de S. D'après la théorie du corps de classes, :
$$\mathrm{Gal}(K_S^{\mathrm{cd}}/K) \cong \mathrm{Cl}_S(K).$$
Par définition, on a :
$$Ш^1_S(K, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathrm{Ker}\left(H^1(G_S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow \prod_{v\in S} H^1(K_v, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\right).$$
L'action de G_S sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ étant triviale, on a :
$$H^1(G_S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G_S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K_S^{\mathrm{ab}}/K), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$
Finalement, il vient :
$$Ш^1_S(K, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}_S(K), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$
2. D'après le théorème 90 de Hilbert, on a :
$$Ш^1_S(K, \mathbb{Z}'_S) = H^1(G_S, \mathcal{O}_K^\times).$$
Or, d'après la théorie du corps de classes, on a également l'isomorphisme $H^1(G_S, \mathcal{O}_K^\times) \cong \mathrm{Cl}_S(K)$. Finalement, il vient :
$$Ш^1_S(K, \mathbb{Z}'_S) \cong \mathrm{Cl}_S(K).$$

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer le théorème le plus important de cette section : le théorème de Poitou-Tate.

Théorème 11 (Poitou-Tate)**.** *Soit $A \in Mod_S(G_S)$ fini tel que $\#A \in \mathbb{N}(S)$. Alors :*

1. *Pour tout $r \geq 3$, on a :*
$$H^r(G_S, A) \cong \bigoplus_{v\in\Omega_\mathbb{R}} H^r(K_v, A).$$
2. *Il existe un accouplement parfait de groupes finis*
$$Ш^1_S(K, A^\vee) \times Ш^2_S(K, A) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
Autrement dit, $Ш^1_S(K, A^\vee)$ et $Ш^2_S(K, A)$ sont finis et duaux.
3. *On a une suite exacte longue, de groupes topologiques, à 9 termes :*
$$0 \longrightarrow H^0(G_S, A) \xrightarrow{\beta^0} \prod_{v\in S} H^0(K_v, A) \xrightarrow{\gamma^0} H^2(G_S, A^\vee)^* \dashrightarrow$$
$$\dashrightarrow H^1(G_S, A) \xrightarrow{\beta^1} \mathbf{P}^1_S(K, A) \xrightarrow{\gamma^1} H^1(G_S, A^\vee)^* \dashrightarrow$$
$$\dashrightarrow H^2(G_S, A) \xrightarrow{\beta^2} \bigoplus_{v\in S} H^2(K_v, A) \xrightarrow{\gamma^2} H^0(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow 0$$

Démonstration. Voir [[Har17], théorème 17.13] □

Analyse de la suite exacte :

1. Intéressons-nous d'abord aux applications diagonales marquées par des pointillés. Par exemple, regardons de plus près comment est construite l'application :

$$H^2(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow H^1(G_S, A).$$

Par définition, nous avons :

$$H^2(G_S, A^\vee)^* = \mathrm{Hom}(H^2(G_S, A^\vee), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Or, on a :

$$Ш^2_S(K, A^\vee) = \mathrm{Ker}\left(\beta^2 : H^2(G_S, A^\vee) \longrightarrow \mathbf{P}^2_S(K, A^\vee)\right) \subset H^2(G_S, A^\vee)$$

et tout morphisme de $H^2(G_S, A^\vee)$ dans $\mathbf{P}^2_S(K, A^\vee)$ peut alors se restreindre en un morphisme de $Ш^2_S(K, A^\vee)$ dans $\mathbf{P}^2_S(K, A^\vee)$. Ainsi, on construit une application :

$$\mathrm{Hom}(H^2(G_S, A^\vee), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Ш^2_S(K, A^\vee), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

On applique alors le point 2. du théorème de dualité de Poitou-Tate et on obtient :

$$\mathrm{Hom}(H^2(G_S, A^\vee), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Ш^2_S(K, A^\vee), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong Ш^1_S(K, A) \hookrightarrow H^1(G_S, A).$$

Finalement, on a obtenu une application (en composant les applications obtenues ci-dessus) :

$$H^2(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow H^1(G_S, A).$$

On construit de même l'application :

$$H^1(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow H^2(G_S, A).$$

2. Il convient maintenant d'étudier l'exactitude de la suite en $H^2(G_S, A^\vee)^*$. En effet, l'application

$$H^2(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow H^1(G_S, A)$$

étant construite, il est alors naturel de se demander quel est son noyau. Par construction (voir ci-dessus), on a :

$$\mathrm{Ker}\left(H^2(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow H^1(G_S, A)\right) = \mathrm{Ker}\left(H^2(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow Ш^2_S(K, A^\vee)^*\right). \tag{1}$$

Par ailleurs, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow Ш^2_S(K, A^\vee) \longrightarrow H^2(G_S, A^\vee) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} H^2(K_v, A^\vee),$$

d'où la suite exacte duale :

$$\left(\bigoplus_{v \in S} H^2(K_v, A^\vee)\right)^* \longrightarrow H^2(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow Ш^2_S(K, A^\vee)^* \longrightarrow 0.$$

Or, d'après la dualité locale (proposition 8), on a : $\left(\bigoplus_{v \in S} H^2(K_v, A^\vee)\right)^* = \prod_{v \in S} H^0(K_v, A)$. D'après (12), on obtient finalement :

$$\mathrm{Ker}\left(H^2(G_S, A^\vee)^* \longrightarrow H^1(G_S, A)\right) = \mathrm{Im}\left(\prod_{v \in S} H^0(K_v, A) \longrightarrow H^2(G_S, A^\vee)^*\right),$$

ce qui donne bien l'exactitude de la suite en $H^2(G_S, A^\vee)^*$.

3. On vérifie et construit aisément le reste de la suite exacte longue.

0.3 Annulation des groupes $Ш^i$ et principe local-global (Hasse)

Le but de cette sous-section est de présenter des applications du théorème de Poitou-Tate et du théorème de Chebotarev, et ce dans le cadre de l'étude des groupes de Shafarevich-Tate. Ceci fait alors suite à la motivation de comprendre comment le principe de Hasse, ou principe local-global, se comporte dans des situations plus avancées que celle du théorème de Hasse-Minkowski. Pour ce faire, commençons par rappeler certaines notations.

Soit K un corps global, avec $\bar{K}$ une clôture séparable de K, et S un ensemble (non-vide) de places de K. Dans le cas où K est un corps de nombres, on supposera que S contient toutes les places archimédiennes de K. On considère également K_S, l'extension maximale de K (à l'intérieur de $\bar{K}$) non ramifiée en dehors de S, et son groupe de Galois $G_S = \mathrm{Gal}(K_S/K)$. Dans ce cas, on définit l'anneau des S-entiers de K :

$$\mathcal{O}_{K,S} = \{a \in K : v_{\mathfrak{p}}(a) \geq 0, \text{ pour tout } \mathfrak{p} \notin S\}.$$

On désignera par Ω_K l'ensemble de toutes les places de K et par Ω_f l'ensemble de toutes les places finies. Dans ce cas, on définit la densité de Dirichlet d'un ensemble $S' \subset \Omega_K$ par :

$$\delta(S) = \lim_{s \to 1} \frac{\sum\limits_{\mathfrak{p} \in S \cap \Omega_f} (\#\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})^{-s}}{\sum\limits_{\mathfrak{p} \in \Omega_f} (\#\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})^{-s}}.$$

Nous sommes désormais en mesure de rappeler, dans ce cadre général, le très célèbre théorème de Chebotarev :

Théorème 12 (Théorème de Chebotarev)**.** *Soit L/K une extension galoisienne finie et $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Soit de plus C une classe de conjugaison de G et Frob_v le Frobenius en une place v non ramifiée dans L/K. Alors, on a :*

$$\delta_{L/K}(C) = \frac{\#C}{\#G},$$

où $\delta_{L/K}(C)$ représente la densité des places v telles que $\mathrm{Frob}_v \in C$.

Une des applications importante du théorème de Chebotarev s'avère être l'annulation des groupes $Ш^i$, que la proposition suivante illustre dans le cas du premier groupe de Shafarevich-Tate :

Proposition 13. *Soit A un groupe abélien fini muni de l'action triviale de G_S et notons p le plus petit diviseur premier de $\#A$. On considère alors un ensemble $T \subset S$ de places tel que $\delta(T) > 1/p$. Alors, l'application*

$$H^1(G_S, A) \longrightarrow \prod_{v \in T} H^1(K_v, A)$$

est injective. Dans ce cas, si $\delta(S) > 1/p$, on obtient alors :

$$Ш^1_S(A) = \mathrm{Ker}\left(H^1(G_S, A) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^1(K_v, A)\right) = 0.$$

Démonstration. Quitte à regarder chaque composante l-primaire de A, on peut directement supposer que A est de la forme $\mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}$, avec l un nombre premier et $r \geq 1$ un entier. Le but est alors de montrer l'injectivité du morphisme :

$$H^1(G_S, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}) \longrightarrow \prod_{v \in T} H^1(K_v, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}).$$

Soit $\varphi \in \mathrm{Ker}\left(H^1(G_S, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z}) \longrightarrow \prod\limits_{v \in T} H^1(K_v, \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z})\right)$. Alors, étant donné que l'action de G_S sur A est triviale, φ est en fait un morphisme continu

$$\varphi : G_S \longrightarrow \mathbb{Z}/l^r\mathbb{Z},$$

tel que $\varphi|_{G_{K_v}} = \varphi|_{D_v} = \mathrm{id}_{D_v}$, pour toute place v de T. Ainsi, on obtient :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Gal}(K_S/L),$$

où L/K est une extension finie de degré $[L : K] = l^s \leq l^r$ et $l \geq p$. Or, d'après ce qui précède, on a :

$$D_v \subset \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Gal}(K_S/L) \subset \mathrm{Gal}(K_S/K),$$

d'où L/K totalement décomposée en toutes les places v de T.

En résumé, on a obtenu $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Gal}(K_S/L)$ tel que L/K est finie et totalement décomposée en toutes les places de T. Ceci implique alors, d'après le théorème de Chebotarev,

$$\delta(U) = \frac{1}{[L:K]} = \frac{1}{l^s},$$

où U est l'ensemble des places de K où L/K se décompose totalement. En particulier, par définition de U, on a $T \subset U$. Il vient alors :

$$\frac{1}{l} \leq \frac{1}{p} < \delta(T) \leq \delta(U) = \frac{1}{l^s},$$

d'où nécessairement $s = 0$ et l'extension L/K est finalement triviale. De ce fait, on obtient $\mathrm{Ker}(\varphi) = G_S$ et

$$\varphi \text{ est le morphisme trivial.}$$

Ceci termine la preuve. □

En combinant cette proposition au théorème de dualité de Poitou-Tate, il vient alors un résultat similaire concernant le groupe Ш^2. En effet, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 14. *Soit A un G_S-module fini, dont l'ordre est inversible dans $\mathcal{O}_S$, tel que l'action de G_S sur son dual de Cartier $A^\vee$ est triviale. On suppose également que $\delta(S) > 1/p$, où p est le plus petit diviseur premier de $\#A$. Alors, on a :*

$$\text{Ш}^2_S(A) = 0.$$

Démonstration. D'après le point 2. du théorème de Poitou-Tate, $\text{Ш}^1_S(A^\vee)$ et $\text{Ш}^2_S(A)$ sont duaux (et finis). Le résultat est alors immédiat d'après la proposition précédente. □

Bibliographie

[Har17] David Harari. *Cohomologie galoisienne et théorie du corps de classes*. EDP sciences, 2017.