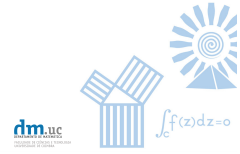




## Análise Matemática III (1.º Semestre)

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática



Ano Letivo 2022/2023

Exame Final — 27.01.2023

Duração: 2h 30mn

## Parte I

1. Esboce a região  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge 2 < |z| \leq 4\}$  e a sua imagem pela aplicação  $f$  definida por  $f(z) = (1-i)z + i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Refira as transformações geométricas envolvidas, justificando devidamente.
2. Determine, justificando, os zeros do polinómio

$$p(z) = z^3 - 8i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

3. Sejam  $u$  e  $v$  duas funções analíticas em  $B(z_0, R)$  tais que  $u(z_0) = 0$ ,  $u'(z_0) \neq 0$ ,  $v(z_0) = 0$ ,  $v'(z_0) = 0$ ,  $v''(z_0) \neq 0$  e  $v(z) \neq 0$ ,  $z \in A(z_0, 0, R)$ . Seja  $f$  a função definida em  $A(z_0, 0, R)$  por

$$f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}, \quad z \in A(z_0, 0, R).$$

Demonstre que o resíduo de  $f$  em  $z_0$  é dado por

$$2 \frac{u'(z_0)}{v''(z_0)}.$$

4. Usando Transformadas de Laplace, determine, para  $t \geq 0$ , a solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 6 \frac{dx}{dt}(t) + 9x(t) = \sin t$$

sujeita às condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 0$ .

Sugestão:  $\frac{1}{(s^2 + 1)(s + 3)^2} = \frac{3}{50} \frac{1}{s + 3} + \frac{1}{10} \frac{1}{(s + 3)^2} + \frac{1}{50} \frac{4 - 3s}{s^2 + 1}.$

5. (a) Sendo  $F(s) = \frac{1}{(s - 1)^2(s + 3)}$ , determine uma função causal  $f$  tal que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , usando o Teorema da Convolução.

(b) Determine, usando a alínea anterior e justificando,  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-4s}}{(s - 1)^2(s + 3)} \right\}.$

Cotação da Parte I: 10 valores.

Mínimos de 4 valores.

v.s.f.f.

## Parte II

6. (a) Desenvolva em série de Laurent de potências de  $z - 1$  a função  $f$  definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^{2023}(z+i)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, 1\},$$

na região  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < R\}$ , indicando o maior valor possível para  $R$ .

- (b) Seja  $\gamma$  a circunferência centrada em  $z_0 = 1$  e de raio  $1/2$ , com a orientação positiva, e considerada como um caminho simples e fechado. Usando a alínea anterior, determine, justificando,

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z-1)^{2023}(z+i)} dz.$$

7. (a) Usando o Teorema da Convolução, determine a transformada- $z$  inversa da função definida pela expressão analítica

$$X_1(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}, \quad |z| > 2.$$

- (b) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada- $z$  inversa da função definida pela expressão analítica

$$X_2(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+2)(z-1)}, \quad |z| > 3.$$

- (c) Usando as alíneas anteriores, determine, justificando os passos intermédios, a solução de

$$x_{k+2} + x_{k+1} - 2x_k = k3^k \quad (k \geq 0), \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1.$$

8. Seja  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um sinal periódico com frequência circular  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , definido em  $] -\pi, \pi]$  por

$$v(t) = t, \quad \text{se } t \in ] -\pi, \pi].$$

- (a) Determine a série de Fourier de  $v$  na forma complexa.

- (b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier anterior no intervalo  $[0, 4\pi]$ .

9. Considere a função  $f(t) := e^{-t}H(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $H$  é a função de Heaviside.

- (a) Verifique que a transformada de Fourier desta função é dada por

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{1+i\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

- (b) Use o resultado da alínea anterior e propriedades adequadas para determinar

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2023}{i-t}\right\}.$$

Cotação da Parte II: 10 valores.

Mínimos de 4 valores.