FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Física

INTRODUÇÃO À FÍSICA

Aula preparada para estudantes da Faculdade de Engenharia

PLANO TEMÁTICO

1. Ferramentas matemáticas para a Física;
2. Cinemética e dinâmica de um ponto material;
3. Trabalho, energia e potência Mecânicas
4. Electrostática
5. Capacitores e dielétricos
6. Força electromotriz e circuitos eléctricos
7. Corrente contínua e resistividade eléctrica
8. Campo magnético. Indução electromagnética

PLANO TEMÁTICO

9. Corrente alternada e Impedância elétrica

10. Equações de Maxwell e ondas electromagnéticas

Plano de Avaliações

2 Testes e 2 Exames

7 Trabalhos laboratoriais

4 TPC

Nota de Frequência: $0.30\text{T1} + 0.30\text{T2} + 0.25\text{TLab} + 0.15\text{TPC}$

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

TEMA 1

Ferramentas Matemáticas para o estudo de Física

FC_MACOME MA

Conteúdos da Aula

1. Noção de integral de uma função

- Propriedades de integração
- Tabela de integrais (Exempos de cálculo)

4. Grandezas físicas escalares e vectorias)

- Componentes de um vector
- Vector Unitário (versores)
- Operações com vectores

1.1 Noção de integral de uma função

Dadas as funções $f(x)$ e $F(x)$ diferenciável em x:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Integrar uma função $f(x)$ é realizar a operação inversa da diferenciação (derivada) de $F(x)$, ou seja, procurar uma função $F(x)$, tal que a sua derivada é igual a função a integrar.

Integral como operação inversa da diferenciação

Ou seja:

se $F(x)$ é primitiva de $f(x)$ então $F'(x) = f(x)$

Exemplo: Sejam $f(x) = \cos x$ e $f(x) = x^2$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \cos x \;\Rightarrow F(x) = \sin x$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

Integral Indefinida

Uma integral é Indefinida, quando não são conhecidos os limites da sua integração, ou seja as condições de fronteira.

Se $F(x)$ é primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ chama-se integral indefinida de $f(x)$, e denota-se por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Integral indefinida (cont.)

Em que:

$\int$ é chamado sinal de integração;

$f(x)$ – é a função integrando;

dx – é a diferencial que serve para identificar a variável de integração; e

C – é a constante de integração.

Integral definida

- Nalguns casos são colocadas as condições inicias do problema de tal maneira que a const C fica conhecida. Nestes casos utiliza-se a integral definida (fórmula Newton-Leibz):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemplos: 5, 6 e 7

Propriedades de integração

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \; ; k = const$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. $dx^n = nx^{n-1}dx$ – chama-se diferenciação

4. $d(x \pm k) = dx$

5. $d(kx) = kdx$

Tabela de integrais básicas

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \mathrm{n} \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C;$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Tabela de integrais básicas_cont

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{Ctan}|x| + C$

9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc \sin x + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+q}} dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 + q}\right|, q = const$

Exemplos de cálculo de integrais

- Ex1: $\int (3x^2 + x)dx = 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

- Ex2: $\int \frac{1}{x+5} dx = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = ln|x + 5| + C$
- Ex3:

$$\int \cos 3x \, dx = \int \cos(3x) \frac{1}{3} d(+3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

- Ex4: $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x^2+1} d(x^2) = ln|x^2 + 1| + C$

Exemplos de aplicação de integrais

- Ex5: Uma partícula move-se ao longo de uma linha recta com aceleração que varia com o tempo de acordo com a expressão $a = 4 - t^2$, onde a é a aceleração expressa em $\mathrm{m/s^2}$ e t, o tempo expresso em *segundos*. Obtenha as expressões para a velocidade e a posição, sabendo que no instante *t = 3*, a velocidade é $v = 2.0\ \mathrm{m/s}$ e $x = 9.0\ \mathrm{m.}$

Resp: $v(t) = -\frac{x^3}{3} + 4t - 1\ [\mathrm{m/s}]$ e

$$x(t) = -\frac{t^4}{12} + 2t^2 - t + \frac{3}{4}\ [\mathrm{m}]$$

- Ex 6: A aceleração de um corpo em movimento rectilíneo é dada por $a = -kv$, onde *k = constante*. Para o instante $t = 0\text{ s}, v = v_0$. Obtenha a expressão da velocidade em função do tempo.

Resp: $v(t) = \frac{v_0}{1-kv_0t}$

Ex 7: Um corpo move-se ao longo de uma recta. A sua aceleração é dada no S.I. por $a = -2x$, onde x está em metros e a em $\mathrm{m/s^2}$.Obter a relação entre a velocidade e distância sabendo que para $x = 0$, a velocidade é $v = 4\text{ m/s}$.

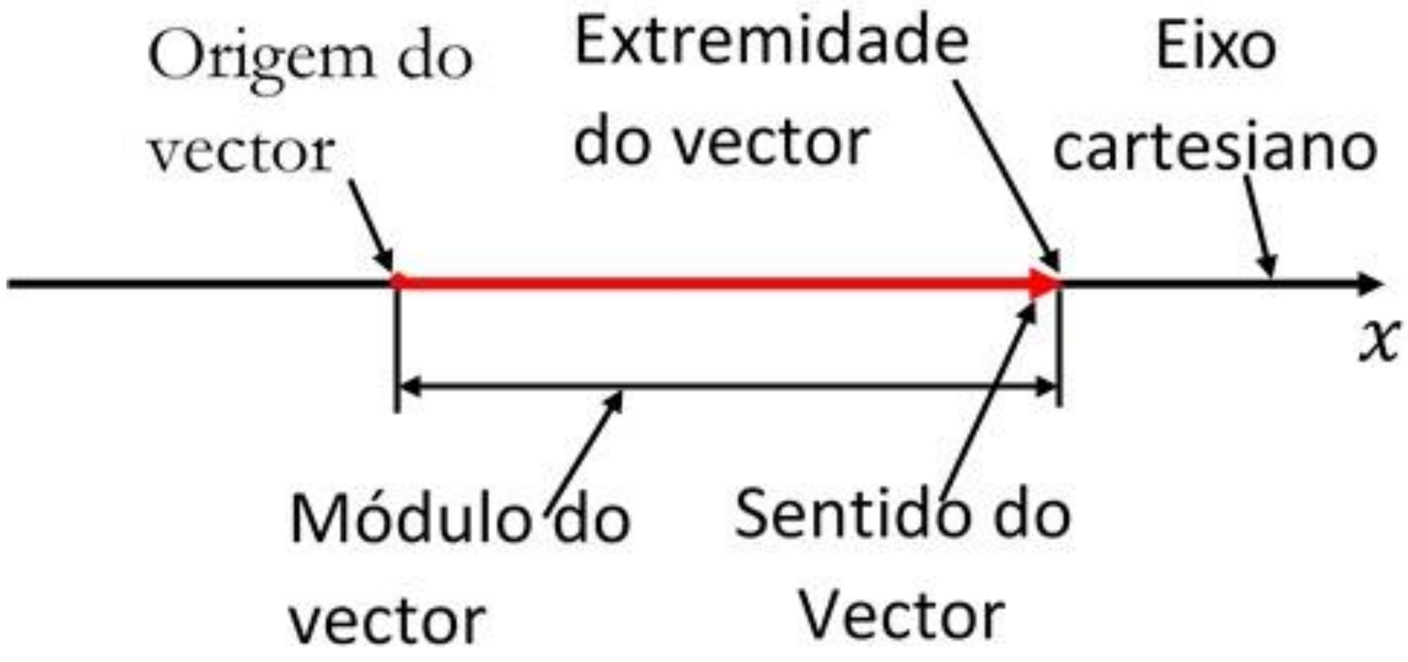
Resp: $v(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$

1.2 Grandezas físicas escalares e vectoriais

- Escalares: grandezas cuja informação fica completa quando dado o valor numérico e a respectiva unidade (ex: massa, tempo, distancia percorrida, área, volume, pressão, etc).
- Vectoriais: grandezas cuja informação fica completa, quando para além do valor numérico e unidade, é indicada a direcção e sentido (ex: velocidade, força, quantidade de movimento, etc).

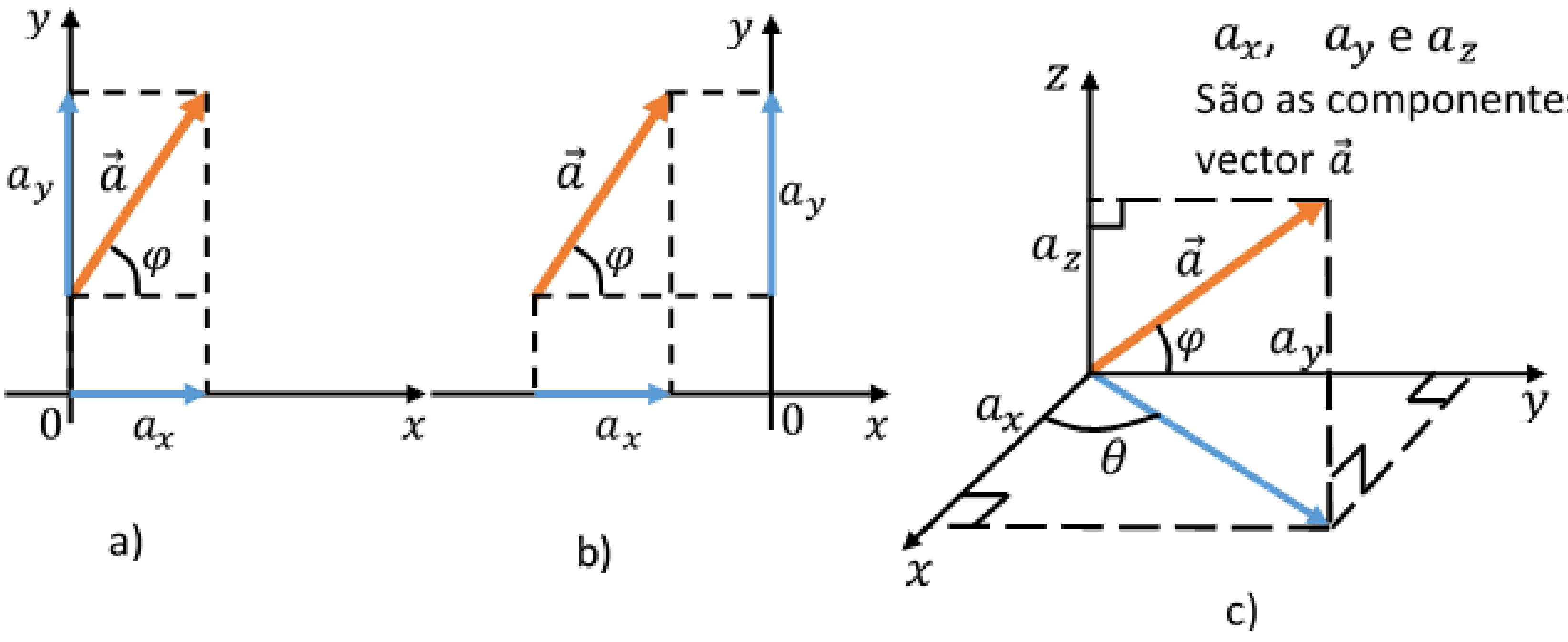
Grandezas físicas escalares e vectoriais

Vectores caracterizam-se por ter orgem e extremidade, módulo, direcção e sentido.



Componentes de um vector

- Todo o vector pode ser projectado nos eixos de coordenadas de modo a encontrar as suas componentes x, y e z [no plano (X,Y)ou no espaço tri-dimensional(X,Y,Z)].



- As componentes do vector são expressas, respectivamente, no plano e no espaço do seguinte modo:

No plano bidimensional:

$$a_x = |\vec{a}| \cos\varphi \; ; \; a_y = |\vec{a}| \sin\varphi$$

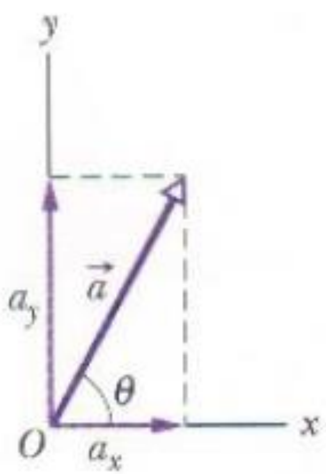
No espaço tridimensional:

$$\begin{cases} a_x = |\vec{a}| \cos\theta \sin\varphi \\ a_y = |\vec{a}| \sin\theta \sin\varphi \\ a_z = |\vec{a}| \cos\varphi \end{cases}$$

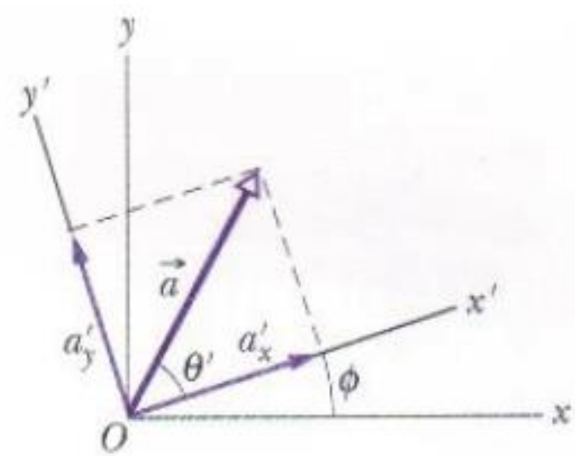
Conhecidas as componentes, o módulo determina-se por $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$; $a_z = 0$ no plano

- Importa referir que para um mesmo vector, mudando o sistema de referência, variam os valores das componentes, mas o módulo do vector mantem-se igual em ambos os sistemas (veja o caso do plano, para simplificar):

- $|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{{a'_x}^2 + {a'_y}^2}.$



(a)

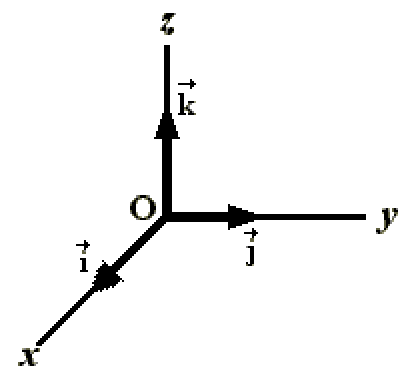


(b)

Vectores unitários (versores)

- Qualquer vector pode ser expresso através de suas componentes e vectores unitários ($\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$):

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\overrightarrow{k}$$



Para qualquer vector podemos expressar o vector unitário (versor) relacionado com aqule vector:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Operações com vectores

1. Soma de vectores (método analítico e geométrico)

2. Multiplicação de vector por escalar

3. Multiplição de vector por vector (produto escalar e produto vectorial)

Soma de vectores: dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$,

Método analítico

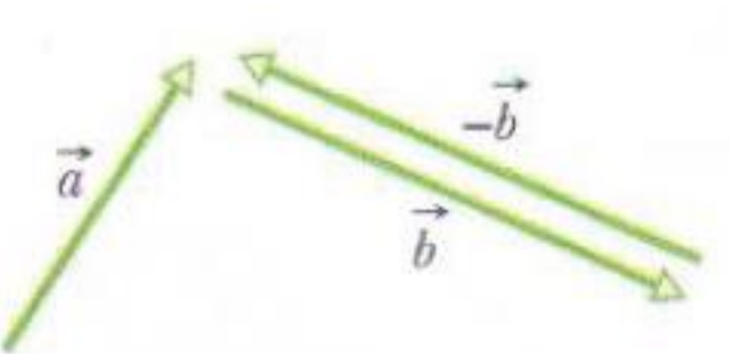
Dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de forma analítica, o vector soma $\vec{c}$ será dado por:

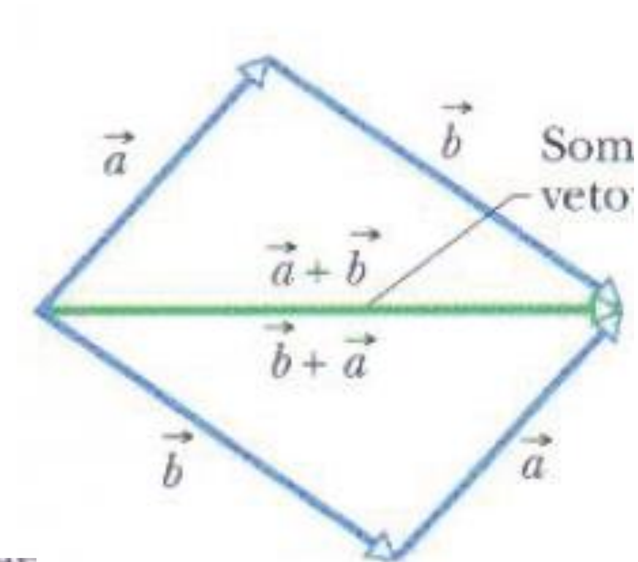
$$\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{i} + \left(a_y + b_y\right)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

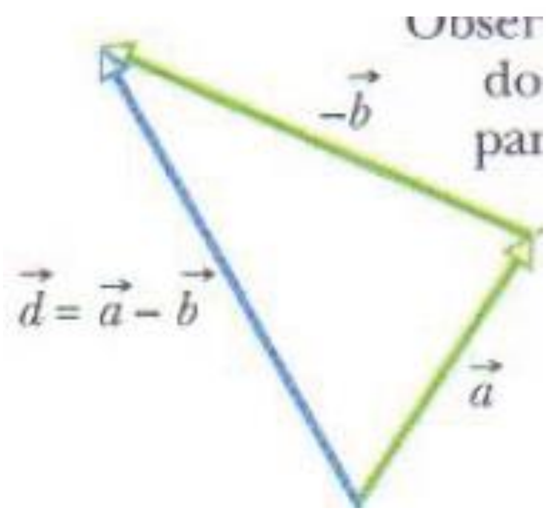
Sendo a diferençã de vectores a soma de um vector com o oposto do segundo, o vector

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + \left(a_y - b_y\right)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$$

Método geométrico







Multiplicação de vector por escalar

Multiplicando vector com escalar ($\vec{a}$Z) , obtem-se um vector ($\vec{b}$)paralelo ao vector originário e que obedece as seguintes condições:

$\left|\vec{b}\right| > |\vec{a}|$ se $|Z| > 1$;

$\left|\vec{b}\right| < |\vec{a}|$ se $|Z| < 1$;

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem sentidos opostos se Z < 0

$$\vec{a}Z = (\mathrm{Z}a_x)\vec{i} + \left(\mathrm{Z}a_y\right)\vec{j} + (\mathrm{Z}a_z)\vec{k}$$

Multiplicação de vector por vector_produto escalar

O produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})$, é um número definido por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \vartheta; \qquad \vartheta = \angle(\vec{a} \,\&\vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

Comparando as duas expressões, conclui-se que:

$$\cos \vartheta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

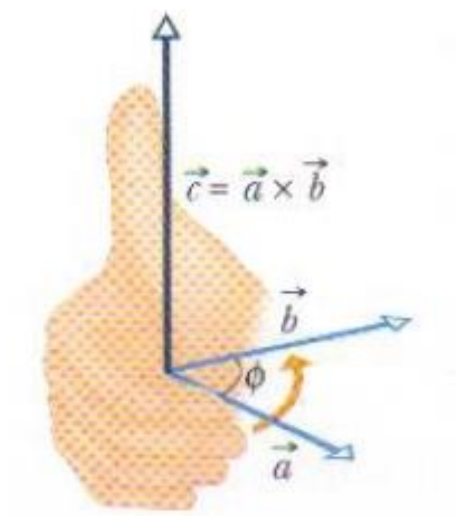
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, condição de perpendicularidade

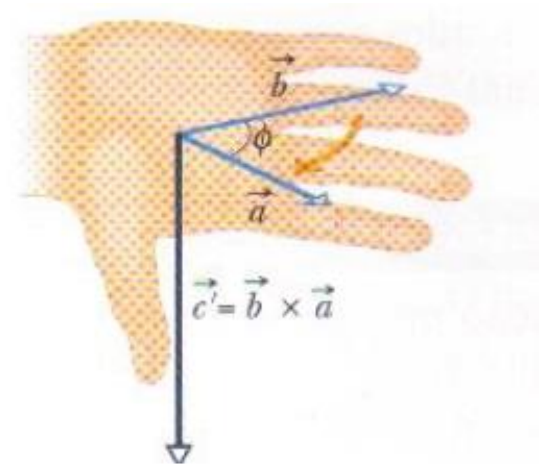
Multiplicação de vector por vector_produto escalar

O produto vectorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b})$, é um terceiro vector $\vec{c}$ definido por:

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\phi \cdot \vec{n}$; onde $\vec{n}$ -vector unitário perpendicular ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$; ϕ – é o menor ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$





$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ – condição de paralelismo

Analiticamente, o produto vectorial corresponde à:

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$ ou

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Geometricamente, o módulo do produto vectorial equivale à área do paralelogramo formado na base dos dois vectores.

Produto misto

O produto misto (escalar-vectorial) é um escalar cujo módulo equivale ao volume do paralelepípedo formado na base dos três vectores:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

Produto vectorial duplo

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \times (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \times \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

CAPI

Cinemática

CONTEÚDOS TEMÁTICOS

1. Movimento mecânico, sistema de referência, trajectória;
2. Posição, deslocamento, velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média e aceleração instantânea;
3. Movimento curvilíneo
4. Movimento relativo

Conteúdos (cont.)

1. Massa e Peso
2. Segunda lei de Newton
3. Quantidade de movimento
4. Princípio de conservação da quântidade de movimento
5. Impulso linear de uma força
6. Teorema de impulso linear

Movimento mecânico

Em mecânica, chama-se movimento à mudança de posição de de uma partícula (objecto de estudo) relativamente a um refeferencial (sistema de referência);

Quando a posião não varia, diz-se que o objecto está em repouso.

Posição

Para o movimento curvilíneo a posição é definida pelo raio vector dado por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

No espaço tridimencional

Ou

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

No espaço bi-dimencional

Equações paramétricas e Trajectória do movimento

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

, são designadas equações paramétricas

A trajectoria do movimento de uma partícula cuja posiçao é conhecida, determina-se eliminando o tempo nas equações paramétricas.

Posição_ equações paramétricas

Exemplo1: $\vec{r}(t) = 3\sin(2t)\,\vec{i} + 4\cos(2t)\,\vec{j}$

$$\begin{cases} x = 3\sin(2t) \\ y = 4\cos(2t) \end{cases}$$

Trajectória do movimento:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \text{ - Elipse}$$

Deslocamento_mov rectilíneo

Deslocamento - variação da posição em função do tempo:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1); t_2 > t_1$$

Δx $-$é uma grandeza vectorial.

O percurso (distância percorrida), *d*, é sempre positivo

Deslocamento_mov curvilíneo

Em termos de raio vector, a posição, o deslocamento também será vector:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) =$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{\imath} + \Delta y\vec{\jmath} + \Delta z\vec{k}$$

Exemplo 2: Achar o vector deslocamento de uma partícula que se move de

$\vec{r}_1(t) = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ para $\vec{r}_2(t) = 9\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 8\vec{k}$

Resp: $\Delta\vec{r} = 12\vec{\imath} + 3\vec{k}$

Velocidade

Velocidade média- é a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo correspondente:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} \text{ - mov rectilíneo}$$

Diferencial da velocidade escalar média

$$v_{escalar,med} = \frac{d_{tot}}{t_{tot}} = \frac{d_{tot}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

Velocidade_cont

Velocidade instantânea: Quando se fala da velocidade de um corpo, em geral refere-se à velocidade num instante arbitrário, o valor para o qual tende a velocidade média quando Δt tende para zero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath}$$ - mov rectilíneo

Ou $$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$ - no caso mais geral

Velocidade_cont

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right),$$

ou

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Aceleração

- A aceleração é a taxa de variação temporal da velocidade, é uma grandeza vectorial.
- Aceleração média define-se como sendo a razão entre a variação da velocidade e o intervalo de tempo correspondente a essa variação:

$$a_{med} = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$$

ou

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Aceleração instantânea: quando o intervalo de tempo tende para zero, a aceleração média tende para a aceleração instantânea.

$$a \equiv a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

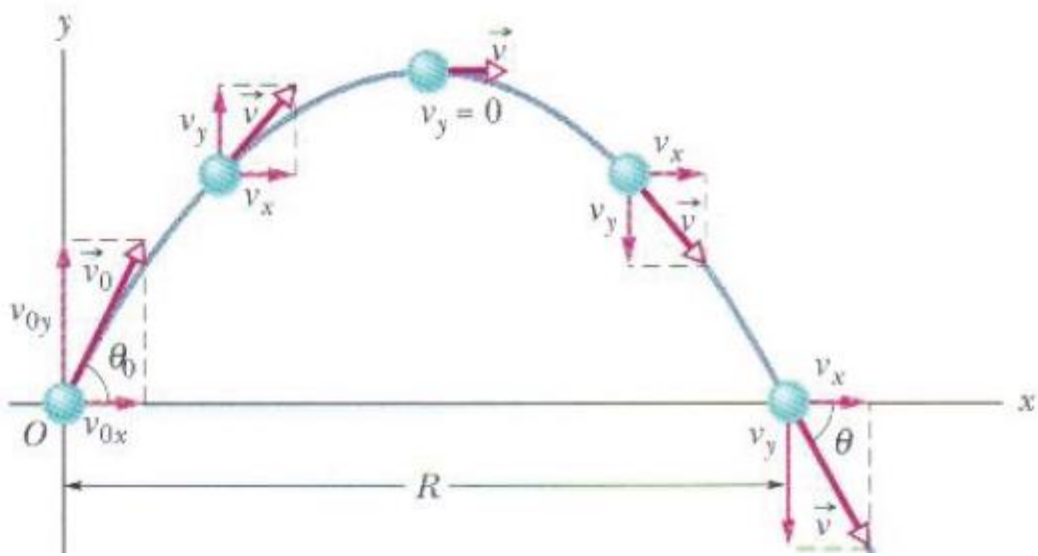
Ou

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} =$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Lançamento oblíquo_caso especial 1

- Caso especial do movimento bi-dimensional em que a partícula se move no plano vertical com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e aceleração constante e igual à da queda livre $\vec{g}$. Para lançamento centrado em $x_0 = y_0 = 0$, tem-se:



Lançamento oblíquo_trajectória

- $\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \Rightarrow$ integrando em função de t obtem-se as coordenadas x e y do vector posição:
- $\begin{cases} x(t) = v_0(\cos\theta)t \\ y(t) = v_0(\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow$ isolando t em x e substituíndo em y obtem-se a trajectória do movimento:
- $y(x) = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{(v_0\cos\theta)^2}$ -parábola

Lançamento oblíquo_altura maxima e alcance

- Para encontrar a altura máxima, considera-se o facto de:

$v_y = 0 = v_0 \sin\theta - gt_1$, nesse instante $\Rightarrow$

$t_1 = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$. Substituíndo este tempo em y, obtem-se:

$$y(t_1) \equiv H = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$H = \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\vartheta}{g}\right)^2$$

Para achar o alcance R, é necessário determinar o tempo de trânsito (tempo total de observação) e depois substituír em x:

Atingido o alcance, nesse instante $y = 0$. Logo,

$y(t_t) = v_0(\sin\theta)t_t - \frac{1}{2}g{t_t}^2 = 0$. Ou,

$\frac{2v_0(\sin\theta)}{g}t_t - {t_t}^2 = 0$, cuja solução é:

$$t_t\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g} - t_t\right) = 0 \Rightarrow t_t = 0 \vee t_t = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

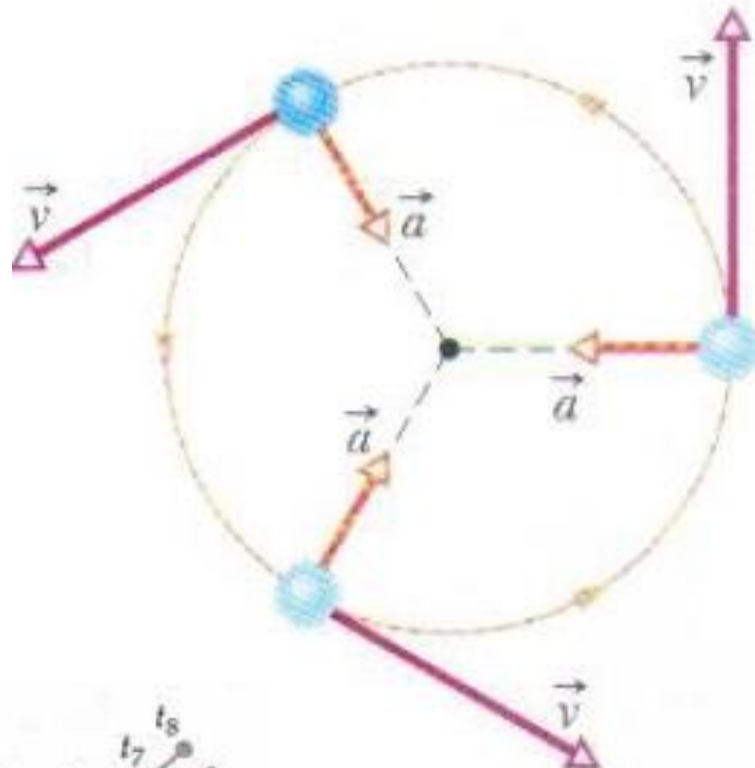
Logo,

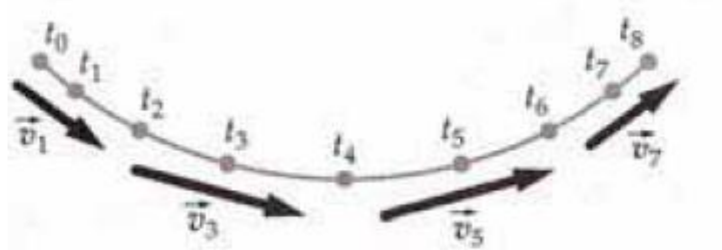
$$x(t_t) \equiv R = v_0(\cos\theta)\frac{2v_0\sin\theta}{g} = \frac{{v_0}^2}{g}tg(2\theta)$$

Conclui-se que o máximo valor de R atinge-se para $2\theta = 90°$.

Discutir efeito do ar sobre o movimento do projéctil!

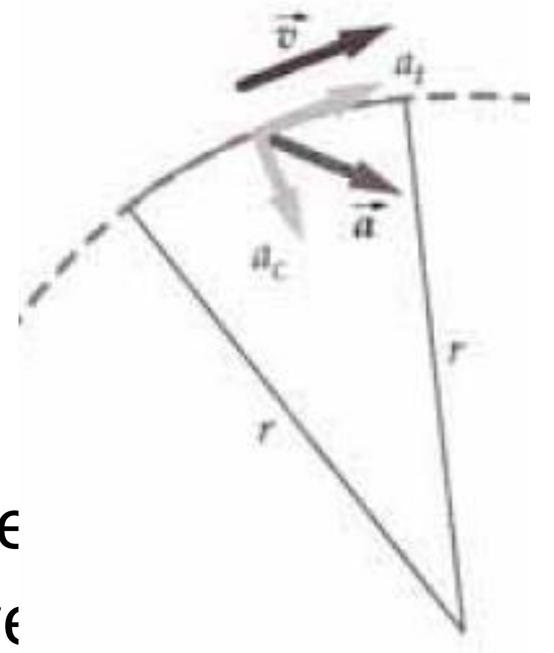
Movimento circular_caso especial





- Sendo a velocidade linear (escalar) a razão entre o arco descrito Δs *e o intervalo de tempo* Δt, $v = ds/\Delta t$, conclui-se que para $\Delta t = T, \Delta s = 2\pi r$. *Logo,*

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$



Se a velocidade linear for variável,

a aceleração terá duas componetes

perpendiculares entre sí, **tangencial**

devido a variação do módulo e **normal** (ce

devido a variação da direcção do vector ve

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

- Em geral no movimento circular avaliam-se as relações angulares, nomeadamente:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ - velocidade angular } \Rightarrow$$

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$$

$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$ para velocidade angular constante

Com velocidade angular variável: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\Rightarrow \omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt$ $\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$

e $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$