

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

IMPLEMENTÁCIA METÓD PRE NUMERICKÚ
INVERZIU CHARAKTERISTIKÝCH FUNKCIÍ

Bakalárska práca

2022

Branislav Lacovič

**UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA**

**IMPLEMENTÁCIA METÓD PRE NUMERICKÚ
INVERZIU CHARAKTERISTIKÝCH FUNKCIÍ**

Bakalárska práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Pracovisko (katedra/ústav): Ústav matematických vied
Školiteľ: RNDr. Andrej Gajdoš, PhD.

Košice 2022

Branislav Lacovič

Univerzita P. J. Šafárika v Košiciach
Prírodovedecká fakulta

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Branislav Lacovič
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: Matematika
Typ záverečnej práce: Bakalárska práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Implementácia metód pre numerickú inverziu charakteristických funkcií

Názov EN: Implementation of methods for numerical inversion of characteristic functions

Cieľ:
1. Preštudovať prístupy k numerickému invertovaniu charakteristických funkcií a oboznámiť sa s dostupnými výpočtovými prostriedkami.
2. Implementovať naštudované poznatky vo vhodnom programovacom jazyku.

Literatúra:
1. V. Witkovský (2019). Computing the exact distribution of the Bartlett's test statistic by numerical inversion of its characteristic function. Journal of Applied Statistics. DOI: 10.1080/02664763.2019.1675608.
2. A.M. Mathai, H.J. Haubold (2007). Centre for Mathematical Sciences Pala Campus.
3. L. Feng and X. Lin (2013). Inverting Analytic Characteristic Functions and Financial Applications. SIAM Journal on Financial Mathematics. 4(1), 372-398.
4. J. Gil-Pelaez (1951). Note on the inversion theorem. Biometrika, 38(3-4):481.
5. F. Olver, D. W. Lozier, R. Boisvert and C. Clark (2010). The NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge Univ. Press.

Vedúci: RNDr. Andrej Gajdoš, PhD.

Ústav : ÚMV - Ústav matematických vied

Riaditeľ ústavu: doc. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.

Dátum schválenia: 20.10.2021

ANALYTICKÝ LIST

Autor:	Branislav Lacovič
Názov práce:	Implementácia metód pre numerickú inverziu charakteristických funkcií
Podnázov práce:	
Jazyk práce:	slovenský
Typ práce:	Bakalárska práca
Počet strán:	53
Nadobúdaný akademický titul:	Bakalár (Bc.)
Univerzita:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Fakulta:	Prírodovedecká fakulta
Katedra/Ústav:	Ústav matematických vied
Študijný odbor:	Matematika
Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Sídlo univerzity (fakulty):	Košice
Vedúci záver. práce (školiteľ):	RNDr. Andrej Gajdoš, PhD.
Dátum odovzdania:	18. máj 2022
Kľúčové slová:	charakteristická funkcia, numerická inverzia, softvér R
Názov práce v AJ:	Implementation of methods for numerical inversion of characteristic functions
Kľúčové slová v AJ:	characteristic function, numeric inversion, software R

Podakovanie

Na tomto mieste sa chcem poďakovať vedúcemu práce RNDr. Andrejovi Gajdošovi, PhD. za usmernenia, pripomienky a odbornú pomoc vo všetkých etapách písania tejto práce.

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som celú prácu vypracoval samostatne, len s použitím uvedenej odbornej literatúry a s využitím rád a odporúčaní ľudí, ktorých som uviedol v poďakovaní.

Košice, 18. máj 2022

Branislav Lacovič

Abstrakt

Aplikácia metód štatistickej inferencie napríklad v poisťovníctve, v metrológii, v oblasti financií, vedie k rôznym pravdepodobnostným rozdeleniam. Konkrétne napr. poisťovne potrebujú odhadnúť koľko nastane poistných udalostí a aké finančné škody spôsobia aby sa vedeli pripraviť na vyplácanie poistných súm (*Witkovský et al.*, 2017).

Matematická štatistika ponúka veľa rôznych testov. V praxi potrebujeme poznať napr. kvantily rozdelenia testovacej štatistiky. V zložitejších prípadoch ale vznikajú testovacie štatistiky, u ktorých výpočet hodnôt distribučnej funkcie (CDF), hustoty pravdepodobnosti (PDF) alebo kvantilovej funkcie (QF) je príliš zdĺhavý, nepresný, niekedy dokonca prakticky nerealizovateľný (*Witkovský*, 2018).

V uvedených aplikáciách je kľúčové pre potreby praxe presne a efektívne vyrátať hodnoty CDF, PDF či QF. Veľakrát je k dispozícii práve charakteristická funkcia (CF) - jednoznačne určujúca rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny. V mnohých ďalších prípadoch je možné CF odvodiť využitím poznatkov z teórie pravdepodobnosti. Ukazuje sa (*Witkovský*, 2016, 2018), že numerickou inverziou z CF je možné častokrát efektívne a presne vypočítať požadované hodnoty pre CDF, PDF či QF.

V práci sa venujeme špeciálnym rozdeleniam pravdepodobnosti, ich CF i aplikáciám. Implementovali sme algoritmy na výpočet ich CF spolu s ilustračnými príkladmi ich použitia do balíčka *CharFunToolR* (*Gajdoš et al.*, 2021) v softvéri R. Implementovali sme ďalšie dva algoritmy pre numerickú inverziu CF využívajúce Fourierovú transformáciu. Jeden z nich (*Warr*, 2014) je určený pre diskrétna rozdelenia. Druhý algoritmus (*Witkovský*, 2016) je možné aplikovať pre spojité rozdelenia pravdepodobnosti. Keďže v určitých prípadoch môže byť výpočet numerickou inverziou (výpočtovo) náročnejší, zaoberali sme v práci Barycentrickou interpoláciou (*Berrut a Trefethen*, 2004), ktorú sme tiež implementovali do *CharFunToolR* spolu s algoritmami, ktoré súvisia s Chebyshevovými bodmi (*Mason a Handscomb*, 2003), vylepšujúcimi jej vlastnosti pri použití v praxi. Inšpiráciou pri teoretickom štúdiu aj pri implementácii uvedených súčastí v programovacom jazyku R, nám bol dnes už rozsiahly výpočtový balík určený pre komerčný softvér Matlab (*Witkovský*, 2019a).

Kľúčové slová

charakteristická funkcia, numerická inverzia, softvér R

Abstract

The application of statistical inference methods for example in insurance, metrology, finance, leads to different probability distributions. Specifically e.g. Insurance companies need to estimate how many insurance events will occur and what financial damage they will cause in order to be able to prepare for the payment of insurance sums (*Witkovský et al.*, 2017).

Mathematical statistics offers many different tests. In practice, we need to know e.g. quantiles of the distribution of test statistics. In more complex cases, however, test statistics are generated for which the calculation of the values of the distribution function (CDF), probability density (PDF) or quantile function (QF) is too slow, inaccurate, sometimes even practically unfeasible (*Witkovský*, 2018).

In these applications, it is crucial for the needs of practice to accurately and efficiently calculate CDF, PDF or QF values. Many times, the characteristic function (CF) is available - an unambiguous determinant of the probability distribution of a random variable. In many other cases, CF can be derived using knowledge from probability theory. It turns (*Witkovský*, 2016, 2018) out that numerical inversion from CF can often efficiently and accurately calculate the required values for CDF, PDF or QF.

In this work we deal with special probability distributions, their CF and applications. We implemented algorithms for calculating their CF together with illustrative examples of their use in the *CharFunToolR* package (*Gajdoš et al.*, 2021) in the R software. We implemented two more algorithms for numerical inversion of CF using the Fourier transform. One of them (*Warr*, 2014) is for discrete distributions. The second algorithm (*Witkovský*, 2016) can be applied to continuous probability distributions. As numerical inversion calculation can be (computationally) more difficult in some cases, we dealt with Barycentric Interpolation (*Berrut a Trefethen*, 2004), which we also implemented in *CharFunToolR*, along with algorithms related to Chebyshev points (*Mason a Handscomb*, 2003), improving its properties when used in practice. The inspiration for the theoretical study and the implementation of the mentioned components in the programming language R was an extensive computational package designed for commercial software Matlab (*Witkovský*, 2019a).

Keywords

characteristic function, numeric inversion, software R

Obsah

Úvod	9
1 Pravdepodobnosť a s ňou súvisiace pojmy	12
1.1 Pravdepodobnosť	12
1.2 Náhodná veličina	15
1.3 Vybrané pravdepodobnostné rozdelenia a ich charakteristické funkcie	19
2 Numerická inverzia Charakteristickej funkcie	24
2.1 Gil-Pelaezove vzorce	24
2.2 Fourierová transformácia	26
2.3 Chebyshevove polynómy	31
2.4 Barycentrická interpolácia	32
3 Softvérová implementácia numerickej inverzie	36
3.1 Programovací jazyk R, prostredie RStudio	36
3.2 Balíček CharFunToolR	37
3.3 Interaktívne príklady použitia CharFunToolR	47
Záver	50
Literatúra	52

Úvod

Aplikácia metód štatistickej inferencie napríklad v poisťovníctve (škody spôsobené požiarom alebo inou katastrofou), v metrológii (rôzne merania), v oblasti financií (pozorovanie rizika návratnosti investícií), vedie k rôznym, zaujímavým pravdepodobnostným rozdeleniam. Konkrétne napr. poisťovne potrebujú odhadnúť koľko nastane poistných udalostí a aké finančné škody spôsobia aby sa vedeli pripraviť na vyplácanie poistných súm (*Witkovský et al.*, 2017). Počet poistných udalostí za dané obdobie aj škody, ktoré spôsobujú sa dajú reprezentovať náhodnými veličinami (NV) s určitými rozdeleniami. Poisťovne sa však potrebujú pripraviť dopredu na celé obdobie, a preto je potrebné odhadnúť celkové škody, ktoré nastanú v uvažovanom období. V naznačenom modelovaní vstupujú do hry tzv. zložené rozdelenia pravdepodobnosti, ktorých charakteristická funkcia sa dá explicitne vyjadriť vďaka poznatkom z teórie pravdepodobnosti.

Matematická štatistika ponúka veľa rôznych testov (napr. testy stredných hodnôt, variácií, nezávislosti, podobnosti pravdepodobnostných rozdelení atď.). V praxi potrebujeme poznať najmä kritické hodnoty testov (resp. kvantily rozdelenia testovacej štatistiky) aby sme boli schopní napr. rozhodnúť o (ne)zamietnutí nulovej hypotézy. V zložitejších prípadoch ale vznikajú testovacie štatistiky, ktorých rozdelenie pravdepodobnosti je natoľko komplikované (*Witkovský*, 2018, 2019b), že výpočet hodnôt distribučnej funkcie (CDF), hustoty pravdepodobnosti (PDF) alebo kvantilovej funkcie (QF) je príliš zdĺhavý, nepresný, niekedy dokonca prakticky nerealizovateľný.

V uvedených aplikáciách je kľúčové pre potreby praxe presne a efektívne vyrátať hodnoty CDF, PDF či QF. Veľakrát je k dispozícii práve charakteristická funkcia (CF) - jednoznačné určujúca rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny. V mnohých ďalších prípadoch je možné CF odvodiť využitím poznatkov z teórie pravdepodobnosti (napr. CF lineárnej kombinácie nezávislých NV alebo CF zložených rozdelení ...). Ukazuje sa (*Witkovský*, 2016, 2018), že práve numerickou inverziou z CF je možné častokrát efektívne a presne vypočítať

požadované hodnoty pre CDF, PDF či QF. Napriek uvedenej užitočnosti, sa táto metodológia ešte nevyužíva celkom naplno (v komunite ľudí z oblasti pravdepodobnosti a matematickej štatistiky či iných aplikovaných odvetví) a nie sú všetky potrebné súčasti implementované vo voľne šíriteľnom softvéri. V súčasnosti už ale existuje veľmi kvalitná implementácia vo forme výpočtového balíka pre komerčný softvér Matlab (*Witkovský, 2019a*), ktorý je aj pre nás veľkou inšpiráciou pri písaní práce a implementovaní dôležitých funkcií pre podporu numerickej inverzie vo voľne šíriteľnom softvéri.

S ohľadom na uvedený súčasný stav problematiky numerickej inverzie charakteristických funkcií má predkladaná práca tieto ciele:

- Preštudovať prístupy k numerickému invertovaniu charakteristických a oboznámiť sa s dostupnými výpočtovými prostriedkami;
- Implementovať naštudované poznatky vo vhodnom programovacom jazyku.

V nadväznosti na stanovené ciele je práca rozdelená do troch hlavných kapitol. Prvá kapitola obsahuje základné pojmy z teórie pravdepodobnosti a tiež popisuje vybrané dôležité vzťahy medzi nimi. Ďalšie detaily či dôkazy je možné nájsť v priloženej (citovanej) literatúre. Súčasťou tejto kapitoly sú aj niektoré špeciálne rozdelenia pravdepodobnosti - ich charakteristika, využitie v praxi a naša implementácia v programovacom jazyku R.

Náplňou druhej kapitoly je problematika samotnej numerickej inverzie charakteristickej funkcie. Vysvetlené sú princípy algoritmov založených na Gil-Pelaezových vzorcoch a na Fourierovej transformácii. S tým súvisí i naša implementácia zmienených algoritmov (najmä s využitím Fourierovej transformácie) v programovacom jazyku R, vrátane ilustračných príkladov, ktoré sú taktiež obsahom práce. Pre efektívnejší výpočet hodnôt CDF, PDF či QF v niektorých prípadoch sa v druhej kapitole zaoberáme Barycentrickou interpoláciou (*Berrut a Trefethen, 2004*) (s využitím Chebysevových polynómov (*Mason a Handscomb, 2003*)). Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, i táto časť je implementovaná v jazyku R spolu s príkladmi použitia.

Tretia kapitola pojednáva o softvéri využitom v rámci tejto práce - ide o voľne dostupný a šíriteľný softvér resp. programovací jazyk R (*Verzani, 2012*) a interaktívne vývojové prostredie RStudio. Ďalej obsahuje informácie o našom výpočtovom balíku *CharFunToolR* (*Gajdoš et al., 2021*), ktorý v sebe zahŕňa okrem iného aj implementované súčasti spomínané v predošliach kapitolách. Táto posledná kapitola je doplnená ešte o ďalšie ilustračné príklady používania

nášho balíka. Ako doplnok ku *CharFunToolR*, sú vybrané príklady spracované v interaktívnom prostredí Jupyter notebook (*Perkel*, 2018).

Kapitola 1

Pravdepodobnosť a s ňou súvisiace pojmy

V tejto kapitole sa budeme venovať základným pojmom, ktoré súvisia s pravdepodobnosťou, rozoberieme si dôležité vlastnosti, podstatné pre túto prácu. Pre úplnosť a objasnenie všetkých detailov sú priložené aj potrebné zdroje (*Durrett*, 2010; *Renyi*, 2007).

1.1 Pravdepodobnosť

V prírode sa vyskytujú rôzne deje, ktoré sa správajú podľa určitých pravidiel alebo zákonov. Pri takýchto dejoch predpokladáme, že každej udalosti musí predchádzať príčina. Okrem takýchto dejov sa v prírode vyskytujú aj deje, ktoré sa nesprávajú podľa žiadnych pravidiel. Takže ak si zavedieme nejaký súbor pravidiel, tak nevieme s určitosťou povedať či daný jav A nastane alebo nenastane. Tieto javy sa nazývajú náhodné javy. O náhodných javoch, ktoré nastávajú častejšie ako ostatné vieme získať ďalšie informácie. Rôznymi konkrétnymi náhodnými dejmi (pokusmi) a ich javmi sa zaoberá teória pravdepodobnosti, ktorá je jedným z odvetví matematiky. **Náhodný pokus** je pokus, ktorého výsledok nie je vopred známy, je založený na náhode. Môže mať viac výsledkov, ktoré sa navzájom vylučujú.

Náhodným pokusom môže byť napríklad hod mincou alebo kockou, kde nevieme vopred určiť čo padne. Pri minci to môže byť hlava alebo znak pri kocke čísla od 1-6. Tieto výsledky pokusov sa nazývajú **elementárne javy**.

Elementárne javy sa označujú písmenom z gréckej abecedy ω . Sú to všetky možné navzájom sa vylučujúce výsledky náhodného pokusu, to znamená, že ak nastane jav ω_1 , nemôže nastať jav ω_2 . Taktiež sú to najmenšie možné javy,

preto ich nemožno rozložiť na menšie javy.

Množina všetkých elementárnych javov náhodného pokusu sa nazýva **výberový priestor** a označuje sa Ω .

Náhodné javy sa označujú A, B, C, \dots sú ľubovoľné podmnožiny výberového priestoru, teda $A \subset \Omega$. Inak povedané sú to akékoľvek tvrdenia o výsledku náhodného pokusu. Dajú sa rozdeliť na menšie javy. K javu A existuje jav opačný, ktorý sa označuje A^c . Je to jav, ktorý nastane ak nenastane jav A .

Definícia 1.1.1 (Jav nastal/nenastal). *Jav A nastal, ak vo výsledku náhodného pokusu bol vybraný prvok $\omega \in A$. Jav A nenastal, ak vo výsledku náhodného pokusu bol vybraný prvok $\omega \notin A$. (t.j. nastal jav opačný).*

Množinu všetkých elementárnych javov nazývame jav istý a množinu, ktorá neobsahuje žiaden elementárny jav (prázdna množina) nazývame jav nemožný.

Javy sú množiny a preto s nimi tak aj pracujeme. Existujú operácie ako je prienik, zjednotenie a rozdiel javov. Taktiež platia i rovnaké zákony ako pri množinách, to je komutatívny, asociatívny distributívny zákon De Morganove pravidlá.

Definícia 1.1.2 (Nezlučiteľné javy). *Javy $A, B \in \Omega$ sa nazývajú **nezlučiteľné**, ak $A \cap B = \emptyset$.*

*Javy $A_i, i = 1, 2, \dots$, sú **navzájom nezlučiteľné**, ak $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.*

Definícia 1.1.3 (Javové pole). *Neprázdny systém \mathcal{A} podmnožín výberového priestoru Ω , ktorý obsahuje Ω ako prvok a je uzavretý vzhľadom na komplement a spočítateľné zjednotenie javov sa nazýva **javové pole**.*

Symbolicky:

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
- $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \dots, \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Dôsledkom vlastností javového poľa uvedených v tejto definícii je to, že javové pole je uzavreté aj na prienik a rozdiel javov.

Konečne môžeme prejsť na definíciu samotnej pravdepodobnosti, ktorá sa časom vyvíjala. V súčasnosti poznáme klasickú definíciu zo 17. storočia, geometrickú definíciu z 18. storočia a axiomatickú z 20. storočia.

Klasická a geometrická definícia majú však isté obmedzenia, ktoré sa týkajú výberového priestoru. Ten totiž môže byť iba diskretný alebo iba spojitý.

Definícia 1.1.4 (Diskrétny (spojitý) výberový priestor). *Výberový priestor sa nazýva diskrétny, ak pozostáva z konečného alebo spočítateľného počtu elementárnych javov. Inak ho budeme nazývať spojitý.*

V súčasnosti najpoužívanější definícia pravdepodobnosti je najmladšia a to Axiomatická, ktorá pochádza z 20. storočia, tvorí základ modernej teórie pravdepodobnosti a zaviedol ju Kolmogorov.

Definícia 1.1.5 (Pravdepodobnosť). *Reálna funkcia P , ktorá každému javu z javového poľa priradzuje nezáporné reálne číslo. P musí spĺňať nasledujúce axiomy:*

- $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$,
- $P(\Omega) = 1$,
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ pre navzájom nezlučiteľné javy A_i ,

sa nazýva pravdepodobnostná miera alebo pravdepodobnosť javu v zátvorkách.

1. axióma sa nazýva axióma nezápornosti, 2. axióma sa nazýva axióma úplnosti a 3. axióma je axióma sigma-aditívnosti.

Definícia 1.1.6 (Pravdepodobnostný priestor). *Pod pojmom pravdepodobnostný priestor rozumieme trojicu (Ω, \mathcal{A}, P) , kde Ω je výberový priestor, \mathcal{A} je javové pole a P je pravdepodobnosť definovaná na \mathcal{A} .*

Veta 1.1.1 (Vlastnosti pravdepodobnosti). *Nech (Ω, \mathcal{A}, P) je pravdepodobnostný priestor a $A, B \in \mathcal{A}$ sú javy. Potom platí*

- $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- ak $A \subset B$, tak potom $P(A) \leq P(B)$
- $\forall A \in \mathcal{A}; 0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Dôkaz nájdete v Renyi (2007).

1.2 Náhodná veličina

V teórii pravdepodobnosti sa zvyčajne jednotlivým náhodným javom priradujú konkrétne číselné hodnoty, čím dosiahneme, že výsledkom náhodného pokusu je číslo, ktoré je jednoznačne určené elementárnym javom. Priradenie musí spĺňať Kolmogorovu axiomatiku. Takéto priradenie nazývame náhodná veličina. Pre viac detailov alebo dôkazov k vetám pozri *Durrett (2010); Renyi (2007)*.

Definícia 1.2.1 (Náhodná veličina). *Funkcia $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ nazývame **náhodná veličina**, ak vzorom každého intervalu v \mathbf{R} typu $(-\infty, x) \subset \mathbf{R}$ je jav.*

Symbolicky to vyzerá takto:

$$\mathbf{X}^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$$

Každá náhodná veličina je jednoznačne určená svojimi pravdepodobnostnými hodnotami, a tak je potrebné stanoviť číselné hodnoty, ktoré môže daná náhodná veličina nadobúdať a taktiež s akou pravdepodobnosťou ich nadobúda. Takéto pravidlo pre náhodnú veličinu, ktoré každej hodnote, resp. množine hodnôt z intervalu priradí konkrétnu pravdepodobnosť, nazývame rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny. Toto rozdelenie náhodnej veličiny \mathbf{X} môže byť popísané napríklad distribučnou funkciou.

Definícia 1.2.2 (Zákon rozdelenia náhodnej veličiny). *Pravdepodobnosť*

$$\mathcal{P}(-\infty, x) = P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) < x\}) = P(\mathbf{X} < x)$$

*sa nazýva **zákon rozdelenia náhodnej veličiny \mathbf{X}** .*

Trojica $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ sa nazýva **indukovaný pravdepodobný priestor**.

Poznámka 1.2.1. Náhodné veličiny sa zvyčajne označujú veľkými písmenami $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots$. Hodnoty, ktorá náhodná veličina nadobúda sa nazývajú realizácie náhodnej veličiny a označujú sa malými písmenami x, y, \dots

Definícia 1.2.3 (Distribučná funkcia). *Nech X je náhodná veličina. Reálna funkcia $F : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovaná vzťahom*

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) < x\} = P(\mathbf{X} < x)$$

*sa nazýva **distribučná funkcia náhodnej veličiny \mathbf{X}** .*

Inými slovami je to pravdepodobnosť kedy náhodná veličina nadobudne hodnotu menšiu ako je hodnota x .

Veta 1.2.1 (Vlastnosti distribučnej funkcie). *Nech $F(X)$ je distribučná funkcia náhodnej veličiny \mathbf{X} . Potom*

- $F(x)$ je neklesajúca
- $F(x)$ je zľava spojitá
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Dôkaz je spravený v *Renyi* (2007). Rozlišujeme dva typy veličín a to náhodnú veličinu s diskretným a spojitým rozdelením.

Definícia 1.2.4 (Diskrétné rozdelenie). *Hovoríme, že náhodná veličina \mathbf{X} má **diskrétné rozdelenie** ak existuje postupnosť reálnych čísel $\{x_i\}_{i \in I}$ a odpovedajúca postupnosť nezáporných reálnych čísel $\{p_i\}_i \in I$ taká, že $p_i = P(\mathbf{X} = x_i)$ a platí*

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i$$

Lomená čiara, ktorá spája body $[x_i, p_i]$, $i = 1, 2, \dots$, sa nazýva **polygón** rozdelenia náhodnej veličiny \mathbf{X} .

Definícia 1.2.5 (Spojité rozdelenie). *Hovoríme, že náhodná veličina \mathbf{X} má **absolútne spojité rozdelenie** ak existuje nezáporná integrovateľná funkcia $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, taká, že*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

*Funkcia $f(x)$ sa nazýva **hustota** rozdelenia náhodnej veličiny \mathbf{X} .*

Dôležité informácie o náhodných veličinách môžu byť charakterizované pomocou čísel, ktoré nazývame číselnými charakteristikami náhodných veličín. Rozlišujeme charakteristiky podľa vlastností, ktoré popisujú. Sú to charakteristiky polohy, variability, šikmosti a špicatosti a charakteristiky podľa spôsobu ich konštrukcie. To sú zasa charakteristiky momentové a kvantilové.

Definícia 1.2.6 (Stredná hodnota). *Nech náhodná veličina \mathbf{X} nadobúda hodnoty x_i ($i = 1, 2, \dots$) s pravdepodobnosťami p_i ($P(\mathbf{X} = x_i) = p_i$) ($i = 1, 2, \dots$).*

Potom strednou hodnotou náhodnej veličiny X pre diskrétné rozdelenie nazývame hodnotu danú týmto výrazom:

$$E[\mathbf{X}] = \sum_i x_i p_i$$

Je to vážený priemer hodnôt x_i s váhami p_i . Keď \mathbf{X} nadobúda nekonečne veľa hodnôt, tak stredná hodnota nemusí existovať.

Pre spojité rozdelenie vyzerá stredná hodnota nasledovne

$$E[\mathbf{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Veta 1.2.2 (Vlastnosti strednej hodnoty). *Nech a, b sú konštanty a \mathbf{X}, \mathbf{Y} sú náhodné veličiny, potom platia nasledujúce vlastnosti*

- $P(X = a) = 1$ tak $E(X) = a$,
- Ak existuje $E(X)$ a $E(Y)$, tak existuje $E(X + Y)$ a platí $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X)$
- $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$
- Ak \mathbf{X} a \mathbf{Y} sú nezávislé potom $E(XY) = E(X)E(Y)$

Opäť dôkazy vlastností strednej hodnoty sú urobené v *Renyi (2007)*.

Stredná hodnota náhodnej veličiny sa považuje za číslo, okolo ktorého veličina kolíše. Toto číslo, ale nedáva žiadnu informáciu o veľkosti kolísania. Preto sa definuje pojem rozptyl, ktorý nám už potrebnú informáciu poskytuje.

Definícia 1.2.7 (Disperzia). *Nech \mathbf{X} je náhodná veličina potom stredná hodnota náhodnej veličiny*

$(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^2$ sa nazýva rozptyl alebo disperzia náhodnej veličiny \mathbf{X} .

$$D[\mathbf{X}] = E((\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^2)$$

S výrazom pre disperziu sa výpočty nerobia ľahko a preto sa ako charakteristika variability používa častejšie jeho odmocnina. Odmocnina z disperzie sa nazýva smerodajná odchýlka náhodnej veličiny \mathbf{X} .

Veta 1.2.3 (Vlastnosti disperzie). *Nech a, b sú konštanty a \mathbf{X}, \mathbf{Y} sú náhodné veličiny. Potom platia nasledujúce vlastnosti*

- $P(X=a)=1$, tak $D(X) = 0$
- $D(aX) = a^2 D(X)$
- $D(X + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) + 2abE[(X - E(X))(Y - E(Y))]$
- *Nech \mathbf{X}, \mathbf{Y} sú nezávislé, potom platí*
 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Tieto vlastnosti sú dokázané v *Renyi* (2007).

Definícia 1.2.8 (Medián). *Nech \mathbf{X} je náhodná veličina so spojitou distribučnou funkciou pre, ktorú platí $0 < F(x) < 1$. Mediánom náhodnej veličiny \mathbf{X} nazývame číslo x , ktoré je dané*

$$F(x) = \frac{1}{2}.$$

V prípade, že je distribučná funkcia symetrická okolo nejakého bodu, tak medián sa rovná strednej hodnote, keď existuje.

Definícia 1.2.9 (Kvantil). *Nech \mathbf{X} je náhodná veličina so spojitou distribučnou funkciou pre, ktorú platí $0 < F(x) < 1$. **Kvantilom $Q(q)$** náhodnej veličiny \mathbf{X} nazývame číslo, ktoré je jednoznačne určené vzťahom*

$$F(x) = q.$$

Podľa tejto definície je medián 50- percentný kvantil. **Kvantilovou funkciou** náhodnej veličiny \mathbf{X} nazývame funkciu $F^{-1}(q) = \inf_x F(x) \geq q, q \in (0, 1)$. Kde $F(x)$ je distribučná funkcia náhodnej veličiny \mathbf{X} . **Modusom** rozdelenia náhodnej veličiny \mathbf{X} nazývame jej najpravdepodobnejšiu hodnotu \hat{x} .

Definícia 1.2.10 (Charakteristická funkcia). *Charakteristická funkcia náhodnej veličiny \mathbf{X} je stredná hodnota náhodnej veličiny $e^{it\mathbf{X}}$.*

Poznámka 1.2.2. Je to komplexná funkcia reálnej premennej t a označujeme ju $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$.

Z definície strednej hodnoty sa charakteristická funkcia diskkrétnej náhodnej veličiny vyráta vzťahom

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k}.$$

Vzťah pre spojité rozdelenie vychádza opäť z definície strednej hodnoty.

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Veta 1.2.4 (Vlastnosti charakteristickej funkcie). *Nech $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$ je charakteristická funkcia náhodnej veličiny \mathbf{X} a nech a, b sú konštanty. Potom platia nasledujúce vlastnosti*

- $|\varphi_{\mathbf{X}}(t)| \leq 1$, pre každé $t \in \mathbf{R}$
- $\varphi_{\mathbf{X}}(0) = 1$
- Ak $\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$, potom
 $\varphi_{\mathbf{Y}}(t) = e^{ibt} \varphi_{\mathbf{X}}(at)$
- $\varphi_{\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{X}_i}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\mathbf{X}_i}(a_i t)$

Dôkazy sú opäť uvedené v *Renyi* (2007).

1.3 Vybrané pravdepodobnostné rozdelenia a ich charakteristické funkcie

Pravdepodobnostné rozdelenia náhodných veličín slúžia na ich charakterizáciu (*Durrett*, 2010; *Johnson et al.*, 1994, 1992). Sú jednoznačne určené charakteristickou funkciou, hustotou alebo distribučnou funkciou (*Renyi*, 2007; *Durrett*, 2010). Teraz sa pozrieme na niektoré z nich. Kódy na výpočet hodnôt ich charakteristickej funkcie sme implementovali v programovacom jazyku R, čím sme rozšírili R-kovský balíček *CharFunToolR* (*Gajdoš et al.*, 2021), o Quinkero, Laplaceovo, Waringovo, TSP, Wignerovo, WignerSemicircle, TSPSymmetrické, Waring, ktoré môžu byť v praxi využívané, pričom sme sa inšpirovali

kódmi v Matlabe od docenta Viktora Witkovského zo SAV ÚM (*Witkovský*, 2019a). Doplnili sme tak voľne dostupnú implementáciu týchto spomínaných funkcií, ktorá oproti komerčnému softvéru Matlab chýbala v tzv. open-source komunite. Pre každé rozdelenie je implementovaných i niekoľko ilustračných príkladov, kde sa využívajú aj Gil-Pelaezove vzorce pre numerickú inverziu charakteristickej funkcie (*Gil-Pelaez*, 1951; *Witkovský*, 2016), ktoré sú bližšie vysvetlené v ďalšej kapitole.

Quinkertovo pravdepodobnostné rozdelenie

Modelovanie údajov, v ktorých je známy počet organizmov, ktoré prežijú liečbu konkrétnou dávkou lieku, ale \mathbf{N} , počet organizmov pôvodne vystavených lieku, nie je známy a musí sa odhadnúť. Tradične sa \mathbf{N} modeluje ako náhodná veličina podľa rôznych rozdelení, ako je Poissonovo alebo negatívne binomické rozdelenie. Najpresnejšie je však Beta-Poissonovo rozdelenie (Quinkertovo) (*Leask a Haines*, 2014; *Vu et al.*, 2016), ktoré sa získa, keď sa Poissonov parameter modeluje s beta distribúciou.

Model prvýkrát explicitne skúmali Holla a Bhattacharya v roku 1965, ktorí ho nazvali Poisson-beta rozdelenie a použili ho v kontexte náchylnosti k nehoďám. Distribúcia sa považuje za prostriedok na modelovanie nadmerne rozptýlených údajov.

Nech \mathbf{Y} je náhodná veličina s Poissonovým rozdelením a so strednou hodnotou $\tau(1 - p)$, kde τ je neznámy parameter a $1 - p$ pravdepodobnosť. Ďalej $p \sim \text{beta}(a, b)$, kde $a, b \geq 1$. Potom je výsledné rozdelenie beta kombináciou Poissonovho rozdelenia a označuje sa ako beta-Poissonovo rozdelenie. Funkcia hmotnosti pravdepodobnosti (pmf) \mathbf{Y} je daná ako

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y} = y) &= \int_0^1 \frac{[\tau(1 - p)]^y e^{-\tau(1-p)}}{y!} \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1 - p)^{b-1} dp \\ &= \frac{\tau^y e^{-\tau}}{y!} \frac{\Gamma(a + b)\Gamma(b + y)}{\Gamma(a + b + y)\Gamma(b)} {}_1F_1(a, a + b + y; \tau) \end{aligned} \quad (1.1)$$

a je pravdepodobnostná funkcia (PMF) resp. zákon rozdelenia Poissonovho rozdelenia. Funkcia ${}_1F_1$ je konfluentná hypergeometrická alebo Kummerova funkcia a zapisuje ako

$${}_1F_1(a, a + b + y; \tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{(a + b + y)_s} \frac{\tau^s}{s!}, \quad (1.2)$$

kde $(a)_n$ označuje Pochhammerov symbol $\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$.

Laplaceovo pravdepodobnostné rozdelenie

Laplaceovo rozdelenie (*Johnson et al., 1994; Geraci a Borja, 2018*), ktoré sa nazýva aj Dvojité exponenciálne rozdelenie objavil Pierre Laplace v roku 1774. Hustota pravdepodobnosti pre toto rozdelenie je maximalizovaná nastavením parametra umiestnenia rovnému mediánu pozorovaných hodnôt nepárneho počtu nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín.

Funkcia hustoty pravdepodobnosti Laplaceovej distribúcie potom je

$$f(x) = \frac{1}{2\phi} e^{-|x-\theta|/\phi}, -\infty < x < \infty, \theta > 0. \quad (1.3)$$

Štandardná forma funkcie hustoty pravdepodobnosti (1.3) sa získa pomocou transformácie $\theta = 0, \phi = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad (1.4)$$

Charakteristická funkcia potom vyzerá takto:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = (1 + t^2). \quad (1.5)$$

Rozdelenie sa používa celkom bežne ako alternatíva k normálnemu rozdeleniu. Využíva sa v rozpoznávaní obrazu a reči, v oceánskom inžinierstve, v hydrológii a vo financiách. Laplaceov model je tiež užitočný vo všetkých situáciách, keď existuje podozrenie na heterogenitu v populácii a pozorovania vykazujú veľké chyby. V niektorých prípadoch v leteckej a námornej navigácii, kde je rozhodujúca pre modelovanie distribúcie polohových chýb lietadiel alebo plavidiel získaných združovaním údajov z komplexného navigačného systému.

Gama rozdielové pravdepodobnostné rozdelenie

Rozdielové rozdelenie dvoch nezávislých náhodných veličín s gama rozdelením s rovnakými tvarovými parametrami patriacimi do triedy Laplaceových rozdelení poskytuje modely s rozsiahlymi aplikáciami v rôznych oblastiach, ako je ekonómia, financie, komunikácia, inžinierstvo, biológia, fyzika alebo geoveda. Konkrétnejšie sa využíva napríklad pri riadení presnosti merania optických detektorov, detekcii prahu radarového senzora, nastavení optimálneho výkonu wifi siete alebo chemoterapii pri liečbe rakoviny.

Definícia 1.3.1 (Gama rozdielové rozdelenie). *Nech $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$, sú dve nezávislé náhodné veličiny, ktoré majú gama rozdelenie so zodpovedajúcimi parametrami $\alpha_j > 0, \beta_j > 0, j = 1, 2$*

$$\mathbf{X}_j \sim G(\alpha_j, \beta_j), j = 1, 2.$$

*Potom rozdelenie náhodnej veličiny $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ nazývame **Gama rozdielové rozdelenie** s parametrami $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ a označujeme $GDD(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$.*

Gama rozdielové rozdelenie sa dá odvodiť viacerými spôsobmi, napríklad numerickou kvadratúrou hustoty konvolučného integrálu, analytickým vyjadrením hustoty konvolučného integrálu v uzavretej forme cez splývajúce hypergeometrické funkcie, numerickou kvadratúrou integrálu distribučnej funkcie alebo napokon aj pomocou charakteristickej funkcie.

Charakteristická funkcia tohto rozdelenia vyzerá takto:

$$\varphi_{X_j}(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta_j}\right)^{\alpha_j}, t \in \mathbb{R}, j = 1, 2 \quad (1.6)$$

Pomocou základnej vlastnosti charakteristickej funkcie týkajúcej sa lineárnej kombinácie nezávislých náhodných premenných v (1.2.4).

Prepíšeme charakteristickú funkciu náhodnej veličiny $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ na

$$\varphi_{\mathbf{X}(t)} = \left(1 - \frac{it}{\beta_1}\right)^{-\alpha_1} \left(1 + \frac{it}{\beta_2}\right)^{-\alpha_2}, \quad (1.7)$$

Teraz sa môže Gama rozdielové rozdelenie definovať nasledovne pomocou charakteristickej funkcie (1.7).

Definícia 1.3.2 (Gama rozdielové rozdelenie). *O náhodnej premennej \mathbf{X} sa hovorí, že má gama rozdielové rozdelenie $GDD(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, ak je jej charakteristická funkcia daná vzorcom*

$$\varphi_{\mathbf{X}(t)} = \left(1 - \frac{it}{\beta_1}\right)^{-\alpha_1} \left(1 + \frac{it}{\beta_2}\right)^{-\alpha_2}, t \in \mathbb{R},$$

kde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sú reálne kladné konštanty.

Charakteristická funkcia GDD sa dá jednoducho prepísať priamym výpočtom do nasledujúceho exponenciálneho tvaru

$$\varphi_{\mathbf{X}(t)} = \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} r(t) e^{i\phi(t)}, \quad (1.8)$$

kde

$$r(t) = (\beta_1^2 + t^2)^{-\alpha_1/2} (\beta_2^2 + t^2)^{-\alpha_2/2}$$

$$\phi(t) = \left(\alpha_1 \arctan \frac{t}{\beta_1} - \alpha_2 \arctan \frac{t}{\beta_2} \right)$$

Kapitola 2

Numerická inverzia Charakteristickej funkcie

V tejto kapitole sa pozrieme na niektoré metódy numerickej inverzie charakteristickej funkcie (Gil-Pelaez, 1951; Witkovský, 2016, 2018; McLeod, 2014; Witkovský et al., 2017). Charakteristická funkcia jednoznačne určuje pravdepodobnostné rozdelenie a numerickou inverziou vieme dostať z charakteristickej funkcie distribučnú funkciu, hustotu alebo aj kvantily, ktoré sú veľmi dôležité napríklad v poisťovníctve (výška škody spôsobená katastrofou), štatistike (testovanie hypotéz), finančníctve (riziko návratnosti). Niekedy sú tieto výpočty z charakteristickej funkcie náročné a preto sa pozrieme aj na jednu zaujímavú interpoláciu, ktorá nám umožní vyrábať hodnoty funkcií len v určitých bodoch a potom našou Barycentrickou interpoláciou pomerne presne odhadnúť hodnoty aj v ostatných bodoch, v ktorých ich nepoznáme.

2.1 Gil-Pelaezove vzorce

Gil-Pelaez (Gil-Pelaez, 1951) odvodil inverzné vzorce, vhodné na výpočty distribučnej funkcie aj funkcie hustoty.

Ak je $F(x)$ jednorozmerná distribučná funkcia, jej zodpovedajúca charakteristická funkcia je komplexná funkcia reálnej premennej t :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

Veta, ktorá ukazuje, že pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej veličiny je jednoznačne určené charakteristickou funkciou, sa nazýva inverzná veta a dáva nám takýto vzťah.

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt.$$

Konštanta $F(0)$ nepredstavuje problém pri vyjadrení pravdepodobnostného rozdelenia, pretože odčítaním sa získa pre každý interval (a, b) takýto tvar

$$\int_a^b dF(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt.$$

Okrem toho, keď rozdelenie patrí do spojitého typu, konštanta sa odstráni deriváciou,

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt. \quad (2.1)$$

Vo väčšine prípadov to stačí, ale niekedy je potrebné vyjadriť distribučnú funkciu explicitne, vtedy môže byť prítomnosť konštanty $F(0)$ nevýhodou. Preto sa inverzná veta odvodí novou metódou, ktorej výhodou je odstránenie konštantného člena.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{itx} \varphi(-t) - e^{-itx} \varphi(t)}{it} dt. \quad (2.2)$$

Po úprave dostaneme z (2.1) a (2.2)

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Im \left(\frac{e^{-ity} \varphi_{\mathbf{X}(t)}}{t} \right) dt. \quad (2.3)$$

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re(e^{-ity} \varphi_{\mathbf{X}(t)}) dt. \quad (2.4)$$

Výrazmi $\Re(f(t))$ a $\Im(f(t))$ sa označuje reálna a imaginárna časť komplexnej funkcie $f(t)$.

Vo všeobecnosti možno integrály v (2.3) a (2.4) vypočítať akoukoľvek numerickou kvadrátúrnou metódou (*Ooura a Mori, 1999*), prípadne v kombinácii s efektívnymi algoritmami na hľadanie koreňov.

Hodnoty Kvantilovej funkcie (QF) možno vyrátať pomocou iteračnej Newtonovej-Raphsonovej schémy na základe opakovaných výpočtov hustoty alebo distribučnej funkcie. Konkrétne, pre pevnú hodnotu pravdepodobnosti $p \in (0, 1)$ kvantil (spojitého) rozdelenia náhodnej veličiny \mathbf{Y} , $q = \text{qf}_{\mathbf{Y}}(p)$, je daný ako riešenie nasledujúcej iteračnej rovnice,

$$\text{qf}_{\mathbf{X}}^{k+1}(p) = \text{qf}_{\mathbf{X}}^k(p) - \frac{F_{\mathbf{X}}(\text{qf}_{\mathbf{X}}^k(p)) - p}{f_{\mathbf{X}}(\text{qf}_{\mathbf{X}}^k(p))},$$

kde $k = 0, 1, \dots$ a štartovacia hodnota $\text{qf}_{\mathbf{X}}^0(p)$ je nastavená $\text{qf}_{\mathbf{X}}^0(p) = \bar{\mathbf{X}}$

Poznámka 2.1.1. Gil-Pelaezove vzorce sú implementované v R (Verzani, 2012) v balíku *CharFunToolR* (Gajdoš et al., 2021) a sú často využívané aj v príkladoch pri pravdepodobnostných rozdeleniach. V kóde sa vypočítava z charakteristickej funkcie distribučná funkcia, hustota aj kvantily. Tiež je možné si vykresliť grafy týchto funkcií.

2.2 Fourierová transformácia

Analytické odvodenie hustoty alebo aj distribučnej funkcie pomocou Fourierovej transformácie je dostupné len v špeciálnych prípadoch (McLeod, 2014; Witkovský, 2016; Warr, 2014).

$$\mathbf{Y} = c_1 \mathbf{X}_1 + \dots + c_n \mathbf{X}_n$$

kde vstupné veličiny $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$, sú nezávislé náhodné veličiny so známym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbf{X}_j \sim F_{\mathbf{X}_j}$, pre $j = 1, \dots, n$, prípadne parametrizované podľa θ_j a c_1, \dots, c_n sú známe konštanty a \mathbf{Y} predstavuje jednorozmernú výstupnú veličinu (náhodná veličina s neznámym rozdelením, ktoré je potrebné určiť).

Charakteristická funkcia spojitej jednorozmernej náhodnej veličiny $\mathbf{X} \sim F_{\mathbf{X}}$ s jej funkciou hustoty $f_{\mathbf{X}}(x)$ je definovaná ako Fourierová transformácia jej hustoty.

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\mathbf{X}}(x) dx, t \in \mathbf{R}$$

Odvodenie Charakteristickej funkcie náhodnej premennej \mathbf{Y} vyzerá takto:

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(t) = \varphi_{\mathbf{X}_1}(c_1 t) \dots \varphi_{\mathbf{X}_n}(c_n t),$$

kde $\varphi_{\mathbf{X}_j}(t)$ označuje charakteristickú funkciu premennej \mathbf{X}_j . Predpokladá sa, že charakteristické funkcie náhodných veličín $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ sú známe alebo sa dajú ľahko odvodiť. Potom Fourierová inverzná veta, pre hustotu náhodnej veličiny \mathbf{Y} je daná vzorcom

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \varphi_{\mathbf{Y}}(t) dt, y \in \mathbf{R}$$

Efektívnym prístupom založeným na diskretnej aproximácii Fourierovej transformácii (DFT) (*Warr, 2014*) a aplikáciou FFT (rýchla Fourierova transformácia), dostaneme algoritmus na výpočet hustoty aj distribučnej funkcie (jednorozmernej) spojitaj náhodnej veličiny.

Numerické aproximácie spojitaj Fourierovej transformácie pomocou diskretnej Fourierovej transformácie, a najmä pomocou algoritmu FFT, sú dobre známe, napríklad v rôznych oblastiach inžinierstva.

Spojité Fourierova transformácia (CFT) sa dá aproximovať diskretnou Fourierovou transformáciou,

Medzi charakteristickou funkciou a hustotou platí nasledovný vzťah.

$$f_{\mathbf{Y}}(y) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-ity} \varphi_{\mathbf{Y}}(t) dt.$$

Táto aproximácia platí pre dostatočne veľký interval $(-T, T)$. Integrand je komplexná oscilujúca funkcia, ktorá konverguje k nule pomerne rýchlo.

Najjednoduchšia aproximácia uvedeného integrálu je daná nasledovným vzorcom:

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(a)(b - a),$$

kde (a, b) je dostatočne veľký interval, ktorý sa dá získať napríklad pravidlom šiestich smerodajných odchýlok.

Diskrétna Fourierova transformácia (DFT) môže presne invertovať CF pri dostatočne rýchlej konvergencii hustoty aj CF k nule. Výhodou použitia DFT je jednoduchý výpočet CF, keď nemajú explicitnú formu.

Nech pre náhodnú veličinu \mathbf{X} s distribučnou funkciou F je jej CF.

$$\varphi_{\mathbf{X}(s)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dF(x).$$

Fourierovú transformáciu (FT), môžeme definovať nasledovne. Nech $\hat{f}(\omega)$ je teda hustota odvodená FT z náhodnej veličiny \mathbf{X} .

$$\hat{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} dF(x).$$

Vzťah medzi CF a FT je

$$\varphi_{\mathbf{X}}(-2\pi\omega) = \hat{f}(\omega).$$

FT sa používa hlavne kvôli výpočtovej efektívnosti algoritmu rýchlej Fourierovej transformácie (FFT).

DFT možno použiť na aproximáciu FT a jej inverznej hodnoty. Za určitých podmienok je možné kontrolovať chybu tejto aproximácie. Ak chceme použiť DFT, nosič náhodnej premennej (RV) musí byť diskretizovaný v rovnomerne rozložených bodoch, kde Δx je vzdialenosť medzi susednými bodmi. Tieto body nazývame nosičom vzoriek DFT. Podobne sa FT vzorkuje v rovnomerne rozložených intervaloch šírky $\Delta\omega$ v transformačnej doméne. Tieto šírky vzorkovania sú spojené vzťahom reciprocity:

$$\Delta t \Delta \omega = \frac{1}{N},$$

kde N je počet bodov.

Ak $f(t_n)$ je zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej veličiny Lattice rozdelenia, potom jej DFT je:

$$F_k \equiv \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}, \text{ pre } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.5)$$

Efektivita DFT ako aproximácie FT závisí od veľkosti N .

„Vzorkovanie“ je voľne označenie hodnôt rozhrania zákona rozdelenia R_v , ktoré sú zahrnuté v DFT.

Pri vzorkovaní RV pomocou PDF je miera nášho konečného počtu vzoriek nula, zatiaľ čo pri vzorkovaní z určitej triedy rozdelení na zväzoch má „vzorka“ mieru, ktorá sa môže priblížiť k jednej. Táto vlastnosť umožňuje DFT presne aproximovať FT v špecifikovaných bodoch, ak je N dostatočne veľké.

Nezáporné náhodné veličiny s rozdelením na zväzoch T , kde pri akomkoľvek $\varepsilon > 0$ existuje N také, že

$$\sum_{i=0}^{N-1} P(T = t_i) > 1 - \varepsilon.$$

Nech $f(t_n) \equiv P(T = n\Delta t)$, potom FT vyzerá takto:

$$\hat{f}(\omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(t_n) e^{-2\pi i \omega n \Delta t} = \sum_{n=0}^{\infty} P(T = n\Delta t) e^{-2\pi i \omega n \Delta t} \quad (2.6)$$

Ohraničenie chyby $|\hat{f}(\omega_k) - F_k|$ pre všetky indexy $k = 0, 1, \dots, N-1$. Je potrebné nájsť optimálne ω_k , ktoré dobre zodpovedá DFT F_k . Exponenty zo 2.5 a 2.6 sa dajú do rovnosti.

$$-2\pi i \omega_k n \Delta t = -2\pi i \frac{nk}{N}$$

Vyjadrenie ω_k z predchádzajúcej rovnosti vyzerá nasledovne:

$$\omega_k = \frac{k}{\Delta t N}$$

Teraz sa použije ohraničenie

$$\sum_{n=0}^{N-1} P(T = n\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \geq 1 - \varepsilon$$

DFT dokáže presne aproximovať FT DRV v špecifikovaných bodoch. Vzhľadom na FT DRV vieme presne odvodiť zákon rozdelenia pravdepodobnosti DRV. Inverzný vzorec pre DFT vyzerá takto:

$$f_k \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega_n) e^{2\pi i \omega_n k \Delta t}$$

Pre viac detailov pozri *Witkovský (2016); McLeod (2014); Warr (2014)*

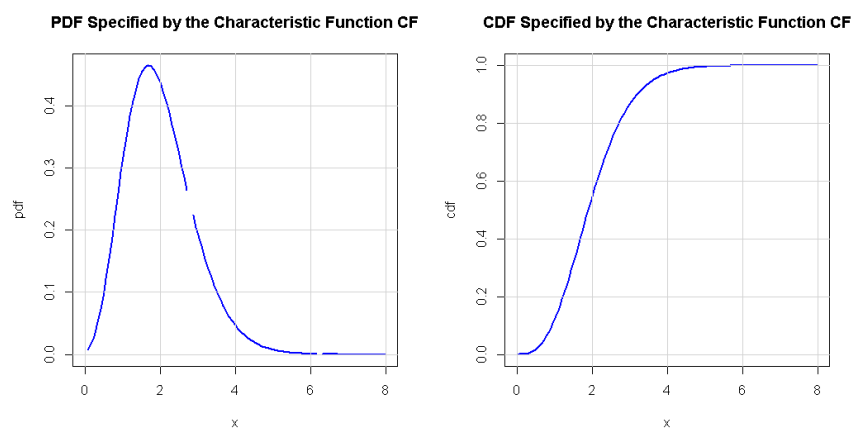
Pridávame aj jeden ilustračný príklad použitia Fourierovej transformácie v rámci numerickej inverzie CF.

Predstavte si, že by sme chceli vypočítať CDF/PDF náhodnej veličiny so zloženým Poissonovo-Exponenciálnym rozdelením invertovaním jeho CF. Je potrebné zadať vstupné parametre pre obe rozdelenia. Pripojíme balík *CharFunToolR* a vytvoríme charakteristické funkcie pre Poissonovo aj Exponenciálne rozdelenie. Na výpočet PDF/CDF zvolíme 101 rovnomerne rozmiestnené body ('x') v $[0, 8]$ a pravdepodobnosti.

```
lambda1 <- 10
lambda2 <- 5
cfX <- function(t) cfX_Exponential(t, lambda2)
cf <- function(t) cfN_Poisson(t, lambda1, cfX)
x <- seq(from = 0, to = 8, length.out = 101)
prob <- c(0.9, 0.95, 0.99)
options <- list()
options$isCompound <- 1
```

Nakoniec vykonáme 'cf2DistFFT(cf, x, prob, options)' na výpočet PDF/CDF zloženého Poissonovo-Exponenciálneho rozdelenia a vykreslia sa príslušné grafy.

```
result <- cf2DistFFT(cf, x, prob, options)
```



Poznámka 2.2.1. Podobne ako algoritmus využívajúci Gil-Pelaezove vzorce (funkcia *cf2DistGP*), tak aj algoritmy využívajúce Fourierovú transformáciu sú implementované v balíku *CharFunToolR* (nami vytvorené funkcie - *cf2DistFFT*, *cf2PMF_FFT* - inšpirované balíkom v Matlabe).

2.3 Chebyshevove polynómy

Chebyshevove polynómy (*Mason a Handscomb*, 2003) sú dve postupnosti polynómov spojené s funkciami kosínus a sínus, označujú sa $T_n(x)$ a U_n . Môžu byť definované niekoľkými spôsobmi, ktoré majú rovnaký konečný výsledok.

Pri interpolácii pomocou Chebyshevových polynómov sa ľubovoľný interval transformuje na interval $[-1, 1]$. To znamená, že každému $t \in [a, b]$ sa priradí hodnota $x \in [-1, 1]$ takýmto spôsobom.

$$x = \frac{t - \frac{1}{2}(a + b)}{b - a}$$

Chebyshevove polynómy prvého druhu sú definované takýmto vzťahom.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (2.7)$$

alebo

$$T_n(\cos x) = \cos(nx)$$

Chebyshevove polynómy druhého druhu sú definované vzorcom.

$$U_n(\cos x) \sin x = \sin((n + 1)x) \quad (2.8)$$

Dôležitou a praktickou vlastnosťou polynómov prvého druhu je, že sú ortogonálne.

Chebyshevove polynómy T_n sú polynómy s najväčším možným úvodným koeficientom, ktorých absolútna hodnota na intervale $[-1, 1]$ je ohraničená 1.

Chebyshevov polynóm akéhokoľvek druhu so stupňom n má na intervale $[-1, 1]$ práve n rôznych jednoduchých koreňov, ktoré sa nazývajú Chebyshevove korene. Korene Chebyshevovho polynómu prvého druhu sa niekedy nazývajú Chebyshevove uzly, pretože sa používajú ako uzly v polynómovej interpolácii.

Polynómy prvého druhu nadobúdajú korene v bodoch.

$$x = \cos\left(\frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Korene polynómov druhého druhu sa nadobúdajú v bodoch.

$$x = \cos\left(\frac{k}{n + 1}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Čo sa týka extrémov polynómov prvého druhu tých je $n + 1$ na intervale $[-1, 1]$ a to v takýchto bodoch.

$$x = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Jednou z unikátnych vlastností Chebyshevových polynómov prvého druhu je, že na intervale $[-1, 1]$ majú všetky extrémne hodnoty buď -1 alebo 1 .

Poznámka 2.3.1. Pre Barycentrickú interpoláciu (*Berrut a Trefethen, 2004*) bolo potrebné implementovať viacero funkcií aj pre Chebyshevove polynómy, aby sme mohli vyrátať na nejakom intervale hodnoty Chebyshevových polynómov. Tiež je veľmi dôležitý kód, ktorý transformuje body z ľubovoľného intervalu na interval $[-1, 1]$.

2.4 Barycentrická interpolácia

V praxi sa stáva, že poznáme hodnoty funkcie len v určitých bodoch alebo je výpočet náročný. Aby sme získali hodnoty aj v ďalších bodoch funkcie na danom intervale $[a, b]$ používame rôzne interpolácie.

Lagrangeov prístup je vo väčšine prípadov metódou voľby číslo jeden na riešenie polynomiálnych interpolantov. Kľúčom je, že Lagrangeov polynóm sa musí spájať so vzorcami barycentrickej interpolácie (*Berrut a Trefethen, 2004*).

Pri polynómovej interpolácii, pokiaľ nie je stupeň polynómu nízky, zvyčajne nie je vhodné používať rovnomerne rozložené interpolačné body. Namiesto toho by sa mali použiť Chebyshevove body (*Mason a Handscomb, 2003*), ktoré boli definované v predchádzajúcej kapitole alebo iné systémy bodov zoskupené na hraniciach intervalu aproximácie.

Uvažujme $n + 1$ odlišných interpolačných bodov (uzlov) x_j , $j = 0, \dots, n$ spolu so zodpovedajúcimi funkčnými hodnotami f_j . Predpokladáme, že uzly sú reálne. Nech P_n označuje vektorový priestor všetkých polynómov stupňa maximálne n . Klasický problém, ktorý sa tu rieši, je nájsť polynóm $p \in P_n$, ktorý interpoluje funkciu f v bodoch x_j , t.j.

$$p(x_j) = f_j, \quad j = 0, \dots, n.$$

Problém je dobre definovaný, pretože má jedinečné riešenie, ktoré závisí od údajov. Riešenie môže byť napísané napríklad v Lagrangeovom tvare

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f_j, \quad L_j(x), \quad L_j(x) = \frac{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}. \quad (2.9)$$

Lagrangeov polynóm L_j zodpovedajúci uzlu x_j má túto vlastnosť

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad j, k=0, \dots, n.$$

Lagrangeov vzorec (2.9) má určité nedostatky, ktoré z neho robia niekedy zlú voľbu pre praktické výpočty. Medzi nedostatky patria tieto:

- Je časovo náročný, vyžaduje množstvo operácií.
- Pridanie nového páru údajov $(x_{(n+1)}, f_{(n+1)})$ vyžaduje nový výpočet od začiatku.
- Výpočet je numericky nestabilný.

Dôkaz sa dá nájsť v (*Berrut a Trefethen, 2004*)

Preto je Lagrangeova forma polynómu p hlavne teoretickým nástrojom na dokazovanie viet. Pri výpočtoch sa vo všeobecnosti odporúča, aby sa namiesto toho použil Newtonov vzorec, ktorý vyžaduje iba $O(n)$ operácií pre každé vyhodnotenie p .

Lagrangeov vzorec však je možné ešte upravovať tak, aby ho bolo možné vyhodnotiť a aktualizovať aj v operáciách $O(n)$, rovnako ako Newtonovu formu. Stačí na to zapísať čitateľa písmena L_j v takomto tvare

$$L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

vydelíme $x - x_j$. Ak sa definujú barycentrické váhy podľa tohto vzorca

$$w_j = \frac{1}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}, \quad j = 0, \dots, n,$$

znamená to, že $w_j = \frac{1}{L'(x_j)}$, môže sa teda vyjadriť L_j ako

$$L_j(x) = L(x) \frac{w_j}{x - x_j}.$$

Všetky podmienky súčtu v (2.9) obsahujú faktor $L(x)$, ktorý nezávisí od j . Tento faktor je preto možné uviesť pred súčet a dostaneme

$$p(x) = L(x) \sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j} f_j. \quad (2.10)$$

Výhodou Lagrangeovho vzorca je, že nezávisí na poradí, v akom sú uzly usporiadané.

Výraz (2.10) sa môže ďalej upravovať na ešte elegantnejší vzorec, ktorý sa často používa v praxi. Predpokladá sa, že sa interpoluje okrem hodnôt f_j aj konštantná funkcia 1. Dostaneme tak tento vzorec:

$$1 = \sum_{j=0}^n L_j(x) = L(x) \sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j}.$$

Delením (2.10) týmto výrazom a zrušením spoločného faktora $L(x)$ získame barycentrický vzorec pre p :

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j} f_j}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j}}. \quad (2.11)$$

Vidno, že Barycentrický vzorec je Lagrangeov vzorec, ale má zvláštnu symetriu. Váhy w_j sa zobrazujú v menovateli presne ako aj v čitateli, okrem premenných f_j . To znamená, že akýkoľvek spoločný faktor vo všetkých váhach w_j môže byť zrušený bez ovplyvnenia hodnoty p_n .

Na výraz (2.11) môžeme využiť aktualizáciu váh w_j v $O(n)$ operáciach na začlenenie dvojice $(x_{(n+1)}, f_{(n+1)})$.

Pre určité špeciálne druhy uzlov x_j je možné poskytnúť explicitné vzorce pre barycentrické váhy w_j . Jednou z možností na začiatok sú rovnako vzdialené uzly s rozstupom $h = 2/n$ v intervale $[-1, 1]$. Tu je možné priamo vypočítať váhy $w_j = (-1)^{n-1} \binom{n}{j} (h^n)n!$ ktoré po zrušení faktorov nezávislých na j prinesie. $w_j = (-1)^j \binom{n}{j}$.

Problém je, že ak je n veľké, váhy w_j sa pre rovnomernú barycentrickú interpoláciu líšia približne o $2n$. Výsledkom bude, že aj malé zmeny v blízkosti stredu intervalu spôsobujú veľké zmeny v interpolante.

Aby polynómová interpolácia fungovala korektne, pokiaľ n nie je dostatočne malé, je potrebné miesto rovnako vzdialených bodov použiť množiny bodov, ktoré sú zoskupené v koncových bodoch intervalu s asymptotickou hustotou úmernou $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ak $n \rightarrow \infty$.

Najvýhodnejšími bodmi sú triedy Chebyshevových bodov, ktoré sa získavajú premietaním rovnako rozmiestnených bodov na jednotkový kruh až do jednotkového intervalu $[-1, 1]$. Pre takéto body vyzerajú váhy takto

$$w_j = \frac{1}{L'(x_j)}$$

Chebyshevove body prvého druhu aj druhého druhu sú definované v predchádzajúcej podkapitole (2.7) a (2.8)

S Chebyshevovými bodmi nie sú potrebné žiadne zložité výpočty na získanie váh w_j , a preto sú na odvodenie p_n potrebné iba operácie zložitosti $O(n)$. Zdá sa, že žiadna iná metóda interpolácie to nedosahuje, pretože napríklad Newtonova interpolácia vždy vyžaduje operácie zložitosti $O(n^2)$.

Kapitola 3

Softvérová implementácia numerickej inverzie

V rámci našej práce sme často pracovali so softvérom R (*Verzani*, 2012) a rozšírili sme balíček *CharFunToolR* (*Gajdoš et al.*, 2021). Obe časti sú popísané v tejto kapitole.

3.1 Programovací jazyk R, prostredie RStudio

R (*Verzani*, 2012) je programovací jazyk pre štatistické výpočty a grafiku podporovaný tímom R Core Team. R, ktorý vytvorili štatistici Ross Ihaka a Robert Gentleman, sa používa medzi štatistikmi na analýzu údajov a vývoj štatistického softvéru. Používatelia softvéru R vytvorili balíčky na rozšírenie funkcií jazyka R.

Softvérové prostredie jazyka R je open-source-voľne dostupné prostredie v rámci balíka GNU-General Public License. Je napísaný primárne v jazyku C, Fortran a v samotnom R. Pre rôzne operačné systémy sú k dispozícii predkompilované spustiteľné súbory. R má rozhranie príkazového riadku. K dispozícii sú aj viaceré grafické používateľské rozhrania, ako napríklad RStudio, integrované vývojové prostredie a Jupyter-rozhranie notebooku.

Dátové štruktúry R zahŕňajú vektory, polia, zoznamy a dátové rámce. Vektory sú usporiadané n -tice hodnôt a možno ich mapovať na polia jednej alebo viacerých dimenzií v poradí podľa stĺpcov. R podporuje aritmetiku poľa a v tomto ohľade je podobný jazykom ako MATLAB. Zoznamy slúžia ako súbory objektov, ktoré nemusia mať nevyhnutne rovnaký typ údajov. R nemá skalárny dátový typ. Namiesto toho je skalár reprezentovaný ako vektor dĺžky jedna.

R a jeho knižnice implementujú rôzne štatistické techniky, vrátane lineárneho a nelineárneho modelovania, klasických štatistických testov, priestorovej analýzy a analýzy časových radov, klasifikácie, a iných. Ďalšou silnou stránkou R je statická grafika; môže vytvárať grafy v publikačnej kvalite, ktoré obsahujú matematické symboly.

R-Studio je integrované vývojové prostredie pre programovací jazyk R. RStudio vyvíja bezplatné a otvorené nástroje pre R a profesionálne produkty pripravené na podnikanie pre tímy, ktoré používajú R aj Python, na škálovanie a zdieľanie svojej práce. Úlohou prostredia R-Studio je vytvárať bezplatný softvér s voľne dostupným zdrojovým kódom pre vedu o údajoch, vedecký výskum a technickú komunikáciu.

3.2 Balíček CharFunToolR

Aplikácia presnej štatistickej inferencie často vedie k neštandardným rozdeleniam pravdepodobnosti uvažovaných odhadov alebo testovacích štatistík. Často je potrebné určiť hodnoty hustoty, distribučnej funkcie alebo kvantilovej funkcie, čo je možné z charakteristickej funkcie. V mnohých dôležitých situáciách je odvodenie charakteristickej funkcie jednoduchšie ako výpočet hustoty alebo distribučnej funkcie. Analytický výpočet hustoty a distribučnej funkcie pomocou inverznej Fourierovej transformácie je dostupné len v špeciálnych prípadoch. Teda v praxi je väčšinou numerický výpočet hodnôt hustoty/distribučnej funkcie z charakteristickej funkcie nevyhnutným nástrojom.

A Preto ako už bolo spomenuté vyššie sme v rámci tejto práce rozšírili náš R-kovský balíček *CharFunToolR* (Gajdoš et al., 2021) o charakteristické funkcie pravdepodobnostných rozdelení spolu s ilustračnými príkladmi. Náš balík charakteristických funkcií pozostáva zo sady algoritmov na výpočet hodnôt vybraných charakteristických funkcií a metód pre numerickú inverziu (kombinovaných a/alebo zložených) charakteristických funkcií, ktoré sa používajú na výpočty funkcie hustoty pravdepodobnosti a kumulatívnej distribučnej funkcie.

Sú tam implementované charakteristické funkcie spojitých pravdepodobnostných rozdelení ako:

- `cf_ArcsineSymmetric`
- `cf_BetaNC`
- `cf_Beta`
- `cf_BetaSymmetric`

- `cf_ChiSquare`
- `cf_Exponential`
- `cf_FisherSnedecor`
- `cf_FisherSnedecorNC`
- `cf_Gamma`
- `cf_InverseGamma`
- `cf_Laplace`
- `cf_Normal`
- `cf_Rectangular`
- `cf_RectangularSymmetric`
- `cf_Student`
- `cf_TrapezoidalSymmetric`
- `cf_TriangularSymmetric`
- `cf_TSPSymmetric`
- `cf_WignerSemicircle`

Uvádzame príklad na ilustráciu aplikácie spojitých rozdelení pravdepodobnosti na Laplacovej distribúcii.

V nasledujúcom kroku špecifikujeme parametre Laplacovo pravdepodobnostného rozdelenia.

```
mu <- 0
```

```
beta <- 1
```

```
t <- seq(from = -10,
```

```
to = 10,
```

```
length.out = 201)
```

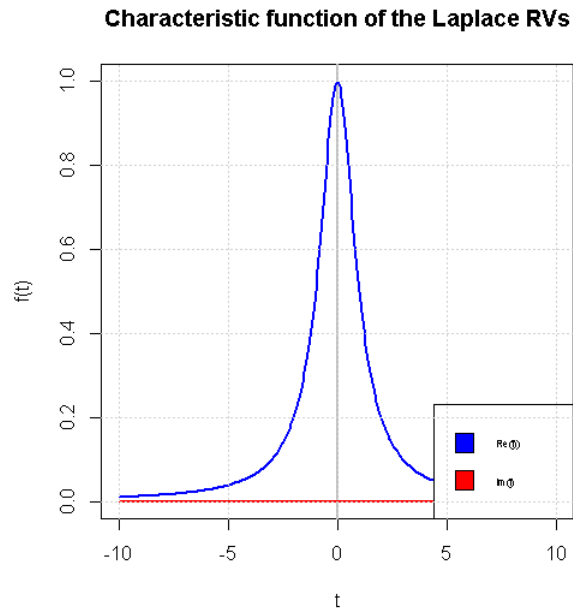
Teraz môžeme vypočítať hodnoty charakteristickej funkcie, vykresliť skutočnú (modrá farba) a imaginárnu (červená farba) časť charakteristickej funkcie.

```
plotReIm(function(t)
```

```
cf_Laplace(t, mu, beta),
```

```
t,
```

```
title = "Characteristic_function_of_the_Laplace_RVs")
```

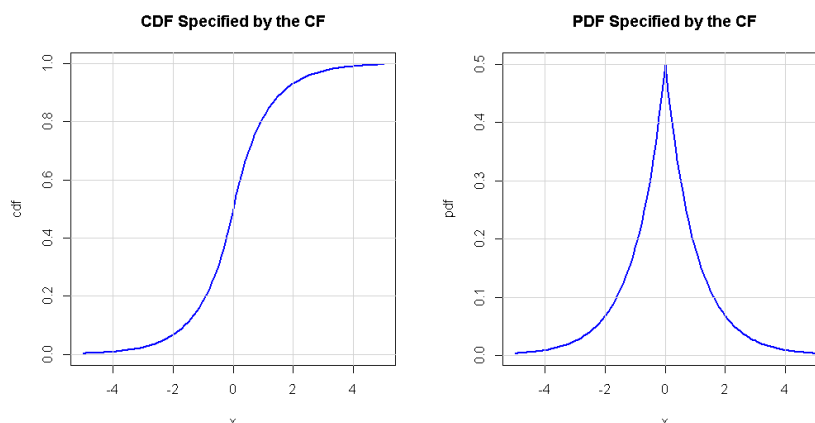


V druhom príklade chceme vypočítať hustotu/distribučnú funkciu z charakteristickej funkcie pomocou algoritmu ‘cf2DistGP’. Na tento účel využijeme rovnaké parametre ako v predchádzajúcom príklade.

```
mu <- 0
beta <- 1
x <- seq(-5, 5, length.out = 101)
prop <- c(0.80, 0.85, 0.90, 0.925, 0.95, 0.975, 0.99,
          0.995, 0.999)
cf <- function(t)
cf_Laplace(t, mu, beta)
```

Nakoniec vykonáme ‘cf2DistGP(cf, x, prob)’, aby sme získali číselný a grafický výsledok hustoty/distribučnej funkcie.

```
result <- cf2DistGP(cf, x, prob)
```

Ďalej máme k dispozícii charakteristické funkcie logaritmicke transformovaných náhodných veličín. Sú to náhodné veličiny, ktoré sa po logaritmovaní správajú podľa známeho rozdelenia, ktorej charakteristickú funkciu už poznáme.

- `cf_LogRV-Beta`
- `cf_LogRV-BetaNC`
- `cf_LogRV-ChiSquare`
- `cf_LogRV-ChiSquareNC`
- `cf_LogRV-FisherSnedecor`
- `cf_LogRV-FisherSnedecorNC`
- `cf_LogRV-MeansRatio`
- `cf_LogRV-MeansRatioW`
- `cf_LogRV-WilksLambda`
- `cf_LogRV-WilksLambdaNC`

Potom nasledujú charakteristické funkcie cirkulárnych pravdepodobnostných rozdelení. V teórii pravdepodobnosti ide o pravdepodobnostné rozdelenia na kruhu. Je to blízka aproximácia známeho rozdelenia, ktoré je cirkulárnym analógom jeho distribúcie. Napríklad vonMisesovo rozdelenie je kruhovým rozdelením normálneho rozdelenia.

- `cf_vonMises`

Ďalej sú tu charakteristické funkcie empirických pravdepodobnostných rozdelení a zložených distribúcií. Empirické rozdelenie je také, pre ktoré je každej možnej udalosti priradená pravdepodobnosť odvodená z experimentálneho pozorovania. Empirické rozdelenie môže predstavovať buď spojité alebo diskrétne rozdelenie.

- `cfE_DiracMixture`
- `cfE_Empirical`
- `cfE_EmpiricalOgive`

Charakteristické funkcie diskretných rozdelení, ktoré sme si zadefinovali v prvej kapitole.

- `cfN_Binomial`
- `cfN_Delaporte`
- `cfN_GeneralizedPoisson`
- `cfN_Geometric`
- `cfN_Logarithmic`
- `cfN_NegativeBinomial`
- `cfN_Poisson`
- `cfN_PolyaEggenberger`
- `cfN_Quinkert`
- `cfN_Waring`

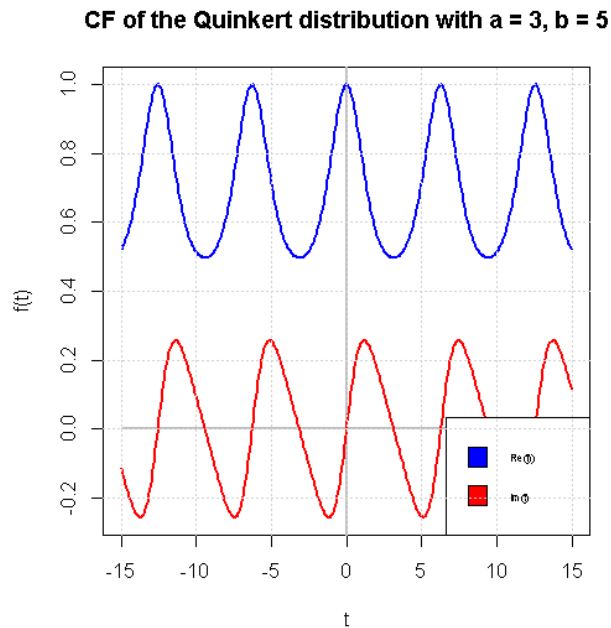
Uvedieme si tri príklady na ilustráciu toho, čo sa dá urobiť v našom balíku s diskretnými rozdeleniami pravdepodobnosti. Ukážeme si to na Quinkertovom pravdepodobnostnom rozdelení.

V prvom príklade chceme vypočítať hodnoty charakteristickej funkcie Quinkertovho rozdelenia s parametrami: $a = 3$, $b = 5$

```
a <- 3;
b <- 5;
t <- seq(from = -15,
to = 15,
length.out = 501)
```

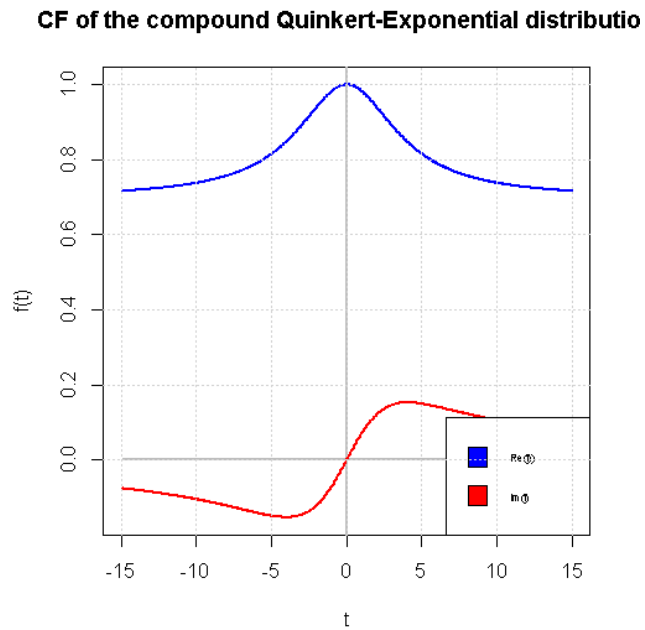
Na vykreslenie reálnej a imaginárnej časti charakteristickej funkcie sa použije pomocná funkcia `plotReIm`.

```
plotReIm(function(t)
cfN_Quinkert(t, a, b),
t,
title = "CF of the Quinkert distribution with a=3, b=5")
```



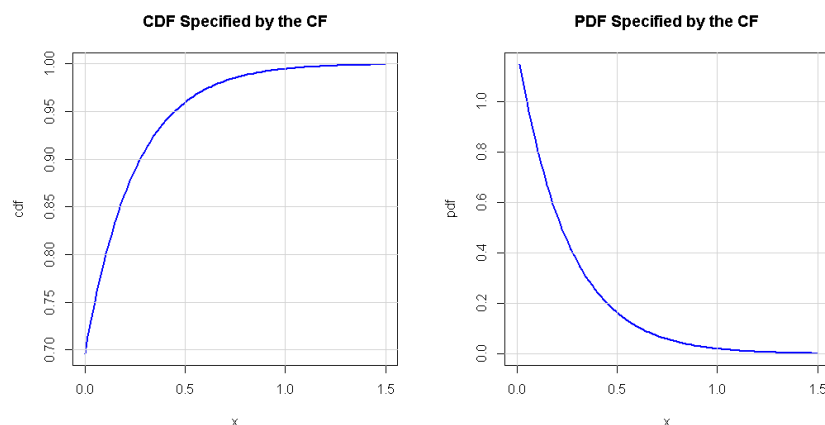
Ďalší príklad nám hovorí o výpočte hodnôt charakteristickej funkcie zloženého Quinkertovho-exponenciálneho rozdelenia. Rovnako ako v predchádzajúcom príklade nastavíme hodnoty vstupných parametrov a , b pre Quinkertovo rozdelenie. Tiež nastavíme λ parameter pre exponenciálne rozdelenie, definujeme ako charakteristickú funkciu exponenciálneho rozdelenia a zvolíme 501 rovnomerne rozmiestnené body v $[-15, 15]$, v ktorých chceme vypočítať hodnoty charakteristickej funkcie zloženého Quinkert-exponenciálneho rozdelenia. Používame funkciu `cfX_Exponential`.

```
a <- 3
b <- 5
lambda <- 5
cfX <- function(t)
cfX_Exponential(t, lambda)
t <- seq(from = -15,
to = 15,
length.out = 501)
plotReIm(function(t)
cfN_Quinkert(t, a, b, cfX),
t,
title = "CF_of_the_compound_Quinkert-Exponential_distribution")
```



V treťom príklade chceme vypočítať hustotu/distribučnú funkciu zloženého Quinkert-exponenciálneho rozdelenia pomocou funkcie ‘cf2DistGP’. Použijeme parametre ako v predchádzajúcom príklade.

```
a <- 3;
b <- 5;
lambda <- 5;
cfX <- function(t)
cfX_Exponential(t, lambda)
cf <- function(t)
cfN_Quinkert(t, a, b, cfX)
x <- seq(0, 1.5, length.out = 101)
prob <- c(0.9, 0.95, 0.99)
options <- list()
options$isCompound = TRUE
result <- cf2DistGP(cf, x, prob, options)
```



Charakteristické funkcie symetrických rozdelení pravdepodobnosti

- cfS_Arcsine
- cfS_Beta
- cfS_Gaussian
- cfS_Laplace
- cfS_Rectangular
- cfS_Student
- cfS_Trapezoidal
- cfS_Triangular
- cfS_TSP
- cfS_Wigner

Charakteristické funkcie nezáporných rozdelení pravdepodobnosti:

- cfX_ChiSquare
- cfX_Exponential
- cfX_FisherSnedecor
- cfX_Gamma
- cfX_InverseGamma
- cfX_LogNormal
- cfX_PearsonV

Ďalšie pomocné funkcie, ktoré slúžia napríklad pri vykresľovaní grafov alebo pri niektorých výpočtoch charakteristických funkcií špeciálnych rozdelení

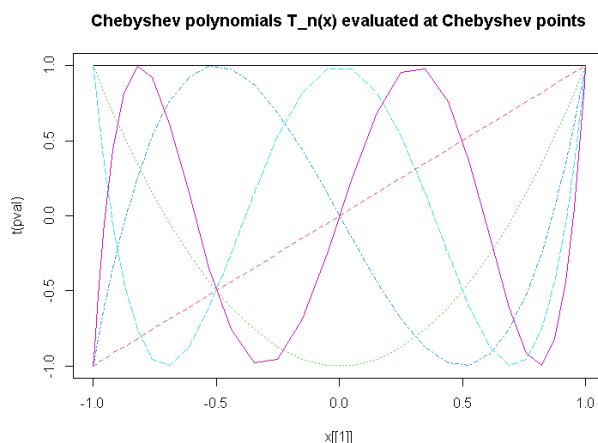
- cf_Conv
- cfX_PDF
- plotReIm
- plotReIm2
- plotPolar
- GammaLog
- GammaMulti
- GammaMultiLog
- GammaZX

Integrálne funkcie slúžia na prevod funkčných hodnôt vyrátaných z Chebyshevových bodoch druhého druhu na n -rozmerné Chebyshevove koeficienty (ChebCoefficients), výpočet Chebyshevových bodov na danom intervale, výpočet Chebyshevových polynómov n -tého rádu prvého druhu (Chebpoly)

- ChebCoefficients
- ChebPoints
- ChebPoly
- ChebPolyValues
- ChebValues

V tomto príklade vypočítame Chebyshevove polynómy prvého druhu n -tého rádu a vykreslíme ich hodnoty v 32 Chebyshevových bodoch z intervalu $[-1, 1]$ pričom použijeme funkciu ChebPoints na výpočet Chebyshevových bodov, matplotlib na vykreslenie grafu a ChebPoly na výpočet polynómov.

```
n <- 0:5
x <- ChebPoints(32, c(-1, 1))
pval <- ChebPoly(n, x[[1]])
matplotlib(x[[1]], t(pval), main = 'Chebyshev polynomials
T_n(x) evaluated at Chebyshev points', type = "l")
```



Interpolačné funkcie slúžia na pomerne presné odhady hodnôt funkcií v bodoch, v ktorých ich nepoznáme.

- InterpBarycentric
- InterpChebValues

Na ilustráciu si uvedieme príklad použitia Barycentrickej interpolácie pre hodnoty sinusovej funkcie na intervale $[-1, 1]$. Ako sme uviedli v odkaze Barycentrická interpolácia nevyužíva rovnomerné body, ale Chebyshevove preto

použijeme funkciu `ChebPoints`, ktorá nám vyráta 32 Chebyshevových bodov na intervale $[-\pi, \pi]$. Potom funkciou `interpBarycentric` vypočítame hodnoty funkcie sinus v ďalších bodoch z intervalu $[-\pi, \pi]$

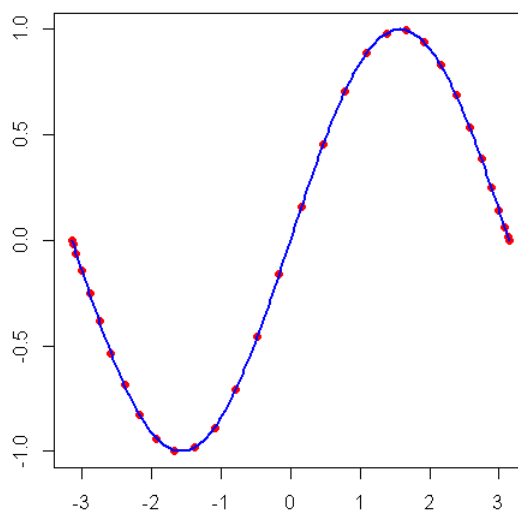
```
x <- ChebPoints(32, c(-pi, pi))[[1]]
f <- sin(x)
xNew <- seq(from = -pi,
to = pi,
length.out = 201)
fNew <- interpBarycentric(x, f, xNew)
```

Nasledujúcimi príkazmi vykreslíme graf funkcie sínus a vypíšeme si body spolu s príslušnými funkčnými hodnotami.

```
plot(
x,
f,
type = "p",
xlab = "",
ylab = "",
main = "",
pch = 20,
col = "red",
cex = 1.5
)
lines(xNew, fNew[[2]], col = "blue", lwd = 2)
print(list(
"xNew" = xNew,
"fNew" = fNew[[2]],
"sin(xNew)" = sin(xNew)
))
```

Špeciálne matematické funkcie vyskytujúce sa napríklad v zložitejších charakteristických funkciách špeciálnych pravdepodobnostných rozdelení.

- `Hypergeom1F1`
- `Hypergeom1F1Mat`
- `Hypergeom1F1MatApprox`
- `Hypergeom2F1`
- `Hypergeom2F1Mat`
- `HypergeomFqMat`



Obr. 3.1: Graf funkcie sinus odvodený pomocou Barycentrickej interpolácie spolu s vyznačenými hodnotami v Chebyshevových bodoch

Balík obsahuje inverzný algoritmus založený na jednoduchom lichobežníkovom pravidle na výpočet integrálov definovaných Gil-Pelaezovými vzorcami a tiež aj algoritmy pre Fourierovú transformáciu a DE kvadratúru.

3.3 Interaktívne príklady použitia CharFunToolR

V práci sme ako doplnok ku *CharFunToolR* (Gajdoš et al., 2021), spracovali vybrané príklady v interaktívnom prostredí Jupyter notebook (Perkel, 2018), ktoré si v tejto podkapitole viac priblížime. Príklady sú uložené na online úložisku (https://github.com/gajdosandrej/CFTR_JupyterNotebooks).

Jupyter Notebook je voľne dostupné webové interaktívne výpočtové prostredie na vytváranie poznámkových blokov, ktoré môžu užívatelia použiť na spojenie softvérového kódu, výpočtového výstupu, dokumentácie a multimedialných zdrojov do jedného dokumentu.

Dokument Jupyter Notebook je založený na prehliadači, ktorý obsahuje usporiadaný zoznam vstupných/výstupných buniek, ktoré môžu obsahovať kód, text (pomocou Markdown) alebo grafy.

Notebooky Jupyter sú postavené na množstve populárnych voľne dostupných knižníc:

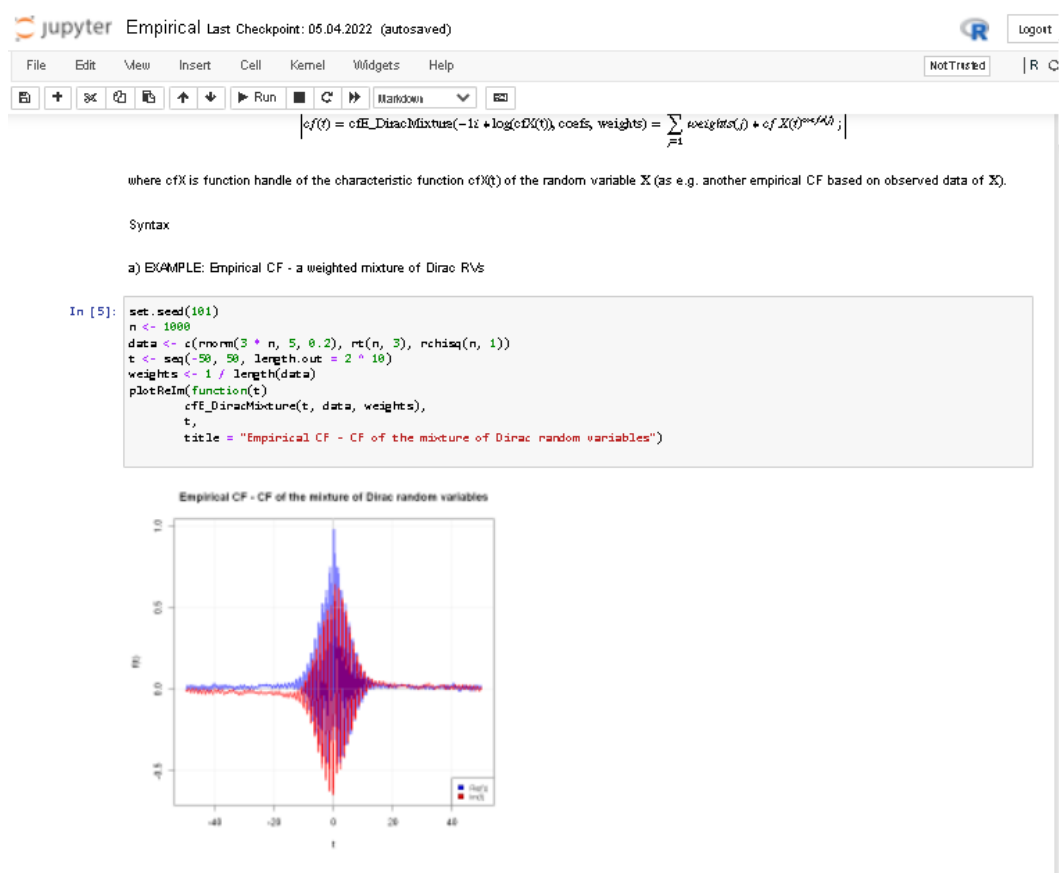
- IPython
- ZeroMQ
- Tornado
- jQuery
- Bootstrap (front-end framework)
- MathJax

Jupyter Notebook podporuje programovanie v rôznych jazykoch. Je možné ho previesť na množstvo otvorených štandardných výstupných formátov (HTML, prezentačné snímky, LaTeX, PDF, ReStructuredText, Markdown, Python) prostredníctvom „Download As“ vo webovom rozhraní, cez knižnicu nbconvert. Na zjednodušenie vizualizácie dokumentov notebook Jupyter na webe sa knižnica nbconvert poskytuje ako služba prostredníctvom NbViewer, ktorá dokáže prevziať adresu URL akéhokoľvek verejne dostupného dokumentu notebook, za chodu ho previesť do formátu HTML a zobraziť ho používateľovi.

Najnovším variantom Jupyteru je JupyterLab, ktorý je dostupný (ako notebook Jupyter) buď ako samostatný balík, alebo ako súčasť bezplatného vedecko-počítačového prostredia Anaconda.

Štandardný notebook Jupyter priradzuje každému notebooku vlastné jadro, JupyterLab vytvára výpočtové prostredie, ktoré umožňuje zdieľanie týchto komponentov. Používateľ si tak mohol v jednom okne zobraziť poznámkový blok, v inom upraviť požadovaný dátový súbor a v treťom zaznamenať všetky vykonané príkazy a to všetko v rámci jediného rozhrania webového prehliadača.

Jupyter Notebook je podobný notebookovému rozhraniu iných programov, ako sú Maple, Mathematica a SageMath, čo je štýl výpočtového rozhrania, ktorý vznikol s Mathematicou v 80. rokoch. Začiatkom roka 2018 záujem Jupyter predbehol popularitu rozhrania notebooku Mathematica.



Obr. 3.2: Jupyter notebook rozhranie

Záver

V práci sme popísali základné pojmy a vlastnosti pravdepodobnosti (Durrett, 2010; Renyi, 2007). Pozreli sme sa na niekoľko zaujímavých rozdelení, na ich charakteristické funkcie a aplikácie. Tiež sme implementovali algoritmy na výpočet ich charakteristických funkcií spolu s ilustračnými príkladmi ich použitia do už existujúceho balíčka v softvéri R (Verzani, 2012; Gajdoš et al., 2021), čím sme ho rozšírili.

Hlavným cieľom však bolo oboznámenie sa s metódami numerickej inverzie charakteristickej funkcie, konkrétne s algoritmami využívajúcimi Gil-Pelaezove vzorce (Gil-Pelaez, 1951) a Fourierovú transformáciu (Witkovský, 2016; McLeod, 2014; Warr, 2014). Keďže doteraz výpočtový balík v softvéri R obsahoval iba algoritmus založený na Gil-Pelaezových vzorcov, rozšírili sme ho o ďalšie dva algoritmy využívajúce Fourierovú transformáciu. Jeden z nich je určený pre efektívny výpočet hodnôt pravdepodobnostnej funkcie a následne i distribučnej funkcie, či kvantilovej funkcie, avšak len pre diskrétna rozdelenia (resp. všeobecnejšie pre rozdelenia definované na zväzoch). Druhý algoritmus je možné aplikovať pri výpočte hodnôt uvedených funkcií pre (absolútne) spojitá rozdelenia pravdepodobnosti.

V určitých prípadoch môže byť výpočet numerickej inverziou (výpočtovo) náročnejší, a preto sme sa oboznamovali aj interpoláciami, ktoré slúžia na aproximáciu hodnôt funkcií v bodoch, v ktorých ich nepoznáme, pomocou niekoľkých známych hodnôt, čím je možné vyhnúť sa počítaniu veľkého množstva hodnôt metódami numerickej inverzie charakteristickej funkcie. Konkrétne sme sa zaoberali Barycentrickou interpoláciou (Berrut a Trefethen, 2004), ktorú sme tiež implementovali do nášho balíčka spolu s algoritmami, ktoré súvisia s Chebyshevovými bodmi (Mason a Handscomb, 2003), vylepšujúcimi jej vlastnosti pri použití v praxi.

Výsledkom našej práce je teda rozšírený výpočtový balíček *CharFunToolsR*, ktorý sa môže využívať na riešenie štatistických úloh, kde poznáme alebo vieme odvodiť charakteristické funkcie rozdelení pravdepodobnosti náhodných

veličín. Tento náš balíček je naprogramovaný v jazyku R a je detailnejšie popísaný v samotnej práci vrátane ilustračných príkladov použitia jeho súčastí. Ako doplnok ku *CharFunToolR*, sú vybrané príklady spracované aj v interaktívnom prostredí Jupyter notebook.

V úplnom závere zhrnieme možné smery budúceho výskumu súvisiace s problematikou numerickej inverzie charakteristických funkcií.

- Hľadanie nových aplikácií v praxi, kde by bolo možné využiť metódy numerickej inverzie charakteristickej funkcie pre efektívne výpočty pravdepodobností či kvantilov;
- Doplnenie balíka *CharFunToolR* o ďalšie pravdepodobnostné rozdelenia;
- Tvorba užívateľsky prijateľného rozhrania (webového apletu) pre prácu s *CharFunToolR*;
- Ďalšie zefektívnenie algoritmov pre numerickú inverziu (napr. využitím dvojitej exponenciálnej kvadratury);
- Rozšírenie metodológie numerickej inverzie charakteristickej funkcie na viac-rozmerné pravdepodobnostné rozdelenia.

Literatúra

- BERRUT, J.-P. – TREFETHEN, L. N., 2004. *Barycentric Lagrange Interpolation*. *SIAM Rev.*, 2004, 46, č. 3, s. 501–517. ISSN 0036-1445, 1095-7200.
- DURRETT, R., 2010. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-0-521-76539-8.
- GAJDOŠ, A. – LACOVÍČ, B. – WITKOVSKÝ, V., 2021. *CharFunToolR: The Characteristic Functions Package*. 2021.
- GERACI, M. – BORJA, M. C., 2018. *Notebook: The Laplace distribution*. *Significance*, 2018, 15, č. 5, s. 10–11. ISSN 1740-9713.
- GIL-PELAEZ, J., 1951. *Note on the Inversion Theorem*. *Biometrika*, 1951, 38, č. 3/4, s. 481. ISSN 00063444.
- JOHNSON, N. L. – KEMP, A. W. – KOTZ, S., 1992. *Univariate Discrete Distributions*. Wiley, 1992. 677 s. ISBN 978-0-471-54897-3.
- JOHNSON, N. L. – KOTZ, S. – BALAKRISHNAN, N., 1994. *Continuous univariate distributions*. Wiley series in probability and mathematical statistics, 2nd ed. vyd. New York: Wiley, 1994. ISBN 978-0-471-58495-7 978-0-471-58494-0.
- LEASK, K. L. – HAINES, L. M., 2014. *The Beta-Poisson Distribution in Wadley's Problem*. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 2014, 43, č. 23, s. 4962–4971. ISSN 0361-0926, 1532-415X.
- MASON, J. C. – HANDSCOMB, D. C., 2003. *Chebyshev polynomials*. Boca Raton, Fla: Chapman & Hall/CRC, 2003. ISBN 978-0-8493-0355-5.
- MCLEOD, K., 2014. *Fourfun: A New System for Automatic Computations Using Fourier Expansions*. *SIAM Undergraduate Research Online*, 2014, 7. ISSN 23277807.
- OOURA, T. – MORI, M., 1999. *A robust double exponential formula for Fourier-type integrals*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1999, 112, č. 1-2, s. 229–241. ISSN 03770427.
- PERKEL, J. M., 2018. *Why Jupyter is data scientists' computational notebook of choice*. *Nature*, 2018, 563. ISSN 563, 145-146.

- RENYI, A., 2007. *Probability Theory*. Illustrated edition. vyd. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2007. ISBN 978-0-486-45867-0.
- VERZANI, J., 2012. *Getting started with RStudio*. Sebastopol, Calif.: O'Reilly, 2012. ISBN 978-1-4493-0903-9.
- VU, T. N. – et al., 2016. *Beta-Poisson model for single-cell RNA-seq data analyses*. *Bioinformatics*, 2016, 32, č. 14, s. 2128–2135. ISSN 1367-4803, 1460-2059.
- WARR, R. L., 2014. *Numerical Approximation of Probability Mass Functions Via the Inverse Discrete Fourier Transform*. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2014, 16. ISSN 1387-5841, 1573-7713.
- WITKOVSKÝ, V., 2016. *Numerical inversion of a characteristic function: An alternative tool to form the probability distribution of output quantity in linear measurement models*. *ACTA IMEKO*, 2016, 5, č. 3, s. 32–44. ISSN 2221-870X.
- WITKOVSKÝ, V., 2018. *Exact distribution of selected multivariate test criteria by numerical inversion of their characteristic functions*. *arXiv:1801.02248 [stat]*, 2018.
- WITKOVSKÝ, V., 2019a. *CharFunTool - MATLAB repository of characteristic functions*. 2019a.
- WITKOVSKÝ, V., 2019b. *Computing the exact distribution of the Bartlett's test statistic by numerical inversion of its characteristic function*. *Journal of Applied Statistics*, 2019b, 47. ISSN 0266-4763, 1360-0532.
- WITKOVSKÝ, V. – WIMMER, G. – DUBY, T., 2017. *Computing the aggregate loss distribution based on numerical inversion of the compound empirical characteristic function of frequency and severity*. *arXiv:1701.08299 [q-fin, stat]*, 2017.