João Filipe Silva de Almeida, Número: 2020144466 - LEI

Análise Matemática 2 / Matemática Computacional

Docente: Arménio António da Silva Correia

Coimbra, 1 Julho de 2021

Resolução Exame A+B 2014/2015:

Equações não Lineares	
	Fórmula do erro para o Método da Bissecção
	$\|x - x_n\| \le \frac{b-a}{2^n}$
	Método do Ponto Fixo
	$x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0,1,2,\ldots$
	Método de Newton-Raphson
$f(x) = 0$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0,1,2,\ldots$

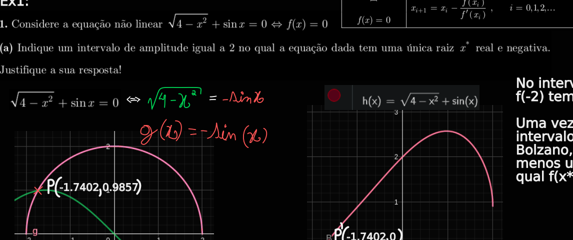
Ex1:

1. Considere a equação não linear $\sqrt{4-x^2} + \sin x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

(a) Indique um intervalo de amplitude igual a 2 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e negativa. Justifique a sua resposta!

$\sqrt{4-x^2} + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = -\sin x$

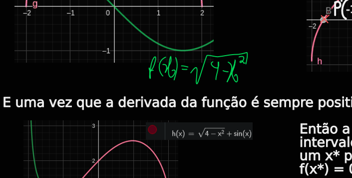
$g(x) = -\sin(x)$



No intervalo]-2,0[, como f(-2) tem sinal contrário de f(0):

Uma vez que a função é contínua no intervalo]-2,0[, pelo Teorema de Bolzano, sabemos que existe pelo menos um x* pertencente a]-2,0[no qual f(x*) = 0

E uma vez que a derivada da função é sempre positiva no intervalo]-2,0[

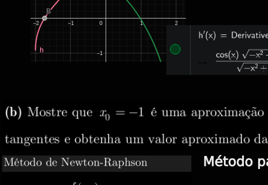


Então a função é estritamente crescente neste intervalo, portanto sabemos que exestirá apenas um x* pertencente ao intervalo que satisfará f(x*) = 0.

(b) Mostre que $x_0 = -1$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes e obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração.

Método de Newton-Raphson

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0,1,2,\ldots$



Método para aproximar da raíz de uma função atravéz da derivada:

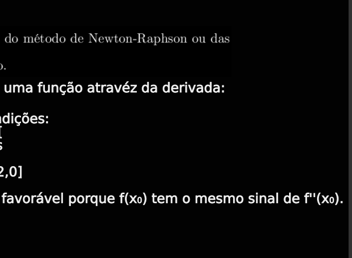
A função satisfaz as seguintes condições:
1) f, f' e f'' são contínuas em]-2,0[
2) f(-2) e f(0) têm sinais contrários
3) f'(x) é deferente de 0 em [-2,0]
4) f''(x) tem sinal constante em [-2,0]

x_0 = -1 é uma aproximação inicial favorável porque $f(x_0)$ tem o mesmo sinal de $f''(x_0)$.

2. A figura 1 representa um "Cravo do 25 de Abril". As linhas que contornam e definem a forma do recetáculo/cálice são definidas pelo gráfico das funções:

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}, \quad g(x) = -\sqrt{4-x^2}$$

$$h(x) = \sin(x) \text{ e } j(x) = -\sin(x).$$



(a) Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função g.

Grau 2, precisamos de 3 pontos. P1(-2,0), P2(0,-2), P3(2,0)

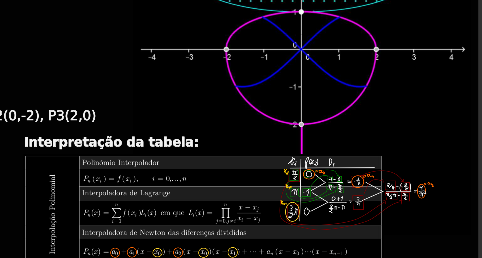
x	$f(x)$		
-2	0	$\frac{-2-0}{0-(-2)} = -1$	$\frac{1-(-1)}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$
0	-2	$\frac{0-(-2)}{2-0} = 1$	
2	0		

$P_n(x) = 0 - 1(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)(x) \Leftrightarrow$

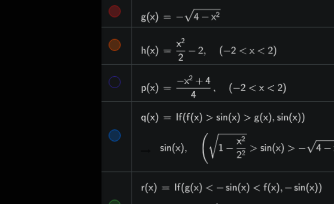
$\Leftrightarrow P_n(x) = \frac{x^2}{2} - 2$

Interpretação da tabela:

Interpolação Polinomial	
	Polinómio Interpolador
	$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,\ldots,n$
	Interpoladora de Lagrange
	$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ em que $L_i(x) = \prod_{j=0, j\ne i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$
	Interpoladora de Newton das diferenças divididas
$f(x) \approx P_n(x)$	$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$ em que $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f[x_0,x_1]$, $a_2 = f[x_0,x_1,x_2]$, ..., $a_n = f[x_0,\cdots,x_n]$



(b) Sem deduzir a expressão dos polinómios interpoladores, redesenhe a figura 1, aproximando as funções h e j por uma interpolação linear e as outras funções por uma interpolação quadrática.



(c) Utilize a regra de Simpson simples para determinar um valor aproximado para $I = \int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\,dx$ e interprete o resultado obtido.

Interpretação da tabela:

Integração Numérica	
	Regra dos Trapézios
	$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$
	$\|E_T(f)\| \le \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} \|f''(x)\|$
	Regra de Simpson
	$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$
$\int_a^b f(x)dx \approx$	$\|E_S(f)\| \le \frac{b-a}{180} h^4 M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} \|f^{(4)}(x)\|$

Aproximação de Integrais:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}} - \left(-\sqrt{4-x^2}\right) dx$$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{3}$

SIMPSON $\frac{2}{3}(0 + 4 \times 3 + 0) = 8$

Representara a área total da figuara delimitada pelas funções f(x) e g(x)

(d) Aplicando as regras de Simpson e a dos trapézios com $n = 2$, qual delas lhe permite obter uma melhor aproximação à medida de área (πab) da região limitada por uma elipse de semieixos a e b? Justifique.

Referencia:
https://www.wikihow.com/Calculate-the-Area-of-an-Ellipse
https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

Equação de uma elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Com a e b arbitrários, temos a seguinte elipse:

$\boxed{\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1} \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4^2}}\,dx$

Dá-nos apenas a parte de cima da elipse, é por isso que que temos que multiplicar por 2, para obter a área da elipse completa, uma vez que é simétrica

Area exata = pi * a * b = pi * 4 * 1 ≈ 12,566

Comparando os métodos de Simpson e dos Trapézios:

$$\int_{-4}^{4} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4^2}}\,dx \times 2$$

Simpson = 5,97 * 2 = 11,94

Trapezios = 4 * 2 = 8

Sites usados para o cálculo:
Simpson - https://www.geogebra.org/m/StQSkqvD
Trapezios - https://www.geogebra.org/m/N3thppDX

Conclui-se que a regra dos trapézios é bastante mais rigorosa

3. Considere o problema de valor inicial $y' + ty^2 = 0$, $y(1) = 2$, $t \in [1,2]$

(a) Mostre que $y(t) = 2t^{-2}$ é a solução exata do problema.

$$y' + ty^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} + ty^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = -t\,dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int -t\,dt \Leftrightarrow$$

primitivação...

$$\Leftrightarrow -y^{-1} = -\frac{1}{2}t^2 + C \Leftrightarrow y^{-1} = \frac{1}{2}t^2 + C \Leftrightarrow y = 2t^{-2} + C$$

Descubrir C:

$y(1) = 2 \longrightarrow 2 = 2 \times 1^{-2} + C \longrightarrow 2 = 2 + C \longrightarrow C = 0$

Mostrou-se que y(t) = 2t^(-2) é solução exata do problema

(b) Complete a tabela seguinte e interprete os resultados da mesma.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\|y(t_i) - y_i\|$ Euler	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK2	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK4
0	1	2	2	2	2	0	0	0
1	1,5	8/9	0	1	0,8589	0.8889	1/9	0.0299
2	2	0.5	0	0,462	0.4916	0.5	0.0938	0,0084

(c) Complete as funções e acrescente comentários para explicar o algoritmo/regras que lhes estão associadas.

```
function y = NEuler(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=zeros(1,n+1);      colunas / linhas
y(1)=y0;
for i=1:n
    y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
end
```

```
function y = NRK2(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;
for i=1:n,   (passo a 1 de 1 a n)
    k1=h*f(t(i),y(i));
    k2=h*f(t(i+1),y(i)+k1);
    y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;
end
```

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 25$;

$g(x,y) := \begin{vmatrix} \text{se} & x^2 + y^2 \le 25 \\ \text{então} & z = f(x,y) \end{vmatrix}$;

$h(x,y) := \begin{vmatrix} \text{se} & 9 < x^2 + y^2 \le 25 \\ \text{então} & z = \sqrt{-f(x,y)} \end{vmatrix}$

$j(x,y) := \begin{vmatrix} \text{se} & x^2 + y^2 \le 9 \\ \text{então} & z = \frac{4}{3}\sqrt{f(x,y) + 25} \end{vmatrix}$;

$l(x,y) = \begin{cases} h(x,y) \\ j(x,y) \end{cases}$

[1.0] **(a)** Determine e represente graficamente o domínio das funções g, h, j e l.

a) $f(x)$, domínio $\mathbb{R}^2$

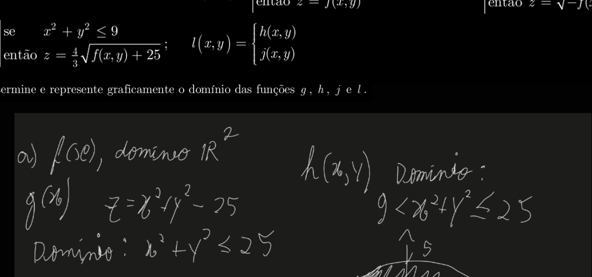
$g(x)$ $z = x^2 + y^2 - 25$

Domínio: $x^2 + y^2 \le 25$

$h(x,y)$ Domínio: $9 < x^2 + y^2 \le 25$

j Domínio $x^2 + y^2 \le 3^2$

l: Domínio: $x^2 + y^2 \le 5^2$ reunião dos 2



[1.5] **(b)** Defina a função l em forma de algoritmo e trace um esboço do seu gráfico.

$$l(x,y) = \begin{vmatrix} \text{se } 9 < x^2 + y^2 \le 5^2 \\ \text{então } z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} \\ \text{se } x^2 + y^2 \le 3^2 \\ \text{então } z = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \end{vmatrix}$$

(c) Resolva apenas **duas** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) $P(0,0)$ é um ponto de acumulação do domínio das funções e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} j(x,y)$.

Pontos de acumulação neste caso são pontos que pertencem ao domíneo, ou o valor para o qual o limite da fronteira do domíneo tende.

Neste caso o ponto P(0,0) pertence a ambos os domíneos das funções mas é falsa pois os limites diferem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -25 \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} j(x,y) = 0$$

ii) $m_t = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(0,\Delta y) - g(0,0)}{\Delta y} = 0$ e o vetor $[0, y, -25]$ definem o declive e a equação vetorial da reta tangente à curva de intersecção da superfície de equação $z = g(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto de coordenadas $P(0,0,-25)$.

Função de duas variáveis	
	Derivadas parciais
	$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$; $\quad f_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$
	Gradiente
	$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j}$
	Derivada Direccional
	$f'_{\vec{u}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$

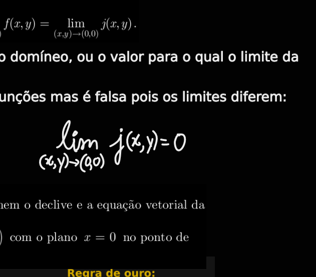
Regra de ouro:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ Tratas todas as outras variáveis sem ser y como constantes e derivas normalmente

$\frac{\partial g}{\partial f} = x^{2\,\prime} + y^{2\,\prime} + 25' = 2y$

tratando x como uma constante

Gráfico para auxilio à visualização (não rigoroso com as funções dadas)



Portanto, no Ponto P(0,0,-25)

y=0

$2y = 0$

O declive dá zero, portanto é uma reta horizontal, substituindo x e y por zero na função g(x,y), descobre-se que z = 25.

Portanto a reta obtida seráa mesma criada pelo vetor [0,y,-25]

A proposição é verdadeira.

iii) A função l é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$.

Objetivo: provar que g(x,y) é contínua em r = 3.

$h(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \wedge x^2 + y^2 = 9$

$= \sqrt{16}$

$= 4$

$j(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2 - 25 + 25} \wedge x^2 + y^2 = 9$

$= \frac{4}{3}\sqrt{9} = 4$

$4 = 4$ ✓

5. A figura seguinte representa uma bolota do Vale do Côa, de densidade igual a 3, composto por duas partes:

- Calote esférica de raio $r = 5$ seccionada por um cone de raio $r = 3$ altura $h = 4$;
- Paraboloide de altura $h = 25$ e largura máxima de raio $r = 5$

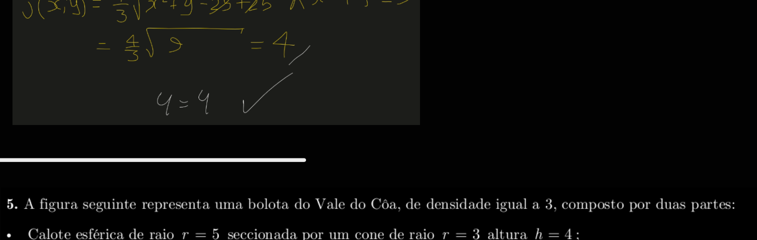
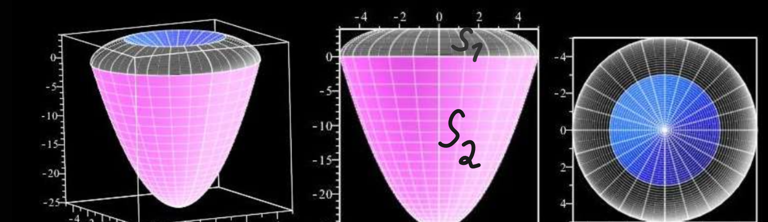


Figura 2 – Bolota do Vale do Côa

(a) Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \{(R, \theta, \varphi) : 0 \le R \le 5 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \arctan(\frac{3}{4}) \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 25 \wedge x^2 + y^2 - 25 \le z \le 0\}$

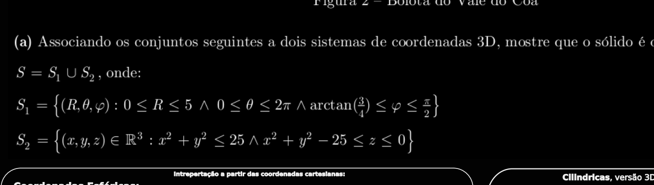


S1 será o sólido de cima, definido em coordenadas esféricas:
R é a distância à origem, será no máximo 5 e no minimo 0
Theta é o ângulo com a parte positiva do eixo dos x, dá a volta toda, portanto, varia entre 0 e 2*pi

Phi é o ângulo com a parte positiva do eixo dos z, vai variar entre 2/pi e arctg(3/4):

SOH CAH TOA

$tg(?) = \frac{\text{oposto}}{\text{adjacente}} \Leftrightarrow ? = \text{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)$

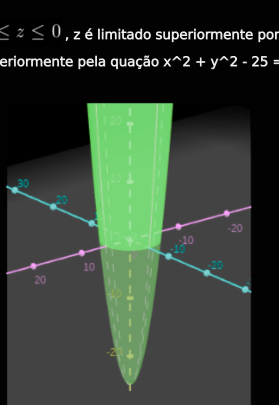


S2 será o sólido de baixo, definido em coordenadas cilindricas:

$x^2 + y^2 \le 25$, nos eixos x e y (vista de cima), vemos circulos. quando z=0, o seu raio é 5 (5^2 = 25)

$x^2 + y^2 - 25 \le z \le 0$, z é limitado superiormente por um plano z = 0.

e z é limitado inferiormente pela quação x^2 + y^2 - 25 = z, criando o parabuloide:



Site usado: https://www.geogebra.org/3d?lang=en

(b) Calcule o volume e a massa do sólido.

Sistema de Coordenadas	
	Polares
	$T_P = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}; \quad J = \rho$
	Cilíndricas
	$T_C = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}; \quad J = \rho$
	Esféricas
	$T_E = \begin{cases} x = R\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}; \quad J = -R^2\,\text{sen}\,\varphi$

$z = x^2 + y^2 - 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\,\text{sen}\,\theta)^2 - 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = \rho^2 (\cos\theta)^2 + \rho^2 (\text{sen}\,\theta)^2 - 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = \rho^2(1) - 25 \Leftrightarrow z = \boxed{\rho^2 - 25}$

Conversão para coordenadas cilindricas

$$V_{S_2} = \int_x\int_y\int_z 1\,dz\,dy\,dz \stackrel{!}{=} \int_0^5\int_0^{2\pi}\int_{\rho^2-25}^{0} \rho\,dz\,d\theta\,d\rho =$$

$$= \int_0^5\int_0^{2\pi} -\rho^3 + 25\rho\,d\theta\,d\rho = \int_0^5 -\rho^3 + 25\rho\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^5 -\rho^3 + 25\rho\,d\rho = 2\pi \cdot \frac{625}{4} = \frac{625\pi}{2}$$

$$\int_{\rho^2-25}^{0} \rho\,dz = \rho[z]_{\rho^2-25}^{0} = \rho(0 - (\rho^2 - 25)) = -\rho^3 + 25\rho$$

$$\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

$$\int_0^5 -\rho^3 + 25\rho\,d\rho = \int_0^5 -\rho^3\,d\rho + \int_0^5 25\rho\,d\rho =$$

$$= -\frac{1}{4}[\rho^4]_0^5 + \frac{25}{2}\times[\rho^2]_0^5 = -\frac{1}{4}\times 5^4 + \frac{25}{2}\times 5^2 =$$

$$= \frac{625}{4}$$

Conversão para coordenadas esféricas

$V_{S_1} = \int_x\int_y\int_z dz\,dy\,dz \stackrel{!}{=} \ldots$

$V_{sólido} = V_{S_1} + V_{S_2}$

Sabendo que a densidade do sólido é 3, e tendo que: $\boxed{m = d.V}$

m -> massa
d -> densidade
V -> volume

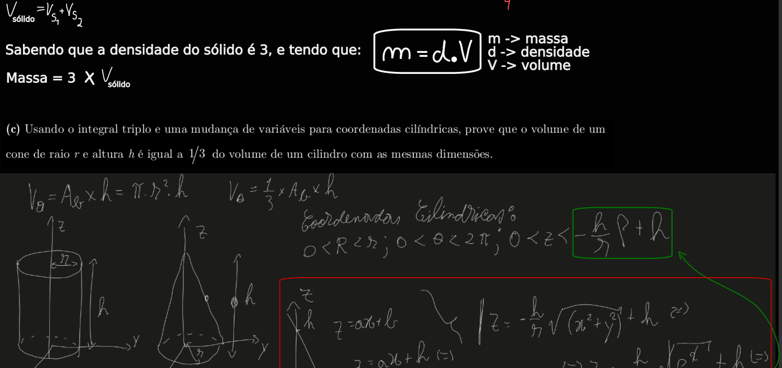
Massa = 3 X $V_{sólido}$

(c) Usando o integral triplo e uma mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas, prove que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $1/3$ do volume de um cilindro com as mesmas dimensões.

$V_{\square} = A_b \times h = \pi . r^2 . h \qquad V_{\triangle} = \frac{1}{3} \times A_b \times h$

Coordenadas Cilindricas:

$0 < R < r;\ 0 < \theta < 2\pi;\ 0 < z < \boxed{-\frac{h}{r}\rho + h}$



$z = ax + b$

$z = ax + h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -\frac{h}{r}(x+y) + h$

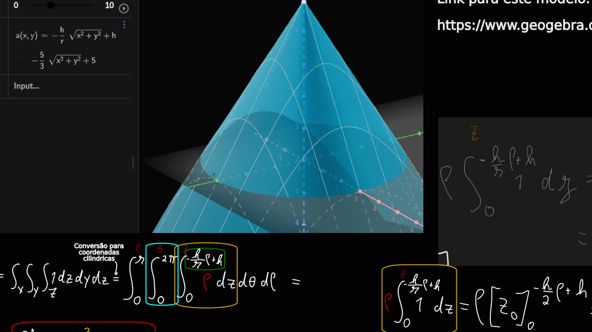
declive $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\quad d = \frac{0-h}{r-0} = -\frac{h}{r}$ $\quad y = ax + b$

$z = -\frac{h}{r}\sqrt{(x^2+y^2)} + h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -\frac{h}{r}\sqrt{\rho^2} + h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \boxed{-\frac{h}{r}\rho + h}$

Dedução da função que delimita o cone superiormente e conversão para cilindricas:



Link para este modelo:

https://www.geogebra.org/3d/uuagukcz

$$\rho\int_0^{-\frac{h}{r}\rho + h} 1\,dz = \rho[z]_0^{-\frac{h}{r}\rho + h} = -\frac{h\rho^2}{r} + h\rho$$

Conversão para coordenadas cilindricas

$$V_{cone} = \int_x\int_y\int_z 1\,dz\,dy\,dz \stackrel{!}{=} \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{-\frac{h}{r}\rho + h} \rho\,dz\,d\theta\,d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^r -\frac{h\rho^2}{r} + h\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi . \frac{hr^2}{6} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

$$\rho\int_0^{-\frac{h}{r}\rho + h} 1\,dz = \rho[z_0]_0^{-\frac{h}{2}\rho + h} = -\frac{h\rho^2}{r} + h\rho$$

$$\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

$$\int_0^r -\frac{h\rho^2}{r}\,d\rho + \int_0^r h\rho\,d\rho = -\frac{h}{r}\times\frac{1}{3}\times[\rho^3]_0^r + h\frac{1}{2}[\rho^2]_0^r =$$

$$= -\frac{h}{3r}\times r^3 + \frac{h}{2}\times r^2 =$$

$$= -\frac{hr^2}{3} + \frac{hr^2}{2} = -\frac{2hr^2}{6} + \frac{3hr^2}{6} =$$

$$= \frac{hr^2}{6}$$