Primera Práctica Dirigida   Grupo N°1

Análisis y Modelamiento Numérico I   CM4F1 A

Profesor(a) `<nombre del profesor(a)>`

<estudiante 1>   <estudiante 2>   <estudiante 3>

<estudiante 4>   <estudiante 5>   <estudiante 6>

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

3 de marzo de 2025

Lista de N° de pregunta / estudiante

Pregunta N°5 <estudiante 1>

Pregunta N°6 <estudiante 2>

Resultados conocidos para resolver la Pregunta N°1

Teorema 1 (El Principio de Inducción Matemática).

Sea F un cuerpo ordenado. Suponga que $\forall\, n \in \mathbb{N}_F$, $p\,(n)$ *es una proposición acerca de* n. *Si*

(1) $p\,(1)$ *es verdadero, y*

(2) $\forall\, k \in \mathbb{N}_F$, $p\,(k) \implies p\,(k+1)$,

entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}_F$, $p\,(n)$ *es verdadero.*

Demostración.

Suponga que $p\,(n)$ es como se describe en la hipótesis. Sea $A = \{x \in \mathbb{N}_F : p\,(x) \text{ es verdadero}\}$. Entonces,

(i) $1 \in A$, por (1).

(ii) Suponga que $x \in A$. Entonces, $x \in \mathbb{N}_F$ y $p\,(x)$ es verdadero. Así, por (2), $p\,(x+1)$ es verdadero. Esto es, $x+1 \in A$. Por lo tanto, $x \in A \implies x+1 \in A$. Finalmente, A es conjunto inductivo y $\mathbb{N}_F \subset A$. Esto es, $\forall\, n \in \mathbb{N}_F$, $p\,(n)$ es verdadero.

□

Definición 2 (Sucesión acotada).

Una sucesión $\{x_n\}$ es acotada si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado. Hay dos maneras equivalentes de decir que $\{x_n\}$ es acotada:

(1) $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$.

(2) $\exists\, M > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq M$.

Definición 3 (Sucesiones monótonas).

Una sucesión $\{a_n\}$ es

a) monótona creciente sii $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1}$; esto es
$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots .$$

b) monótona decreciente sii $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geq a_{n+1}$; esto es
$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots .$$

c) estrictamente creciente sii $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}$; esto es
$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots .$$

d) estrictamente decreciente sii $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n > a_{n+1}$; esto es
$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots .$$

Ejemplo 4 (Estrictamente creciente).

La sucesión $\{f(n)\}$, donde $f(n) = \arctan(n)$ es estrictamente creciente porque $\forall\, n \in \mathbb{N}, f'(n) = \dfrac{1}{1+n^2} > 0.$

Teorema 5 (Convergencia Monótona para sucesiones).

Cualquier sucesión monótona y acotada converge. Más precisamente,

a) *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión monótona creciente que es acotada superiormente, entonces el* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

b) *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión monótona decreciente que es acotada inferiormente, entonces el* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración.

a) Suponga que $\{a_n\}$ es acotada y monótona creciente. Dado que $\{a_n\}$ es acotada, el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene una cota superior. Por la completitud de $\mathbb{R}$, $\exists\, u = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio ε para el supremo, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} > u - \varepsilon$. Pero $\{a_n\}$ es monótona creciente, por lo tanto, $n \geq n_0 \implies a_n \geq a_{n_0}$. Así,

$$n \geq n_0 \implies a_n \geq a_{n_0} > u - \varepsilon. \tag{1}$$

Pero, dado que $u = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u. \tag{2}$$

Juntando (1) y (2), tenemos

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\implies u - \varepsilon < a_n \leq u < u + \varepsilon \\ &\implies u - \varepsilon < a_n < u + \varepsilon \\ &\implies |a_n - u| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = u = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

b) De manera análoga.

□

Corolario 6 (Teorema Fundamental de las Sucesiones Monótonas).

Una sucesión monótona converge sii esta es es acotada.

Teorema 7 (Teorema de Bolzano-Weierstraß para sucesiones).

Cualquier sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Demostración.

1. Suponga cualquier sucesión acotada.
2. Cree el intervalo cerrado inicial cuyos extremos son dichas cotas y construya una sucesión de intervalos encajados.
3. Use el teorema de intervalos encajados de Cantor y concluya que existe un único número real en la intersección.
4. Pruebe que la subsucesión converge a ese número real.

$\square$

Teorema 8.

Una sucesión acotada es convergente sii tiene uno y solo un punto de acumulación.

Demostración.

Para el recíproco use el teorema 7 y por contradicción. $\square$

Definición 9 (Funciones monótonas).

Una función f es

(a) monótona creciente en un conjunto $A \subset \mathcal{D}(f)$ sii $\forall\, x_1, x_2$ en A,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

(b) monótona decreciente en un conjunto $A \subset \mathcal{D}(f)$ sii $\forall\, x_1, x_2$ en A,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2);$$

(c) estrictamente creciente en un conjunto $A \subset \mathcal{D}(f)$ sii $\forall\, x_1, x_2$ en A,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

(d) estrictamente decreciente en un conjunto $A \subset \mathcal{D}(f)$ sii $\forall\, x_1, x_2$ en A,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

(e) monótona en $A \subset \mathcal{D}(f)$ si este satisface (a) o (b) y estrictamente monótona en $A \subset \mathcal{D}(f)$ si este satisface satisface (c) o (d).

Ejemplo 10 (Estrictamente creciente).

La función f, donde $f(x) = \arctan(x)$ es estrictamente creciente porque $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$.

Teorema 11.

Suponga que f es diferenciable sobre un intervalo I.

(a) *Si $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$, entonces f es monótona creciente sobre I.*

(b) *Si $f'(x) \leq 0$, $\forall\, x \in I$, entonces f es monótona decreciente sobre I.*

(c) *Si $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, entonces f es estrictamente creciente sobre I.*

(d) *Si $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente sobre I.*

Tener cuidado

Las reciprocas de (c) y (d) son falsas.

Demostración.

Suponga que f es diferenciable sobre un intervalo I.

(a) Suponga que $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$. Sea $x_1 < x_2$ en I. Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_1, x_2]$, $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Dado que $f' \geq 0$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0.$$

Pero $x_2 - x_1 > 0$ dado que $x_1 < x_2$. Así, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$; esto es, $f(x_2) \geq f(x_1)$. Hemos provado que $\forall\, x_1 < x_2$ en I, $f(x_2) \geq f(x_1)$. Esto es, f es monótona creciente sobre I.

$\square$

5. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por

$$a_1 = \sqrt{3}, \quad a_n = \sqrt{3a_{n-1}}.$$

Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución

Primero probaremos que la existencia del límite y luego lo calcularemos. Según el teorema de convergencia monótona, si la sucesión a_n es monótona y acotada, entonces converge a un valor (el límite que se pide determinar).

a_n es monótona creciente. *Definimos la proposición $p\left(n\right) := a_{n+1} \geq a_n$.*

Por el Principio de Inducción Matemática, vemos que el caso base $p\left(1\right)$ se cumple

$$a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1.$$

Para la hipótesis inductiva, asumamos que $p\left(k\right)$ se cumple hasta un $k \in \mathbb{N}$ fijo.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\geq a_k \\ 3a_{k+1} &\geq 3a_k \\ \sqrt{3a_{k+1}} &\geq \sqrt{3a_k} \\ a_{k+2} &\geq a_{k+1}. \end{aligned}$$

Luego, $p\left(k+1\right)$ se cumple. Por lo tanto, $p\left(n\right)$ se cumple para todo n natural y la sucesión a_n es monótona creciente.

Solución

a_n es acotada superiormente. *Sea la proposición $q(n) :=$ existe un natural M tal que $a_n \leq M$.*

Por el Principio de Inducción Matemática, si $M = 3$ vemos que el caso base $q(1)$ se cumple

$$a_1 = \sqrt{3} \leq 3.$$

Para la hipótesis inductivo, asumamos que $q(k)$ se cumple hasta un $k \in \mathbb{N}$ fijo.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq a_k \\ a_k &\leq 3 \\ 3a_k &\leq 9 \\ \sqrt{3a_k} &\leq \sqrt{9} \\ a_{k+1} &\leq 3. \end{aligned}$$

Luego, $q(k+1)$ se cumple. Por lo tanto, $q(n)$ se cumple para todo n natural y la sucesión a_n es acotada superiormente.

Cálculo del límite.

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_{n-1}} = \sqrt{3 \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} = \sqrt{3L} \implies L(L-3) = 0 \implies L = 0 \vee L = 3.$$

Sabemos que a_n es una sucesión monótona creciente, así que $a_n \leq a_1 = \sqrt{3}$ para todo $n \geq 1$
Luego, $L \geq \sqrt{3} > 0$, por lo que $L = 3$.

Solución

Otra forma.

a_n es estrictamente creciente. *Definimos la proposición $p(n)$:*

Definimos la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sqrt{3t} \end{aligned}$$

Además, $t > 0 \implies 3t > 0 \implies f(t) = \sqrt{3t} > 0 \implies \dfrac{1}{f(t)} > 0 \implies f'(t) = \dfrac{3}{2f(t)} > 0$. *Por lo tanto, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Y como $\{a_n\} \subset f\left(\mathbb{R}^+\right)$. Concluimos que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente.*

a_n es acotada superiormente. *Supongamos que $p(n)$ es la proposición $\exists\, 3 > 0$ tal que $a_n \leq 3$. Por el Principio de Inducción Matemática,*

(1) $p(1)$ *es verdadero, es decir, $\exists\, 3 > 0$ tal que $a_1 = \sqrt{3} \leq 3$.*

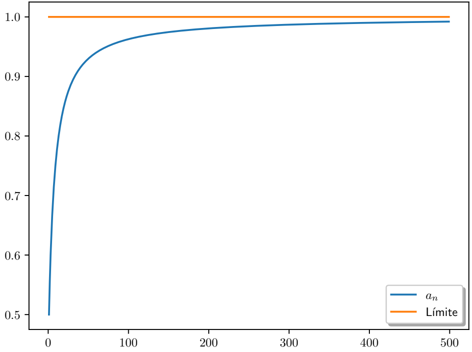
(2) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $p(k)$ *es verdadero, es decir, $\exists\, 3 > 0$ tal que $a_k = \sqrt{3a_{k-1}} \leq 3$.*

Veamos que $p(k+1)$ es verdadero. En efecto, por la hipótesis de inducción (2), $p(k)$ es verdadero, es decir, $\exists\, 3 > 0$ tal que $a_k \leq 3 \implies 3a_k \leq 3 \times 3 \implies \sqrt{3a_k} \leq \sqrt{9} \implies a_{k+1} \leq 3$. En otras palabras, $p(k+1)$ es verdadero. Por lo tanto, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, 3 > 0$ tal que $a_n \leq 3$.

Como $\{a_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente, entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
O sea, $\exists\, L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= L. && \text{Ya que la sucesión } a_n \text{ es convergente.}\\
\lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_{n-1}} &= L. && \text{Definición de } a_n.\\
\sqrt{\lim_{n\to\infty} 3a_{n-1}} &= L. && \text{La raíz cuadrada es una función continua.}\\
\sqrt{3\lim_{n\to\infty} a_{n-1}} &= L.\\
\sqrt{3L} &= L. && \text{Ya que la sucesión } a_n \text{ es convergente.}\\
3L &= L^2.\\
0 &= L\,(L-3)\,. && L \neq 0 \text{ porque } a_n \text{ es estrictamente creciente.}\\
3 &= L.
\end{aligned}$$

La gráfica obtenida con Python.




```python
#!/usr/bin/env python

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from tabulate import tabulate
import pandas as pd

n = np.arange(start=1, stop=5e2)  # step=1e2
a_n = np.array((n + 3) / (n + 7))
df = pd.DataFrame({"a_n": a_n})
df.index += 1
print(tabulate(df, headers="keys", floatfmt=".12f"))

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(n, a_n, label=r"$a_n$")  # ax.scatter
ax.plot(n, np.full((n.size), 1), label="Límite")
legend = ax.legend(loc="best", shadow=True)
plt.savefig("p5.pdf")
```

Solución

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from tabulate import tabulate
import pandas as pd


n = np.arange(start=1, stop=5e2)  # step=1e2
a_n = np.array((n + 3) / (n + 7))
df = pd.DataFrame({"a_n": a_n})
df.index += 1
print(tabulate(df, headers="keys", floatfmt=".12f"))
```

```python
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(n, a_n, label=r"$a_n$")  # ax.scatter
ax.plot(n, np.full((n.size), 1), label="Límite")
legend = ax.legend(loc="best", shadow=True)
plt.savefig("p5.pdf")
```

Solución

```
A ← 1.0;
B ← 1.0;
p ← 0;
mientras ((A + 1) − A) − 1 = 0 hacer
    A ← 2 ∗ A;
    p ← p + 1;
    mientras ((A + B) − A) − B ≠ 0 hacer
        B ← B + 1;
```

Solución

Sea la longitud de palabra de $N = 4$ *bits, genere una tabla que muestre la representación decimal de los números* $+7, +6, +5, +4, +3, +2, +1, +0, -0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$ *y* -8 *en la representación de su signo-magnitud y complemento a dos. Es decir,*

Representación decimal	*Representación signo-magnitud*	*Representación complemento a dos*
$+7$	0111	0111

6. Programe la factorización LU de Doolittle `L, U = doolittle(A)` y aplíquelo con $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Solución

```cpp
#include "doolittle.hh"
#include "print.hh"
#include "product.hh"

using MatrixType = typename std::vector<std::vector<double>>;

int main()
{
  MatrixType A{{2.0, 1.0, 1.0, 0.0},
               {4.0, 3.0, 3.0, 1.0},
               {8.0, 7.0, 9.0, 5.0},
               {6.0, 7.0, 9.0, 8.0}};
  numeric::print(A, "Matrix A");

  auto LU = numeric::doolittle(A);
  MatrixType L = std::get<0>(LU);
  MatrixType U = std::get<1>(LU);

  numeric::print(L, "Matrix L");
  numeric::print(U, "Matrix U");
  numeric::print(numeric::product(L, U), "Matrix LU");

  return 0;
}
```

```
Matrix A
2.000000 1.000000 1.000000 0.000000
4.000000 3.000000 3.000000 1.000000
8.000000 7.000000 9.000000 5.000000
6.000000 7.000000 9.000000 8.000000

Matrix L
1.000000 0.000000 0.000000 0.000000
2.000000 1.000000 0.000000 0.000000
4.000000 3.000000 1.000000 0.000000
3.000000 4.000000 1.000000 1.000000

Matrix U
2.000000 1.000000 1.000000 0.000000
0.000000 1.000000 1.000000 1.000000
0.000000 0.000000 2.000000 2.000000
0.000000 0.000000 0.000000 2.000000

Matrix LU
2.000000 1.000000 1.000000 0.000000
4.000000 3.000000 3.000000 1.000000
8.000000 7.000000 9.000000 5.000000
6.000000 7.000000 9.000000 8.000000
```

Solución

```cpp
#include "doolittle.hh"

/* General LU-factorization
 * p. 154 Numerical Analysis, David Kincaid and Ward Cheney
 */

namespace numeric {
std::tuple<MatrixType, MatrixType> doolittle(const MatrixType &A)
{
  const int n = A.size();
  MatrixType L(n, Vector_type(n, 0)); // Zero matrix
  MatrixType U(n, Vector_type(n, 0)); // Zero matrix

  for (std::size_t k = 0; k < n; k++) {
    L[k][k] = 1; // Identity matrix
    for (std::size_t j = k; j < n; j++) {
      Real_type sum = 0;
      for (std::size_t s = 0; s < k; s++)
        sum += L[k][s] * U[s][j];

      U[k][j] = A[k][j] - sum;
    }

    for (std::size_t j = k + 1; j < n; j++) {
      Real_type sum = 0;
      for (std::size_t s = 0; s < k; s++)
        sum += L[j][s] * U[s][k];

      L[j][k] = (A[j][k] - sum) / U[k][k];
    }
  }

  return std::make_tuple(L, U);
}
} // namespace numeric
```

```cpp
#include "product.hh"

namespace numeric {
MatrixType product(const MatrixType &A, const MatrixType &B)
{
  assert(A.size() == B.size()); // Matrices A and B are square
  const int n = A.size();
  MatrixType C(n, Vector_type(n, 0));

  for (std::size_t i = 0; i < n; i++)
    for (std::size_t j = 0; j < n; j++)
      for (std::size_t k = 0; k < n; k++)
        C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];

  return C;
}
} // namespace numeric
```

```cpp
#include "print.hh"

namespace numeric {
void print(const MatrixType &A, const std::string title)
{
  std::cout << title << "\n";

  for (auto row = A.begin(); row != A.end(); row++) {
    for (auto col = row->begin(); col != row->end(); col++)
      std::cout << std::fixed << *col << " ";

    std::cout << "\n";
  }
  std::cout << "\n";
}
} // namespace numeric
```

Referencias

- Libros
  - Richard L. Burden, J. Douglas Faires y Annette M. Burden. *Análisis Numérico*. 10ª ed. Cengage Learning, 2017. URL: https://latam.cengage.com/libros/analisis-numerico-2.
  - Günther Hämmerlin y Karl-Heinz Hoffman. *Numerical Mathematics*. Springer New York, 1991. DOI: 10.1007/978-1-4612-4442-4.
  - Eugene Isaacson y Herbert Bishop Keller. *Analysis of Numerical Methods*. 1ª ed. Dover Publications, Inc., 1993.
  - David R. Kincaid et al. *Análisis Numérico: las matemáticas del cálculo científico*. 1ª ed. Addison - Wesley Iberoamericana, 1994.
  - Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco y Fausto Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/b98885.
- Artículos científicos
  - David Goldberg. "What Every Computer Scientist Should Know about Floating-Point Arithmetic". En: *ACM Comput. Surv.* 23.1 (mar. de 1991), págs. 5-48. ISSN: 0360-0300. DOI: 10.1145/103162.103163.
- Sitios web
  - Carlos Aznarán L. *Repaso de Análisis Numérico I 2024*. URL: https://numerical-analysis-2024.github.io/tutorial (visitado 13-01-2024).
  - Python Software Foundation. *Python 3.12.3 documentation*. URL: https://docs.python.org/3/library/functions.html#int (visitado 13-01-2024).