1) $\log_2 \sin 2x + \log_{\frac{1}{2}} \cos x = \frac{1}{2}$ $\quad \sin 2x > 0,\ \cos x > 0$

а) $\log_2 \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{1}{2}$

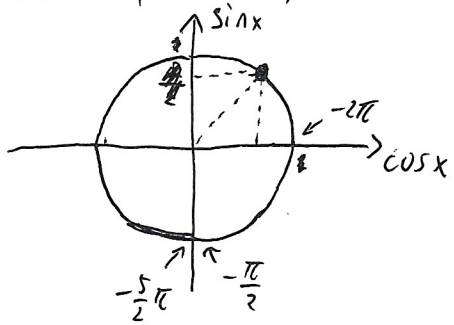
$$\begin{cases} \sin 2x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \log_2(2\sin x) = \log_2 \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z \\ x \in (2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k),\ k \in Z \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k),\ k \in Z \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

б)




$\left[-\frac{5}{2}\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{5}{2}\pi;\ -2\pi\right] \cup \left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$

с помощью триг. окружности отберём подходящие корни.

тогда $x = +\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$ $\quad \left(x = -\frac{7}{4}\pi \in \left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]\right.$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\quad$ б) $x = -\frac{7}{4}\pi$

---

2) $(tg^2 x - 1)\sqrt{13\cos x} = 0$ $\quad \cos x \geq 0$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ tg^2 x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

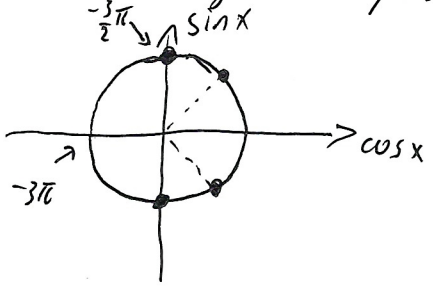
$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z \\ \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

б) с помощью триг. окружности отберём корни




тогда $x \in \left\{-\frac{3}{2}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{9}{4}\pi;\ -\frac{5}{2}\pi\right\}$

Ответ: $x \in \left\{-\frac{5}{2}\pi;\ -\frac{9}{4}\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{3}{2}\pi\right\}$

3) $\sqrt{x^3+4x^2+9} - 3 = x$

$\sqrt{x^3+4x^2+9} = 3+x$

$\begin{cases} 3+x \geq 0 \\ x^3+4x^2+9 = x^2+6x+9 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x^3+3x^2-6x=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+3x-6=0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

// $D = 9+24 = 33$ //

$0 > -3$

$\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$ ? $-3$

$0 < \sqrt{33}$ ? $-3 < 0$

$\sqrt{33} > -3$

$\frac{-3+\sqrt{33}}{2} > -3$

$\frac{-3-\sqrt{33}}{2}$ ? $-3$

$-\sqrt{33}$ ? $-3$ $\cdot(-1)$

$\sqrt{33}$ ? $3$ $\sqrt{33} \geq 3 \to -\sqrt{33} \leq -3$

$33$ ? $9$ $33 > 9$

$\frac{-3-\sqrt{33}}{2} < -3$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $x=0$; $x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

д) $0 \in \left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{5}\right]$

$-\frac{9}{2} < -3 \Rightarrow -\frac{9}{2} < \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

$\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$ ? $\frac{7}{5}$

$-3+\sqrt{33}$ ? $\frac{14}{5}$

$\sqrt{33}$ ? $\frac{29}{5}$

$825 < 841$ $\Rightarrow$ $\frac{7}{5} > \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

$\frac{-3+\sqrt{33}}{2} \in \left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{5}\right]$

Ответ: $x=0$; $x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

в) $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = 6$

$\sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = \sqrt{(x-9)-6\sqrt{x-9}+9} = |\sqrt{x-9}-3|$

$-\!\!\!''\!\!\!- \sqrt{x+6\sqrt{x-9}} = |\sqrt{x-9}+3|$

$|\sqrt{x-9}-3| + \sqrt{x-9} + 3 = 6$

$\begin{cases} \left[\begin{cases} \sqrt{x-9} \geq 3 \\ 2\sqrt{x-9} = 6 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} \sqrt{x-9} < 3 \\ 6 = 6 \end{cases} \right. \\ x \geq 9 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 18 \\ x < 18 \end{array}\right. \\ x \geq 9 \end{cases}$ $x \in [9;18]$

Ответ: $x = [9;18]$

г) $\sqrt{\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 1} = \cos x$

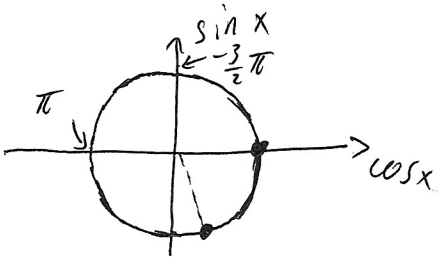
а) $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 2\sin^2 x + \cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = \cos^2 x \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x\right) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]; k \in Z \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k; k \in Z \\ x = \pi + 2\pi k; k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in Z \\ x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k; k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = 2\pi k; k \in Z$
$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in Z$

б)




с помощью триг. окр. отберем корни

тогда $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Ответ: $x = 0$
$x = -\frac{\pi}{3}$

11) $8^x - 7\cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0$.

а) $2^{3x} - 7\cdot 2^{2x} - 16\cdot 2^x + 112 = 0$

$2^x = t,\ t>0$

$t^3 - 7t^2 - 16t + 112 = 0$

$(t-7)(t^2-16)=0$

$(t-7)(t+4)(t-4)=0$

| | 1 | -7 | -16 | 112 |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 0 | -16 | 0 |
| 4 | 1 | 4 | 0 | |

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=7\\t=4\\t=-4\end{array}\right.\\ t>0\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}t=7\\t=4\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2^x=7\\2^x=4\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\log_2 7\\x=2=\log_2 4\end{array}\right.$$

Ответ: $x=2$
$x=\log_2 7$.

б) т.к. log – монотонная ↑ функция, то

$5<7<11 \Rightarrow \log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 11$

$2=\log_2 4 < \log_2 5\ (4<5)$

значит: $2 \notin [\log_2 5;\ \log_2 11]$

$\log_2 7 \in [\log_2 5;\ \log_2 11]$

Ответ: $x=\log_2 7$

---

2) $10^{\sin x} = 2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}$.

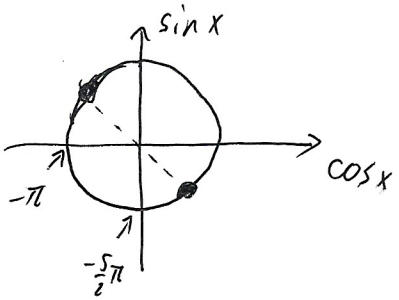
а) $\left[\begin{array}{l}2^{\sin x}=0\\5^{\sin x}=5^{-\cos x}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\\sin x=-\cos x\end{array}\right.$

$\sin x = -\cos x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=0\\-\sin x=0\end{cases}\\ tg\,x=-1\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\x=\frac{3}{4}\pi+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{3}{4}\pi+\pi k;\ k\in Z$

б) с помощью триг. окр. отберём корни.




тогда подходят $x=-\frac{5}{4}\pi$ и $x=-\frac{9}{4}\pi$

Ответ: $x=-\frac{5}{4}\pi$

$x=-\frac{9}{4}\pi$

4) $\log_3(x^2-2x)=1$

а) $\begin{cases} x^2-2x>0 \\ x^2-2x=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2x>0 \\ (x-3)(x+1)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Ответ: $x=-1$
$x=3$

б) $-1=\log_2\frac{1}{2}$ $\quad 3=\log_2 8$

т.к. $\log$ – монотонная ↑ ~~фун~~ функция, то

$\log_2 0.2 < \log_2\frac{1}{2} < \log_2 5$ $\quad (0.2<0.5<5)$ – $-1\in[\log_2 0.2;\log_2 5]$

$\log_2 5 < \log_2 8$ $\quad (\text{т.к. } 8>5)$ $\quad 3\notin[\log_2 0.2;\log_2 5]$ $\Big|\ x=-1$

Ответ: $x=-1$

---

5) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$

а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}=|\sqrt{x-1}+1|$

–//– $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}-1|$

$\begin{cases} x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ \sqrt{x-1}=1 \end{cases} \Big|_{x=2} \\ \begin{cases} x<2 \\ 2=2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$ $\quad x\in[1;2]$

Ответ: $x\in[1;2]$

б) $1.5\in[1;2]$ $\quad 1<1.5<2$

$2\sqrt{3}-3\ ?\ 1$

$2\sqrt{3}\ ?\ 4$ $\quad 3<4$

$\sqrt{3}\ ?\ 2$ $\quad 2\sqrt{3}-3<1$ $\Rightarrow 2\sqrt{3}-3\notin[1;2]$

$3\ ?\ 4$

Ответ: 1.5 – решение ур-я

$2\sqrt{3}-3$ – не решение ур-я.

в) $(49)^{\cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3} - x}$

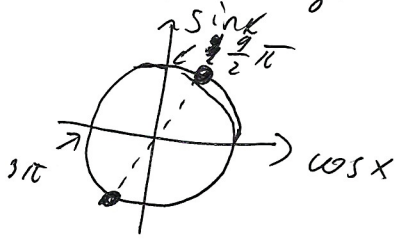
а) $7^{+2\sin|x|} = 7^{2\sqrt{3}\cos x}$

$\sin x = \sqrt{3}\cos x.$

$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ tg\, x = \sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in Z.$

б) с помощью т. окр. найдем корни




тогда $\left[\begin{array}{l} x = \frac{10}{3}\pi \\ x = \frac{13}{3}\pi \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{10}{3}\pi;\ x = \frac{13}{3}\pi$

---

6) $2\log_2^2|2\cos x| - 9\log_2|2\cos x| + 4 = 0$

а) $t = \log_2|2\cos x|$

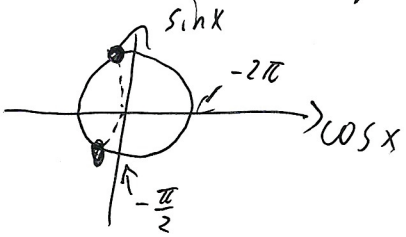
$2t^2 - 9t + 4 = 0$

$D = 81 - 32 = 49$

$t = \frac{9 \pm 7}{4}$ $\left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2|2\cos x| = 4 \\ \log_2|2\cos x| = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \cos x = 8 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k;\ k \in Z. \end{array}\right.$

Ответ: $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k;\ k \in Z$

б) с помощью т. окр найдем корни




тогда $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{3}\pi \\ x = -\frac{2}{3}\pi \end{array}\right.$

Ответ: $x = -\frac{4}{3}\pi$

$x = -\frac{2}{3}\pi$