数值积分 (Quadrature)

张晓平

2018 年 12 月 10 日

武汉大学数学与统计学院

Table of contents

简介

简介

定义：Newton-Leibniz 公式

对于定积分 $I = \int_a^b f(x)\,dx$，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx \ = \ F(b) - F(a).$$

简介

实际计算中，常遇到如下情况:

1. $f(x)$ 形式复杂，求原函数非常困难。

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

2. $f(x)$ 的原函数不能用初等函数形式表示。

$$f(x)=\frac{1}{\ln x},\quad e^{-x^2},\quad \sin x^2,\quad \frac{\sin x}{x}$$

3. $f(x)$ 虽有初等函数表示的原函数，但其原函数表示形式相当复杂。

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}$$

4. $f(x)$ 本身没有解析表达式，其函数关系由表格或图像给出，如实验或测量数据。

以上情况的定积分都不能用 Newton-Leibniz 公式直接计算，因此有必要研究定积分的数值计算问题。

Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式

数值积分的基本思想

数值积分的基本思想

定理：积分中值定理

对于连续函数 $f(x)$，有

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$

该定理没有告诉 ξ 的具体位置，从而难以准确计算 $f(\xi)$ 的值。

数值积分的基本思想

定理：积分中值定理

对于连续函数 $f(x)$，有

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$

该定理没有告诉 ξ 的具体位置，从而难以准确计算 $f(\xi)$ 的值。

通常称 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均高度。若能对 $f(\xi)$ 提供一种近似，就能得到对应的数值积分公式。

数值积分的基本思想

定理：积分中值定理

对于连续函数 $f(x)$，有

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi),\quad \xi\in[a,b].$$

该定理没有告诉 ξ 的具体位置，从而难以准确计算 $f(\xi)$ 的值。

通常称 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均高度。若能对 $f(\xi)$ 提供一种近似，就能得到对应的数值积分公式。

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)f(a),\qquad \Rightarrow \text{左矩形公式} \tag{1}$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)f(b),\qquad \Rightarrow \text{右矩形公式} \tag{2}$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)f(\frac{a+b}{2})\qquad \Rightarrow \text{中矩形公式} \tag{3}$$

数值积分的基本思想

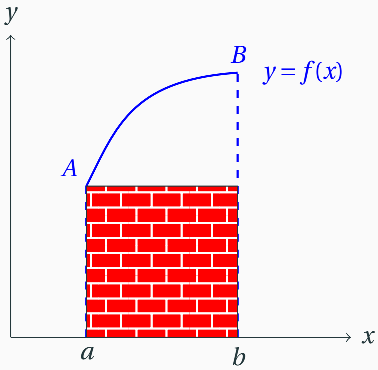


图 1: 左矩形公式

数值积分的基本思想

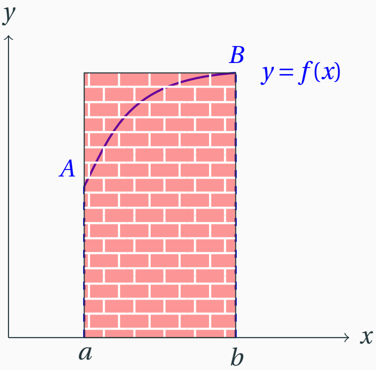


图 **2:** 右矩形公式

数值积分的基本思想

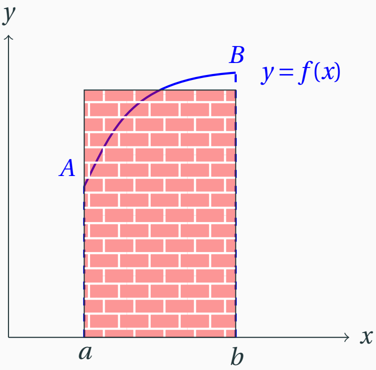


图 3: 中矩形公式

数值积分的基本思想

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内 $n+1$ 个节点 x_i 处的高度为 $f(x_i)$，可通过加权平均的方法近似地得到平均高度 $f(\xi)$，从而得到求积公式

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \tag{4}$$

其中x_i 为求积节点，A_i 为求积系数。

称

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

为求积公式 (4) 的截断误差。

数值积分的基本思想

以中矩形公式为例，设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，即

$$\int_a^x f(s)\,ds = F(x),$$

由 Taylor 展开可知

$$\int_a^{a+h} f(s)\,ds = F(a+h) = F(a)+F'(a)h+F''(a)\frac{h^2}{2}+F'''(a)\frac{h^3}{6}+O(h^4), \quad h=b-a.$$

由 $F(x)$ 的定义知 $F(a)=0, F'(a)=f(a), F''(a)=f'(a), F'''(a)=f''(a)$，从而有

$$\int_a^{a+h} f(s)\,ds = 0+f(a)h+f'(a)\frac{h^2}{2}+f''(a)\frac{h^3}{6}+O(h^4).$$

数值积分的基本思想

以中矩形公式为例，设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，即

$$\int_a^x f(s)\,ds = F(x),$$

由 Taylor 展开可知

$$\int_a^{a+h} f(s)\,ds = F(a+h) = F(a)+F'(a)h+F''(a)\frac{h^2}{2}+F'''(a)\frac{h^3}{6}+O(h^4), \quad h=b-a.$$

由 $F(x)$ 的定义知 $F(a)=0, F'(a)=f(a), F''(a)=f'(a), F'''(a)=f''(a)$，从而有

$$\int_a^{a+h} f(s)\,ds = 0+f(a)h+f'(a)\frac{h^2}{2}+f''(a)\frac{h^3}{6}+O(h^4).$$

而

$$hf(a+\frac{h}{2}) = h\left[f(a)+f'(a)\frac{h}{2}+f''(a)\frac{h^2}{8}+O(h^3)\right]$$

于是

$$\left|\int_a^{a+h} f(s)\,ds - hf(a+\frac{h}{2})\right| = \frac{h^3}{24}f''(a)+O(h^4) = O(h^3).$$

Newton-Cotes 公式

插值型求积公式

Newton-Cotes 公式

设 $[a,b]$ 上的节点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i),\quad l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

用 $L_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似函数有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i)\,dx = \sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b l_i(x)\,dx\right)f(x_i). \end{aligned}$$

记 $A_i=\int_a^b l_i(x)\,dx$，则有插值型求积公式

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中 A_i 只与插值节点 x_i 有关，而与被积函数 $f(x)$ 无关。

Newton-Cotes 公式

上述求积公式的截断误差为

$$
\begin{aligned}
R_n(f) &= \int_a^b [f(x) - L_n(x)]\,dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)\,dx
\end{aligned}
$$

其中

$$
\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)
$$

Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a,b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0,1,\cdots,n)$， $h = \dfrac{b-a}{n}$。

Newton-Cotes 公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a,b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0,1,\cdots,n)$， $h = \dfrac{b-a}{n}$。作变量替换 $x = a + th$，则

$$
\begin{aligned}
A_i &= \int_a^b \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx = h\int_0^n \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}\,dt \\
&= \frac{b-a}{n}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{j=0,j\neq i}^{n} (t-j)\,dt
\end{aligned}
$$

Newton-Cotes 公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a,b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$， $h = \dfrac{b-a}{n}$。作变量替换 $x = a + th$，则

$$
\begin{aligned}
A_i &= \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}\, dt \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (t-j)\, dt
\end{aligned}
$$

记

$$
C_i^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (t-j)\, dt \quad \Rightarrow \quad A_i = (b-a) C_i^{(n)}
$$

Newton-Cotes 公式

在插值型求积公式中，取等距节点，即将 $[a,b]$ 作 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0,1,\cdots,n)$， $h = \dfrac{b-a}{n}$。作变量替换 $x = a + th$，则

$$
\begin{aligned}
A_i &= \int_a^b \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx = h\int_0^n \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}\,dt \\
&= \frac{b-a}{n}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{j=0,j\neq i}^{n}(t-j)\,dt
\end{aligned}
$$

记

$$
C_i^{(n)} = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{j=0,j\neq i}^{n}(t-j)\,dt \quad \Rightarrow \quad A_i = (b-a)C_i^{(n)}
$$

于是得到Newton-Cotes 求积公式

$$
I = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)
$$

$C_i^{(n)}$ 成为 Cotes 系数。

Newton-Cotes 公式

定理：Cotes 系数 $C_i^{(n)}$

1 对称性:

$$C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$$

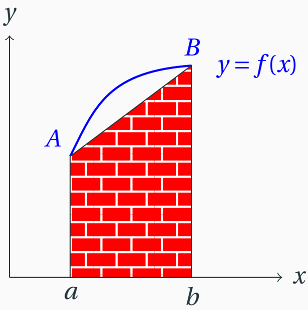
2

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} = 1$$

- 梯形公式 ($n=1$, Trapezoidal rule)

$$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$



Newton-Cotes 公式

- 辛普森公式 ($n=2$, Simpson rule)

$$C_0^{(2)} = C_2^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)\,dt = \frac{1}{6}, \quad C_1^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 t(t-2)\,dt = \frac{4}{6}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

- 辛普森 3/8 公式 ($n=3$, Simpson-3/8 rule)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

- $n=4$ 柯特斯公式 ($n=4$, Cotes rule)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{90}\left[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right]$$

Newton-Cotes 公式

n	$C_i^{(n)}$
1	$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}\quad\frac{4}{6}\quad\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{8}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{1}{8}$
4	$\frac{7}{90}\quad\frac{32}{90}\quad\frac{12}{90}\quad\frac{32}{90}\quad\frac{7}{90}$
5	$\frac{19}{288}\quad\frac{75}{288}\quad\frac{50}{288}\quad\frac{50}{288}\quad\frac{75}{288}\quad\frac{19}{288}$
6	$\frac{41}{840}\quad\frac{216}{840}\quad\frac{27}{840}\quad\frac{272}{840}\quad\frac{27}{840}\quad\frac{216}{840}\quad\frac{41}{840}$
7	$\frac{751}{17280}\quad\frac{3577}{17280}\quad\frac{1323}{17280}\quad\frac{2989}{17280}\quad\frac{2989}{17280}\quad\frac{1323}{17280}\quad\frac{3577}{17280}\quad\frac{751}{17280}$
8	$\frac{989}{28350}\quad\frac{5888}{28350}\quad\frac{-928}{28350}\quad\frac{10496}{28350}\quad\frac{-4540}{28350}\quad\frac{10496}{28350}\quad\frac{-928}{28350}\quad\frac{5888}{28350}\quad\frac{989}{28350}$

当 n 较大时，Cotes 系数变得复杂，且出现负项，计算过程的稳定性没有保证。梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式是最基本、最常用的求积公式。

Newton-Cotes 公式

定理：截断误差

1 若 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则梯形公式的截断误差为

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

2 若 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则辛普森公式的截断误差为

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

3 若 $f^{(6)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则柯特斯公式的截断误差为

$$R_4(f) = -\frac{(b-a)^7}{1013760} f^{(4)}(\xi) = -\frac{8}{495}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

以梯形公式为例:

- 由中矩形公式的误差分析可知

$$\int_a^{a+h} f(s)\,ds = 0 + f(a)h + f'(a)\frac{h^2}{2} + f''(a)\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

- 由 Taylor 展开可知

$$f(b) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + O(h^4)$$

从而有

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = f(a)h + f'(a)\frac{h^2}{2} + f''(a)\frac{h^3}{4} + O(h^4).$$

- $$\int_a^{a+h} f(s)\,ds - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -f''(a)\frac{h^3}{12} + O(h^4).$$

Newton-Cotes 公式

例

试分别用梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式计算 $I=\int_{1/2}^{1}\sqrt{x}\,dx$，并与精确解进行比较。

解：精确解为 $I=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_{0.5}^{1}=0.42096441$

1 梯形公式：

$$I\approx\frac{0.5}{2}(\sqrt{0.5}+1)\approx 0.4267767$$

2 辛普森公式：

$$I\approx\frac{0.5}{6}(\sqrt{0.5}+4\sqrt{0.75}+1)\approx 0.43093403$$

3 柯特斯公式：

$$I\approx\frac{0.5}{90}(7\sqrt{0.5}+32\sqrt{0.625}+12\sqrt{0.75}+32\sqrt{0.875}+7)\approx 0.43096407$$

复化求积公式及龙贝格求积公式

复化求积公式及龙贝格求积公式

复化求积公式

复化求积公式

定义：复化求积公式

为提高数值积分的精度，将 $[a, b]$ 等分为 n 个子区间，在每个区间上用基本求积公式，然后再累加成新的求积公式，这样既可提高结果的精度，又可使算法简便易于实现。这种求积公式称为复化求积公式。

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0,1,\cdots,n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i = 1,2,\cdots,n)$。

1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用梯形公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \equiv T_n \end{aligned}$$

$\times \frac{h}{2}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

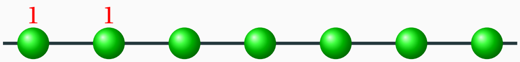
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{2}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

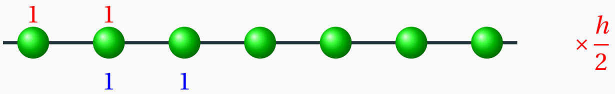
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

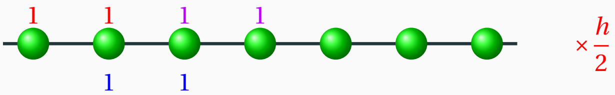
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

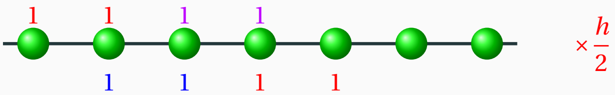
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0,1,\cdots,n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1,2,\cdots,n)$。

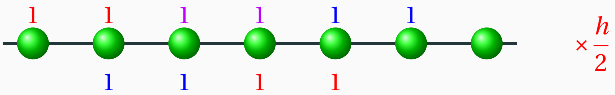
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

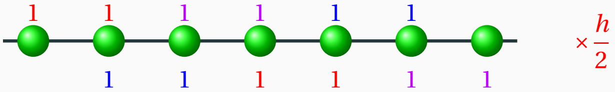
将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

1. 复化梯形公式
   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0,1,\cdots,n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i = 1,2,\cdots,n)$。

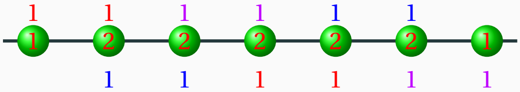
1. 复化梯形公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用梯形公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1,2,\cdots,n$$

   累加得复化梯形公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv T_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{2}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv S_n \end{aligned}$$

$\times\frac{h}{6}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

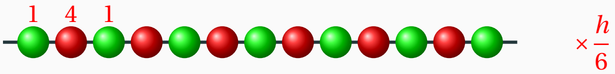
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv S_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

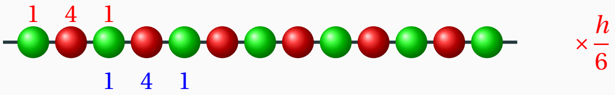
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

   $$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv S_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

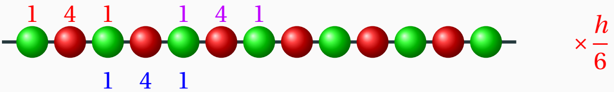
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)],\quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv S_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

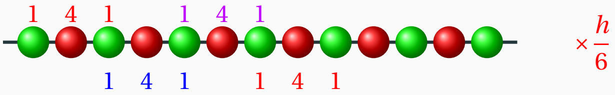
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)],\quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv S_n \end{aligned}$$



复化求积公式

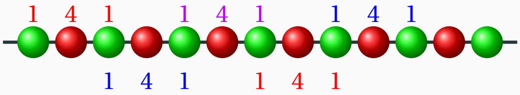
将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

1. 复化 Simpson 公式
   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right] \equiv S_n \end{aligned}$$



$\times\frac{h}{6}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$。

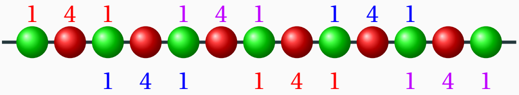
1. 复化 Simpson 公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \equiv S_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{6}$

复化求积公式

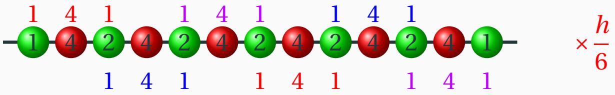
将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

1. 复化 Simpson 公式
   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用 Simpson 公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)], \quad i=1,2,\cdots,n$$

   累加得复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right] \equiv S_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

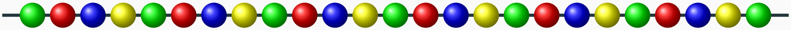
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

   $$\begin{aligned} I \quad \approx \quad & \frac{h}{90}\left[7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})\right. \\ & \left. +32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\right] \equiv C_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{90}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$， $h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

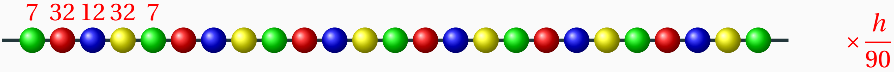
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

$$\begin{aligned} I \quad \approx \quad & \frac{h}{90}\Bigg[7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ & \qquad + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih (i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$。

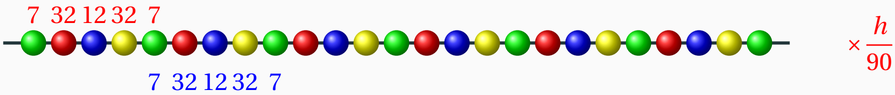
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

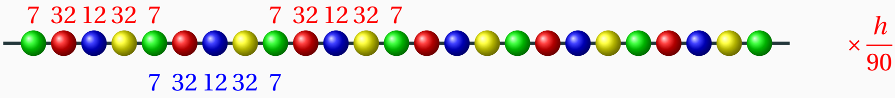
$$\begin{aligned} I \quad \approx \quad & \frac{h}{90}\Bigg[7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ & \qquad + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

1. 复化柯特斯公式
   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用柯特斯公式，有
   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$
   累加得复化柯特斯公式
   $$\begin{aligned} I \quad \approx \quad & \frac{h}{90}\left[7f(a)+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}})+12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})\right. \\ & \left. +32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}})+14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+7f(b)\right] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$。

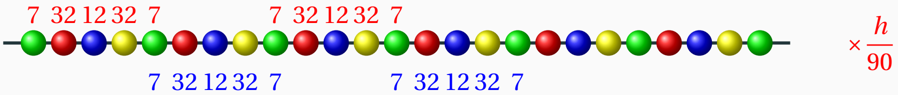
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1}) + 32f(x_{i-\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i-\frac{3}{4}}) + 7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

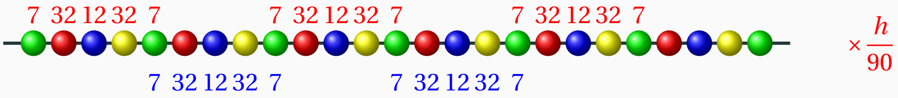
   $$\begin{aligned} I \approx \frac{h}{90}\Bigg[&7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

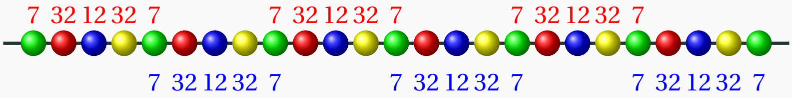
1. 复化柯特斯公式
   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用柯特斯公式，有
   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$
   累加得复化柯特斯公式
   $$\begin{aligned} I \approx \frac{h}{90}\Bigg[&7f(a)+32\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{4}})+12\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &+32\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{3}{4}})+14\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

1. 复化柯特斯公式
   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用柯特斯公式，有
   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$
   累加得复化柯特斯公式
   $$\begin{aligned} I \approx & \frac{h}{90}\left[7f(a)+32\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{4}})+12\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})\right.\\ & \left.+32\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{3}{4}})+14\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+7f(b)\right] \equiv C_n \end{aligned}$$



$\times \frac{h}{90}$

复化求积公式

将 $[a,b]$ 进行 n 等分，记节点为 $x_i = a + ih(i=0,1,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$ 称为步长，子区间为 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$。

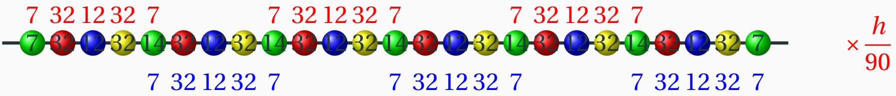
1. 复化柯特斯公式

   在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 应用柯特斯公式，有

   $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{90}[7f(x_{i-1})+32f(x_{i-\frac{1}{4}})+12f(x_{i-\frac{1}{2}})+32f(x_{i-\frac{3}{4}})+7f(x_i)],$$

   累加得复化柯特斯公式

   $$\begin{aligned} I \approx \frac{h}{90}\Bigg[&7f(a)+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{4}})+12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &+32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}})+14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+7f(b)\Bigg] \equiv C_n \end{aligned}$$



复化求积公式

定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

复化求积公式

定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

$$R_S(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

复化求积公式

定义

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，则复化梯形公式的截断误差为

$$R_T(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

$$R_S(f) = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

$$R_C(f) = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (a,b).$$

例

算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点?

复化求积公式

例

算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点？

解

由 $f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

例

算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)|\le\frac{e}{12n^2}\le\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>67.3$$

复化求积公式

例

算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)|\le\frac{e}{12n^2}\le\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68，即需 69 个节点。

例

算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点？

解

由 $f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)|\le\frac{e}{12n^2}\le\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68，即需 69 个节点。由复化 Simpson 公式的截断误差知

$$|R_S(f)|\le\frac{e}{2880n^4}\le\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>2.1$$

复化求积公式

例

算 $I=\int_0^1 e^x\,dx$，若要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算，问至少需要多少个节点?

解

由 $f(x)=f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$ 得

$$\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=e$$

由复化梯形公式的截断误差知

$$|R_T(f)|\le\frac{e}{12n^2}\le\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>67.3$$

故用复化梯形公式 n 至少取 68，即需 69 个节点。由复化 Simpson 公式的截断误差知

$$|R_S(f)|\le\frac{e}{2880n^4}\le\frac{1}{2}\times 10^{-4}\Rightarrow n>2.1$$

复化求积公式及龙贝格求积公式

变步长求积公式

变步长求积公式

将 $[a,b]n$ 等分，共 $n+1$ 个节点，复化梯形公式为

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

变步长求积公式

将 $[a,b]n$ 等分，共 $n+1$ 个节点，复化梯形公式为

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

将 $[a,b]2n$ 等分，共 $2n+1$ 个节点。为讨论二分前后两个积分值的关系，考察一个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$，其中点为 $x_{i+\frac{1}{2}}$，该子区间上二分前后两个积分值为

$$T_1 = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right], \quad T_2 = \frac{h}{4}\left[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})\right]$$

两者关系为

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h}{2}f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

累加得

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

变步长求积公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

实际计算 T_{2n} 时，T_n 为已知数据，只需累加新增节点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 的函数值 $f(x_{i+\frac{1}{2}})$，这可使计算量节约一半。

变步长求积公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

实际计算 T_{2n} 时，T_n 为已知数据，只需累加新增节点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 的函数值 $f(x_{i+\frac{1}{2}})$，这可使计算量节约一半。

常用 $T_{2n} - T_n < \epsilon$ 是否满足作为控制计算精度的条件：

1 若满足，则取 T_{2n} 为 I 的近似值

2 若不满足，则再将区间分半，直到满足精度为止。

复化求积公式及龙贝格求积公式

龙贝格求积公式

龙贝格求积公式

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a, b]$ 上变化不大，即有 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍，即

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4}$$

龙贝格求积公式

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4}\frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a, b]$ 上变化不大，即有 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍，即

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad I \approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{4}T_n \equiv \bar{T}$$

$\bar{T}$ 应当比 T_{2n} 更接近 I。

龙贝格求积公式

由复化梯形公式的截断误差可得

$$\frac{I-T_{2n}}{I-T_n}=\frac{1}{4}\frac{f''(\eta_1)}{f''(\eta_2)}$$

若 f'' 在 $[a,b]$ 上变化不大，即有 $f''(\eta_1)\approx f''(\eta_2)$，则在二分之后的误差是原先误差的 $\frac{1}{4}$ 倍，即

$$\frac{I-T_{2n}}{I-T_n}=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad I\approx\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{4}T_n\equiv\bar{T}$$

$\bar{T}$ 应当比 T_{2n} 更接近 I。易验证

$$S_n=\bar{T}$$

龙贝格求积公式

由复化 Simpson 公式逐步二分，有

$$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} = \frac{1}{16}$$

龙贝格求积公式

由复化 Simpson 公式逐步二分，有

$$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad I \approx \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n \equiv \bar{S}$$

易验证

$$C_n = \bar{S}$$

龙贝格求积公式

由复化柯特斯公式逐步二分，有

$$\frac{I - C_{2n}}{I - C_n} = \frac{1}{64}$$

龙贝格求积公式

由复化柯特斯公式逐步二分，有

$$\frac{I - C_{2n}}{I - C_n} = \frac{1}{64} \ \ \Rightarrow \ I \approx \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n \equiv R_n$$

该公式称为龙贝格公式

龙贝格求积公式

如此进行三次，便将粗糙的梯形公式逐步加工成精度较高的龙贝格公式，这种加速方法成为龙贝格算法，计算步骤如下：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\hline
T_1 & & & & & & & & \\
\downarrow & \searrow & & & & & & & \\
T_2 & \longrightarrow & S_1 & & & & & & \\
\downarrow & \searrow & & \searrow & & & & & \\
T_4 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & C_1 & & & & \\
\downarrow & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
T_8 & \longrightarrow & S_3 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & R_1 & & \\
\downarrow & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
T_{16} & \longrightarrow & S_4 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & R_2 & & \\
\hline
\end{array}
$$

例

用龙贝格算法计算 $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$，要求误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$

龙贝格求积公式

例

用龙贝格算法计算 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$

k	$n=2^k$	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	1	3			
1	2	3.1	3.133333		
2	4	3.131177	3.141569	3.142118	
3	8	3.138989	3.141593	3.141595	3.141586
4	16	3.140942	3.141593	3.141593	3.141593
5	32	3.141430	3.141593	3.141593	3.141593

高斯型求积公式

高斯型求积公式

代数精度

代数精度

定义

求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对任意次数不高于 m 次的代数多项式都准确成立，但对于 $m+1$ 次多项式不精确成立，则该求积公式具有 m 次代数精度。

代数精度

定义

求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对任意次数不高于 m 次的代数多项式都准确成立，但对于 $m+1$ 次多项式不精确成立，则该求积公式具有m 次代数精度。

由该定义可看出：求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_k f(x_k)$$

具有 m 次代数精度的充要条件是该公式对 $f(x)=1,x,\cdots,x^m$ 能准确成立，但对 $f(x)=x^{m+1}$ 不能准确成立。

代数精度

定理

含 $n+1$ 个节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的插值型求积公式的代数精度至少为 n

代数精度

定理

Newton-Cotes 公式的代数精度至少为 n。特别地，当 n 为偶数时，Newton-Cotes 公式的代数精度可以达到 $n+1$。

代数精度

定理

Newton-Cotes 公式的代数精度至少为 n。特别地，当 n 为偶数时，Newton-Cotes 公式的代数精度可以达到 $n+1$。

证明

以下验证当 $n=2k$ 时，公式对 $f(x)=x^{n+1}$ 精确成立。由误差

$$\begin{aligned}
R &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)\,dx \\
&\xlongequal{x=a+ih} h^{n+2}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\,dt \\
&\xlongequal{n=2k} h^{n+2}\int_0^{2k} t(t-1)\cdots(t-k)(t-k-1)\cdots(t-2k-1)(t-2k)\,dt \\
&\xlongequal{u=t-k} h^{n+2}\int_{-k}^{k}(u+k)(u+k-1)\cdots u(u-1)\cdots(u-k+1)(u-k)\,dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

高斯型求积公式

高斯型求积公式

高斯型求积公式

- 当节点等距时，插值型求积公式的代数精度为 n 或 $n+1$。

高斯型求积公式

- 当节点等距时，插值型求积公式的代数精度为 n 或 $n+1$。
- 若对节点适当选择，可提高插值型求积公式的代数精度。

高斯型求积公式

- 当节点等距时，插值型求积公式的代数精度为 n 或 $n+1$。
- 若对节点适当选择，可提高插值型求积公式的代数精度。

  对具有 $n+1$ 个节点的插值型求积公式，其代数精度最高可达 $2n+1$。

高斯型求积公式

定义

将 $n+1$ 个节点的具有 $2n+1$ 次代数精度的插值型求积公式为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

称为高斯型求积公式，节点 x_k 为高斯点，A_k 为高斯系数。

高斯型求积公式

以 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ 为例，一点高斯公式为中矩形公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2f(0),$$

高斯点为 $x_0 = 0$，系数为 $A_0 = 2$。

高斯型求积公式

以 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ 为例，两点高斯公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

具有三次代数精度，即要求对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 准确成立，有

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2, \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0, \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3}, \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

可解得 $x_0 = -x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$A_0 = A_1 = 1$，公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

高斯型求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt$$

对应的两点高斯型求积公式为

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a-b}{2\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right)\right]$$

高斯型求积公式

定义

点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为高斯点的充分必要条件是以这些点为零点的多项式 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 与任意次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交，即

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\,dx=0.$$

高斯型求积公式

定义

点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为高斯点的充分必要条件是以这些点为零点的多项式 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 与任意次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交，即

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\,dx=0.$$

证明

$\Rightarrow$ 设 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为插值型求积公式的高斯点，$P(x)$ 为次数不超过 n 的多项式，则 $P(x)\omega_{n+1}(x)$ 为次数不超过 $2n+1$ 的多项式。由高斯点定义知

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}A_kP(x_k)\omega_{n+1}(x_k)=0$$

高斯型求积公式

证明（续）：

$\Leftarrow$ 设 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意的次数不超过 n 的多项式正交，设 $f(x)$ 是任一次数不超过 $2n+1$ 的多项式，则必存在次数不超过 n 的多项式 $P(x), Q(x)$，使得

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + Q(x)$$

证明（续）：

$\Leftarrow$ 设 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意的次数不超过 n 的多项式正交，设 $f(x)$ 是任一次数不超过 $2n+1$ 的多项式，则必存在次数不超过 n 的多项式 $P(x), Q(x)$，使得

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + Q(x)$$

由插值型求积公式至少具有 n 次代数精度，知

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\,dx + \int_a^b Q(x)\,dx \\ &= 0 + \int_a^b Q(x)\,dx = 0 + \sum_{k=0}^{n} A_k Q(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k[P(x_k)\omega_{n+1}(x_k) + Q(x_k)] = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\end{aligned}$$

证明（续）：

于是，求积公式至少具有 $2n+1$ 次代数精度，而对于 $2n+2$ 次多项式 $f(x)=\omega_{n+1}^2(x)$，有 $\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\,dx>0$。所以，求积公式的代数精度为 $2n+1$，$x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 为高斯点。

高斯型求积公式

1. 具有 $n+1$ 个节点的插值型求积公式的代数精度最高可达到 $2n+1$，因此高斯型求积公式是代数精度最高的求积公式。
2. 定理给出了求高斯点的方法：找与任意的次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交的多项式

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

其零点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 即为高斯点。

例

证明求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{0.6}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{0.6})]$$

对于不高于 5 次的多项式准确成立，并计算 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,dx$（取 5 位有效数字）

高斯型求积公式

勒让德多项式 (Legendre polynomial)

勒让德多项式 (Legendre polynomial)

定义

以高斯点 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为零点的 n 次多项式

$$P_n(x)=\omega_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$$

勒让德多项式 (Legendre polynomial)

Legendre 多项式是 Legendre 常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]+n(n+1)P_n(x)=0$$

的解，其形式为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

如：

$$\begin{aligned}
P_1(x)&=\frac{1}{2}2x=x,\\
P_2(x)&=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2+1)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\\
P_3(x)&=\frac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}(x^4-2x^2+1)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\\
P_4(x)&=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

勒让德多项式 (Legendre polynomial)

这样，可先求 Legendre 多项式的零点即可求得高斯点 x_k，进而求出求积系数 A_k，如三点高斯型求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

勒让德多项式 (Legendre polynomial)

n	nodes	weights
1	0.0000000000	2.0000000000
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0.5773502692$	1.0000000000
3	$\pm$0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
4	$\pm$0.8611363116	0.3478548451
	$\pm$0.3399810436	0.6521451549
5	$\pm$0.9061798459	0.2369268850
	$\pm$0.5384693101	0.4786286701
	0.0000000000	0.5688888889

图 4: $[-1,1]$ 上各阶 Gauss 公式的积分点与积分系数