# 静电场（一）作业答案

一、选择题

1. D、 2. B 3. C 4 . D、A、C

二、填空题

1. $E\pi R^2$

2. $\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

3. $-\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$； $-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$； $\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$

4. $\dfrac{1}{\varepsilon_0}(q_2+q_4)$； $q_1,q_2,q_3,q_4$

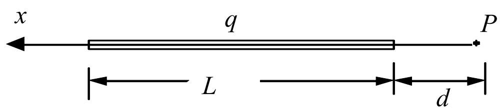
5. 0； $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1}{r^2}$； $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2}{r^2}$

6. $\sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m_e}}$

7. $\sqrt{\dfrac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 m}}$

三、计算题

1、解：(1)以 P 为坐标原点，如图建立坐标系

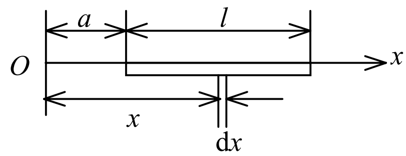



$$\lambda=\frac{q}{L}\qquad dq=\lambda dx=\frac{q}{L}dx$$

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{dx}{x^2}$$

$$E=\int dE=\int_d^{d+L}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{dx}{x^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+L}\right)$$

$\vec{E}$ 方向沿 x 轴




(2)解：在任意位置 x 处取长度元 dx，其上带有电荷

$$dq=\lambda_0\ (x-a)dx$$

它在 O 点产生的场强：

$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda_0(x-a)\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

O 点总场强

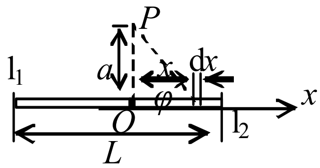
$$E=\int dE=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_a^{a+l}\frac{dx}{x}-a\int_a^{a+l}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2}\right]=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{a+l}{a}-\frac{l}{a+l}\right]$$

$\vec{E}$ 方向沿 x 轴

(3)解：$\lambda=\frac{q}{L}$

$dq=\lambda dx=\frac{q}{L}dx$ $\qquad$ $r^2=x^2+\alpha^2$

设 p 点在杆上投影点距左端为 $l_1$ 距右端为 $l_2$




$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{q}dx}{Lr^2}$$

$$dE_x=-dE\cos\phi=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{qx}dx}{Lr^3}$$

$$E_x=\int dE_x=\int_{-l_1}^{l_2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{qx}dx}{L(\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2)^{3/2}}=\frac{\mathrm{q}}{4\pi\varepsilon_0 L}[\frac{1}{(l_2{}^2+\mathrm{a}^2)^{1/2}}-\frac{1}{(l_1{}^2+\mathrm{a}^2)^{1/2}}]$$

$$\mathrm{d}\,\mathrm{E_y}=\mathrm{dE}\sin\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{qadx}}{\mathrm{Lr}^3}$$

$$\mathrm{E_y}=\int_{\mathrm{q}}\mathrm{d}\,\mathrm{E_y}=\int_{-\mathrm{l_1}}^{\mathrm{l_2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{qadx}}{\mathrm{L}(\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2)^{3/2}}=\frac{\mathrm{q}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{La}}\frac{1}{\sqrt{(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}})^2+1}}\Bigg|_{\mathrm{l_1}}^{\mathrm{l_2}}$$

$$=\frac{\mathrm{q}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{La}}[\frac{1}{\sqrt{(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l_2}})^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l_1}})^2+1}}]$$

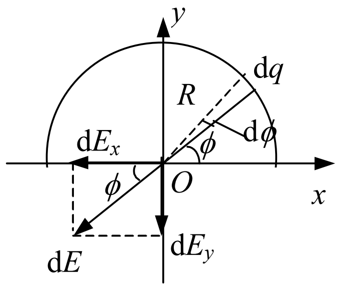
$$\vec{\mathrm{E}}=\mathrm{E_x}\vec{\mathrm{i}}+\mathrm{E_y}\vec{\mathrm{j}}=\frac{\mathrm{q}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{L}}[\frac{1}{(\mathrm{l_2}{}^2+\mathrm{a}^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\mathrm{l_1}{}^2+\mathrm{a}^2)^{1/2}}]\vec{\mathrm{i}}+$$

所以 $\frac{\mathrm{q}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{La}}[\frac{1}{\sqrt{(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l_2}})^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l_1}})^2+1}}]\vec{\mathrm{j}}$

无限长：$\mathrm{l_1}=\mathrm{l_2}=\infty$ $\quad$ $\vec{\mathrm{E}}=\mathrm{E_y}\vec{\mathrm{j}}=\frac{\mathrm{q}}{2\pi\varepsilon_0\mathrm{La}}\vec{\mathrm{j}}$

半无限长：$\mathrm{l_1}=\infty\mathrm{l_2}=0$ 或 $\mathrm{l_1}=0\mathrm{l_2}=\infty$ $\vec{\mathrm{E}}=\mathrm{E_x}\vec{\mathrm{i}}+\mathrm{E_y}\vec{\mathrm{j}}=\frac{\mathrm{q}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{La}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{q}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{La}}\vec{\mathrm{j}}$

2、（1）解：$\lambda=\dfrac{Q}{\pi R}$




$$dq=\lambda dl=\frac{Q}{\pi}d\phi$$

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}=\frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{Qd\phi}{R^2}$$

$$dE_x=-dE\cos\phi=-\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}\cos\phi d\phi$$

$$E_x=\int dE_x=\int_0^{\pi}-\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}\cos\phi d\phi=0$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\sin\varphi=-\frac{Q\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

$$E_y=-\mathrm{d}E=\int_q\mathrm{d}E_y=\int_0^{\pi}-\frac{Q\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

所以 $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=-\dfrac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\vec{j}$

（2）解：与（1）小题方法相似，如果是圆环，由对称性

$\vec{E}=0$

（3）解：与（1）小题方法相似，1/4 圆环

$$\lambda=\frac{2Q}{\pi R}$$

$$dq=\lambda dl=\frac{2Q}{\pi}d\phi$$

$$dE_x=-dE\cos\phi=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\cos\phi d\phi$$

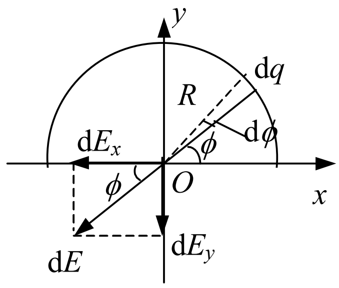
$$E_x=\int dE_x=\int_0^{\pi/2}-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\cos\phi d\phi=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\sin\varphi=-\frac{Q\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

$$E_y=-\mathrm{d}E=\int_q\mathrm{d}E_y=\int_0^{\pi/2}-\frac{Q\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\vec{i}-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\vec{j}$$

3、（1）解： $dq = \lambda dl = R\lambda_0 \sin\phi d\phi$




$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\lambda_0 \sin\phi d\phi}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 \sin\phi d\phi}{R}$$

$$dE_x = -dE\cos\phi = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\phi\cos\phi d\phi$$

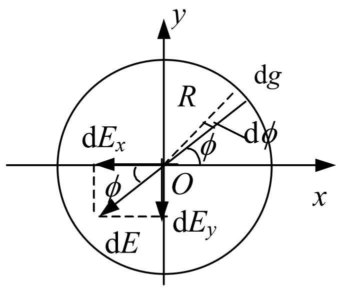
$$E_x = \int dE_x = \int_0^{\pi} -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\phi\cos\phi d\phi = 0$$

$$dE_y = -dE\sin\phi = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\phi d\phi$$

$$E_y = \int dE_y = \int_0^{\pi} -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\phi d\phi = -\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0 R}$$

所以 $$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = -\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0 R}\vec{j}$$

（2）求圆环中心的电场强度与（1）小题方法相似




$$E_x = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$$
＝0

$$E_y = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$$

故 O 点的场强为： $$\vec{E} = E_y\vec{j} = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{j}$$

（3）解： $dq = \lambda dl = R\lambda_0 \sin\phi d\phi$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\lambda_0 \sin\phi d\phi}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 \sin\phi d\phi}{R}$$

$$dE_x = -dE\cos\phi = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\phi\cos\phi d\phi$$

$$E_x = \int dE_x = \int_0^{\pi/2} -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\phi\cos\phi d\phi = -\frac{\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dE_y = -dE\sin\phi = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\phi d\phi$$

$$E_y = \int dE_y = \int_0^{\pi/2} -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\phi d\phi = -\frac{\lambda_0}{16\varepsilon_0 R}$$

所以 $$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = -\frac{\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}\vec{i} - \frac{\lambda_0}{16\varepsilon_0 R}\vec{j}$$

4、解：(1)在球内取半径为 r、厚为 dr 的薄球壳，该壳内所包含的电荷为

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V = Ar\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

带电球体的总电荷为

$$q = \int_V \rho dV = \int_0^R 4\pi A r^3 \,\mathrm{d}\, r = \pi A R^4$$

(2)作一半径为 r 的同心高斯球面，按高斯定理有

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \sum_{S内} q_i$$

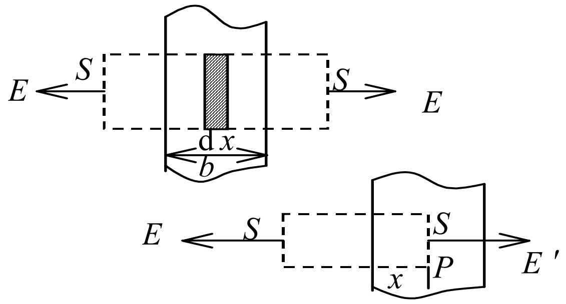
在球体内：$\sum_{S内} q_i = \int_V \rho dV = \int_0^r 4\pi A r^3 \,\mathrm{d}\, r = \pi A r^4$

$$E = \frac{A r^2}{4\varepsilon_0} \quad (r \le R)$$

在球体外： $\sum_{S内} q_i = \int_V \rho dV = \int_0^R 4\pi A r^3 \,\mathrm{d}\, r = \pi A R^4$

$$E = AR^4 / \left(4\varepsilon_0 r^2\right), \quad (r > R)$$

方向沿径向，A>0 时向外，A<0 时向里.




5、解：(1) 由对称分析知，平板外两侧场强大小处处相等、方向垂直于平面且背离平面.

设场强大小为 E．作一柱形高斯面垂直于平面．其底面大小为 S，如图所示．

按高斯定理 $\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \sum q / \varepsilon_0$ ，即

$$2SE = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^b \rho S \,\mathrm{d}\, x = \frac{kS}{\varepsilon_0} \int_0^b x \,\mathrm{d}\, x = \frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到 $\mathrm{E} = \dfrac{kb^2}{4\varepsilon_0}$ (板外两侧)

(2) 过 P 点垂直平板作一柱形高斯面，底面为 S．设该处场强为 $E'$，如图所示．按高斯定理有

$$\left(E' + E\right) S = \frac{kS}{\varepsilon_0} \int_0^x x dx = \frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到 $E' = \dfrac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2 - \dfrac{b^2}{2}\right)$ (0≤x≤b)

(3) $E'$=0，必须是 $x^2 - \dfrac{b^2}{2} = 0$， 可得 $x = b/\sqrt{2}$

四、讨论题

1、

(1) $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}$

(2) $\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}(r>R)$ ; $\vec{E}=0(r<R)$

(3) $\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}(r>R)$ ; $\vec{E}=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r_0}(r<R)$

(4) $\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}$

(5) $\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}(r>R)$ ; $\vec{E}=0(r<R)$

(6) $\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}(r>R)$ ; $\vec{E}=\frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{r_0}(r<R)$

(7) $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{r_0}$

(8) $\vec{E}=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}(r>R_2)$ ; $\vec{E}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r_0}(R_2>r>R_1)$ ;$\vec{E}=0(r<R_1)$

(9) $\vec{E}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}(r>R_2)$ ;$\vec{E}=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}(R_2>r>R_1)$ $\vec{E}=0(r<R_1)$

（作图略）

2、(1)错　高斯面上场强不一定为零
(2)错　高斯面上有些点场强可以为零
(3 错 可以有电荷，但电荷总和为零
(4)错　高斯面上场强不一定为零
(5)错　高斯面内可以没电荷
(6)对

# 静电场（二）作业答案

一、选择题

1.D、 2 .C、 3 .C、B、A、 4. C、 5 .D

二、填空题

1. $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{3}{4}$； 0

2. 45V； －15V

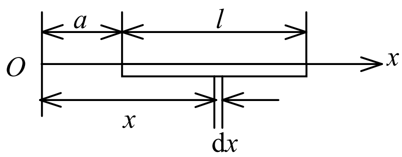
3. 0 ； $\dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0}$

4. 0 ； $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{R}$

5. $-\dfrac{qq_0}{8\pi\varepsilon_0 l}$

6. $\sqrt{v_B^2+\dfrac{2q}{m}(U_B-U_A)}$

三、计算题




1、（1）解：$dq=\lambda dx=\dfrac{q}{l}dx$

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{qdx}{x}$$

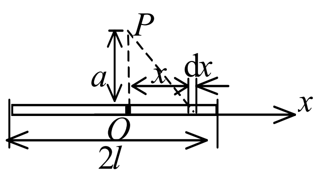
$$V=\int dV=\int_a^{a+l}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{qdx}{x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{a+l}{a}$$

（2）解：$dq=\lambda dx=\lambda_0(x-a)dx$

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0(x-a)dx}{x}$$

$$V=\int dV=\int_a^{a+l}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0(x-a)dx}{x}=dV=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}(l-a\ln\frac{a+l}{a})$$

2、解：$\lambda=\dfrac{q}{2l}$ $\quad dV=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dx}{(x^2+a^2)^{1/2}}=\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}}$




$$V=\int dV=2\int_0^l\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}}=2\cdot\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\left[x+\sqrt{x^2+a^2}\right]_0^l$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l+\sqrt{l^2+a^2}}{a}$$

3、解： （1）按高斯定理有（**注：方法同静电（一）计算 4**）

$E_1=\dfrac{qr_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}$ $\quad$ ($r_1$≤R)，$\vec{E}_1$方向沿半径向外.

$E_2=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$ $\quad$ ($r_2$>R)，$\vec{E}_2$ 方向沿半径向外.

球内电势

$$V_1=\int_{r_1}^{R}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R}^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{r_1}^{R}\frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0R^4}\mathrm{d}r+\int_{R}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q}{3\pi\varepsilon_0R}-\frac{qr_1^3}{12\pi\varepsilon_0R^4}=\frac{q}{12\pi\varepsilon_0R}\left(4-\frac{r_1^3}{R^3}\right)\qquad(r_1\le R)$$

球外电势

$$V_2=\int_{r_2}^{R}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{r_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r_2}\qquad(r_2>R)$$

（2）若体密度为恒量

$E_1=\dfrac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}$　　$(r_1\leqslant R)$，$\vec{E}_1$方向沿半径向外．$E_2=\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0r_2^2}$　　$(r_2>R)$，$\vec{E}_2$方向沿半径向外．

球内电势

$$V_1=\int_{r_1}^{R}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R}^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{r_1}^{R}\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r+\int_{R}^{\infty}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho r_1^2}{6\varepsilon_0}\qquad(r_1\le R)$$

球外电势

$$V_2=\int_{r_2}^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{r_2}^{\infty}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0r_2}\qquad(r_2>R)$$

四、讨论题

1、

(1) $V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0r}$

（2）$V=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r}$（$r>R$）；$V=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R}$（$r<R$）

（3）$V=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r}$（$r>R$）；$V=\dfrac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0R^3}$（$r<R$）

（4）$V=\dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0r}$（$r>R_2$）；$V=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0r}+\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2}$（$R_2>r>R_1$）$V=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_2}$（$r<R_1$）

（5）$V_{12}=\dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

（作图略）

# 静电场中导体和电介质作业答案

一、选择题

1. B、 2 .D、 3. B

二、填空题

1. $-q$；$-q$

2. $\dfrac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$；$\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S}$

3. $\varepsilon_r$；1；$\varepsilon_r$

4. $\dfrac{1}{\varepsilon_r}$；$\dfrac{1}{\varepsilon_r}$

三、计算题

1．解：(1)两球相距很远，可视为孤立导体，互不影响．球上电荷均匀分布．设两球半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$，导线连接后的电荷分别为 $q_1$ 和 $q_2$，而 $q_1 + q_1 = 2q$，则两球电势分别是

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}, \qquad U_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

两球相连后电势相等， $U_1 = U_2$，则有

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} = \frac{q_1+q_2}{r_1+r_2} = \frac{2q}{r_1+r_2}$$

由此得到

$$q_1 = \frac{r_1 2q}{r_1 + r_2}$$

$$q_2 = \frac{r_2 2q}{r_1 + r_2}$$

(2) $q_1 = 4\pi r_1^2 \sigma_1$

$q_2 = 4\pi r_2^2 \sigma_2$ 带入上式得

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

(3)两球电势 $$U_1 = U_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 + r_2)}$$

2．解：(1) 由静电感应，金属球壳的内表面上有感生电荷$-q$，外表面上带电荷 $q+Q$.

(2) 不论球壳内表面上的感生电荷是如何分布的，因为任一电荷元离 $O$ 点的距离都是 $a$，所以由这些电荷在 $O$ 点产生的电势为

$$U_{-q} = \frac{\int dq}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

(3) 球心 $O$ 点处的总电势为分布在球壳内外表面上的电荷和点电荷 $q$ 在 $O$ 点产生的电势的代数和

$$U_O = U_q + U_{-q} + U_{Q+q}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

3．解：(1) 已知两极板分别带电量$+Q$ 和$-Q$，两板间场强大小为

$$E = Q / (\varepsilon_0 S)$$

两极板间电势差 $U = Ed = Dd / (\varepsilon_0 S)$

电容 $C = Q / U = \varepsilon_0 S / d$

(2) 电场能量 $W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$

若两板间充满相对介电常量为$\varepsilon_r$的各向同性均匀电介质，则

电容 $C = Q / U = \varepsilon_0 \varepsilon_r S / d$

电场能量 $W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$

4．解：(1) 设内、外球壳分别带电荷为$+Q$和$-Q$，则两球壳间的场强大小为

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

两球壳间电势差 $U_{12} = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$

电容 $C = \dfrac{Q}{U_{12}} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

(2) 电场能量 $W = \dfrac{CU_{12}^2}{2} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 U_{12}^2}{R_2 - R_1}$

若两球壳间充满相对介电常量为$\varepsilon_r$的各向同性均匀电介质，则

电容 $C = \dfrac{Q}{U_{12}} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

电场能量 $W = \dfrac{CU_{12}^2}{2} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r R_1 R_2 U_{12}^2}{R_2 - R_1}$

5. 解：(1) 根据高斯定理可得两圆柱间场强大小为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

两圆柱间电势差 $U_{12} = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = [\lambda / (2\pi\,\varepsilon_0)] \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}r / r = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1}$

电容 $C = \dfrac{Q}{U_{12}} = \dfrac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1}} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2 / R_1)}$

(2) 电场能量 $W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{\lambda^2 L \ln(R_2 / R_1)}{4\pi\varepsilon_0}$

若两圆柱间充满相对介电常量为$\varepsilon_r$的各向同性均匀电介质，则

电容 $C = \dfrac{Q}{U_{12}} = \dfrac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r}\ln\dfrac{R_2}{R_1}} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r L}{\ln(R_2 / R_1)}$

电场能量 $W=\dfrac{Q^2}{2C}=\dfrac{\lambda^2 L\ln(R_2/R_1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}$

四、讨论题

1、（1）

设四个表面的电荷面密度分别为$\sigma_A$、$\sigma_B$、$\sigma_C$、$\sigma_D$

$$\sigma_A S+\sigma_B S=Q_1$$

$$\sigma_C S+\sigma_D S=Q_2$$

$$\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_C}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_D}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_C}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_D}{2\varepsilon_0}=0$$

联立求出

$$\sigma_A=\sigma_D=\frac{Q_1+Q_2}{2S}$$

$$\sigma_B=-\sigma_C=\frac{Q_1-Q_2}{2S}$$

空间电场分布可应用公式$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，利用叠加原理求出。

左侧：$E=-\dfrac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_C}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_D}{2\varepsilon_0}$

两板间：$E=\dfrac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_C}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_D}{2\varepsilon_0}$

右侧：$E=\dfrac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_B}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_C}{2\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma_D}{2\varepsilon_0}$

（2）

$$\sigma_A=\sigma_D=\frac{Q}{S}$$

$$\sigma_B=\sigma_C=0$$

两板之间无电场，电场存在两板外侧，电场大小为$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$。

（3）

$$\sigma_A = \sigma_D = 0$$

$$\sigma_B = -\sigma_C = \frac{Q}{S}$$

电场存在两板之间，电场大小为 $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，两板外侧无电场。

2、”均匀带电球体”改为”均匀带电导体球”

（1）可视为三个同心均匀带电球面的电场叠加。

$r < a$　　$E = 0$　　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c})$

$a < r < b$　　$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{r})$

$b < r < c$　　$E = 0$　　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}$

$r > c$　　$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（2）电荷分布在最外的表面，可视为一个半径为 $c$ 均匀带电球面的电场。

$r < a$　　$E = 0$　　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}$

$a < r < b$　　$E = 0$　　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}$

$b < r < c$　　$E = 0$　　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}$

$r > c$　　$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　　$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

# 恒定磁场（一）参考解答

一、选择题

1、D　　2、B　　3、C

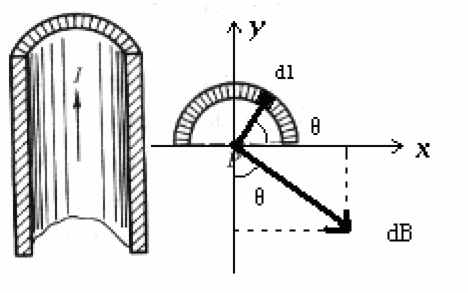
二、填空题

1、大小：$\dfrac{\mu_0 I}{12R}+\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$　　方向：$\otimes$

2、$-B\pi r^2\cos\alpha$

3、$\dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln 2$

三、计算题




1.（1）解：金属薄片单位弧长上的电流为 $\dfrac{I}{\pi R}$

$$dI=\frac{I}{\pi R}Rd\theta$$

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}d\theta$$

$$d\vec{B}=dB_x\vec{i}+dB_y\vec{j}=dB\sin\theta\vec{i}+(-dB\cos\theta)\vec{j}$$

$$B_x=\int dB_x=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y=\int dB_y=\int_0^{\pi}-\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\cos\theta d\theta=0$$

$$\therefore \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\vec{i}$$

1.（2）解：金属薄片单位弧长上的电流为 $\dfrac{2I}{\pi R}$

$$dI=\frac{2I}{\pi R}Rd\theta$$

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}d\theta$$

$$d\vec{B}=dB_x\vec{i}+dB_y\vec{j}=dB\sin\theta\vec{i}+(-dB\cos\theta)\vec{j}$$

$$B_x=\int dB_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\sin\theta d\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y=\int dB_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\cos\theta d\theta=-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$\therefore \vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\vec{i}-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\vec{j}$$

2.解：（1） $B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi\frac{1}{2}d}+\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi\frac{1}{2}d}=\dfrac{\mu_0}{\pi d}(I_1+I_2)$　　方向：⊙

（2） $B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}+\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-r)}$

$$\Phi_m=\int_S d\Phi_m=\int_S \vec{B}\bullet d\vec{S}=\int_S BdS=\int_{r_1}^{r_1+r_2}\left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-r)}\right]\cdot ldx$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi}\ln\frac{r_1+r_2}{r_1}+\frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi}\ln\frac{r_2+r_3}{r_3}$$

四.讨论题

1、（1）圆环电流的$B_3=0$；两直导线的$B_1=0$、$B_2=0$；$O$点总磁感应强度$B_0=0$

（2）圆环电流的$B_3=0$；两直导线的$B_1=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$e 、$B_2=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\otimes$；$O$点总磁感应强度$B_0=0$

（3）圆环电流的$B_3=0$；两直导线的$B_1=0$、$B_2=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$e ；$O$点总磁感应强度$B_0=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$e

2、（1）三角形电流的$B_3=0$；两直导线的$B_1=0$、$B_2=0$；$O$点总磁感应强度$B_0=0$

（2）三角形电流的$B_3=0$；两直导线的$B_1=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}\otimes$、 $B_2=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi l}(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2})\otimes$；

$O$点总磁感应强度$B_0=B_1+B_2=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}+\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi l}(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2})\otimes$

（3）三角形电流的$B_3=0$；两直导线的$B_1=0$、$B_2=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}\otimes$；

$O$点总磁感应强度$B_0=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}\otimes$；

## 恒定磁场（二）参考解答

一、选择题

1、C

二、填空题

1、环路内包围的电流代数和；环路上积分点的磁场；所有电流产生的。

2、$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(I_2 - 2I_1)$；由电流 $I_1$、$I_2$、$I_3$ 激发的

3、$-2\mu_0 I$、 $\mu_0 I$、 $-3\mu_0 I$、 $3\mu_0 I$.,

4、大小：$\mu_0 i$　方向：向右（右手定则决定）

三、计算题

解：$\vec{B}$ 方向沿以 0 为圆心的圆周切向，且同一圆周上各点 $\vec{B}$ 的大小相等。

作一以 0 为圆心，r 为半径的圆周为安培回路 $l$，则

$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r$　由 $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{l内} I$ 得：$B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum_{l内} I$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 \sum_{l内} I}{2\pi r}$$

$r < a$ 时，$\sum_{l内} I = \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2$　$\therefore B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$

$a < r < b$ 时，$\sum_{l内} I = I$　$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$b < r < c$ 时，$\sum_{l内} I = I - I\frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} = \frac{I(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)}$　$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)}$

$r > c$ 时，$\sum_{l内} I = 0$　$\therefore B = 0$

四、讨论题

1. 8A、8A、0A；

（1）不相等；

（2）不为零。

2.

| 电流 | 磁感应强度大小 | 磁感线 | $B$¯$r$关系曲线 | 计算过程 |
|---|---|---|---|---|
| 无限长载流直导线（$I$） | $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ | 略 | 略 | 略 |
| 无限长载流圆柱面（$R$、$I$） | $\begin{cases} B=0, r<R \\ B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, r\ge R \end{cases}$ | 略 | 略 | 略 |
| 无限长载流圆柱体（$R$、$I$） | $\begin{cases} B=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, r<R \\ B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, r\ge R \end{cases}$ | 略 | 略 | 略 |
| 无限长载流螺线管（$I$） | $B=\mu_0 n I$,($n$是单位长度内线圈匝数） | 略 | 略 | 略 |
| 两无限长同轴载流圆柱面（$R_1$、$I_1$，$R_2$、$I_2$） | $\begin{cases} B=0, r<R_1 \\ B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}, R_2>r\ge R_1 \\ B=\dfrac{\mu_0 (I_1+I_2)}{2\pi r}, r\ge R_2 \end{cases}$ | 略 | 略 | 略 |

**恒定磁场（三）参考解答**

一、 选择题

1、A　2、B　3、C　4、C　5、A　6、B　7、D

二、填空题

1、$\dfrac{e^2B}{4}\sqrt{\dfrac{r}{\pi\varepsilon_0 m_e}}$

2、$\dfrac{mv^2}{2B}$　　相反

3、$M=0$，$M=\dfrac{\sqrt{3}a^2B}{4}$

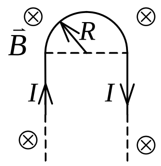
4、$F_{bc}=\sqrt{2}aIB$

5、$p_m=\dfrac{1}{2}\pi(R_2^2-R_1^2)I$　；　$M=\dfrac{1}{2}\pi(R_2^2-R_1^2)IB$　；　向上

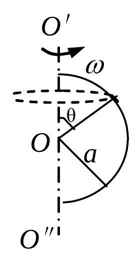
三、计算题

1 解：$\vec{F}_{左}$与$\vec{F}_{右}$大小相等，方向相反，∴相互抵消

$F_{合}=F_{中}=IB\cdot 2R=2IRB$　方向竖直向上




2 解：（1）在半圆上取微元$dl=Rd\theta$，等效电荷为$dq=\lambda dl=\lambda Rd\theta$，由题目可知转一周的时间$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，则转动时这一部分的圆周运动等效电流$dI=\dfrac{dq}{T}=\dfrac{\omega\lambda Rd\theta}{2\pi}$，圆周运动的半径$r=R\sin\theta$，这等效圆环在 0 点产生的磁场为




$$dB=\frac{\mu_0 r^2 dI}{2R^3}=\frac{\mu_0 r^2\omega\lambda Rd\theta}{4\pi R^3}$$

$$B=\int dB=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 R^2\sin^2\theta\omega\lambda Rd\theta}{4\pi R^3}=\frac{\mu_0\omega\lambda}{8}$$

方向向上

（2）这段微元产生磁矩

$$dP=\pi r^2 dI=\pi R^2\sin^2\theta\frac{\omega\lambda Rd\theta}{2\pi}$$

$$P=\int dP=\int_0^{\pi}\pi R^2\sin^2\theta\frac{\omega\lambda Rd\theta}{2\pi}=\frac{\pi\omega\lambda R^3}{4}$$

方向向上

3 解：（1）以 M 点为坐标原点建立坐标系，载流导线 MN 上任一点处的磁感强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\mathrm{r+x})}-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2\mathrm{r-x})}$$

MN 上电流元 $I_3dx$ 所受磁力为

$$dF=I_3Bdx=I_3(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\mathrm{r+x})}-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2\mathrm{r-x})})dx$$

$$F=I_3\int_0^r(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\mathrm{r+x})}-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2\mathrm{r-x})})dx=\frac{\mu_0 I_3}{2\pi}(I_1-I_2)\ln 2$$

若$I_2>I_1$，则$\vec{F}$的方向向下，$I_2<I_1$，则$\vec{F}$的方向向上。

（2）$I_1$ 、$I_2$的方向改变，影响的是磁场的方向，$I_3$的方向改变会导致力的方向反向。

（3）去掉 $I_2$，载流导线 MN 上任一点处的磁感强度大小为 $B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\mathrm{r+x})}$，方向向里。

MN 上电流元 $I_3dx$ 所受磁力为

$$dF=I_3Bdx=I_3(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\mathrm{r+x})})dx$$

$$F=I_3\int_0^r(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\mathrm{r+x})})dx=\frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi}\ln 2$$

方向向上。

同理去掉 $I_1$，载流导线 MN 上任一点处的磁感强度大小为 $B=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2\mathrm{r-x})}$，方向向外。

$$dF=I_3Bdx=I_3\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2\mathrm{r-x})}dx$$

$$F=I_3\int_0^r\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2\mathrm{r-x})}dx=\frac{\mu_0 I_3 I_2}{2\pi}\ln 2$$

方向向下。

4 解：（1） $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$， $F_{CD}=I_2bB_1=\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d}$ 方向垂直导线向左

$B_2=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+d)}$， $F_{EF}=I_2bB_2=\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(a+d)}$ 方向垂直导线向右

$$F_{CF}=F_{DE}=\int I_2dlB=\int_d^{d+a}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}dx=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$\vec{F}_{CF}$ 方向垂直导线向上；$\vec{F}_{DE}$ 方向垂直导线向下

（2） $F_{合}=F_{CD}-F_{EF}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}(\frac{1}{d}-\frac{1}{a+d})$ 方向向左

$\vec{M}_{合}=0$