TESTE INTERCALAR A » Data: 22/04/2015 — Código da prova: **2204201501**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2H00+30m

Nome do aluno: — **Número:**

1.

[1.0] **(a)** Utilizando um polinómio de Taylor de grau 2, determine um valor aproximado de $\sin\left(31^{\circ}+30^{\circ}\right)$ com 2 casas decimais e um majorante para o erro cometido.

Sugestão: $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}\left(x-a\right)^{i}$ e $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1},\quad c\in\left(a,x\right)$

[0.5] **(b)** Complete as instruções seguintes em GeoGebra que lhe permitiriam resolver a questão anterior.

```
f(x)= ____________        a= ____________
  n= ____________      x_0= ____________

  P(x)= PolinómioTaylor[______,______,______]
seno_x0= P(_____)
```

[0.5] **(c)** Qual das figuras seguintes ilustra corretamente os dados e resultados da alínea anterior? Justifique.

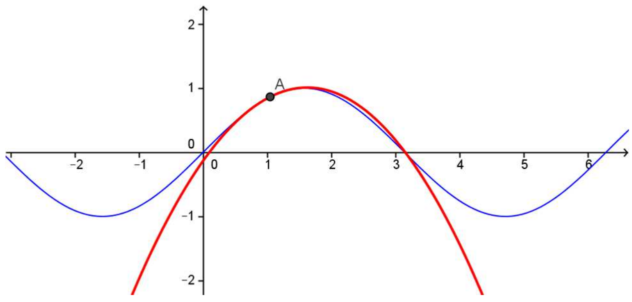

Figura 1

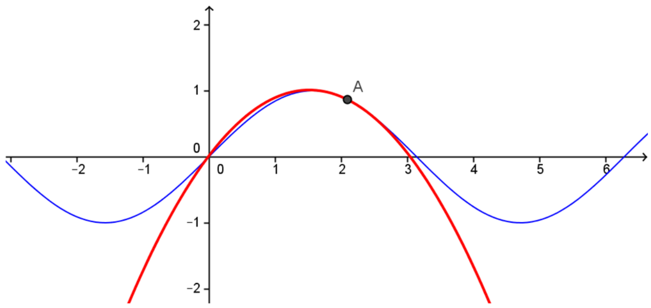

Figura 2

2. Considere a equação não linear $\sin x+\sqrt{4-x^{2}}=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

[1.0] **(a)** Recorrendo a dois processos, indique um intervalo de amplitude igual a 2 no qual a equação dada tem uma única raiz x^{*} real e negativa. Justifique a sua resposta!

[0.5] **(b)** Determine um valor aproximado da raiz localizada utilizando o método da bissecção duas vezes. Indique a precisão do resultado obtido.

[1.5] **(c)** O resultado obtido na alínea anterior é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes? Obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração. Represente a aproximação e estabeleça uma simulação gráfica do método das tangentes.

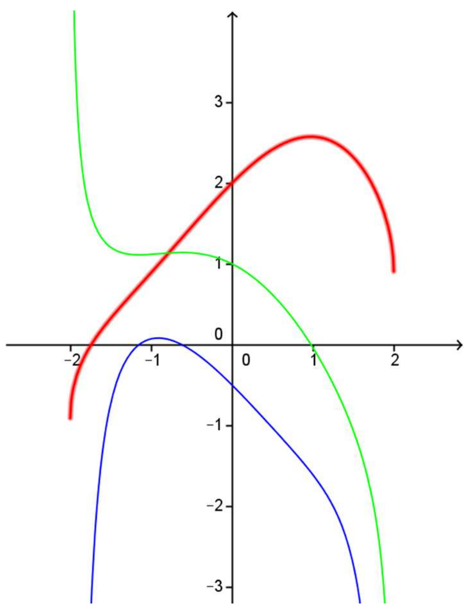

Figura 3 - Gráficos de f, f' e f''

[1.5] **(d)** Identifique e complete as funções seguintes associadas a dois métodos numéricos de resolução de equações não lineares.

```
function x = NR(f,df_dx,x0,kmax,tol)
 k=_________;
 x(k)=______;
 while(__________)
     x(k+1)=_________________________;
     if(_____________________________)
        return;
      end
     k=__________;
 end
```

```
function x = MB(f,a,b,kmax,tol)
k=______;
while(__________)
    x(k)=___________________________;
    if(_____________________________)
       return;
     end
     if(____________________________)
       ____________________________;
     else ___________________________;
     end
    k=__________;
end
```

3. A figura 4 representa um "Cravo do 25 de Abril". As linhas que contornam e definem a forma do recetáculo/cálice são definidas pelo gráfico das funções:

$f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{2^2}}$, $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

$h(x) = \sin(x)$ e $j(x) = -\sin(x)$.

[0.5] **(a)** Defina polinómio interpolador.

[2.0] **(b)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função f .

[1.0] **(c)** Sem deduzir a expressão dos polinómios interpoladores, redesenhe a figura 4, aproximando as funções h e j por uma interpolação linear e as outras funções por uma interpolação quadrática.

[2.5] **(d)** Utilize a regra de Simpson simples para determinar um valor aproximado para $I = \int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\,dx$ e interprete o resultado obtido.

[0.5] **(e)** Aplicando as regras de Simpson e a dos trapézios com $n = 2$, qual delas lhe permite obter uma melhor aproximação à medida de área $\left(\pi ab\right)$ da região limitada por uma elipse de semieixos a e b? Justifique.

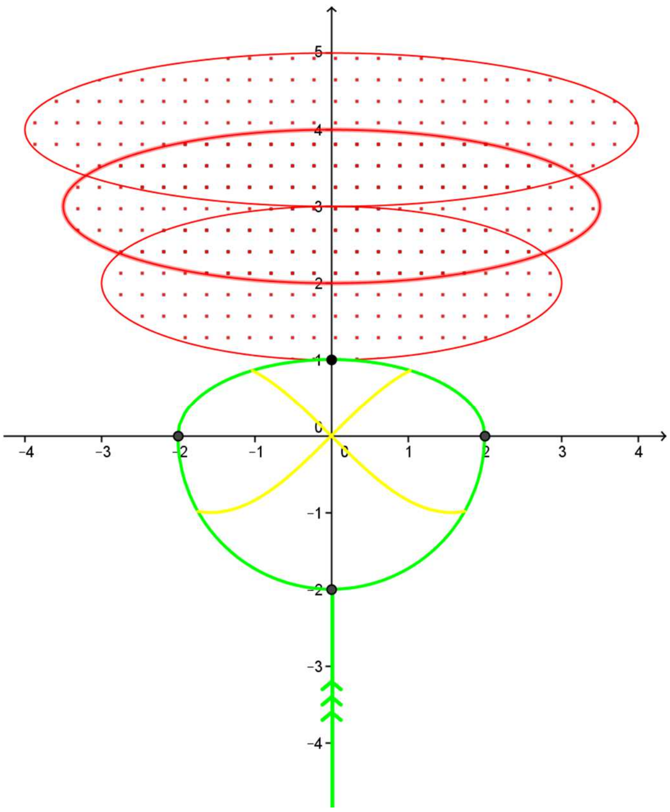

Figura 4 - Gráficos de f, g, h e j

[1.0] **(f)** Qual das funções seguintes traduz corretamente a regra de Simpson? Justifique a sua resposta.

```
function S = RSimpson_v1(f,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)==0
        s=s+2*f(x);
    else
        s=s+4*f(x);
    end
end
S=h/3*(f(a)+s+f(b));
```

```
function S = RSimpson_v2(f,a,b,h)
n=(b-a)/h;
x=a;
s=0;
for i=1:n-1,
    x=x+h;
    if mod(i,2)
        s=s+4*f(x);
    else
        s=s+2*f(x);
    end
end
S=h/3*f(a)+s+f(b);
```

4. Considere o problema de valor inicial $y' = -ty^2, \quad y(1) = 2, \quad t \in [1,2]$

[1.0] **(a)** Obtenha uma aproximação para $y(2)$ usando o método de Euler com um passo $h = 0.5$.

[1.5] **(b)** Mostre que $y(t) = \dfrac{2}{t^2}$ é a solução exata do problema.

Complete a tabela seguinte e interprete os resultados da mesma.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\|y(t_i) - y_i\|$ Euler	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK2	$\|y(t_i) - y_i\|$ RK4
0	1					0	0	0
1				1		0.8889		0.0299
2	2	0.5			0.4916	0.5	0.0938	

[0.5] **(c)** Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta.

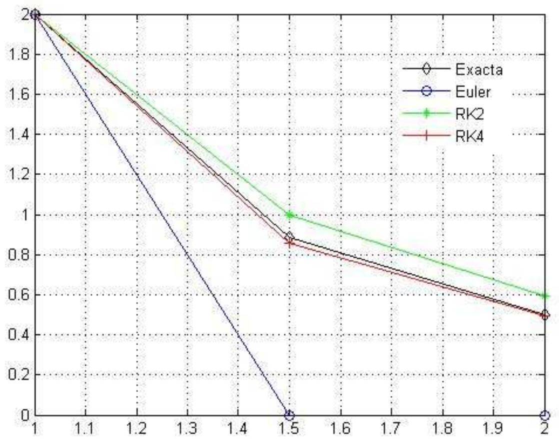

Figura 5

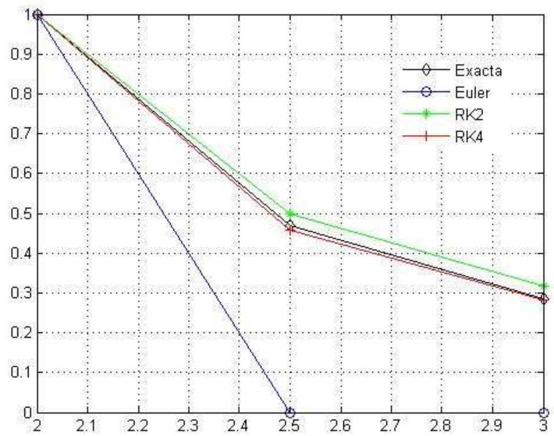

Figura 6

[1.5] **(d)** Complete as funções e acrescente comentários para explicar o algoritmo/regras que lhes estão associadas.

```
function y = NEuler(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/___;
t=a:__:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=___;
for i=1:n
    y(i+1)=______+____*f(t(i),y(i));
end
```

```
function y = NRK4(f,a,b,n,y0)
h=______________;
t=______________;
y=______________;
y(1)=_____;
for i=___:___,
    k1=________________________;
    k2=________________________;
    k3=________________________;
    k4=________________________;
    y(i+1)=____________________;
end
```

[1.5] **(e)** A *script* seguinte traduz corretamente a resolução em MATLAB do PVI dado? Justifique a sua resposta, corrigindo se for esse o caso os erros existentes.

```
clear;
clc;

strF = '2/t^2'
f    = @(t,y) vectorize(eval(strF));
a  = 2;
b  = 3;
n  = 3;
y0 = 1;

yEuler = NEuler(f,a,b,n,y0);
yRK2   = NRK2(f,a,b,n,y0);
yRK4   = NRK4(f,a,b,n,y0);

t = b:-(b-a)/n:a;
sExata = dsolve(['Dy=',strF],['y(',a,')=',num2str(0)]);
yExata = vectorize(eval(char(sExacta)));

plot(t,yExata,'-kd')
hold on
plot(t,yEuler,'-bo')
plot(t,yRK2,'-g*')
plot(t,yRK4,'-r+')
grid on
legend('RK4','RK2','Euler','Exata')
hold off

erroEuler = abs(yRK4-yEuler);
erroRK2   = abs(yRK4-yRK2);
erroRK4   = abs(yExata-yRK4);
tabela    = [t.',yExata.',yEuler.',yRK2.',yRK4.',...
             erroEuler.',erroRK2.',erroRk4.'];
disp(tabela);
```