



## Análise e Transformação de Dados

### Frequência 2 – Exemplo de Questões

maio de 2024

1. Qual das seguintes frequências é a menor frequência de amostragem,  $f_s$ , de valor inteiro que verifica o Teorema da Amostragem para o sinal  $x(t) = 1 + (\sin(90\pi t))^2 + 6\sin(60\pi t)\sin(180\pi t)$ ?
- ☐ 61 Hz    ☐ 91 Hz    ☐ 121 Hz    ☐ 181 Hz    ☐ 241 Hz    ☐ 361 Hz    ☐ 481 Hz
2. Qual o valor do período fundamental,  $N$ , e a frequência angular fundamental  $\Omega_0$  do sinal de tempo discreto  $x[n]$  que resulta da amostragem do sinal  $x(t) = 1 + (\sin(90\pi t))^2 + 6\sin(60\pi t)\sin(180\pi t)$  com uma frequência de amostragem de 600 Hz?

Resposta:  $N = \underline{\hspace{2cm}}$      $\Omega_0 = \underline{\hspace{2cm}}$  rad

3. Considere que a Transformada de Fourier (FT) de um sinal  $x(t)$  não periódico é dada por:

$$X_{FT}(\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega \leq -40\pi \vee \omega \geq 40\pi \\ \frac{(40\pi - \omega)(40\pi + \omega)}{200\pi^2} & , -40\pi < \omega < 40\pi \end{cases}$$

- a) Sabendo que a Transformada de Fourier Discreta (DFT) do correspondente sinal amostrado,  $x[n]$ , tem o valor  $X_{DFT}[0] = 400$ , calcule o valor da frequência de amostragem (em Hz) considerada na obtenção do sinal amostrado  $x[n]$  a partir de  $x(t)$ ?

- b) Considerando um sinal periódico  $x_p(t)$  de período  $T_0 = 8s$ , que coincide com o sinal  $x(t)$  durante um período, calcule o valor da componente  $c_0$  da Série de Fourier complexa do sinal periódico  $x_p(t)$ ?

- c) Pretendendo-se aplicar um filtro digital ideal ao sinal amostrado  $x[n]$  que elimine as frequências do sinal original  $x(t)$  superiores a 5Hz, diga que tipo de filtro usaria e com que frequência angular de corte  $\Omega$ ?

4. Suponha que o espectro de um sinal de tempo contínuo  $x(t)$  tem duas componentes às frequências 100Hz e 202.5Hz. Tendo obtido o correspondente sinal de tempo discreto de  $x[n]$ , usando uma frequência de amostragem de 1kHz, com uma duração de 1s, diga como identificar de forma exata as duas componentes de frequência de  $x(t)$  a partir da DFT de  $x[n]$ ?

5. Sendo  $X_{DFT}[k]$  a Transformada de Fourier Discreta, com  $N=32$  amostras, de um sinal  $x[n]$  que resultou da amostragem ( $T_s = 0.25s$ ) de um sinal contínuo e periódico  $x(t)$  ao longo de um período, e sendo  $X_{DTFT}(\omega)$  a respetiva Transformada de Fourier de Tempo discreto (DTFT), indique se as seguintes expressões são verdadeiras (V) ou falsas (F):

$X_{DFT}[k] = 4X_{DTFT}(k\frac{\pi}{4})$ <input type="checkbox"/> V   <input type="checkbox"/> F	$X_{DFT}[k] = X_{DTFT}(k\frac{\pi}{4})$ <input type="checkbox"/> V   <input type="checkbox"/> F	$X_{DFT}[k] = \frac{1}{4}X_{DTFT}(k\frac{1}{4})$ <input type="checkbox"/> V   <input type="checkbox"/> F
--	---	--

6. Dado o sinal de tempo discreto  $x[n] = 1 - 2\sin[0.03\pi n + \frac{\pi}{2}] + \cos[0.07\pi n]$ , qual o período da Transformada de Fourier Discreta (DFT) do sinal?

Resposta:  $N =$  \_\_\_\_\_

7. Considerando que a Transformada de Fourier Discreta (DFT) de um sinal periódico de tempo discreto com  $N=50$  e amostrado a 1Hz, resultou em  $X_{DFT}[1] = -X_{DFT}[-1] = -50j$  e  $X_{DFT}[50] = X_{DFT}[-50] = -100$ .

Indique **as opções corretas**:

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $x[n]$ é par;               | <input type="checkbox"/> $x[n]$ é ímpar;                  |
| <input type="checkbox"/> A frequência máxima é 50Hz; | <input type="checkbox"/> A frequência máxima é 1Hz;       |
| <input type="checkbox"/> $x[n]$ não é par nem ímpar; | <input type="checkbox"/> A frequência máxima é $2\pi$ Hz. |

8. Considerando que a Transformada de Fourier Discreta (DFT) de um dado sinal periódico de tempo discreto com  $N = 50$  resultou em  $X_{DFT}[2] = -X_{DFT}[-2] = -50j$  e  $X_{DFT}[5] = X_{DFT}[-5] = -100$ , complete a expressão da Série de Fourier trigonométrica desse sinal periódico de tempo discreto:

$$x[n] = \text{___} \cos[\text{___} n + \text{___}] + \text{___} \cos[\text{___} n + \text{___}]$$

9. Aplicando a STFT a um sinal de tempo discreto (obtido com uma frequência de amostragem  $f_s=1000\text{Hz}$ ), usando uma janela de largura igual a 500ms sem sobreposição, verificou-se que, na 2ª janela, o valor máximo de  $|DFT|$  é o 50º valor da DFT.

Qual o valor da frequência (em Hz) a que ocorre o valor máximo de  $|DFT|$ ?

- ☐ 48 Hz    ☐ 49 Hz    ☐ 50 Hz    ☐ 98 Hz    ☐ 99 Hz    ☐ 100 Hz    ☐ Nenhuma

10. Considere um sinal de tempo discreto não estacionário que resultou da amostragem de um sinal áudio de tempo contínuo a uma frequência de amostragem  $f_s=4\text{KHz}$ . Pretendendo-se localizar temporalmente a ocorrência de duas notas musicais, o Ré (294Hz) e o Lá (440Hz), aplicou-se a DFT por janelas (STFT) com uma dimensão temporal de 100ms sem sobreposição.

a) Em cada janela, a que índice  $k$  da transformada  $X[k]$  corresponderá a nota musical Lá?

b) Determine o valor absoluto do menor erro de estimação da frequência correspondente à nota musical Ré?

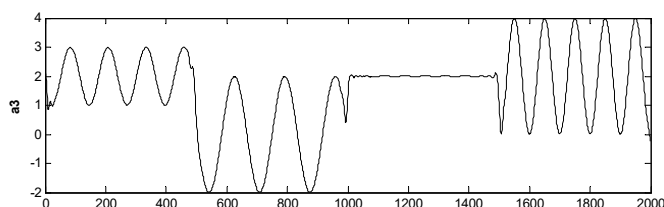
☐ 0 Hz    ☐ 1 Hz    ☐ 4 Hz    ☐ 6 Hz    ☐ Nenhuma das opções

c) Determine a expressão do sinal  $x[n]$  na 4ª janela da STFT, sabendo que se obteve:

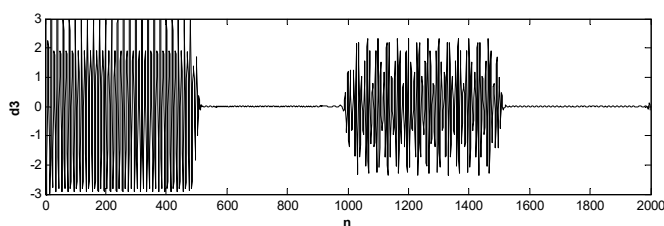
$$X_{DFT}[k] = 40j \delta[k + 5] + 80 \delta[k + 2] + 80 \delta[k - 2] - 40j \delta[k - 5], k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

11. Dado um sinal de tempo discreto,  $x[n]$ , obtido com uma frequência de amostragem  $f_s = 1\text{KHz}$ ,

considere a decomposição de nível 3, apresentada na figura, resultante da aplicação da Transformada de Wavelet Discreta (DWT) com a *wavelet* da família *Daubechies* de ordem 9.



a) Efetue a caracterização tempo-frequência do sinal  $x[n]$  a partir da reconstrução do sinal com base nos coeficientes  $\mathbf{a}_3$  e  $\mathbf{d}_3$ , preenchendo a seguinte tabela:



$n$	0 – 499	500 -999	1000 – 1499	1500 -1999
A partir de $\mathbf{d}_3$ :	$f \in [ \_, \_ ]$ Hz, $C = \_$		$f \in [ \_, \_ ]$ Hz, $C = \_$	
A partir de $\mathbf{a}_3$ :	$f = 0$ Hz, $C = \_$ $f = \_ \text{ Hz}$ , $C = \_$	$f = \_ \text{ Hz}$ , $C = \_$	$f = \_ \text{ Hz}$ , $C = \_$	$f = 0$ Hz, $C = \_$ $f = \_ \text{ Hz}$ , $C = \_$

b) Supondo que se pretende reconstruir o sinal  $x[n]$  apenas com a frequência nula, determine, justificadamente, o coeficiente que deverá ser utilizado na reconstrução, e faça um esboço do resultado da reconstrução do sinal com base nesse coeficiente.

☐ a5

☐ d5

☐ a6

☐ d6

☐ a7

☐ d7

12. Considere a seguinte série temporal,:

<b>t(h)</b>	0	4	8	12	16	20
<b>T(C)</b>	9	8	10	14	NaN	12

a) Determine o valor em falta usando extrapolação de ordem 0, extrapolação linear e interpolação linear.

b) Supondo que foi identificado um modelo Auto Regressivo AR(3) com os coeficientes  $a_1 = 2.0$ ,  $a_2 = -1.2$ ,  $a_3 = 0.1$ , aplique este modelo para determinar o valor em falta.