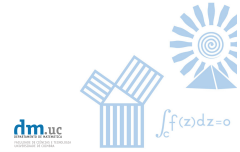




## Análise Matemática III (1.º Semestre)

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática



Ano Letivo 2022/2023

Frequência

11.01.2023

1. (a) Desenvolva em série de Laurent de potências de  $z + 1$  a função  $f$  definida por

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^{2023}(z-3i)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 3i\},$$

na região  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < R\}$ , indicando o maior valor possível para  $R$ .

- (b) Seja  $\gamma$  a circunferência centrada em  $z_0 = 0$  e de raio 2, com a orientação positiva, e considerada como um caminho simples e fechado. Determine, justificando,

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{(z+1)^{2023}(z-3i)} dz$$

2. (a) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada- $z$  inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z+4)(z-2)}, \quad |z| > 4.$$

- (b) Usando a alínea anterior, determine, justificando os passos intermédios, a solução de

$$x_{k+2} + 2x_{k+1} - 8x_k = k(-1)^k \quad (k \geq 0), \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$$

3. (a) Determine

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2(s+2)} \right\},$$

usando o Teorema da Convolução, onde  $\mathcal{L}^{-1}$  representa o operador Transformada inversa de Laplace.

- (b) Sabendo que  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ , determine, recorrendo à transformada de Laplace, a solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) - 2 \frac{dy}{dt}(t) + y(t) = e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

(v.s.f.f.)

4. Seja  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um sinal periódico com frequência circular  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ , definido em  $[0, \pi[$  por

$$v(t) = t, \quad t \in [0, \pi[.$$

- (a) Determine a série de Fourier de  $v$  na forma complexa.
- (b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier anterior no intervalo  $[-\pi, 2\pi]$ .
- (c) Determine a expressão analítica da função soma da série de Fourier em  $[\pi, 2\pi]$ .

5. Considere a função  $f(t) := e^{-2|t|}H(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $H$  é a função de Heaviside.

- (a) Verifique que a transformada de Fourier desta função é dada por

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2 + i\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

- (b) Use o resultado da alínea anterior e propriedades adequadas para determinar

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2023}{2i - t}\right\}.$$