1 2 9 0 FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE D COIMBRA

dei25 departamento de engenharia informática 1995 – 2020

LEI - Computação Gráfica

prof. André Perrotta, prof. Evgheni Polisciuc

Exame Normal

Nome: Tiago Jorge Coimbra da Silva

Número: 2022216215

Duração: 90min | 15 de Janeiro, 2024 | valor max: 20

$$S = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Formulário

sejam os vetores $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{B}(b_1, b_2, b_3)$

produto escalar:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{1}^{3} a_i b_i = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

produto vetorial:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)\hat{x} + (a_3b_1 - b_3a_1)\hat{y} + (a_1b_2 - b_1a_2)\hat{z}$$

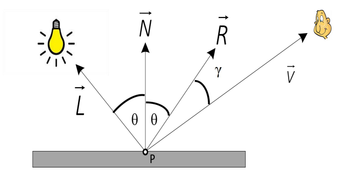
$$(a_2b_3 - b_2a_3)\hat{x} + (a_3b_1 - b_3a_1)\hat{y} + (a_1b_2 - b_1a_2)\hat{z}$$

transformações geométricas:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Proj_{perspectiva_{openGl}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \end{bmatrix} \quad Proj_{ortogonal} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modelo de Phong para iluminação:



	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	undefined

$$\vec{R} = 2(\vec{L} \bullet \vec{N})\vec{N} - \vec{L}$$

$$I_{vertice} = I_{luz_{amb}} K_{mat_{amb}} + I_{luz_{dif}} K_{mat_{dif}} \cos\theta + I_{luz_{spec}} K_{mat_{spec}} \cos\gamma^{ns}$$

$$I_{ver} = I_{amb} K_{matamb} + I_{dif} K_{matdif} \cos\theta + I_{spec} K_{matspec} \cos\gamma$$

Conceitos

Q1 (3 valores)

Na conceptualização e implementação de uma cena 3D utilizando o pipeline poligonal do OpenGl realizamos operações em 4 sistemas de coordenadas (ou espaços). Sobre estes sistemas, responda de forma clara, objetiva e sucinta as seguintes perguntas:

(a) (1 valor): Quais são esses 4 sistemas de coordenadas?

Coordenadas do objeto no mundo 3D $\xrightarrow{\text{transformações modelação}}$ coordenadas mundo 3D

Transformações de visualização → Coordenadas 3D da camera →

Recorte e transformações de projeção → Coordenadas 2D

View Matrix

Project Matrix

Model Matrix

$P_{screen} = M_{viewport} \cdot M_{proj} \cdot M_{view} \cdot M_{model} \cdot P_{obj}$

(b) (2 valores): Qual a função de cada um desses sistemas de coordenadas?

Coordenadas do objeto: são usadas para definir a geometria do objeto em relação a um ponto de origem do próprio objeto.

Coordenadas do mundo: Os objetos estão posicionados na cena tendo todos a mesma referência.

Coordenadas da Câmera: Objetos são vistos a partir da prespetiva da camera.

Coordenadas de recorte: Pontos estão prontos para o recorte e normalização, após a aplicação da matriz projeção

Q2 (2 valores)

O OpenGl foi implementado de forma a possibilitar o uso de um mesmo operador para a realização das transformações geométricas utilizadas em seu pipeline. Ou seja, podemos aplicar qualquer transformação em um vértice utilizando a seguinte relação:

$$v' = OP \times v, \text{ onde } OP \text{ é o operador da transformação.}$$

Explique de forma clara, objetiva e sucinta, o conceito matemático que fundamenta esta estratégia de implementação.

Para utilizar sempre a operação de multiplicação (de forma a facilitar a implementação) o openGL utiliza matrizes para representar operações. Estas matrizes contêm coordenadas homogéneas para unificar a representação das transformações

Geometria e transformações

Q3 (2 valores)

Determine uma rotina de desenho OpenGL (vértices e respetiva primitiva de desenho) que permita desenhar a figura representada na imagem. Utilize código ou pseudo-código OpengL. (Atenção ao desenho da figura com preenchimento (GL_FILL, cinza-claro) e sem preenchimento (GL_LINE, preto), que deve poder ser obtido sem alteração da primitiva de desenho escolhida).

resp:

```
auto draw = [&](bool f) -> void {
    if(f){
        glPolygonMode(GL_front_and_back, glFill);
        glColor3f(0,25;0,25;0,25)
    }
    else{
        glPolygonMode(gl_front_and_back, glline);
        glColor3F(0,0,0);
    }
    glBegin(GL_POLYGON);
        glVertex3F(0,5;0,5);
        glVertex3F(0.5, -0.5);
        glVertex3F(-0.5, -0.5);
        glVertex3F(-0.5; 0.5);
        glVertex3F(0,0);
        glVertex3F(0.5;0.5);
} glEnd();
draw(1); draw(0);
```

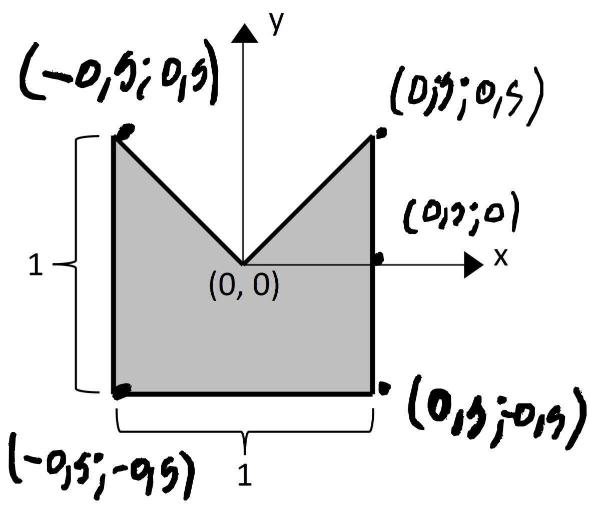
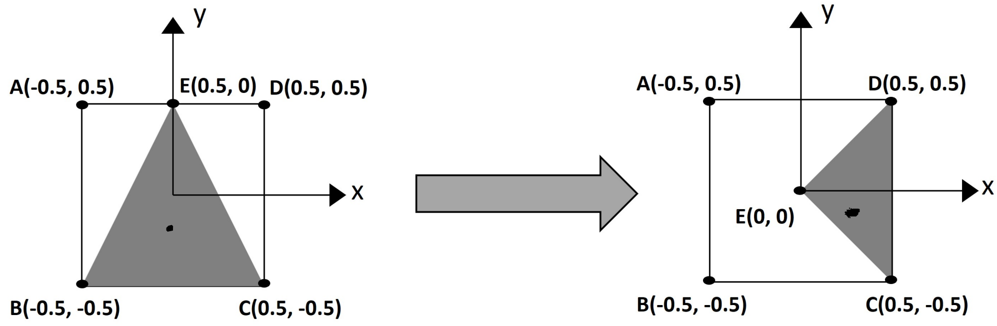


figura geométrica: em preto seu contorno, em cinza seu preenchimento

Q4 (3 valores)

Determine as transformações geométricas necessárias para transformar o triângulo BCE no triângulo CDE, representando-as de duas formas:



$$\triangle BCE \rightarrow \triangle CDE$$

(a) (1 valor): Indicação das transformações com valores e ordem correta.
(ex: Translação de 10 em x pode ser escrita como T(10, 0))

T(1/4,0)
R(90°)
S(1, 0.5)

Nota: O valor da Rotação segue as normas formais matemáticas

$$\underset{2^{\circ}}{R} \rightarrow \underset{1^{\circ}}{S}$$

(b) (2 valores): Representação da matriz final (M) resultante das transformações.

$$M_{final} = M_T \cdot M_R \cdot M_S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -0{,}5 & 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

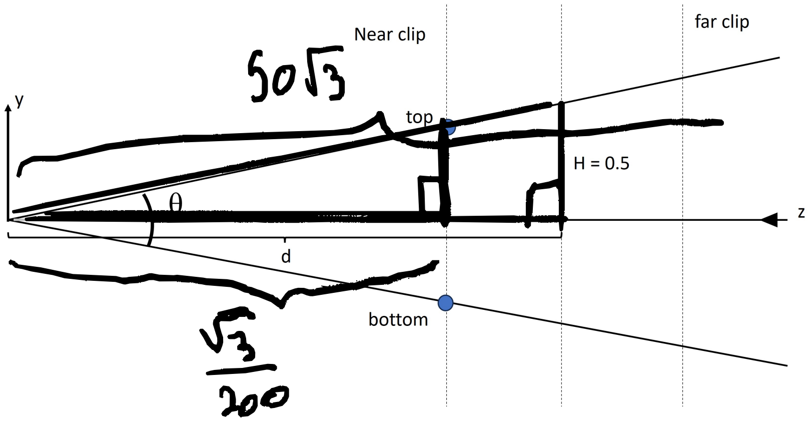
Visualização, projeção e recorte

Q5 (4 valores)

Considere uma aplicação desenvolvida em OpenGl e configurada com uma janela quadrada (largura=altura). Mais, considere que no inicio do programa é configurado o recorte (glViewPort) para toda a tela e que seu volume de projeção é configurado através da função $glFrustum(left, right, bottom, top, near, far)$ com os seguintes valores:

$glFrustum(\frac{-1}{200}, \frac{1}{200}, \frac{-1}{200}, \boxed{\frac{1}{200}}, \frac{\sqrt{3}}{200}, 100\frac{\sqrt{3}}{2})$

A imagem abaixo mostra uma vista lateral do volume de projeção definido.



vista lateral do volume de projeção

Com base na imagem e na informação fornecida, responda às questões:

(a) (1 valor): Qual o valor do ângulo θ?(justifique)

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1/200}{\sqrt{3}/200} = \frac{1}{\cancel{200}} \times \frac{\cancel{200}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 30 \Rightarrow \theta = 60^{\circ}$$

(b) (1 valor): Qual o valor da distância d?(justifique)

$$\tan(30^{\circ}) = \frac{0,5}{d} \Rightarrow d = \frac{1/2}{\sqrt{3}/3} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{6} = d = \sqrt{3}/2$$

Considere agora que, para além da projeção, é também definida uma vista da cena utilizando o algoritmo UVN implementado na função $lookat(\vec{pos}, \vec{target}, \vec{up})$ com os seguintes valores:

pos target

$lookat(\boxed{0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}}, \boxed{0, 0, 0}, 0, 1, 0)$

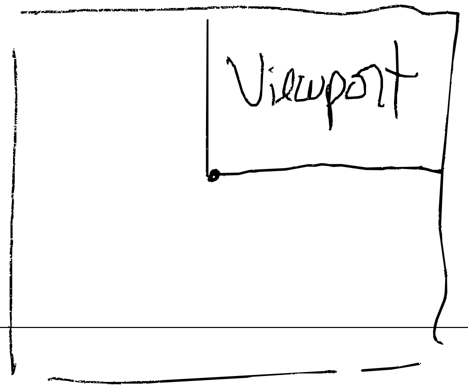
E, alteram-se os valores de recorte, utilizando a função $glViewport(x0, y0, width, height)$ com os seguintes valores:

$glViewport(\frac{w}{2}, \frac{h}{2}, \frac{w}{2}, \frac{h}{2})$, onde w e h referem à largura e altura da janela da aplicação.

Após estas definições é então desenhada uma linha entre os vértices $A(\frac{-1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $B(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(a) (1 valor): Qual a distância entre os vértices A e B em coordenadas mundo 3D? (justifique)

$d_{AB} = \sqrt{1+0+0} = 1$

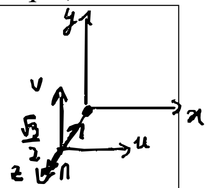


$d_{AB} = \sqrt{\frac{1}{4}+0+0+0}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} w = \frac{1}{4} w$

(b) (1 valor): Qual a distância entre os vértices A e B em pixels na janela da aplicação? (justifique)

$P_{A final} = M_{viewport} \cdot M_{Projeção} \cdot M_{modelView} \cdot P_A \approx P_B$



$\vec{N} = cam - P = (0, 0, \sqrt{3}/2)$

$\vec{u} = (0,1,0) \times (0,0,\sqrt{3}/2) = (\sqrt{3}/2, 0, 0)$

$V = \vec{N} \times \vec{u} = (0, 3/4, 0)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_1^3 a_i b_i = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$

$(a_2 b_3 - b_2 a_3)\hat{x} + (a_3 b_1 - b_3 a_1)\hat{y} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\hat{z}$

$M_{MV} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$M_{Proj} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}$

$A' = \begin{vmatrix} -1/4 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1 \end{vmatrix}$ $B' = \begin{vmatrix} 1/4 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1 \end{vmatrix}$

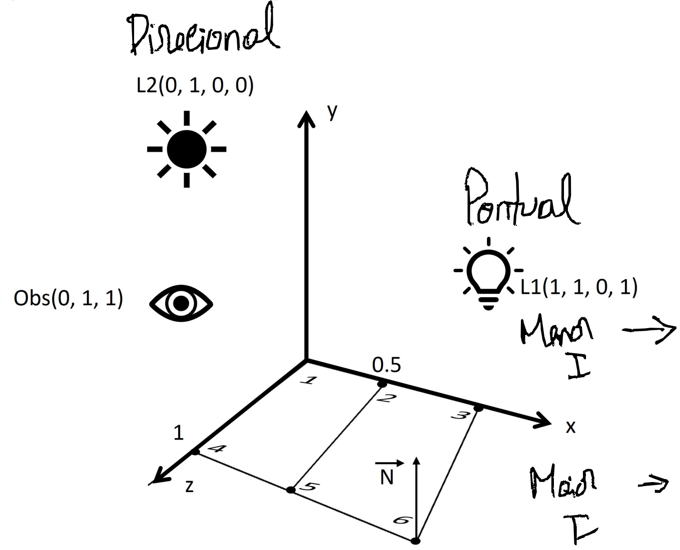
Iluminação

Q6 (6 valores)

A imagem abaixo mostra uma cena realizada em OpenGl formada por um malha de retângulos de resolução (2, 1), duas fontes de luz, L_1 e L_2, e um observador situado na posição $obs(0, 1, 1)$. A malha foi construida de forma a atribuir materiais com cores determinadas para cada vértice conforme é mostrado na tabela. Os coeficientes de reflexão ambiente k_A, difusa k_D e especular k_S do material são iguais a 1 ($k_A = k_D = k_S = 1$) e o coeficiente de especularidade ns também vale 1 $(ns = 1)$. A normal $\vec{N}(0, 1, 0)$ é a mesma em todos os vértices. As fontes de luz estão configuradas conforme especificado abaixo.

$L_{1_{pos}} = (1, 1, 0, 1)$
$L_{1_{amb}}(R, G, B) = (0, 0, 0)$
$L_{1_{dif}}(R, G, B) = (0, 0, 0)$
$L_{1_{spec}}(R, G, B) = (0, 0, 1)$

$\cancel{L_{2_{pos}} = (0, 1, 0, 0)}$
$\cancel{L_{2_{amb}}(R, G, B) = (0, 0, 0)}$
$\cancel{L_{2_{dif}}(R, G, B) = (1, 0, 0)}$
$\cancel{L_{2_{spec}}(R, G, B) = (0, 0, 0)}$



i	R	G	B	L1	L2
1	0	0	1	S	N
2	0	1	0	N	N
3	0	1	1	S	N
4	1	0	0	N	S
5	1	0	1	S	S
6	1	1	0	N	S

(a) (2 valor): Qual é o vértice com maior intensidade de luz? (justifique)

V_6

(b) (2 valor): Qual é o vértice com menor intensidade de luz? (justifique)

V_2

$V_1 = (0,0,0)$

(c) (2 valor): Qual a cor e intensidade de luz, em valores $R, G, B)$, no vértice 1? (justifique)

$I_{cor} = \cancel{I_{amb} K_{matamb}} + I_{dif} K_{matdif} \cos\theta + I_{spec} K_{matspec} \cos\gamma = \cancel{I_{dif} K_{matdif} \cos\theta} + \dfrac{I_{spec} K_{matspec} \cancel{\cos\gamma}}{2}$ $\cos(\theta) = 1$

$\vec{L_1} = (1,1,0) - (0,0,0) = (1,1,0)$

$\vec{N} = (0,1,0)$

$\vec{R} = 2 \cdot (\vec{L} \cdot \vec{N}) \vec{N} - \vec{L} = 2(0,1,0) - (1,1,0) = (0,2,0) - (1,1,0) = (-1,1,0)$

$\dfrac{(0,0,1) \cdot (0,0,1)}{2} = (0,0,\tfrac{1}{2})$

$\vec{obs} = (0,1,1)$

$\vec{R} \cdot \vec{obs} = |\vec{R}||\vec{obs}| \cos(\gamma) \Rightarrow \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{obs}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \cos(\gamma) \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \cos(\gamma) \Rightarrow \gamma = 60^0$