



NOME:

Nº Estudante:

Observe que:

Exame com consulta condicionada (uma página A4 de apontamentos)
Não são permitidos meios electrónicos (computador, telemóveis, etc.),
excepto calculadoras.
Qualquer tentativa de fraude conduzirá à anulação da prova para todos os
intervenientes.
Respostas na folha de prova
Nas respostas múltiplas, as respostas erradas subtraem cotação.

1. Considere uma variável estocástica $X \in \{1, 2, 3\}$ tal que $P(X=1)=a/2$, $P(X=2)=1-a$ e $P(X=3)=a/2$, $a \in [0, 1]$. Nestas circunstâncias observa-se que (assinale a(s) resposta(s) certa(s)):

- a) $H(X)$ é máximo para:
- | | |
|------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> $a = 1$ | <input type="checkbox"/> $a = 1/3$ |
| <input type="checkbox"/> $a = 1/2$ | <input type="checkbox"/> nenhuma das anteriores |
- b) ☐ $H(X) = 1$ ☐ $H(X) \leq 2$
☐ $H(X) \geq 0$ ☐ nenhuma das anteriores
- c) ☐ $H(X, X) = H(X)$ ☐ $H(X, X) = H(X) + H(X)$
☐ $H(X, X) = H(X) + H(X|X)$ ☐ nenhuma das anteriores
- c) ☐ $I(X; X) = 0$ ☐ $I(X; X) = H(X|X)$
☐ $I(X; X) = H(X)$ ☐ nenhuma das anteriores
- d) ☐ $I(X; X)$ é máximo quando $a = 0$
☐ $I(X; X)$ é máximo quando $a = 1$
☐ $I(X; X)$ é máximo quando $a = 0.5$
☐ nenhuma das anteriores

2. Considere que $Y = \log_2(2X+2)$. Assumindo que $D()$ representa a distância KL, assinale as opções corretas:

- a) ☐ $H(X, Y) \geq 0$ ☐ $H(X, Y) \leq 1$
☐ $H(Y) \geq 0$ ☐ nenhuma das anteriores
- b) ☐ $H(X, Y) = H(Y)$ ☐ $H(X, Y) = H(Y) + H(X)$
☐ $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$ ☐ nenhuma das anteriores
- c) ☐ $I(X; Y) = 0$ ☐ $I(X; Y) = H(X|Y)$
☐ $I(X; Y) = H(Y)$ ☐ nenhuma das anteriores

- d) ☐ $D(X;Y) = 0$ ☐ $D(X;Y)+D(Y;X) \leq 2$
☐ $D(X;Y)+D(Y;X) = H(Y)+H(X)$ ☐ nenhuma das anteriores
- e) ☐ $D(X;Y)+D(Y;X) = 2H(X)$ ☐ $D(X;Y)+D(Y;X) \geq 0$
☐ $D(X;Y)+D(Y;X) = 2H(Y)$ ☐ nenhuma das anteriores

3) Considere uma variável aleatória X que pode tomar os valores $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ com probabilidade $1/e^2, 2/e^2, \dots, 2^n/(n!e^2), \dots$. Nestas condições observa-se que (Note que: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{-n} = \frac{a}{r-1}, \sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{1-r^2}, \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$):

- a) Para aprender o processo que esteve na origem de X pretende-se que a saída Y do algoritmo de aprendizagem verifique:
☐ $H(Y) > H(X)$ ☐ $I(X;Y) = 0$
☐ $I(X;Y) = H(X)$ ☐ nenhuma das anteriores
- b) Um código de Huffman consegue representar os símbolos da sequência com:
☐ menos de $5/3$ bits/símb. ☐ nunca menos de $2/3$ bits/símb.
☐ Não é possível codificar com Huffman ☐ nenhuma das anteriores

4 – Assinale a(s) resposta(s) certa(s).

- a) ☐ - A diferença entre um código Huffman e um código LZ77 é que o segundo é mais eficiente qualquer que seja o contexto.
☐ - O código aritmético e o código Fano-Elias têm o mesmo princípio.
☐ - A relação entre o LZW e o LZ77 é que o segundo não consegue capturar os padrões locais.
☐ - Nenhuma das anteriores está correcta
- b) ☐ - O código $\{0,10,110\}$ é óptimo.
☐ - O código $\{0,01,011\}$ é instantâneo
☐ - O código $\{0,01,011\}$ é unicamente decodificável
☐ - Nenhuma das anteriores está correcta

5 – Considere uma fonte de informação com alfabeto $A=\{0,1,2\}$. Seja X a variável estocástica correspondente ao símbolo e Y a variável estocástica correspondente ao símbolo anterior numa cadeia de símbolos. Assuma que a distribuição conjunta $P(X,Y)$ é a que se apresenta na tabela seguinte:

$P(X,Y)$	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	$1/9$	$1/9$	$1/9$
$Y=1$	$1/9$	$1/9$	$1/9$
$Y=2$	$1/9$	$1/9$	$1/9$

- a) É possível afirmar-se que a representação mais eficiente atingível por um código que permite codificar X é (arredondado às milésimas):
☐ 1.102 bits/símb. ☐ 1.299 bits/símb.
☐ 3.170 bits/símb. ☐ Nenhuma das anteriores
- b) Aplicando um código de Huffman para codificar X , é possível garantir-se que o pior desempenho será:
☐ 1.299 bits/símb. ☐ 2.299 bits/símb.
☐ 4.170 bits/símb. ☐ Nenhuma das anteriores

c) Seja $D()$ a distância KL. Observa-se que $D(X,Y)$:

☐ 1.499

☐ 3.300

☐ 1.399

☐ Nenhuma das anteriores

d) Considere a sequência de X "001". A codificação da sequência usando um algoritmo aritmético poderá resultar na transmissão do seguinte código:

☐ 0.1000

☐ 0.1756

☐ 0.5000

☐ Nenhuma das anteriores

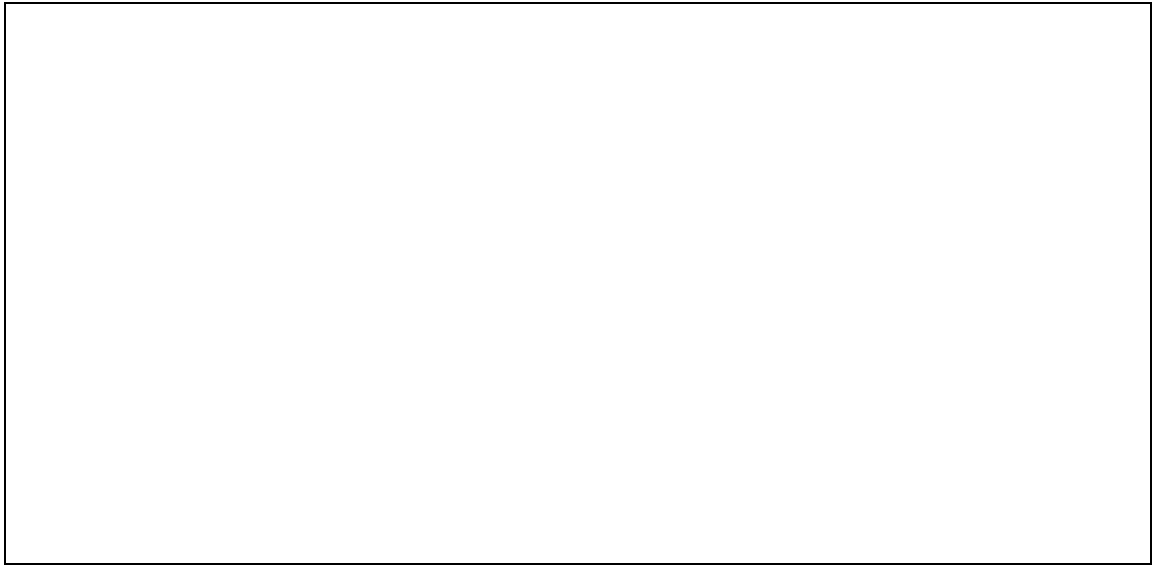
6 – Uma moeda de 2€ é lançada até que ocorra a primeira cara.

- a) Sendo X o número requerido de lançamentos, calcule a entropia de X em bits. Assuma a situação genérica em que a moeda possa estar viciada, sendo f a probabilidade de ocorrência de caras.

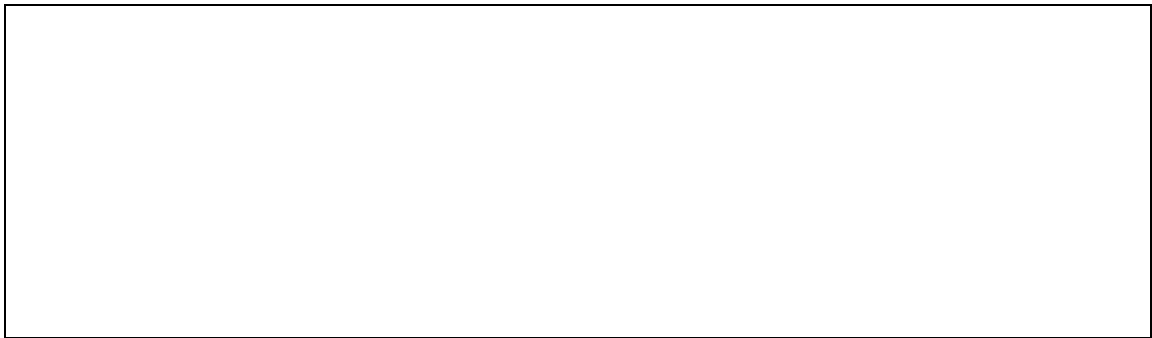
Observe que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$$

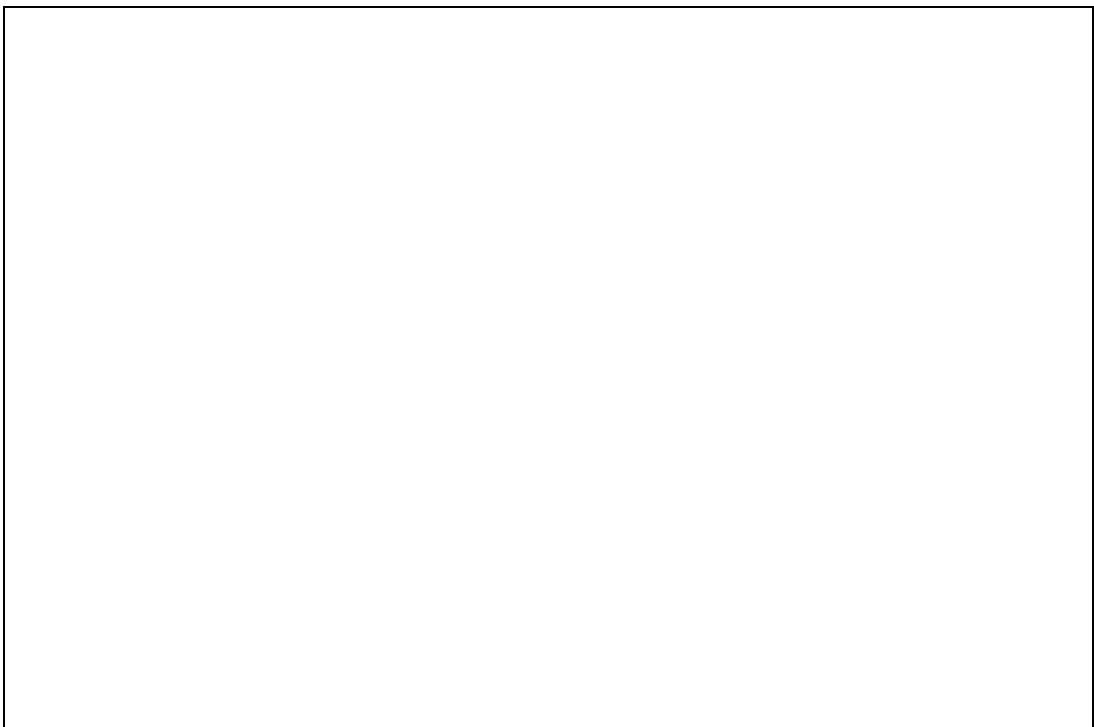
$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$



b) Qual a entropia quando a moeda é totalmente equilibrada?



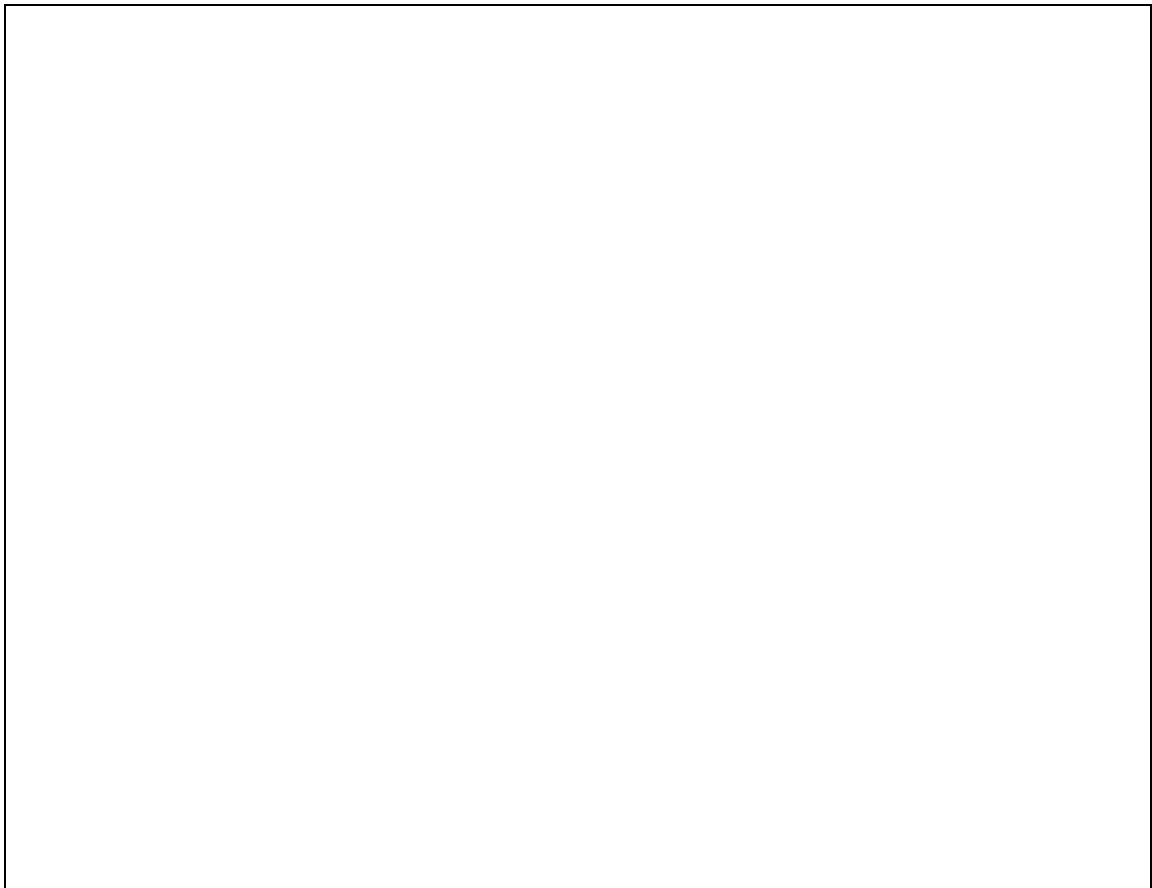
7 - Considere uma fonte de informação pertencente ao dicionário $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Assumindo que os símbolos são todos equiprováveis, indique a sequência de bits resultante da codificação da sequência “345” usando um código aritmético inteiro com 7 bits.

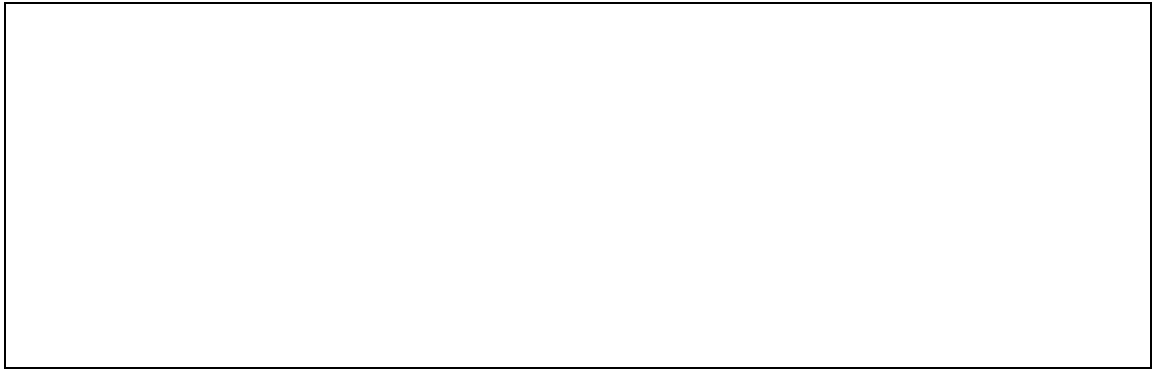




8 – Dada a fonte S e o alfabeto A , indique uma função do Python que permita a representação gráfica do respetivo histograma. Especifique os dois argumentos de entrada que a função requer para uma correta representação (considerando que para cada elemento do alfabeto é apresentada uma barra no histograma).

Como calculamos a entropia a partir dos valores (amplitudes) do histograma? Para responde a esta última questão apresente unicamente equações.





9 - Quer se converter uma imagem em cores numa imagem em escala de cinzas (Y). Para tal pretende-se utilizar o standard NTSC que aplica a seguinte transformação:

$$Y_{cinza}[i, j] = 0.2978R[i, j] + 0.5870G[i, j] + 0.1140B[i, j]$$

onde R, G e B representam as cores vermelha, verde e azul, respetivamente. A seguir é apresentada parte de uma função implementada em Python que, dada a imagem em cores, retorna a imagem pretendida. Complete o código nos espaços indicados.

```
def rgb2gray(.....):  
    import matplotlib.pyplot as plt  
  
    R, G, B = .....  
  
    Y = .....  
  
    plt.imshow(....., cmap='gray')  
    plt.show()  
  
    return .....
```