EXAME - TESTE B » Data: 15/06/2015 Código da prova: **1506201502**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2H30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 25\,; \qquad g(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2+y^2 \le 25 \\ \text{então } z = f(x,y) \end{array} \right. ; \qquad h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad 9 < x^2+y^2 \le 25 \\ \text{então } z = \sqrt{-f(x,y)} \end{array} \right.$$

$$j(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2+y^2 \le 9 \\ \text{então } z = \frac{4}{3}\sqrt{f(x,y)+25} \end{array} \right. ; \qquad l(x,y) = \begin{cases} h(x,y) \\ j(x,y) \end{cases}$$

[1.5] **(a)** Determine e represente graficamente o domínio das funções g, h, j e l.

A fronteira do domínio das funções coincide com uma das suas curvas de nível? Justifique.

[2.5] **(b)** Defina a função l em forma de algoritmo, trace um esboço do seu gráfico e identifique as superfícies que a compõem.

[3.0] **(c)** Resolva apenas **<u>três</u>** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) $P(0,0)$ é um ponto de acumulação do domínio das funções e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} j(x,y)$.

ii) $m_t = \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{g(0,\Delta y) - g(0,0)}{\Delta y} = 0$ e o vetor $[0, y, -25]$ definem o declive e a equação vetorial da reta tangente à curva de intersecção da superfície de equação $z = g(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto de coordenadas $P(0,0,-25)$.

iii) A função l é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

iv) As funções f, g e j têm um máximo absoluto em $(0,0)$ e a função l não tem extremos.

v) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função g

```
M:=(x, y)->piecewise(x^2+y^2 <= 25, 25-x^2-y^2, undefined)
```

vi) A conicidade do tronco de cone limitado pela superfície cónica de equação $z = j(x,y)$ se $x^2 + y^2 \ge \frac{9}{4}$ é igual a $4/3$.

Sugestão: A conicidade é a relação $(D-d):l$

Figura 1 – Tronco de cone

A conicidade é indicada paralelamente ao eixo e o seu valor pode ser calculado das seguintes maneiras:

$$k = \frac{l}{D-d} = \frac{100}{p\%} = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{\alpha}{2};\quad p\% = 100\frac{D-d}{l} = \frac{100}{k} = 200\tan\tfrac{\alpha}{2};\quad \tfrac{\alpha}{2} = \arctan\tfrac{p\%}{200} = \operatorname{arccotan}(2k)$$

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>três</u>**

i) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dada por $T = \sqrt{f(x,y)+25}$, as taxas de variação máxima e mínima da temperatura no ponto $P\left(-1,-1\right)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{w} = \langle 2,2 \rangle$ e $\vec{\mathbf{v}} = \langle -2,-2 \rangle$ respetivamente? Justifique a sua resposta.

ii) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dado por $V = f(x,y)$, utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença do potencial entre os pontos $(-1,-1)$ e $(-1.22,-1.22)$.

iii) Mostre que se $z = f(x,y)$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ e $x = \rho\cos\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = 0$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = g(x,y)$, no ponto $P\left(0,0,-25\right)$. Represente a superfície e o plano tangente.

v) A rotina seguinte, implementada em Maple, traduz corretamente a avaliação se uma função é harmónica, isto é, se satisfaz a equação de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$? Justifique.

```
isHarmonica:= proc(f)
   if diff(f, x, x)= - diff(f, y)
   then printf("A função é harmónica\n")
   else printf("A função não é harmónica\n")
   end if
end proc;
```

2. A figura seguinte representa uma bolota do Vale do Côa, de densidade igual a 3, composto por duas partes:

- Calote esférica de raio $r = 5$ seccionada por um cone de raio $r = 3$ altura $h = 4$;
- Paraboloide de altura $h = 25$ e largura máxima de raio $r = 5$

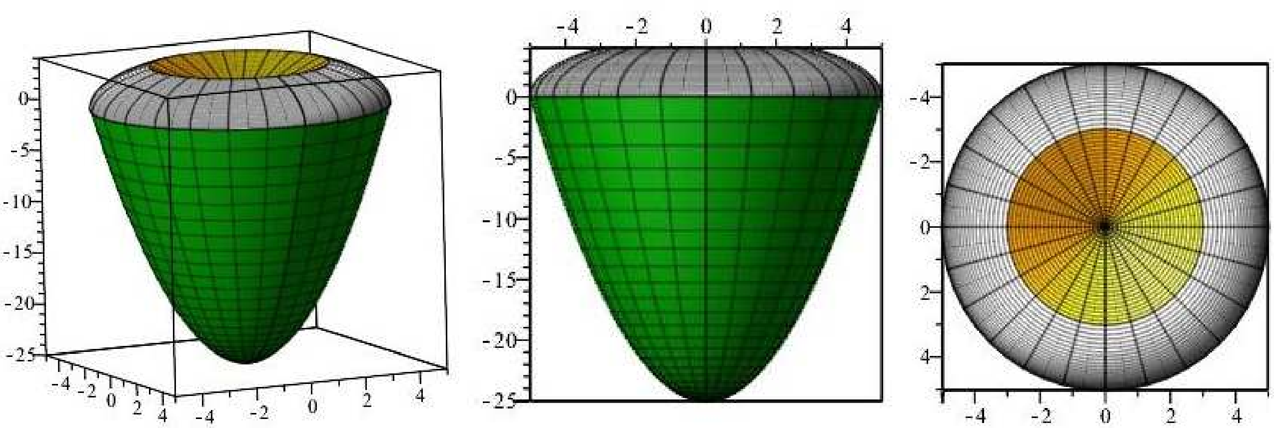

Figura 2 – Bolota do Vale do Côa

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq 5 \ \wedge\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \arctan(\frac{3}{4}) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 25 \wedge x^2 + y^2 - 25 \leq z \leq 0\right\}$

[1.0] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_2? Justifique.

```
> addcoords(MyCylindrical,[z,r,theta],[r*cos(theta),r*sin(theta),z])
> plot3d(r^2-25,r=0..5,theta=0..2*Pi,coords=MyCylindrical)
```

[3.0] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **<u>três</u>**

i) Usando o integral triplo e uma mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas, prove que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $1/3$ do volume de um cilindro com as mesmas dimensões.

ii) Mostre que $A(S) = \frac{\pi}{6}(101\sqrt{101} - 1)$ é a medida de área da superfície parabólica que limita uma parte do sólido – bolota do Vale do Côa.

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual ao da bolota da figura 2 é definido pela expressão seguinte? Justifique a sua resposta.

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2}\right) \vee \left(x^2 + y^2 \leq 25 \wedge x^2 + y^2 - 25 \leq z \leq 0\right)\right\}$

iv) Complete a função seguinte e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
> Esfericas2Cartesianas :=proc(r, theta, phi)
    local x, y, z;
    if evalf(                              )
    then
        x :=                    ;
        y :=                    ;
        z :=                    ;
        return ([x, y, z]);
    else error "                              ";
    end if
    end proc
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não