1 2 9 0 FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise Matemática III (1.° Semestre)

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Ano Letivo 2022/2023 | Frequência | 11.01.2023

1. (a) Desenvolva em série de Laurent de potências de $z+1$ a função f definida por

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^{2023}(z-3i)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-1, 3i\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < R\}$, indicando o maior valor possível para R.

(b) Seja γ a circunferência centrada em $z_0 = 0$ e de raio 2, com a orientação positiva, e considerada como um caminho simples e fechado. Determine, justificando,

$$\oint_\gamma \frac{z}{(z+1)^{2023}(z-3i)}\, dz$$

2. (a) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z+4)(z-2)}\ ,\ |z| > 4.$$

(b) Usando a alínea anterior, determine, justificando os passos intermédios, a solução de

$$x_{k+2} + 2x_{k+1} - 8x_k = k(-1)^k\ (k \geq 0),\ x_0 = 0,\ x_1 = 0.$$

3. (a) Determine

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s+2)}\right\},$$

usando o Teorema da Convolução, onde $\mathcal{L}^{-1}$ representa o operador Transformada inversa de Laplace.

(b) Sabendo que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, determine, recorrendo à transformada de Laplace, a solução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + y(t) = e^{-2t},\ t \geq 0.$$

(v.s.f.f.)

4. Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sinal periódico com frequência circular $\omega = 2\ rad/s$, definido em $[0, \pi[$ por

$$v(t) = t, \quad t \in [0, \pi[.$$

   (a) Determine a série de Fourier de v na forma complexa.
   (b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier anterior no intervalo $[-\pi, 2\pi]$.
   (c) Determine a expressão analítica da função soma da série de Fourier em $[\pi, 2\pi]$.

5. Considere a função $f(t) := e^{-2|t|}H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, onde H é a função de Heaviside.

   (a) Verifique que a transformada de Fourier desta função é dada por

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2 + i\omega} \ (\omega \in \mathbb{R}).$$

   (b) Use o resultado da alínea anterior e propriedades adequadas para determinar

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2023}{2i - t}\right\}.$$