$x(t) = \frac{1-\cos(120\pi t)}{2} + 1 + \frac{6}{2}(\cos(120\pi t)+\cos(240\pi t))$

Departamento de Engenharia Informática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra

$= \frac{3\cos(0)}{2} - \frac{\cos(120\pi t)}{2} + 3(\cos(120\pi t)+\cos(240\pi t))$

Análise e Transformação de Dados

Frequência 2 – Exemplo de Questões

$\omega_{max} = 2\pi f_{max}$

maio de 2024

TA: $fs > 2 \times 120 = 240$ $\Rightarrow f_{max} = 120 Hz$

1. Qual das seguintes frequências é a menor frequência de amostragem, *fs*, de valor inteiro que verifica o Teorema da Amostragem para o sinal $x(t) = 1 + (\sin(90\pi t))^2 + 6\sin(60\pi t)\sin(180\pi t)$?

   ☐ 61 Hz ☐ 91 Hz ☐ 121 Hz ☐ 181 Hz ☒ 241 Hz ☐ 361 Hz ☐ 481 Hz

2. Qual o valor do período fundamental, *N*, e a frequência angular fundamental Ω_0 do sinal de tempo discreto *x*[*n*] que resulta da amostragem do sinal $x(t) = 1 + (\sin(90\pi t))^2 + 6\sin(60\pi t)\sin(180\pi t)$ com uma frequência de amostragem de 600 Hz?

   $f = \frac{1}{Ts} = \frac{1}{600} = Ts$

   $x[n] = x(t)\big|_{t=nTs} = 1 + \sin[0{,}15\pi n]^2 + 6\sin[0{,}1\pi n]\sin[0{,}3\pi n]$

   $x[n] = \cos(0) + \frac{1-\cos(0{,}3\pi n)}{2} + 3(\cos(0{,}2\pi n) - \cos(0{,}4\pi n)) = \frac{3}{2}\cos(0) - \cos(0{,}3\pi n)/2 + 3(\cos(0{,}2\pi n) - \cos(0{,}4\pi n))$

   Resposta: $N =$ 20 $\Omega_0 =$ $0{,}1\pi$ rad $\Omega_0 = 2\pi f_0$

   $N_0 = \frac{1}{f_0} = 20$ $\Leftrightarrow f_0 = 0{,}05$

   $\Omega_0 = \text{mdc}(0{,}3\pi; 0{,}2\pi; 0{,}4\pi; 0) = 0{,}1\pi$

3. Considere que a Transformada de Fourier (FT) de um sinal *x*(*t*) não periódico é dada por:

$X_{DFT}[0] = 400 = X_{DTFT}(0)$

$$X_{FT}(\omega) = \begin{cases} 0 & ,\omega \leq -40\pi \vee \omega \geq 40\pi \\ \frac{(40\pi-\omega)(40\pi+\omega)}{200\pi^2} & ,-40\pi < \omega < 40\pi \end{cases}$$

   a) Sabendo que a Transformada de Fourier Discreta (DFT) do correspondente sinal amostrado, *x*[*n*], tem o valor $X_{DFT}[0] = 400$, calcule o valor da frequência de amostragem (em Hz) considerada na obtenção do sinal amostrado *x*[*n*] a partir de *x*(*t*)?

   $X_{DTFT}(0) = fs\, X_{FT}(0) \Leftrightarrow \frac{400}{8} = fs = 50 Hz$

   b) Considerando um sinal periódico *xp*(*t*) de período $T_0 = 8s$, que coincide com o sinal *x*(*t*) durante um período, calcule o valor da componente c_0 da Série de Fourier complexa do sinal periódico *xp*(*t*)?

   $c_0 = \frac{1}{8} X_{FT}(0) = \frac{1}{\cancel{8}} \times \cancel{8} = 1$

   c) Pretendendo-se aplicar um filtro digital ideal ao sinal amostrado *x*[*n*] que elimine as frequências do sinal original *x*(*t*) superiores a 5Hz, diga que tipo de filtro usaria e com que frequência angular de corte Ω?

   $f_{corte} = 5Hz \Rightarrow w_{corte} = 10\pi \text{ rad s}^{-1}$

   Usaria um filtro passa-baixo

   $\Omega_{corte} = \frac{w_{corte}}{fs} = \frac{\pi}{5} \text{rad}$

4. Suponha que o espetro de um sinal de tempo contínuo $x(t)$ tem duas componentes às frequências 100Hz e 202.5Hz. Tendo obtido o correspondente sinal de tempo discreto de $x[n]$, usando uma frequência de amostragem de 1kHz, com uma duração de 1s, diga como identificar de forma exata as duas componentes de frequência de $x(t)$ a partir da DFT de $x[n]$?

$\Delta f = \frac{fs}{N} = \frac{1000}{1000} = 1Hz$, como precisamos de resolução 0.5Hz então damos padding de mais 1000 pontos

5. Sendo $X_{DFT}[k]$ a Transformada de Fourier Discreta, com N=32 amostras, de um sinal $x[n]$ que resultou da amostragem ($T_s = 0.25s$) de um sinal contínuo e periódico $x(t)$ ao longo de um período, e sendo $X_{DTFT}(\omega)$ a respetiva Transformada de Fourier de Tempo discreto (DTFT), indique se as seguintes expressões são verdadeiras (V) ou falsas (F):

$X_{DFT}[k] = 4X_{DTFT}(k\frac{\pi}{4})$ ☐ V | ☒ F	$X_{DFT}[k] = X_{DTFT}(k\frac{\pi}{4})$ ☒ V | ☐ F	$X_{DFT}[k] = \frac{1}{4}X_{DTFT}(k\frac{1}{4})$ ☐ V | ☒ F

6. Dado o sinal de tempo discreto $x[n] = 1 - 2\sin[0.03\pi n + \pi/2] + \cos[0.07\pi n]$, qual o período da Transformada de Fourier Discreta (DFT) do sinal?

$x[n] = \cos(0) - 2\cos[0{,}03\pi n] + \cos[0{,}07\pi n]$ $\Omega_0 = 0{,}01\pi$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi}{0{,}01\pi} = 200$ amostras.

Resposta: N = 200 amostras

7. Considerando que a Transformada de Fourier Discreta (DFT) de um sinal periódico de tempo discreto com N=50 e amostrado a 1Hz, resultou em $X_{DFT}[1]=-X_{DFT}[-1]=-50j$ e $X_{DFT}[50]=X_{DFT}[-50]=-100$. Indique **as opções corretas**:

- ☐ $x[n]$ é par;
- ☐ $x[n]$ é ímpar;
- ☐ A frequência máxima é 50Hz;
- ☒ A frequência máxima é 1Hz;
- ☒ $x[n]$ não é par nem ímpar;
- ☐ A frequência máxima é 2π Hz.

$\Delta f = \frac{1}{50}$ $f_{max} = \Delta f \times 50 = 1 Hz$

8. Considerando que a Transformada de Fourier Discreta (DFT) de um dado sinal periódico de tempo discreto com N = 50 resultou em $X_{DFT}[2] = -X_{DFT}[-2] = -50j$ e $X_{DFT}[5] = X_{DFT}[-5] = -100$, complete a expressão da Série de Fourier trigonométrica desse sinal periódico de tempo discreto:

$x[n]$ = 2 cos[$\frac{2\pi}{25}$ n + $(-\frac{\pi}{2})$] + 4 cos[$\frac{\pi}{25}$ n + π]   Anexo *1

9. Aplicando a STFT a um sinal de tempo discreto (obtido com uma frequência de amostragem f_s=1000Hz), usando uma janela de largura igual a 500ms sem sobreposição, verificou-se que, na 2ª janela, o valor máximo de |DFT| é o 50º valor da DFT.
Qual o valor da frequência (em Hz) a que ocorre o valor máximo de |DFT|?

$N = t_{janela} \cdot f_s$
$\Rightarrow N = 500$ amostras

☐ 48 Hz ☐ 49 Hz ☐ 50 Hz ☒ 98 Hz ☐ 99 Hz ☐ 100 Hz ☐ Nenhuma

$\Delta f = \frac{fs}{N} = \frac{1000}{500} = 2$ $f_{50} = 49 \times f1 = 98 Hz$

$f_s = 4000 Hz$

10. Considere um sinal de tempo discreto não estacionário que resultou da amostragem de um sinal áudio de tempo contínuo a uma frequência de amostragem *fs*=4*KHz*. Pretendendo-se localizar temporalmente a ocorrência de duas notas musicais, o Ré (294*Hz*) e o Lá (440*Hz*), aplicou-se a DFT por janelas (STFT) com uma dimensão temporal de 100ms sem sobreposição.

   a) Em cada janela, a que índice *k* da transformada X[*k*] corresponderá a nota musical Lá?

$N = 0,1 \times 4000 = 400$ amostras $\qquad \Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{4000}{400} = 10$

$f_k = k \times 10 \Leftrightarrow \frac{294}{10} = k \wedge \frac{440}{10} = k \Rightarrow k = 30$

   b) Determine o valor absoluto do menor erro de estimação da frequência correspondente à nota musical Ré?

☐ 0 Hz ☐ 1 Hz ☒ 4 Hz ☐ 6 Hz ☐ Nenhuma das opções

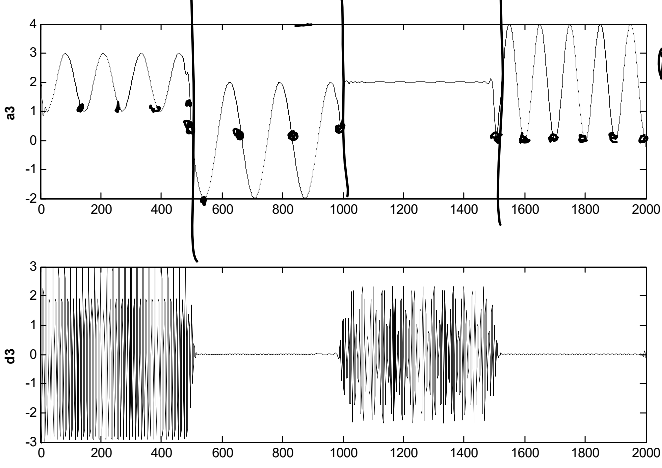
$k = 29,4 \qquad$ erro $= 4 Hz$

$f_{aprox} = 29 \times 10 = 290 Hz$

   c) Determine a expressão do sinal *x*[*n*] na 4ª janela da STFT, sabendo que se obteve: $X_{DFT}[k] = 40j\,\delta[k+5] + 80\,\delta[k+2] + 80\,\delta[k-2] - 40j\,\delta[k-5]\,, k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1.$

Anexo *2

11. Dado um sinal de tempo discreto, *x*[*n*]**,** obtido com uma frequência de amostragem f_s = 1*KHz*, 1000 Hz considere a decomposição de nível 3, apresentada na figura, resultante da aplicação da Transformada de Wavelet Discreta (DWT) com a *wavelet* da família *Daubechies* de ordem 9.



N = 2000

2 segundos

$\Delta f = 0,5 Hz$

   a) Efetue a caraterização tempo-frequência do sinal *x*[*n*] a partir da reconstrução do sinal com base nos coeficientes $\mathbf{a_3}$ e $\mathbf{d_3}$, preenchendo a seguinte tabela:

n	0 – 499	500 -999	1000 – 1499	1500 -1999
A partir de **d3**: detalhe	*f* ∈ [62,5 , 125 [Hz, *C* = 3		*f* ∈ [62,5 , 125 [Hz, *C* = 2	
A partir de **a3**: aprox	*f* = 0 *Hz*, *C* = 2 *f* = 8 *Hz*, *C* = 1	*f* = 6 *Hz*, *C* = 2	*f* = 0 *Hz*, *C*= 2	*f* = 0 *Hz*, *C* = 2 *f* = 10 *Hz*, *C* = 2

Nivel 3: 0 | a_3 | d_3 | 125
62,5

[0,500] [0,125]
[0,250]

b) Supondo que se pretende reconstruir o sinal $x[n]$ apenas com a frequência nula, determine, justificadamente, o coeficiente que deverá ser utilizado na reconstrução, e faça um esboço do resultado da reconstrução do sinal com base nesse coeficiente.

☐ a5 ☐ d5 ☐ a6 ☐ d6 ☒ a7 ☐ d7

12. Considere a seguinte série temporal,:

t(h)	0	4	8	12	16	20
T(C)	9	8	10	14	NaN	12

a) Determine o valor em falta usando extrapolação de ordem 0, extrapolação linear e interpolação linear. 2 lados

último que tales

últimos 2 pontos calculos declive

$T(16) = 14$

$m = \frac{14-10}{12-8} = 1$, $T(16) = T(12) + m(16-12) = 14+4 = 18$

$m = \frac{12-14}{20-12} = -0{,}25$ $T(16) = T(12) + m \times (16-12) = 13$

b) Supondo que foi identificado um modelo Auto Regressivo AR(3) com os coeficientes $a_1 = 2.0$, $a_2 = -1.2$, $a_3 = 0.1$, aplique este modelo para determinar o valor em falta.

$T(C) = a_1 T(C-4) + a_2 T(C-8) + a_3 T(C-12)$

$T(16) = 2T(12) - 1{,}2T(8) + 0{,}1T(4) = 16{,}8$

AR(p) Model

Noise if it exists

$T(t) = \alpha_0 + \alpha_1 T(t-1) + \alpha_2 T(t-2) + \dots + \alpha_p T(t-p) + \varepsilon_t$

*1 $$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_0 n} \quad , n \in [0, N-1]$$

$N = 50 \qquad m = 2, 5$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{\pi}{25} \text{ Rad}$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{M} C_m \cos(m\Omega_0 n + \theta_m) =$$

$$= C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{25} n + \theta_2\right) + C_5 \cos\left(\frac{\pi}{5} n + \theta_5\right) = *$$

$$c_2 = \frac{X[2]}{50} = \frac{-50j}{50} = -j \rightarrow C_2 = 2|c_2| = 2$$

$$\rightarrow \theta_2 = -\pi/2$$

$$c_5 = \frac{X[5]}{50} = \frac{-100}{50} = -2 \rightarrow C_5 = 2|c_5| = 4$$

$$\rightarrow \theta_5 = \pi$$

$$* \; 2 \cos\left(\frac{2\pi}{25} n - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cos\left(\pi/5 \, n + \pi\right)$$

*2

$$X_{DFT}[k] = 40j\,\delta[k+5] + 80\,\delta[k+2] + 80[k-2] - 40j\,\delta[k-5]$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{M} C_m \cos(m\Omega_0 n + \theta_m) \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{400} = \frac{\pi}{200} \text{ Rad}$$

$$= \left[C_2 \cos\left(\frac{\pi}{100} n + \theta_2\right) + C_5 \cos\left(\frac{\pi}{40} n + \theta_5\right)\right]\left(u[n-3N] - u[n-4N]\right)$$

$$c_2 = \frac{X_{DFT}[2]}{400} = \frac{8\cancel{0}}{40\cancel{0}} = \frac{1}{5} \rightarrow C_2 = 2|c_2| = 2/5, \quad \theta_2 = 0$$

$$c_5 = \frac{X_{DFT}[5]}{400} = \frac{-4\cancel{0}j}{40\cancel{0}} = -j/10 \rightarrow C_5 = 1/5, \quad \theta_5 = -\pi/2$$

$$\left[\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{100} n\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{\pi}{40} n - \pi/2\right)\right]\left[u[n-1200] - u[n-1600]\right]$$