Universidade de Brasília

Relatório de atividade do módulo 4

Métodos Numéricos para Engenharia

Interpolação Polinomial

Aluno:
Wilton Rodrigues

Matrícula:
13/0049212

6 de novembro de 2016

1 Introdução

O objetivo deste relatório é exercitar os conceitos aprendidos em aula, com relação ao tópico: Interpolação Polinomial.

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$. A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo, quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado.

O problema a ser solucionado é o que trata da seguinte tabela de resultados para a densidade da água, ρ, em várias temperaturas, como é mostrado a seguir:

T	0	5	10	15	20	25	30	35	40
ρ	0.9999	0.9998	0.9997	0.9991	0.9982	0.9971	0.9957	0.9941	0.9902

Tabela 1: Valores tabelados

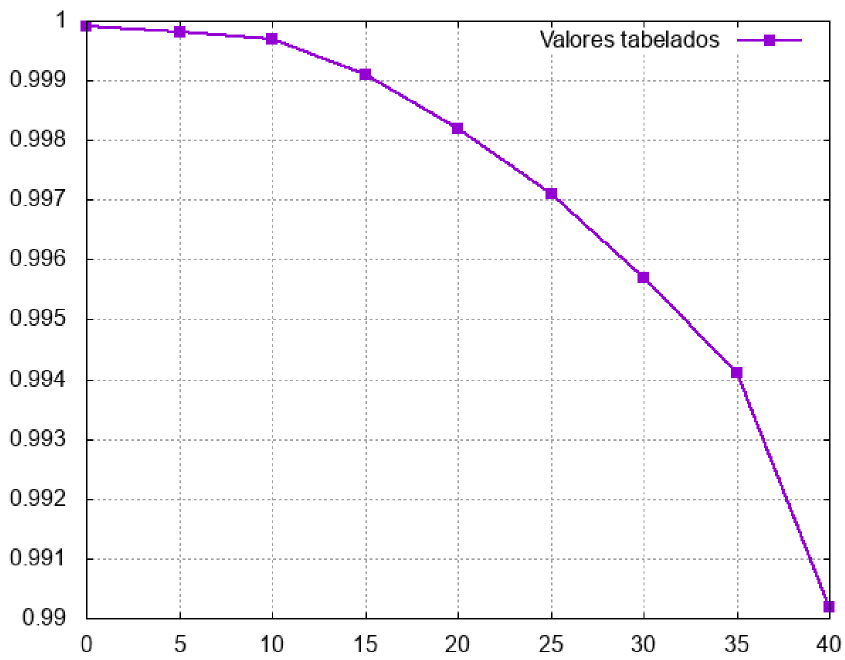

Figura 1: Plotagem dos dados da tabela (1)

O objetivos deste relatório será, através de interpolação polinomial de 2º e 3º graus, obter os valores de $\rho(13)$ e $\rho(27)$. E por fim, apresentar um gráfico com os pontos e os polinômios interpoladores obtidos.

2 Metodologia

Baseando-se no método da Interpolação de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{L_i(x)}{L_i(x_i)} \tag{1}$$

Onde: $L_i(x) = (x - x_0)...(x - x_i - 1)(x - x_i + 1)...(x - x_n)$
No qual, para n pontos, obtemos um polinômio de grau $n - 1$. A fim de encontrar o valor de $\rho(13)$, como um polinômio de 2º utilizaremos os 3 seguintes pontos:

T	5	10	15
ρ	0.9998	0.9997	0.9991

Tabela 2: Valores para $\rho(13)$

Aonde, ao aplicarmos a equação (1) obtemos o seguinte resultado:

$$P(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + f(x_2) \cdot L_2(x) \tag{2}$$

Onde:
$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} = \frac{(x-10)\cdot(x-15)}{(5-10)\cdot(5-15)} = \frac{x^2-25x+150}{50}$
$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} = \frac{(x-5)\cdot(x-15)}{(10-5)\cdot(10-15)} = \frac{x^2-20x+75}{-25}$
$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)} = \frac{(x-5)\cdot(x-10)}{(15-5)\cdot(15-10)} = \frac{x^2-15x+50}{50}$
Obtendo assim o primeiro polinômio interpolador:

$$P(x) = 0.9998 \cdot \left(\frac{x^2 - 25x + 150}{50}\right) + 0.9997 \cdot \left(\frac{x^2 - 20x + 75}{-25}\right) + 0.9991 \cdot \left(\frac{x^2 - 15x + 50}{50}\right) \tag{3}$$

E para o $\rho(27)$ como um polinômio de 3º utilizaremos estes 4 pontos:

T	15	20	25	30
ρ	0.9991	0.9982	0.9971	0.9957

Tabela 3: Valores para $\rho(27)$

Aplicando a equação (1) mais uma vez:

$$P(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + f(x_2) \cdot L_2(x) + f(x_3) \cdot L_3(x) \tag{4}$$

Onde:
$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)} = \frac{(x-20)\cdot(x-25)\cdot(x-30)}{(15-20)\cdot(15-25)\cdot(15-30)} = \frac{x^3-75x^2+1850x-15000}{-750}$
$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)} = \frac{(x-15)\cdot(x-25)\cdot(x-30)}{(20-15)\cdot(20-25)\cdot(20-30)} = \frac{x^3-70x^2+1575x-11250}{250}$
$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)} = \frac{(x-15)\cdot(x-20)\cdot(x-30)}{(25-15)\cdot(25-20)\cdot(25-30)} = \frac{x^3-65x^2+1350x-9000}{-250}$
$L_3(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)} = \frac{(x-15)\cdot(x-20)\cdot(x-25)}{(30-15)\cdot(30-20)\cdot(30-25)} = \frac{x^3-60x^2+1175x-7500}{750}$
Obtendo assim o segundo polinômio interpolador:

$$P(x) = 0.9991 \cdot \left(\frac{x^3 - 75x^2 + 1850x - 15000}{-750}\right) + 0.9982 \cdot \left(\frac{x^3 - 70x^2 + 1575x - 11250}{250}\right) + \\ +0.9971 \cdot \left(\frac{x^3 - 65x^2 + 1350x - 9000}{-250}\right) + 0.9957 \cdot \left(\frac{x^3 - 60x^2 + 1175x - 7500}{750}\right) \tag{5}$$

3 Diagrama esquemático de execução

Nesta seção, encontra-se o fluxo de execução utilizando a linguagem C. Que é apresentada na próxima sessão. A solução elaborada neste relatório funciona da seguinte

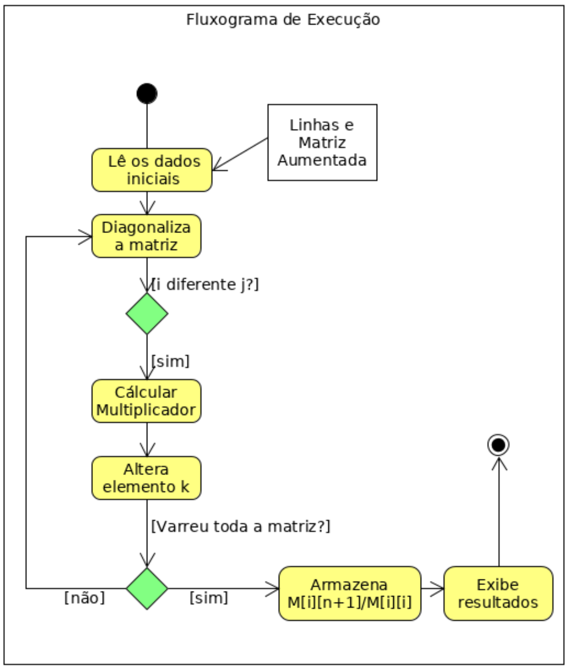

Figura 2: Fluxo de execução da solução

maneira. É necessário inserir a quantiade de pontos conhecidos. A quantidade máxima permitida é de 10 elementos, ou seja, funções de grau máximo 9. Após isso o programa solicitará a inserção do valor de cada ponto e em seguida o valor da função. Por fim, também é solicitado o valor de x que deseja aproximar. Então, o programa inicia o vetor L com zero em todas as suas posições e em seguida entra em um loop calculando o somatório do método de legrange, baseado no princípio de que os elementos i e j não podem ser iguais, para que haja o cancelamento de todos os elementos. O resultado da divisão é então alocado na respectiva célula do vetor L. Por fim, há um loop para somar todos os valores de lagrange encontrados na variável p, que é então exibida ao usuário, estando preenchida com o valor em função do ponto x que o usuário inseriu.

4 Código Fonte

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <assert.h>
#define MAX_SIZE 10

int main(){

  int qtd_pontos;

  printf("Insira a quantidade de pontos conhecidos da função a ser
   interpolada: ");
  scanf("%d",&qtd_pontos);

  assert(qtd_pontos <= MAX_SIZE);

  double temperatura[MAX_SIZE], ro[MAX_SIZE];

  printf("Valores de x pré existentes: \n");

  for(int i = 0; i < qtd_pontos; i++){
    printf("Insira o valor de x_%d :", i);
    scanf("%lf", &temperatura[i]);
  }

  printf("Valores de f(x) pré existentes: \n");

  for(int i = 0; i < qtd_pontos; i++){
    printf("Insira o valor de x_%d :", i);
    scanf("%lf", &ro[i]);
  }

  double x;

  printf("Insira o valor de x para o qual deseja obter f(x): ");
  scanf("%lf", &x);

  double l[MAX_SIZE];

  for (int i = 0; i < MAX_SIZE; i++){
    l[i] = 0.0;
  }

  for (int i = 0; i < qtd_pontos; i++){
    double num = 1.0, den = 1.0;
    for (int j = 0; j < qtd_pontos; j++){
      if (i != j){
```

```
        num *= (x - temperatura[j]);
        den *= (temperatura[i] - temperatura[j]);
      }
    }
    l[i] += num/den;
  }

  double p = 0.0;

  for (int i = 0; i < qtd_pontos; i++){
    p += ro[i] * l[i];
  }

  printf("O valor de f(x) é: %lf\n", p);

  return EXIT_SUCCESS;
}
```

5 Resultados e discussões

Nesta seção discutiremos os resultados obtidos após a execução do programa apresentado na seção anterior.

```
[0][wilton@asus]~/Dropbox/UnB/Métodos Numéricos/solutions/m4/solution
$ ./a.out
Insira a quantidade de pontos conhecidos da função a ser interpolada: 3
Valores de x pré existentes:
Insira o valor de x_0 :5
Insira o valor de x_1 :10
Insira o valor de x_2 :15
Valores de f(x) pré existentes:
Insira o valor de x_0 :0.9998
Insira o valor de x_1 :0.9997
Insira o valor de x_2 :0.9991
Insira o valor de x para o qual deseja obter f(x): 13
O valor de f(x) é: 0.999400
```

Figura 3: Resultado da execução do programa para $\rho(13)$

```
[0][wilton@asus]~/Dropbox/UnB/Métodos Numéricos/solutions/m4/solution
$ ./a.out
Insira a quantidade de pontos conhecidos da função a ser interpolada: 4
Valores de x pré existentes:
Insira o valor de x_0 :15
Insira o valor de x_1 :20
Insira o valor de x_2 :25
Insira o valor de x_3 :30
Valores de f(x) pré existentes:
Insira o valor de x_0 :0.9991
Insira o valor de x_1 :0.9982
Insira o valor de x_2 :0.9971
Insira o valor de x_3 :0.9957
Insira o valor de x para o qual deseja obter f(x): 27
O valor de f(x) é: 0.996582
```

Figura 4: Resultado da execução do programa para $\rho(27)$

Após a execução do programa foram obtidos os seguintes valores:

$$\rho(13) = 0.9994 \text{ e } \rho(27) = 0.9966$$

O resultado encontrado a partir da solução proposta é condizente. Pois ao fazermos a plotagem dos dados da tabela (1) juntamente com os resultados obtidos através dos polinômios interpoladores apresentados nas equações (3) e (5) chegamos ao seguinte resultado:

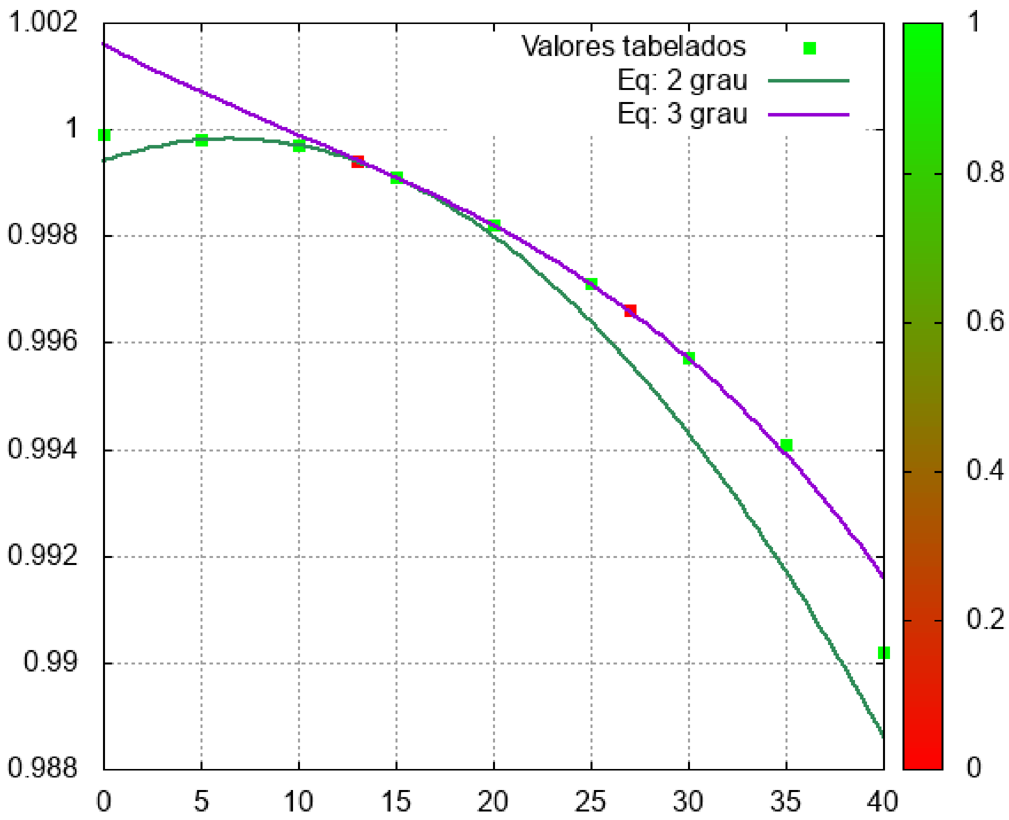

Figura 5: Plotagem dos resultados

A figura (5) apresenta os dados da tabela (1) como pontos na cor verde juntamente com os dois pontos que se procurava os resultado, 13 e 27, na cor vermelha. A linha verde representa a função interpoladora de 2º e a linha de cor roxa a função interpoladora de 3º.

Assim como foi estabelecido na seção de Metodologia, é possível notar que a função de 2º intercepta justamente os pontos escolhido na tabela (2), $[5, 10\ e\ 15]$, e o mesmo ocorre com a função de 3º com relação aos pontos da tabela (3), $[15, 20, 25\ e\ 30]$.

E ambos os pontos, $13\ e\ 27$, que estão dentro dos respectivos intervalos também são interceptados pelas funções interpoladoras.

Sendo assim, o objetivo proposto no início do relatório foi satisfatoriamente alcançado.

6 Ferramentas

Todas as ferramentas utilizadas neste relatório são ferramentas open source (software livre). Permitindo assim que qualquer um possa reproduzir e contestar as afirmações presentes neste documento.

1. Arch Linux (`https://www.archlinux.org`)
   - Sistema operacional utilizado.
2. GCC (`https://gcc.gnu.org`)
   - Compilador de C utilizado para compilar a solução.
3. Python (`https://www.python.org`)
   - Linguagem de programação utilizada para conferir os valores da solução.
4. vim (`http://www.vim.org`)
   - Editor de texto.
5. LaTeX (`https://www.latex-project.org`)
   - Sistema tipográfico de alta qualidade (utilizado para elaborar o relatório).
6. Gnuplot (`http://www.gnuplot.info`)
   - Utilitário de representação gráfica (utilizado para plotagem do gráfico).
7. UMLet (`http://www.umlet.com`)
   - Ferramenta de UML (utilizado para criar o fluxo de execução).
8. Shutter (`http://shutter-project.org`)
   - Programa de captura de tela (utilizado para capturar os resultados).