



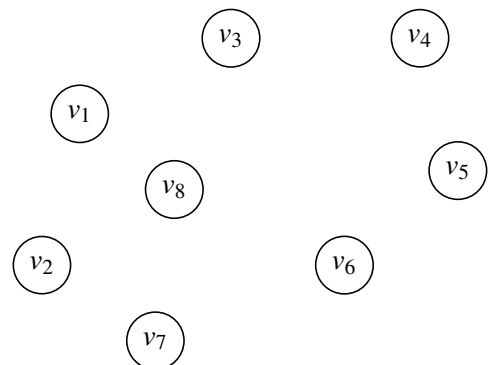
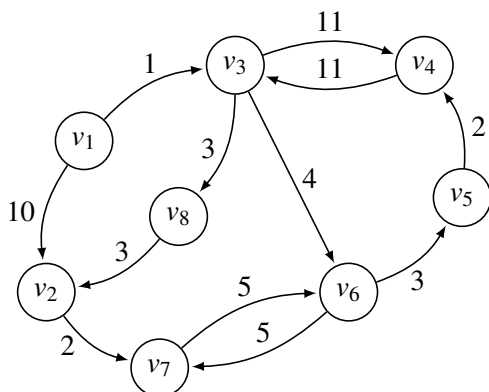
UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Faculty of Science and Technology
Department of Informatics Engineering

Estratégias Algorítmicas
Normal Exam – June 6 2022

Name: _____ Student ID: _____

12 grade points in total, 2h, closed books.

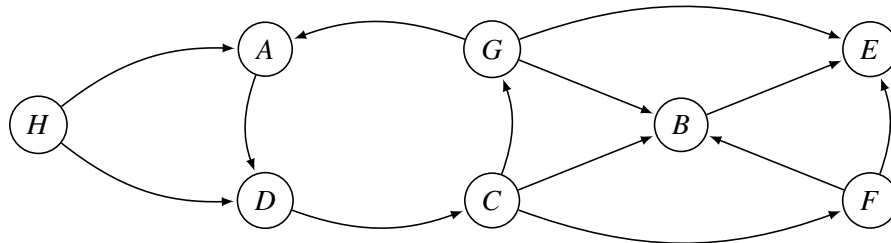
- 1.a) Find all shortest paths in the left-hand graph between vertex v_1 and every other vertex using Dijkstra algorithm. Draw the arcs that belong to the path in the right-hand graph. Fill in the table with the visited vertices, ordered according to the visiting order of Dijkstra algorithm, and with the shortest distance from vertex v_1 to every vertex. (2 g.p.)



Vertices:								
Distance:								

- 1.b) Consider that length of the arc from vertex v_3 to v_4 changed to -11 . Are the shortest paths that you have found above still valid after this modification? Would you be able to use Dijkstra algorithm? Justify your answer. (1 g.p)

2. Find the strongly connected components in the following graph using Tarjan Algorithm. Justify your answer by reporting the DFS tree starting from node *A*, choosing the vertices for traversal in alphabetic order of the labels, and by explicitly writing the final values for *dfs* and *low* at each vertex. In addition, report the strongly connected components, ordered by the time they are found in the DFS tree traversal. (2 g.p.)



3. Consider the following recurrence relation. Let v_1, \dots, v_ℓ be a sequence of ℓ positive integers. We define $M(i, j)$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq c$, as follows

$$M(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leq 0 \\ 0 & \text{if } j \leq 0 \\ \max \begin{cases} v_1 + M(i - v_1, j - 1) \\ v_2 + M(i - v_2, j - 1) \\ \dots \\ v_\ell + M(i - v_\ell, j - 1) \end{cases} & \text{if } i > 0 \text{ and } j > 0 \end{cases}$$

- 3.a) Give the pseudo-code of a top-down dynamic programming algorithm that explores the recurrence above to find the value for $M(m, c)$. (2 g.p.)

- 3.b) Give the pseudo-code of a bottom-up dynamic programming algorithm that explores the recurrence above to find the value for $M(m, c)$ and discuss its time complexity. (2 g.p.)

4. Consider a square binary matrix of size $n \times n$ that is filled up with ones and zeros. You want to count how many *islands* exist in this matrix. An island is a set of cells in the matrix containing only ones that has the following properties:

- (a) There exists a sequence of adjacent cells with ones between every pair of cells in the island;
- (b) It is not possible to add more cells to the island without breaking Property (a).

Two cells are adjacent if the absolute difference between the two row indices and between the two column indices is at most 1. Note the following particular case: a cell with one is an island if all adjacent cells contain 0. For example, in the following matrix, you can find three islands.

0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Describe a pseudo-code that allows to count how many islands exist in a matrix of size $n \times n$. Assume that the matrix is stored in a data structure M , where $M(i, j)$ allows to access the number in the matrix at row i and column j . Give the time complexity of your approach and show (informally) that is correct. (3 g.p.)



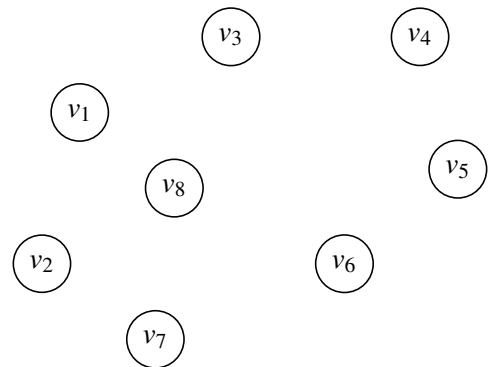
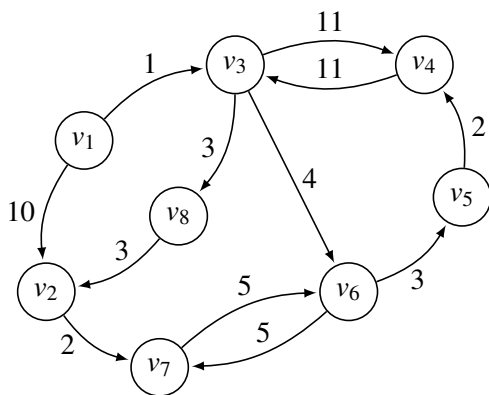
UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Faculdade de Ciência e Tecnologia
Departamento de Engenharia Informática

Estratégias Algorítmicas
Exame de Época Normal – 6 de junho de 2022

Nome: _____ N. de Estudante: _____

12 pontos, 2h, sem consulta.

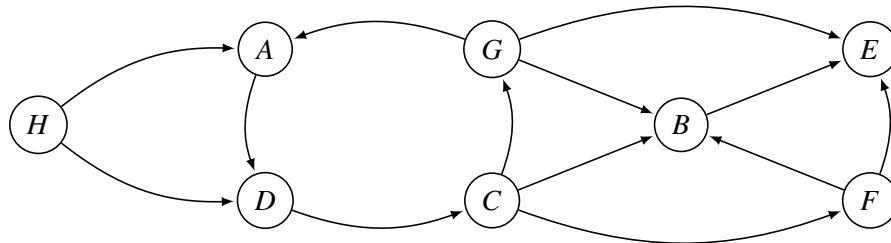
- 1.a) Encontre todos os caminhos mais curtos no grafo à esquerda entre o vértice v_1 e todos os restantes vértices com o Algoritmo de Dijkstra. No grafo à direita, desenhe os arcos que pertencem aos caminhos encontrados. Preencha a tabela com os vértices visitados, ordenados de acordo com a ordem de visita do algoritmo, e com o valor da distância mais curta do vértice v_1 a cada vértice. (2 pontos).



Vértices:								
Distância:								

- 1.b) Considere que o arco que liga o vértice v_3 ao vértice v_4 é -11 . Os caminhos que encontrou no exercício da alínea anterior serão ainda válidos depois desta modificação? Seria possível usar o Algoritmo de Dijkstra? Justifique a sua resposta. (1 ponto)

2. Encontre as componentes fortemente conexas no grafo seguinte com o Algoritmo de Tarjan. Justifique a sua resposta com a árvore de procura em profundidade com raiz no vértice *A*, escolhendo os vértices para a travessia por ordem alfabética das etiquetas, e reportando os valores finais de *dfs* e *low* em cada vértice. Reporte igualmente as componentes fortemente encontradas, ordenadas pelo tempo em que foram encontradas na travessia. (2 pontos)



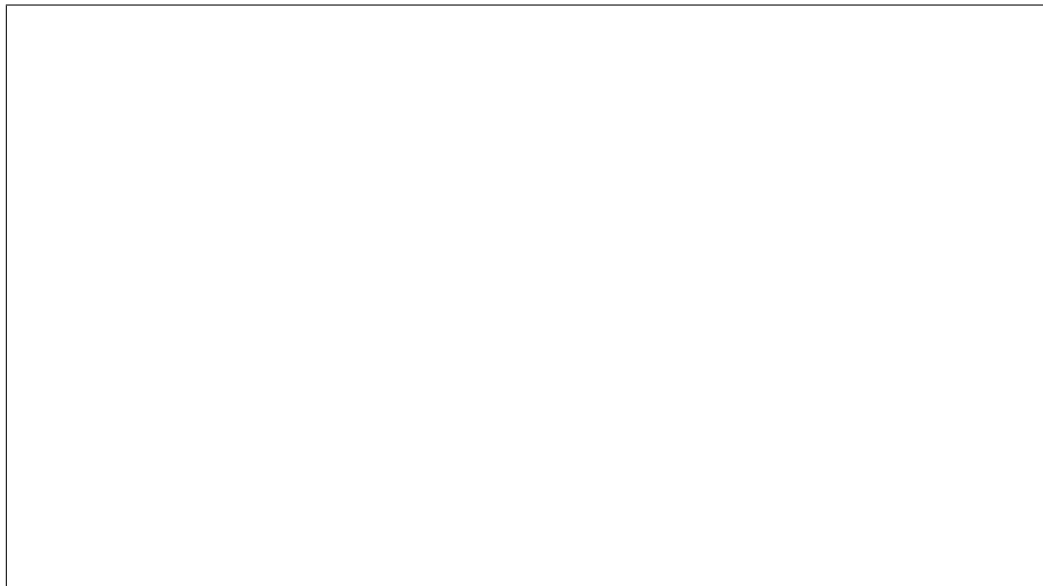
3. Considere a seguinte relação de recorrência. Seja v_1, \dots, v_ℓ uma sequência de ℓ inteiros positivos. Define-se $M(i, j)$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq c$, da seguinte forma

$$M(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \leq 0 \\ 0 & \text{se } j \leq 0 \\ \max \begin{cases} v_1 + M(i - v_1, j - 1) \\ v_2 + M(i - v_2, j - 1) \\ \dots \\ v_\ell + M(i - v_\ell, j - 1) \end{cases} & \text{if } i > 0 \text{ e } j > 0 \end{cases}$$

- 3.a) Escreva o pseudo-código de uma abordagem descendente de programação dinâmica que explore a recorrência acima para encontrar o valor de $M(m, c)$. (2 pontos)



- 3.b) Escreva o pseudo-código de uma abordagem ascendente de programação dinâmica que explore a recorrência acima para encontrar o valor de $M(m, c)$ e discuta a sua complexidade temporal. (2 pontos)



4. Considere uma matriz binária quadrada de tamanho $n \times n$ que está preenchida por uns e zeros. Pretende contar quantas *ilhas* existem na matriz. Uma ilha é um conjunto de células na matriz preenchidas com uns e que tem as seguintes propriedades:

- (a) Existe uma sequência de células adjacentes preenchidas com uns entre cada par de células na ilha;
- (b) Não é possível adicionar mais células à ilha sem violar a propriedade (a)

Duas células são adjacentes se a diferença absoluta entre os seus índices na linha e entre os seus índices na coluna é no máximo 1. Note o seguinte caso particular: uma célula preenchida com um é uma ilha se as células adjacentes estão preenchidas com 0. Por exemplo, na seguinte matriz, é possível encontrar três ilhas.

0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Escreva o pseudo-código que permita contar quantas ilhas existem numa matriz de tamanho $n \times n$. Assuma que a matriz está guardada numa estrutura de dados M , em que $M(i, j)$ permite aceder ao número guardado na célula na posição da linha i e coluna j . Reporte o tempo computacional da sua abordagem e demonstre (informalmente) que está correta. (3 pontos)

