EXAME - TESTE A+B » Data: 15/06/2015 Código da prova: **1506201501**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. **Duração:** 2H30+30m

Nome do aluno: **Número:**

1. Considere a equação não linear $\sqrt{4-x^2}+\sin x = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$

[0.5] **(a)** Indique um intervalo de amplitude igual a 2 no qual a equação dada tem uma única raiz x^* real e negativa. Justifique a sua resposta!

[1.5] **(b)** Mostre que $x_0=-1$ é uma aproximação inicial favorável à aplicação do método de Newton-Raphson ou das tangentes e obtenha um valor aproximado da raiz efetuando uma iteração.

2. A figura 1 representa um "Cravo do 25 de Abril". As linhas que contornam e definem a forma do recetáculo/cálice são definidas pelo gráfico das funções:

$f(x)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2^2}}$, $g(x)=-\sqrt{4-x^2}$

$h(x)=\sin(x)$ e $j(x)=-\sin(x)$.

[1.0] **(a)** Aplicando a interpoladora de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador de grau 2 da função g.

[0.5] **(b)** Sem deduzir a expressão dos polinómios interpoladores, redesenhe a figura 1, aproximando as funções h e j por uma interpolação linear e as outras funções por uma interpolação quadrática.

[2.0] **(c)** Utilize a regra de Simpson simples para determinar um valor aproximado para $I=\int_{-2}^{2} f(x)-g(x)\,dx$ e interprete o resultado obtido.

[0.5] **(d)** Aplicando as regras de Simpson e a dos trapézios com $n=2$, qual delas lhe permite obter uma melhor aproximação à medida de área (πab) da região limitada por uma elipse de semieixos a e b? Justifique.

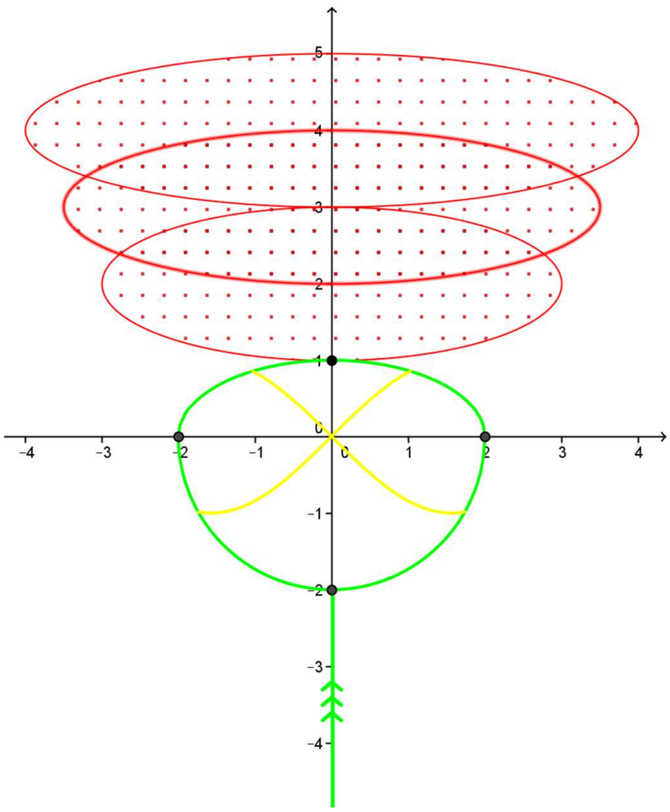

Figura 1 - Gráficos de f, g, h e j

3. Considere o problema de valor inicial $y'+ty^2=0,\quad y(1)=2,\quad t\in[1,2]$

[0.5] **(a)** Mostre que $y(t)=2t^{-2}$ é a solução exata do problema.

[1.5] **(b)** Complete a tabela seguinte e interprete os resultados da mesma.

			Aproximações			Erros		
i	t_i	$y(t_i)$ exacta	y_i Euler	y_i RK2	y_i RK4	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ Euler	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK2	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$ RK4
0	1					0	0	0
1				1		0.8889		0.0299
2	2	0.5			0.4916	0.5	0.0938	

[1.5] **(c)** Complete as funções e acrescente comentários para explicar o algoritmo/regras que lhes estão associadas.

```
function y = NEuler(f,a,b,n,y0)
h=________;
t=__:__:__;
y=zeros(___,___);
y(1)=___;
for i=1:n
    y(i+1)=______+____*f(t(i),y(i));
end
```

```
function y = NRK2(f,a,b,n,y0)
h=______________;
t=______________;
y=______________;
y(1)=_____;
for i=___:___,
    k1=________________________;
    k2=________________________;
    y(i+1)=____________________;
end
```

4. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 25$;

$g(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \le 25 \\ \text{então } z = f(x,y) \end{array} \right.$;

$h(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad 9 < x^2 + y^2 \le 25 \\ \text{então } z = \sqrt{-f(x,y)} \end{array} \right.$

$j(x,y) := \left| \begin{array}{l} \text{se} \quad x^2 + y^2 \le 9 \\ \text{então } z = \frac{4}{3}\sqrt{f(x,y)+25} \end{array} \right.$;

$l(x,y) = \begin{cases} h(x,y) \\ j(x,y) \end{cases}$

[1.0] **(a)** Determine e represente graficamente o domínio das funções g , h , j e l .

[1.5] **(b)** Defina a função l em forma de algoritmo e trace um esboço do seu gráfico.

[1.5] **(c)** Resolva apenas **<u>duas</u>** das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) $P(0,0)$ é um ponto de acumulação do domínio das funções e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} j(x,y)$.

ii) $m_t = \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{g(0,\Delta y) - g(0,0)}{\Delta y} = 0$ e o vetor $[0, y, -25]$ definem o declive e a equação vetorial da reta tangente à curva de intersecção da superfície de equação $z = g(x,y)$ com o plano $x = 0$ no ponto de coordenadas $P(0,0,-25)$.

iii) A função l é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

[1.5] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas **uma**

i) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dada por $T = \sqrt{f(x,y)+25}$, as taxas de variação máxima e mínima da temperatura no ponto $P\left(-1,-1\right)$ ocorrem na direção e sentido dos vetores $\vec{w} = \langle 2,2 \rangle$ e $\vec{\mathbf{v}} = \langle -2,-2 \rangle$ respetivamente? Justifique a sua resposta.

iii) Mostre que se $z = f(x,y)$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ e $x = \rho\cos\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = 0$.

5. A figura seguinte representa uma bolota do Vale do Côa, de densidade igual a 3, composto por duas partes:

- Calote esférica de raio $r = 5$ seccionada por um cone de raio $r = 3$ altura $h = 4$;
- Paraboloide de altura $h = 25$ e largura máxima de raio $r = 5$

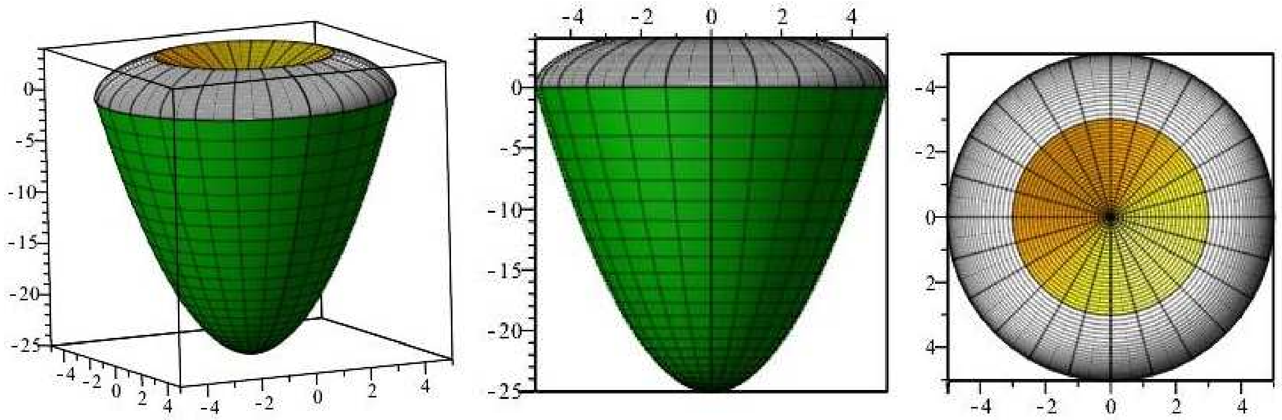

Figura 2 – Bolota do Vale do Côa

[1.5] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a dois sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$S_1 = \left\{ (R,\theta,\varphi) : 0 \le R \le 5 \ \wedge \ 0 \le \theta \le 2\pi \wedge \arctan(\tfrac{3}{4}) \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \right\}$

$S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 25 \wedge x^2 + y^2 - 25 \le z \le 0 \right\}$

[2.0] **(b)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[1.0] **(c)** Usando o integral triplo e uma mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas, prove que o volume de um cone de raio r e altura h é igual a $1/3$ do volume de um cilindro com as mesmas dimensões.

[0.5] **(d)** Complete a função seguinte em Maple e associe-a a uma transformação/mudança de variáveis.

```
> Esfericas2Cartesianas :=proc(r, theta, phi)
   local x, y, z;
   if evalf(                              )
   then
       x :=                  ;
       y :=                  ;
       z :=                  ;
       return ([x, y, z]);
   else error "                           ";
   end if
   end proc
```

Nome Completo:____

Número:____

Nome/login utilizado no LVM:______________________________

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática – Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - ACrescimento + Prog.Geométrica
  - ☐ At02_Matlab – Método da Secante e Método da Falsa Posição
  - ☐ At03_Matlab – Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At04_Matlab – Métodos de Euler e de Runge-Kutta com GUI
  - ☐ At05_TP_Maple – Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros em facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não