TOPDEI

Nuno Batista

TI 2023

① ⓐ A entropia é máxima quando os acontecimentos são equiprováveis

TCR = 100

$$\frac{a}{2} = 1 - a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

ⓑ A entropia é limitada por $\log_2(\#Alfa)$

TCR = 100

$$\log_2(3) \approx 1.5 \leq 2$$

E a entropia nunca é negativa

$$H(X) \geq 0$$

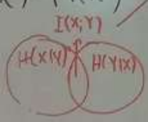
TCR = 100

ⓒ1 $H(X,Y) = H(X) + H(X|Y)$

$$H(X,X) = H(X) + \underbrace{H(X|X)}_{=0} = H(X)$$

TCR = 100

ⓒ2 $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$



$$I(X;X) = H(X) - H(X|X) =$$
$$= H(X)$$

TCR = 100

ⓓ $I(X;X) = H(X)$

como visto na alínea anterior, para $H(X)$ ser max, $a = \frac{1}{3}$

② $Y = \log_2(2X+2)$

Ou seja, Y e X são completamente dependentes

TCR = 100

ⓐ $H(Y) \geq 0$; $H(X,Y) \geq 0$

$H(X,Y) = H(X) + H(X|Y) = H(X)$

e $H(X)$ é apenas limitado superiormente por 1 caso $\#Alfa\,X = 2$

TCR = 100

ⓑ $H(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y)$

TCR = 100

ⓒ $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y)$

TCR = 100

ⓓ $D_{KL}(P,Q) = \sum_{x \in A_x} P(x) \log_2 \frac{P(x)}{Q(x)}$

X e Y têm as probabilidades distribuídas da mesma maneira, portanto $D_{KL}(X,Y) = 0 = D_{KL}(Y,X)$

O que também faz com que $D_{KL}(X,Y) + D_{KL}(Y,X) = 0 \leq 2$

TCR = 100

ⓔ Pela desigualdade de Gibbs:

$$D_{KL}(P,Q) \geq 0$$

$$D_{KL}(X,Y) + D_{KL}(Y,X) \geq 0$$

TI 2023

③ $A_x = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

$P(X) = \{\frac{1}{e^2}, \frac{2}{e^2}, \dots \frac{2^n}{n! e^2}, \dots\}$

TCR=100

ⓐ $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$

Queremos que $H(X|Y) = 0$, ou seja, que $I(X;Y) = H(X)$

TCR=?

ⓑ Pelo teorema de Shannon,

$$H(X) \leq L(C,X) = \sum_{x_i \in A_x} P(x_i) L(x_i)$$

Nº bits de x_i codificado

Se C for código ótimo (como no caso de Huffman):

$$H(X) \leq L(C,X) < H(X) + 1$$

$$H(X) = -\sum_{n=1}^{+\infty} P(x_n) \log_2 P(x_n) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n! e^2} \log_2 \frac{2^n}{n! e^2}$$

Provavelmente enunciado errado

④ TCR=100

ⓐ Tanto Fano-Elias como aritméticos têm o principio de usar as distribuições probabilisticas para codificar mensagens

TCR=100

ⓑ Um código é ótimo se

$$\sum_{i=1}^{\#Alfa} 2^{-l_i} = \sum_{i=1}^{\#Alfa} 2^{-\lceil \log_2(\frac{1}{P(i)}) \rceil} = 1$$

$\{0, 10, 110\} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \neq 1$ (Não é ótimo)

$\{0, 01, 011\} \rightarrow$ (Não é instantâneo)

$\{\underset{s_1}{0}, \underset{s_2}{01}, \underset{s_3}{011}\} \rightarrow$ É unicamente descodificável pelas regras:

Se um 0 aparecer, verificam-se quantos 1s existem antes do próximo 0.

Nenhum 1 $\rightarrow s_1$

Um 1 $\rightarrow s_2$

Dois 1s $\rightarrow s_3$

TCR = 70

5 a) $A = \{0, 1, 2\}$

$X \equiv$ símbolo atual

$Y \equiv$ símbolo anterior

$P(X=0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = P(Y=0)$

$P(X=1) = \frac{1}{3} = P(Y=1)$

$P(X=2) = \frac{1}{3} = P(Y=2)$

TCR = 70 $\log_2 3 \approx 1{,}6$

b) $1{,}6 + 1 = 2{,}6$

TCR = 80

c) $D_{KL}(P,Q) = \sum P(X) \log_2 \frac{P(X)}{Q(X)}$

$D_{KL}(X,Y) = 3\left(\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right)\right) = 0$

TCR = 100

d) $F(X=0) = \frac{1}{3}$

$F(X=1) = \frac{2}{3}$

$F(X=2) = 1$

it 0

$l_0 = 0$

$u_0 = 1$

it 1 "0"

$l_1 = 0 + (1-0)F(\emptyset) = 0$

$u_1 = 0 + (1-0)F(0) = \frac{1}{3}$

it 2 "0"

$l_2 = 0 + (\frac{1}{3} - 0)F(\emptyset) = 0$

$u_2 = 0 + (\frac{1}{3} - 0)F(0) = \frac{1}{9}$

it 3 "1"

$l_3 = 0 + (\frac{1}{9} - 0)F(0) = \frac{1}{27} \approx 0{,}037$

$u_3 = 0 + (\frac{1}{9} - 0)F(1) = \frac{2}{27} \approx 0{,}074$

Nenhuma das anteriores

TCR = 100

6 a) $A_x = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$

$P = \{(1-f)f, (1-f)^2 f, \dots, (1-f)^{n-1} f, \dots\}$

$$H(X) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (1-f)^{n-1} f \log_2\left((1-f)^n f\right) =$$

$$= -f \sum_{n=1}^{\infty} (1-f)^{n-1} \left[\log_2 (1-f)^{n-1} + \log_2(f)\right] =$$

$$= -\left[f \log_2(1-f) \sum (1-f)^{n-1} \cdot (n-1)\right] - \left[f \log_2 f \sum (1-f)^{n-1}\right] =$$

$$= -\left[f \log_2(1-f)\left(\sum n(1-f)^n - (1-f)^n\right]\right] - \frac{f \log_2 f}{1-f} \sum (1-f)^n =$$

$$= -f \log_2(1-f)\left[\frac{1-f}{f^2} - \frac{1-f}{f}\right] - \frac{f \log f}{1-f}\left(\frac{1-f}{f}\right)$$

TCR = 100

b) $$-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1} - \frac{1}{2}\frac{2}{1}\right] - \frac{\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 - 1\right] + 1\left(\frac{2}{2}\right) = 2$$

TI 2023

7

$F(1)=\frac{1}{6}$ $F(3)=\frac{3}{6}$ $F(5)=\frac{5}{6}$

$F(2)=\frac{2}{6}$ $F(4)=\frac{4}{6}$ $F(6)=1$

$$l_i = l_{i-1} + \lfloor (u_{i-1} - l_{i-1} + 1)\, F(a_x - 1) \rfloor$$

$$u_i = l_{i-1} + \lfloor (u_{i-1} - l_{i-1} + 1)\, F(a_x) \rfloor - 1$$

it0

$l_0 = 0000000 = 0$

$u_0 = 1111111 = 127$

it1 "3"

$l_1 = 0 + \lfloor (127 - 0 + 1)\frac{2}{6} \rfloor = 42 = \underline{0}101010$

$u_1 = 0 + \lfloor (127 - 0 + 1)\frac{3}{6} \rfloor - 1 = 63 = \underline{0}111111$

$T_x = 0 \rightarrow \begin{cases} l_1 = \underline{1}010100 \\ u_1 = \underline{1}111111 \end{cases}$

$T_x = 1 \rightarrow \begin{cases} l_1 = 0101000 = 40 \\ u_1 = 1111111 = 127 \end{cases}$

it2 "4"

$l_2 = 40 + \lfloor (127 - 40 + 1)\frac{3}{6} \rfloor = 84 = \underline{1}010100$

$u_2 = 40 + \lfloor (127 - 40 + 1)\frac{4}{6} \rfloor - 1 = 97 = \underline{1}100001$

$T_x = 1 \rightarrow \begin{cases} l_2 = 0\overset{0}{1}01000 \\ u_2 = \underline{1}\overset{1}{0}00010 \end{cases}$

$E3 \rightarrow NumE3 = 1 \rightarrow \begin{cases} l_2 = 0010000 = 16 \\ u_2 = 1000101 = 69 \end{cases}$

it3 "5"

$l_3 = 16 + \lfloor (67 - 16 + 1)\frac{4}{6} \rfloor = 52 = \underline{0}110100$

$u_3 = 16 + \lfloor 69 - 16 + 1)\frac{5}{6} \rfloor - 1 = 60 = \underline{0}111100$

$T_x = 0$

$T_x = NumE3 \times \overline{0} = 1 \rightarrow \begin{cases} l_3 = 1101000 \\ u_3 = 1111001 \end{cases}$

R: 01101