

Números complexos

1.1. Definição

Considere-se o conjunto \mathbb{R}^2 dos pares ordenados de números reais que verifica os seguintes axiomas:

Axioma 1.1 Igualdade $(a, b) = (c, d)$ sse $a=c, b=d$.

Axioma 1.2 Adição $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Axioma 1.3 Multiplicação $(a, b) \times (c, d) = (a c - b d, a d + b c)$

Os axiomas 1.2 adição e 1.3 multiplicação, conferem a \mathbb{R}^2 a estrutura de grupo comutativo pois:

A adição é associativa, comutativa, admite o elemento neutro o par $(0,0)$ e todo o par (a, b) admite um simétrico $(-a, -b)$

A multiplicação associativa, comutativa, tem como elemento neutro o par $(1,0)$ e todo o elemento $(a,b) \neq (0,0)$ admite um inverso $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$. E mais a multiplicação é distributiva em relação à adição

Definição 1.1.

Chama-se corpo dos números complexos e representa-se por \mathbb{C} ao conjunto \mathbb{R}^2 munido dos axiomas 1.1, 1.2, e 1.3.

Nota: \mathbb{C} é um corpo e adição e a multiplicação admitem operação inversa que se denominam respectivamente subtracção e divisão assim expressas:

$$\triangleright (a,b) - (c,d) = (a - c, b - d)$$

$$\triangleright (a,b) \div (c,d) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \text{ Sendo } (c,d) \neq (0,0).$$

1.2.Isomorfismo entre \mathbb{R} e o subconjunto \mathbb{C}^* dos números complexos da forma $(a,0)$

\mathbb{C}^* é subconjunto de \mathbb{C} constituído pelos números complexos da forma $(a,0)$ e f aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{C}^* definida pela forma $f : a \in \mathbb{R} \rightarrow f(a) = (a,0) \in \mathbb{C}^*$

Esta aplicação bijectiva respeita as operações adição e multiplicação definidas em \mathbb{R} e em \mathbb{C} :

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \times (b, 0) = f(a) \times f(b)$$

A aplicação f é um isomorfismo entre \mathbb{R} e \mathbb{C}^* . Por isso, é possível identificar, do ponto de vista do operador \mathbb{R} com \mathbb{C}^* i.e. os números reais com os números complexos da forma $(a, 0)$ e convencionar que $(a, 0) = a$.

1.3. Forma algébrica dos números complexos

Em concordância com a convenção anterior o elemento neutro da multiplicação de números complexos, $(1, 0)$, pode representar-se simplesmente por $(1, 0) = 1$ e designa-se por **unidade real de \mathbb{C}** . Além desta unidade real o corpo \mathbb{C} possui uma outra unidade, o elemento $(0, 1)$ denominada **unidade imaginária** e representada pelo símbolo **i** , i.e. $(0, 1) = i$.

Do axioma 1.3. multiplicação resulta que $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$ o que permite definir a unidade imaginária pela forma $i = \sqrt{-1}$. A unidade imaginária permite representar o número complexo (a, b) sob a forma denominada **forma algébrica** fazendo

$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \times (0, 1)$ Servindo-nos da convenção da representação dos números complexos da forma $(a, 0)$ e unidade imaginária a expressão ficaria na forma:

$(a, b) = a + bi$. O segundo membro $a + bi$ chama-se **forma algébrica** número complexo (a, b) .

Nota: A forma algébrica permite efectuar operações entre complexos tomando suas expressões com binómios em i desde que sempre que possível se substitua i^2 por -1

Ora vejamos:

$$(a, b) + (c, d) = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd, ad + bc)$$

No complexo $z = a + bi$ o número real a chama-se *parte real* de z e representa-se por $\text{Re}(z)$ e o número real b chama-se *parte imaginária* e representa-se por $\text{Im}(z)$.

Um complexo $z = a + bi$ diz-se:

Número imaginário, se: $(\text{Re}(z) \neq 0 \text{ e } \text{Im}(z) \neq 0)$

Número imaginário puro, se: $(\text{Re}(z) = 0 \text{ e } \text{Im}(z) \neq 0)$

Número real se $(\text{Im}(z) = 0)$.

1.4. Complexos conjugados

Definição 1.2

Dois números complexos dizem-se conjugados quando têm as partes reais iguais e as partes imaginárias simétricas. Assim o complexo. $z = x + yi$ Tem como conjugado o \bar{z} tal que $\bar{\bar{z}} = z = x - yi$.

Propriedades do conjugado

P1: O conjugado do conjugado de z é o próprio z i.e. $\bar{\bar{z}} = z$

P2: O conjugado da soma é igual à soma dos conjugados das parcelas: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

P3: O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados dos factores: $\overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w}$

P4: O conjugado do quociente é igual ao quociente dos conjugados: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

P5: $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

1.5. Módulo de um complexo

Definição 1.3

Chama-se módulo (ou valor absoluto) de um número complexo $z = x + yi$ e representa-se por $|z|$ ao número real definido por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Da definição ocorre que:

- a) $|z| = |\bar{z}|$
- b) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- c) $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- d) $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Além disso o módulo goza das seguintes propriedades:

P1: O módulo do produto de dois complexos z e w é igual ao produto dos módulos dos factores, i.e. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

P2: O módulo da soma de dois complexos z e w é menor ou igual à soma dos módulos das parcelas, i.e.: $|z + w| \leq |z| + |w|$

P3: O módulo da diferença de dois complexos z e w é maior ou igual à diferença dos seus módulos, i.e.: $|z - w| \geq |z| - |w|$.

P4: O módulo do quociente de dois complexos z e w é igual ao quociente dos seus módulos, i.e.

$$\frac{|z|}{|w|} = \frac{|z|}{|w|}.$$

1.6. Representação geométrica. Plano complexo

Números complexos definidos como pares ordenados de números reais fornecem a possibilidade de representá-los geometricamente no plano cartesiano \mathbb{R}^2 . Todo o complexo $z = (x, y)$ corresponde a $P \in \mathbb{R}^2$ de abscissa x e ordenada y : $z = (x, y) = x + yi$ sendo ponto P do plano \mathbb{R}^2 de coordenadas x e y . Este plano chama-se **plano complexo** que tem o eixo real (abscissas) e eixo imaginário (onde se representam os imaginários puros).

Definição 1.4

Chama-se argumento do número complexo $z = x + yi$ à amplitude do ângulo θ que faz a direcção positiva do eixo das abscissas com o vector OP definido pela origem O das coordenadas e pela imagem P do complexo.

Obs: considera-se argumento dum número complexo tanto o ângulo θ como qualquer dos ângulos que lhe seja côngruos módulo 2π , i.e. ângulo da forma $\theta + 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$, contudo, importa destacar dois:

- **O argumento (ou determinação) principal** que é o ângulo que satisfaz a condição $-\pi \leq \theta \leq \pi$
- **O argumento positivo mínimo** que corresponde ao ângulo θ que verifica a condição $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

O complexo nulo não tem argumento (ou tem argumento indeterminado).

1.7. Forma trigonométrica ou polar dos complexos

Dado o complexo $z = (x, y) = x + yi$ de argumento positivo mínimo θ , toma P como imagem no plano deste complexo. O módulo de $|z|$ interpreta-se como comprimento do vector OP do triângulo OPQ , obtém-se $x = |z| \cos \theta$, $y = |z| \sin \theta$. Desta forma pode-se escrever o complexo $z = (x, y) = x + yi$ na forma $z = |z| \cos \theta + |z| \sin \theta i$

$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ Denominada **forma trigonométrica (ou forma polar)** do complexo.

Sendo $|z|$ um comprimento pode colocar como $|z| = r$ e abrevia-se $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = \operatorname{cis} \theta$ o que permite escrever a forma polar assim $z = r \operatorname{cis} \theta$.

Proposição 1.5. O produto de dois números complexos é um complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos factores.

Demonstração:

$z = r \operatorname{cis} \theta$ e $w = R \operatorname{cis} \varphi$ e o produto é $z.w = rR \operatorname{cis}(\theta + \varphi)$ o que prova que $|zw| = |z| \cdot |w|$ e $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

Fórmula de Moivre – cálculo de um expoente natural de um número complexo

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta), n = 1, 2, \dots$$

Exemplo1: Seja $z = 1 + i\sqrt{3}$, calcule z^3

Resolução: $|z| = 2$ e $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$, a expressão do complexo na forma trigonométrica é

$$z = 2(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}) \text{ então } z^3 = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -8$$

1.8. Raiz de um número complexo

Chama-se raiz de índice n ($n \geq 2$) de um número complexo z a todo o número w que verifique a condição $w^n = z$ escrevendo-se $w = \sqrt[n]{z}$.

Seja $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ número dado e supõe-se que $w = R(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$. Por definição $w^n = z$ e usando a fórmula de Moivre tem-se $R^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ portanto deverá ser:

$$R^n = r,$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou seja $R = \sqrt[n]{r}$ (a raiz positiva de índice n de r) e $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$

Conclusão: As raízes de índice n do número complexo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ são dadas pela expressão

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k \in \mathbb{Z}$$
 esta expressão é uma generalização da fórmula de Moivre.

Exemplo 1.2: Determinar as raízes de índices 4 de $z = -1$

Resolução: Como $|z| = 1$ e $\arg(z) = \pi$ as raízes serão dadas por

$$\sqrt[4]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{4}$$
 e fazendo $k=0, 1, 2, 3$ obtêm-se as raízes

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{e} \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

1.9. Impossibilidade de ordenação de \mathbb{C}

No corpo dos números complexos não é possível definir a relação de ordem que permita ordenar o conjunto. Para que fosse possível estabelecer relação de ordem seria necessário verificar os axiomas:

Axioma 1.4 (Tricotomia): Dados x e y verifica-se sempre uma e uma só das relações $x=y$, $x<y$ ou $x>y$.

Axioma 1.5 (Transitividade): Se $x<y$ e $y<z$ então $x<z$

Axioma 1.6: Se $x<y$ então para qualquer z , $x + z < y + z$.

Axioma 1.7: Se $0 < x$ e $0 < y$ então $0 < xy$

Os axiomas não são satisfeitos, bastaria pegar o axioma 1.4 e analisar o seguinte:

Já que $i \neq 0$ então ou $i < 0$ ou $i > 0$

Seja $i > 0$ e toma-se $x = y = i$ e do axioma 1.4 ter-se-ia $i^2 > 0$ ou seja $-1 > 0$ (Falso).