第七章 空间解析几何与向量代数

同步练习 41（A）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：向量的概念；向量的线性运算；向量的坐标表达式及其运算；单位向量；向量的模.

一．计算题

1．已知平行四边形 $ABCD$， BC 和 CD 边的中点分别为 E 、F . 且 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.（要求作图）

解：图略. 作图可得：$\begin{cases}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\vec{a}=-\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ \vec{b}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}(2\vec{b}-\vec{a})\\ \overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}(\vec{b}-2\vec{a})\end{cases}$.

2．求点 $(2,-3,-1)$ 关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标.

解：（1）关于 xOy 平面的对称点是 $(2,-3,1)$；关于 xOz 平面的对称点是 $(2,3,-1)$；关于 yOz 平面的对称点是 $(-2,-3,-1)$.

（2）关于 x 轴 y 轴 z 轴的对称点分别为 $(2,3,1)$， $(-2,-3,1)$， $(-2,3,-1)$.

（3）关于原点的对称点是 $(-2,3,1)$.

3．求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解：点 M 到 x 轴的距离是

$$d_x=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}.$$

点 M 到 y 轴的距离就是点(4, −3, 5)与点(0, −3, 0)之间的距离，即 $d_y=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

点 M 到 z 轴的距离就是点(4, −3, 5)与点(0, 0, 5)之间的距离，即 $d_z=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

4． 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$，试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解：

$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-2,-2)$

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5．设 $\vec{a}=\{1,3,2\}$，$\vec{b}=\lambda\{2,y,4\}$，且 $\lambda\neq 0$，若 $\vec{a}$ 平行于 $\vec{b}$， $\left|\vec{b}\right|=28$，求向量 $\vec{b}$.

解： $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{4}{2}$，得 $y=6$，

$\left|\mathrm{b}\right|=28\Rightarrow\sqrt{4\lambda^2+36\lambda^2+16\lambda^2}=28$，

得 $\lambda=\pm\sqrt{14}$.

6．求平行于向量 $\vec{a}=\left\{6,7,-6\right\}$ 的单位向量.

解： $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$，

平行于向量 $\vec{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量为

$$\pm\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\pm(\frac{6}{11},\ \frac{7}{11},\ -\frac{6}{11})\ .$$

二．证明题

1．设 M 是 AB 的中点，O 是空间任意一点，试证： $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

证： $\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\therefore\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

同步练习 42（A）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：向量的方向角、投影；向量的数量积和向量积，向量的混合积；两向量的夹角；两向量垂直、平行的条件.

一．填空题

1．已知 $\vec{a}=\{3,\ 6,\ 1\}$，$\vec{b}=\left\{2,\ \frac{4}{3},\ k\right\}$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $k=$ $\underline{-14}$.

2．设 $\vec{a}=\{2,1,3\}$，$\vec{b}=\{1,0,2\}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=\underline{\{2,-1,-1\}}$.

3. 设 $\vec{a}=\{2,0,-1\}$，$\vec{b}=\{0,1,1\}$，则与向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 同时垂直的单位向量为 $\underline{\pm\frac{1}{3}\{1,-2,2\}}$.

二．计算题

1．设已知两点 $M_1(4,\ \sqrt{2},\ 1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解： $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,\ -\sqrt{2},\ 1)$；

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=2$；

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{-\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

2．一向量的起点在点 $A(2,-1,7)$，它在 x 轴和 z 轴上的投影依次为4和7，在 y 轴上分向量为 $-4\vec{j}$，求这向量的终点 B 的坐标.

解：设B点坐标为（x，y，z），则

$$\begin{cases}x-2=4\\ y+1=-4,\\ z-7=7\end{cases}$$

解得B点坐标为：$(6,-5,14)$.

3. 设 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$，求：(1) $\text{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$；(2) $|\vec{a}+\vec{b}|$；(3) $(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{a}$.

解： $\text{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{3+2+3}{\sqrt{9+4+1}}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{41},$$

$$(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&3\\3&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=5\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}.$$

4．设向量 $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，(1) 确定这两个向量是否垂直；(2) 求以这两个向量为边的平行四边形的面积.

解： (1) 因为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3+(-2)\cdot1+4\cdot(-4)=-15\neq0,$$

所以两向量不垂直.

(2) 由 $\vec{a}\times\vec{b}=4\vec{i}+16\vec{j}+7\vec{k}$,

得平行四边形的面积

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{4^2+16^2+7^2}=\sqrt{321}.$$

5. 设 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角并求以 $\vec{a}+3\vec{b}$ 和 $2\vec{a}+\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积.

解：（1） $\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $2\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，则有：

即：$2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2-5\vec{a}\bullet\vec{b}=0$

$\because|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ 解得：$\vec{a}\bullet\vec{b}=\frac{4}{5}$，

则 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{4}{5}$ $\therefore(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\arccos\dfrac{4}{5}$

（2）以 $\vec{a}+3\vec{b}$ 和 $2\vec{a}+\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积

$$S=\left|(\vec{a}+3\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})\right|$$

$$=5\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=3$$

同步练习 41（B）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：参见同步练习 41(A).

一．选择题

1．空间直角坐标系中，点 $P(1,\ -2,\ 3)$ 关于坐标平面 xOy 的对称点为（ C ）.

(A) $(1,\ 2,\ 3)$． (B) $(-1,\ 2,\ -3)$．

(C) $(1,\ -2,\ -3)$． (D) $(-1,\ -2,\ 3)$．

二．填空题

1．已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$，则 $3\overrightarrow{M_1M_2}=\underline{\{3,-6,-6\}}$.

2．设 $\vec{m}=4\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，则与 $\vec{m}$ 同方向的单位向量 $\overrightarrow{m^\circ}=\underline{\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}}$.

三．综合题

1. 设 ΔABC 的三边 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，三边中点依次为 D，E，F，试用向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CF}$，并说明：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.（要求作图）

证：因为

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$$

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c})$$

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

2. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解：设所求的点为 $P(0, y, z)$与 A、B、C 等距离，则

$$|\overrightarrow{PA}|^2=3^2+(y-1)^2+(z-2)^2,$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2,$$

$$|\overrightarrow{PC}|^2=(y-5)^2+(z-1)^2.$$

由题意，有

$$|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2,$$

即
$$\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\\4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\end{cases}$$

解之得 $y=1$, $z=-2$，故所求点为$(0, 1, -2)$.

3. 已知三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$，求以此三点为顶点的三角形 ΔABC 的边长，并证明 ΔABC 等腰直角三角形.

解：因为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7,$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2},$$

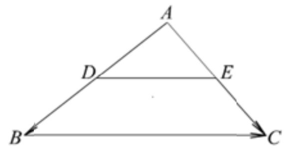
所以 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.

因此ΔABC 是等腰直角三角形.

四．证明题

1. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半.

证：



设 D, E 分别为 AB, AC 的中点，则有

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}),$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

所以 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

从而 $DE//BC$，且 $|DE|=\frac{1}{2}|BC|$.

同步练习 42（B）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：参见同步练习 42(A).

一．选择题

1．设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为任意非零向量，下列结论中正确的是（ D ）.

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

(B) $|\vec{a}|\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

(C) $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$.

(D) $\vec{a}=|\vec{a}|\ \overrightarrow{a^{\circ}}$ （$\overrightarrow{a^{\circ}}$ 是与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量）.

二．填空题

1．设 $\vec{a}=\{3,-1,2\}$，$\vec{b}=\{1,2,-1\}$，则 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=$ $\underline{-10}$.

2．设 $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=$ $\underline{-19}$.

3．已知 $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\perp\vec{b}$，则 $|(\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|=$ $\underline{\qquad 24 \qquad}$.

三．计算题

1．设 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=-\vec{j}+3\vec{k}$，求 $2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{b},\ \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$.

解：$2\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 3,\ -5)$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0-1-3=-4$，

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=-\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

2．设 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$，求 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=\{1,-1,1\}$，

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=\{1,-1,-2\},$$

$=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$.

3．设 $\vec{a}=\{1,3,2\}$，$\vec{b}=\lambda\{2,y,4\}$，且 $\lambda\neq 0$，分别求 λ，y 使得（1）$\vec{b}$ 为垂直于 $\vec{a}$ 的单位向量；（2）$\vec{b}$ 为与 $\vec{a}$ 平行的单位向量.

解：（1）$y=-\dfrac{10}{3},\lambda=\pm\dfrac{3\sqrt{70}}{140}$，

（2）$y=6,\lambda=\pm\dfrac{1}{\sqrt{56}}$

4．$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=-\vec{i}+m\vec{j}-5\vec{k}$，分别求出 m 的值，使得

（1）$\vec{a}\perp\vec{b}$；（2）$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为 4；

（3）以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积为 $\sqrt{300}$.

解：（1）$\vec{a}\bullet\vec{b}=0\ \Rightarrow 3\times(-1)-2m+1\times(-5)=0$

$\Rightarrow\ m=-4$

（2）$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{-2m-8}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=4$$

$\Rightarrow m=-4-2\sqrt{14}$

（3）面积 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

$=\sqrt{(10-m)^2+14^2+(3m-2)^2}=\sqrt{300}$

$\Rightarrow 5m^2-16m=0\ \Rightarrow m_1=0,\ m_2=\dfrac{16}{5}$

同步练习 43（A）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：曲面方程的概念； 球面、柱面、旋转曲面；常用的二次曲面方程及其图形.

一．选择题

1．下列方程中，表示柱面的是（ A ）.

(A) $x^2+y^2=1$.

(B) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(C) $x^2+y^2+z^2=1$.

(D) $z=1-x^2-y^2$.

二．填空题

1．以点 $(1,-2,2)$ 为球心，且过坐标原点的球面方程是 $\underline{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9}$.

2．平面曲线 $\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得曲面方程是 $\underline{x^2+4y^2+4z^2=1}$.

3. 已知动点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点的距离等于它到平面 $z=1$ 的距离，则点 M 的轨迹方程是 $\underline{x^2+y^2+2z=1}$.

三．综合题

1．已知动点 $M(x,y,z)$ 到点 $(1,1,1)$ 的距离等于它到平面 $z-1=0$ 的距离的 2 倍，求点 M 的轨迹方程，并指出该方程表示什么图形.

解：由题意得

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=2\frac{|z-1|}{\sqrt{1}}$$

即 (x,y,z) 满足

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4(z-1)^2,$$

或 $3(z-1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2$，

M 点的轨迹是以 $(1,1,1)$ 为顶点的圆锥面.

2. 指出下列各方程在平面解析几何和在空间解析几何中分别表示什么图形，并分别画出相应的图形.

（1） $x=2$.

解:平面中表示:平行于 y 轴,距离为 2 的直线，空间中表示:平行于 yoz 面,距离为 2 的平面；

图略.

（2） $x^2+y^2=4$.

解：平面中表示:圆心在圆点半径为 2 的圆，空间中表示:母线平行于 z 轴半径为 2 的圆柱面；

图略.

3．画出下列各曲面围成立体的图形.

（1） $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$， $z=-1$；

（2） $z=6-x^2-y^2$， $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

解：图形略

同步练习 44（A）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：空间曲线方程的概念；空间曲线的参数方程和一般方程；空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

一．选择题

1．平面曲线 $\begin{cases} y+4z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面的方程是（ C ）.

(A) $x^2+y+4z^2=1$.

(B) $x^2+4y^2+4z^2=1$.

(C) $4x^2+y+4z^2=1$.

(D) $4x^2+4y^2+z^2=1$.

二．综合题

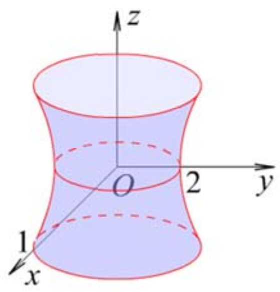
1. 说明旋转曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$ 是怎样形成的，指出该方程表示什么图形并作图.

解: 可看成 xoy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转而成的旋转椭球面;或看成是 xoz 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转而成的旋转椭球面.

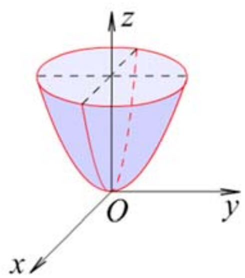
图略.

2. 画出下列方程所表示的曲面:

（1）$4x^2+y^2-z^2=4$.



（2）$\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.



3. 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成，求它在 xOy 面上的投影.

解：半球面和锥面的交线 C: $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$. 消去 z 的投影柱面方程: $x^2+y^2=1$.

所以,交线 C 在 xoy 面上的投影曲线为: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$, 立体在 xoy 面上的投影区域为该投影曲线所围的部分: $x^2+y^2\le 1$.

4. 已知曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 及 $z^2=x^2+y^2$，求两曲面的交线在 xOy 平面上投影曲线方程.

解: 两曲线的交线 C: $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$, 消去 z 得: $x^2+y^2=\frac{1}{5}$, 所以,投影曲线方程为:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{5}. \\ z=0 \end{cases}$$

同步练习 43（B）

学号________ 姓名________ 班序号________

主要内容：参见同步练习 43(A).

一．选择题

1. 由 xoy 平面上的曲线 $y=x^2$ 绕 y 轴旋转一周，所得的旋转曲面方程是（ C ）.

(A) $x^2+y^2=z$.

(B) $z^2=x^2+y^2$.

(C) $y=x^2+z^2$.

(D) $z=1-x^2-y^2$.

2．方程 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 所表示的曲面是（ B ）.

(A) 双曲面.　　(B) 柱面.

(C) 椭球面.　　(D) 抛物面.

二．填空题

1．已知动点 $M(x,\ y,\ z)$ 到坐标原点的距离等于它到平面 $z=2$ 的距离，则点 M 的轨迹方程是 $\underline{\ x^2+y^2+4z=4.\ }$

2．旋转曲面 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$ 是由 xOy 面上曲线 $\underline{x^2+\frac{y^2}{4}=1(\text{或}x^2+\frac{z^2}{4}=1)}$ 绕 x 轴旋转一周而得的.

三．综合题

1．设有两点 $A(-5,4,0)$，$B(-4,3,4)$，求满足条件 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{2}\,|\overrightarrow{PB}|$ 的动点 $P(x,y,z)$ 的轨迹方程，并指出该方程表示什么图形.

解： $\left|\overrightarrow{PA}\right|=\sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2+(z-0)^2}$，

$\left|\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}$，

由 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{2}\,|\overrightarrow{PB}|$，得

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2+z^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}$$

两边平方，化简并配方得

$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=36,$$

该方程表示以 $(-3,\ 2,\ 8)$ 为球心，半径为 6 的球面.

2. 已知动点 $M(x,\ y,\ z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $A(1,-1,2)$ 的距离相等，求点 M 的轨迹方程，并指出是什么图形.

解： 由条件得

$$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}$$

化简得

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4z-4.$$

是抛物面.

3．画出下列各曲面围成立体的图形.

（1） $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$；

（2） $z=x^2+y^2$，$z=1$.

解：图形略

同步练习 44（B）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：参见同步练习 44(A).

一．选择题

1. 曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 yOz 平面上的投影曲线是（ A ）.

(A) $\begin{cases}(a-z)^2+4y^2+z^2=4\\ x=0\end{cases}$.

(B) $\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4\\ z=0\end{cases}$.

(C) $\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4\\ x=0\end{cases}$.

(D) $(a-z)^2+4y^2+z^2=4$.

二．综合题

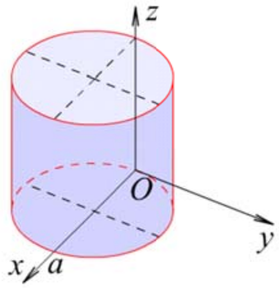
1. 画出下列方程所表示的空间图形:

（1）$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$.

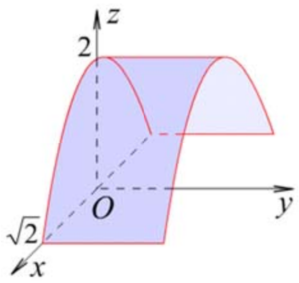
（2）$z=2-x^2$.

（3）$\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\ x-y=0\end{cases}$ 在第一卦限.

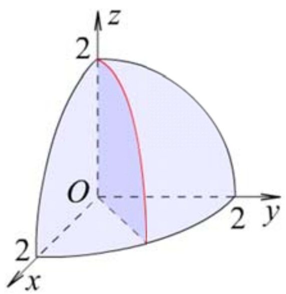
解：(1)



(2)



(3)



2. 将曲线的一般方程 $\begin{cases}2x^2+y^2=z^2\\ x+z=1\end{cases}$ 化为参数方程并求它在 xOy 面上的投影曲线方程.

解：曲线方程消去 z 得：$2x^2+y^2=(1-x)^2$，即 $(x+1)^2+y^2=1$. 利用平面上圆曲线的参数方程，可得空间曲线的参数方程为:

$$\begin{cases}x=-1+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\\ z=1-x=2-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\qquad(0\le\theta\le 2\pi)$$

3．指出下列方程所表示的曲线，并作图.

（1）$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\ x=3\end{cases}$；

（2）$\begin{cases}y^2+z^2-4x+8=0\\ y=4\end{cases}$.

解：图形略.

(1)平面 x=3 上的圆 $y^2+z^2=16$. 由平面 x=3 截球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 所得. 圆心在(3,0,0)，半径为 4.

(2)平面 y=4 截旋转抛物面所得. 位于 y=4 平面上的抛物线：$z^2=4(x-6)$.

同步练习 45（A）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：平面方程；平面与平面的夹角以及平行、垂直的条件；点到平面的距离.

一．填空题

1．过点 $M_0(1,1,1)$ 且与平面 $x-2y+3z=0$ 平行的平面是 $\underline{\quad x-2y+3z-2=0 \quad}$.

2． 点 $P(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-9=0$ 的距离是 $\underline{\quad 2/3 \quad}$.

二．计算题

1．求过三点 $M_1(2,-1,4)$，$M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程.

解： 因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,\ 4,\ -6)$，$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,\ 3,\ -1)$，所以平面法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=14\vec{\boldsymbol{i}}+9\vec{\boldsymbol{j}}-\vec{\boldsymbol{k}}$$

根据平面的点法式方程，得所求平面的方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0\ ,$$

即 $14x+9y-z-15=0$.

2．求过点 $M_0(1,1,1)$ 与 $M(1,\ 2,-1)$，且和平面 $x-2y+3z=0$ 的垂直的平面方程.

解： $\overrightarrow{\mathrm{M}_0M}=\{0,1,-2\}$，故所求平面的法向量取为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\{1,2,1\}$$

所求平面方程为

$$1\cdot(x-1)+2(y-1)+1\cdot(z-1)=0\ ,$$

即 $x+2y+z-4=0$.

3．求过点 $(0,2,1)$，且和两平面 $2x+y-z=0$，$-x+3y+2z=5$ 都垂直的平面方程.

解： $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=\{\ 5,\ -3,\ 7\ \}$，

平面的方程是 $5x-3y+7z-1=0$.

4．求平面 π，使其同时满足：

（1）过 z 轴，

（2） π 与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

解： 因为平面 π 过 z 轴，可设其方程为 $Ax+By=0$. 又因为 π 与已知平面夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$. 故

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|2A+B+(-\sqrt{5})\cdot 0|}{\sqrt{A^2+B^2+0^2}\sqrt{2^2+1^2+(-\sqrt{5})^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\Rightarrow B=3A \text{ 或 } B=-\frac{1}{3}A$$

$$\Rightarrow \pi: x+3y=0 \text{ 或 } \prod: 3x-y=0.$$

5．写出平面 $2x+7y-3z+1=0$ 和 $4x-2y-2z=3$ 的法向量，并说明它们的位置关系.

解： 垂直

同步练习 46（A）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：直线方程；平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件；点到直线的距离.

一．选择题

1．设直线过点 $(2,-3,4)$ 且与 z 轴垂直相交，则该直线的方向向量为（ C ）.

(A) $\{2,3,0\}$.　　(B) $\{2,-3,1\}$.

(C) $\{2,-3,0\}$.　　(D) $\{2,3,1\}$.

二．填空题

1．过点 $M_0(1,1,1)$ 且与平面 $2x-y+z=9$ 垂直的直线方程是 $\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}}$.

2．过点 $M(1,2,-1)$，且与直线 $\begin{cases}x=-t+2\\ y=3t-4\\ z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是 $\underline{x-3y-z+4=0}$.

三．计算题

1．直线过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z-3=0$ 和 $2x-y-5z-1=0$ 平行，求该直线的方程.

解：$\vec{n}_1=\{1,0,-4\}$，$\vec{n}_2=\{2,-1,-5\}$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,-3,-1\}$$

直线的方程为 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

2．已知直线 $L:\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ 与平面 $\pi:3x-y+2z-5=0$，求：(1) 直线 L 与平面 π 的交点 M_0；(2) 平面 π 上过点 M_0 且与直线 L 垂直的直线方程.

解：(1) 直线 L 的参数方程为

$$x=5t+7,\quad y=t+4,\quad z=4t+5,$$

代入平面方程得：$t=-1,$

直线 L 与平面 π 的交点为 $M_0(2,\ 3,\ 1).$

(2) 因为所求直线的方向向量 $\vec{s}$ 满足 $\vec{s}\perp(5,\ 1,\ 4),\ \vec{s}\perp(3,\ -1,\ 2),$ 令

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&1&4\\3&-1&2\end{vmatrix}=(6,\ 2,\ -8)\ //(3,1,-4),$$

所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-4}.$$

3．求过点 $P_0(2,-1,3)$ 与直线

$$L:\frac{x-5}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{2}$$

垂直相交的直线方程.

解：过点 P_0 与直线 l 垂直的平面方程为：

$-(x-2)+2(z-3)=0$ 即：$x-2z+4=0$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{2}\\ x-2z+4=0\end{cases}$ 得交点 $Q(4,0,4)$.

则过 P_0，Q 两点的直线即为与直线 l 垂直相交的直线. 取 $\vec{s}=\overline{P_0Q}=(2,1,1)$，则所求直线方程为：

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}.$$

4．设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\pi:x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解：$\vec{n}=\{1,-12\},\ \vec{s}=\{2,-1,2\},$

$$\sin\phi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

同步练习 45（B）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：参见同步练习 45(A).

一．选择题

1．若平面 $x+ky-5z+1=0$ 与平面 $9x-4y+2z+1=0$ 垂直，则 $k=$（ C ）.

(A) -4．　　(B) 0．

(C) $-\frac{1}{4}$．　　(D) $\frac{1}{4}$．

二．填空题

1. 点 $(-1,2,0)$ 到平面 $x+2y-z+3=0$ 的距离是 $\underline{\sqrt{6}}$．

三．计算题

1. 求过点 $(1,1,-2)$，同时垂直于平面 $x+y+z=0$ 和 $2x+3y+4z=3$ 的平面的方程.

解： $\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\{1,-2,1\}$，

平面的方程:

$$(x-1)+(-2)(y-1)+(z+2)=0,$$

即 $x-2y+z+3=0$．

2．求平行于平面 $\pi_0: x+2y+3z+4=0$，且与球面 $\sum: x^2+y^2+z^2=9$ 相切的平面方程.

解：由 $\pi//\pi_0$, 可设平面 π 的方程为

$$x+2y+3z+D=0.$$

因为平面 π 与球面 $\sum$ 相切，故球心 $(0,0,0)$ 到平面 π 的距离

$$d=\left.\frac{|x+2y+3z+D|}{\sqrt{1+2^2+3^2}}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}=3,$$

得 $|D|=3\sqrt{14}$,

故所求平面 π 的方程为 $x+2y+3z+3\sqrt{14}=0$ 或 $x+2y+3z-3\sqrt{14}=0.$

3. 已知点 $A(1,1,-1)$，$B(-2,-2,2)$，$C(1,-1,2)$，(1) 证明 A，B，C 三点不在一直线上；(2) 求过 A，B，C 三点的平面的方程；(3) 求三角形 ABC 的面积 $S_{\Delta ABC}$ 以及 AB 边上的高 h.

解：(1) $\overrightarrow{AB}=\{-3,-3,3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{0,-2,3\}$

因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不平行， 所以 A，B，C 三点不在一直线上；

(2) $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{-3,9,6\}$，过 A，B，C 三点的平面的方程为

$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$，

即 $x-3y-2z=0$；

(3) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{3\sqrt{14}}{2}$，

AB 边上的高 $h=\frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\sqrt{42}}{3}$.

4. 求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解：设平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$

$\because V=1,\ \therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc=1.$

由所求平面与已知平面平行得 $\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6}$, 令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$ 则

$$1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\Rightarrow t=\frac{1}{6}.$$

$\therefore\ a=1, b=6, c=1.$

所求平面方程为 $\frac{x}{1}+\frac{y}{6}+\frac{z}{1}=1,$ 即 $6x+y+6z=6.$

同步练习 46（B）

学号__________ 姓名_________ 班序号________

主要内容：参见同步练习 46(A).

一．选择题

1．已知直线 $\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-z+k=0\end{cases}$ 过点 $(0,\ 0,\ 3)$，则 k 的值是（ B ）.

(A) 2．　(B) 3．　(C) 4．　(D) 1．

2．设直线 L：$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面 π：$4x-2y+z-2=0$，则直线 L（ C ）.

(A) 平行于 π．　(B) 在 π 上．

(C) 垂直于 π．　(D) 与 π 斜交．

二．填空题

1. 过两点 $M_1(0,-1,1)$ 和 $M_2(1,0,-2)$ 的直线方程 $\underline{\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}}$.

2．点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+3=0$ 上的投影为 ____(-2，0，1)____.

三．计算题

1．求过点 $(1,0,-2)$，且与平面 $3x+4y-z+6=0$ 平行，又与直线 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{1}$ 垂直的直线方程.

解：$\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\3 & 4 & -1\\1 & 4 & 1\end{vmatrix}=8\vec i-4\vec j+8\vec k$，

所求直线方程为：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.

2. 求过点 $(2,-3,4)$ 且垂直于两直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+5}{2}$ 和 $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 的直线方程.

解：$\vec s=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\1 & -1 & 2\\3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\{3,5,1\}$，所以直线方程为：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-4}{1}$

3. 求点 $M_0(2,-1,1)$ 到直线

$$L:\begin{cases}x-2y+z-1=0\\x+2y-z+3=0\end{cases}$$

的距离 d．

解：L 的对称式方程为 $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$

过点 $M_0(2,-1,1)$ 且垂直于 L 的平面方程为 π：$(y+1)+2(z-1)=0$；

联立直线 L 与平面 π 的方程，解得交点 $M_1(-1,-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$，所以，点 M_0 到直线的距离为:

$d=|M_0M_1|=\dfrac{\sqrt{230}}{5}$.

4. 求直线 L: $\begin{cases}2x-y+3z=1\\x-2y-3z-9=0\end{cases}$ 在平面 π：$x-y+2z=1$ 上的投影直线的方程.

解：过 L 的平面束为

$(2x-y+3z-1)+\lambda(x-2y-3z-9)=0$，即

$(2+\lambda)x+(-1-2\lambda)y+(3-3\lambda)z+(-1-9\lambda)=0$

从其中求出与 π 垂直的平面，为此需:

$(2+\lambda)\cdot1+(-1-2\lambda)\cdot(-1)+(3-3\lambda)\cdot2=0$

整理得，$3\lambda=9$，$\lambda=3$.

代入得到过 L 且与 π 垂直的平面 π_1：

$5x-7y-6z-28=0$.

所以，L 在 π 上的投影直线为:

$$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\5x-7y-6z-28=0\end{cases}.$$

第八章　多元函数微分学

同步练习 47（A）

主要内容：多元函数的概念、二元函数的几何意义、二元函数的极限与连续的概念、有界闭区域上多元连续函数的性质.

一．选择题

1．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 是（　A　　）.

(A) 不存在.　(B) 0.　(C) 1.　(D) -1.

二．填空题

1．函数 $z=\ln(4-x^2-y^2)+\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域是 $\underline{D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2<4\}}$.

2．已知二元函数 $f(x,y)=x^2-y^2$，则 $f(x+y,\ x-y)=$ $\underline{4xy}$.

3．设 $f(u-v,uv)=u^2+v^2$，则 $f(x\,,\ y)=$ $\underline{x^2+2y}$.

4．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=$ $\underline{\quad 0\quad}$.

三．综合题

1．求二重极限

(1)．$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{xy^3}{\sqrt{xy^2+1}-1}$.

解：原式

$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{xy^3\left(\sqrt{xy^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{xy^2+1}-1\right)\left(\sqrt{xy^2+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{xy^3\left(\sqrt{xy^2+1}+1\right)}{xy^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)}y\left(\sqrt{xy^2+1}+1\right)=4$$

(2)．$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(e^x-1)\sin(xy)}{x^2y}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}=1$

(3)．$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{\sin(xy)}$.

解：原式$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(\sqrt{xy+4}-2\right)\left(\sqrt{xy+4}+2\right)}{xy\left(\sqrt{xy+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{xy\left(\sqrt{xy+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

2．讨论函数 $z=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性.

解：选取直线 $y=kx$，则 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

随着 k 的变化而变化，即

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在，

因此函数在除 $(0,0)$ 外任一点都连续.

同步练习 48（A）

主要内容：多元函数的偏导数、高阶偏导数.

一．选择题

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(C).

(A) 无定义. (B) 连续.

(C) 偏导数存在. (D) 极限存在.

二．综合题

1. 求下列函数的偏导数.

(1) 设 $z=\ln(x-y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x-y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{x-y}$.

(2) 设 $z=1+2x^2y-3xy^3$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xy-3y^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2-9xy^2$

(3) 设 $z=\dfrac{y}{x^2-y^2}$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}$$

(4) $z=e^{xy}+(x^2+y^2)\arctan x$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+2x\arctan x+\dfrac{x^2+y^2}{1+x^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+2y\arctan x$$

三．证明题：

1. 设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$=0.

证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

2.设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，试证 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{z}$.

证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{z}.$$

3．证明函数

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点不连续，但偏导数存在.

解：选取 $y=kx^3$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx^3}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx^3}}\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2}$$

知函数在 $(0,0)$ 点不连续.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\dfrac{\Delta x^3+0}{\Delta x^6+0}-0}{\Delta x}=0$，同理 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$

即函数在 $(0,0)$ 点偏导数存在.

同步练习 47（B）

主要内容：参见同步练习解答 47(A).

一．选择题

1.下列函数的定义域不正确的是（ D ）.

(A) $z=\sqrt{x-\sqrt{x}}$，

$D=\left\{(x,y)\middle|x\ge 0,x^2\ge y\ge 0\right\}$.

(B) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$D=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\ge z^2,(x,y)\ne(0,0)\right\}$.

(C) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$，

$D=\left\{(x,y)\middle|1>x^2+y^2>0,4x\ge y^2\right\}$.

(D) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，

$D=\left\{(x,y)\middle|2>x^2+y^2,y>x\ge 0\right\}$.

2. 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ 在点 $(0,0)$

处（ C ）

(A)连续. (B)有极限但不连续.

(C)极限不存在. (D)无定义.

二．填空题

1. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$ 的定义域为

$\underline{\{(x,y)\,|\,|y|\le|x|\,且x\ne 0\}}$.

2. 设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时，

$z=x^2$ 则函数 $z=$ $\underline{2y+(x-y)^2}$.

3. 设 $f(x,y)=\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$，则 $f\left(1,\dfrac{x}{y}\right)=$

$\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin y}{2-\sqrt{4-xy}}=$ $\underline{\quad 2\quad}$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x+y^2)}{x+y^2}=$ $\underline{\quad 0\quad}$.

6. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ $\underline{\ln 2}$.

三．综合题

1. 计算二元函数的极限:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

解：

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2}=\frac{1}{6}$$

四．证明题

1. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}, & x^4+y^4\ne 0\\ 0\,, & x^4+y^4=0\end{cases},$$

在 $(0,\ 0)$ 处不连续.

证明：当 $k\ne 0$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{2xy^2}{x^4+y^4}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{2k^2x^3}{x^4+k^4x^4}=\infty,$$

所以函数在 $(0,\ 0)$ 处不连续.

同步练习 48（B）

主要内容：参见同步练习解答 48（A）

一．选择题

1. 函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处连续是在点(x_0,y_0)处存在偏导数的(D).

(A) 充分条件. (B) 必要条件.

(C) 充要条件. (D) 既非充分又非必要条件.

二．填空题

1. 设 $z=\sin(xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\cos(xy)-xy\sin(xy)}$.

2. 设函数 $x=x(r,s)$， $y=y(r,s)$ 由方程组 $\begin{cases} xy+rs=1 \\ xr+ys=1 \end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{dx}{dr}=$ $\underline{\dfrac{x^2-s^2}{sy-xr}}$.

三．综合题

1. 求下列函数的所有二阶偏导数：

(1) $z=xe^{3y}+2y+1$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{3y}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3xe^{3y}+2$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9xe^{3y}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3e^{3y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

(2) $z=(2x+1)^y$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2y(2x+1)^{y-1}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(2x+1)^y\ln(2x+1)$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4y(y-1)(2x+1)^{y-2}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=[\ln(2x+1)]^2(2x+1)^y$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(2x+1)^{y-1}[1+y\ln(2x+1)]=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

(3) $z=x\ln(xy)$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\ln(xy)+1$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot x=\dfrac{x}{y}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{1}{y}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(\ln xy+1)=\dfrac{1}{y}$

四 .证明题

1. 验证 $z=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 是二维拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 的解.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

同步练习 49（A）

主要内容：全微分的概念、求法及应用；多元复合函数求导的链式法则.

一．选择题

1.下列关于二元函数偏导数、连续和可微的叙述，正确的是(　　A　　).

(A) 函数可微，则偏导数存在.

(B) 函数连续，则偏导数存在.

(C) 偏导数存在，则函数可微.

(D) 偏导数存在，则函数连续.

二．填空题

1. 设函数 $z=\ln\dfrac{x}{y}$，则全微分 $dz\big|_{(1,1)}=$ $\underline{\ dx-dy\ }$.

2. 已知函数 $z=z\left(x,y\right)$ 的全微分 $\mathrm{d}\,z=e^{y}\mathrm{d}\,x+xe^{y}\,\mathrm{d}\,y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\ e^{y}\ }$.

三．综合题

1. 求下列函数的全微分：

(1) $z=xy-\dfrac{y}{x}$；求 dz.

解：$dz=\left(y+\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dy$.

(2) $z=\ln(y^2+x)$，求 $dz\big|_{(0,1)}$.

解：因为 $dz=\dfrac{1}{y^2+x}dx+\dfrac{2y}{y^2+x}dy$.

所以 $dz\big|_{(0,1)}=dx+2dy$.

2. 设 $z=uv^2+t\cos u$，$u=e^t$，$v=\ln t$，求全导数 $\dfrac{dz}{dt}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(uv^2+t\cos u\right)=v^2-t\sin u$

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial}{\partial v}\left(uv^2+t\cos u\right)=2uv$ $\dfrac{\partial z}{\partial t}=\cos u$.由复合函数求导法则，全导数

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$=\left(\ln^2 t-t\sin e^t\right)e^t+\frac{2}{t}e^t\ln t+\cos e^t.$$

3. 有一圆柱体受压后发生形变，它的半径由 20cm 增大到 20.05cm, 高度由 100cm 减少到 99 cm. 求此圆柱体体积变化的近似值.

解：设圆柱体的半径、高和体积依次为 r、h 和 V，则有 $V=\pi r^2 h$. 已知 $h=100$ 由近似公式 $\Delta V\approx dV$，得

$$\Delta V\approx dV\Big|_{\substack{r=20\\h=100}}=(2\pi rh)\Big|_{\substack{r=20\\h=100}}\Delta r+(\pi r^2)\Big|_{\substack{r=20\\h=100}}\Delta h$$

$4000\pi\,\Delta r+400\pi\,\Delta h$. 将 $\Delta r=0.05$，$\Delta h=-1$ 代入得，$\Delta V=-200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

四．证明题

1. 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 上有连续一阶偏导数，若存在某个二元函数 $z=f(x,y)$ 使得 $dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，问函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 应该满足什么关系？为什么？

证明：由 $dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 可知

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=P(x,y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=Q(x,y)$，

于是 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

由题意知 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 连续，故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，

所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

同步练习 50（A）

主要内容：多元复合函数的求导法则；含抽象函数的复合函数求导；全微分形式的不变性.

一．填空题

1. 设 $f(u)$ 是可导函数，又设 $z=xf(u)$，$u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})$.

二．综合题

1.设 $z=uv^2$，$u=xe^y$，$v=ye^x$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(2x+1)e^{2x+y}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy(y+2)e^{2x+y}$$

2. 设 $z=e^u\sin v$，而 $u=x+y$， $v=xy$．求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=e^u\sin v\cdot 1+e^u\cos v\cdot y$$
$$=e^{x+y}\left(\sin xy+y\cos xy\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=e^u\sin v\cdot 1+e^u\cos v\cdot x$$
$$=e^{x+y}\left(\sin xy+x\cos xy\right).$$

3. 设 f 有连续二阶偏导数 $z=f(x,\frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^{2x+y}+2xy^2e^{2x+y}=(2x+1)y^2e^{2x+y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2',\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f_2'+\frac{x^2}{y^4}f_{22}''.$$

4. 设 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yg\left(x,\frac{x}{y}\right)$，其中 f,g 均为二阶可微函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\left(g_1'+\frac{1}{y}g_2'\right)$$
$$=f-\frac{y}{x}f'+yg_1'+g_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}f'-\frac{y}{x}f''\left(\frac{1}{x}\right)+g_1'$$
$$+yg_{12}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)+g_{22}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$=-\frac{y}{x^2}f''+g_1'-\frac{x}{y}g_{12}''-\frac{x}{y^2}g_{22}''.$$

三．证明题

1.证明函数 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

证明：$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\phi'(x-at)+a\psi'(x+at)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\phi''(x-at)+a^2\psi''(x+at)$$

又 $\frac{\partial u}{\partial x}=\phi'(x-at)+\psi'(x+at)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\phi''(x-at)+\psi''(x+at),$$

则 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

同步练习 49（B）

主要内容：参见同步练习解答 49(A).

一．选择题

1. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 点有定义，则根据以下四条

(1) $f(x,y)$ 在 M_0 点连续；

(2) $f(x,y)$ 在 M_0 点的两个偏导数连续；

(3) $f(x,y)$ 在 M_0 点可微分；

(4) $f(x,y)$ 在 M_0 点的两个偏导数存在.

可得结论（ A ）

(A) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$.

(B) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$.

(C) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$.

(D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$.

二．填空题

1. 设函数 $z=x^3y^2$，则全微分 $dz\big|_{(1,1)}=$ $\underline{\quad 3dx+2\,dy \quad}$.

2. 设二元函数 $z=x^2y+x\sin y$，则全微分 $dz=$ $\underline{\quad (2xy+\sin y)dx+(x^2+x\cos y)dy \quad}$.

3. 设 $z=\arctan(2xy)$，而 $y=e^{3x}$，则 $\dfrac{dz}{dx}=$ $\underline{\dfrac{2e^{3x}(1+3x)}{1+4x^2e^{6x}}}$

三．综合题

1. 设 $z=\dfrac{u}{v}$，$u=e^x\sin y$，$v=e^{-x}\cos y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$=\dfrac{1}{v}e^x\sin y+\dfrac{u}{v^2}e^{-x}\cos y=2e^{2x}\tan y$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

$=\dfrac{1}{v}e^x\cos y+\dfrac{u}{v^2}e^{-x}\sin y=e^{2x}\sec^2 y$

2. 设 $z=(2x+y)^{(x+3y)}$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：令 $u=2x+y$, $v=x+3y$ 则 $z=u^v$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2(x+3y)(2x+y)^{x+3y-1}$

$+2(2x+y)^{x+3y}\ln(2x+y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(x+3y)(2x+y)^{x+3y-1}$

$+(2x+y)^{x+3y}\ln(2x+y)$.

3. 利用全微分计算 $(0.97)^{1.05}$ 的近似值.

解：设 $f(x,y)=x^y$，$x_0=1$，$y_0=1$，$\Delta x=-0.03$，$\Delta y=0.05$，

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx x_0^{\ y_0}+y_0x_0^{\ y_0-1}\Delta x+x_0^{\ y_0}\ln x_0\Delta y$

所以 $(0.97)^{1.05}\approx1-0.03+0=0.97$

4. 求函数 $f(x,y)=2x^2-5xy+1$ 在点 $(1,1)$ 处的线性化.

解：$f(1,1)=-2$，

$f_x(1,1)=(4x-5y)\big|_{(1,1)}=-1$，

$f_y(1,1)=-5x\big|_{(1,1)}=-5$.

因此，$f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的线性化为

$$L(x,y)=f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)$$
$$=-2-(x-1)-5(y-1)=-x-5y+4.$$

同步练习 50（B）

主要内容：参见同步练习解答 50(A).

一．综合题

1. 设 f 有连续二阶偏导数，$z=f(x+y,xy)$，

求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$.　　$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'+xf_2'$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''+xf_{12}''+y(f_{21}''+xf_{22}'')+f_2'$$

$$=f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'.$$

2. 设 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定常数 a，b，使函数 $z=z(x,y)$ 能满足方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+aue^{ax+by}$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+au\right)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+bue^{ax+by}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+bu\right)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial y}\right)e^{ax+by}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+au\right)be^{ax+by}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu\right)e^{ax+by}$$

$$=\left(b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu\right)e^{ax+by}.$$

代入方程得

$$(a-1)y\frac{\partial u}{\partial y}+(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(ab-a-b+1)u=0$$

故必须 $a=1$，$b=1$.

二.证明题

1. $f(u)$在$(0,+\infty)$内二阶可导，且

$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$满足等式$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1)　证明 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$.

(2) $f(1)=0,\ f'(1)=1,$ 求函数$f(u)$的表达式.

证明：（1）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=f'(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)+f'(u)\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=f''(u)+f'(u)\cdot\frac{1}{u}=0$$

（2）令 $f'(u)=p$，则 $p'+\frac{p}{u}=0$，$\frac{dp}{p}=-\frac{du}{u}$，

$\ln p=-\ln u+\ln C_1$.

$\therefore\quad f(u)=\ln u+C_2$.　　将 $f'(1)=1$ 代入

得：$C_1=1\ \therefore\quad f'(u)=\frac{1}{u}\ \therefore\quad f(u)=\ln u+C_2$ 将

$f(1)=0$ 代入得：$C_2=0\ \therefore\quad f(u)=\ln u$.

同步练习 51（A）

主要内容：隐函数的求导法则.

一．填空题

1. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x-y+\arctan y=0$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx}=$ $1+\frac{1}{y^2}$

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy^2z=x+y+z$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xyz-1}{1-xy^2}$.

3.设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z=z+x^2-y^2$ 所确定，则 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=$ 0 .

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $dz=$ $\frac{2e^{2x-3z}}{3e^{2x-3z}+1}\mathrm{d}x+\frac{2}{3e^{2x-3z}+1}\mathrm{d}y$.

二．综合题

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由 $e^z+\sin x-x^2y=z$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：令 $F(x,y,z)=e^z+\sin x-x^2y-z$，有 $F_x=\cos x-2xy$，$F_y=-x^2$，$F_z=e^z-1$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2xy-\cos x}{e^z-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{x^2}{e^z-1}.$$

2. 设 $u=f(x,y,z)=x^3y^2z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 所确定的函数，求 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(-1,0,1)}$.

解：令 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，则 $F_x=3x^2-3yz,\ F_z=3z^2-3xy$；

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy},$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z^2+2x^3y^2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$=3x^2y^2z^2+2x^3y^2z\cdot\frac{yz-x^2}{z^2-xy}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(-1,0,1)}=3x^2y^2z^2+2x^3y^2z\cdot\left.\frac{yz-x^2}{z^2-xy}\right|_{(-1,0,1)}=0.$$

三．证明题

1. 证明：由方程 $\phi(cx-az,cy-bz)=0$（$\phi(u,v)$ 具有连续的偏导数，a，b，c 为常数）所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足关系式

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

证明：方程两边微分得

$$\phi_1'\cdot(cdx-adz)+\phi_2'\cdot(cdy-bdz)=0,$$

解得 $dz=\frac{c\phi_1'dx+c\phi_2'dy}{a\phi_1'+b\phi_2'}$

因此 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c\phi_1'}{a\phi_1'+b\phi_2'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\phi_2'}{a\phi_1'+b\phi_2'}$，

得 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

同步练习 52（A）

主要内容：多元函数微分学的几何应用：空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线.

一. 填空题

1. 曲面 $z=y+\ln\frac{x}{z}$ 上点 $M(2,2,2)$ 处切平面方程是______$x+2y-3z=0$______.

2. 曲线 $x=t^2-1$， $y=t+1$， $z=t^2$ 在点 $P(0,2,1)$ 的切线方程为__ $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ __.

二. 综合题

1. 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处的切线和法平面方程.

解：由 $x'(t)=1, y'(t)=2t, z'(t)=3t^2$，在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处的切向量 $\vec{T}=(1,2,3)$，

切线方程： $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

法平面方程： $x-1+2(y-1)+3(z-1)=0$，

即 $x+2y+3z-6=0$.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，

$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z)$，

$\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$

所以所求切平面方程为 $x+2y+3z-14=0$，

法线方程为 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

3. 设曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在点 N 处的切平面平行于平面 $4x+6y-z+3=0$，求点 N 的坐标，并求曲面在该点处的切平面方程.

解：曲面的法向量 $\vec{n}=(2x,2y,1)$，

$P(4,6,-1)$，即 $\frac{2x}{4}=\frac{2y}{6}=\frac{1}{-1}$，解得

$x=-2$, $y=-3$, $z=-12$， $N(-2,-3,-12)$，曲面在该点处的切平面方程为

$-4(x+2)-6(y+3)+(z+12)=0$，

即 $4x+6y-z+14=0$.

三. 证明题

1. 证明曲面 $xyz=a^3$（$a\neq 0$，常数）上任意一点处的切平面与三个坐标面所形成的四面体的体积为常数.

证明：设 (x_0,y_0,z_0) 为曲面 $xyz=a^3(a\neq 0)$ 上任意一点，则曲面在该点处的法向量为

$\vec{n}=(y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0)$

切平面方程为

$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$，

即 $\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$

所以切平面与三个坐标面所形成的四面体的体积为 $V=\frac{1}{6}|3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0|=\frac{9}{2}|a|^3$，

即体积为常数.

同步练习 51（B）

主要内容：参见同步练习解答 51(A).

一．填空题

1. 设方程 $f(z^2-x^2,z^2-y^2)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，其中 f 有连续偏导数，则

$\dfrac{z}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{z}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____ 1____.

二．综合题

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+z\ln y=z\ln z$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：令 $F(x,y,z)=z\ln z-z\ln y-x$.

有 $F_x=-1$，$F_y=-\dfrac{z}{y}$，$F_z=\ln z-\ln y+1$.

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{1}{\ln z-\ln y+1}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\ln z-\ln y+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{(\ln z-\ln y+1)^2}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$=-\frac{1}{z(\ln z-\ln y+1)^3}$$

或 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{z^2}{(x+z)^3}$.

2.设 $z+e^z=xy$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：设 $F=z+e^z-xy$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-y}{1+e^z}=\frac{y}{1+e^z},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-x}{1+e^z}=\frac{x}{1+e^z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+e^z}\right)=\frac{1+e^z-y\cdot e^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2}$$
$$=\frac{1+e^z-\dfrac{xye^z}{1+e^z}}{(1+e^z)^2}=\frac{(1+e^z)^2-xye^z}{(1+e^z)^3}$$

三．证明题

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\varphi(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定，其中 φ 为可导函数．证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

证明：令

$F(x,y,z)=2\varphi(x+2y-3z)-x-2y+3z$,

有 $F_x=2\varphi'-1$，$F_y=4\varphi'-2$，$F_z=-6\varphi'+3$,

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{2\varphi'-1}{6\varphi'-3}=\dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{4\varphi'-2}{6\varphi'-3}=\dfrac{2}{3}$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

2. 设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$，其中 F 具有连续偏导数，且 $F_2'-F_3'\neq 0$，证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$.

解：两边取微 $dF(x-y,y-z,z-x)=d0=0$

即有 $F_1'(dx-dy)+F_2'(dy-dz)+F_3'(dz-dx)=0$

得 $(F_1'-F_3')dx+(F_2'-F_1')dy=(F_2'-F_3')dz$

解得 $dz=\dfrac{(F_1'-F_3')}{(F_2'-F_3')}dx+\dfrac{(F_2'-F_1')}{(F_2'-F_3')}dy$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(F_1'-F_3')}{(F_2'-F_3')}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(F_2'-F_1')}{(F_2'-F_3')}$.则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

同步练习 52（B）

主要内容：参见同步练习解答 52(A).

一. 填空题

1. 设曲面 $z=x^2+2y^2$ 上点 P 处的法线垂直于平面 $2x+4y-z-1=0$，则点 P 的坐标是 $\underline{\qquad (1,1,3) \qquad}$.

二. 综合题

1. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解：将所给方程两边对 x 求导移项，得

$$\begin{cases}y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1\end{cases}$$，由此得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(1,2,-1)}=0$，

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{(1,2,-1)}=-1$.从而得切向量 $\vec{T}=(1,0,-1)$.

故所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$，

法平面方程为 $x-z=0$.

2. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

解：设 $f(x,y)=x^2+y^2-1$，

$$\vec{n}=(f_x,f_y,-1)=(2x,2y,-1),$$

$$\vec{n}\big|_{(2,1,4)}=(4,2,-1).$$

所求切平面方程为:

$$4(x-2)+2y(y-1)-(z-4)=0,$$

即 $4x+2y-z=6$.

法线方程为：$\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{y-1}{2}+\dfrac{z-4}{-1}=0$.

3. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 上，在第一卦限内一点 P 的坐标，使得曲面过该点的切平面平行于平面 $9x+y-z-3=0$.

解：设平面上的点 P 的坐标 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$，满足方程 $3{x_0}^2+{y_0}^2-{z_0}^2=27$，

该点处切平面的法向量 $\vec{n}=(6x_0,2y_0,-2z_0)$

由 $\vec{n}//(9,1,-1)$，所以 $\dfrac{6x_0}{9}=\dfrac{2y_0}{1}=\dfrac{-2z_0}{-1}$ 代入方程，

并由点 P 在第一卦限内解得 $x_0=3,\ y_0=1,\ z_0=1$，

则点 P 的坐标 $(3,\ 1,\ 1)$.

三. 证明题

1. 证明曲面 $F\left(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\right)=0$ 的切平面总通过一定点，其中 F 有连续偏导数.

证明：曲面在切点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为

$$\vec{n}=\left\{\frac{F_1'}{z_0},\frac{F_2'}{z_0},-\frac{x_0F_1'+y_0F_2'}{{z^2}_0}\right\},$$

切平面方程为

$$\frac{F_1'}{z_0}(x-x_0)+\frac{F_2'}{z_0}(y-y_0)-\frac{x_0F_1'+y_0F_2'}{z_0^2}(z-z_0)=0$$

即 $\dfrac{F_1'}{z_0}x+\dfrac{F_2'}{z_0}y-\dfrac{x_0F_1'+y_0F_2'}{z_0^2}z=0$，

所以切平面总通过原点.

同步练习 53（A）

主要内容：方向导数和梯度.

一． 选择题

1. 设从 x 轴正向逆时针旋转到方向 $\vec{l}$ 的转角为 θ，函数 $u=x^3-2xy+y^3$ 在点 $M(1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时（ A ）

(A) 具有最大值. (B) 具有最小值.

(C) 等于零. (D) 以上都不对.

二． 填空题

1. 函数 $z=e^{xy}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{2,3\}$ 的方向导数为____$\dfrac{3}{\sqrt{13}}$____.

2. 函数 $z=x\arctan y$ 在点 $(1,0)$ 的梯度为 $\mathbf{grad}f(1,0)=$ $\{0,1\}$；此函数在该点处沿方向 $\vec{l}=\{2,-1\}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}=$___ $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$___.

三． 综合题

1. 求 $\mathbf{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解：$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

所以

$$\mathbf{grad}\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}.$$

2. 求函数 $z=x\ln(1+y)$ 在点 $(1,1)$ 沿曲线 $2x^2-y^2=1$ 切线（指向 x 增大方向）向量的方向导数.

解：曲线 $2x^2-y^2=1$ 在点 $(1,1)$ 的切线（指向 x 增大方向）向量为 $\vec{l}=\{1,2\}$，将 $\vec{l}$ 单位化

$\vec{l}_0=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right\}$，得 $\vec{l}$ 的方向余弦

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，又

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\ln(1+y)\big|_{(1,1)}=\ln 2\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{x}{1+y}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2},$$

因此，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(1,1)}=\ln 2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1+\ln 2}{\sqrt{5}}$.

3. 下列函数在指定点沿什么方向上的函数值增加的最快？沿什么方向上的函数值减少的最快？沿什么方向上的函数值的变化率为零？

(1) $z=x^2+y^2$ 在 $(0,1)$ 点；

解：$\mathbf{grad}f(0,1)=\{0,2\}$，因此 $z=x^2+y^2$ 在 $(0,1)$ 点,沿 $(0,2)$ 方向函数值增加的最快，

沿 $(0,-2)$ 方向函数值减少的最快，

沿 $\{1,0\}$ 或 $\{-1,0\}$ 方向函数值的变化率为零.

(2) $u=xe^y+yz$ 在 $(1,1,2)$ 点.

解：$\mathbf{grad}f(1,1,2)=\{e,e+2,1\}$，因此 $u=xe^y+yz$ 在 $(1,1,2)$ 点

沿 $\{e,e+2,1\}$ 方向函数值增加的最快，

沿 $-\{e,e+2,1\}$ 方向函数值减少的最快，

沿平面 $ex+(e+2)y+z=0$ 内任何向量方向函数值的变化率为零.

同步练习 54（A）

主要内容：多元函数的极值和条件极值；多元函数的最大值、最小值及其简单应用 .

一．选择题

1. 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极小值，则 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数（ A ）.

(A) 等于零. (B) 大于零.

(C) 小于零. (D) 不存在.

2. 设函数 $z=x^2+\frac{1}{2}y^4-2x-4y^2+a$，（$a$ 为常数）， 则点 $(1,2)$（ B ）.

(A) 是函数的极大值点.

(B) 是函数的极小值点.

(C) 不是函数的极值点.

(D) 是否为函数的极值点与 a 有关.

二．综合题

1. 设函数 $z=x^2+y^3+3y^2-4x-9y+1$，求：(1) 函数的驻点；(2)判断驻点是否为极值点；(3) 如果是极值点，求出极值.

解：(1) $\begin{cases} z_x=2x-4=0 \\ z_y=3y^2+6y-9=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3,y=1 \end{cases}$，驻点为 $(2,-3)$ $(2,1)$

$A=z_{xx}=2$，$B=z_{xy}=0$，$C=z_{yy}=6y+6$

在 $(2,-3)$ 处，$AC-B^2=-24<0$，故 $f(2,-3)$ 不是极值； 在 $(2,1)$ 处，$AC-B^2=24>0$，故 $f(2,1)$ 是极值.因为 $A>0$，故 $f(2,1)=-8$ 为极小值.

2. 利用拉格朗日乘数法，求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $x+2y+2z=18$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 下的极大值或极小值.

解：设 $F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y+2z-18)$，令

$$\begin{cases} F_x=2x+\lambda=0 \\ F_y=2y+2\lambda=0 \\ F_z=2z+2\lambda=0 \\ F_\lambda=x+2y+2z-18=0 \end{cases}$$ 解得唯一驻点

$M(2,4,4)$，且 $u(M)=36$，由于问题实际上是考虑平面 $x+2y+2z=18$ 在第一卦限部分内的点到原点的距离平方，故应有最小值，从而有极小值，因此函数 u 在点 M 取极小值 $u(2,4,4)=36$.

3. 求内接于半轴为 a,b,c 的椭球体内的长方体的最大体积.

解：设长方体在第一卦限的顶点坐标为 (x,y,z) $(x,y,z>0)$，则长方体体积为 $V=8xyz$，且 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 作

$$F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

由 $\begin{cases} F_x=8yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ F_y=8xz+\frac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ F_z=8xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ 得驻点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

由题意，长方体的最大体积一定存在，而点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 为定义域内的唯一可能极值点，当长方体在第一卦限的顶点坐标为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 时，长方体的体积最大:

$$V_{\max}=8\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc.$$

同步练习 53（B）

主要内容：参见同步练习解答 53(A).

一．选择题

1. 函数 $u=x^2+yz$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(1,2,2)$ 的方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=$ __2__.

2. 已知飞机在空间区域 Ω 上，机翼承受的压强分布函数为 $p(x,y,z)=x+y^2+z^3$，则在点 $M(1,\ 1,\ 1)$ 处，压强的梯度 $\mathbf{grad}p(x,y,z)=$ __$(1,\ 2,\ 3)$__.

二．综合题

1. 求 $z=x^2+y^2$ 在 $(-1,1)$ 点的梯度，并求函数在该点沿梯度方向的方向导数.

解：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$；

得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,1)}=-2,\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,1)}=2$，

所以 $z=x^2+y^2$ 在 $(-1,1)$ 点的梯度 $\vec{l}=\{-2,2\}$，

将梯度 $\vec{l}$ 单位化：$\vec{l}_0=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，

得 $\vec{l}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

因此，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(-1,1)}=-2\times\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

2. 设 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，求：

(1) u 在点 $M(1,2,-2)$ 处沿哪个方向的方向导数最大；(2) u 在点 $M(1,2,-2)$ 处的最大方向导数；

(2) u 在点 $M(1,2,-2)$ 处梯度的模.

解：(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$，

所以 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\dfrac{2}{9}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\dfrac{4}{9}$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M=-\dfrac{4}{9}$，

故沿方向 $\dfrac{2}{9}\{1,2,-2\}$，方向导数最大.

(2) 由 $\mathbf{grad}u|_M=\dfrac{2}{9}\{1,2,-2\}$，

最大方向导数等于 $\left|\mathbf{grad}u|_M\right|=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\left|\mathbf{grad}u|_M\right|=\dfrac{2}{3}$.

3. 求函数 $u(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ 在曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=t\\y=t^2\\z=t^3\end{cases}$ 上点 $(1,\ 1,\ 1)$ 处，沿曲线在该点的切线正方向（对于 t 增大的方向）的方向导数.

解：曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=t\\y=t^2\\z=t^3\end{cases}$ 在点 $(1,\ 1,\ 1)$ 的切线（指向 x 增大方向）向量为 $\vec{l}=\{1,2,3\}$，将 $\vec{l}$ 单位化

$\vec{l}_0=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right\}$，得 $\vec{l}$ 的方向余弦

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$，$\cos\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$，

又 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2,\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=4,\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=6$，得

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{(1,1,1)}=2\times\dfrac{1}{\sqrt{14}}+4\times\dfrac{2}{\sqrt{14}}+6\times\dfrac{3}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}$.

同步练习 54（B）

主要内容：参见同步练习解答 54(A).

一．填空题

1. 设二元函数 $f(x,y)$ 可微，若 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极值，则（ D ）.

(A) $f(x_0,y_0)$ 必为 $f(x,y_0)$ 的极值.

(B) $f(x_0,y_0)$ 必为 $f(x_0,y)$ 的极值.

(C) $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 以上结论都是正确的.

2. 若 $z=xy$，则下列结论中错误的是（ D）.

(A) 二元函数 $z=xy$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(B) $f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$.

(C) $dz\big|_{(0,0)}=0$.

(D) $(0,0)$ 为二元函数 $f(x,y)$ 的极值点.

二．综合题

1. 求函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值.

解：$\begin{cases} z_x=3x^2-8x+2y=0 \\ z_y=2x-2y=0 \end{cases}$

得驻点为 $(0,0)$，$(2,2)$

$A=z_{xx}=6x-8$，$B=z_{xy}=2$，$C=z_{yy}=-2$，在 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=12>0$，$A=-8<0$，所以 $f(0,0)=0$ 为极大值， 在 $(2,2)$ 处，$AC-B^2=-12<0$，所以 $f(2,2)$ 不是极值.

2. 材料工程师根据蜂房的奇妙结构设计新型的中空材料，研究中发现问题最终归结为：求函数 $z=x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}a$ 在条件 $x^2+a^2=y^2$ 下的最大值.（其中由实际意义可知 $x>0$，$y>0$，常数 $a>0$）

解：$L=x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}a+\lambda(x^2+a^2-y^2)$，

由 $\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0 \\ L_y=-\sqrt{3}-2\lambda y=0 \\ x^2+a^2=y^2 \end{cases}$，得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，

驻点唯一，由实际意义可知所求函数的最大值存在，所以此驻点处取得最大值为 $z=(\sqrt{3}-\sqrt{2})a$.

3. 已知曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$，在该曲面的第一卦限部分求一定点 $M(x,y,z)$，使在该点处的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积最小.

解：设 (x_0,y_0,z_0) 为椭球面上在第一象限的一点，过此点的切平面方程为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

此切平面与坐标面围成四面体的体积为

$V=\dfrac{1}{6}\dfrac{(abc)^2}{x_0y_0z_0}$（下面我们去掉下标 0），即求

$V=\dfrac{1}{6}\dfrac{(abc)^2}{xyz}$ 满足条件

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ 的最小值，只需求 $f(x,y,z)=xyz$ 满足条件

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ 的最大值。由拉格朗日乘数法，只需求以下函数的驻点

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$\begin{cases} F_x=yz+\lambda\dfrac{2x}{a^2}=0 & (1) \\ F_y=xz+\lambda\dfrac{2y}{b^2}=0 & (2) \\ F_z=xy+\lambda\dfrac{2z}{c^2}=0 & (3) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 & (4) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b \\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c \end{cases}$，驻点唯一，且由实际问题知最小值存在，所以驻点处取得最小值，此时，取得最小体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.

第九章　重积分

同步练习 55（A）

学号____________姓名___________班序号_________

主要内容：二重积分的概念、性质、计算（直角坐标下）.

一．填空题

1．设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}\ (a>0)$，则二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=$ __$\dfrac{2\pi a^3}{3}$__.

2．设 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 1,-2\le y\le 2\right\}$，则二重积分 $\iint\limits_D (x-2y+3)\,\mathrm{d}\sigma=$ __24__.

3．设 $f(x,y)$ 为连续函数，交换二次积分的积分次序，

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\underline{\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x}.$$

二．计算题（画出积分区域，并计算下列二重积分）

1．求 $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由直线 $x+y=1$ 以及 x 轴、y 轴所围成.

解：$\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y)\,\mathrm{d}y$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

2．求 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=1$，$y=2$ 以及 y 轴所围成.

解：$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2 y\,\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{y}}x\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}\int_1^2\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

3．求 $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$，$x=2$ 所围成.

解：$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}y\,\mathrm{d}y$

$=\dfrac{1}{2}\int_1^2(x^2-\dfrac{1}{x^2})\mathrm{d}x=\dfrac{11}{12}$.

4．求 $\iint\limits_D e^{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由直线 $y=x$，$y=1$ 和 y 轴所围成.

解：$\iint\limits_D e^{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 e^{y^2}\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 ye^{y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}(e-1)$.

三．综合题

1．设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 2\right\}$，$f(x,y)$ 在 D 上连续，求 $f(x,y)$，使得

$$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

解：$I=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，则 $f(x,y)=xy+I$，

于是 $I=\iint\limits_D (xy+I)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^2 y\,\mathrm{d}y+2I$，

解得 $I=-1$，故 $f(x,y)=xy-1$.

四．证明题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，试证：

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1(1-x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明：改变积分次序

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(1-y)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1(1-x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同步练习 56（A）

学号___________姓名__________班序号_________

主要内容：二重积分的计算（极坐标下）.

一．填空题

1．化为极坐标形式的二次积分，

$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy =$ $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\, d\rho}$.

二．计算题（画出积分区域，并计算下列二重积分）

1．求 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成.

解：$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho e^{\rho^2}d\rho$$

$$=(e-1)\pi .$$

2．求 $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=\sqrt{3}x$，$y=x$ 所围成的第一象限部分.

解：$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,d\sigma$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

3. 求 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成.

解：$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho\sin\rho\, d\rho$$

$$=2\pi(\sin1-\cos1) .$$

4．求 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \arctan\frac{y}{x}dy$.

解：$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \arctan\frac{y}{x}dy$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho=\frac{3\pi^2}{32}.$$

5. 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中积分区域 D 由心形线 $r=1+\cos\theta$ 所围成.

解：$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$

$$=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho^2 d\rho$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3 d\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}\cos^6\frac{\theta}{2}d\theta .$$

$$=\frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t dt=\frac{5\pi}{3}.$$

同步练习 55（B）

学号___________姓名__________班序号_________

主要内容：参见同步练习 55(A).

一．填空题

1．设区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le a^2\right\}\ (a>0)$，

则 $\iint\limits_D (x-2y+3)\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=$ $\underline{2\pi a^3}$.

2． 交换二次积分的积分次序，

$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y=$

$\underline{\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x}$.

3．设区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le r^2\right\}\ (r>0)$，

则 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^2}\iint\limits_D (1-\sqrt{x^2+y^2})e^{xy}\,\mathrm{d}\sigma=\underline{\pi}$.

二．计算题

1．求 $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由 $y=x^3$，$x=1$ 以及 x 轴所围成.

解：$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}\sigma$

$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^3} e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 (xe^{x^2}-x)\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}e-1$.

2．求 $\int_1^3 \mathrm{d}x\int_{x-1}^2 \cos y^2\,\mathrm{d}y$.

解： $\int_1^3 \mathrm{d}x\int_{x-1}^2 \cos y^2\,\mathrm{d}y$

$=\int_0^2 \cos y^2\mathrm{d}y\int_1^{y+1}\mathrm{d}x$

$=\int_0^2 y\cos y^2\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\sin 4$.

3．求 $\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由直线 $x=-1$，$x=1$，$y=1$ 以及 x 轴所围成.

解：$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2\le y\le 1,-1\le x\le 1\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le x^2,-1\le x\le 1\right\}$，

$\iint\limits_D |y-x^2|\,\mathrm{d}\sigma$

$=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)\,\mathrm{d}\sigma$

$=\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 (y-x^2)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}y$

$=\int_{-1}^1 (\dfrac{1}{2}x^4-x^2+\dfrac{1}{2})\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 \dfrac{1}{2}x^4\,\mathrm{d}x=\dfrac{11}{15}$.

三．证明题

1． 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$A=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，试利用二重积分的性质证明：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{A^2}{2}.$$

证明：改变积分次序

$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}y$（互换 x， y），

于是 $2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$

$+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y$

$=\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$

所以 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\dfrac{A^2}{2}$.

同步练习 56（B）

学号___________姓名__________班序号_________

主要内容：参见同步练习 56(A).

一．填空题

1．化为极坐标形式的二次积分，

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y = \underline{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho f(\rho)\mathrm{d}\rho}.$$

二．计算题（画出积分区域，并计算下列二重积分）

1．求 $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆形区域 $x^2+y^2 \le x$.

解：$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} \rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}.$$

2. 求 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{y^2}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{y^2}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{8}(e-1).$$

3. 求 $\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成.

解：$\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho e^{\rho}\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi.$$

4．求 $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成.

解：$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\ln(1+\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=(2\ln 2-1)\pi.$$

5. 求 $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由双纽线 $r^2=\cos 2\theta$ 所围成.

解：$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}\cos\theta-1)\mathrm{d}\theta = 4-\pi.$$

同步练习 57（A）

学号____________姓名___________班序号__________

主要内容：二重积分的综合练习.

一．填空题

1． 设 $f(x,y)$ 为连续函数，交换二次积分的积分次序，

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x = \underline{\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y}.$$

2. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}\ (a>0)$，则 $\iint\limits_D (x+y+6)\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \underline{\ 4\pi a^3\ }$.

二．计算题

1．求 $\iint\limits_D \dfrac{x}{y^4}\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由 $y=x$，$y=2x$，$y=1$，$y=2$ 轴所围成.

解：$\iint\limits_D \dfrac{x}{y^4}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2 \dfrac{1}{y^4}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y} x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{8}\int_1^2\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\frac{3}{16}.$$

2．求 $\iint\limits_D \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由直线 $y=x$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成.

解：$y=x$ 与 $y=x^2$ 的交点为 $(0,0)$，$(1,1)$；

$$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(1-x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^1(x-1)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=(x-1)\cos x\Big|_0^1-\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}x=1-\sin 1.$$

3．求 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

4. 求 $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成.

解：$\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cos\rho^2\,\mathrm{d}\rho=\pi\sin 1.$$

三．证明题

1． 设 $D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1, x\le y\le 1\}$，$f(x,y)$ 在 D 连续，且分别是 x、y 的奇函数，

证明： $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$.

证明：$D_1=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 0\ ,\ x\le y\le -x\}$，

$D_2=\{(x,y)\,|\,-y\le x\le y\ ,\ 0\le y\le 1\}$，

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

因为区域 D_1 关于 x 轴对称，$f(x,y)$ 为 y 的奇函数，故 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$；同理因为区域 D_2 关于 y 轴对称，$f(x,y)$ 为 x 的奇函数，故 $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$，所以 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$.

同步练习 58（A）

学号__________姓名__________班序号__________

主要内容：三重积分的概念、性质和计算.

一．填空题

1．设 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y-z+3)\,\mathrm{d}v=\underline{4\pi R^3}$.

2．设Ω： $0\le x\le 1, 0\le y\le 2, 0\le z\le \pi$，则 $\iiint\limits_{\Omega} xy\sin z\,\mathrm{d}v=\underline{\quad 2\quad}$.

3．设Ω由曲面$z=x^2+y^2$和平面 $z=1$所围成，则在柱面坐标系下 $\iiint\limits_{\Omega} f(z)\,\mathrm{d}v=$ $\underline{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1 f(z)\,\mathrm{d}z}$.

二． 计算题（画出积分区域）

1．求$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由三个坐标面与平面$x+y+z=1$所围成的四面体.

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[1-(x+y)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\left(2-3x+x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{8} .$$

2．求$\iiint\limits_{\Omega}\sin z^2\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$z=1$所围成.

解：$D_z: x^2+y^2\le z$，（$0\le z\le 1$）

$$\iiint\limits_{\Omega}\sin z^2\,\mathrm{d}v=\int_0^1\sin z^2\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\pi z\sin z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}(1-\cos 1).$$

3．求 $\iiint\limits_{\Omega}xyz\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面$z=1$所围成的圆锥体在第一卦限的部分.

解：$\iiint\limits_{\Omega}xyz\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_\rho^1 z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^3-\rho^5)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{48} .$$

4．求$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{z}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由圆柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=1$、$z=2$所围成的圆柱体.

解 1：$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{z}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}v$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_1^2\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$=\ln 2\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{2}\int_{-1}^1(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2\ln 2}{3}\pi .$$

解 2：$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{z}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\int_1^2\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\ln 2}{3} .$$

解 3：$D_z: x^2+y^2\le 1$，（$1\le z\le 2$）

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{z}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_1^2\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_1^2\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{2\pi\ln 2}{3} .$$

同步练习 57（B）

学号__________姓名__________班序号________

主要内容：参见同步练习 57(A).

一．填空题

1．设 D：$x^2+y^2\le 4$（$x\ge 0$，$y\ge 0$），$f(x)$ 在 D 上为正值连续函数，a,b 为常数，则

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,\mathrm{d}\sigma=\underline{\frac{a+b}{2}\pi}.$$

二．计算题

1*．设 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-3y},(x,y)\in G\\ 0\ ,\ (x,y)\notin G\end{cases}$，其中 A 为常数，$G=\{(x,y)|0\le x\le 1,y\ge 0\}$，且满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=1,$$

（1）求 A 的值；

（2）若 $D=\{(x,y)|x+y\le 2\}$，求 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

解：（1）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}Ae^{-3y}\,\mathrm{d}y=\frac{A}{3}\ ,$$

于是 $A=3$；

（2）$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2-x}3e^{-3y}\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1(1-e^{3x-6})\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3e^3}+\frac{1}{3e^6}.$$

三．证明题

1．设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，试利用二重积分的性质，证明：在区域 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$ 上，

$$\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}\,y\ge 1$$

证明：互换 x，y

$$I=\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}\,y=\int_0^1 e^{f(y)}\mathrm{d}\,y\cdot\int_0^1 e^{-f(x)}\mathrm{d}\,x$$

$$2I=\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}\,y+\int_0^1 e^{f(y)}\mathrm{d}\,y\cdot\int_0^1 e^{-f(x)}\mathrm{d}\,x$$

$$=\iint_D\left(e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

由 $e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}\ge 2$ 可得

$$2I=\iint_D\left(e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$\ge\iint_D 2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=2S_D=2$$

所以 $I=\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 e^{-f(y)}\mathrm{d}\,y\ge 1$.

2．设函数 $f(u)$ 连续，试证：

$$\iint_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

证明 1：$\iint_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x-1}^{x+1}f(x+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x+y)\mathrm{d}y$$

（令 $u=x+y$）

$$=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-1}^{2x+1}f(u)\mathrm{d}u+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u\int_{\frac{u-1}{2}}^{\frac{u+1}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

证明 2：令 $u=x+y$，$v=y-x$，

则 $x=\frac{1}{2}(u-v)$，$y=\frac{1}{2}(u+v)$，

$D:-1\le u\le 1,-1\le v\le 1$，

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

$$\iint_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u\int_{-1}^1\mathrm{d}v=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

同步练习 58（B）

学号__________姓名__________班序号__________

主要内容：参见同步练习 58(A).

一．填空题

1．设Ω由曲面$z=x^2+y^2$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成，则在柱面坐标系下$\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v=$ $\underline{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\rho} f(\rho^2)\,\mathrm{d}z}$.

二．计算题

1．求$\iiint\limits_{\Omega} e^{x+y+z}\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$为立方体：$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$.

解：$\iiint\limits_{\Omega} e^{x+y+z}\,\mathrm{d}v=\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\int_0^1 e^y\,\mathrm{d}y\int_0^1 e^z\,\mathrm{d}z$

$$=\left(\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\right)^3=(e-1)^3.$$

2．分别利用直角坐标、柱面坐标和球面坐标*求$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\le 1$在第一卦限的部分.

解 1：$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.$$

解 2：$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3(1-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{48}.$$

解 3*：$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r=\frac{1}{48}.$$

3*．求$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$：$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解：$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{4}.$$

4．求$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$、$z=2$所围成.

解：$D_z: x^2+y^2\le z^2$，（$1\le z\le 2$）

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}v=\int_1^2 e^z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_1^2 e^z\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\frac{\rho}{\rho}\,\mathrm{d}\rho=\int_1^2 2\pi z e^z\,\mathrm{d}z=2\pi e^2.$$

5．求$\iiint\limits_{\Omega}\left|z-\sqrt{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由圆柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=0$、$z=2$所围成的圆柱体.

解：$\iiint\limits_{\Omega}\left|z-\sqrt{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_\rho^2(z-\rho)\,\mathrm{d}z$$

$$+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^\rho(\rho-z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^1(4\rho-4\rho^2+\rho^3)\,\mathrm{d}\rho+\pi\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\frac{7\pi}{6}.$$

三．证明题

1．设$f(x)$为连续函数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}v,$$

其中$\Omega(t): x^2+y^2\le t^2$，$0\le z\le t$，试证：

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^4}=\frac{2\pi}{3}.$$

证明：$F(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho f(\rho)\,\mathrm{d}\rho\int_0^t\mathrm{d}z.$$

$$= 2\pi t\int_0^t \rho f(\rho)\,\mathrm{d}\rho \,.$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^4} = \lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t \rho f(\rho)\,\mathrm{d}\rho}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi t\, f(t)}{3t^2} = \frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\, f'(0) = \frac{2\pi}{3}\,.$$

同步练习 59（A）

学号____________姓名___________班序号__________

主要内容：重积分的应用.

一．填空题

1．设平面薄片 D 的面密度函数为 $\rho(x,y)$，则薄片对 y 轴的转动惯量 $I_y = \underline{\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$.

2．占有空间区域 Ω 、密度为 $\rho(x,y,z)$ 的物体的质量为 $M = \underline{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v}$.

二．计算题

1．利用二重积分求曲面 $z=2-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积（画出立体的图像）.

解：$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，

$$V=\iint\limits_D (2-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{5\pi}{6}.$$

2．设平面薄片所占的区域 D 由上半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 和 x 轴所围成，它的面密度 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，求该薄片的质量.

解：$M=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{9}.$$

3． 设平面图形 D 由圆 $x^2+y^2=1\,(x\ge 0)$ 和直线 $y=x$、$y=-x$ 所围成，求 D 的形心坐标.

解：$\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}$，

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho=0,$$

平面图形 D 的形心坐标为 $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi},0\right)$.

4．设密度函数 $\rho(x,y,z)=1$，求圆锥体 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 对于 z 轴的转动惯量.

解：$I_z=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_\rho^1\mathrm{d}z=\frac{\pi}{10}.$$

5. 立体由上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 与 xOy 面所围成，且密度函数 $\rho(x,y,z)=1$，求立体的质心.

解：$\iiint\limits_\Omega\mathrm{d}v=\frac{2\pi R^3}{3}$，

$$\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega y\mathrm{d}v=0,$$

$$\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi R^4}{4},$$

质心为 $(0,0,\frac{3R}{8})$.

同步练习 60（A）

学号___________姓名__________班序号_________

主要内容：三重积分，重积分的应用.

一. 填空题

1. 占有空间区域Ω 、密度为$\rho(x,y,z)$的物体对于z轴的转动惯量为$I_z=$ $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v$.

二. 计算题

1. 利用二重积分求曲面$z=x^2+2y^2$与$z=2-x^2$所围成的立体的体积.

解：立体在xOy面上的投影区域为$D:x^2+y^2\le 1$，

$$V=\iint\limits_D[2-x^2-(x^2+2y^2)]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\rho(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi .$$

2. 求位于两圆$\rho=2\cos\theta$ $\rho=4\cos\theta$之间的均匀薄片的质心坐标.

解：$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=3\pi$，

$$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{112}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=7\pi ,$$

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=0 ,$$

所以质心坐标为$\left(\frac{7}{3},0\right)$.

3. 求球体$x^2+y^2+z^2\le 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积.

解：$V=4\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$

D为半圆周$y=\sqrt{2ax-x^2}$与x轴所围成的区域

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

4. 利用三重积分求曲面$z=4-x^2-y^2$与平面$z=1$、$z=2$所围立体的体积.

解：$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_1^2(4-z)\pi\mathrm{d}z=\frac{5\pi}{2} .$$

同步练习 59（B）

学号___________姓名__________班序号_________

主要内容：参见同步练习 59（A）．

一．填空题

1．设平面薄片所占的区域 $D: x^2+y^2\le 1$，面密度函数 $\rho(x,y)=(1-x+y)^2$，则平面薄片的质量 $M=\underline{\dfrac{3\pi}{2}}$．

二．计算题

1．求两个直交圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $y^2+z^2=a^2$ 所围立体的体积．

解：$V=8V_1=8\iint\limits_D\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$

$$=8\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=8\int_0^a(a^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{16a^3}{3}.$$

2．利用二重积分几何意义以及质心公式，求 $\iint\limits_D(1+2x+3y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\le 2x$．

解：由二重积分的几何意义 $\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\pi$，

又 D 的质心为 $(1,0)$，于是 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma=\pi$，

$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=0$，

所以 $\iint\limits_D(1+2x+3y)\,\mathrm{d}\sigma=3\pi$．

3．设均匀薄片（面密度为常数 1）所占区域 D 由抛物线 $y^2=\dfrac{9}{2}x$ 与直线 $x=2$ 所围成，求薄片对于 x 轴和 y 轴的转动惯量．

解：$I_x=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_{-3}^3 y^2\mathrm{d}y\int_{\frac{2}{9}y^2}^2\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^3\left(y^2-\frac{1}{9}y^4\right)\mathrm{d}y=\frac{72}{5},$$

$I_y=\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_{-3}^3\mathrm{d}y\int_{\frac{2}{9}y^2}^2 x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^3\left(1-\frac{1}{9^3}y^6\right)\mathrm{d}y=\frac{96}{7}.$$

4．立体由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x$，$x=1$，以及 xOy 面所围成，且质量分布均匀，求立体的质心．

$$\iiint\limits_\Omega\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}\mathrm{d}z=\frac{1}{8},$$

$$\iiint\limits_\Omega x\,\mathrm{d}v=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}\mathrm{d}z=\frac{1}{10},$$

$$\iiint\limits_\Omega y\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\,\mathrm{d}y\int_0^{xy}\mathrm{d}z=\frac{1}{15},$$

$$\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{36},$$

所以立体的质心为 $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{15},\dfrac{2}{9}\right)$．

同步练习 60（B）

学号____________姓名___________班序号__________

主要内容：参见同步练习 60（A）.

一．填空题

1． 立体Ω质量分布均匀，其体积为a，质心为$(1,2,-1)$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+2x+3y+4z)\,\mathrm{d}v=\underline{5a}.$$

2． 设Ω由曲面$z=6-x^2-y^2$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成，则在柱面坐标系下

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=\underline{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{6-\rho^2}f(\rho^2+z^2)\,\mathrm{d}z}.$$

二．计算题

1．设平面薄片所占的区域D由圆周$x^2+y^2=ay$（$a>0$）所围成，它的面密度$\rho=x^2+y^2$，求该薄片的质量与质心坐标.

解：$M=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{32}a^4,$$

$$\iint\limits_D x(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=0,$$

$$\iint\limits_D y(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\rho^4\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{5}a^5\int_0^{\pi}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{5}a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{16}a^5,$$

薄片的质量为$\dfrac{3\pi}{32}a^4$，质心坐标为$(0,\dfrac{2a}{3})$.

2. 分别利用二重积分和三重积分求曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=1$，$z=4$所围立体的体积（画出立体的图像）.

解 1：$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 4\right\}$，

$$V=\iint\limits_{D_2}(4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho(4-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^2(4\rho-\rho^3)\,\mathrm{d}\rho-2\pi\int_0^1(\rho-\rho^3)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{15\pi}{2}.$$

解 2：$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$，

$$V=\iint\limits_{D_1}(4-1)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=3\pi+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho(4-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=3\pi+2\pi\int_1^2(4\rho-\rho^3)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{15\pi}{2}.$$

解 3：$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$

$$=\int_1^4\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^4\pi z\,\mathrm{d}z=\frac{15\pi}{2}.$$

三．证明题

1． 设函数 $f(u)$ 连续且恒正，$D(t): x^2+y^2 \le t^2$，$\Omega(t): x^2+y^2+z^2 \le t^2$，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma},$$

试证：$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

证明：$\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t \rho f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^t \rho f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho \quad ,$$

$\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r,$$

$$F(t)=\frac{2\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r}{\int_0^t \rho f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho}=\frac{2\int_0^t u^2 f(u^2)\,\mathrm{d}u}{\int_0^t uf(u^2)\,\mathrm{d}u},$$

$$F'(t)=2\frac{t^2 f(t^2)\int_0^t u f(u^2)\,\mathrm{d}u - t f(t^2)\int_0^t u^2 f(u^2)\,\mathrm{d}u}{\left(\int_0^t u f(u^2)\,\mathrm{d}u\right)^2}$$

$$=2\frac{t f(t^2)\int_0^t u(t-u) f(u^2)\,\mathrm{d}u}{\left(\int_0^t u f(u^2)\,\mathrm{d}u\right)^2},$$

当 $t>0$ 时，$F'(t)>0$，即 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

同步测试（五）

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设向量 $\vec{a}=\{1,2,-2\}$，$\vec{b}=\{k,1,3\}$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $k=$ __4__.

2．平面过点 $(-1,0,2)$，且与已知直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$ 垂直，则该平面的方程是 __$2x-y+3z-4=0$__.

3. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin y}{2-\sqrt{4-xy}}=$ __2__.

4. 设函数 $z=\ln\dfrac{x}{y}$，则全微分 $dz\big|_{(1,1)}=$ __$dx-dy$__.

5. 设区域 D: $x^2+y^2\le 1$，则二重积分 $\iint\limits_D(2-x+3y)\,d\sigma=$ __2π__.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $\vec{a}=\{1,-1,1\}$，$\vec{b}=\{0,2,1\}$，则与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直的向量是（ D ）.

A．$\{3,1,2\}$； B. $\{3,-1,2\}$；

C. $\{-3,1,2\}$； D. $\{-3,-1,2\}$.

2. 下列方程中，表示柱面的是（ C ）.

A．$x^2+y^2+z^2=1$； B. $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

C. $y=x^2$； D. $z=x^2+y^2$.

3. 若 $z_x(0,0)=0$，$z_y(0,0)=0$，则（ B ）.

A. $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续;

B. $(0,0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的驻点;

C. $f(0,0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极值;

D. $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

4. 空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=t\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处切线的方向向量为（ B ）.

A．$\{1,1,1\}$； B. $\{1,2,3\}$；

C. $\{3,1,2\}$； D. $\{2,1,3\}$.

5. 改变二次积分的积分次序，$\int_0^1 dx\int_{e^x}^{e} f(x,y)dy=$（ A ）.

A. $\int_1^e dy\int_0^{\ln y} f(x,y)\,dx$；

B. $\int_1^e dy\int_{\ln y}^{1} f(x,y)\,dx$；

C. $\int_1^e dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$；

D. $\int_1^e dy\int_0^{e^y} f(x,y)\,dx$.

6. 设立体 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=1$ 所围成，则 $\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)dv=$（ C ）.

A．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 f(z)dz$；

B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\rho^2} f(\rho^2)dz$；

C. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 f(\rho^2)dz$；

D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\rho^2} f(z)dz$.

三、（6 分）设直线 L 过点 $(1,0,2)$，且平行于两个平面 $x-y+z=2$ 和 $x+y-2z=1$，求直线 L 的方程.

解：设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}$，则由题意知，

$\vec{s} \perp \vec{n}_1$， $\vec{s} \perp \vec{n}_2$，

可取

$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{1,-1,1\} \times \{1, 1, -2\} = \{1,3,2\}$，

所以直线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{2}$.

另解：过点 $(1, 0, 2)$，且平行于平面

$x-y+z=2$ 的平面方程为 $x-y+z=3$，（2 分）

过点 $(1, 0, 2)$，且平行于平面 $x+y-2z=1$

的平面方程为 $x+y-2z=-3$，（4 分）

故所求直线 L 的方程为 $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+y-2z=-3 \end{cases}$.

（6 分）

四、（6 分） 设曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在点 N 处的切平面平行于平面

$4x+6y-z+3=0$，求点 N 的坐标，并求曲面在该点处的切平面方程.

解：曲面的法向量 $\vec{n} = \{2x, 2y, 1\} \parallel \{4, 6, -1\}$

即 $\dfrac{2x}{4} = \dfrac{2y}{6} = \dfrac{1}{-1}$，解得

$x=-2, y=-3, z=-12$， $N(-2, -3, -12)$，

曲面在该点处的切平面方程为

$-4(x+2)-6(y+3)+(z+12)=0$，

即 $4x+6y-z+14=0$.

五、（6 分） 设 $z=uv^2$， $u=xe^y$， $v=ye^x$，

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解： $z=xy^2e^{2x+y}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2e^{2x+y} + 2xy^2e^{2x+y} = (2x+1)y^2e^{2x+y}$ ，

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xye^{2x+y} + xy^2e^{2x+y} = xy(y+2)e^{2x+y}$.

六、（6 分） 求函数 $z = x\arctan y$ 在点 $(1, 0)$ 的梯度 $gradf(1, 0)$，以及在该点处沿方向 $\vec{l} = \{2, -1\}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \arctan y, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1+y^2}$，

$gradf(1, 0) = \{0, 1\}$， $\vec{l^0} = \left\{ \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \right\}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial l} = grad\, f(1,0) \cdot \vec{l^0} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

七、（6 分）求二重积分$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x} d\sigma$，其中区域$D$由直线$y=x$，$y=0$，$x=1$所围成.

解：$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x} d\sigma = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \int_0^x dy$，

$= \int_0^1 \sin x dx = 1-\cos 1$.

八、（6 分）计算三重积分$\iiint\limits_\Omega z^3 dv$，其中区域$\Omega$由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=1$所围成.

解：$\iiint\limits_\Omega z^3 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^1 z^3 dz$，

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^1 z^3 dz$，

$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho(1-\rho^4) d\rho = \frac{\pi}{6}$

九、（7 分）设函数

$z = x^3+y^2-3x^2-9x-4y+1$，求：（1）函数的驻点；（2）判断驻点是否为极值点；（3）如果是极值点，求出极值.

解：

（1）$\begin{cases} z_x = 3x^2-6x-9=0 \\ z_y = 2y-4=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-1, x=3 \\ y=2 \end{cases}$，驻点为$(-1,2)$，$(3,2)$

（2）

$A = z_{xx} = 6x-6$, $B = z_{xy} = 0$, $C = z_{yy} = 2$，

在$(-1,2)$处，$AC-B^2 = -24<0$，故$f(-1,2)$不是极值;

在$(3,2)$处，$AC-B^2 = 24>0$，故$f(3,2)$是极值.

（3）因为$A=12>0$，故$f(3,2)=-30$为极小值.

十、（7 分 ） 设平面薄片所占的闭区域 D 由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及直线 $y=0$ 所围成，面密度为 $\mu=\sqrt{x^2+y^2}$，求该薄片的质量.

解： $M=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta=\frac{16}{9}$$

十一、（7 分） 设旋转抛物面 Σ 由 xoz 面上的抛物线 $z=x^2$ 绕 z 轴旋转所成，

（1）求曲面 Σ 的方程；（2）求曲面 Σ 与平面 $z=1$ 所围成的立体的体积.

解：（1）曲面 Σ 的方程为 $z=x^2+y^2$ ，

（2）$V=\iint\limits_D \left[1-(x^2+y^2)\right]d\sigma$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho(1-\rho^2)d\rho=\frac{\pi}{2}$$

十二、（5 分） 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z=z+x^2-y^2$ 所确定，试证 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

证明： 设 $F=z-e^z+x^2-y^2$，

则 $F_x=2x$，$F_y=-2y$，$F_z=1-e^z$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{1-e^z}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2y}{1-e^z}，$$

所以 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

同步测试（六）

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\vec{a}=\{2,1,3\}$，$\vec{b}=\{1,0,2\}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$ $\underline{\{2,-1,-1\}}$.

2. 点 $(1,2,0)$ 到平面 $2x+y+2z+5=0$ 的距离 $d=$ $\underline{\quad 3 \quad}$.

3. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sin x}=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

4. 设函数 $z=x^3y^2$，则全微分 $dz\big|_{(1,1)}=$ $\underline{3dx+2dy}$.

5. 设区域 D: $x^2+y^2\le 1$，则二重积分 $\iint\limits_D(3x-4y+2)\,d\sigma=\underline{2\pi}$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $\vec{a}=\{2,6,3\}$，则与 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量 $\overrightarrow{a^\circ}=$（ B ）.

A. $\left\{\dfrac{2}{11},\dfrac{6}{11},\dfrac{3}{11}\right\}$;　　B. $\left\{\dfrac{2}{7},\dfrac{6}{7},\dfrac{3}{7}\right\}$;

C. $-\left\{\dfrac{2}{7},\dfrac{6}{7},\dfrac{3}{7}\right\}$;　　D. $\pm\left\{\dfrac{2}{7},\dfrac{6}{7},\dfrac{3}{7}\right\}$.

2. 下列方程中，表示柱面的是（ A ）.

A. $x^2+y^2=1$;　　B. $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

C. $x^2+y^2+z^2=1$;　　D. $z=1-x^2-y^2$.

3. 二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处（ C ）.

A. 无定义;　　B. 连续;

C. 偏导数存在;　　D. 可微.

4. 函数 $z=e^{xy}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{2,3\}$ 的方向导数为(D).

A. 2;　　B. 3;

C. $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$;　　D. $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

5. 设一平面薄板所占有的区域由直线 $y=x$，$x=1$ 与 $y=0$ 所围成，面密度为 $\rho(x,y)=2y$，则该薄板的质量 $M=$（ B ）.

A. $\dfrac{1}{6}$;　　B. $\dfrac{1}{3}$;

C. $\dfrac{1}{2}$;　　D. $\dfrac{5}{6}$.

6. 设区域 Ω 由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成，则 $\iiint\limits_\Omega f(z)dv=$（ A ）.

A. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 f(z)dz$;

B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 f(z)dz$;

C. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\rho^2} f(z)dz$;

D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\rho} f(z)dz$.

三、（5 分）设直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{a}$ 与平面 $x+2y+3z=6$ 平行，求 a 的值.

解：　直线与平面平行，

故　$\vec{s}=\{4,1,a\}$ 与 $\vec{n}=\{1,2,3\}$ 垂直，

即　$\vec{s}\cdot\vec{n}=6+3a=0$，

所以　$a=-2$.

四、（5 分）直线 L 过点 $M(3,0,5)$ 且与平面 π：$x-y+3z+4=0$ 垂直，求直线 L 与平面 π 的交点 N .

解：直线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=3+t \\ y=-t \\ z=5+3t \end{cases}$，

代入平面方程得 $t=-2$，

于是，直线 L 与平面 π 的交点为 $N(1,2,-1)$.

五、（5 分）设 $z=\dfrac{u}{v}$，$u=e^x\sin y$，$v=e^{-x}\cos y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$$z=\frac{u}{v}=\frac{e^x\sin y}{e^{-x}\cos y}=e^{2x}\tan y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}\tan y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x}\sec^2 y .$$

另解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=\frac{1}{v}\cdot e^x\sin y-\frac{u}{v^2}\cdot\left(-e^{-x}\cos y\right)$$
$$=2e^{2x}\tan y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=\frac{1}{v}\cdot e^x\cos y-\frac{u}{v^2}\cdot\left(-e^{-x}\sin y\right)$$
$$=e^{2x}\sec^2 y .$$

六、（5 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z=z+x^2+y^2\ (z>1)$ 所确定，试证 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

解：设 $F=z+x^2+y^2-\ln z$，

则 $F_x=2x$，$F_y=2y$，$F_z=1-\dfrac{1}{z}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2xz}{1-z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2yz}{1-z},$$

所以 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

七、（**5** 分） 求二重积分$\iint\limits_D e^{x^2}d\sigma$，其中区域$D$由直线$y=2x$， $y=0$， $x=1$所围成.

解： $\iint\limits_D e^{x^2}d\sigma=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_0^{2x}dy$

$$=\int_0^1 2xe^{x^2}dx$$

$$=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1.$$

八、（**5** 分）计算三重积分$I=\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$，其中区域$\Omega$由旋转抛物面$z=x^2+y^2$和平面$z=1$所围成.

解法一（截面法）

$$I=\int_0^1 z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi z^3dz=\frac{\pi}{4}$$

解法二（柱面坐标）

$$I=\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 z^2dz$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1(\rho-\rho^7)d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

九、（**9** 分）设函数

$z=x^2+y^3+3y^2-4x-9y+1$，求：（1）函数的驻点；（2）判断驻点是否为极值点；（3）如果是极值点，求出极值.

解：（1） $\begin{cases} z_x=2x-4=0 \\ z_y=3y^2+6y-9=0 \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=-3, y=1 \end{cases}$，驻点为$(2,-3)$，$(2,1)$

（2）

$A=z_{xx}=2$, $B=z_{xy}=0$, $C=z_{yy}=6y+6$，

在$(2,-3)$处，$AC-B^2=-24<0$，故$f(2,-3)$不是极值;

在$(2,1)$处，$AC-B^2=24>0$，故$f(2,1)$是极值.

（3）因为$A>0$，故$f(2,1)=-8$为极小值.

十、**(8 分)** 求位于两圆 $\rho=2\cos\theta$，$\rho=4\cos\theta$ 之间的均匀薄片的质心坐标.

解：$\iint\limits_D d\sigma=3\pi$，

$$\iint\limits_D xd\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}\rho^2 d\rho$$

$$=\frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{112}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=7\pi\ ,$$

$\iint\limits_D yd\sigma=0$，

质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D xd\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}=\frac{7}{3},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D yd\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}=0.$$

所以为 $\left(\frac{7}{3},0\right)$.

十一、（**10** 分） 设旋转抛物面 Σ 由 yoz 面上的抛物线 $z=1-y^2$ 绕 z 轴旋转所成，（1）求曲面 Σ 的方程；（2）求曲面 Σ 在点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 处的切平面方程；(3) 求该切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积.

解:（1）旋转抛物面 Σ 的方程为 $z=1-x^2-y^2$；

（2）$z_x\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-2x\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-1$

$$z_y\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-2y\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-1$$

曲面 Σ 在点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 处的切平面方程为

$z-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(y-\frac{1}{2}\right)$，即 $x+y+z=\frac{3}{2}$；

(3) 切平面在三个坐标轴上的截距式都是 $\frac{3}{2}$，所以切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{16}.$$

十二、（**5** 分）设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 上有连续一阶偏导数，若存在某个二元函数 $z=f(x,y)$ 使得 $dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，问函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 应该满足什么关系？为什么？

解：由 $dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=Q(x,y),$$

于是 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，由题意知 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 连续，故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

第十章 曲线积分与曲面积分

同步练习 61（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容: 对弧长的曲线积分的概念、性质及计算，利用对弧长的曲线积分计算物体的转动惯量、形心.

一．填空题

1．设椭圆 L：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为 a，则曲线积分 $\oint_L (3x^2+4y^2+5xy)\mathrm{d}s=\underline{12a}$.

2．设曲线 L：$x^2+y^2=1$ 上任意一点处的线密度 $\rho(x,y)=(x+y)^2$，则该曲线构件的质量 $M=\underline{\ 2\pi\ }$.

3．设曲线构件 Γ 上任意一点处的线密度为 $\rho(x,y,z)$，则该曲线构件关于 x 轴的转动惯量为 $I_x=\underline{\int_\Gamma \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}$.

二．综合题

1．计算曲线积分 $I=\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为 $O(0,0)$ 到 $A(1,2)$ 的直线段.

解：$L: y=2x\ \ (0\le x\le 1)$，

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1 3x\sqrt{5}\,\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

2．计算曲线积分 $I=\int_L y^2\mathrm{d}s$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的第一拱.

解：$\int_L y^2\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{t=2s}{=}16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 s\,\mathrm{d}s=\frac{256}{15}a^3.$$

3．计算曲线积分 $I=\oint_L xy\mathrm{d}s$，其中 L 为由直线 $y=2x$，$y=2$，$x=0$ 所围三角形区域的整个边界.

解:由方程组 $\begin{cases} y=2x \\ y=2 \end{cases}$ 解得交点的坐标为 $(1,2)$，这样积分弧段可以分成三部分，利用曲线积分对积分弧段具有可加性，得

$$\oint_L xy\ \mathrm{d}s=\int_0^1 2\sqrt{5}x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{3}+1.$$

4．设曲线 $L: y=2x+1$（$0\le x\le 1$）上任意一点处的线密度为 $\rho(x,y)=xy$，求该曲线构件的质量 M.

解：$y'=2$，$\mathrm{d}s=\sqrt{5}\mathrm{d}x$，

$$M=\int_L xy\mathrm{d}s=\int_0^1 x(2x+1)\sqrt{5}\,\mathrm{d}x=\frac{7\sqrt{5}}{6}.$$

同步练习 62（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：对坐标的曲线积分的概念、性质、计算以及两类曲线积分之间的关系．利用对坐标的曲线积分计算变力沿曲线路径所做的功.

综合题

1．计算对坐标的曲线积分 $I=\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中曲线 L 是（要求作积分曲线的草图）:

(1)沿直线 $y=x$ 从坐标原点 O 到 $B(1,1)$.

解：$\int_{L:\begin{cases}x=x\\y=x\end{cases}x:0\to1} y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$.

(2)沿折线段 OAB 从 O 到 $A(1,0)$ 再到 $B(1,1)$.

解：$\int_{L_1:\begin{cases}x=x\\y=0\end{cases}x:0\to1} y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$

$+\int_{L_2:\begin{cases}x=1\\y=y\end{cases}y:0\to1} y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y=1$

2. 计算曲线积分 $I=\oint_L y\mathrm{d}x$, 其中 L 是由直线 $y=0, x=2, y=2, x=0$ 所围成的矩形按逆时针方向的边界.

解：$\oint_L y\mathrm{d}x$

$=\int_{L_1\begin{cases}x=x\\y=o\end{cases}x:0\to2} y\mathrm{d}x+\int_{L_2:\begin{cases}x=2\\y=y\end{cases}y:0\to2} y\mathrm{d}x$

$+\int_{L_3:\begin{cases}x=x\\y=2\end{cases}x:2\to0} y\mathrm{d}x+\int_{L_4:\begin{cases}x=0\\y=y\end{cases}y:2\to0} y\mathrm{d}x$

$=\int_0^2 0\mathrm{d}x+y\mathrm{d}2+\int_2^0 2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}0=-4$.

3．计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$，其中积分曲线 L 为沿圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 的上半部分从点 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$ 的一段弧.

解：积分路径 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=1+\cos t\\ y=\sin t\end{cases},\quad t:\pi\to0 .$$

（且 $\mathrm{d}x=-\sin t\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y=\cos t\mathrm{d}t$ ，于是

$$I=\int_\pi^0 [(1+\cos t)^2+\sin^2 t](-\sin t)\mathrm{d}t$$
$$+2(1+\cos t)\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\int_\pi^0 (-2\sin t+2\sin t\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^\pi \sin^3 t\mathrm{d}t=4\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,\mathrm{d}t=4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}.$$

4．求质点在平面力场 $\vec{F}(x,y)=y\,\vec{i}+2x\,\vec{j}$ 作用下沿抛物线 L： $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 移动到点 $(0,1)$ 所做的功 W 的值.

解：$W=\int_L y\,\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y=\int_1^0 (1-5x^2)\mathrm{d}x$

$=\int_1^0 [1-x^2+2x(-2x)]\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

5．将 $I=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为对弧长的曲线积分，其中 L 为沿圆周 $x^2+y^2=2y$ 逆时针从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$.

解：曲线 Γ 上任意点的切向量是 $(-y+1,x)$，模是1，所以 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$=\int_\Gamma (P(-y+1)+xQ)\mathrm{d}s$

$=\int_\Gamma (\sqrt{1-x^2}P+xQ)\mathrm{d}s$

同步练习 61（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 61(A)．

一．填空题

1．设心形线 L：$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 的周长为 l，

则曲线积分 $\oint_L (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})\mathrm{d}s =$ __$a^{\frac{2}{3}} l$__．

2．设曲线构件 Γ 上任意一点处的密度函数为 $\rho(x,y,z)$，则该曲线构件关于原点 O 的转动惯量为 $I_O =$ __$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$__．

二．综合题

1．计算曲线积分 $I = \oint_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$，其中 L 为抛物线 $y = x^2$，直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成的曲边三角形．

解：$\oint_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{\overset{\frown}{OB}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$

$= \int_0^1 0 + \int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y + \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}+7)$．

2．计算曲线积分 $I = \int_L (x+y-1)\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $y = x+1$ 在点 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 之间的直线段．

解：曲线 L：$y = x+1$，$x \in (0,1)$，

$\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

$I = \int_0^1 \left(x + (x+1) - 1\right)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$

$= \sqrt{2}x^2 \Big|_0^1 = \sqrt{2}$ ．

3．计算曲线积分 $I = \int_\Gamma e^z\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 为圆柱螺旋线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的一段．

解：$x' = -\sin t, y' = \cos t, z' = 1$，

$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t$，

$\int_\Gamma e^z\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$．

4．设有一个半径为 a，中心角为 2φ 的圆弧型构件 L，其线密度函数为 $\rho(x,y) = x^2+y^2$，求质心坐标．

解：曲线 $L: r = a, \theta \in (-\varphi, \varphi)$ 关于 x 轴对称，$\mathrm{d}s = a\mathrm{d}\theta$，

质量 $M = \int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s = \int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$

$= \int_{-\varphi}^{\varphi} a^2 \cdot a\mathrm{d}\theta = 2a^3\varphi$，

对 x 轴的静力矩 $M_x = \int_L y\rho(x,y)\mathrm{d}s$

$= \int_L y(x^2+y^2)\mathrm{d}s = 0$，

对 y 轴的静力矩 $M_y = \int_L x\rho(x,y)\mathrm{d}s$

$= \int_L x(x^2+y^2)\mathrm{d}s$

$= \int_{-\varphi}^{\varphi} a\cos\theta \cdot a^2 \cdot a\ \mathrm{d}\theta = 2a^4\sin\varphi$

所以 $\bar{x} = \frac{\int_L x\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s} = \frac{a\sin\varphi}{\varphi}$，

$\bar{y} = \frac{\int_L y\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s} = 0$，

即质心坐标为 $\left(\frac{a\sin\varphi}{\varphi}, 0\right)$．

同步练习 62（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 62(A).

综合题

1．计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$，其中积分曲线 L 为 $y=1-|1-x|$ 从 $O(0,0)$ 经 $A(1,1)$ 到 $B(2,0)$ 的折线.

解：积分路径 $L=\overline{OA}+\overline{AB}$，

在 $\overline{OA}$ 上，$y=x, \mathrm{d}y=\mathrm{d}x,\ x:\ 0\to 1$；

在 $\overline{AB}$ 上，$y=2-x$，$\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$，$x:1\to 2$，

因此，

$$I=\int_{\overline{OA}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{AB}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 4x^2\mathrm{d}x+4\int_1^2(x^2-2x+1)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

2．计算曲线积分 $I=\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中 L 是椭圆周 $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ 的上半部分，沿逆时针方向.

解：$\int_{L:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases} t:0\to\pi} y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$

$$=\int_0^\pi(b^2\sin^2 t)a\mathrm{d}\cos t+(a^2\cos^2 t)b\mathrm{d}\sin t$$

$$=ab^2\int_0^\pi(1-\cos^2 t)\mathrm{d}\cos t$$

$$+a^2b\int_0^\pi(1-\sin^2 t)\mathrm{d}\sin t=-\frac{4}{3}ab^2.$$

3．计算曲线积分 $I=\oint_\Gamma(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x-y+z=2$ 的交线，从 z 轴正向看去，Γ 为顺时针方向.

解： 曲线 Γ 的一般方程是 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$，

令 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，

则 $z=2-x+y=2-\cos\theta+\sin\theta$.

因此，Γ 的参数方程是

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$z=2-\cos\theta+\sin\theta$，

$$\theta:\ 2\pi\to 0,$$

化曲线积分为定积分

$$I=\int_{2\pi}^0[-2(\cos\theta+\sin\theta)+\cos 2\theta+1+\cos 2\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}[2(\cos\theta+\sin\theta)-1-2\cos 2\theta]\mathrm{d}\theta=-2\pi.$$

4．设有一力场 $\overrightarrow{F}(x,y)$，力的方向与 y 轴的正向相反，力的大小等于作用点横坐标的平方．求在场力 $\overrightarrow{F}(x,y)$ 的作用下质点沿抛物线 $x=1-y^2$ 从点 $A(0,1)$ 移动到点 $B(1,0)$ 时，场力所作的功.

解:因为场力 $\overrightarrow{F}(x,y)=(0,-x^2)$，

沿曲线 $L:x=1-y^2, y:1\to 0$，故

$$W=\int_L(-x^2)\mathrm{d}y=-\int_1^0(1-y^2)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(1-y^2)^2\mathrm{d}y=\frac{8}{15}.$$

5．设 Γ 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的弧．试将对坐标的曲线积分 $I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化为对弧长的曲线积分.

解：曲线的切向量 $\overrightarrow{T}=(1,2t,3t^2)$，且

$\mathrm{d}x=\cos\alpha\mathrm{d}s, \mathrm{d}y=\cos\beta\mathrm{d}s, \mathrm{d}z=\cos\lambda\mathrm{d}s$, 因此，

$$I=\int_L P\cos\alpha\mathrm{d}s+Q\cos\beta\mathrm{d}s+R\cos\gamma\mathrm{d}s$$

$$=\int_L\frac{P+2tQ+3t^2R}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\mathrm{d}s.$$

同步练习 63（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：两类曲线积分的计算与应用.

一．选择题

设有向曲线 $L: y=x^2$，从点 $(1,1)$ 到点 $(0,0)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}y=$（ C ）.

(A) $\int_1^0 f(x,x^2)\mathrm{d}x$；　(B) $\int_0^1 2xf(x,x^2)\mathrm{d}x$；

(C) $\int_1^0 f(\sqrt{y},y)\mathrm{d}y$；　(D) $\int_0^1 f(\sqrt{y},y)\mathrm{d}y$.

二．填空题

1．设曲线 $L: x^2+y^2=4$，则曲线积分 $\oint_L (x-y+1)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$ $\underline{\quad 8\pi \quad}$.

2．设有一均匀密度的空间曲线型构件 Γ 的长度为 l，则该构件的形心坐标为 $\underline{\left(\dfrac{\int_\Gamma x\mathrm{d}s}{l},\dfrac{\int_\Gamma y\mathrm{d}s}{l},\dfrac{\int_\Gamma z\mathrm{d}s}{l}\right)}$.

三．综合题

1．计算曲线积分 $I=\int_L x^2y\,\mathrm{d}s$，其中 L 为连接两点 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 的直线段.

解：L 的方程为 $y=1-x$（$0\le x\le 1$），$y'=-1$．所以

$$\int_L x^2y\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x^2(1-x)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

2．设螺旋线弹簧一圈的方程为 $\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$，其中 $0\le t\le 2\pi$，线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$．求其关于 z 轴的转动惯量 I_z.

解：$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\ \mathrm{d}t=\sqrt{k^2+a^2}\ \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}I_z&=\int_\Gamma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s\\&=\int_0^{2\pi} a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{k^2+a^2}\,\mathrm{d}t\\&=a^2\sqrt{k^2+a^2}\,(2\pi a^2+\frac{8}{3}k^2\pi^3).\end{aligned}$$

3．计算曲线积分 $I=\int_L x^3\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z$，其中 L 为从点 $A(3,2,1)$ 到点 $B(0,0,0)$ 的直线段 $\overline{AB}$.

解：直线段 $\overline{AB}:\begin{cases}x=3t,\\ y=2t,\quad t:1\to 0,\\ z=t,\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=\int_1^0 27t^3\mathrm{d}(3t)+3\cdot 4t^2\cdot t\mathrm{d}(2t)-9t^2\cdot 2t\mathrm{d}t\\&=-\int_0^1 87t^3\,\mathrm{d}t=-\frac{87}{4}.\end{aligned}$$

4．设 $\vec{F}(x,y)=\cos x\sin y\,\vec{i}+\sin x\cos y\,\vec{j}$ 为一平面力场．求质点在力 $\vec{F}$ 的作用下沿直线 $L: y=x$ 从点 $(0,0)$ 移动到点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 所做的功 W.

解：$W=\int_L \cos x\sin y\,\mathrm{d}x+\sin x\cos y\,\mathrm{d}y$，

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\sin x\,\mathrm{d}x=1.$$

同步练习 64（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：格林公式，曲线积分与路径无关的条件.

综合题

1．计算曲线积分 $I=\oint_L xy^2\,dx-x^2y\,dy$，其中 L 是逆时针的圆周 $x^2+y^2=9$.

解： $I=\iint\limits_D(-2xy-2xy)\,dx\,dy$

$=-4\iint\limits_D xy\,dx\,dy=0$

2．设曲线 L 是以 $(1,0)$，$(\pi,0)$，$(\pi,2)$ 为顶点的三角形边界，取逆时针方向，计算曲线积分 $I=\oint_L(\ln x-y+1)dx+(e^y+2x-1)dy$.

解： $I=3\iint\limits_D dx\,dy=3(\pi-1)$.

3．利用曲线积分，计算星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 所围图形的面积 A.

解：$A=\dfrac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\dfrac{3}{4}a^2\sin^2 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{3}{8}\pi a^2$.

4．设 L 为 $y=\sin x$ 自 $x=0$ 到 $x=\pi$，求

$\int_L[\cos(x+y^2)+2y]dx+[2y\cos(x+y^2)+3x]dy$.

解：曲线 L 不是封闭的，添加线段 $\overline{AO}:y=0,x:\pi\to 0$ 构成封闭曲线，所围区域是

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,0\le y\le\sin x\},$$

边界曲线的方向为顺时针方向，利用格林公式得

$\int_L[\cos(x+y^2)+2y]dx+[2y\cos(x+y^2)+3x]dy$

$=-\iint\limits_D d\sigma-\int_\pi^0\cos x\,dx=-\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}dy=-2$.

5．计算曲线积分

$I=\int_L(e^y+x-y)dx+(xe^y+x+y)dy$，

其中 L 为 $x^2+y^2=1$ 的左半部分，从 $A(0,1)$ 到 $B(0,-1)$.

解：$L_1:x=0,y:-1\to 1$，

$\oint_{L+L_1}(e^y+x-y)dx+(xe^y+x+y)dy$

$=\iint\limits_D 2d\sigma=\pi$，

$\int_{L_1}(e^y+x-y)dx+(xe^y+x+y)dy$

$=\int_{-1}^1 y\,dy=0$，

$\int_L(e^y+x-y)dx+(xe^y+x+y)dx=\pi$.

6．设 L 是任意一条分段光滑的封闭曲线，证明 $\oint_L e^y\,dx+(xe^y-2y)\,dy=0$.

证明：令 $P=e^y,Q=xe^y-2y$，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y-e^y=0$，

由格林公式，

$\oint_L e^y\,dx+(xe^y-2y)\,dy=\pm\iint\limits_D 0\,dx\,dy=0$.

同步练习 63（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 63(A).

一．填空题

1．设空间曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\ z=2\end{cases}$，则曲线积分 $\int_L \dfrac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}=$ $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

2．设曲线 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，则曲线积分 $\oint_L x^2\mathrm{d}s=$ $\underline{\pi a^3}$.

二．计算题

1．设空间曲线 $\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=t$，$0\le t\le 2\pi$，求曲线积分 $I=\int_\Gamma \dfrac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$.

解：$\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=t$，

$\mathrm{d}s=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+1}\,\mathrm{d}t=\sqrt{1+a^2}\,\mathrm{d}t$，

则 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{t^2}{a^2}\sqrt{1+a^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{8\sqrt{1+a^2}}{3a^2}\pi^3$.

2．设曲线 L 是以 $A(0,1),B(-1,0),C(0,-1),D(1,0)$ 为顶点的四边形的边，取逆时针方向，计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$.

解：由于四边形 $ABCD$ 的边界曲线 L 的方程为 $|x|+|y|=1$，所以

$$
\begin{aligned}
I&=\oint_L \mathrm{d}x+\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{-1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^0\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^{-1}\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y+\int_1^0\mathrm{d}y=0.
\end{aligned}
$$

3．计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，沿逆时针方向.

解：圆的参数方程 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$\theta:0\to 2\pi$，

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta+a\sin\theta)\mathrm{d}(a\cos\theta)\\
&\quad-\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta-a\sin\theta)\mathrm{d}(a\sin\theta)=-2\pi.
\end{aligned}
$$

4．设空间曲线 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，计算曲线积分 $I=\oint_\Gamma[(x+2)^2+(y-3)^2]\mathrm{d}s$.

解：$I=\oint_\Gamma(x^2+y^2+4x-6y+13)\mathrm{d}s$，

由对称性，$\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y^2\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}s$

$=\dfrac{1}{3}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\dfrac{2\pi}{3}a^3$，

$$\oint_\Gamma x\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma(x+y+z)\mathrm{d}s=0,$$

所以 $I=2\cdot\dfrac{2\pi}{3}a^3+13\cdot 2\pi a=\dfrac{4\pi}{3}a^3+26\pi a$.

同步练习 64（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 64(A).

综合题

1．设曲线 L 为 $x^2+y^2=1$ 的上半部分，从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$，计算曲线积分

$$I=\int_L(2xe^y+1)\mathrm{d}x+(x^2e^y+x)\mathrm{d}y.$$

解：取 $L_1: y=0$，$x:-1\to1$，

$$\oint_{L+L_1}=\iint_D(2xe^y+1-2xe^y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2},$$

其中 $D: x^2+y^2\le1,\ y\ge0$；

$$\int_{L_1}(2xe^y+1)\mathrm{d}x+(x^2e^y+x)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}(2x+1)\mathrm{d}x=2,$$

所以 $\displaystyle\int_L(2xe^y+1)\mathrm{d}x+(x^2e^y+x)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-2$.

2．设曲线 L 为圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧，计算曲线积分

$$I=\int_L(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y.$$

解：取 $\overline{AB}: y=1, x:1\to0$，

$\overline{BO}: x=0, y:1\to0$，

$$\oint_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y=\iint_D 0\,\mathrm{d}\sigma=0,$$

$$\int_{\overline{AB}}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y=\int_1^0(x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$\int_{\overline{BO}}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y=-\int_1^0\sin^2y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{1-\cos2y}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin2,$$

所以 $I=0-\dfrac{2}{3}-(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\sin2)=\dfrac{1}{4}\sin2-\dfrac{7}{6}$.

3．已知曲线积分 $\oint_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(9x-x^3)\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$，取逆时针方向，求 a 的值，使得对应曲线积分的值最大．

解：显然 $P=1+y^3$，$Q=9x-x^3$ 在区域 $D: (x-a)^2+y^2\le a^2$ 内有一阶连续的偏导数，由格林公式，$I(a)=\iint_D(9-3x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=9\pi a^2-3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=9\pi a^2-\frac{9}{2}\pi a^4,$$

求导得 $I'(a)=18\pi a(1-a^2)$，令 $I'(a)=0$，解得 $a=1$．因为 $a=1$ 是 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内唯一的驻点，且 $I''(1)=18\pi-54\pi=-36\pi<0$，故 $I(a)$ 在 $a=1$ 处取得最大值，因此 $a=1$，即当积分路径为 $(x-1)^2+y^2=1$ 时，对应曲线积分的值最大.

4．设曲线 $L: |x|+|y|\le1$，逆时针方向，计算曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$.

解：$P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，

由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，但在 $(0,0)$ 点偏导数不存在．取 $l: 4x^2+y^2=a^2, (0<a<1)$，顺时针方向，则 $\oint_L=\oint_{L+l}-\oint_l$，其中

$$\oint_{L+l}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

取 l 的参数方程 $x=\dfrac{a}{2}\cos t, y=a\sin t, t:2\pi\to0$

$$-\oint_l=\oint_{l^-}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2}(\frac{a^2}{2}\cos^2t+\frac{a^2}{2}\sin^2t)\mathrm{d}t=\pi,$$

所以 $\oint_L=\oint_{L+l}-\oint_l=\pi$.

同步练习 65（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：曲线积分与路径无关的条件，全微分方程.

一．选择题

下列命题中不正确的是（ B ）.

(A) 设函数 $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有连续的导数，则 $\int_L f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)$ 在全平面与路径无关；

(B) 设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在某平面区域 D 内有连续的一阶偏导数，且在 D 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则曲线积分 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 在区域 D 内与路径无关；

(C) 曲线积分 $\int_L xe^y\,dx+\frac{1}{2}x^2e^y\,dy$ 在全平面内与路径无关；

(D) 设 D 是含原点的平面区域，则 $\int_L \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ 在 D 上与路径有关.

二．填空题

若 $(axy-y^2)dx+(x^2+bxy)dy=0$ 为全微分方程，则 $a=$ __2__，$b=$ __-2__.

三．综合题

1．验证曲线积分 $I=\int_L(2x+\sin y)dx+x\cos y dy$ 在全平面内与路径无关，并计算积分值，其中 L 是正弦曲线 $y=\sin x$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(\pi,0)$ 的一段弧.

解: $P(x,y)=2x+\sin y$，$Q(x,y)=x\cos y$，

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分在全平面内与路径无关. 取 $L: y=0, x: 0\to\pi$

$$I=\int_L(2x+\sin y)dx+x\cos y dy$$

$$=\int_0^{\pi}2x dx=\pi^2.$$

2．验证曲线积分 $\int_L(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$ 在全平面上与路径无关，并计算 $I=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$.

解：设 $P=e^y+x$， $Q=xe^y-2y$，

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^y$ 在整个平面上都成立，所以曲线积分在全平面上与路径无关.

取折线路径 $(0,0)\to(1,0)\to(1,2)$，

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$$

$$=\int_0^1(1+x)dx+\int_0^2(e^y-2y)dy$$

$$=(x+\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1+(e^y-y^2)\Big|_0^2=-\frac{7}{2}+e^2.$$

3．验证在整个坐标平面 xOy 内，$e^y\cos x\,d\,x+e^y\sin x\,d\,y=0$ 为全微分方程，并求其通解.

证明：由 $P=e^y\cos x, Q=e^y\sin x$，得 $\frac{\partial P}{\partial y}=e^y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以在整个坐标平面 xOy 内，$e^y\cos x\,d\,x+e^y\sin x\,d\,y=0$ 为全微分方程，

因为 $e^y\cos x\,d\,x+e^y\sin x\,d\,y=d\,(e^y\sin x)$，

所以该方程的通解为 $e^y\sin x=C$.

同步练习 66（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：对面积的曲面积分的计算及其应用.

一．填空题

1．设曲面 Σ ：$x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}(1+x-2y)\,\mathrm{d}S=$ $\underline{\quad 4\pi \quad}$.

2．设一曲面薄板 Σ 的面密度函数为 $\rho(x,y,z)$，则薄板的质量用第一类曲面积分可表示为 $\underline{\displaystyle\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$.

3．设曲面 Σ 质量分布均匀，且曲面 Σ 的面积 $A=2$，$\displaystyle\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=0$，$\displaystyle\iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=2$，$\displaystyle\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S=4$，则曲面 Σ 的质心是 $\underline{(0,1,2)}$.

二．综合题

1．计算曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ （$0\le z\le 1$）.

解：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \mathrm{d}S=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

2．计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}xz\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ （$a>0$）.

解：在 Σ 上，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

D_{xy}：$x^2+y^2\le a^2$，

因此，

$$I=\iint_{D_{xy}}x\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}ax\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}x\,\mathrm{d}x=0.$$

3．求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分的面积.

解：$\Sigma:z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 在 xOy 上投影 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$，

$$A=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

4．设旋转抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截下部分上任一点的面密度 $\rho=1$，求该曲面片的质量.

解：$\Sigma:z=6-x^2-y^2(z\ge\sqrt{x^2+y^2})$ 在 xOy 上投影 $D_{xy}:x^2+y^2\le 4$，

$$M=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\sqrt{1+4r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1).$$

同步练习 65（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 65(A)．

综合题

1．计算曲线积分

$I=\int_L (y\cos x-3y)\,\mathrm{d}x+(\sin x+x-2)\,\mathrm{d}y$，其中曲线 L 为 $x^2+y^2=1$ 的左半部分，从 $A(0,1)$ 到 $B(0,-1)$．

解：$L_1: x=0$， $y:-1\to 1$，

$P=y\cos x-3y$， $Q=\sin x+x-2$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x-3$， $\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x+1$，

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi,$$

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}-2\mathrm{d}y=-4,$$

所以 $I=2\pi+4$．

2．验证 $\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y+2}$ 在整个 xOy 平面内为某一函数的全微分，并求一个这样的函数 $u(x,y)$．

解: $P=\frac{1}{x+y+2}$， $Q=\frac{1}{x+y+2}$，

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{(x+y+2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

所以曲线积分的被积表达式为某一函数的全微分；

折线路径 $(-1,0)\to(x,0)\to(x,y)$，

$$u(x,y)=\int_{-1}^{x}\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{1}{x+y+2}\mathrm{d}y$$

$$=\ln(x+y+2).$$

3．选取 a,b，使得

$[(x+y+1)e^x+ae^y]\mathrm{d}x+[be^x-(x+y+1)e^y]\mathrm{d}y$

在整个 xOy 面上是某一函数的全微分，并求一个这样的函数 $u(x,y)$．

解：令 $P=(x+y+1)e^x+ae^y$，

$Q=be^x-(x+y+1)e^y$，则在全平面上，P,Q 有一阶连续偏导数，

且 $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+ae^y$， $\frac{\partial Q}{\partial x}=be^x-e^y$，

由 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$， 得 $e^x+ae^y\equiv be^x-e^y$，

解得 $a=-1$， $b=1$．选取 M_0 为原点 $(0,0)$，折线路径 $(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$，

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,\,y)}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x[(x+1)e^x-1]\mathrm{d}x+\int_0^y[e^x-(x+y+1)e^y]\mathrm{d}y$$

$$=xe^x\Big|_0^x-x+e^xy-xe^y\Big|_0^y-ye^y\Big|_0^y$$

$$=(x+y)(e^x-e^y).$$

4．设曲线积分 $\int_\Gamma xy^2\,\mathrm{d}x+yf(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(1)=1$，求 $\int_{(0,1)}^{(1,2)}xy^2\,\mathrm{d}x+yf(x)\,\mathrm{d}y$．

解：由积分与路径无关，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，

即 $yf'(x)=2xy$， $f'(x)=2x$，得 $f(x)=x^2+C$，

再由 $f(1)=1$， 得 $C=0$， 所以 $f(x)=x^2$．

$$\int_{(0,1)}^{(1,2)}xy^2\,\mathrm{d}x+yf(x)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^2 y\,\mathrm{d}y=2.$$

同步练习 66（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 66(A).

一．填空题

1．设球面Σ：$x^2+y^2+z^2=R^2$的质量面密度$\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则球面构件的质量为 $\underline{\quad 4\pi R^3 \quad}$.

2．设曲面Σ质量分布均匀，且$\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S=-3$，曲面$\Sigma$的质心是$(-1,1,2)$，则$\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=$ $\underline{\quad 6 \quad}$.

3．设曲面构件$\sum$上任意一点处的面密度为$\rho(x,y,z)$，则该曲面构件关于x轴的转动惯量为$\underline{I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}$.

二．综合题

1．计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中$\sum$为上半圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在平面$z=0$，$z=1$之间部分的曲面.

解：曲面$\sum$：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，在坐标平面xOy的投影$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

2．利用第一类曲面积分，计算旋转抛物面$\Sigma:z=2-x^2-y^2$在xOy面上方部分的面积.

解：曲面$\Sigma:z=2-x^2-y^2$，在坐标平面xOy的投影$D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2\right\}$，

$z'_x=-2x$，$z'_y=-2y$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$A=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{13}{3}\pi.$$

3. 求面密度为$\rho=1$的球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在第一卦限部分的质心.

解：设质心坐标为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，由对称性知$\overline{x}=\overline{y}=\overline{z}$．质量$M=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{8}\cdot 4\pi a^2=\frac{\pi a^2}{2}$，

$$M_{yOz}=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3}{4},$$

所以$\overline{x}=\frac{a}{2}$，同理有$\overline{y}=\overline{z}=\frac{a}{2}$．故所求的质心为$(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

4．计算曲面积分$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S$，其中曲面$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$.

解：由对称性，

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S,$$

所以，

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}a^2\,\mathrm{d}S=\frac{a^2}{3}\cdot 4\pi a^2=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

同步练习 67（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：对坐标的曲面积分的计算，两类曲面积分间的关系.

一．选择题

1．设曲面Σ为$z=-2$（$x^2+y^2\le 1$）的下侧，则下列结论中**正确**的是（ B ）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi$； (B) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$；

(C) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi$； (D) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\pi$.

2．设曲面Σ为$z=1$（$x^2+y^2\le 4$）的下侧，在三个坐标平面上的投影区域分别记为D_{xy}，D_{yz}，D_{zx}，则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$可转化为二重积分（ B）.

(A) $\iint\limits_{D_{xy}} P(x,y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；(B) $-\iint\limits_{D_{xy}} P(x,y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(C) $\iint\limits_{D_{yz}} P(x,y,1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；(D) $\iint\limits_{D_{zx}} P(x,y,1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

二．综合题

1．计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面$\Sigma$是$z=x^2+y^2$介于$z=0$和$z=1$之间部分的上侧.

解：Σ在xOy面的投影区域$D_{xy}:x^2+y^2\le 1$，

$$I=\iint\limits_{\Sigma} y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}} y^2(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.$$

2．计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$的下半部分的下侧.

解：曲面$\Sigma: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$在$xOy$面的投影区域$D_{xy}:x^2+y^2\le a^2$，取下侧，

$$I=\iint\limits_{D_{xy}} x^2y^2(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}r^5\mathrm{d}r=\frac{2}{105}\pi a^7.$$

3．把对坐标的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化为对面积的曲面积分，其中$\Sigma$是平面$3x+2y+2\sqrt{3}z=6$在第一卦限部分的上侧.

解：平面$\Sigma:3x+2y+2\sqrt{3}z=6$在第一卦限部分的上侧的法向量$\boldsymbol{n}=\{3,2,2\sqrt{3}\}$，方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\cos\beta=\frac{2}{5},\cos\gamma=\frac{2\sqrt{3}}{5},$$

故$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)\mathrm{d}S$.

同步练习 68（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：两类曲面积分的计算与应用综合练习.

一．填空题

设曲面构件 Σ 上任意一点处的面密度为 $\rho(x,y,z)$，则该曲面构件关于 x 轴的转动惯量为 $I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$．

二．综合题

1. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S$，其中曲面 Σ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分.

解：曲面 $\Sigma: z=1-x-y$，在 xOy 面的投影区域 $D_{xy}: x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}y^2\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^2\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

2. 计算平面 $\Sigma: x+y+z=2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 所截下部分图形的面积.

解：曲面 $\Sigma: z=2-x-y$，在 xOy 面的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

故 $A=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\pi a^2$．

3. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中曲面 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(z\le 1)$ 在第一卦限部分的下侧.

解：曲面 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, z\le 1$，在 xOy 面的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$，取下侧，

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{6}.$$

4. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解：曲面 Σ 分为 Σ_1,Σ_2 两部分，在 yOz 面的投影区域 D_{yz}，其中 $\Sigma_1: x=\sqrt{1-y^2-z^2}$ 取前侧，$\Sigma_2: x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$ 取后侧，

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_2}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}(1-y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{yz}}(1-y^2-z^2)(-\mathrm{d}y\mathrm{d}z)=0,$$

曲面 Σ 分为 Σ_3,Σ_4 两部分，在 xOy 面的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，其中 $\Sigma_3: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 取上侧，$\Sigma_4: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 取下侧，

$$\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_3}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_4}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}(-\sqrt{1-x^2-y^2})(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\pi}{3},$$

所以 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{4\pi}{3}$．

同步练习 67（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 67(A).

一．选择题

设曲面Σ为$z=-1$（$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$）的上侧，则（ D ）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；　(B) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=1$；

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-1$；　(D) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-1$.

二．综合题

1．计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在$x\ge 0$，$y\ge 0$的部分.

解: 把Σ分为Σ_1,Σ_2两部分，其中

$\Sigma_1: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$取下侧，

$\Sigma_2: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$取上侧，$\Sigma_1,\Sigma_2$在$xOy$面的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1} xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}} xy(1-x^2-y^2)(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=0.$$

2．计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0, z=3$所截得在第一卦限部分的前侧.

解：Σ在xOy面的投影为曲线$x^2+y^2=1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，所以$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

Σ在yOz面的投影区域$D_{yz}: 0\le y\le 1$，$0\le z\le 3$，取前侧，所以

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\pi;$$

由对称性，$\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\pi$；

综上，$I=\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\pi$.

3．计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为旋转抛物面$z=x^2+y^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\le 1$的上侧.

解：Σ在xOy面的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，取上侧，$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8};$$

Σ在yOz面的投影区域$D_{yz}: 0\le y\le 1$，$y^2\le z\le 1$，取后侧，$\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,y(-\mathrm{d}y\mathrm{d}z)=-\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{y^2}^1\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^1 y(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y=-\frac{2}{15};$$

所以$I=\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8}-\frac{2}{15}$.

同步练习 68（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 68(A).

综合题

1. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$，其中曲面$\Sigma$是抛物面$z=x^2+y^2$被平面$z=4$所截得的部分.

解：曲面$\Sigma: z=x^2+y^2$，在 xOy 面的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 4$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma} y\sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} y\sin(2x^2+2y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\ .$$

2. 具有质量的曲面Σ是曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$在锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$内的部分，如果Σ上每点的面密度等于该点到xOy面距离的倒数，求Σ的质量.

解：密度$\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{z}$，曲面$\Sigma: z=\sqrt{2-x^2-y^2}$被$z=\sqrt{x^2+y^2}$所截部分在$xOy$面的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2-x^2-y^2}},$$

$$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2-x^2-y^2}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r=\sqrt{2}\pi\ln 2\ .$$

3. 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$下半部分的下侧.

解：曲面$\Sigma: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$在$xOy$面的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，取下侧，

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)(-\sqrt{1-x^2-y^2})(-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r=\frac{4}{15}\pi\ .$$

4. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中曲面Σ是$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$的下侧.

解：曲面$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$在$xOy$面的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le h^2$，取下侧，曲面$\Sigma$切平面的法向量$\boldsymbol{n}=\{2x,2y,-2z\}$，

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{x}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{y}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}[-(y-z)\frac{x}{z}-(z-x)\frac{y}{z}+(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}}(x-y)(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=0\,.$$

同步练习 69（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：高斯(Gauss)公式，通量与散度.

一．填空题

1. 向量场 $\vec{F}=\{xy, yz, zx\}$ 的散度 $\mathrm{div}\vec{F}=$ $\underline{\quad x+y+z \quad}$.

2．设 Σ 是介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\le 9$ 的整个表面的外侧，则曲面积分 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{81\pi}$.

二．综合题

1．计算曲面积分

$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^2yz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy^2z\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为立方体 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ 全表面的外侧.

解：由高斯公式，

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^2yz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy^2z\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega} 6xyz\mathrm{d}v=6\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z=\frac{3}{4}.$$

2．计算曲面积分

$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} 2xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0, z=a\ (a>0)$ 所围立体全表面的外侧.

解：

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} 2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega} 2z\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^a 2z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a 2\pi z\mathrm{d}z=\pi a^2$$

或

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^a 2z\mathrm{d}z=2\pi\times\frac{1}{2}\times a^2=\pi a^2.$$

3．计算曲面积分

$\iint_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是 $z^2=x^2+y^2\ (0\le z\le h)$ 的下侧.

解：取 $\Sigma_1: z=h$ 上侧，在 xOy 面的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le h^2$，

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint_{\Sigma_1}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$=\iint_{\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，所以

$$\iint_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

4．设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=y\cos z\,\vec{i}+x\sin z\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$，试利用高斯公式，计算该向量场 $\vec{F}$ 穿过上半圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围全表面外侧的通量.

解：上半圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围立体 $\Omega:\begin{cases} D_{xy}: x^2+y^2\le 1 \\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\end{cases}$，所以

$$\Phi=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} y\cos z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\sin z\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega} 2z\mathrm{d}v=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}.$$

同步练习 70（A）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：高斯(Gauss)公式，通量与散度；斯托克斯(Stokes)公式，环流量和旋度.

综合题

1．计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}(y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 与 $z=0$ 所围立体表面的外侧.

解：Σ 所围立体 $\Omega:\begin{cases}0\le z\le 2-r^2,\\ 0\le r\le\sqrt{2},\\ 0\le\theta\le 2\pi,\end{cases}$ 由高斯公式，$I=-3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_0^{2-r^2}\mathrm{d}z=-6\pi.$$

2. 设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=xz\,\vec{i}+2xyz\,\vec{j}-xz^2\,\vec{k}$，试利用高斯公式，计算该向量场 $\vec{F}$ 穿过圆锥体 $\Omega:x^2+y^2\le z^2(0\le z\le 1)$ 的全表面流向外侧的通量 Φ.

解：Σ 所围立体 $\Omega:\begin{cases}r\le z\le 1,\\ 0\le r\le 1,\\ 0\le\theta\le 2\pi,\end{cases}$ 由高斯公式，

通量 $\Phi=\oiint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}.$$

3. 设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 Σ 的外侧，都有 $\oiint_{\Sigma}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-e^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$．求 $f(x)$.

解：由题设和高斯公式得

$$\iiint_{\Omega}(xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

由 Σ 的任意性，得 $xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0$，即一阶线性非齐次方程

$$f'(x)+(\frac{1}{x}-1)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x},$$

通解为 $f(x)=e^{\int(1-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}(C+\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)$

$$=e^{x-\ln x}(C+\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\ln x-x}\mathrm{d}x)=\frac{e^x}{x}(C+e^x)$$

再由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Ce^x+e^{2x}}{x}=1$，

必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}(Ce^x+e^{2x})=C+1=0$，得 $C=-1$，

所以 $f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$.

4．利用斯托克斯公式计算曲线积分 $I=\oint_{\Gamma}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中 Γ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的整个三角形的边界，Γ 的正向与该三角形上侧的法向量符合右手法则.

解:Γ 所围曲面 $\Sigma:x+y+z=1$，在 xOy 面的投影区域 $D_{xy}:0\le x\le 1,0\le y\le 1-x$，$\Sigma$ 的法向量

$$\boldsymbol{n}=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ z&x&y\end{vmatrix}=\{1,1,1\},$$

$$I=\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\{1,1,1\}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\mathrm{d}S$$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}.$$

同步练习 69（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 69(A).

一．填空题

设曲面Σ为球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$的外侧，则曲面积分$\oiint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{\dfrac{4}{3}\pi R^3}$.

二．综合题

1．利用高斯公式计算曲面积分
$I=\iint_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中Σ为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

解：取$\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 1)$下侧，

$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=3$，由高斯公式，

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}v=2\pi$，$\iint_{\Sigma_1}=-\iint_{D_{xy}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

所以$I=2\pi$.

2．计算曲面积分
$I=\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-z)y\mathrm{d}x\mathrm{d}z-x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是抛物面$x^2+y^2=a^2z(a>0)$在$0\le z\le 1$部分的下侧.

解：取$\Sigma_1: z=1$上侧，在xOy面的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$，由高斯公式

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}0\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}(-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi a^4}{4}.$$

3．计算曲面积分
$I=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是界于$z=0$和$z=3$之间圆柱面$x^2+y^2=9$的外侧.

解：取$\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 9)$下侧，$\Sigma_2: z=3\ (x^2+y^2\le 9)$上侧，由高斯公式，

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}v=3\pi 3^2\cdot 3=81\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_1}=\iint_{D_{xy}}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint_{\Sigma_2}=\iint_{D_{xy}}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi 3^2=27\pi，所以$$

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}=81\pi-27\pi=54\pi.$$

4．设三元函数$u(x,y,z)$具有连续的二阶偏导数，Σ是有界闭区域Ω的光滑边界曲面，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$为$u$沿$\Sigma$外法线方向的方向导数，$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，

试证:$\oiint_{\Sigma}\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

证明：$\oiint_{\Sigma}\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$

$$=\oiint_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

同步练习 70（B）

学号__________姓名___________班序号_______

主要内容：参见同步练习 70(A).

综合题

1．计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中曲面 Σ 是由上半圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,(R>0)$ 围成的空间区域全表面的外侧.

解：Σ 所围立体

$\Omega: r\le z\le\sqrt{R^2-r^2}, 0\le r\le\dfrac{R}{\sqrt2}, 0\le\theta\le2\pi$，由高斯公式，$I=\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iiint\limits_{\Omega}2\mathrm{d}v$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt2}}r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}(1-\frac{\sqrt2}{2})R^3.$$

2．计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1\left(0\le z\le3\right)$ 的外侧.

解：取 $\Sigma_1: z=0$ 下侧，$\Sigma_2: z=3$ 上侧，在 xOy 面的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le1$，$\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$ 所围立体 $\Omega: 0\le z\le3, 0\le r\le1, 0\le\theta\le2\pi$，由高斯公式，$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1r\mathrm{d}r\int_0^3 2z\mathrm{d}z=9\pi.$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

$$\iint\limits_{\Sigma_2}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$=\iint\limits_{D_{xy}}9\mathrm{d}x\mathrm{d}y=9\pi$，所以 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}=0$.

3．计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac32}}$，其中 Σ 为椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

解：记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $P=\dfrac{x}{r^3}$，$Q=\dfrac{y}{r^3}$，$R=\dfrac{z}{r^3}$ 在点 $(0,0,0)$ 处无意义，从而不具有一阶连续偏导数，因此不能直接使用高斯公式.

当 $(x,y,z)\ne(0,0,0)$ 时，$\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{r^2-3x^2}{r^5}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{r^2-3y^2}{r^5}$，$\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{r^2-3z^2}{r^5}$ 均连续，且 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$. 取 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=1$ 外侧，所围立体区域为 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le1$. $\Sigma+\Sigma_1^-$ 为封闭曲面的外侧，由高斯公式，$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-}=0$，而

$$\oiint\limits_{\Sigma_1}=\oiint\limits_{\Sigma_1}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega_1}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi,$$

所以 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-}+\oiint\limits_{\Sigma_1}=4\pi$.

4．计算曲线积分 $I=\oint_{\Gamma}2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$，其中曲线 Γ 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=0\end{cases}$，从 z 轴正向看去，这圆周取逆时针方向.

解：以 Γ 为正向边界的曲面 $\Sigma: z=0$，取上侧，在 xOy 面上投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le1$，所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2y & 3x & -z^2\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi.$$

第十一章 无穷级数

同步练习 71（A）

学号____________姓名___________班序号______

主要内容：常数项级数的概念；常数项级数收敛与发散的概念；收敛级数的和的概念；级数的基本性质与收敛的必要条件；

一．选择题

1．若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$（ D ）.

(A) 收敛且和为 0. (B) 收敛但和不一定为 0.

(C) 发散. (D) 可能收敛也可能发散.

2．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，k 为非零常数，则下列叙述一定正确的是（ C ）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 发散.

二．填空题

1．数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 的和 $S = \underline{1}$.

2．无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 的和 $S = \underline{\quad 3 \quad}$.

3．写出级数 $\dfrac{\sqrt{x}}{2} + \dfrac{x}{2\cdot 4} + \dfrac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6} + \dfrac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots$ 的一般项为 $\underline{\dfrac{x^{\frac{n}{2}}}{(2n)!!}}$.

三．综合题

1．若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 的值.

解：

$S_n = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，由此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

即，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a_1 - a$.

2．求级数 $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{3^n} + \cdots$ 的和.

解：$1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}$，

$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$. 即，

$1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{3^n} + \cdots$

$= \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

3．用级数收敛和发散的定义判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 的敛散性.

解：因为

$$S_n = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$= \sqrt{n+1} - 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

所以，根据定义可知原级数发散.

同步练习 72（A）

学号____________姓名____________班序号_______

主要内容：几何级数与 p-级数及其敛散性；正项级数的审敛法—比较审敛法或极限形式的比较审敛法.

综合题

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

解：因为 $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$，且由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 是发散的，由比较审敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 是发散的.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

解：因为 $\frac{1}{(n+1)(n+4)}<\frac{1}{n^2}$，且由 $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi$，且由等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，由比较审敛法的极限形式可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

解：因为 $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}$，且 $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由比较审敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收敛.

2．判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+1}$.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}}=1$，且 $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法的极限形式可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+1}$ 收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

解：因为 $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$，且由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 是发散的.

3. 设非负数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_{n-1}a_n}$ 收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明：由非负数列 $\{a_n\}$ 单调递减，即 $a_{n-1}\ge a_n$，$(n=1,2,3,\cdots)$ 所以 $0<a_n\le\sqrt{a_{n-1}a_n}$，由正项级数比较审敛法，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_{n-1}a_n}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

同步练习 71（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 71（A）.

一．选择题

1．设数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln a)^n$ 收敛，则常数 a 所在的区间是（ C ）.

（A）$(0,e)$.　　（B）$(0,1)$.

（C）(e^{-1},e).　　（D）$(0,e^{-1})$.

2．下列常数项级数收敛的是（ B ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n}$.　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$.

3．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$（ C ）.

（A）收敛于 $2S$.　　（B）收敛于 $2S+u_1$.

（C）收敛于 $2S-u_1$.　　（D）发散.

二．填空题

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a}\right)$ 的和为 $\underline{1-a}$.

2．无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和为 $\underline{\frac{1}{4}}$.

三．综合题

1．若 $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$，$b_n\neq 0$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})$ 的值.

解：

$$S_n=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}+\ldots+\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}},$$

而 $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$，由此 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}=0$.

即，$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b_1}$.

2．设 $a>1$，求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$?

解：记 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}$,

$$\frac{1}{a}S_n=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^{n+1}},$$

$$S_n-\frac{1}{a}S_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots+\frac{1}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}},$$

$$=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^{n+1}}}{1-\frac{1}{a}}-\frac{n}{a^{n+1}},$$ 由此可得

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{(a-1)^2}$.　即

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

3．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$ 的和.

解：因为级数的一般项

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

故级数的部分和

$$S_n=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=1$, 所以级数的和为 1.

同步练习 72（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 72 (A).

综合题

1．用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

解：

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{9}$，且由 $p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法的极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

解：

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}}=1$，且由调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

由比较审敛法的极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}$.

解： 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6^n}{7^n-5^n}}{\frac{6^n}{7^n}}=1$，且由等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n}$ 收敛，由比较审敛法的极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}$ 收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$.

解： 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{1}{n}}=e^{-1}$，且由调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法的极限形式可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$ 发散.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$.

解： 当 $0<a\le 1$ 时，

$\frac{1}{1+a^n}\ge\frac{1}{2}$，一般项不趋于零，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散；

当 $a>1$ 时，

$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

2． 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的和为 1.

证明：$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

同步练习 73（A）

学号____________姓名___________班序号______

主要内容：正项级数的审敛法—比值和根值判别法.

综合题

1． 用比值或根值审敛法判别下列级数的敛散性.

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!}$

$$=\lim_{n\to\infty}3(\frac{n}{n+1})^n=\frac{3}{e}>1,$$

由比值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$发散.

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot(5^n-3^n)}{(5^{n+1}-3^{n+1})\cdot 4^n}=\frac{4}{5}<1$，

由比值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$收敛.

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}$，

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1,$$

由比值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$收敛.

（4） $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$， $a>1$.

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=a>1$，

由根值审敛法可知

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$发散.

2． 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$的敛散性.

解：因为$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，

所以原级数收敛.

3．求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$.

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$的一般项$u_n=\frac{2^n}{n!}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n}=0<1.$$

根据正项级数的比值审敛法可知，

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$收敛，

因此$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

同步练习 74（A）

学号____________姓名___________班序号______

主要内容：一般常数项级数的概念以及交错级数的概念；交错级数与莱布尼茨定理；任意项级数的绝对收敛与条件收敛概念及判定方法.

一．填空题

1．级数 $2-\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{2^3}{3!}-\dfrac{2^4}{4!}+\cdots$ 的通项为 $\underline{u_n=(-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{n!}}$.

2．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\cos^3\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}=\underline{0}$.

二．综合题

1．判定级数 $1-\dfrac{1}{\sqrt2}+\dfrac{1}{\sqrt3}-\dfrac{1}{\sqrt4}+\cdots$ 是否收敛？如果收敛是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt n}$ 发散，

对于交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt n}$，令 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt n}$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt n}=0$，且

$u_n=\dfrac{1}{\sqrt n}>u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，由莱布尼茨审敛法知，

交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt n}$ 收敛，所以交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt n}$ 条件收敛.

2．判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 是否收敛？如果收敛是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}\cdot(n+1)}{3^n\cdot n}=\dfrac13<1$，由比值审敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 收敛. 即原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛.

3．判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3\cdot2^n}$ 是否收敛？如果收敛是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3\cdot2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3\cdot2^n}$，

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3\cdot2^n}$ 收敛，即原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3\cdot2^n}$ 绝对收敛.

4．判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt n)$ 是否收敛？如果收敛是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt n)\right|$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt n})$ 发散，令 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt n}$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt n}=0$，且

$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt n}>u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$，由莱布尼茨审敛法知，交错级数条件收敛.

同步练习 73（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 73(A).

综合题

1．用比值或根值审敛法判别下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot(n+1)^2}{3^{n+1}\cdot n^2}=\frac{1}{3}<1$，由比值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{3^n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{3}{2}>1$，由比值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，由根值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\frac{1}{9}<1$，由根值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中$a_n\to a\quad(n\to\infty)$，$a_n$，$a$和$b$均为正数.

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$，当$a>b$，由根值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$收敛，当$a<b$，由根值审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$发散，当$a=b$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$的收敛性不能确定（例$b=1,a_n=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$发散；又$b=1,a_n=n^{\frac{2}{n}}\to1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛）.

2．判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2(\frac{n\pi}{3})}{2^n}$.

解：$0<\frac{n\cdot\cos^2(\frac{n\pi}{3})}{2^n}<\frac{n}{2^n}$，记$v_n=\frac{n}{2^n}$，由比值审敛法$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{2}<1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，再根据比较审敛法得知原级数收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

解：因为$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n\sqrt[n]{n}}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$，由调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较审敛法极限形式可知发散.

同步练习 74（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 74(A).

一．选择题

1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为（ D ）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$.　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$.　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

2．设 $u_n \neq 0 (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{u_n} = 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}})$（ C ）.

(A) 发散.　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.

(D) 收敛性根据所给条件不能判定.

二．填空题

1．已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underline{8}$.

2．求级数 $\frac{4}{5} - \frac{4^2}{5^2} + \frac{4^3}{5^3} - \cdots$ 的和为 $\underline{\frac{4}{9}}$.

三．综合题

1．判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ 是否收敛？如果收敛是绝对收敛还是条件收敛？

解：$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$，由于 $\ln(x+1) < x (x>0)$，所以 $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散. 对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$，令 $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$，且

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} > u_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+2)}$$，由莱布尼茨审敛法知，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ 收敛，所以交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ 条件收敛.

2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 的敛散性.

解：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = e > 1.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 发散. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，当 n 足够大时，必有 $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$，因此 $|u_{n+1}| > |u_n|$，表明 $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| \neq 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 所以原级数发散.

同步练习 75（A）

学号____________姓名___________班序号______

主要内容：交错级数与莱布尼茨定理；任意项级数的绝对收敛与条件收敛概念及判定方法.

综合题

1. 判定下列级数是否收敛？如果收敛是绝对收敛还是条件收敛？

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ 发散，

对于交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$，令$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}=0$，且

$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}>u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$，由莱布尼茨审敛法知，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$收敛，所以交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$条件收敛.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\dfrac{1}{n})$.

解：$u_n=\ln(1+\dfrac{1}{n})>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，且 u_n 单调递减，由莱布尼茨审敛法知，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\dfrac{1}{n})$收敛；当$n\to\infty$时，

$\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\dfrac{1}{n})\right|=\ln(1+\dfrac{1}{n})\sim\dfrac{1}{n}$，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\dfrac{1}{n})\right|$ 发散；

所以原交错级数条件收敛.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$.

解：$u_n=\sin\dfrac{1}{n}>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，且$u_n$ 单调递减，由莱布尼茨审敛法知，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$收敛．又

$\left|(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}\right|=\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}\right|$发散，故交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$为条件收敛.

2．设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$皆收敛，且$a_n\le c_n\le b_n(n=1,2,\cdots)$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

证明：$0\le c_n-a_n\le b_n-a_n$，由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$皆收敛，且由收敛的性质得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛，所以由正项级数的比较审敛法易得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛. 而$c_n=c_n-a_n+a_n$，由收敛的性质得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

同步练习 76（A）

学号____________姓名___________班序号______

主要内容：幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域，幂级数的和函数.

一．选择题

1．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$（ C ）.

(A) 在 $x=-1$，$x=1$ 处均发散.

(B) 在 $x=-1$ 处收敛，在 $x=1$ 处发散.

(C) 在 $x=-1$ 处发散，在 $x=1$ 处收敛.

(D) 在 $x=-1$，$x=1$ 处均收敛.

2．若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=2$ 处收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{1}{2})^n$ 在 $x=2$ 处（ C ）.

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.　　(D) 敛散性不确定.

二．填空题

1．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!2^n}$ 的收敛区间为 $\underline{(-\infty,\ +\infty)}$.

2．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的和函数为 $\underline{e^{-x^2}}$.

三．计算题

1．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x-1)^n$ 的收敛区间.

解：$a_n=\frac{n}{3^n}$，$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{3}$，幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=3$，解 $|x-1|<3$，得幂级数的收敛区间为 $(-2,4)$.

2．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数.

解：容易求出此级数的收敛半径为1．当 $-1<x<1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处发散，故它的和函数

$$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1).$$

3．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛区间以及和函数.

解：收敛区间 $x\in(-1,1)$，

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}.$$

$$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

且 $S(0)=0$，得 $S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$.

同步练习 75（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 75(A).

综合题

1. 判定下列级数是否收敛？如果收敛是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\dfrac{n}{n+1}$.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\ln\dfrac{n}{n+1}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1$，而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，由比较审敛法的极限形式可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$发散.

令$u_n=\ln\dfrac{n+1}{n}$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，且

$u_n>u_{n+1}$，由莱布尼茨审敛法知，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\dfrac{n}{n+1}$收敛，所以交错级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln^2 n}{n}$.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n\ln^2 n}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}$

$\dfrac{\ln^2 n}{n}>\dfrac{1}{n}(n\geq 3)$，而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，由比较审敛法可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}$发散. 令$u_n=\dfrac{\ln^2 n}{n}$，且令

$f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=0$, 故

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}=0$，且

$f'(x)=\dfrac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}<0(x>e^2)$，由此可得

$f(x)$在$x>e^2$时是单调递减函数，即

$u_n=\dfrac{\ln^2 n}{n}>u_{n+1}=\dfrac{\ln^2(n+1)}{n+1}$，由莱布尼茨审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln^2 n}{n}$收敛，即交错级数条件收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n\cdot\cos^2\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}$.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n\cdot\cos^2\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot\cos^2\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}$，

由$0<\dfrac{n\cdot\cos^2\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}<\dfrac{n}{2^n}$，记$u_n=\dfrac{n}{2^n}$由比值审敛法$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}<1$. 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$收敛，即原级数绝对收敛.

2. 设数列$\{u_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=1$. 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$收敛并求和.

证明：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(u_k+u_{k+1})=u_1+(-1)^{n+1}u_{n+1},$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=1$可得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=u_1$，即级数收敛，和为$u_1$.

同步练习 76（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 76(A)．

一．填空题

1．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径为 $\underline{\sqrt{3}}$．

2．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $\underline{(-2,\ 4)}$．

3．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数为 $\underline{\frac{1}{(1+x)^2}}$．

二．计算题

1．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$ 的收敛区间．

解： $a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n}$，

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5(n+2)}=\frac{1}{5},$$

$$R=\frac{1}{\rho}=5.$$

由 $|x-3|<5$ 可得幂级数的收敛区间 $(-2,8)$．

2．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛半径和收敛区间．

解：这是缺（奇次幂）项的级数．

令 $t=x^2$，先讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$ 的收敛区间．

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

故该级数的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=2$，因此，原级数的收敛半径为 $\sqrt{2}$，收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$．

3．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的和函数，并求数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$$

的和．

解：设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$，两边求导得

$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2-x}$（$-2<x<2$），

两边积分得 $S(x)-S(0)=-\ln(1-\frac{x}{2})$，又 $S(0)=0$，当 $x=-2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

当 $x=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以

$s(x)=-\ln(1-\frac{x}{2})$，（$-2\le x<2$），令 $x=-2$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots=\ln 2$$

4．求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的和．

解：利用 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x, x\in(-\infty,+\infty)$，取 $x=1$，有 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$．又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$
$$=e+e=2e.$$

同步练习 77（A）

学号____________姓名____________班序号_______

主要内容：初等函数的幂级数展开式.

计算题

1．利用 e^x 的幂级数展开式，将函数 $f(x)=x(e^{2x}-1)$ 展开为 x 的幂级数（指出收敛区间）.

解： $e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$,（$-\infty<x<+\infty$）.

$$f(x)=x(e^{2x}-1)$$
$$=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n-1\right)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n$$

（$-\infty<x<+\infty$）.

2. 将函数 $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ 展开为 x 的幂级数.

解： $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ （$-1<x<1$），

两边求导得 $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ （$-1<x<1$），

所以 $\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ （$-1<x<1$）.

3. 将 $\sin^2 x$ 展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间.

解：由 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$ 得

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}2^{2n-1}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty).$$

4. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

解：利用 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x-3}{3})}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-3}{3})^n$$，且

$\frac{x-3}{3}\in(-1,1)$，即

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,\ x\in(0,6).$$

5. 将函数 $f(x)=\ln(3x-x^2)$ 在 $x=1$ 处展开成幂级数.

解：函数

$$f(x)=\ln(3x-x^2)=\ln x+\ln(3-x)$$
$$=\ln[1+(x-1)]+\ln[2-(x-1)]$$
$$=\ln[1+(x-1)]+\ln 2+\ln[1-\frac{x-1}{2}]$$
$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$$
$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}-\frac{1}{2^n}\right]\cdot\frac{(x-1)^n}{n}.$$

使上式成立的 x 应满足

$$-1<x-1\le 1,$$

即 $0<x\le 2$.

同步练习 78（A）

学号____________姓名___________班序号______

主要内容：习题课，主要包括幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域，简单幂级数的和函数的求法以及初等函数的幂级数展开式.

计算题

1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$ 的收敛区间与和函数.

解：$a_n=\frac{n+1}{3^n}$，

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{n+1}=\frac{1}{3},$$

收敛半径为 $R=3$，收敛区间为 $\left(-3,\ 3\right)$；

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^n}=\frac{3x}{3-x}$，（$-3<x<3$ ）

两边求导得：$S\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$

$$=\left(\frac{3x}{3-x}\right)'=\frac{9}{\left(3-x\right)^2},x\in\left(-3,3\right).$$

2. 利用 e^x 的幂级数展开式，将函数 $f(x)=e^{2x}(e^x+1)$ 展开为 x 的幂级数（指出收敛区间）.

解：$f(x)=e^{3x}+e^{2x}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n!}x^n,\quad -\infty<x<+\infty.$$

3. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}x^n$，求其收敛区间以及收敛区间上的和函数.

解：收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n}=3,$$

所以收敛区间 $(-3,3)$.

令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}x^n,x\in(-3,3),$

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-x}{3})^{n-1}=\frac{1}{3+x},$$

两边积分，得 $\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{3+x}dx,$ 由于 $s(0)=0,$ 即

$$s(x)=\ln\frac{3+x}{3},x\in(-3,3).$$

4. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数，并指明收敛区间.

解：$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1-x}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n,$$

由 $\begin{cases}-1<\frac{x}{2}<1\\-1<x<1\end{cases}\Rightarrow -1<x<1$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n,\quad x\in(-1,1).$$

同步练习 77（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 77(A).

计算题

1．利用 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式，将函数 $f(x)=x\ln(1+2x)$ 展开为 x 的幂级数，并指出收敛域.

解：由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},x\in(-1,1]$

$$f(x)=x\ln(1+2x)=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n}x^{n+1}.$$

由 $-1<2x\le 1$，所以 $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$，故

$$f(x)=x\ln(1+2x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n}x^{n+1},-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}.$$

2．将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

解：

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2},$$

其中

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+(x+4)}=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}},$$
$$=\frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{3})^n,x\in(-7,-1).$$

同理 $\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x+4}{2})^n,x\in(-6,-2).$

于是 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n,$

$x\in(-6,-2).$

3．将函数 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解：因为

$$f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\arctan x,$$

而 $\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},-1\le x\le 1.$

对 $f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\arctan x$

积分可得 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)},-1\le x\le 1.$

4．把级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\cdot 2^{2n-2}}x^{2n-1}$ 的和函数展开成 $x-1$ 的幂级数.

解：容易求得级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，设级数的和函数为 $s(x)$，则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\cdot 2^{2n-2}}x^{2n-1}$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}$$
$$=2\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{1+(x-1)}{2}$$
$$=2\left(\sin\frac{1}{2}\cos\frac{x-1}{2}+\cos\frac{1}{2}\sin\frac{x-1}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$$
$$+2\cos\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n-1},x\in R.$$

同步练习 78（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 78(A).

一．填空题

1. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 当 $x=-5$ 时条件收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=$ __6__.

2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2}$ 在 $(-2,2)$ 上的和函数 $s(x)=$ __$\frac{2x}{2-x}$__.

二．计算题

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的和函数.

解： 容易求出此级数的收敛半径为1. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

由第 2 题知

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

即

$$s(x)=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

2. 利用 e^x 的幂级数展开式，将函数 $f(x)=\frac{e^{3x}+1}{e^x}$ 展开为 x 的幂级数并指出收敛区间.

解：

$$f(x)=e^{2x}+e^{-x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{n!}\ x^n, (-\infty<x<+\infty).$$

3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数，并求数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$ 的和.

解：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ （$-1<x<1$），

两边积分，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \arctan x, \quad (-1<x<1),$$

当 $x=\pm1$ 时，$\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 都收敛，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \arctan x \quad (-1\le x\le 1),$$

令 $x=1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots = \frac{\pi}{4}.$$

同步练习 79（A）

学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿班序号＿＿＿＿

主要内容：函数的傅里叶（Fourier）系数与傅里叶级数，狄利克雷（Dirichlet）定理，函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数，函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的正弦级数和余弦级数．

一．填空题

1．设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases},$$

则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\dfrac{\pi^2}{2}}$．

2．设函数 $f(x)=\pi x+x^3\ (-\pi\le x\le\pi)$ 的傅里叶级数展开式 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 $a_n=\underline{\quad 0\quad}$．

二．计算题

1．已知以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\le 0,\\ -x+1, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

试写出 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的和函数 $s(x)$ 的表达式.

解：由狄利克雷（Dirichlet）定理，

当 $-\pi<x<0$ 时，$s(x)=f(x)=x$；

当 $x=0$ 时，$s(x)=\dfrac{1}{2}\big(f(0-0)+f(0+0)\big)=\dfrac{1}{2}$；

当 $0<x<\pi$ 时，$s(x)=f(x)=-x+1$；

当 $x=\pi$ 时，

$$\begin{aligned}s(x)&=\frac{1}{2}\big(f(\pi-0)+f(\pi+0)\big)\\&=\frac{1}{2}\big(f(\pi-0)+f(-\pi-0)\big)=-\pi+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

综上，和函数 $s(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ -x+1, & 0<x<\pi,\\ -\pi+\dfrac{1}{2}, & x=\pi.\end{cases}$

2．设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，求 $f(x)$ 的傅里叶级数，其中 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

解：$f(x)$ 在点 $x=(2k+1)\pi,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续，因此，$f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x=(2k+1)\pi$ 处收敛于 $\dfrac{-\pi}{2}$，在连续点 $x\ne(2k+1)\pi$ 处收敛于 $f(x)$，傅里叶系数就算如下：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{2}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

所以

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right),(x\ne(2k+1)\pi).$$

同步练习 80（A）

学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿班序号＿＿＿＿

主要内容：无穷级数综合练习，主要包括：常数项级数敛散性，幂级数的和函数，函数展开成幂级数，傅里叶级数等内容.

一．选择题

1．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，k 为非零常数，则下列叙述一定正确的是（ D ）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+v_n\right)$ 收敛.　(B) $\lim_{n\to\infty} v_n=0$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 发散.　(D) $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

2．下列常数项级数收敛的是（ B ）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n}$.　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$.

3．设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在一个周期内，$f(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi<x\le 0 \\ x-1, & 0<x\le\pi \end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x=1$ 处收敛于（ B ）.

(A) -1.　(B) 0.　(C) 1.　(D) $\frac{1}{2}$.

二．填空题

1．数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 的和 $s=$ $\underline{\ 1\ }$.

2．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$ 的收敛半径为 $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$.

3．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}$ 在收敛区间 $(-4,4)$ 上的和函数 $s(x)=$ $\underline{\ \frac{1}{4-x}\ }$.

三．计算题

1．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 的敛散性.

解：由正项级数比较审敛法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=\frac{2}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 收敛.

2．判别交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 是否收敛？如果收敛，通过推导，指出是绝对收敛还是条件收敛.

解：$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，且 u_n 单调递减，由莱布尼茨审敛法知，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 收敛；当 $n\to\infty$ 时，

$$\left|(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|$ 发散；故原级数条件收敛.

同步练习 79（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 7(A).

一．计算题

1．设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x^2, & 0\le x<\pi\end{cases}$，求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解：$f(x)$ 在点 $x=(2k+1)\pi,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续，因此，$f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x=(2k+1)\pi$ 处收敛于 $\frac{\pi^2}{2}$，在连续点处收敛于 $f(x)$，傅里叶系数就算如下 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}\,x=\frac{\pi^2}{3}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}\,x=(-1)^n\frac{2}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}\,x$$
$$=-\frac{(-1)^n}{n}\pi+\frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1],$$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2}{n^2}\cos nx\right.$$

所以 $\left.-\left\{\frac{(-1)^n}{n}\pi+\frac{2}{n^3\pi}\left[1-(-1)^n\right]\right\}\sin nx\right),$

$$\left(x\neq(2k+1)\pi\right).$$

2．将函数 $f(x)=1-\frac{x}{\pi}\left(0\le x\le\pi\right)$ 展开成以 2π 为周期的余弦级数．设此级数的和函数为 $s(x)$，求 $s(12)$.

解：做偶延拓 $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{\pi}, & 0\le x<\pi\\ 1+\frac{x}{\pi}, & -\pi\le x<0\end{cases}$，

并定义

$s(x+2n\pi)=s(x),(-\pi\le x\le\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

，则 $b_n=0$，$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}\,x=1,$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}\,x=\frac{2}{(n\pi)^2}[1-(-1)^n]$，又因 $s(x)$ 处处连续，故

$$s(x)=\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}\cos nx\,.$$

$$s(12)=s(12-4\pi)=1+\frac{12-4\pi}{\pi}\,.$$

二．证明题

设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，证明 $f(x)$ 的傅里叶系数满足 $a_0=a_n=b_n=0$.

证明：$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}\,x,$

对定积分 $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 做换元 $x=t+\pi$，得

$$\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\pi}^{0}f(t+\pi)\,\mathrm{d}(t+\pi)$$
$$=\int_{-\pi}^{0}-f(t)\,\mathrm{d}\,t=-\int_{-\pi}^{0}f(t)\,\mathrm{d}\,x,$$

所以 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\,\mathrm{d}\,x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\,\mathrm{d}\,x=0$，

同理可证：$a_n=b_n=0$.

同步练习 80（B）

学号____________姓名__________班序号_______

主要内容：参见同步练习 80(A).

1．判别交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^3+1}$ 是否收敛?如果收敛，通过推导，指出是绝对收敛还是条件收敛.

解：对于正项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{n^3+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1},$$

通项 $\dfrac{n}{n^3+1}\le\dfrac{n}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，根据正项级数比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^3+1}\right|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^3+1}$ 绝对收敛.

2．求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛区间以及和函数.

解：收敛区间 $x\in(-1,1)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，

则 $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2}$，

$$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

且 $S(0)=0$，得 $S(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$.

3．将函数 $f(x)=x\left(e^{2x}-1\right)$ 展开为 x 的幂级数（指出收敛区间）.

解：由 $e^{2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}x^n$

$(-\infty<x<+\infty)$，

$$f(x)=x\left(e^{2x}-1\right)=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n-1\right)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n\ (-\infty<x<+\infty).$$

4．证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}\sin(n!)$ 绝对收敛.

证明: $0\le\left|\dfrac{2^n n!}{n^n}\sin(n!)\right|\le\dfrac{2^n n!}{n^n}=u_n$，

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{2^n n!}{n^n}\sin(n!)\right|$ 收敛，

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}\sin(n!)$ 绝对收敛.

同步测试（七）

学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿班序号＿＿＿＿

一、填空题（本题有 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1．设曲线 $L: x^2+y^2=1$，则曲线积分 $\oint_L (x-y)^2 \mathrm{d}s =$ ＿＿2π＿＿.

2．在全平面上 $(axy+y)\mathrm{d}x+(bx+x^2)\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程，则常数 $a+b=$ ＿3＿.

3．设球面 Σ： $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的质量面密度 $\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$，则球面构件的质量为＿＿$4\pi$＿＿.

4．向量场 $\vec{F}=\left\{e^z\cos x, xy^2z, e^z\sin x\right\}$ 的散度 $\mathrm{div}\vec{F}=$ ＿＿$2xyz$＿＿.

5．无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$ 的和 $s=$ ＿＿$\dfrac{3}{2}$＿＿.

6．若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 当 $x=-5$ 时条件收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 $R=$ ＿6＿.

二、单项选择题（本题有 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．设 Σ 为平面 $z=1$（$0\le x\le 1, 0\le y\le 2$）的下侧，则下列结论中**错误**的是（ C ）.

A. $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$； B. $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$；

C. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2$；D. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2$.

2．下列常数项级数收敛的是（D）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$； B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$； D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

3．设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛（$u_n>0$），k 为任意常数，则下列结论中不一定正确的是（ A ）.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$； B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 收敛；

C. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$； D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$ 发散.

4．设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在一个周期内，$f(x)=\begin{cases}x^2-1, -\pi<x\le 0\\ x^2+1,\ 0<x\le\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x=0$ 处收敛于（B）.

A. -1； B. 0； C. 1； D. 2.

5．设曲线构件 L 上任意一点处的质量密度为 $\rho(x,y)$，且该曲线构件的质量为 m，质心坐标为 $(1,2)$，则 $\int_L (1+x+y)\rho(x,y)\mathrm{d}s=$（D）.

A. m； B. $2m$； C. $3m$； D. $4m$.

三、计算题（本题有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1．计算第一类曲线积分 $I=\int_L (y-x)\mathrm{d}s$，其中 L 为 $y=2x$ 上点 $(0,0)$ 与点 $(2,4)$ 之间的直线段.（6 分）

解：曲线 L ： $y=2x$， $0\le x\le 2$，

$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{5}\,\mathrm{d}x$，

$$I=\int_0^2\sqrt{5}\;x\,\mathrm{d}x=2\sqrt{5}\ .$$

2．利用格林公式，计算曲线积分 $I=\int_L(xy^2+3)\mathrm{d}x+(x^2y+4x)\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$ 的下半部分从 $A(-1,0)$ 到 $B(1,0)$ 的一段弧.（**6 分**）

解：取 $L_1: y=0$， $x{:}1\to -1$，

$$P=xy^2+3\,,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2xy,$$

$$Q=x^2y+4x\,,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy+4,$$

$$\oint_{L+L_1}(xy^2+3)\mathrm{d}x+(x^2y+4x)\mathrm{d}y=\iint_D 4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi,$$

$$\int_{L_1}(xy^2+3)\mathrm{d}x+(x^2y+4x)\mathrm{d}y=\int_1^{-1}3\mathrm{d}x=-6\ ,$$

所以 $I=2\pi+6$.

3．判别交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}$ 是否收敛？如果收敛，通过推导，指出是绝对收敛还是条件收敛.（**6 分**）

解：对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}$，令

$u_n=\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，且 $\{u_n\}$ 单调递减，由莱布尼茨审敛法知，交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}$ 收敛；又

$\left|(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}\right|=\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}>\dfrac{1}{n}$，故

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}\right|$ 发散，所以交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n}$ 条件收敛.

4．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)x^n}{3^n}$ 的收敛区间与和函数.（**6 分**）

解： $a_n=\dfrac{n+1}{3^n}$，

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3^{n+1}}\times\dfrac{3^n}{n+1}=\dfrac{1}{3}$，收敛半径为 $R=3$，收敛区间为 $\left(-3,\ 3\right)$；因为

$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{3^n}=\dfrac{3x}{3-x}$，（$-3<x<3$）

两边求导得：$S\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)x^n}{3^n}$

$$=\left(\frac{3x}{3-x}\right)'=\frac{9}{\left(3-x\right)^2},x\in\left(-3,3\right)\ .$$

5．利用 e^x 的幂级数展开式，将函数 $f(x)=e^{2x}(e^x+1)$ 展开为 x 的幂级数（指出收敛区间）.（**6 分**）

解： $f(x)=e^{3x}+e^{2x}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n!}x^n\quad(-\infty<x<+\infty).$$

四、应用题（本题有 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．试利用第二类曲线积分，求质点在平面力场 $\vec{F}(x,y)=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ 作用下沿抛物线 $L:y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 移动到点 $(1,1)$ 所做的功 W 的值.（**7 分**）

解： $L:y=x^2,x:0\to 1$

$$W=\int_L(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[x-x^2+2x(x+x^2)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(x+x^2+2x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

2．利用第一类曲面积分，计算旋转抛物面 $\Sigma:z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ 位于 $0\le z\le 2$ 部分图形的面积.（**7 分**）

解： Σ： $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$，

$D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$， $z'_x=x$， $z'_y=y$，

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$A=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho=\frac{2\left(5\sqrt{5}-1\right)}{3}\pi$$

3．设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+z^3\,\vec{k}$，试利用高斯公式，计算该向量场 $\vec{F}$ 穿过圆柱体 $\Omega: x^2+y^2\le 1$，$0\le z\le 1$ 的全表面流向外侧的通量 Φ．（7 分）

解：通量 $\Phi=\oiint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

由高斯公式可得

$$\Phi=\iiint\limits_{\Omega}3z^2\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 3z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 3\pi z^2\mathrm{d}z=\pi\ .$$

（或 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^1 3z^2\mathrm{d}z=\pi$ ）

五、证明题（本题有 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1．证明曲线积分 $I=\int_L\dfrac{-y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2}$ 在上半平面（ $y>0$ ）内与积分路径无关．（5 分）

证明： $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},\ Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，因为在上半平面（ $y>0$ ）内 $\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 连续，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

所以曲线积分 $I=\int_L\dfrac{-y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y}{x^2+y^2}$ 在上半平面（ $y>0$ ）内与积分路径无关．

2．证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}\sin(n!)$ 绝对收敛．（5 分）

证明: $0\le\left|\dfrac{2^n n!}{n^n}\sin(n!)\right|\le\dfrac{2^n n!}{n^n}=u_n$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{2^n n!}$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{2}{e}<1$ 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 收敛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{2^n n!}{n^n}\sin(n!)\right|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}\sin(n!)$ 绝对收敛．

同步测试（八）

学号____________姓名__________班序号_______

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设曲线 $L: x^2+y^2=1$ 上任意一点处的质量密度为 $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，则该曲线构件的质量 $M=$ $\underline{\ 2\pi\ }$.

2. 在全平面上 $(x+3y)dx+(kx+y)dy=0$ 为全微分方程，则常数 $k=$ $\underline{\ 3\ }$.

3. 向量场 $\vec{F}=\left\{e^z\cos x,\ xy^2z,\ e^z\sin x\right\}$ 的散度 $div\vec{F}=$ $\underline{\ 2xyz\ }$.

4. 设曲面 Σ：$x^2+y^2+z^2=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(1+x-2y)dS=$ $\underline{\ 4\pi\ }$.

5. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 的和 $s=$ $\underline{\ 1\ }$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设有向曲线 L 为 $y=x^2$，从点 $(1,1)$ 到点 $(0,0)$，则 $\int_L f(x,y)dy=$（ C ）.

A. $\int_1^0 f(x,x^2)dx$；

B. $\int_0^1 2xf(x,x^2)dx$；

C. $\int_1^0 f(\sqrt{y},y)dy$；

D. $\int_0^1 f(\sqrt{y},y)dy$.

2. 设曲面 Σ 质量分布均匀，且曲面 Σ 的面积 $A=2$，$\iint\limits_{\Sigma}xdS=0$，$\iint\limits_{\Sigma}ydS=2$，$\iint\limits_{\Sigma}zdS=4$，则曲面 Σ 的质心是（ A ）.

A. $(0,1,2)$；　　B. $(2,1,0)$；

C. $(1,0,2)$；　　D. $(1,2,0)$.

3. 设曲面 Σ 为 $z=2$（$x^2+y^2\le 1$）的下侧，则下列结论中**错误**的是（ B ）.

A. $\iint\limits_{\Sigma}zdxdy=-2\pi$；　B. $\iint\limits_{\Sigma}zdxdy=2\pi$；

C. $\iint\limits_{\Sigma}zdydz=0$；　D. $\iint\limits_{\Sigma}zdzdx=0$.

4. 设数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln a)^n$ 收敛，则常数 a 所在的区间是（ C ）.

A. $(0,e)$；　　B. $(0,1)$；

C. (e^{-1},e)；　　D. $(0,e^{-1})$.

5. 下列正项级数中收敛的是（ D ）.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n}$；　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$；

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$；　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$.

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在一个周期内，$f(x)=\begin{cases}x-1, & -\pi<x\le 0\\ x+1, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x=0$ 处收敛于（ B ）.

A. -1；　B. 0；　C. 1；　D. $\frac{1}{2}$.

三、（5 分）计算曲线积分 $\int_L x^2yds$，其中 L 为连接两点 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 的直线段.

解：L 的方程为 $y=1-x$　（$0\le x\le 1$），

$y'=-1$，

$$\int_L x^2yds=\int_0^1 x^2(1-x)\sqrt{2}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1(x^2-x^3)dx=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

四、（7 分）验证平面力场

$\vec{F}(x,y)=\cos x\sin y\,\vec{i}+\sin x\cos y\,\vec{j}$ 所做的功与路径无关，并求质点在力 $\vec{F}$ 的作用下沿直线 L 从点 $(0,0)$ 移动到点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 所做的功 W 的值.

解： 功

$$W=\int_L \cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy$$

$P=\cos x\sin y$, $Q=\sin x\cos y$，因为

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\cos x\cos y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以力所做的功 W 与路径无关 L 的方程为 $y=x$， x 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$，

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\sin x\,dx=1.$$

或 L 为折线 $(0,0)\to(\dfrac{\pi}{2},0)\to(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy=1$$

五、（7 分）利用格林公式计算曲线积分 $\int_L(2xe^y+1)dx+(x^2e^y+x)dy$，其中曲线 L 为圆 $x^2+y^2=1$ 的上半部分，从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$.

解： $L_1: y=0$ ， x 从 -1 到 1，

$$\oint_{L+L_1}(2xe^y+1)dx+(x^2e^y+x)dy$$

$$=\iint_D(2xe^y+1-2xe^y)d\sigma=\iint_D d\sigma=\frac{\pi}{2},$$

其中 $D: x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0$；

又 $\int_{L_1}(2xe^y+1)dx+(x^2e^y+x)dy$，

$$=\int_{-1}^{1}(2x+1)dx=2,$$

所以

$$\int_L(2xe^y+1)dx+(x^2e^y+x)dy=\frac{\pi}{2}-2.$$

六、（5 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z^2dS$，其中 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ （$0\le z\le 1$）.

解： $z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$dS=\sqrt{2}dxdy$， $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

$$\iint\limits_{\Sigma} z^2dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy,$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

七、（6 分）利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} y^2dydz + x^2dzdx + z^2dxdy$ ，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$， $z=3$ 所围成的圆柱体 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解： 由高斯公式可得

$$\oiint\limits_{\Sigma} y^2dydz + x^2dzdx + z^2dxdy = \iiint\limits_{\Omega} 2zdv$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^3 2zdz = 9\pi ,$$

其中 $\Omega: x^2+y^2 \le 1 , 0 \le z \le 3$.

八、（5 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x-1)^n$ 的收敛区间.

解： $a_n = \frac{n}{3^n}$ ，

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3} ,$$ 幂级数的收敛半径为

$$R = \frac{1}{\rho} = 3 ,$$

解 $|x-1| < 3$ ，得幂级数的收敛区间为 $(-2, 4)$.

九、（7 分）判别交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$ 是否收敛？如果收敛，通过推导，指出是绝对收敛还是条件收敛.

解： $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ ，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$ ，且 u_n 单调递减，由莱布尼茨审敛法知，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$ 收敛;

当 $n\to\infty$ 时，

$$\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})\right| = \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} ,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})\right|$ 发散；

所以交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\frac{1}{n})$ 条件收敛.

十、（9 分） 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数，并求数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$ 的和.

解： $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$ （$-1<x<1$），

两边积分，得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x$ （$-1<x<1$），

当 $x=\pm 1$ 时，$\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 都收敛，

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x$ （$-1\le x\le 1$），令 $x=1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

十一、（6 分） 利用 e^x 的幂级数展开式，将函数 $f(x)=x(e^{2x}-1)$ 展开为 x 的幂级数（指出收敛区间）.

解： $e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$ （$-\infty<x<+\infty$），

$$f(x)=x(e^{2x}-1)$$

$$=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n-1\right)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n \quad (-\infty<x<+\infty).$$

十二、（5 分） 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

证明：$\left|\frac{a_n}{n}\right|\le\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$，

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$ 收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.