TI-TP2

①

O código ótimo acontece quando

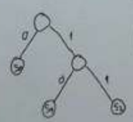
$$\sum_{K=1}^{M} 2^{-l_i} = 1 \qquad l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{P(s_K)} \right\rceil$$

=nº→M

(comprimento do código)

O código é instantâneo quando o descodificador sabe exatamento quando um código está completo, por exemplo, há alguma regra espacial ou não é prefixo

ⓐ $\{0, 10, 11\}$



Não é prefixo, todos os simbolos são folhas (instantâneo)

$$\sum_{K=1}^{3} 2^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} = 1$$

pode ser ótimo para uma dada fonte

ⓑ $\{00, 11\}$

Instantâneo

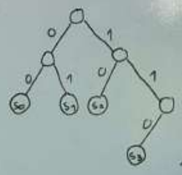
$$\sum_{K=1}^{2} 2^{-l_i} = 2^{-2} + 2^{-2} = 0{,}5 \neq 1 \Rightarrow \text{Não pode ser ótimo}$$

ⓒ $\{00, 01, 10, 110\}$

não é instantâneo

$$\sum_{K=1}^{4} 2^{-l_i} = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} = 0{,}875 \neq 1 \Rightarrow \text{N/ótimo}$$

ⓓ $\{00, 01, 10, 110\}$

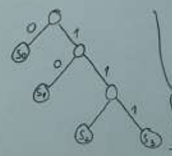


Instantâneo

$$\sum_{K=1}^{4} 2^{-l_i} = 0{,}875 \neq 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ N/ pode ser ótimo

ⓔ $\{0, 10, 110, 111\}$



Inst

$$\sum_{K=1}^{4} 2^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 1 \Rightarrow \text{pode ser ótimo para uma dada fonte}$$

② ⓐ Majorante de Huffman estático: $H(X) + \frac{1}{M}$;

Majorante de aritméticos: $H(X) + \frac{2}{M}$ ← nº de simbolos na sequência

$$H(X) = -\sum P(x_i) \log_2 P(x_i) =$$

$$= -\left[2\left(\frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)\right) + 2\left(\frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right) + 2\left(\frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right)\right) + 4\left(\frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right)\right)\right] =$$

$$= -\left[-1 - \frac{6}{8} - \frac{8}{16} - \frac{20}{32}\right] = \frac{32}{32} + \frac{24}{32} + \frac{16}{32} + \frac{20}{32} = \frac{92}{32} = \frac{23}{8}$$

Majorante Huffman $= \frac{23}{8} + \frac{1}{M} = \frac{23}{8} + \frac{1}{4} = \frac{25}{8}$ //

Majorante Aritmético $= \frac{23}{8} + \frac{2}{M} = \frac{23}{8} + \frac{2}{4} = \frac{27}{8}$ //

ⓑ sequência = "1, 2, 3, 10"

$F(1) = \frac{2}{8}$ $F(3) = \frac{5}{8}$

$F(2) = \frac{4}{8}$ $F(10) = 1$

$F(9) = \frac{28}{32}$

$$l^{i} = l^{i-1} + (u^{i-1} - l^{i-1}) F(a_{K-1})$$

$$u^{i} = l^{i-1} + (u^{i-1} - l^{i-1}) F(a_K)$$

iteração atual

Index no alfabeto do simb da iteração atual

it 0 $l^0 = 0$; $u^0 = 1$

it 1 $s = 1$

$l^1 = l^0 + (u^0 - l^0) F(0) = 0$

$u^1 = l^0 + (u^0 - l^0) F(1) = \frac{2}{8}$

it 2 $s = 2$

$l^2 = l^1 + (u^1 - l^1) F(1) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

$u^2 = l^1 + (u^1 - l^1) F(2) = \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

it 3 $s = 3$

$l^3 = l^2 + (u^2 - l^2) F(2) = \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{16}\right)\frac{4}{8} = \frac{2}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32} = \frac{24}{256}$

$u^3 = l^2 + (u^2 - l^2) F(3) = \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{16}\right)\frac{5}{8} = \frac{8}{256} + \frac{5}{256} = \frac{13}{256}$

it 4 $s = 10$

$l^4 = l^3 + (u^3 - l^3) F(9) = \frac{13}{256} + \left(\frac{11}{256}\right)\frac{28}{32}$

$u^4 = l^3 + (u^3 - l^3) F(10) = \frac{13}{256} + \frac{11}{256} = \frac{24}{256}$

$$TAG^4 = \frac{\left[\frac{13}{256} + \left(\frac{11}{256}\right)\frac{28}{32}\right] + \frac{24}{256}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{27}{256} + \frac{308}{8192}\right] = 0{,}07153302$$

③ $S = \{1, 2, 3, 4\}$ sequência = 1112

$P(1) = 0{,}6$ $\quad F(1) = 0{,}6$

$P(2) = 0{,}2$ $\quad F(2) = 0{,}8$

$P(3) = 0{,}15$

$P(4) = 0{,}05$

it0 $l^0 = 0;\ u^0 = 0$

it1 (símbolo 1)

$l^1 = l^0 + (u^0 - l^0)F(\emptyset) = 0$

$u^1 = l^0 + (u^0 - l^0)F(1) = 0{,}6$

it2 (símbolo 1)

$l^2 = 0 + (0{,}6)0 = 0$

$u^2 = 0 + (0{,}6)0{,}6 = 0{,}36$

it3 (símbolo 1)

$l^3 = 0 + (0{,}36)0 = 0$

$u^3 = 0 + (0{,}36)0{,}6 = 0{,}218$

it4 (símbolo 2)

$l^4 = 0 + (0{,}218)F(1) = 0{,}218 \cdot 0{,}6 = 0{,}1296$

$u^4 = 0 + (0{,}218)F(2) = 0{,}218 \cdot 0{,}8 = 0{,}1728$

$TAG^4 = \frac{0{,}1296 + 0{,}1728}{2} = 0{,}1512$

④ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sequência = 11234125

Definição dos pre-acordados: $m = \#Alfa = 10$

$\begin{cases} m = 2^e + r \\ 0 \le r \le 2^e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 3 \\ r = 2 \end{cases}$

Caso o index K do símbolo atual satisfizer a condição $1 \le K \le 2r$, o código pre-acordado será a representação binária de $K-1$ em $e+1$ bits, caso contrário, será a representação binária de $K-r-1$ em e bits

Nº Max de nodes $2m-1$

$1: (K=1),\ 1 \le K \le 2r \Rightarrow \overset{K-1=0}{0000}$

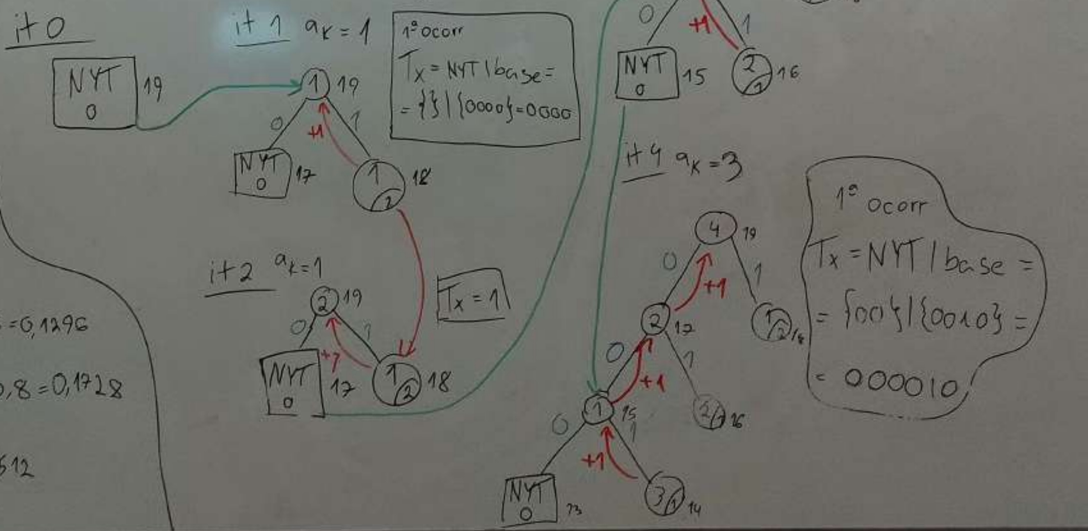
$2: (K=2),\ 1 \le K \le 2r \Rightarrow \overset{K-1=1}{0001}$

$3: (K=3),\ 1 \le K \le 2r \Rightarrow \overset{K-1=2}{0010}$

$4: (K=4),\ 1 \le K \le 2r \Rightarrow \overset{K-1=3}{0011}$

$5: (K=5),\ K > 2r \Rightarrow \overset{K-r-1=2}{010}$

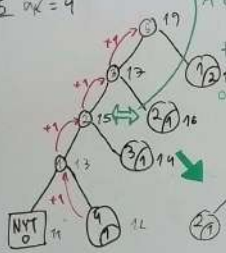
nº max de nodes: $2 \cdot 10 - 1 = 19$



TI-TP2

Continuação ④

it 5 $a_K = 4$

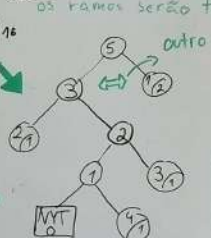


Conflito, seja p_j o peso do node nº n_j e p_i o peso do node nº n_i,

A condição:

$p_j \geq p_i \Rightarrow n_j \geq n_i$

tem de ser verificada, como tal não acontece os ramos serão trocados



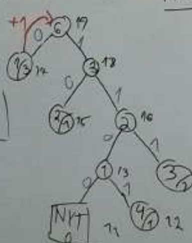
outro conflito

1ª ocorr

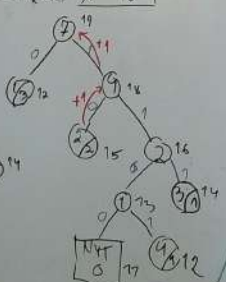
T_x = NYT | base = = {000}|{0011} = = 0000011

it 6 $a_K = 1$

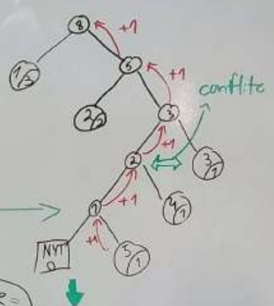
$\boxed{T_x = 0}$



it 7 $a_K = 2$ $\boxed{T_x = 10}$



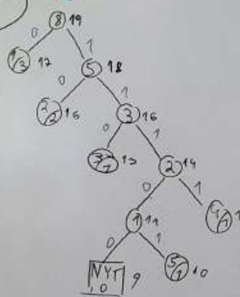
it 8 $a_K = 5$



conflito

1ª ocorr

T_x = NYT | base = {1100}|{010} = = 1100010



Concatenando T_x de todas as iterações, obtemos a bitstream:

000010000 1000010
00000 11010 1100010

⑥ barrayar#bar#by#barrayar#bay

ⓐ

it 0

Gerar entradas para alfabeto = {a, b, #, r, y}

it 1

Existe "b", add "ba"
T_x = <2>

it 2

Existe "a", add "ar"
T_x = <1>

it 3

Existe "r", add rr
T_x = <4>

it 4

Existe "r" add "ra"
T_x = <4>

it 5

Existe "a" add "ay"
T_x = <1>

it 6 Existe "y" add "ya"
T_x = <5>

it 7 Existe "ar" add "ar#"
T_x = <8>

it 8 Existe "#" add "#b"
T_x = <4>

it 9 E ba; add bar
T_x = <7>

it 10 E. r; add r#
T_x = <5>

it 11 E. #b, add #by
T_x = <13>

it 12 E y, add y#
T_x = <6>

it 13 E #b; add #ba
T_x = <13>

it 14 E. ar; add arr
T_x = <8>

it 15 E. ra; add ray
T_x = <9>

it 16 E. ya; add yar
T_x = <11>

it 17 E. r#; add r#b
T_x = <15>

it 18 E. ba; add bay
T_x = <7>

it 19 E y T_x = <5>

Dicionária

Index	Entrada
1	a
2	b
3	#
4	r
5	y
6	ba
7	ar
8	rr
9	ra
10	ay
11	ya
12	ar#
13	#b
14	bar
15	r#
16	#by
17	y#
18	#ba
19	arr
20	ray
21	yar
22	r#b
23	bay

(5) look-ahead = 15
search-buffer = 30 - 15 = 15 {offset, length, C(prox)}

barrayar# bar# by #barrayar# bay

it 1	{0, 0, C(b)}
it 2	{0, 0, C(a)}
it 3	{0, 0, C(r)}
it 4	{1, 1, C(a)}
it 5	{0, 0, C(y)}
it 6	{5, 2, C(#)}
it 7	{9, 3, C(#)}
it 8	{4, 1, C(y)}
it 9	{7, 4, C(r)}
it 10	{3, 1, C(y)}
it 11	{5, 2, C(#)}
it 12	{9, 2, C(y)}

(7)

it 1 b existe; ba não, add <2, C(a)>
index b ↗ ↑ concatenado

it 2 r existe, rr não add <4, C(r)>

it 3 a ✓; ay ✗ <1, C(y)>

it 4 r ✓; r# ✗ <4, C(#)>

it 5 ba ✓; bar ✗ <6, C(r)>

it 6 # ✓; #b ✗ <3, C(b)>

it 7 y ✓; y# ✗ <5, C(#)>

it 8 bar ✓; barr ✗
<10, C(r)>

it 9 ay ✓; aya ✗
<8, C(a)>

it 10 r# ✓; r#b ✗
<9, C(b)>

it 11 ay ✓
Tx = <8, C(∅)>

Dicionário

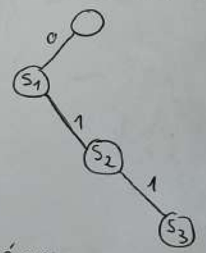
codificador	index	entrada
<0, C(a)>	1	a
<0, C(b)>	2	b
<0, C(#)>	3	#
<0, C(r)>	4	r
<0, C(y)>	5	y
<2, C(a)>	6	ba
<4, C(r)>	7	rr
<1, C(y)>	8	ay
<4, C(#)>	9	r#
<6, C(r)>	10	bar
<3, C(b)>	11	#b
<5, C(#)>	12	y#
<10, C(r)>	13	barr
<8, C(a)>	14	aya
<9, C(b)>	15	r#b

(8) (a) Fano-Elias é um precursor do código aritmético, tendo ambos o princípio de usar probabilidades para obter TAGs

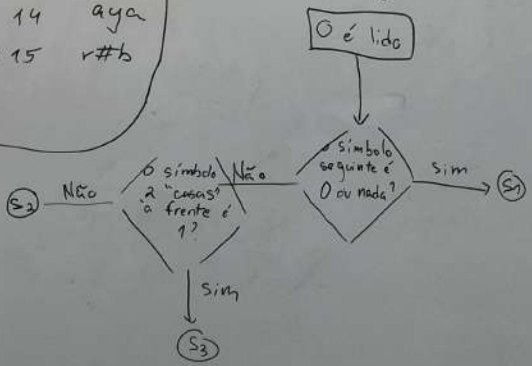
(b)

{0, 10, 110} não é ótimo pois $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = \frac{7}{8} \neq 1$

{0, 01, 011} não é prefixo pois nem todos os símbolos são folhas na sua árvore:



{0, 01, 011} (S_1, S_2, S_3) é unicamente descodificável se seguirmos as regras:



TI-TP2

9 pleeease

it 0	abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
it 1 - p (15)	pabcdefghijklmnoqrstuvwxyz
it 2 - l (12)	lpabcdefghijkmnoqrstuvwxyz
it 3 - e (6)	elpabcdfghijkmnoqrstuvwxyz
it 4 - e (0)	igual
it 5 - e (0)	igual
it 6 - a (3)	aelpbcdfghijkmnoqrstuvwxyz
it 7 - s (18)	saelpbcdfghijkmnoqrtuvwxyz
it 8 - e (2)	

11 $S=\{1,2,3,4,5\}$

Mensagem = "1233554424"

$0{,}5 = \overbrace{10\ldots0}^{N}$

Assumindo N bits por numero: $0 \equiv \overbrace{00\ldots0}^{N}$; $1 \equiv \overbrace{11\ldots1}^{N}$

$$\ell^i = \ell^{i-1} + \left\lfloor (u^{i-1} - \ell^{i-1} + 1)\frac{\text{Cum\_count}(a_{k-1})}{\text{Total\_count}} \right\rfloor$$

$$u^i = \ell^{i-1} + \left\lfloor (u^{i-1} - \ell^{i-1} + 1)\frac{\text{Cum\_count}(a_k)}{\text{Total\_count}} \right\rfloor - 1$$

Cum_Count(0) = 0

Count(1) = 1	C_C(1) = 1	
Count(2) = 2	C_C(2) = 3	
Count(3) = 2 →	C_C(3) = 5	Total Count = 10
Count(4) = 3	C_C(4) = 8	
Count(5) = 2	C_C(5) = 10	

10

a) $m = 11$

$$\begin{cases} 11 = 2^e + r \\ 0 \le r \le 2^e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 3 \\ r = 3 \end{cases}$$

$G = a_7$, como $1 \le 7 \le \underbrace{2 \times 3}_{=6}$ não se verifica, $7-3-1=3$ deve ser codificado em 3 bits → 011

b) (vem a seguir ao 11, a ficha está mal feita)

Assumindo N = 5 : $Cc \equiv$ Cum_count Tc = Total_count

it 0 $\ell^0 = 00000 = 0$
$u^0 = 11111 = 31$

it 1 $a_k = 1$

$\ell^1 = 0 + \left\lfloor 32\frac{Cc(0)}{Tc} \right\rfloor = 0 = 00000$

$u^1 = 0 + \left\lfloor 32\frac{Cc(1)}{Tc} \right\rfloor - 1 = 2 = 00010$

$E_1 \rightarrow \begin{matrix} \ell^1 = 00000 \\ u^1 = 00101 \end{matrix} \Big\} E_1 \rightarrow \begin{matrix} \ell^1 = 00000 \\ u^1 = 01011 \end{matrix} \Big\} E_1 \rightarrow \begin{matrix} \ell^1 = 00000 = 0 \\ u^1 = 10111 = 23 \end{matrix}$

Tx = 0 Tx = 0 Tx = 0

it 2 $a_k = 2$

$\ell^2 = 0 + \left\lfloor 24\frac{Cc(1)}{Tc} \right\rfloor = 2 = 00010$

$u^2 = 0 + \left\lfloor 24\frac{Cc(2)}{Tc} \right\rfloor - 1 = 7 - 1 = 6 = 00110$

$E_1 \rightarrow \begin{matrix} \ell^2 = 00100 \\ u^2 = 01101 \end{matrix} \Big\} E_1 \rightarrow \begin{matrix} \ell^2 = 01000 = 8 \\ u^2 = 11011 = 27 \end{matrix}$

Tx = 0 Tx = 0

it 3 $a_k = 3$

$\ell^3 = 8 + \left\lfloor (27-8+1)\frac{Tc(2)}{10} \right\rfloor = 14 = 01110$

$\ell^3 = 8 + \left\lfloor (20)\frac{Tc(3)}{10} \right\rfloor - 1 = 17 = 10001$

$E_3 \rightarrow$ complementar 2º MSB $\begin{matrix} \ell^3 = 00110 \\ u^3 = 11001 \end{matrix} \xrightarrow{\text{shifts}} \begin{matrix} \ell^3 = 01100 \\ u^3 = 10011 \end{matrix}$ NumE3++(1)

$E_{3\,comp} \rightarrow \begin{matrix} \ell^3 = 00100 \\ u^3 = 11011 \end{matrix} \xrightarrow{\text{shift}} \begin{matrix} \ell^3 = 01000 \\ u^3 = 10111 \end{matrix}$ Num E3++(2)

$E_{3\,comp} \rightarrow \begin{matrix} \ell^3 = 00000 \\ u^3 = 10011 \end{matrix} \xrightarrow{\text{shift}} \begin{matrix} \ell^3 = 00000 \\ u^3 = 00111 \end{matrix}$ Num E3++(3)

$E_1 \rightarrow \begin{matrix} \ell^3 = 00000 \\ u^3 = 01111 \end{matrix} \Big\}; E_1 \rightarrow \begin{matrix} \ell^3 = 00000 = 0 \\ u^3 = 11111 = 31 \end{matrix} \Big\}$ Tx = 0

Como Num E3 = 3,

$Tx = \{0\} \,|\, \{\bar{0}\} \times 3 = \{0\} \,|\, \{111\} = 0111$

it 4 $a_k = 3$

$\ell^4 = 0 + \left\lfloor 32\frac{Tc(2)}{Tc} \right\rfloor = 7 = 00111$

$u^4 = 0 + \left\lfloor 32\frac{Tc(3)}{Tc} \right\rfloor - 1 = 159 =$ Não há bits suficientes, devia ter assumido N = 8 (UPS!)

[...]