Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Estatística LEI – LECD

Proposta de resolução da segunda frequência de Estatística (LEI+LECD) do ano letivo 24/25

I

1. O histograma sugere a densidade de uma districuição normal (podemos referir a forma de "sino"ou fazer o esboço do gráfico). Por outro lado, ao realizar um teste de ajustamento para averiguar se X segue uma distribuição normal (neste caso, o teste de Anderson-Darlin), obtivemos o $p-valor = 0.9496$. Uma vez que este p-valor é superior a qualquer nível de significância usualmente considerado ($\alpha = 0.01, ..., 0.05$) com estes dados, não temos razões para rejeitar a hipótese de que X segue uma distribuição normal.

2. Pretendemos testar as hipóteses

$$H_0 : m = 7.1 \quad \text{contra} \quad H_1 : m < 7.1$$

ao nível de significância 0.05. Uma vez que admitimos que X possui distribuição normal e que nada é dito sobre o desvio padrão de X (da população), relativamente à estatística de teste tem-se:

$$Z = \tfrac{\overline{X}-m_0}{S}\sqrt{n} \sim T(n-1) \qquad \text{(admitindo } H_0 \text{ verdadeira).}$$

A região crítica deste teste é

$$RC =]-\infty, -q_{0.95}] =]-\infty, -1.671]$$

onde $q_{0.95} = 1.671$ é o quantil de ordem 0.95 da distribuição $T(60)$. Mais, com esta amostra, obtemos

$$Z_{obs} = \frac{\overline{x} - 7.1}{s}\sqrt{61} = \frac{6.93 - 7.1}{0.42}\sqrt{61} = -3.161.$$

Então, atendendo a que $Z_{obs} \in RC$, rejeitamos H_0. Concluímos então que, com estes dados e adotando o nível de significância $\alpha = 0.05$, temos razões para considerar $m < 7.1$.

3. Uma vez que o *output* inclui a informação: "alternative hypothesis: true mean is less than 7.1"as hipóteses testadas pelo *software* são: $H_0 : m = 7.1$ e $H_1 : m < 7.1$. Por outro lado, o p-valor calculado é igual 0.001223, o qual é inferior ao nível de significância 0.05, também deste modo se rejeita a hipótese H_0. Portanto também a decisão estatística corresponde à que se tomou na alínea 2.

4. Sabemos que o p-valor de um teste para a média, de hipótese H_1 bilateral, é dado por $2 \times P(Z \geq |Z_{obs}|)$ e que o p-valor do teste de hipótese H_1 unilateral à esquerda é dado por $P(Z < Z_{obs})$. Como a estatística de teste Z tem lei simétrica relativamente à origem, tem-se

$$P(Z < Z_{obs}) = P(Z > -Z_{obs}) = P(Z > |Z_{obs}|).$$

Assim, para o teste de hipótese alternativa bilateral tem-se

$$p - valor = 2 \times P(Z \geq |Z_{obs}|) = 2P(Z < Z_{obs}) = 2 \times 0.001223 = 0.002446.$$

5. Havíamos concluído da normalidade de X. Porém, o desvio padrão σ é desconhecido.

   Neste sentido, para a determinação de um IC para a média (neste caso com um g.c. $\gamma = 0.98$), e usando o formulário, concluímos que a variável fulcral segue uma lei $T(n-1)$ (em que $n = 61$ é a dimensão da amostra) e os extremos do intervalo são $\overline{x} \pm q_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$, em que $\overline{x} = 6.93$ e $s = 0.42$ são, respetivamente, a média e o desvio padrão da amostra.

Com $\gamma = 0.98$, temos que $\frac{1+\gamma}{2} = 0.99$. Assim, para calcular $q_{0.99}$ temos que consultar a tabela da lei de Student para $T(60)$ e o resultado é $q_{0.99} = 2.390$.

Substituídos estes valores nos extremos do intervalo (em cima), um IC para a média com $\gamma = 0.98$, será $]6.802, 7.058[$ (com arredondamento na terceira casa decimal).

6. Havíamos concluído da normalidade de X. Porém, a média da amostra ($m = E(X)$) é desconhecida.

   Neste sentido, para a determinação de um IC para a variância (neste caso com um g.c. $\gamma = 0.95$), e usando o formulário, concluímos que a variável fulcral segue uma lei $\chi^2(n-1)$ (em que $n = 61$ é a dimensão da amostra) e o intervalo é da forma:

$$\left] \frac{(n-1)s^2}{q_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \frac{(n-1)s^2}{q_{\frac{1-\gamma}{2}}} \right[$$

   Com $\gamma = 0.95$, temos que $\frac{1+\gamma}{2} = 0.975$ e $\frac{1-\gamma}{2} = 0.025$. Assim, para calcular estes quantis temos que consultar a tabela da lei qui-quadrado para $\chi^2(60)$ e o resultado é $q_{0.975} = 83.3$ e $q_{0.025} = 40.5$.

   Substituído estes valores nos extremos do intervalo (em cima), um IC para a variância com $\gamma = 0.95$, será $]0.127, 0.261[$ (com arredondamento na terceira casa decimal).

7. A afirmação é verdadeira, pois se rejeitamos $H0$ para um n.s de 0.02 é porque, para este teste, o $p - valor < 0.02$ e por maioria de razão $p - valor < 0.05$. Assim, ao n.s.$= 0.05$ o resultado do teste conduz igualmente à rejeição de $H0$.

II

1. Definimos a variável

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se o chip for aprovado indevidamente;} \\ 0, & \text{caso contrário (i.e., devidamente aprovado ou não aprovado).} \end{cases}$$

   Sabemos que $Y \sim \mathcal{B}(p)$ onde $p = E(Y) = P(Y = 1)$.
   Temos uma amostra com dimensão $n = 100$, $(y_1, y_2, \ldots, y_{100})$, tal que $\sum_{i=1}^{100} y_i = 13$. Logo $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{100} y_i}{100} = \frac{13}{100} = 0.13$.
   Pretendemos testar

$$H_0 : p = 0.1 \text{ contra } H_1 : p > 0.1, \text{ ao nível de significância } 0.05.$$

   Como Y segue uma lei de Bernoulli e $n = 100 > 30$, a estatística de teste (sugerida pelo formulário) é

$$Z = 10 \times \frac{\overline{Y} - 0.1}{\sqrt{0.1 \times 0.9}} \overset{\bullet}{\sim} N(0,1) \qquad \text{(admitindo } H_0 \text{ verdadeira)}$$

   A região crítica do teste é

$$RC = [q_{0.95}, +\infty[= [1.645, +\infty[,$$

   onde $q_{0.95} = 1.645$ representa o quantil de ordem 0.95 da lei $N(0,1)$. Com base na amostra observada, temos

$$Z_{obs} = 10 \times \frac{\overline{y} - 0.1}{\sqrt{0.1 \times 0.9}} = 10 \times \frac{0.13 - 0.1}{0.3} = 10 \times \frac{0.03}{0.3} = 1 \notin RC.$$

   Assim, com base na amostra observada e ao nível de significância 0.05, aceitamos H_0, ou seja, não temos evidência estatística suficiente para afirmar que a proporção de chips indevidamente aprovados é superior a 0.1.

2. Seja X = "número de avarias registadas numa semana de trabalho".

   Pretendemos testar, ao nível de significância 0.05,

   H_0 : "X segue a distribuição predeterminada" contra H_1 : "X não segue a distribuição predeterminada".

   Temos a tabela seguinte, cujos valores A, B, C e D devem ser calculados:

	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4$ ou mais$\}$	Total
n_i	6	15	23	9	7	60
e_i	6.65	14.63	16.09	11.80	A	B
$\frac{(n_i-e_i)^2}{e_i}$	0.0635	0.0094	2.9676	0.6644	C	D

   Dado que $\sum_{i=1}^{5} e_i = 60$ temos $e_5 = 60-(e_1+e_2+e_3+e_4) = 60-(6.65+14.63-16.09-11.8) = 10.83$.
   Logo $A = 10.83$ e $B = 60$.
   Além disso, $C = \frac{(7-10.83)^2}{10.83} \approx 1.3545$.
   Por fim, completamos a tabela com $D = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i-e_i)^2}{e_i} = 0.0635+0.0094+2.9676+0.6644+1.3545 = 5.0594$.

   Como $e_i > 5, i = 1, \ldots, 5$, então as 5 categorias são adequadas para realizarmos o teste de ajustamento do qui-quadrado e a estatística de teste é

$$Q = \sum_{i=1}^{5} \frac{(N_i - e_i)^2}{e_i} \overset{\bullet}{\sim} \chi^2(4), \qquad \text{(admitindo } H_0 \text{ verdadeira)}$$

   A região crítica do teste é

$$RC = [q_{0.95}, +\infty[= [9.49, +\infty[,$$

   onde $q_{0.95} = 9.49$ representa o quantil de ordem 0.95 da lei $\chi^2(4)$.

   Com base na amostra observada, temos

$$Q_{obs} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} = 5.0594 \notin RC.$$

   Assim, com base na amostra observada e ao nível de significância 0.05, aceitamos H_0, ou seja, podemos considerar que X segue a distribuição predeterminada.

3. (a) Coeficiente de determinação: $R^2 = 0.9022$
   Interpretação: 90.22% da variação nos valores de Y são explicados pelo modelo de regressão linear.

   (b) O gráfico QQ-plot indica que os quantis observados nos resíduos estão próximos dos quantis teóricos associados a uma lei normal uma vez que os pontos estão próximos da reta, o que nos sugere que a distribuição dos resíduos seja normal.
   Esta hipótese é confirmada através do teste de Shapiro-Wilk cujo p-valor é 0.1092 que é maior dos que os níveis de significância habituais $(0.01, ..., 0.05)$. Este teste de normalidade é adequado para este caso uma vez que os pontos mais extremos desse gráfico não apresentam um afastamento significativo da reta.
   Finalmente, os resultados apresentados para o modelo de regressão linear indicam o valor 56.06 como uma estimativa para o desvio padrão dos resíduos (Residual standard error).
   Concluímos então que, face a amostra observada, os resíduos são compatíveis com uma distribuição $N(0, 56.06)$ para a variável aleatória ε.

   (c) Uma estimativa para $Y(780)$ é $\widehat{y} = \widehat{a} \times 780 + \widehat{b}$, onde $\widehat{a} = 1.16$ e $\widehat{b} = 17.0758$ são as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão linear fornecidos pelo *software* R. Assim, obtemos $\widehat{y} = 921.8758$.