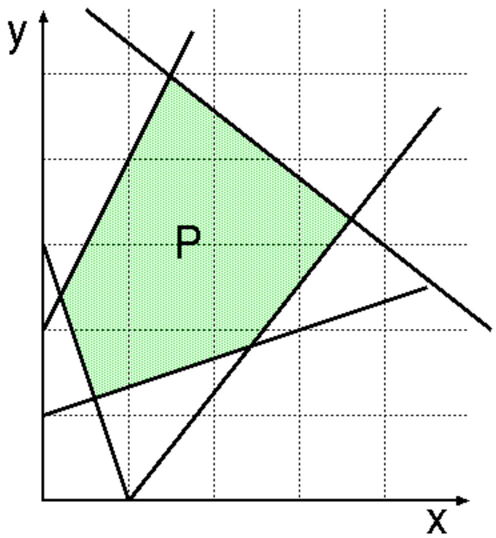
Universidade do Porto | LEIC

Desenho de Algoritmos | 2021/2022

Folha Prática 4

1. Considere a minimização de $y - 2x$, com $(x, y) \in P$, sendo $P \subseteq (\mathbb{R}_0^+)^2$ o polígono na figura.



a) **Assinale na figura** um ponto que corresponda a uma solução básica ótima e indique se existem soluções ótimas alternativas. Explique usando **as curvas de nível** da função objetivo.
Localize apenas o ponto (não o tente calcular).

b) Desenhe uma árvore de pesquisa que possa ser gerada quando aplica "Branch-and-Bound" (baseado em relaxação linear) para obter uma solução ótima com $(x, y) \in \mathbb{Z}_0^+$. Justifique por **interpretação geométrica**, usando a figura. Indique a estratégia aplicada em cada nó.

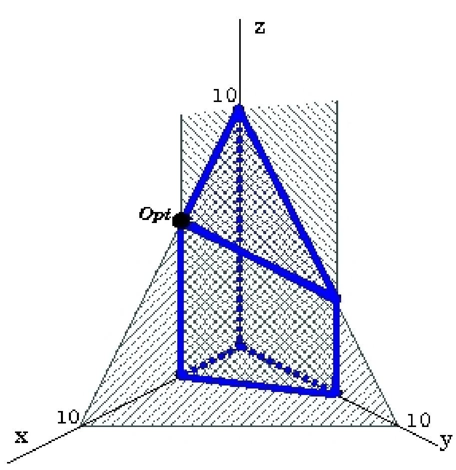
Sugestão: *recorde que* **as curvas de nível** *da função de custo $z = ax + by$ são retas dadas por $y = \frac{z}{b} - \frac{a}{b}x$, as quais, para z fixo, têm ordenada na origem $\frac{z}{b}$ e declive $-\frac{a}{b}$. Logo, se $b > 0$ então z cresce se a ordenada na origem cresce. Se $b < 0$ então z decresce se a ordenada na origem cresce.*

2. Por análise geométrica, averigue a existência de solução ótima para os problemas indicados.

a) minimizar y sujeito a $x + y \geq 10 \ \wedge \ x, y \in \mathbb{R}_0^+$

b) maximizar $2x - y$ sujeito a $x + y \geq 10 \ \wedge \ x, y \in \mathbb{R}_0^+$

3. Seja $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 \ | \ x + y + z \leq 10 \wedge 2x + y \leq 7\}$ o poliedro representado na figura, o qual corresponde à interseção de $(R_0^+)^3$ com os semi-espaços definidos pelas restrições indicadas. Queremos determinar $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ tal que $4x - 3y + 2z$ é **máximo**.



a) Estabeleça a correspondência entre os **vértices** do poliedro e as **soluções básicas admissíveis** do problema na forma normal, dada por ***maximizar*** $4x - 3y + 2z$ ***sujeito a*** $x + y + z + s_1 = 10$**,** $2x + y + s_2 = 7$ ***e*** $(x, y, z, s_1, s_2) \in (R_0^+)^5$**.**

b) **Por análise geométrica**, justifique que para resolver o problema pelo Método Simplex se pode partir da solução $(0, 0, 0, 10, 7)$ e que, quando se parte dessa solução, são necessárias pelo menos duas iterações para chegar à solução ótima (assinalada na figura por Opt).

c) Resolva **analiticamente** o problema pelo Método Simplex, partindo de $(0, 0, 0, 10, 7)$.

d) Aplicando *branch-and-bound*, determine $(x, y, z) \in \mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^3$ tal que $4x - 3y + 2z$ é máximo, isto é, uma solução ótima inteira.

4. Resolva os problemas por aplicação do Método Simplex, **partindo da solução básica admissível** $x = y = z = 0$, $t = 4/5$ e $w = 2/5$ (i.e., com t e w na base). Analise a existência de ótimos alternativos.

a)

minimizar $R = 2x - y + z - 2t - w$
sujeito a
$$\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t + w &= 2 \\ 2x + y - 3z + 3t - w &= 2 \\ x, y, z, t, w \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

b)

maximizar $R = 2x - y + z - 2t - w$
sujeito a
$$\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t + w &= 2 \\ 2x + y - 3z + 3t - w &= 2 \\ x, y, z, t, w \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

5. A Rede Nacional de Postos de Vigia constitui um dos principais mecanismos de deteção e localização inicial de incêndios florestais, sendo assegurada por vigilantes. É dada prioridade à vigilância de regiões que apresentam maior risco de incêndio. Suponha que $\mathcal{R}$ designa o conjunto dessas regiões, $\mathcal{P}$ o de postos de vigia, e $\mathcal{G}_p$ o das regiões visíveis de p, para cada $p \in \mathcal{P}$. Seja c_r o custo de não vigiar a região r e v_p o custo de ativar o posto p, com $r \in \mathcal{R}$ e $p \in \mathcal{P}$. Formule matematicamente o problema em cada um dos cenários.

a) Minimizar o número total de postos de vigia ativos mas garantir que todas as regiões ficam sob vigilância.

b) Poder não garantir a cobertura de todas as regiões mas minimizar o custo total.

6. Numa empresa de suinicultura, é necessário fornecer a cada animal adulto, diariamente, além da alimentação padrão, um suplemento de Granulado e Farinha. Cada quilograma de Granulado contém 30 g de hidratos de carbono, 75 g de vitaminas e 45 g de proteínas. Cada quilograma de Farinha contém 75 g de hidratos de carbono, 15 g de vitaminas e 45 g de proteínas. O suplemento diário dado a cada animal adulto, para ser adequado, deve conter pelo menos 300 g de hidratos de carbono, pelo menos 225 g de vitaminas e pelo menos 315 g de proteínas, mas não deve conter mais de 10 Kg de Granulado nem mais de 15 Kg de Farinha. Cada quilograma de Granulado custa 5 euros e que cada quilograma de Farinha custa 2.5 euros. Determinar a quantidade e constituição do suplemento a fornecer diariamente a cada animal, assegurando a qualidade necessária e custo mínimo.

a) Formule matematicamente o problema usando como variáveis de decisão x_G e x_F que indicam a quantidade de Granulado e de Farinha da mistura (em Kg). Indique a interpretação de cada restrição e verifique que a formulação está correta do ponto de vista de dimensões.

b) Resolva o problema por análise geométrica no plano.

c) Reduza o problema à forma normal introduzindo variáveis de desvio.

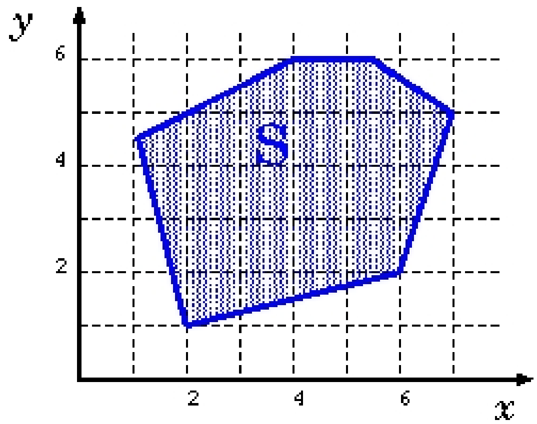
d) Qual é a solução básica do sistema de equações que corresponde à solução ótima encontrada em **b)**? Aplique o método de Gauss-Jordan para colocar o sistema na forma resolvida, de modo a mostrar que essa solução é ótima. Para tal, inclua também a equação $z - 5x_G - 2.5x_F = 0$, que define o custo.

7. Uma empresa pode produzir cintos de dois tipos A e B, com lucros de 0.4 u.m. para os do tipo A e 0.3 u.m. para os do tipo B, sendo os primeiros de qualidade superior. Se produzisse apenas cintos do tipo B, poderia produzir até 1000 por dia, mas a produção de um cinto A demora o dobro do tempo da produção de um do tipo B. Por outro lado, a quantidade de pele que consegue obter diariamente não permite produzir mais do que 800 cintos por dia no total dos dois tipos. Os cintos do tipo A requerem uma fivela especial, não estando disponíveis mais de 400 por dia. Contudo, para os cintos B, a empresa consegue obter 700 fivelas diariamente. Como deve ser a produção diária da fábrica para maximizar o lucro?

Formule matematicamente o problema, indicando a interpretação das variáveis de decisão e das restrições. Resolva-o problema por análise geométrica no plano.

8. Seja $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \ldots, m\} \cap (\mathbb{R}_0^+)^n$, em que os coeficientes a_{ij}'s e b_i's são constantes reais. Mostre que os problemas "minimizar $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ para $(x_1, \ldots, x_n) \in S$" e "maximizar $\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ para $(x_1, \ldots, x_n) \in S$" têm as mesmas soluções ótimas.

9. Seja S o polígono representado na figura. Os lados do polígono S (ordenados no sentido anti-horário) estão sobre as rectas $y = 6$, $2y - x = 8$, $y + 4x = 9$, $4y - x = 2$, $y - 3x = -16$ e $3y + 2x = 29$.



Por análise geométrica, para $\mathcal{O}$ indicado em cada alínea, determine escalares a e b tais que $\mathcal{O}$ seja o conjunto das soluções ótimas do problema da **minimização de** $ax + by$ **com** $(x, y) \in S$ seja o indicado ou justifique a não existência de escalares nessas condições.

a) $\mathcal{O} = \{(6, 2)\}$.

b) $\mathcal{O} = \{(x, y) \mid 4y = -2 + 3x,\ x \geq 2,\ x \leq 62/9\}$.

c) $\mathcal{O} = \{(x, y) \mid 2y = 8 + x,\ x \leq 4,\ x \geq 10/9\}$.

10. Uma firma compra três tipos de carvão A, B e C, que mistura para formar um produto para aquecimento das casas. Não há perda de qualidades no processo de mistura. O produto final não deve conter mais do que 0.03% de fósforo e 3.25% de impurezas diversas. As quantidades de fósforo e de impurezas diversas e os preços dos três tipos de carvão estão indicados no quadro seguinte.

Tipo de Carvão	% fósforo	% impurezas	custo/Kg (u.m.)
A	0.06	2.0	0.010
B	0.04	4.0	0.010
C	0.02	3.0	0.015

Suponha que se um carvão entrar numa dada mistura, a sua percentagem nessa mistura não pode ser inferior a 10%. Pretende-se saber quais as percentagens de cada um dos carvões na mistura ótima.

Explique porque é que o seguinte modelo traduz o problema enunciado, dando uma interpretação a cada variável de decisão e a cada restrição. Qual a função de cada variável μ_i, para $i = 1, 2, 3$?

$$
\begin{array}{l}
\text{minimizar} : 10\,x_A + 10\,x_B + 15\,x_C \\
\text{sujeito a} \\
\left\{
\begin{array}{lllllll}
0.06\,x_A & + & 0.04\,x_B & + & 0.02\,x_C & \leq & 0.03 \\
2.0\,x_A & + & 4.0\,x_B & + & 3.0\,x_C & \leq & 3.25 \\
x_A & + & x_B & + & x_C & = & 1 \\
\multicolumn{7}{l}{x_A, x_B, x_C \geq 0} \\
\multicolumn{7}{l}{x_A \geq 0.1\,\mu_1,\ x_A \leq \mu_1} \\
\multicolumn{7}{l}{x_B \geq 0.1\,\mu_2,\ x_B \leq \mu_2} \\
\multicolumn{7}{l}{x_C \geq 0.1\,\mu_3,\ x_C \leq \mu_3} \\
\multicolumn{7}{l}{\mu_i \in \{0, 1\}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

11. Uma loja de animais de estimação, recebeu uma encomenda de peixes tropicais de um certo número de espécies. Algumas das espécies comem outras. O dono da loja dispõe de toda a informação sobre este aspeto. Qual o número mínimo de aquários necessários se a sua capacidade não introduzir restrições adicionais? Formule matematicamente o problema. Assuma que E é o conjunto de espécies e $\mathcal{R} \subset E \times E$ define os pares de espécies incompatíveis. Pode usar como variáveis de decisão: z, o número de aquários usados; $x_i \in \mathbb{Z}^+$, o identificador do aquário onde fica a espécie i, para $i \in E$. Os aquários são numerados.

12. Uma empresa fabrica três tipos de cadeiras de jardim nomeadamente Lux, Dup e Std em pinho. Semanalmente não vende mais do que 25 cadeiras do tipo Lux, mas para as restantes há procura suficiente. A madeira é recebida em tábuas, sensivelmente do mesmo tamanho, sendo o preço de cada tábua de 3 u.m. (unidades monetárias). Para fazer uma cadeira do tipo Lux são necessárias quatro tábuas completas. Cada cadeira dos restantes tipos é feita a partir duma tábua completa. A fábrica pode armazenar até 400 tábuas, sendo feita apenas uma encomenda semanal a qual é recebida no início da semana seguinte. Todas as sobras (resultantes dos cortes) são consideradas desperdícios. A produção de cada cadeira requer, numa primeira fase, trabalho de carpintaria e posteriormente acabamentos, sendo esses trabalhos efectuados em duas secções distintas. A secção de carpintaria consegue produzir 5 cadeiras do tipo Std numa hora, mas o acabamento de cada cadeira desse tipo demora cerca de 20 minutos. Cada cadeira do tipo Lux requer em média 30 minutos de trabalho de carpintaria enquanto que as do tipo Dup necessitam ainda de mais 15 minutos. Na fase de acabamentos, uma cadeira do tipo Lux requer cerca de 10 minutos enquanto as do tipo Dup requerem em média meia hora. Cada uma das secções não pode trabalhar mais do que 70 horas por semana, sendo o custo da secção de carpintaria de 14 u.m. por hora enquanto que o da secção de acabamentos é 50 u.m. Por questões de qualidade, as cadeiras devem ficar prontas durante a semana em que se iniciou a sua execução. O preço de venda de cada cadeira Lux é de 270 u.m., mas as dos tipos Std e Dup são vendidas a 120 e 240 u.m., respectivamente. Determinar o plano de produção semanal.

Formule matematicamente o problema.

Exemplo de *software* para otimização que poderá ter interesse em conhecer:

- **SciPy** (`https://scipy.org`) – Fundamental algorithms for scientific computing in Python.

  Tutorial "Hands-On Linear Programming: Optimization With Python", por Mirko Stojiljković

  `https://realpython.com/linear-programming-python/`

- **GLPK** (GNU Linear Programming Kit)

  `https://www.gnu.org/software/glpk/`

  P. Zielinski. Modeling in GNU MathProg language - a short introduction.
  `https://cs.pwr.edu.pl/zielinski/lectures/om/glpk_notes.pdf`

- **Gurobi Optimizer** (mathematical programming solver)

  `https://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/`

  Introdução "Optimization with Gurobi and Python", por João Pedro Pedroso
  `https://www.dcc.fc.up.pt/~jpp/seminars/azores/gurobi-intro.pdf`

- **Google OR-Tools** (open source software for combinatorial optimization)

  `https://developers.google.com/optimization`

  `https://developers.google.com/optimization/examples`

- IBM ILOG **CPLEX** Optimizer

  `https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer`

- Comparison of optimization software
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_optimization_software`

- **MiniZinc** (`https://www.minizinc.org`) a free and open-source constraint modeling language.
  "You can use MiniZinc to model constraint satisfaction and optimization problems in a high-level, solver-independent way, taking advantage of a large library of pre-defined constraints. Your model is then compiled into FlatZinc, a solver input language that is **understood by a wide range of solvers***."* (`https://www.minizinc.org/software.html#flatzinc`)