Diskret Matematik og Algoritmer 2016

Ugeopgave 6

Frederik Kallestrup Mastratisi

Indhold

1 Del 1

1.1 (1)

Siden F kalder sig selv rekursivt 2 niveauer dybt, vælger jeg først at bevise 2 basis tilfælde; for F_2 og F_3:

$$F_2 : F_1 + F_0 \leq 2^2 \iff 1 + 0 \leq 4 \iff 1 \leq 4 \tag{1}$$

$$F_3 : F_2 + F_1 \leq 2^3 \iff 1 + 1 \leq 8 \iff 2 \leq 8 \tag{2}$$

Jeg går ud fra at $F_n \leq 2^n$ er sandt og ser på $F_{n+1} \leq 2^{n+1}$:

$$F_{n+1} \leq 2^{n+1} \iff F_n + F_{n-1} \leq 2 \cdot 2^n \tag{3}$$

Siden at $F_n \geq F_{n-1}$, kan jeg bevise det overstående hvis jeg kan bevise dette:

$$F_n + F_n \leq 2 \cdot 2^n \iff 2 \cdot F_n \leq 2 \cdot 2^n \tag{4}$$

Jeg dividere nu med 2 på begge sider:

$$2 \cdot F_n \leq 2 \cdot 2^n \iff F_n \leq 2^n \tag{5}$$

Hvilket giver mig et udtryk som jeg må gå ud fra er sandt. QED.

1.2 (2)

Siden F kalder sig selv rekursivt 2 niveauer dybt, vælger jeg først at bevise 2 basis tilfælde; for F_2 og F_3:

$$F_6 : F_5 + F_4 \geq (3/2)^{6-1} \iff 8 \geq (\sim 7,6) \tag{6}$$

$$F_7 : F_6 + F_5 \geq (3/2)^{7-1} \iff 13 \geq (\sim 11,4) \tag{7}$$

Jeg går ud fra at $F_n \geq (3/2)^{n-1}$ er sandt og ser på $F_{n+1} \geq (3/2)^{n-1+1}$, hvilket kan omskrives, ved hjælp af følgende udtryk, til det næste følgende udtryk:

$$ab = a + a(b-1) \tag{8}$$

$$F_{n+1} \geq (3/2)^{n-1+1} \iff F_n + F_{n-1} \geq (3/2)^{n-1} \cdot (3/2) \iff \tag{9}$$

$$F_n + F_{n-1} \geq (3/2)^{n-1} + (3/2)^{n-1} \cdot (3/2 - 1) \iff F_n + F_{n-1} \geq (3/2)^{n-1} + (3/2)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \tag{10}$$

Ud fra min antagelse ved jeg at udtrykket er sandt hvis man kun ser på de venstre led. Jeg skal altså kun bevise udtrykket også må gælde for de højre led:

$$F_{n-1} \geq (3/2)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \iff 2 \cdot F_{n-1} \geq (3/2)^{n-1} \quad (11)$$

Siden at $F_n \geq F_{n-1}$, gælder det også at ($F_{n-1} \neq 0$):

$$F_{n-1} + F_{n-1} \geq F_{n-1} + F_{n-2} \iff 2 \cdot F_{n-1} \geq F_n \quad (12)$$

Dette gør at jeg kan skrive følgende udtryk, som må være sandt:

$$2 \cdot F_{n-1} \geq F_n \geq (3/2)^{n-1} \quad (13)$$

Som beviser (11) og derfor også (10). QED.

1.3 (3)

I del-opgave (1) og (2) blev det bevist at F_n altid ligger mellem 2^n og $(3/2)^{n-1}$ for $n \geq 6$

Jeg tager nu en arbitær logaritme til de 2 udtryk

$$log_a(2^n) = k_1 \cdot n \quad (14)$$

$$log_a((3/2)^{n-1}) = k_2 \cdot (n-1) = k_2 \cdot n - k_2 \quad (15)$$

$log(F_n)$ må ligge mellem $k_1 \cdot n$ og $k_2 \cdot n - k_2$ for $n \geq 6$.

Hvilket er det samme som at sige at $log(F_n)$ er $\Theta(n)$.

2 Del 2

2.1 (1)

MUL tjekker om a er et multiplum af b, og retunere sand hvis det er således og falsk i andre tilfælde.

```
MUL(20, 10)
   0 --> y = 0 | x = 20
   1 --> y = 1 | x = 10
   2 --> y = 2 | x = 00
      --> true

MUL(6, 4)
   0 --> y = 0 | x = 6
   1 --> y = 1 | x = 2
      --> false
```

```
MUL(120, 50)
   0 --> y = 0 | x = 120
   1 --> y = 1 | x = 70
   2 --> y = 2 | x = 20
      --> false
```

2.2 (2)

Løkkensinvariant ser således ud: $a = x_n + by_n$
Jeg bruger initialisering som mit basis tilfælde. I den er $x_0 = a$ og $y_0 = 0$, hvilket får ligningen til at se således ud

$$a = x_0 + by_0 = a + b \cdot 0 = a \tag{16}$$

Jeg kigger nu på $n + 1$ og variablerne x og y:

$$x_{n+1} = x_n - b \tag{17}$$

$$y_{n+1} = y_n + 1 \tag{18}$$

Jeg indsætter nu dette i ligningen og manipulerer udtrykket:

$$a = x_{n+1} + by_{n+1} = x_n - b + b \cdot (y_n + 1) = x_n + by_n + b - b = x_n + by_n \tag{19}$$

QED.

2.3 (3)

Hvis a er et multiplum af b, kan a beskrives således:

$$a = b \cdot n \tag{20}$$

Hvor n er et posetivt heltal. Hvis man kigger på x, som er defineret som a i initialiseringsfasen, kan man se at for hver gennemgang i while-lykken, kan man substituerer n med $n - 1$.

Siden n er et heltal som er posetivt, og der hele tiden bliver trukket 1 fra, betyder det at x på et tidspunkt vil ramme nul, så længe lykkebetingelsen tillader det.
Spørgsmålet er så om (a) lykkebetingelsen tillader dette, og (b) at lykken terminere når $x = 0$

(b) er let at bevise, da lykkebetingelsen i det tilfælde vil se således ud: $0 \geq b$, hvilket altid vil være et falsk udtryk, da b er et posetivt heltal. Lykken vil altså terminere når $x = 0$

(a) kan bevises, hvis det kan bevises at x ikke tager værdierne]0;b[, og at lykken derfor ikke bliver stoppet inden $x = 0$.
Sagt på en anden måde, der er ingen rest tilbage når man dividerer x med b. Dette er trivielt at bevise da x er et multiplum af b, da jeg i dette tilfælde går ud fra at a er et multiplum af b.

Hvis a ikke er et multiplum af b, kan a beskrives således:

$$a = b \cdot n + (k \mod b) = x_0 \tag{21}$$

hvor $(k \mod b) \neq 0$. Lige gyldig hvilken n man vælger for x_n kan x_n ikke give nul. Hvilket betyder at MUL kun kan retunere false.