

## Números complexos

### 1.1. Definição

Considere-se o conjunto  $\mathbb{R}^2$  dos pares ordenados de números reais que verifica os seguintes axiomas:

Axioma 1.1 Igualdade  $(a, b) = (c, d)$  sse  $a=c, b=d$ .

Axioma 1.2 Adição  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Axioma 1.3 Multiplicação  $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Os axiomas 1.2 adição e 1.3 multiplicação, conferem a  $\mathbb{R}^2$  a estrutura de grupo comutativo pois:

A adição é associativa, comutativa, admite o elemento neutro o par  $(0,0)$  e todo o par  $(a, b)$  admite um simétrico  $(-a, -b)$

A multiplicação associativa, comutativa, tem como elemento neutro o par  $(1,0)$  e todo o elemento  $(a,b) \neq (0,0)$  admite um inverso  $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ . E mais a multiplicação é distributiva em relação à adição

### Definição 1.1.

Chama-se corpo dos números complexos e representa-se por  $C$  ao conjunto  $\mathbb{R}^2$  munido dos axiomas 1.1, 1.2, e 1.3.

Nota:  $C$  é um corpo e adição e a multiplicação admitem operação inversa que se denominam respectivamente subtração e divisão assim expressas:

$$\triangleright (a,b) - (c,d) = (a - c, b - d)$$

$$\triangleright (a,b) \div (c,d) = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \text{ Sendo } (c,d) \neq (0,0).$$

### 1.2. Isomorfismo entre $\mathbb{R}$ e o subconjunto $C^*$ dos números complexos da forma $(a,0)$

$C^*$  é subconjunto de  $C$  constituído pelos números complexos da forma  $(a,0)$  e  $f$  aplicação de  $\mathbb{R}$  em  $C^*$  definida pela forma  $f : a \in \mathbb{R} \rightarrow f(a) = (a,0) \in C^*$

Esta aplicação bijectiva respeita as operações adição e multiplicação definidas em  $\mathbb{R}$  e em  $C$ :

$$f(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = (ab, 0) = (a, 0)x(b, 0) = f(a)xf(b)$$

A aplicação  $f$  é um isomorfismo entre  $R$  e  $C^*$ . Por isso, é possível identificar, do ponto de vista a operatório  $R$  com  $C^*$  i.e. os números reais com os números complexos da forma  $(a, 0)$  e convencionar que  $(a, 0) = a$ .

### 1.3. Forma algébrica dos números complexos

Em concordância com a convenção anterior o elemento neutro da multiplicação de números complexos,  $(1, 0)$ , pode representar-se simplesmente por  $(1, 0) = 1$  e designa-se por **unidade real de C**. Além desta unidade real o corpo  $C$  possui uma outra unidade, o elemento  $(0, 1)$  denominada **unidade imaginária** e representada pelo símbolo  $i$ , i.e.  $(0, 1) = i$ .

Do axioma 1.3. multiplicação resulta que  $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$  o que permite definir a unidade imaginária pela forma  $i = \sqrt{-1}$ . A unidade imaginária permite representar o número complexo  $(a, b)$  sob a forma denominada **forma algébrica** fazendo

$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \times (0, 1)$  Servindo-nos da convenção da representação dos números complexos da forma  $(a, 0)$  e unidade imaginária a expressão ficaria na forma:

$(a, b) = a + bi$ . O segundo membro  $a + bi$  chama-se **forma algébrica** número complexo  $(a, b)$ .

*Nota:* A forma algébrica permite efectuar operações entre complexos tomando suas expressões com binómios em  $i$  desde que sempre que possível se substitua  $i^2$  por  $-1$

Ora vejamos:

$$(a, b) + (c, d) = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd, ad + bc)$$

No complexo  $z = a + bi$  o número real  $a$  chama-se *parte real* de  $z$  e representa-se por  $Re(z)$  e o número real  $b$  chama-se *parte imaginária* e representa-se por  $Im(z)$ .

Um complexo  $z = a + bi$  diz-se:

*Número imaginário, se:  $(Re(z) \neq 0 \text{ e } Im(z) \neq 0)$*

*Número imaginário puro, se:  $(Re(z) = 0 \text{ e } Im(z) \neq 0)$*

*Número real se  $(Im(z) = 0)$ .*

## 1.4. Complexos conjugados

### Definição 1.2

**Dois** números complexos dizem-se conjugados quando têm as partes reais iguais e as partes imaginárias simétricas. Assim o complexo.  $z = x + yi$  Tem como conjugado o  $\bar{z}$  tal que  $\bar{z} = x - yi$ .

### Propriedades do conjugado

**P1:** O conjugado do conjugado de  $z$  é o próprio  $z$  i.e.  $\bar{\bar{z}} = z$

**P2:** O conjugado da soma é igual à soma dos conjugados das parcelas:  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

**P3:** O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados dos factores:  $\overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w}$

**P4:** O conjugado do quociente é igual ao quociente dos conjugados:  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

**P5:**  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

## 1.5. Módulo de um complexo

### Definição 1.3

Chama-se módulo (ou valor absoluto) de um número complexo  $z = x + yi$  e representa-se por  $|z|$  ao número real definido por  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Da definição ocorre que:

- a)  $|z| = |\bar{z}|$
- b)  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- c)  $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- d)  $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Além disso o módulo goza das seguintes propriedades:

**P1:** O módulo do produto de dois complexos  $z$  e  $w$  é igual ao produto dos módulos dos factores, i.e.  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ .

**P2:** O módulo da soma de dois complexos  $z$  e  $w$  é menor ou igual à soma dos módulos das parcelas, i.e.:  $|z + w| \leq |z| + |w|$

**P3:** O módulo da diferença de dois complexos  $z$  e  $w$  é maior ou igual à diferença dos seus módulos, i.e.:  $|z - w| \geq |z| - |w|$ .

**P4:** O módulo do quociente de dois complexos  $z$  e  $w$  é igual ao quociente dos seus módulos, i.e.

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

## 1.6. Representação geométrica. Plano complexo

Números complexos definidos como pares ordenados de números reais fornecem a possibilidade de representá-los geometricamente no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . Todo o complexo  $z = (x, y)$  corresponde a  $P \in \mathbb{R}^2$  de abscissa  $x$  e ordenada  $y$ :  $z = (x, y) = x + yi$  sendo ponto  $P$  do plano  $\mathbb{R}^2$  de coordenadas  $x$  e  $y$ . Este plano chama-se **plano complexo** que tem o eixo real (abscissas) e eixo imaginário (onde se representam os imaginários puros).

### Definição 1.4

Chama-se argumento do número complexo  $z = x + yi$  à amplitude do ângulo  $\theta$  que faz a direcção positiva do eixo das abscissas com o vector  $OP$  definido pela origem  $O$  das coordenadas e pela imagem  $P$  do complexo.

*Obs:* considera-se argumento dum número complexo tanto o ângulo  $\theta$  como qualquer dos ângulos que lhe seja congruos módulo  $2\pi$ , i.e. ângulo da forma  $\theta + 2k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , contudo, importa destacar dois:

- **O argumento (ou determinação) principal** que é o ângulo que satisfaz a condição  $-\pi \leq \theta \leq \pi$
- **O argumento positivo mínimo** que corresponde ao ângulo  $\theta$  que verifica a condição  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

O complexo nulo não tem argumento (ou tem argumento indeterminado).

## 1.7. Forma trigonométrica ou polar dos complexos

Dado o complexo  $z = (x, y) = x + yi$  de argumento positivo mínimo  $\theta$ , toma  $P$  como imagem no plano deste complexo. O módulo de  $|z|$  interpreta-se como comprimento do vector  $OP$  do triângulo  $OPQ$ , obtém-se  $x = |z| \cos \theta$ ,  $y = |z| \sin \theta$ . Desta forma pode-se escrever o complexo  $z = (x, y) = x + yi$  na forma  $z = |z| \cos \theta + |z| \sin \theta i$

$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  Denominada **forma trigonométrica (ou forma polar)** do complexo.

Sendo  $|z|$  um comprimento pode colocar como  $|z|=r$  e abrevia-se  $\cos \theta + i \sin \theta = cis \theta$  o que permite escrever a forma polar assim  $z = r cis \theta$ .

Proposição 1.5. O produto de dois números complexos é um complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos factores.

Demonstração:

$z = r cis \theta$  e  $w = R cis \varphi$  e o produto é  $z \cdot w = rR cis(\theta + \varphi)$  o que prova que  $|zw| = |z||w|$  e  $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

**Fórmula de Moivre** – cálculo de um expoente natural de um número complexo

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta), n = 1, 2, \dots$$

Exemplo1: Seja  $z = 1 + i\sqrt{3}$ , calcule  $z^3$

Resolução:  $|z| = 2$  e  $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ , a expressão do complexo na forma trigonométrica é

$$z = 2(cis \frac{\pi}{3}) \text{ então } z^3 = 8(\cos \pi + i \sin \pi) = -8$$

## 1.8.Raiz de um número complexo

Chama-se raiz de índice  $n$  ( $n \geq 2$ ) de um número complexo  $z$  a todo o número  $w$  que verifique a condição  $w^n = z$  escrevendo-se  $w = \sqrt[n]{z}$ .

Seja  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  número dado e supõe-se que  $w = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Por definição  $w^n = z$  e usando a fórmula de Moivre tem-se  $R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  portanto deverá ser:

$$R^n = r,$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou seja  $R = \sqrt[n]{r}$  (a raiz positiva de índice  $n$  de  $r$ ) e  $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$

Conclusão: As raízes de índice n do número complexo  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  são dadas pela expressão

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k \in \mathbb{Z}$  esta expressão é uma generalização da fórmula de Moivre.

Exemplo 1.2: Determinar as raízes de índices 4 de  $z = -1$

Resolução: Como  $|z| = 1$  e  $\arg(z) = \pi$  as raízes serão dadas por

$\sqrt[4]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}$  e fazendo  $k=0, 1, 2, 3$  obtém-se as raízes

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{e} \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

## 1.9. Impossibilidade de ordenação de C

No corpo dos números complexos não é possível definir a relação de ordem que permita ordenar o conjunto. Para que fosse possível estabelecer relação de ordem seria necessário verificar os axiomas:

**Axioma 1.4 (Tricotomia):** Dados x e y verifica-se sempre uma e uma só das relações  $x=y$ ,  $x < y$  ou  $x > y$ .

**Axioma 1.5 (Transitividade):** Se  $x < y$  e  $y < z$  então  $x < z$

**Axioma 1.6:** Se  $x < y$  então para qualquer z,  $x + z < y + z$ .

**Axioma 1.7:** Se  $0 < x$  e  $0 < y$  então  $0 < xy$

Os axiomas não são satisfeitos, bastaria pegar o axioma 1.4 e analisar o seguinte:

Já que  $i \neq 0$  então ou  $i < 0$  ou  $i > 0$

Seja  $i > 0$  e toma-se  $x = y = i$  e do axioma 1.4 ter-se-ia  $i^2 > 0$  ou seja  $-1 > 0$  (Falso).