Análise Matemática III (1.° Semestre)

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Ano Letivo 2021/2022 Frequência 19.01.2022

1. (a) Desenvolva em série de Laurent de potências de z a função f definida por

$$f(z) = \frac{z+1}{z^{2022}(z-2i)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 2i\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$, indicando o maior valor possível para R.

(b) Seja γ a circunferência centrada em $z_0 = 0$ e de raio 1, com a orientação positiva, e considerada como um caminho simples e fechado. Determine, justificando,

$$\oint_\gamma \frac{z+1}{z^{2022}(z-2i)}\, dz$$

2. (a) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}\ ,\ |z| > 2.$$

(b) Usando a alínea anterior, determine, justificando os passos intermédios, a solução de

$$x_{k+2} - x_{k+1} - 2x_k = 2^{k+2}\ (k \geq 0),\ x_0 = 0,\ x_1 = 0.$$

3. Considere a função

$$g(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & , \quad t \geq 1\,. \end{cases}$$

(a) Mostre que

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\, e^{-s}\,,\ \mathrm{Re}\, s > 0\,,$$

onde $\mathcal{L}$ representa o operador Transformada de Laplace.

(b) Determine

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\},$$

usando o Teorema da Convolução, onde $\mathcal{L}^{-1}$ representa o operador Transformada inversa de Laplace.

(c) Sabendo que $y(0) = 0$, determine, recorrendo à transformada de Laplace, a solução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = g(t)\,.$$

(v.s.f.f.)

4. Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sinal periódico com frequência circular $\omega = \pi\ rad/s$, definido em $[-1, 1]$ por

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 2022, & \text{se } \frac{1}{2} < |t| \leq 1 \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de v na forma complexa.

(b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier anterior no intervalo $[-1, 2]$.

5. Considere a função $f(t) := e^{-3\,|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que a transformada de Fourier desta função é dada por

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{6}{9 + \omega^2} \ \ (\omega \in \mathbb{R}).$$

(b) Use o resultado da alínea anterior e propriedades adequadas para determinar

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{9 + t^2}\right\}.$$