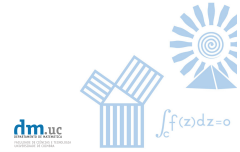


Análise Matemática III (1.º Semestre)

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática



Ano Letivo 2021/2022

Frequência

19.01.2022

1. (a) Desenvolva em série de Laurent de potências de
- z
- a função
- f
- definida por

$$f(z) = \frac{z+1}{z^{2022}(z-2i)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 2i\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$, indicando o maior valor possível para R .

- (b) Seja
- γ
- a circunferência centrada em
- $z_0 = 0$
- e de raio 1, com a orientação positiva, e considerada como um caminho simples e fechado. Determine, justificando,

$$\oint_{\gamma} \frac{z+1}{z^{2022}(z-2i)} dz$$

2. (a) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-
- z
- inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)^2}, \quad |z| > 2.$$

- (b) Usando a alínea anterior, determine, justificando os passos intermédios, a solução de

$$x_{k+2} - x_{k+1} - 2x_k = 2^{k+2} \quad (k \geq 0), \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$$

3. Considere a função

$$g(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & , \quad t \geq 1. \end{cases}$$

- (a) Mostre que

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

onde \mathcal{L} representa o operador Transformada de Laplace.

- (b) Determine

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\},$$

usando o Teorema da Convolução, onde \mathcal{L}^{-1} representa o operador Transformada inversa de Laplace.

- (c) Sabendo que
- $y(0) = 0$
- , determine, recorrendo à transformada de Laplace, a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + y = g(t).$$

(v.s.f.f.)

4. Seja $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um sinal periódico com frequência circular $\omega = \pi \text{ rad/s}$, definido em $[-1, 1]$ por

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 2022, & \text{se } \frac{1}{2} < |t| \leq 1 \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de v na forma complexa.

(b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier anterior no intervalo $[-1, 2]$.

5. Considere a função $f(t) := e^{-3|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que a transformada de Fourier desta função é dada por

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{6}{9 + \omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

(b) Use o resultado da alínea anterior e propriedades adequadas para determinar

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{9 + t^2}\right\}.$$