Análise Matemática III (1.° Semestre)

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Ano Letivo 2022/2023 — Exame Final — 27.01.2023 — Duração: $2h\ 30mn$

Parte I

1. Esboce a região $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge 2 < |z| \leq 4\}$ e a sua imagem pela aplicação f definida por $f(z) = (1-i)z + i$, $z \in \mathbb{C}$. Refira as transformações geométricas envolvidas, justificando devidamente.

2. Determine, justificando, os zeros do polinómio
$$p(z) = z^3 - 8i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

3. Sejam u e v duas funções analíticas em $B(z_0, R)$ tais que $u(z_0) = 0, u'(z_0) \neq 0$, $v(z_0) = 0$, $v'(z_0) = 0$, $v''(z_0) \neq 0$ e $v(z) \neq 0$, $z \in A(z_0, 0, R)$. Seja f a função definida em $A(z_0, 0, R)$ por
$$f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}, \quad z \in A(z_0, 0, R).$$
Demonstre que o resíduo de f em z_0 é dado por
$$2\frac{u'(z_0)}{v''(z_0)}.$$

4. Usando Transformadas de Laplace, determine, para $t \geq 0$, a solução da seguinte equação diferencial
$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 6\frac{dx}{dt}(t) + 9x(t) = \sin t$$
sujeita às condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.
Sugestão: $\dfrac{1}{(s^2+1)(s+3)^2} = \dfrac{3}{50}\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{(s+3)^2} + \dfrac{1}{50}\dfrac{4-3s}{s^2+1}$.

5. (a) Sendo $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2(s+3)}$, determine uma função causal f tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, usando o Teorema da Convolução.
   (b) Determine, usando a alínea anterior e justificando, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-4s}}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$.

Cotação da Parte I: 10 valores.

Mínimos de 4 valores. v.s.f.f.

Parte II

6. (a) Desenvolva em série de Laurent de potências de $z-1$ a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^{2023}(z+i)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-i, 1\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < R\}$, indicando o maior valor possível para R.

(b) Seja γ a circunferência centrada em $z_0 = 1$ e de raio $1/2$, com a orientação positiva, e considerada como um caminho simples e fechado. Usando a alínea anterior, determine, justificando,

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)^{2023}(z+i)}\, dz.$$

7. (a) Usando o Teorema da Convolução, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X_1(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}\ , \ |z| > 2.$$

(b) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X_2(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+2)(z-1)}\ , \ |z| > 3.$$

(c) Usando as alíneas anteriores, determine, justificando os passos intermédios, a solução de

$$x_{k+2} + x_{k+1} - 2x_k = k3^k \ (k \geq 0), \ x_0 = 1, \ x_1 = -1.$$

8. Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sinal periódico com frequência circular $\omega = 1\ rad/s$, definido em $]-\pi, \pi]$ por

$$v(t) = t, \quad \text{se} \quad t \in]-\pi, \pi].$$

(a) Determine a série de Fourier de v na forma complexa.

(b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier anterior no intervalo $[0, 4\pi]$.

9. Considere a função $f(t) := e^{-t}H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, onde H é a função de Heaviside.

(a) Verifique que a transformada de Fourier desta função é dada por

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{1+i\omega} \ (\omega \in \mathbb{R})\,.$$

(b) Use o resultado da alínea anterior e propriedades adequadas para determinar

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2023}{i-t}\right\}.$$

Cotação da Parte II: 10 valores.
Mínimos de 4 valores.