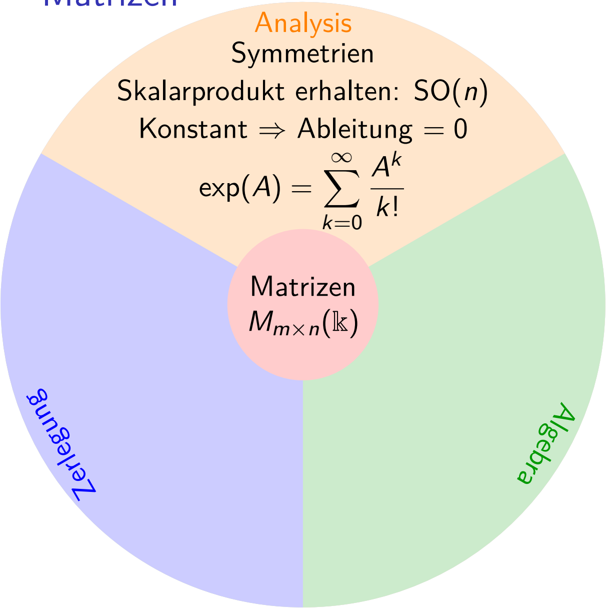
Intro — Matrizen



Algebra

- Algebraische Strukturen
- Polynome, Teilbarkeit
- Minimalpolynom

Zerlegung

- Eigenvektoren, -räume
- Projektionen, Drehungen
- Invariante Unterräume

Analysis

- Symmetrien
- Matrix-DGL
- Matrix-Potenzreihen

Natürliche Zahlen: Peano

Zählen

Mit den natürlichen Zahlen zählt man:

$$\mathbb{N} = \left\{ \begin{matrix} \text{Äquivalenzklassen von gleich} \\ \text{mächtigen endlichen Mengen} \end{matrix} \right\}$$

Peano-Axiome

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Nachfolger $n' \in \mathbb{N}$
3. 0 ist nicht Nachfolger
4. $n, m \in \mathbb{N} \wedge n' = m' \Rightarrow n = m$
5. $X \subset \mathbb{N} \wedge 0 \in X \wedge \forall n \in X(n' \in X) \Rightarrow \mathbb{N} = X$

Monoid

Menge $\mathbb{N}M$ mit einer zweistelligen Verknüpfung $a + *b$

1. Assoziativ: $a, b, c \in M$

$$(a + *b) + *c = a + *(b + *c)$$

2. Neutrales Element: $0e \in M$

$$0 + e * a = a + 0 * e$$

Axiom 5 = Vollständige Induktion

$X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ ist wahr}\}$

1. Verankerung: $0 \in X$
2. Induktionsannahme: $n \in X$
3. Induktionsschritt: $n' \in X$

Ganze Zahlen: Gruppe

Subtrahieren

Nicht für alle $a, b \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung

$$a + x = b \quad \Rightarrow \quad x = b - a$$

eine Lösung in $\mathbb{N}$, nämlich wenn $a > b$

Ganze Zahlen $=$ Paare

Idee: $b - a = (b, a)$

1. $(b, a) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
2. Äquivalenzrelation

$$(b, a) \sim (d, c) \Leftrightarrow b + d = c + a$$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$
$z \in \mathbb{Z}$, $z =$ Paare (u, v) mit "gleicher Differenz" $\Rightarrow$ alle Differenzen in $\mathbb{Z}$

Gruppe

Halbgruppe G mit inversem Element

$$a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G \text{ mit } \begin{cases} aa^{-1} = e \\ a^{-1}a = e \end{cases}$$

Abelsche Gruppe

Verknüpfung ist kommutativ:

$$a + b = b + a$$

Beispiele

- Brüche reelle Zahlen
- invertierbare Matrizen: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- Drehmatrizen: $\mathrm{SO}(n)$
- Matrizen mit Determinante 1: $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

Brüche

Division

Nicht für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ hat die Gleichung

$$ax = b \;\Rightarrow\; x = \frac{b}{a}$$

eine Lösung in $\mathbb{Z}$, nämlich wenn $b \nmid a$

Brüche

Idee: $\dfrac{b}{a} = (b, a)$

1. $(b, a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
2. Äquivalenzrelation

$$(b, a) \sim (d, c) \Leftrightarrow bc = ad$$

$\Rightarrow$ alle Quotienten

Gruppe

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist eine multiplikative Gruppe:

1. Neutrales Element: $1 \in \mathbb{Q}^*$
2. Inverses Element
   $q = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow q^{-1} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Rationale Zahlen

Alle Brüche, gleiche Werte zusammengefasst:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim$$

Ring/Körper

Addition und Multiplikation

$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ haben zwei Verknüpfungen:

1. Addition
$$a, b \in R \Rightarrow a + b \in R$$
2. Multiplikation
$$a, b \in R \Rightarrow a \cdot b = ab \in R$$

Gilt auch für

- Polynome
- $M_n(\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}^3$ mit Vektorprodukt

Definition

Ein Ring/Körper ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$:

1. R mit $+$ ist eine abelsche Gruppe
2. R mit $\cdot$ ist ein Monoid/eine Gruppe
3. Verträglichkeit: Distributivgesetz
$$a(b + c) = ab + bc$$
$$(a + b)c = ac + bc$$
(Ausmultiplizieren)

Schwierigkeiten

Nullteiler

Elemente a, b mit $ab = 0 \Rightarrow$ nicht invertierbar

- Projektionen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
- Nilpotente Matrizen
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = 0$$
- In $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ (modulo 15):
$$3 \cdot 5 = 15 \equiv 0 \mod 15$$

Invertierbarkeit

- $7 \in \mathbb{Z}$, aber $7^{-1} \notin \mathbb{Z}$, $7^{-1} \in \mathbb{Q}$
- A regulär heisst nicht $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
- $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ invertierbar in $M_n(\mathbb{Z})$:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Invertierbarkeit erreichen durch “vergrössern” des Ringes

Vektorraum

Operationen

Addition:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Additive Gruppe

$\mathbb{R}^n$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition mit

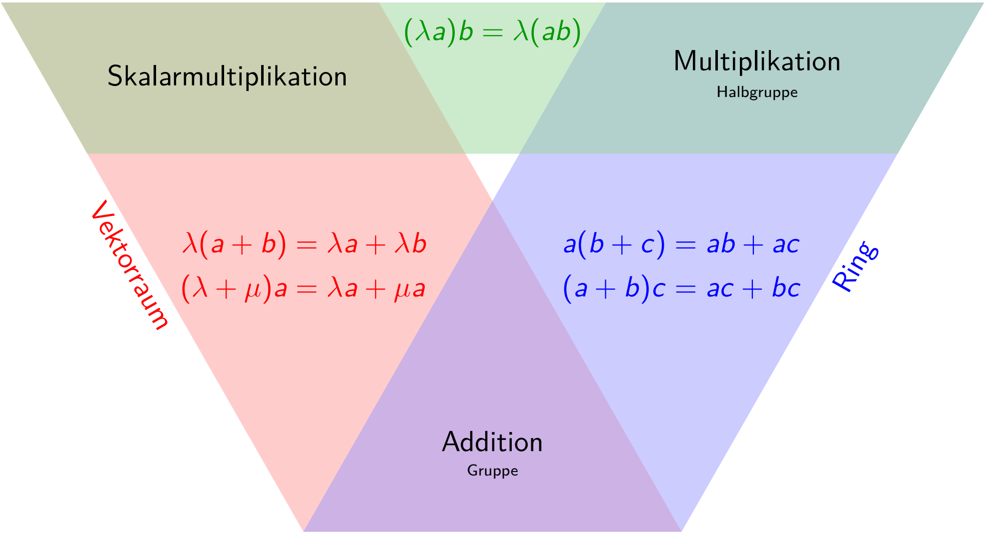
$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad -a = -\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

Distributivgesetz

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$
$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

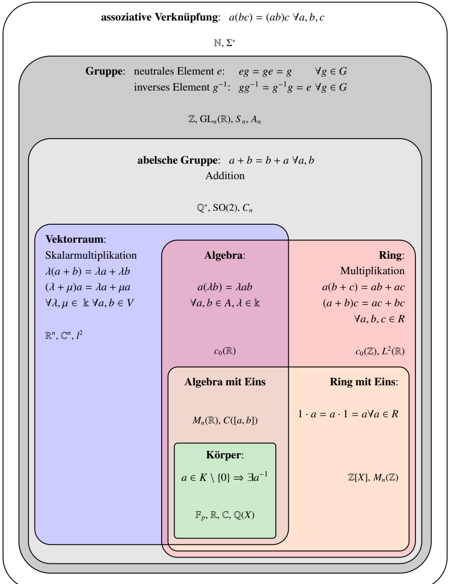
Algebra über $\mathbb{k}$



Zahlensysteme

Zahlenmenge	Eigenschaften	Struktur
$\mathbb{N}$	Addition, neutrales Element 0	Monoid
$\mathbb{Z}$	Addition, neutrales Element 0, inverses Element der Addition	Gruppe
$\mathbb{Z}$	zusätzlich: Multiplikation, neutrales Element 1	Ring
$\mathbb{Q}$	Addition und Multiplikation mit Inversen	Körper
$\mathbb{R}$	zusätzlich: Ordnungsrelation, Vollständigkeit	Körper mit Ordnung
$\mathbb{C}$	zusätzlich: Alle Wurzeln	algebraisch abgeschlossener Körper
$\mathbb{H}$	höhere Dimension, nichtkommutativ	Schiefkörper

Strukturen



- Gruppen: Drehungen, Symmetrien
- Vektorraum: Geometrie
- Ring (mit Eins)
- Algebra: Vektorraum und Ring
- Algebra mit Eins: Vektorraum und Ring mit Eins
- Körper

Matrizen

Jede beliebige Struktur lässt sich mit Matrizen darstellen:

- Permutationsmatrizen
- Wahrscheinlichkeitsmatrizen
- Wurzeln

Beispiele

Imaginäre Einheit i

Gibt es eine Zahl i mit $i^2 = -1$?

Matrixlösung

Die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$\Rightarrow$ J ist eine Matrixdarstellung von i
Drehmatrix mit Winkel 90°

Quadratwurzel $\sqrt{2}$

Gibt es eine Zahl $\sqrt{2}$ derart, dass $(\sqrt{2})^2 = 2$?

Matrixlösung

Die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt

$$W^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

$\Rightarrow$ W ist eine Matrixdarstellung von $\sqrt{2}$

Dreiecksmatrizen

Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Nilpotente Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N^n = 0$

Jordan-Matrix

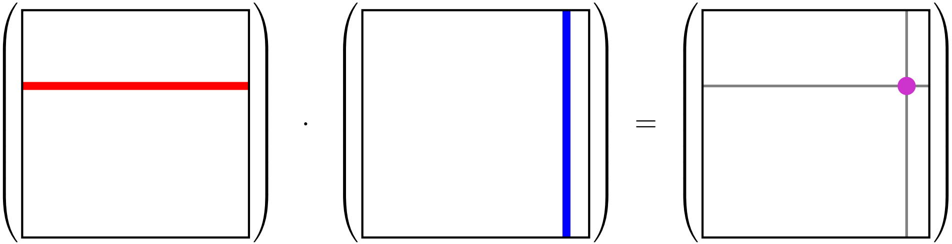
$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow J_\lambda - \lambda I$ ist nilpotent

Matrix-Algebra

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$



Diagonalmatrizen

Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Neutrales Element der Matrixmultiplikation:

$$AI = IA = A$$

Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hadamard-Algebra

Die Algebra der Diagonalmatrizen ist die Hadamard-Algebra (siehe später)

Hadamard-Algebra

Alternatives Produkt: Hadamard-Produkt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \dots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}$$

Algebra

- $M_{mn}(\Bbbk)$ ist eine Algebra mit $\odot$ als Produkt
- Neutrales Element U: Matrix aus lauter Einsen
- Anwendung: Wahrscheinlichkeitsmatrizen

Nicht so interessant

Die Hadamard-Algebra ist kommutativ $\Rightarrow$ kann “keine” interessanten algebraischen Relationen darstellen