Modelo 2 2023/2024

① $x(t) = 1 + \sin^2(90\pi t) + 6\sin(60\pi t)\sin(180\pi t) =$
$= 1 + \frac{1}{2}(1 - \cos(180\pi t)) + 3(\sin(240\pi t) + \sin(120\pi t))$

· $\omega \in \{0, 120\pi, 180\pi, 240\pi\}$ rad/s $\Rightarrow$
$\Rightarrow f \in \{0, 60, 90, 120\}$ Hz

Pelo teorema da amostragem $f_s > 2 \cdot f_{max} \Leftrightarrow f_s > 240$, ou seja, 241 Hz

② $f_s = 600$ Hz $\quad f_0 = mdc(0, 60, 90, 120) = 30 \Rightarrow w_0 = 60\pi$

$N = \frac{T_0}{T_s} = \frac{f_s}{f_0} = \frac{600}{30} = 20 s \quad \Omega_0 = w_0 T_s = 30\pi \cdot \frac{1}{600} = \frac{\pi}{10}$ rad

③

$$X_{FT}(\omega) = \begin{cases} 0 & , \ \omega \leq -40\pi \vee \omega \geq 40\pi \\ \frac{(40\pi - \omega)(40\pi + \omega)}{200\pi^2} & , \ -40\pi < \omega < 40\pi \end{cases}$$

ⓐ $X_{DFT}[a] = X_{DTFT}(a\Delta w) = f_s X_{FT}(a\Delta w)$
$\Delta w \equiv$ Resolução

$X_{DFT}[0] = f_s X_{FT}[0] \Leftrightarrow 400 = \frac{1600\pi^2}{200\pi^2} \cdot f_s \Leftrightarrow \frac{400}{8} = f_s = 50$ Hz

ⓑ $T_0 = 8s \quad c_m = \frac{X(m w_0)}{T_0}, \quad X(0) = \frac{1600\pi^2}{200\pi^2} = 8 \Rightarrow c_0 = \frac{8}{8} = 1$

Como é um sinal periódico

ⓒ Usaria um filtro low-pass

$f_c = 5$ Hz $\Leftrightarrow w_c = 10\pi$ rad/s $\quad \Omega_c = \frac{w_c}{f_s} = \frac{10\pi}{50} = \frac{\pi}{5}$ rad

④ Há $N=1000$ amostras pois $f_s = 1$ KHz durante 1s
A resolução é $\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1000}{1000} = 1$, mas 202,5 não é da forma $\Delta f \cdot a, a \in \mathbb{N}$
É necessário ter metade da resolução, podemos estender o sinal para 2s adicionando zero padding em 1000 amostras, obtendo $N=2000 \Rightarrow \Delta f = 0,5$

$X_{DFT}[a] = X_{DTFT}(a\Delta\omega) = f_s X_{FT}(a\Delta\omega)$

⑤ $N=32;\ T_s=0{,}25 \Leftrightarrow f_s=4 \Leftrightarrow \omega_s=8\pi \qquad \Delta\omega = \frac{8\pi}{32} = \frac{\pi}{4}$

$X_{DFT}[K] = 4X_{DTFT}(K\frac{\pi}{4}) \leftarrow F \qquad X_{DFT}[K] = X_{DTFT}(K\frac{\pi}{4}) \leftarrow V$

$X_{DFT}[K] = \frac{1}{4}X_{DTFT}(K\frac{1}{4}) \leftarrow F$

⑥ $x[n] = 1-2\sin[0{,}03\pi n + \frac{\pi}{2}] + \cos[0{,}07\pi n]$

$\Omega \in \{0{,}03\pi, 0{,}07\pi\} \Rightarrow \Omega_0 = \text{mdc}(0{,}03\pi, 0{,}07\pi) = 0{,}01\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow N = \Omega_0^{-1} \cdot 2\pi = 200$

⑦ $N=50;\ f_s = 1\,Hz;\ X_{DFT}[1] = -X_{DFT}[-1] = -50j$
$X_{DFT}[50] = X_{DFT}[-50] = -100$

$X_{DFT}[n] \in \mathbb{R}, \forall n \Rightarrow x[n]$ é par
$X_{DFT}[n] \notin \mathbb{R}, \forall n \Rightarrow x[n]$ é ímpar
$X_{DFT}[n] \notin \mathbb{R}, \exists n \wedge X_{DFT}[n] \in \mathbb{R}, \exists n \Rightarrow$ nem par nem ímpar
Portanto, neste caso, não é par nem ímpar

$f_{max} = 1\,Hz$

⑧ $N=50;\ X_{DFT}[2] = -X_{DFT}[-2] = -50j \qquad ,\ m \in \{2,5\};\ x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\Omega_0 n},\ n \in [0, N-1]$
$X_{DFT}[5] = X_{DFT}[-5] = -100$

$\Omega_0 = 2\pi N^{-1} = \pi\frac{1}{25}$ rad

$C_m = 2|c_m|,\ \forall m>0$
$\theta_m = \angle c_m,\ \forall m \geq 0$

$c_m = \frac{X[m]}{N},\quad c_2 = \frac{-50j}{50} = -j = e^{-\frac{\pi}{2}j} \Rightarrow C_2 = 2 \wedge \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$

$c_5 = \frac{-100}{50} = -2 = 2e^{\pi j} \Rightarrow C_5 = 4 \wedge \theta_5 = \pi$

$x[n] = 2\cos[\frac{2\pi}{25}n - \frac{\pi}{2}] + 4\cos[\frac{\pi}{25}n + \pi]$

Em 1 segundo há 1000 amostras, como a janela é meio segundo, a resolução é 2, uma fórmula mais geral seria: $N = l_w \cdot f_s$; $\Delta f = \frac{f_s}{N}$

(9) $f_s = 1000\,Hz$, $l_w = 500\,ms \Rightarrow \Delta f = \frac{1000}{500} = 2$

Para chegar ao valor 50 da DFT, dão-se 49 passos.

$f(\text{componente } 50) = 49 \cdot \Delta f = 98\,Hz$

(10) $f_s = 4000\,Hz$; Ré $= 294\,Hz$; Lá $= 440\,Hz$

(a) $l_w = 0{,}1\,s$

Em cada janela há $N = l_w \cdot f_s = 400$ amostras. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{f_s}{N} = 10$$

$$Lá = K \cdot \Delta f \Leftrightarrow 440 = K \cdot 10 \Leftrightarrow K = 44$$

(b) O múltiplo de Δf mais próximo de 294 é 290

$294 - 290 = 4\,Hz$

(c) $X_{DFT}[K] = 40j\,\delta[K+5] + 80\,\delta[K+2] + 80\,\delta[K-2] - 40j\,\delta[K-5]$, $K = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1$

$x[n]$ na 4ª janela

$$x[n] = \sum_{m=0}^{M} C_m \cos[m\Omega_0 n + \theta_m] \Leftrightarrow \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{400} = \frac{\pi}{200}$$

400 amostras por janela

$m \in \{2, 5\}$

$\theta_m = \angle c_m$

$C_m = 2|c_m|$

$$c_2 = \frac{X_{DFT}[2]}{400} = \frac{80}{400} = 0{,}2 \Rightarrow C_m = 0{,}4 \wedge \theta_m = 0$$

$$c_5 = \frac{X_{DFT}[5]}{400} = \frac{-40j}{400} = -0{,}1j \Rightarrow C_m = 0{,}2 \wedge \theta_m = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[0{,}4\cos\left[2 \cdot \frac{\pi}{200} \cdot n + 0\right] + 0{,}2\cos\left[5 \cdot \frac{\pi}{200} \cdot n - \frac{\pi}{2}\right]\right]\underbrace{\left[u[n-3.N] - u[n-4.N]\right]}$$

Limitar o resultado desde o final da janela 3 e o final da janela 4

⑪ $f_s = 1000\ Hz$, Pode-se verificar pelos gráficos que $N = 2000$, então o sinal tem 2s

ⓐ $\Delta f = \frac{f_s}{N} = 0{,}5\ Hz$

$\frac{F_s}{2}$

$[0, 500]$

$[0, 250[$ $[250, 500]$

$[0, 125[$ $[125, 250[$

$[0; 62{,}5[$ $[62{,}5; 125[$ ← - - - - Nível 3

Coeficiente de Aproximação a3 — Coeficiente de Detalhe d3

$d_4 \rightarrow$ 0 - 499: $f \in [62{,}5; 125[\ Hz$, $C = 3$ | 1000 - 1499: $f \in [62{,}5; 125[\ Hz$, $C = 2$

Cada intervalo de 500 amostras tem 0,5 s

a3 → 0 - 499: Valor no meio; $f = 0\ Hz$, $C = 2$; $f = \frac{\#oscilações}{tempo} = \frac{4}{0{,}2} = 8$, $C = \frac{13 - 11}{2} = 1$ (max, min)

500 - 999: $f = \frac{3}{0{,}5} = 6$; $C = \frac{12 - (-2)}{2} = 2$

1000 - 1499: $f = 0$, $C = 2$

1500 - 1999: $f = 0\ Hz$, $C = 2$; $f = \frac{5}{0{,}5} = 10\ Hz$, $C = 2$

ⓑ Frequência mais pequena (não nula) é 6 Hz, continuamos a dividir até que 6 não faça parte do coeficiente de aproximação, de modo a restar apenas a frequência nula

a3 → $[0; 62{,}5]$

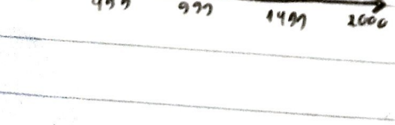
a4 → $[0; 31{,}25[$ $[31{,}25; 62{,}5]$

a5 → $[0; 15{,}625[$ $[15{,}625; 31{,}25[$

a6 → $[0; 7{,}8125[$ $[7{,}8125; 15{,}625]$

a7 → $[0; 3{,}90625[$ $[3{,}90625; 7{,}8125]$

→ $6\ Hz \notin [0; 3{,}90625[$, como tal, a7 pode ser usado para reconstruir o sinal apenas com a freq. nula.



(12) Extrapolação de ordem 0 (último antes de NaN): $T(16) = 14 = T(12)$

(a) Extrapolação linear (declive com os últimos 2 antes de NaN + último antes de NaN):

$$m = \frac{T(12) - T(8)}{12-8} = \frac{14-10}{12-8} = 1; \quad T(16) = T(12) + m(16-12) = 14 + 4 = 18$$

Interpolação Linear (declive com último antes e primeiro após NaN + último antes):

$$m = \frac{T(20) - T(12)}{20-12} = \frac{12-14}{20-12} = -0{,}25; \quad T(16) = T(12) + m(16-12) = 13$$

(b) $T(C) = a_1 T(C-4) + a_2 T(C-8) + a_3 T(C-12) \Rightarrow$

$\Rightarrow T(16) = 2\,T(12) + (-1{,}2)\,T(8) + 0{,}1\,T(4) = 16{,}8$