EXAME DA ÉPOCA DE RECURSO » Data: 02/07/2015 Código da prova: **0207201501**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2H30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação não linear $x-1-\sin x = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$

[0.5] **(a)** A equação tem uma única raiz real no intervalo $[1,2]$? Justifique.

[1.5] **(b)** Mostre que $x_0 = 2$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes. Aplique o método uma vez e obtenha uma aproximação da raiz da equação.

2. A figura 1 representa um bacalhau. As linhas que contornam a figura são:

- Arcos de circunferência de raio 1/2;
- Parábolas de eixo vertical com vértice de abcissa 2;
- Segmentos de reta.

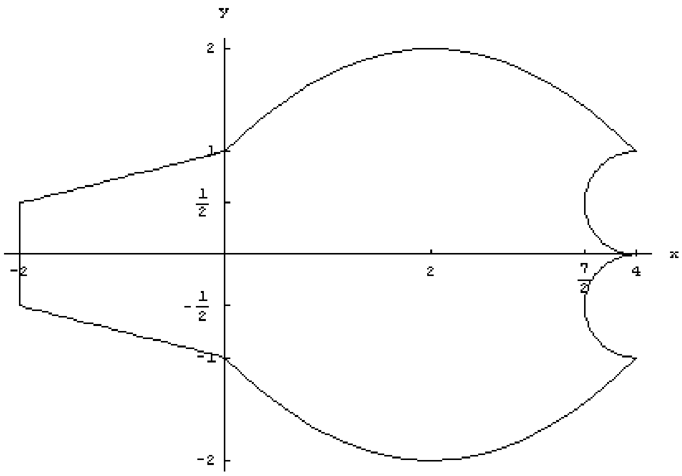

Figura 1

[1.5] **(a)** Usando Interpolação Polinomial, determine as equações da parábola e do segmento de reta que se intersectam no ponto de coordenadas (0, 1)

[1.5] **(b)** Aplicando a regra dos Trapézios e a regra Simpson, calcule o valor de I e interprete o resultado obtido. Sugestão: comece por transformar os integrais duplos em integrais simples.

$$I = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{\frac{1}{4}x+1} 1 dydx + \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-\frac{1}{4}(x-2)^2} 1 dydx$$

[1.0] **(c)** Qual das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1
    x=x+h;
    if ~mod(i,2)
      s=s+2*f(x);
    else
      s=s+4*f(x);
    end
end
S=h/3*(f(a)+s+f(b));
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)
      s=s+2*f(x);
    else
      s=s+4*f(x);
    end
end
S=h/3*f(a)+s+f(b);
```

3. Considere o problema de condição inicial $y' = ty^2, \quad y(-1) = 2, \quad t \in [-1,1]$

[1.5] **(a)** Sabendo que $y(t) = \frac{2}{2-t^2}$ é a solução exata do problema, complete a tabela seguinte e interprete os resultados da mesma.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ RK4
0	-1			2				0
1					0,6667		1	
2	1			0				1,0019

[1.5] **(b)** Complete a função seguinte e acrescente comentários para explicar o algoritmo.

```
function y = RK4(f,a,b,n,y0)
h=________________;
t=________________;
y=________________;
y(1)=_____________;
for i=___:___
    k1=________________________________; k2=________________________________;
    k3=________________________________; k4=________________________________;
    y(i+1)=___________________________;
end
```

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 25\,; \qquad g(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \le 25 \\ \text{então} \ z = f(x,y) \end{array} \right. ; \qquad h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad 9 < x^2 + y^2 \le 25 \\ \text{então} \ z = -\sqrt{f(x,y)} \end{array} \right.$$

$$j(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \le 9 \\ \text{então} \ z = -\frac{4}{3}\sqrt{25 - f(x,y)} \end{array} \right. ; \quad l(x,y) = \begin{cases} h(x,y) \\ j(x,y) \end{cases}$$

[1.0] **(a)** Determine e represente graficamente o domínio das funções g, h, j e l.

[1.5] **(b)** Defina a função l em forma de algoritmo e trace um esboço do seu gráfico.

[1.5] **(c)** Resolva apenas **<u>duas</u>** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) $P(0,0)$ é um ponto de acumulação do domínio das funções e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} j(x,y)$.

ii) $m_t = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(\Delta x, 0) - g(0,0)}{\Delta x} = 0$ e o vetor $\left[x, 0, 25\right]$ definem o declive e a equação vetorial da reta tangente à curva de intersecção da superfície de equação $z = g(x,y)$ com o plano $y = 0$ no ponto $P(0,0,25)$.

iii) A função l é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dada por $T = \sqrt{25 - f(x,y)}$, as taxas de variação máxima e mínima da temperatura no ponto $P(1,1)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{w} = \langle 1,1 \rangle$ e $\vec{\mathbf{v}} = \langle -1,-1 \rangle$ respetivamente? Justifique a sua resposta.

iii) Mostre que se $z = f(x,y)$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ e $x = \rho\cos\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$.

5. A figura seguinte representa uma bolota do Vale do Côa, de densidade igual a 2, composto por duas partes:

- Paraboloide de altura $h = 25$ e largura máxima de raio $r = 5$
- Calote esférica de raio $r = 5$ seccionada por um cone de raio $r = 3$ altura $h = 4$;

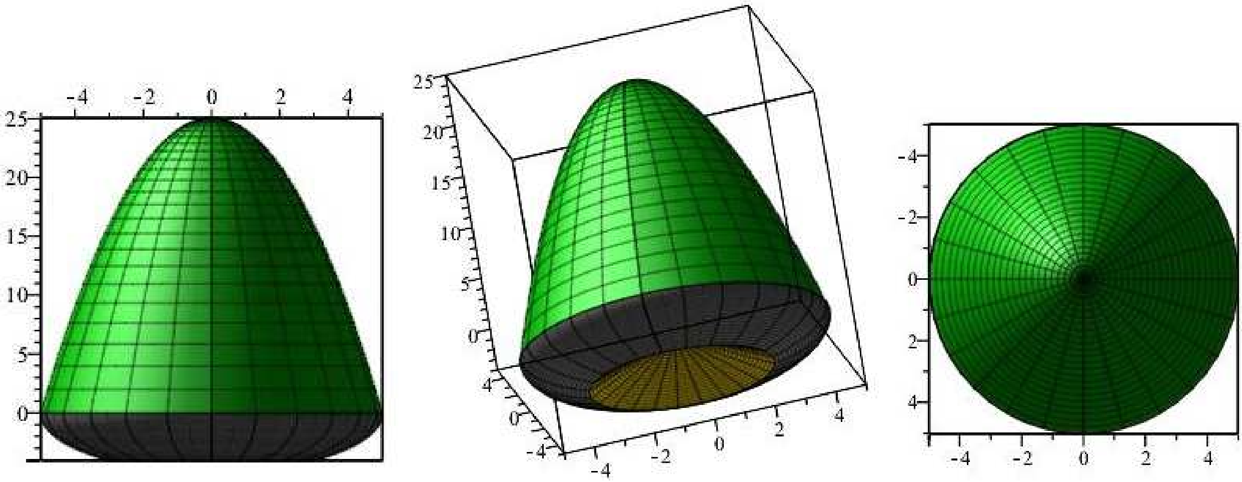

Figura 2 – Bolota do Vale do Côa

[1.5] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por

$S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 25 \wedge 0 \leq z \leq 25 - (x^2 + y^2)\right\}$

$S_2 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq 5 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi - \arctan(\frac{3}{4})\right\}$

[0.5] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_1? Justifique a sua resposta.

```
> addcoords(MyCylindrical,[z,r,theta],[r*cos(theta),r*sin(theta),z])
> plot3d(r^2-25,r=0..5,theta=0..2*Pi,coords=MyCylindrical)
```

[1.5] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(d)** Usando o integral triplo deduza as fórmulas do volume de um cone e de um cilindro de raio r e altura h.

[1.0] **(e)** Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := ________________________;
   y := ________________________;
   return [x, y];
end proc;
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não